

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
 Д О К Л А Д Ы

LXXVIII, № 3

1984

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. ֆառուսուղար), Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Բ. ԲԱՐԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐՐԻՆԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Վ. Հ. ՂԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Վ. Գ. ՄԻՒԹԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Օ. Մ. ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Մ. Լ. ՏԻՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՖԱՆԱՐՁՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս:

Յ. Ա. ԱՄԲԱՐՇՄՅԱՆ, ակադեմիկ, Դ. Ա. ԱՐՅՄԱՆՅԱՆ, կանդ. տեխ. ռաւք (օտւ. սեքրետար), Յ. Դ. ԱՓՐԻԿՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Ա. Դ. ԲԱԲԱՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Ա. Ա. ԴԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Յ. Օ. ԿԱՅԱՐՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ (զաւ. օտւ. ռեդաքտօր), Յ. Դ. ՄԻԿԻՏԱՐՅԱՆ, շլ.-կօրր. ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Դ. Տ. ՏԱԿՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Օ. Մ. ՏԱՓՈՆԺՅԱՆ, շլ.-կօրր. ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Ա. Ա. ԴԱԼԱԼՅԱՆ, շլ.-կօրր. ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Յ. Մ. ԴԱՐԱՅԱՆ, շլ.-կօրր. ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Մ. Լ. ԴԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Յ. Յ. ՓԱՆԱՐԺՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ:



Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

էջ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

| | |
|--|-----|
| Ա. Ա. Շահինյան—Դիրիսլեի խնդրի լուծելիության մասին էվկլիդեսյան տարածության անսահմանափակ տիրույթներում և բաց ուղիղանիվանի մակերևույթների վրա | 99 |
| Լ. Ա. Շահինյան—Եռանկյունաչափական շարքերի միակութայնի մասին | 101 |
| Հ. Կ. Այդինյան—ՄՀԱ-կոդերի որոշ հատկություններ | 105 |
| Ի. Գ. Խաչատրյան—Ոչ գծային լարի հավասարման որոշ լուծումների մասին | 108 |
| Ժ. Գ. Մաքարյան, Ղ. Լ. Մովսիսյան—Դժային կոդերի կառուցման մի մոդելի մասին | 113 |

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

| | |
|---|-----|
| Ա. Գ. Գրոզդով, Վ. Բ. Կոլմանովսկի, Վ. Գ. Պոլապոլ—Անմիասեռ շերտաձև կաշվի առածից նյութից պատրաստած ձողերի կայունությունը | 117 |
|---|-----|

ԱՌՎԱԶԳԻԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

| | |
|---|-----|
| Ս. Մ. Մխիթարյան, Ռ. Ա. Թումանյան—Առաձգական հարթությանը կամայական թվով միմյանցից հավասարահաստ դասավորված օղակաձև վերորակներից բերի փոխանցման մասին | 122 |
| Վ. Գ. Մազյա, Ս. Ա. Նազարով—Բարակ սալերի խնդիրներում առաջացող Սապոնջյան-Բարուչկայի պարադոքսի վերաբերյալ | 127 |

ՖԻԶԻԿԱ

| | |
|--|-----|
| Ռ. Հ. Թաթևանյան—Բարձրհաճախային ներնստի էֆեկտը և կիսահաղորդիչների դիֆուզիոն-դրիֆտային թափանցելիությունը ջերմաստիճանի բրադիստի առկայության դեպքում | 131 |
|--|-----|

ՍԵՅՍՄՈԼՈԳԻԱ

| | |
|---|-----|
| Ս. Ռ. Ասլանյան, Ա. Ա. Կիրակոսյան, Ս. Ն. Նազարբեյյան—Հայկական ՍՍՀ տարածքի և նրան հարակից շրջանների սեյսմիկ ակտիվությունը և հնարավոր առավելագույն ուժի երկրաշարժերը | 137 |
|---|-----|

ԲԻՈՖԻԶԻԿԱ

| | |
|--|-----|
| Վ. Լ. Արվանով, Ս. Բ. Մաժինյան, Ս. Ն. Հայրապետյան—Կալիումազուրկ լուծույթի ճնշող ազդեցությունը թաղանթի թլորից կախված աղետիլիտի նային սկատասխանների վրա | 141 |
|--|-----|

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- А. А. Шагинян*—О разрешимости задачи Дирихле для гармонических функций в неограниченных областях евклидовых пространств и на открытых Римановых поверхностях 99
- Л. А. Шагинян*—О единственности тригонометрических рядов 101
- А. К. Айдинян*—Некоторые свойства кодов МДР 105
- И. Г. Хачатрян*—О некоторых решениях уравнения нелинейной струны 108
- Ж. Г. Маргарян, Г. Л. Мовсисян*—Об одном методе построения линейных кодов 113

МЕХАНИКА

- А. Д. Дроздов, В. Б. Колмановский, В. Д. Потапов*—Устойчивость стержней из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала 117

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- С. М. Мхитарян, Р. С. Туманян*—О передаче нагрузки от произвольного числа равноотстоящих друг от друга кольцеобразных накладок к упругой плоскости 122
- В. Г. Мазья, С. А. Назаров*—О парадоксе Сапонджяна—Бабушки в задачах теории тонких пластин 127

ФИЗИКА

- Р. Г. Тарханян*—Высокочастотный эффект Нернста и диэлектрическая проницаемость полупроводников при наличии градиента температуры 131

СЕЙСМОЛОГИЯ

- С. Р. Асланян, А. А. Киракосян, С. Н. Назаретян*—Сейсмическая активность и максимальные возможные землетрясения территории Армянской ССР и сопредельных районов 137

БИОФИЗИКА

- В. Л. Арвинов, С. Б. Мажинян, С. Н. Айрапетян*—О блокирующем действии бескальцевого раствора на СГ-зависимые ацетилхолиновые ответы мембраны 141

CONTENTS

MATHEMATICS

| | P. |
|--|-----|
| <i>A. A. Shahtin</i> —On solvability of the Dirichlet problem for harmonic functions in unbounded domains of Euclidian spaces and on open Riemann surfaces | 99 |
| <i>L. A. Shahinian</i> —On uniqueness of trigonometrical series | 101 |
| <i>H. K. Aldinlan</i> —On some properties of MDS codes | 105 |
| <i>I. G. Khachatryan</i> —On some solutions of the nonlinear string equation | 108 |
| <i>J. G. Murgarian, G. L. Movsisian</i> —On a method of construction of the linear codes | 113 |

MECHANICS

| | |
|--|-----|
| <i>A. D. Drosdov, V. B. Kolmanovski, V. D. Potapov</i> —Stability of bars from inhomogeneously ageing visco-elastic material | 117 |
|--|-----|

THEORY OF ELASTICITY

| | |
|--|-----|
| <i>S. M. Mkhitarian, R. S. Tumanian</i> —About the load transfer from the arbitrary number of equidistant ring-shaped stringers to the elastic plane | 122 |
| <i>V. G. Maz'ya, S. A. Nazarov</i> —On the paradox of Sapondzhyan—Babuška in problems of thin plate theory | 127 |

PHYSICS

| | |
|---|-----|
| <i>K. G. Tarkhanian</i> —High frequency Nernst effect and dielectric susceptibility of semiconductors in the presence of temperature gradient | 131 |
|---|-----|

SEISMOLOGY

| | |
|---|-----|
| <i>S. R. Aslanian, A. A. Kirakosian, S. N. Nazaretian</i> —Seismic activity and maximum possible earthquakes on the territory of the Armenian SSR and adjoining areas | 137 |
|---|-----|

BIOPHYSICS

| | |
|--|-----|
| <i>V. L. Arvanov, S. B. Majinian, S. N. Ayrapettan</i> —On the inhibitory action of K-free solution on the Cl^- -dependent acetylcholine responses of the membrane | 141 |
|--|-----|

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 17.02.1984 г., Подписано к печати 13.04.1984 г.
ВФ 04174. Бумага № 1, 70×108^{1/16}. Высокая печать. Печ. лист 3.0. Усл. печ. лист. 4.2.

Учет.-изд. 3,14 л. Тираж 415. Заказ 157. Издат. 6151

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24г, II эт., I к.

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван,
пр. Маршала Баграмяна, 24 г.

Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин

УДК 517.544

А. А. Шагинян

О разрешимости задачи Дирихле для гармонических функций в неограниченных областях евклидовых пространств и на открытых Римановых поверхностях

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР Р. А. Александряном 28/X 1982)

Вопрос о разрешимости задачи Дирихле для гармонических функций в ограниченных областях для непрерывной граничной функции рассматривался в ряде работ. В терминах емкостей окончательное решение было получено Н. Винером. Естественное обобщение этой задачи на случай неограниченных областей или разрывных граничных функций также рассматривалось во многих работах.

В настоящей заметке мы приводим описание неограниченных областей в $R^n (n \geq 2)$ и областей с некомпактным замыканием на произвольных открытых Римановых поверхностях, для которых разрешима задача Дирихле для гармонических функций с непрерывными граничными данными.

При доказательстве полученных теорем существенно используется теорема о гармонической аппроксимации с касанием ⁽¹⁾. Пусть $D \subset R^n (n \geq 2)$ произвольная область с непустой границей ∂D . Обозначим через B_n шары радиуса n с центром в начале координат, а через D_i^k компоненты с компактным замыканием множества $D \setminus B_k$. Множество $\overline{B_n \cup \{\bigcup_i D_i^n\}}$ будем называть оболочкой B_n и обозначим через $O_D(B_n)$.

Теорема 1. *Для того чтобы для всякой непрерывной на ∂D действительной функции $f(P)$ существовала гармоническая в D и непрерывная в \overline{D} функция $H(P)$ такая, что $H(P) = f(P)$ на ∂D , необходимо и достаточно совместное выполнение следующих двух условий:*

1. *все точки границы ∂D регулярны (расходится ряд Винера);*
2. *оболочки $O_D(B_n)$ компактны при всех n .*

Аналогичная задача может быть рассмотрена для произвольных открытых Римановых поверхностей. Для бордированных Римановых поверхностей эта задача была решена С. Шейнбергом ⁽²⁾. Пусть R произвольная открытая Риманова поверхность, а D область на R с непустой границей ∂D . Для произвольного нормального исчерпания $\{F_n\}$ поверхности R обозначим через $\{D_i^k\}$ компоненты с компактным замыканием множества $D \setminus F_k$. Множество $\overline{F_n \cup \{\bigcup_i D_i^n\}}$ будем назы-

вать оболочкой F_n и обозначим через $O(F_n)$. Решение задачи о разрешимости задачи Дирихле в D дает следующая

Теорема 2. Для того чтобы для всякой непрерывной на ∂D действительной функции $f(z)$ существовала гармоническая в D и непрерывная в \bar{D} функция $H(z)$ такая, что $H(z) = f(z)$ на ∂D , необходимо и достаточно, чтобы

1. все граничные точки ∂D были регулярны (достаточно, чтобы компонента границы, содержащая произвольную граничную точку, не сводилась к одной точке);

2. оболочки $O_D(F_n)$ были компактны при всяком n .

Ереванский государственный университет

Ա. Ա. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

Գիտիլիի խնդրի լուծելիության մասին էվկլիդյան տարածության անսահմանափակ տիրույթներում և բաց սիմանյան մակերևույթների վրա

Դիցուք $D \subset R^n (n \geq 2)$ կամայական տիրույթ է ոչ դատարկ եզրով ∂D , B_n -ը n շառավիղի գնդեր են, որոնց կենտրոնները համընկնում են սկզբնակետի հետ, իսկ $D \setminus B_n$ -ի կամայական փակույթ ունեցող կոմպոնենտներն են:

Նշանակենք $O_D(B_n)$ -ով $\overline{B_n \cup D}$ բազմաթիվները: Աշխատանքում ստացված հիմնական արդյունքը հետևյալն է՝

Քեորեմ: Որպեսզի ∂D -ի վրա որոշված կամայական անընդհատ $f(p)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունենա հարմոնիկ D -ում և անընդհատ \bar{D} -ում $H(p)$ ֆունկցիա այնպիսի որ, $H(p) = f(p)$, երբ $p \in \partial D$ անհրաժեշտ է և բավարար հետևյալ երկու պայմանների միաժամանակ կատարումը:

1. ∂D բոլոր կետերը ռեգուլյար են:
2. $O_D(B_n)$ -ը կոմպակտ է բոլոր n -երի համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. А. Шагинян, Мат. заметки, т. 9, вып. 2 (1971). ² S. Scheltnberg, Ann. of Math., v. 102, p. 139—141 (1975).

УДК 517.522.3

Л. А. Шагинян

О единственности тригонометрических рядов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талалянцем 11/II 1983)

Для произвольного тригонометрического ряда

$$\Omega \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

обозначим соответственно через $\{S_n(\Omega, x)\}$, $\{\sigma_n(\Omega, x)\}$ и $\{t_n(\Omega, x)\}$ частичные суммы, $(C, 1)$ и T средние ряда Ω , а через $\{S_n(f, x)\}$ — частичные суммы ряда Фурье функции f . Кроме того, пусть $\{\Omega\}^*$ — класс тех тригонометрических рядов, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$1. \lim_{k \rightarrow \infty} (|a_k| + |b_k|) = 0, \quad (1)$$

$$2. \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S_n(\Omega, x)| < +\infty \text{ на } [0, 2\pi] \quad (2)$$

за исключением, быть может, некоторого счетного множества E .

Задачи, рассматриваемые в настоящей заметке, группируются вокруг следующего вопроса: когда ряд Ω из класса $\{\Omega\}^*$ является рядом Фурье*.

Здесь основным результатом является теорема Вилле — Пуссена ((¹), с. 167; (²) с. 789).

Теорема А. Если $\Omega \in \{\Omega\}^*$ и вместе с тем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n(\Omega, x), \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(\Omega, x) \in L[0, 2\pi], \quad (3)$$

то Ω суммируется методом R п. в. на $[0, 2\pi]$ к суммируемой функции и является рядом Фурье этой функции.

Отсюда получается теорема В, которая содержит в себе классические результаты единственности Гейне — Кантора и Юнга — Бернштейна ((¹), с. 168, (³), с. 225).

Теорема В. Если тригонометрический ряд Ω сходится к нулю п. в. на отрезке $[0, 2\pi]$ и удовлетворяет условию (2), то $\Omega \equiv 0$, т. е. все коэффициенты ряда Ω равны нулю.

* Под рядом Фурье мы подразумеваем ряд Фурье — Лебега. Условия (1) и (2) сами по себе не достаточны, чтобы Ω был рядом Фурье: существует тригонометрический ряд, который сходится всюду, но не является рядом Фурье ((²), с. 123).

Следующее обобщение теоремы А принадлежит С. Банаху ((²), с. 790).

Теорема С. Если $\Omega \in \{\Omega\}^*$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\Omega, x) \geq g(x) \text{ п. в. на } [0, 2\pi], \quad (4)$$

где $g(x)$ суммируема и конечна вне E (см. (2)), то Ω есть ряд Фурье.

Отметим, что теоремы А и С в определенном смысле эквивалентны, так как из теоремы Зигмунда—Марцинкевича о пределах неопределенности тригонометрических рядов ((²), с. 868) и теоремы Фейера—Лебега сразу получается, что если Ω —ряд Фурье, то из (2) и (4) следует (3) и, таким образом, обе теоремы выделяют один и тот же класс рядов Фурье, удовлетворяющих условиям (2) и (3), ни одному из которых, вообще говоря, ряды Фурье не удовлетворяют ((²), с. 421).

Вместе с тем согласно той же теореме Зигмунда—Марцинкевича, если ряд Фурье Ω удовлетворяет условию (2), то

$$f(\Omega, x) \equiv \frac{1}{2} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\Omega, x) + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n(\Omega, x) \right\} \in L[0, 2\pi] \quad (5)$$

и естественно возникает вопрос: нельзя ли усилить теорему А, заменив в ней условие (3) необходимым условием (5). Справедлива

Теорема 1. Пусть $\Omega \in \{\Omega\}^*$. Тогда Ω является рядом Фурье функции $f(x) \in L[0, 2\pi]$ в том и только в том случае, когда

$$f(x) = \frac{1}{2} \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}(\Omega, x) + \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}(\Omega, x) \right\} \text{ п. в. на } [0, 2\pi] \quad (6)$$

для некоторой последовательности $\{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$.

Следующее утверждение показывает, что теорема 1 действительно выделяет более широкий класс рядов Фурье, чем теоремы А и С.

Теорема 2. Существует ряд Фурье $\Omega \in \{\Omega\}^*$, который не удовлетворяет условию (3).

Если тригонометрический ряд Ω удовлетворяет условиям (1) и (6), то для выяснения, является ли Ω рядом Фурье функции f , представляется естественным вместо условия (2) (которому может и не удовлетворять ряд Фурье функции f) требовать, чтобы

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S_n(\Omega, x) - S_n(f, x)| < +\infty \quad (7)$$

на отрезке $[0, 2\pi]$, за исключением, быть может, некоторого счетного множества (такой подход встречается у А. Гарнака (³), с. 225).

Теорема 3. Если тригонометрический ряд Ω удовлетворяет условиям (1), (6) и (7), то Ω есть ряд Фурье функции f .

Здесь условия (1) и (7) очевидно необходимы, но условие (6) для рядов Фурье, вообще говоря, не имеет смысла. Поэтому целесообразно вместо частичных сумм рассматривать $(C, 1)$ средние ряда.

Теорема 4. Для того чтобы тригонометрический ряд Ω

являлся рядом Фурье функции $f(x) \in L[0, 2\pi]$, необходимо и достаточно, чтобы Ω удовлетворял условиям (1), (7) и

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(\Omega, x) \leq f(x) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(\Omega, x) \quad \text{п. в. на } [0, 2\pi]. \quad (8)$$

Если рассматривать ряды $\Omega \in \{\Omega\}^*$, то условие (8) также достаточно, чтобы Ω был рядом Фурье.

Теорема 5. Если $\Omega \in \{\Omega\}^*$ и удовлетворяет условию (8), то Ω является рядом Фурье функции f .

Отметим, что здесь в условии (8) нельзя (С, 1) средние заменить частичными суммами, сохранив полностью утверждение: С. Ю. Лукашенко (4) построен пример ряда Фурье Ω , который удовлетворяет условию (2) на отрезке $[0, 2\pi]$, и вместе с тем пределы неопределенности ряда Ω равны лишь на множестве E , $\text{mes} E < \varepsilon$ для наперед заданного $\varepsilon > 0$. При этом нетрудно убедиться, что Ω удовлетворяет также условию (3).

Таким образом, для рядов $\Omega \in \{\Omega\}^*$ условие

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} S_n(\Omega, x) \leq f(x) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n(\Omega, x),$$

которое выполняется всюду на отрезке $[0, 2\pi]$ для некоторой конечной и суммируемой на $[0, 2\pi]$ функции f , еще не гарантирует, что Ω является рядом Фурье именно функции f , но является ли оно достаточным, чтобы имело место (5) и Ω являлся рядом Фурье, не ясно.

Вместе с тем справедливо следующее усиление теоремы В.

Теорема 6. Пусть $\Omega \in \{\Omega\}^*$ и $f(x) \in L^p[0, 2\pi]$ для некоторого $p > 1$. Тогда, если для какого-либо регулярного метода T

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} t_n(\Omega, x) \leq f(x) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} t_n(\Omega, x) \quad \text{п. в. на } [0, 2\pi],$$

то Ω является рядом Фурье функции f . В частности, если ряд $\Omega \in \{\Omega\}^*$ суммируется к нулю каким-либо регулярным методом п. в. на $[0, 2\pi]$, то $\Omega \equiv 0$.

Вышеупомянутый пример С. Ю. Лукашенко показывает, что тригонометрический ряд может сходиться к конечной и суммируемой функции на некотором множестве $E \subset [0, 2\pi]$, $\text{mes} E < 2\pi$ и вместе с тем ограничено расходиться в остальных точках отрезка $[0, 2\pi]$.

Возникает вопрос: существует ли тригонометрический ряд, который сходится к нулю на некотором множестве $E \subset [0, 2\pi]$ и ограничено расходится в остальных точках отрезка $[0, 2\pi]$ (по этому поводу см. (2), с. 434).

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 7. Никакой тригонометрический ряд не может сходиться к конечной функции $f(x)$ на каком-либо множестве $E \subset [0, 2\pi]$ и ограничено расходиться на $[0, 2\pi] - E$, если $f(x)$ является сужением на E некоторой функции, ряд Фурье которой сходится всюду. В частности, никакой тригонометрический ряд не может сходиться к нулю на каком-либо множестве $E \subset [0, 2\pi]$ и вместе с тем ограничено расходиться на $[0, 2\pi] - E$.

Теорема 8. Никакой тригонометрический ряд не может

сходиться к конечной функции $f(x) \in L^p(E)$, $p > 1$ на каком-либо множестве $E \subset [0, 2\pi]$, $\text{mes} E < 2\pi$ и вместе с тем ограниченно расходиться в остальных точках отрезка $[0, 2\pi]$.

Обозначим через $E(s, \Omega)$ множество точек сходимости, а через $E(c, \Omega)$ множество точек $(C, 1)$ суммируемости (к конечному числу) ряда Ω на отрезке $[0, 2\pi]$.

Вышеприведенные утверждения (кроме теоремы 2) являются следствиями следующих двух теорем.

Теорема 9. Пусть $\Omega \in \{\Omega\}^*$ и $f(\Omega, x) \in L(E(c, \Omega))$. Тогда $\text{mes} E(c, \Omega) = 2\pi$ и Ω является рядом Фурье функции $f(\Omega, x)$.

Теорема 10. Пусть $\Omega \in \{\Omega\}^*$ и $f(\Omega, x) \in L^p(E(s, \Omega))$ для некоторого $p > 1$. Тогда $\text{mes} E(s, \Omega) = 2\pi$ и Ω является рядом Фурье функции $f(\Omega, x)$.

Армянский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Լ. Ա. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

Նոանկյունաչափական շարքերի միակության մասին

Դիցուք Ω -ն ընդհանուր տեսքի նոանկյունաչափական շարք է, իսկ $\underline{S}(\Omega, x)$ և $\overline{S}(\Omega, x)$ ֆունկցիաները համապատասխանաբար նրա մասնական գումարների ստորին և վերին սահմաններն են:

Աշխատանքում դիտարկվում է այն հարցը, թե երբ 0 -ի ձգտող դործակիցներով Ω նոանկյունաչափական շարքը կլինի ֆուրիյե-Լեբեգի շարք, եթե $\underline{S}(\Omega, x)$ և $\overline{S}(\Omega, x)$ ֆունկցիաները վերջավոր են ամենուրեք, բացի գուցե մի հաշվելի բազմությունից:

Համաձայն վալլե-Պուսսենի թեորեմի, դրա համար բավական է, որ

$$\underline{S}(\Omega, x), \overline{S}(\Omega, x) \in L[0, 2\pi]. \quad (*)$$

Աշխատանքում մասնավորաբար պարզարանվում է, որ $(*)$ պայմանը անհրաժեշտ չէ, իսկ

$$\underline{S}(\Omega, x) + \overline{S}(\Omega, x) \in L[0, 2\pi]$$

պայմանը արդեն անհրաժեշտ և բավարար է, որպեսզի վերը նշված դասից Ω շարքը հանդիսանա

$$\frac{1}{2} \{ \underline{S}(\Omega, x) + \overline{S}(\Omega, x) \}$$

ֆունկցիայի ֆուրիյե-Լեբեգի շարքը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Ш. Ж. де ла Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, т. II, ГТТИ, 1933. ² Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, Физматгиз, М., 1961. ³ А. Б. Паплаускас, Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега, Наука, М., 1966. ⁴ С. Ю. Лукашенко, Мат. заметки, т. 27, вып. 4 (1980).

УДК 519.8

МАТЕМАТИКА

А. К. Айдинян

Некоторые свойства кодов МДР

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 22/II 1983)

Известно, что для линейного кода над любым конечным полем выполняется неравенство $d \leq n - k + 1$, где n — длина кодового слова, k — число информационных символов, d — расстояние кода. Коды, у которых $d = n - k + 1$, называются разделимыми кодами с максимальным расстоянием или кодами МДР. Эти коды имеют систематический кодер, т. е. кодовые слова могут быть разделены на информационные и проверочные символы ^(1,2). Иногда эти коды также называют оптимальными. Основным из известных кодов МДР является код Рида — Соломона (РС) над полем $GF(q)$ ^(1,2). Из кода РС $[n = q - 1, k, n - k + 1]$ можно получить расширенный код РС $[n + 1, k, n - k + 2]$, который также является кодом МДР.

Задача построения кодов МДР наибольшей длины связана с рядом трудных комбинаторных задач, представляющих самостоятельный интерес, а также с вопросами построения конечных проективных геометрий.

Одна из основных задач теории кодов МДР формулируется следующим образом: для заданных k и q найти наибольшее значение n , для которого существует $[n, k, n - k + 1]$ -код над полем $GF(q)$. Обозначим это наибольшее значение через $n(k, q)$.

В работах ⁽³⁻⁵⁾ показано, что при $k \leq 5$ либо $q \leq 11$ имеет место соотношение

$$n(k, q) = \begin{cases} q + 1 & \text{для } 2 \leq k \leq q \\ k + 1 & \text{для } k > q, \end{cases}$$

кроме случая

$$n(3, q = 2^m) = q + 2.$$

Однако в общем случае эта задача остается нерешенной.

Целью настоящей работы является установление некоторых свойств кодов МДР, а также решение вышеприведенной задачи для некоторых новых частных случаев. При этом утверждается выводимость нескольких известных результатов из основных утверждений приводимой работы.

Хорошо известно ^(1,2), что $[n, k, d]$ -код является кодом МДР тогда и только тогда, когда любые k столбцов порождающей матрицы этого кода линейно-независимы.

Пусть задан $[n, k, d]$ -код МДР над полем $GF(q)$, порождающая матрица которого имеет вид $G=[I|A]$, где I —единичная матрица размерности $k \times k$, а A —матрица размерности $k \times (n-k)$ такая, что первый столбец и первая строка ее состоят из единичных элементов поля.

В книге Н. Дж. Слоэна и Ф. Дж. Мак-Вильямс доказывается Теорема (1). *Все квадратные подматрицы матрицы A невырождены.*

Используя вышеприведенные обозначения, из этой теоремы можно получить

Следствие 1. *Никакая строка (столбец) матрицы A , за исключением первой (первого), не содержит одинаковых элементов поля.*

Приведем также вытекающую из этой теоремы оценку длины кода МДР над полем $GF(q)$.

Следствие 2. *При $k \geq 2$ имеет место соотношение*

$$n(k, q) \leq q + k - 1.$$

В этих же обозначениях верно

Следствие 3. *При $k > q$ имеет место соотношение*

$$n(k, q) = k + 1.$$

В (1) доказывается следующий факт: пусть задан $[n, k, n-k+1]$ -код МДР. Тогда двойственный ему код также является кодом МДР с параметрами $[n, n-k, k+1]$. При помощи этого можно доказать нижеследующее утверждение:

Теорема 1. $n(k, q) = n(n(k, q) - k, q)$.

Из теоремы 1 и следствий 1, 2 можно получить утверждение о максимальных длинах кодов МДР над полем $GF(q)$ с двумя и с $q-1$ информационными символами:

Следствие 1.1. $n(2, q) = n(q-1, q) = q+1$ при нечетном q . Если же q есть степень двойки, то

$$n(3, q) = n(q-1; q) = q+2.$$

Теорема 2. Пусть t —такое целое число, что $1 \leq t \leq q-1$. Тогда для любого $k > t$ имеет место соотношение

$$n(t, q) = q + 1 \Leftrightarrow n(k, q) \leq q + k - t + 1.$$

Эта теорема позволяет улучшить границу для длины кодового слова. Очевидно, из теоремы 2 вытекает

Следствие 2.1. $n(k, q) \leq q + k - 4$ для $4 < k < q$.

Приведенные в списке литературы работы содержат результаты по вычислению максимальной длины кодов МДР для конкретных числовых значений k при любом основании кода. Сформулируем результат, дающий точную оценку максимальной длины кодового слова для k таких, что $2k-1$ есть степень простого числа.

Теорема 3. *При $2k-1=q$ имеет место равенство*

$$n(k, q) = q + 1.$$

Следствие 3.1. Если $q \leq 13$, то $n(k, q) = q + 1$ кроме случая $q = 4$ и 8 .

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного
университета

2. Կ. ԱՅԴԻՆՅԱՆ

ՄՀԱ-կոդերի որոշ հատկություններ

Գծային $[n, k, d]$ կոդերը (n -ը կոդային բառի երկարությունն է, k -ն ինֆորմացիոն նիշերի քանակը, d -ն կոդի մինիմալ հեմինգյան հեռավորությունը) բավարարում են $d \leq n - k + 1$ պայմանին: Այն կոդերը, որտեղ բավարարվում է $d = n - k + 1$ հավասարությունը, կոչվում են ՄՀԱ (մաքսիմալ հեռացված անջատելի), կամ Օպտիմալ կոդեր: Մինչ այժմ ՄՀԱ կոդերում չլուծված խնդիրներից մեկը հետևյալն է. տրված k -ի և q -ի համար գտնել ամենամեծ n -ը, որի համար գոյություն ունի $[n, k, n - k + 1]$ -կոդ $GF(q)$ դաշտի վրա:

Այս խնդիրը մինչ այժմ լուծված է $k \leq 5$ կամ $q \leq 11$ դեպքերում:

Հոգվածում բերվում են ՄՀԱ կոդերի որոշ հատկություններ և լուծվում վերոհիշյալ խնդիրը որոշ նոր մասնավոր դեպքերում:

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн, Теория кодов, исправляющих ошибки, Связь, М., 1979. ² У. Питерсон, Э. Уэлдон, Коды, исправляющие ошибки, Мир, М., 1976. ³ В. Segre, Lectures on Modern Geometry (Edizioni Cremonese), Rome, 1961. ⁴ L. R. A. Casse, Lincei-Ren. Sc. fis. mat. nat., 46 (1969). ⁵ C. Maneri, R. Silverman, J. Comb. Theory. 11A (1971).

УДК 517.984

И. Г. Хачатрян

О некоторых решениях уравнения нелинейной струны

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 25/II 1983)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$a \frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial w}{\partial x}, \quad a \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{1}{3} \frac{\partial u^2}{\partial x}, \quad (1)$$

$$-\infty < t, x < \infty.$$

где $a \neq 0$ — вещественное число. Очевидно, что систему (1) можно свести к одному уравнению

$$3a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}. \quad (2)$$

При помощи подстановки $u(t, x) = cv(t, x) + b$ уравнение (2) перепишем в виде

$$3a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 4b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - 2c \frac{\partial^2 v^2}{\partial x^2}. \quad (3)$$

При $a^2 = \frac{4}{3}$, $b = -1$, $c = -\frac{3}{2}$ (3) совпадает с уравнением нелинейной струны (1), а при $a^2 = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{4}$, $c = -\frac{3}{2}$ мы получим рассмотренное в (2) уравнение Буссинеска.

Согласно результатам работы (1), если ядро $F(t; x, \xi)$ ($-\infty < t, x, \xi < \infty$) удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} = 0, \quad \frac{a}{i} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = 0, \quad (4)$$

и, кроме того, при любых фиксированных t и x относительно функции $K(t; x, \xi)$ ($\xi \geq x$) разрешимо интегральное уравнение (аналог уравнения Гельфанда—Левитана—Марченко)

$$K(t; x, \xi) + F(t; x, \xi) + \int_x^\xi K(t; x, \eta) F(t; \eta, \xi) d\eta = 0, \quad (5)$$

то пара функций $u(t, x)$ и $w(t, x)$, определенных по формулам

$$u(t, x) = -3 \left[\frac{\partial}{\partial x} K(t; x, \xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} K(t; x, \xi) \right]_{\xi=x}, \quad (6)$$

$$w(t, x) = 3i \left\{ K(t; x, \xi) \left[\frac{\partial}{\partial x} K(t; x, \xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} K(t; x, \xi) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(t; x, \xi) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} K(t; x, \xi) \right\}_{\xi=x}, \quad (7)$$

является решением системы уравнений (1).

В работе (1) рассматриваются вырожденные ядра $F(t; x, \xi)$, удовлетворяющие указанным выше условиям (см. в связи с этим также работу (2)).

В настоящей заметке указывается класс удовлетворяющих уравнениям (4) невырожденных эрмитовых ядер $F(t; x, \xi)$ ($F(t; x, \xi) = \overline{F(t; \xi, x)}$), при которых разрешимо интегральное уравнение (5). При этом определенные по формулам (6) и (7) решения системы (1) вещественны и убывают при $x \rightarrow +\infty$.

С этой целью удобно ввести обозначения

$$K_0(t; x, \xi) = K(t; x, x + \xi), \\ G(t, x; \eta, \xi) = F(t; x + \eta, x + \xi), \\ -\infty < t, x < \infty, \quad 0 \leq \eta, \xi < \infty,$$

и привести соотношения (4)–(7) к виду

$$\frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3} + \frac{\partial^3 G}{\partial \xi^3} = 0, \quad \frac{a}{i} \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} = 0, \quad (8)$$

$$K_0(t; x, \xi) + G(t, x; 0, \xi) + \int_0^\infty K_0(t; x, \eta) G(t, x; \eta, \xi) d\eta = 0, \quad (9)$$

$$u(t, x) = -3 \frac{\partial}{\partial x} K_0(t; x, 0), \quad (10)$$

$$w(t, x) = 3i \left[K_0(t; x, 0) \frac{\partial}{\partial x} K_0(t; x, 0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_0(t; x, 0) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} K_0(t; x, \xi) \right]_{\xi=0}. \quad (11)$$

Пусть $S(\lambda)$ ($-\infty < \lambda < \infty$) — дважды непрерывно дифференцируемая финитная функция, причём $S(0) = 0$. Рассмотрим вместе с этой функцией четыре конечных набора положительных чисел

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n; \quad N_1, N_2, \dots, N_n; \\ \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m; \quad M_1, M_2, \dots, M_m.$$

Ядро $G(t, z; \eta, \xi)$ определим по формуле

$$G(t, z; \eta, \xi) = \int_0^\infty S(\lambda) \exp \left\{ \frac{\lambda}{2} \left[(\sqrt{3} - 3i) \frac{\lambda t}{a} - (\sqrt{3} + 3i) z - (\sqrt{3} + i) \eta - 2i \xi \right] \right\} d\lambda + \\ + \int_0^\infty \overline{S(\lambda)} \exp \left\{ \frac{\lambda}{2} \left[(\sqrt{3} + 3i) \frac{\lambda t}{a} - (\sqrt{3} - 3i) z + 2i \eta - (\sqrt{3} - i) \xi \right] \right\} d\lambda +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\infty} 2\pi |S(\lambda)|^2 \exp \left\{ \frac{\lambda}{2} \left[2\sqrt{3} \left(\frac{\lambda t}{a} - z \right) - (\sqrt{3} + i)\eta - (\sqrt{3} - i)\xi \right] \right\} d\lambda + \\
& + \int_{-\infty}^0 S(\lambda) \exp \left\{ \frac{\lambda}{2} \left[-(\sqrt{3} + 3i) \frac{\lambda t}{a} + (\sqrt{3} - 3i)z + (\sqrt{3} - i)\eta - 2i\xi \right] \right\} d\lambda + \\
& + \int_{-\infty}^0 \bar{S}(\lambda) \exp \left\{ \frac{\lambda}{2} \left[-(\sqrt{3} - 3i) \frac{\lambda t}{a} + (\sqrt{3} + 3i)z + 2i\eta + (\sqrt{3} + i)\xi \right] \right\} d\lambda + \\
& + \int_{-\infty}^0 2\pi |S(\lambda)|^2 \exp \left\{ \frac{\lambda}{2} \left[-2\sqrt{3} \left(\frac{\lambda t}{a} - z \right) + (\sqrt{3} - i)\eta + (\sqrt{3} + i)\xi \right] \right\} d\lambda + \\
& + \sum_{k=1}^n N_k \exp \left\{ \frac{\lambda_k}{2} \left[2\sqrt{3} \left(\frac{\lambda_k t}{a} - z \right) - (\sqrt{3} + i)\eta - (\sqrt{3} - i)\xi \right] \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^m M_k \exp \left\{ \frac{\mu_k}{2} \left[-2\sqrt{3} \left(\frac{\mu_k t}{a} + z \right) - (\sqrt{3} - i)\eta - (\sqrt{3} + i)\xi \right] \right\}. \quad (12)
\end{aligned}$$

Легко убедиться, что построенное ядро $G(t, z; \eta, \xi)$ удовлетворяет уравнениям (8) и является целой функцией переменной z . Кроме того, справедливы оценки

$$|G(t, z; \eta, \xi)| \leq c_1(t, z)(\eta + \xi + 1)^{-2}, \quad (13)$$

$$|G(t, z; \eta, \xi)| \leq c_2(t)(z + \eta + \xi + 1)^{-2}, \quad z > 0, \quad (14)$$

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 \leq \eta, \xi < \infty,$$

где $c_1(t, z)$ и $c_2(t)$ — некоторые положительные функции. При каждом комплексном z определим в пространстве $L^2(0, \infty)$ интегральный оператор G_z по формуле

$$G_z f(\xi) = \int_0^{\infty} G(t, z; \eta, \xi) f(\eta) d\eta, \quad 0 < \xi < \infty. \quad (15)$$

Покажем, что при всех вещественных z оператор $I + G_z$ обратим, где I — единичный оператор. С этой целью нам понадобятся следующие свойства оператора G_z , которые легко следуют из формулы (12) и оценок (13), (14).

- 1°. При каждом z оператор G_z вполне непрерывен.
- 2°. G_z является голоморфной оператор-функцией от z .
- 3°. $\|G_z\| \rightarrow 0$ при $z \rightarrow +\infty$.
- 4°. $(I + G_z) \geq 0$ при $\text{Im} z = 0$.
- 5°. При каждом $\alpha > 0$ имеет место равенство

$$G_z = B_\alpha G_{z-\alpha} B_\alpha, \quad (19)$$

где операторы B_α и B_α^* определяются по формулам

$$B_\alpha f(\xi) = \begin{cases} f(\xi - \alpha) & \text{при } \xi > \alpha, \\ 0 & \text{при } 0 < \xi < \alpha, \end{cases}$$

$$B_\alpha^* f(\xi) = f(\xi + \alpha), \quad \xi > 0,$$

и, следовательно, $B_\alpha^* B_\alpha = I$.

Обратимость оператора $I + G_z$ при $\text{Im} z = 0$ докажем исходя из обратного предположения. Пусть при некотором вещественном значении $z = x$ для отличного от нуля элемента $f \in L^2(0, \infty)$ имеет место равенство $f + G_x f = 0$. Тогда $(f + G_x f, f) = 0$. Отсюда в силу (16) при любом $\alpha > 0$ получим

$$(B_\alpha^* [I + G_{x-\alpha}] B_\alpha f, f) = 0.$$

Следовательно, $([I + G_{x-\alpha}] B_\alpha f, B_\alpha f) = 0$ и в силу свойства 4^а

$$(I + G_{x-\alpha}) B_\alpha f = 0. \quad (17)$$

Поскольку $B_\alpha f \neq 0$, то согласно (17) при любом $\alpha > 0$ оператор $I + G_{x-\alpha}$ не имеет обратного. Однако в силу свойств 1^о–3^о оператор $I + G_z$ обратим для всех z за исключением, быть может, счетного множества значений, не имеющих конечной точки сгущения. Полученное противоречие доказывает обратимость оператора $I + G_z$ при всех вещественных z .

Таким образом, для определенного по формуле (12) ядра $G(t, x; \eta, \xi)$ интегральное уравнение (9) разрешимо при всех вещественных t и x . При этом можно доказать, что определенные формулами (10) и (11) функции $u(t, x)$ и $w(t, x)$ вещественны и убывают при $x \rightarrow +\infty$.

Нетрудно заметить, что приведенные выше утверждения справедливы не только при финитных, но и при достаточно быстро убывающих на бесконечности функциях $S(\lambda)$.

Аналогично могут быть построены убывающие при $x \rightarrow -\infty$ решения системы уравнений (1).

Отыскание достаточных условий на функцию $S(\lambda) \neq 0$, при которых определенные формулами (10) и (11) функции $u(t, x)$ и $w(t, x)$ убывают при $x \rightarrow \pm\infty$, связано с рядом затруднений. В связи с этим отметим лишь, что если указанные функции $u(t, x)$ и $w(t, x)$ при некотором значении t суммируемы по x на всей оси $(-\infty, \infty)$, то функция $S(\lambda)$ необходимо должна быть мероморфной в каждом из секторов $0 < \arg \lambda < \frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6} < \arg \lambda < \pi$ и непрерывной на полуосях $(0, \infty)$, $(\infty-, 0)$ (3).

Ոչ գծային լարի հավասարման որոշ լուծումների մասին

Դիտարկվում է գիֆերենցիալ հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$a \frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial w}{\partial x}, \quad a \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{1}{3} \frac{\partial u^2}{\partial x},$$

$$-\infty < t, \quad x < \infty,$$

որտեղ՝ a -ն զրոյից տարբեր իրական թիվ է: Յրման հակադարձ խնդրի մեթոդով կառուցվում են այդ համակարգի որոշ լուծումներ, որոնք նվազում են, երբ $x \rightarrow +\infty$:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, Функц. анализ и его прилож., т. 8, № 3 (1974).
² P. J. Caudrey, Physica 6 D, 51—66 (1982). ³ И. Г. Хачатрян, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 18, № 5 (1983).

УДК 621.391.15

МАТЕМАТИКА

Ж. Г. Маргарян, Г. Л. Мовсисян

Об одном методе построения линейных кодов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 15/IV 1983)

Рассмотрим n -мерное пространство B_n над полем $GF(2)$ ⁽¹⁾. Элементы этого пространства будем называть n -точками и обозначим через

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad \tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

и т. д., где α_i, β_i равны 0 или 1. Геометрически n -точки представляют собой вершины n -мерного куба в евклидовом пространстве E_n .

Расстояние по Хэммингу между n -точками $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ определим по формуле

$$d(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|.$$

Весом Хэмминга n -точки $\tilde{\alpha}$ назовем число его ненулевых компонент. Обозначим через B_n^k множество n -точек веса k .

Кодом длины n над полем $GF(2)$ называется любое непустое подмножество V множества B_n . Элементы из V называются кодовыми словами. Обозначим через $R(V)$ множество значений, принимаемых расстоянием между различными кодовыми словами, т. е. $d \in R(V)$ тогда и только тогда, когда существуют такие различные кодовые слова $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$, что $d(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = d$. Предположим, что $R = \{d_1, d_2, \dots, d_q\}$ некоторое непустое подмножество множества $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Обозначим через $F(n; R)$ семейство кодов V таких, что $R(V) \subseteq R$. Пусть*

$$M(n; R) = \max_{V \in F(n; R)} |V|.$$

Относительно метрического функционала $M(n; R)$ известна ⁽²⁾ следующая верхняя оценка, имеющая место для всех R одинаковой мощности, а именно

$$M(n; R) \leq 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{|R|}.$$

Используя информацию о строении множества R , в ряде случаев нам удалось улучшить приведенную оценку.

Теорема 1. Если любой элемент множества R является числом вида $4r+2$, то имеет место неравенство

* В статье приняты следующие обозначения: $[\xi]$ — целая часть числа ξ , $|V|$ — мощность множества V .

$$M(n; R) \leq |R| (n+1) + 1.$$

Следствие. Если код V такой, что $|V| > 2 \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor (n+1) + 3$, то множество $R(V)$ содержит элемент, кратный 4.

Подпространство пространства B_n называется линейным кодом. Любое множество базисных n -точек линейного кода можно рассматривать как строки матрицы, называемой порождающей матрицей кода. Число d называется минимальным расстоянием кода V , если

$$d = \min_{\bar{\alpha} \neq \bar{\beta}} \{d(\bar{\alpha}, \bar{\beta})\},$$

где $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in V$.

Минимальное расстояние линейного кода равно минимальному весу ненулевых кодовых слов. Линейный код размерности k , длины n и с минимальным расстоянием d называется $[n, k, d]$ -кодом.

Следующие два результата относятся к таким кодам, для которых расстояние между различными кодовыми словами равно d_1 или d_2 . Любое натуральное число N можно представить в виде $N = P \cdot 2^a$, где P — нечетное число. Предположим, что

$$d_i = P_{d_i} \cdot 2^{a_i}, \quad i = 1, 2.$$

Теорема 2. Если существует линейный V код такой, что $R(V) = \{d_1, d_2\}$, то имеет место неравенство $k \leq \log \frac{2d_1 d_2}{P_{d_1} P_{d_2}}$.

Замечание. Для некоторых d_1, d_2 существует семейство линейных кодов, для которых граница, задаваемая в теореме 2, достигается.

Обозначим через G_k матрицу, столбцами которой являются все n -точки с весом k . Предположим, что n -точка $\bar{\alpha}$ имеет вес a . Через $f_k(n; a)$ обозначим вес вектора $\bar{\alpha} G_k$. Все операции в произведении $\bar{\alpha} G_k$ выполняются над полем $GF(2)$.

Лемма 1. Если $d(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = a$, то $d(\bar{\alpha} G_k, \bar{\beta} G_k) = f_k(n; a)$.

Лемма 2. $f_k(n; a) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{a+1}{2} \rfloor} C_a^{2i-1} C_{n-a}^{k-2i+1}$.

Теорема 3. Имеет место неравенство $M(n; \{d, n-d\}) \leq 1 + \frac{n(n-1)}{2}$. Если имеет место равенство, то существует матрица

Адамара порядка $1 + \frac{n(n-1)}{2}$.

Утверждение 1. $f_{n-k}(n; a) = \frac{1 + (-1)^{a+1}}{2} C_n^k + (-1)^a f_k(n; a)$.

Утверждение 2. $f_n(n; a) = \frac{1 + (-1)^{a+1}}{2}$.

Лемма 3. Имеет место равенство

$$\sum_{h=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} f_{2h-1}(n; a) = \begin{cases} 2^{n-2}, & \text{при } a \neq n, \\ 2^{n-1}, & \text{при } a = n. \end{cases}$$

Теорема 4. Для произвольного натурального числа m существуют двоичные линейные коды со следующими параметрами:

(I) при $m \equiv 1 \pmod{2}$

$$\begin{cases} n = 2^{m-1} - m - 1 \\ d = 2^{m-2} - m + 1 \\ k = m \end{cases}$$

(II) при $m \equiv 0 \pmod{2}$

$$\begin{cases} n = 2^{m-1} - 2m \\ d = 2^{m-2} - 2m + 4 \\ k = m \end{cases}$$

Порождающая матрица линейного кода I (II) представляет собой $(m \times (2^{m-1} - m - 1))$ ($(m \times (2^{m-1} - 2m))$) — матрицу, столбцами которой являются все ненулевые двоичные m -точки с весом $2k-1$, где $k = 2, 3, \dots, s-1$ ($k = 2, 3, \dots, s$).

Теорема 5. Для любого натурального числа m существует линейный код со следующими параметрами:

$$(III) \begin{cases} n = 2^{m-1} - m \\ d = 2^{m-2} - m + 1 \\ k = m. \end{cases}$$

Столбцами порождающей матрицы линейного кода III являются все ненулевые двоичные m -точки с весом $2k-1$, где $k = 2, 3, \dots, \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor$.

Лемма 5. Имеют место следующие равенства:

1.

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+3}{4} \rfloor} f_{4k-3}(n; a) = \begin{cases} 2^{n-3} + 2^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \cos \frac{\pi}{4} (n-2) + \cos \frac{\pi}{4} (2a-n-2) \right\}, & \text{при } a \neq n, \\ 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}} \cos \frac{\pi}{4} (n-2), & \text{при } a = n. \end{cases}$$

2.

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor} f_{4k-1}(n; a) = \begin{cases} 2^{n-3} - 2^{\frac{n-4}{2}} \left\{ \cos \frac{\pi}{4} (n-2) + \cos \frac{\pi}{4} (2a-n-2) \right\}, & \text{при } a \neq n, \\ 2^{n-2} - 2^{\frac{n-2}{2}} \cos \frac{\pi}{4} (n-2), & \text{при } a = n. \end{cases}$$

Из этой леммы при $n \equiv 1 \pmod{4}$ получаем:

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+3}{4} \rfloor} f_{4k-3}(n; a) = \begin{cases} 2^{n-3}, & \text{при } a \equiv 0 \text{ или } 3 \pmod{4}, \\ 2^{n-3} + 2^{\frac{n-3}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{4}}, & \text{при } a \equiv 1 \text{ или } 2 \pmod{4}, \\ 2^{n-2} + 2^{\frac{n-3}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{4}}, & \text{при } a = n. \end{cases} \quad (1)$$

$$\sum_{k=2}^{\lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor} f_{4k-1}(n; a) = \begin{cases} 2^{n-3}, & \text{при } a \equiv 0 \text{ или } 3 \pmod{4}, \\ 2^{n-3} - 2^{\frac{n-3}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{4}}, & \text{при } a \equiv 1 \text{ или } 2 \pmod{4}, \\ 2^{n-2} - 2^{\frac{n-3}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{4}}, & \text{при } a = n. \end{cases} \quad (2)$$

А при $n \equiv 3 \pmod{4}$ получаем

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+3}{4} \rfloor} f_{4k-3}(n; a) = \begin{cases} 2^{n-3}, & \text{при } a \equiv 0 \text{ или } 1 \pmod{4}, \\ 2^{n-3} + 2^{\frac{n-3}{2}} (-1)^{\frac{n-3}{4}}, & \text{при } a \equiv 2 \text{ или } 3 \pmod{4}, \\ 2^{n-2} + 2^{\frac{n-3}{2}} (-1)^{\frac{n-3}{4}}, & \text{при } a = n. \end{cases} \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor} f_{4k-1}(n; a) = \begin{cases} 2^{n-3}, & \text{при } a \equiv 0 \text{ или } 1 \pmod{4}, \\ 2^{n-3} - 2^{\frac{n-3}{2}} (-1)^{\frac{n-3}{4}}, & \text{при } a \equiv 2 \text{ или } 3 \pmod{4}, \\ 2^{n-2} - 2^{\frac{n-3}{2}} (-1)^{\frac{n-3}{4}}, & \text{при } a = n. \end{cases} \quad (4)$$

Теорема 6. Для произвольного нечетного числа m существуют двоичные линейные коды со следующими параметрами:

$$(IV) \quad \begin{cases} n = 2^{m-2} + 2^{\frac{m-3}{2}} \\ d = 2^{m-3} \\ k = m \end{cases} \quad (V) \quad \begin{cases} n = 2^{m-2} - 2^{\frac{m-3}{2}} \\ d = 2^{m-3} - 2^{\frac{m-3}{2}} \\ k = m \end{cases}$$

Из соотношений (1)–(4) следует: когда $m \equiv 5$ или $7 \pmod{8}$, то порождающая матрица линейного кода IV (V) представляет собой $(m \times (2^{m-2} + 2^{\frac{m-3}{2}}))$ ($(m \times (2^{m-2} - 2^{\frac{m-3}{2}}))$) – матрицу, столбцами которой являются все ненулевые двоичные m -точки с весом $w \equiv 3 \pmod{4}$ ($w \equiv 1 \pmod{4}$). А если $m \equiv 1$ или $3 \pmod{8}$, то столбцами порождающей матрицы линейного кода IV (V) являются все ненулевые m -точки с весом $w \equiv 1 \pmod{4}$ ($w \equiv 3 \pmod{4}$).

Обозначим через $d_{\max}(n; k)$ максимум минимального расстояния по всем линейным кодам длины n , размерности k (³). При $m \geq 7$ полученные семейства линейных кодов являются новыми и улучшают известные нижние границы для $d_{\max}(n; k)$ (см. (³)).

Ереванский государственный университет

Փ. Գ. ՄԱՐԴԱՐՅԱՆ, Ղ. Լ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Գծային կոդերի կառուցման մի մեթոդի մասին

Միավոր խորանարդի ցանկացած ենթաբազմություն կոչվում է կոդ, իսկ նրա էլեմենտները կոդային բառեր: Երկու իրարից տարբեր կոդային բառերի հեմինգյան հեռավորության արժեքների բազմությունը կոչվում է կոդի հեռավորությունների բազմություն: Նշանակենք $(M; R)$ -ով այն կոդի հզորությունը, որն ունի ամենամեծ հզորություն և որի հեռավորությունների բազմությունը հանդիսանում է R -ի ենթաբազմություն: Բազմության վրա որոշակի սահմանափակումների դեպքում աշխատանքում հաջողվել է լավացնել $M(n; R)$ մետրիկական ֆունկցիոնալի հայտնի (²) վերին զնահատականը: Այնուհետև աշխատանքում նկարագրված է գծային կոդերի կառուցման մի մեթոդ և այդ մեթոդով ստացված է գծային կոդերի 5 բնտանիք:

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. Слоэн, Теория кодов, исправляющих ошибки, Связь, М., 1979. ² P. Delsarte, Information and Control, v. 23 (1973). ³ H. J. Helgert, R. D. Stinaff, IEEE Trans. Inform. Theory, v. 19 (1973).

УДК 539.376

МЕХАНИКА

А. Д. Дроздов, В. Б. Колмановский, В. Д. Потапов

Устойчивость стержней из неоднородно-стареющего
 вязкоупругого материала

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым | 30/1 1983)

Рассмотрена устойчивость на бесконечном и конечном интервалах времени неармированных и армированных неоднородно-стареющих вязкоупругих стержней при произвольном ядре релаксации материала, различных видах нагружения и типах опирания концов. Определения устойчивости на бесконечном и конечном интервалах времени соответствуют определениям устойчивости движения динамических систем по Ляпунову и Четаеву.

Исследование устойчивости вязкоупругих стержней с учетом неоднородного старения материала проводилось в ^(1,2), в которых для ядра ползучести Н. Х. Арутюняна ⁽³⁾ найдены условия устойчивости на бесконечном и конечном промежутках времени. Аналогичная задача для вязкоупругих стержней, армированных упругими элементами, решалась в ^(4,5).

1. Постановка задачи устойчивости стержней на бесконечном интервале времени. Рассматривается прямолинейный стержень постоянного поперечного сечения длиной l , изготовленный из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала. Поперечное сечение стержня имеет одну ось симметрии, а его момент инерции относительно центральной оси, перпендикулярной оси симметрии, равен J . Изгиб стержня происходит в плоскости, проходящей через указанную ось симметрии и ось Ox , совпадающую с продольной осью стержня. В момент времени $t_0=0$ к стержню приложена внешняя продольная и распределенная поперечная нагрузка интенсивностью $q(x)$. Возраст элемента материала стержня в момент времени t_0 обозначим через $\rho(x)$. Функция ρ кусочно-непрерывна и ограничена. При одноосном напряженном состоянии деформация $\varepsilon(t, x)$ и напряжение $\sigma(t, x)$ в момент времени $t \geq 0$ в точке x связаны соотношением ⁽⁶⁾

$$\varepsilon = \frac{1}{E} (I+K)\sigma \text{ или } \sigma = E(I+K)^{-1}\varepsilon = E(I-R)\varepsilon.$$

Здесь I —единичный оператор, K , R —операторы ползучести и релаксации,

$$K\sigma = \int_0^t k(t+\rho(x), \tau+\rho(x))\sigma(\tau, x) d\tau, \quad R\varepsilon = \int_0^t r(t+\rho(x), \tau+\rho(x))\varepsilon(\tau, x) d\tau,$$

$k(t, \tau)$, $r(t, \tau)$ — ядра ползучести и релаксации, E — постоянный модуль упруго-мгновенной деформации. Ядро ползучести k допускает представление $k(t, \tau) = l_0(t, \tau) + l_1(t, \tau)(t - \tau)^{-1}$, $0 \leq x < 1$. Функции l_0 , l_1 неотрицательны, кусочно-непрерывны по τ и непрерывны по t при $t \geq \tau \geq 0$. Аналогичное утверждение справедливо для ядра релаксации r .

Обозначим через $y_0(x)$ возможный начальный и $y(t, x)$ полный прогиб стержня в точке x в момент времени $t \geq 0$. Считается, что прогиб стержня достаточно мал (т. е. в выражении кривизны можно пренебречь величиной $y'' = (dy/dx)^2$ по сравнению с единицей) и справедлива гипотеза плоских сечений.

Определение. *Прямолинейное положение стержня устойчиво по отношению к возмущениям — начальному прогибу и поперечной распределенной нагрузке, если для любого $A > 0$ существуют такие $\delta_1(A) > 0$ и $\delta_2(A) > 0$, что из неравенств $\sup_x |q(x)| < \delta_1$, $\sup_x |y_0(x)| < \delta_2$ следует оценка $\sup_{t,x} |y(t, x)| < A$, ($t \in [0, \infty)$, $x \in [0, l]$).*

2. Устойчивость стержня при действии сосредоточенной сжимающей силы. Пусть к концам стержня приложена сжимающая сила P . Прогиб стержня удовлетворяет уравнению

$$[(I - R)(y - y_0)'''] + P(EJ)^{-1}y'' = q(EJ)^{-1}.$$

Справедливо одно из следующих граничных условий:

$$y(t, 0) = y'(t, 0) = y(t, l) = y'(t, l) = 0; \quad (2.1)$$

$$y(t, 0) = y''(t, 0) = y(t, l) = y'(t, l) = 0; \quad (2.2)$$

$$y(t, 0) = y''(t, 0) = y(t, l) = y''(t, l) = 0. \quad (2.3)$$

На ядра ползучести и релаксации наложены следующие ограничения:

1) существует такая функция $r_1(t, \tau)$, что

$$0 \leq r(t + \rho(x), \tau + \rho(x)) \leq r_1(t, \tau), \quad 0 \leq \tau \leq t, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$|r_1| = \sup_t \int_0^t r_1(t, \tau) d\tau < 1;$$

2) существует такая функция $r_0(t, \tau)$, что равномерно по $t \geq T$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_T^t \sup_x |r(t + \rho(x), \tau + \rho(x)) - r_0(t, \tau)| d\tau = 0,$$

$$|r_0| < 1, \quad |k_0| < \infty.$$

Здесь k_0 — ядро ползучести, соответствующее ядру релаксации r_0 .

Пусть $\lambda > 0$ — минимальное собственное значение краевой задачи $y'''' + \lambda y'' = 0$ с одним из граничных условий (2.1) — (2.3).

Теорема 1. *Стержень устойчив, если выполнено неравенство*

$$P < EJ\lambda(1 + |k_0|)^{-1}. \quad (2.4)$$

Если ядро r_0 разностное, то это условие является необходимым и достаточным. Отсюда следует результат работ (1,8), полученный для однородного вязкоупругого стержня.

Пусть на стержень действует m сосредоточенных сжимающих сил P_1, P_2, \dots, P_m , приложенных в разных точках стержня, и n распределенных сжимающих нагрузок интенсивностью $g_{m+1}, g_{m+2}, \dots, g_{m+n}$. Обозначим через λ_i собственное значение краевой задачи, отвечающей упругому стержню, сжатою i -ой сосредоточенной силой ($i=1, 2, \dots, m$), а через λ_j —собственное значение краевой задачи, отвечающей упругому стержню, сжатою j -ой распределенной нагрузкой g_j ($j=m+1, \dots, m+n$). Стержень устойчив, если

$$\sum_{i=1}^m P_i \lambda_i^{-1} + \sum_{j=m+1}^{m+n} g_j \lambda_j^{-1} < EJ(1 + |k_0|)^{-1}.$$

Этот результат является обобщением теоремы Папковича (9), доказанной для упругих стержней ($|k_0|=0$).

Для ядра ползучести

$$k(t, \tau) = - \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \varphi(\tau) [1 - \exp(-\gamma(t-\tau))] \} \quad (2.5)$$

условие (2.4) принимает вид $P < EJ\lambda(1 + EC_0)^{-1}$, ($C_0 = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(\tau)$) и совпадает с условием устойчивости, полученным в (1,2).

3. Устойчивость стержня при однопараметрическом нагружении. Пусть на стержень действует продольная нагрузка, при которой нормальная сила N в каждом сечении стержня равна $N(x) = aN_0(x)$, где N_0 —заданная кусочно-непрерывная функция. Обозначим через $\lambda > 0$ минимальное собственное значение краевой задачи $y'''' + \lambda(N_0 y')' = 0$ с граничными условиями (2.1)–(2.3).

Теорема 2. Стержень устойчив, если выполнено неравенство

$$a < EJ\lambda(1 + |k_0|)^{-1}.$$

Пусть $E = E(t + \rho(x))$, $a = a(t)$ зависят от времени, причем $E(t + \rho(x)) \geq E_1(t) > 0$, $a(t) < \beta E_1(t)$ для любого $t \geq 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t + \rho(x)) = E_0 > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = a_0 > 0$. Тогда стержень устойчив, если $a_0 < E_0 J \lambda (1 + |k_0|)^{-1}$.

4. Устойчивость армированного стержня. Пусть стержень армирован упругим материалом с модулем упругой деформации E_a . Поперечное сечение стержня имеет две оси симметрии и арматура расположена симметрично относительно этих осей. Момент инерции арматуры J_a постоянен.

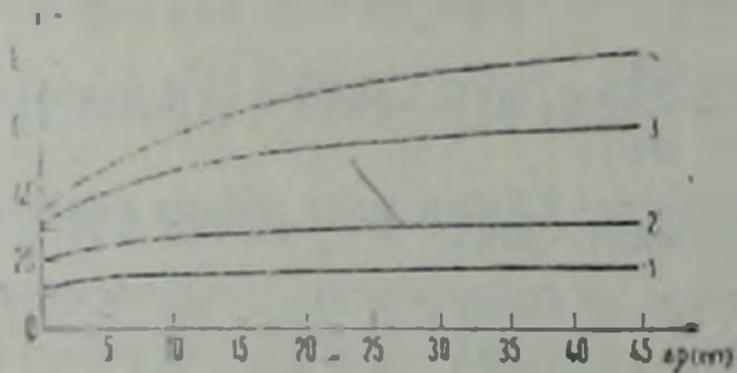
Теорема 3. Условия устойчивости армированного стержня совпадают с условиями устойчивости неармированного стержня с модулем упругой мгновенной деформации E , моментом инерции $J_0 = (EJ + E_a J_a) / E$ и ядром релаксации $\beta r(t, \tau)$, где $\beta = J / J_0$.

Пусть армированный стержень сжат силой P . Ядро ползучести основного материала имеет вид (2.5). Тогда стержень устойчив, если $P < P_0[1 + (1 - \beta)EC_0](1 + EC_0)^{-1}$, где P_0 — эйлерова критическая сила для упругого стержня, жесткость на изгиб которого равна EJ_0 .

5. Устойчивость стержня на конечном интервале времени. Пусть прогиб стержня исследуется на конечном интервале времени $[0, T]$ и задано критическое значение прогиба y^0 . Критическое время T^0 определяется как первый момент достижения прогибом значения y^0 .

Определение. Стержень называется устойчивым на интервале времени $[0, T]$, если $T^0 > T$.

Для анализа зависимости критического времени T^0 от возраста материала проведен численный расчет для стержня с граничными условиями (2.1). На стержень действуют сжимающая сила P и распределенная поперечная нагрузка постоянной интенсивности q . Ядро ползучести материала стержня имеет вид (2.5) с функцией старения $\varphi(\tau) = A_1 + A_2\tau^{-1}$. Стержень состоит из двух равных частей. Возраст одной части ρ_1 постоянен. Возраст второй части ρ_2 варьировался от ρ_1 до $10\rho_1$.



Результаты расчетов показывают, что при возрастании разности возрастов $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ отдельных участков стержня критическое время увеличивается, причем тем интенсивнее, чем больше величина y^0 критического значения прогиба (рисунок).

Московский институт инженеров
железнодорожного транспорта

Ա. Գ. ԴՐՈՋԴՈՎ, Վ. Բ. ԿՈՒՐԱՆՈՎՍԿԻ, Վ. Գ. ԳՈՏԱՊՈՎ

Անմիասն ձեռացող կաշուն առաձիգ նյութից պատրաստած
ձողերի կայունությունը

Դիտվում է ամրացված ու ոչ ամրացված անհամասեռ ձեռացող կաշուն առաձիգ ձողերի կայունությունը ժամանակի անվերջ և վերջնական ինտերվալներում նյութի ուղափոխության կամայական միջուկի, տարրեր ձևերի բնութաների և ծայրերի տարրեր ձևի հենման դեպքում: Ստացված են ձողերի

կայունության սխյմանները ժամանակի անվերջ ինտեգրալներում: Կայունության որոշումները ժամանակի անվերջ և վերջնական ինտեգրալներում համապատասխանում են գինամիկ համակարգերի շարժման կայունության որոշմանը՝ ըստ Լյապունովի և Չեռանի:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Н. Х. Арутюнян, В. Б. Колмановский, ПММ, т. 43, № 4 (1979). ² Н. Х. Арутюнян, В. Б. Колмановский, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 33, № 4 (1980). ³ Н. Х. Арутюнян, Некоторые вопросы теории ползучести, ГИТТЛ, М.-Л., 1952. ⁴ Н. Х. Арутюнян, В. Б. Колмановский, ДАН СССР, т. 258, № 6 (1981). ⁵ Н. Х. Арутюнян, В. Б. Колмановский, ПММ, т. 45, № 6 (1981). ⁶ Н. Х. Арутюнян, Изв. АН СССР, МТТ, № 3, 1976. ⁷ А. Р. Ржаницын, Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени, Гостехиздат, М., 1949. ⁸ Ю. Н. Работнов, Элементы наследственной механики твердых тел, Наука, М., 1977. ⁹ П. Ф. Папкович, Строительная механика корабля, ч. 2, Судпромгиз, Л., 1941.

УДК 539.3

С. М. Мхитарян, Р. С. Туманян

О передаче нагрузки от произвольного числа
 равноотстоящих друг от друга кольцеобразных накладок
 к упругой плоскости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 7/II 1983)

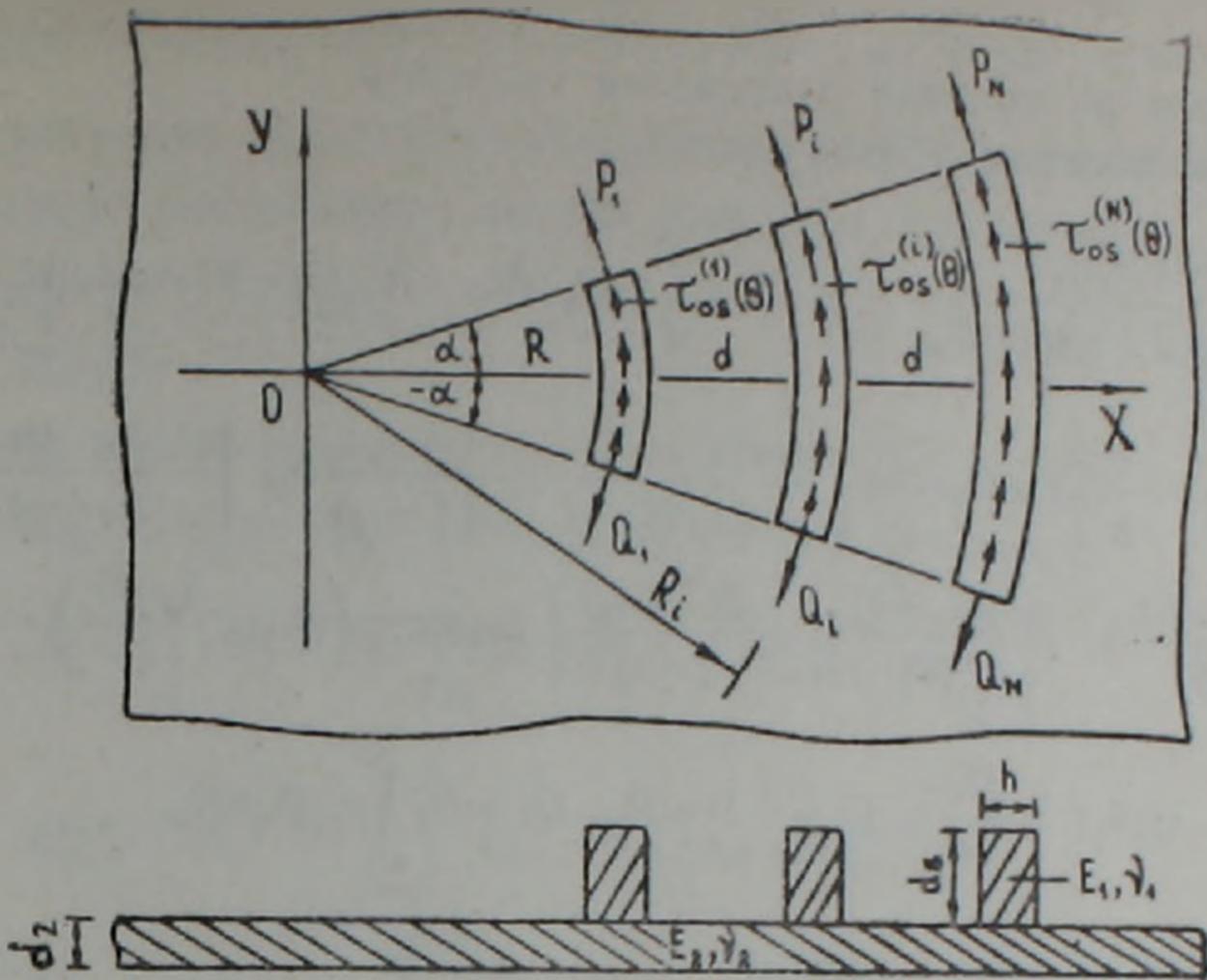
Контактные задачи о передаче нагрузки от прямолинейной тонкой накладки, коллинеарно скрепленной с упругой полуплоскостью на ее границе или поперечно скрепленной с ней, рассматривались в (1, 2). Исследованию обширного класса подобных задач посвящены многочисленные работы, подробная библиография которых приведена в (3). В (4) обсуждена задача о передаче нагрузок от произвольного числа параллельных и равноотстоящих друг от друга прямолинейных накладок к упругой плоскости.

В настоящей работе рассматривается аналогичная задача для произвольного числа равноотстоящих друг от друга кольцеобразных накладок, существенно отличающаяся от постановки задачи для прямолинейных накладок, потому что кольцеобразные накладки не находятся в одноосном напряженном состоянии. Под ними действуют и тангенциальные осевые и поперечные радиальные контактные напряжения.

1. Пусть упругая бесконечная пластина высотой d_2 с упругими постоянными E_2, ν_2 на своей верхней грани усилена системой произвольного числа N кольцеобразных упругих накладок с круговыми осями радиусов $R_i = R + (i-1)d$ ($i=1, 2, \dots, N$). Они имеют высоту d_s , ширину h , угол раствора 2α ($0 < \alpha < \pi$), упругие постоянные E_1, ν_1 и расположены на одинаковом расстоянии d друг от друга. Пусть, далее, накладки загружены указанными на рисунке силами. Будем считать, что $h, d_s \ll R_i$ ($h < d_s$). Требуется определить закон распределения контактных напряжений в области соединения накладок с пластиной.

Для вывода определяющего уравнения поставленной задачи воздействие кольцеобразных накладок заменим неизвестными осевыми тангенциальными $\bar{\tau}_{1s}(\theta)$ и поперечными радиальными $\bar{q}_{1s}(\theta)$ контактными напряжениями. По известной методике (5) вычислим осевую деформацию $\epsilon_{10}^{(2)}$ точек упругой плоскости под i -той накладкой.

Далее воспользуемся известными формулами (6) для коэффициентов Ламе в локальных координатах (s, n) . Затем осредняем уравнения теории упругости для кольцеобразных накладок по их



высоте и ширине. При этом поскольку $h, d_s \ll R_i$, то жесткостями изгиба накладок в вертикальном и поперечном направлениях пренебрегаем. В итоге приходим к уравнениям

$$\frac{1}{R_i} \frac{dT_i}{d\theta} + \frac{\tau_{0s}^{(i)}(\theta) - \bar{\tau}_{is}(\theta)}{d_s} = 0, \quad \bar{q}_{is}(\theta) = -\frac{d_s}{R_i} T_i(\theta)$$

и граничным условиям

$$T_i(-\alpha) = \frac{Q_i}{d_s}, \quad T_i(\alpha) = \frac{P_i}{d_s}$$

Здесь $T_i(\theta)$ — осевое усилие в i -той накладке. Из этих уравнений при помощи закона Гука будем иметь

$$\varepsilon_{is}^{(1)}(\theta) = \frac{1}{E_1 A_s} \left\{ Q_i + R_i \int_{-\alpha}^{\theta} [\bar{\tau}_{is}(\theta_0) - \tau_{0s}^{(i)}(\theta_0)] d\theta_0 \right\} \quad (1.1)$$

$(A_s = h d_s, \quad -\alpha < \theta < \alpha),$

где $\varepsilon_{is}^{(1)}(\theta)$ — осевая деформация i -той накладки.

Теперь, учитывая условие контакта $\varepsilon_{i0}^{(2)} = \varepsilon_{is}^{(1)}(\theta)$, решение поставленной задачи после перехода к безразмерным величинам окончательно сводим к решению следующей системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\delta_{ik} \text{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} + K_{ik}^*(\theta_0 - \theta) \right] \varphi_k'(\theta_0) d\theta_0 = \lambda \varphi_i(\theta) + f_i^0(\theta)$$

$(-\alpha < \theta < \alpha; \quad i = 1, 2, \dots, N) \quad (1.2)$

при граничных условиях

$$\varphi_i(-\alpha) = 0, \quad \varphi_i(\alpha) = 1, \quad (1.3)$$

вытекающих из условий равновесия накладок.

Здесь введены обозначения

$$\lambda = \frac{8\pi R d_2 E_2}{(1+\nu_2)(2-\nu_2) h d_s E_1}, \quad \varphi_k(\theta) = \int_{-\alpha}^{\theta} \tau_k(\theta_0) d\theta_0, \quad K_{ik}^*(\theta_0 - \theta) = k K_{ik}(\theta_0 - \theta),$$

$$K_{ik}(\theta_0 - \theta) = \frac{1}{R} \left\{ \sin(\theta_0 - \theta) + \frac{\sin 2(\theta_0 - \theta)}{2\Delta_{ik}(\theta)} + \frac{1+\nu_2}{2(3-\nu_2)} b_{ik} \left[-\frac{a_i}{k} \frac{\sin(\theta_0 - \theta)}{\Delta_{ik}^2(\theta)} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\sin 2(\theta_0 - \theta)}{2\Delta_{ik}^2(\theta)} + \frac{\sin(\theta_0 - \theta)}{\Delta_{ik}(\theta)} \right] - \frac{2(1-\nu_2)}{3-\nu_2} \left[b_{ik} \arctg \left(d_{ik} \operatorname{tg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} \right) - a_{ik} \theta_0 \right] \Bigg\},$$

$$\tau_k(\theta_0) = \frac{R_k}{P} \bar{\tau}_{ks}(\theta_0), \quad P = P_i - Q_i + R_i \int_{-\alpha}^{\alpha} \tau_{0s}^{(i)}(\theta_0) d\theta_0,$$

$$a_{ik} = \frac{a_i^2 + k^2}{2a_i k}, \quad b_{ik} = \frac{a_i^2 - k^2}{a_i k}, \quad d_{ik} = \frac{a_i + k}{a_i - k}, \quad a_i = 1 + (i-1) \frac{d}{R},$$

$\Delta_{ik}(\theta) = a_{ik} - \cos(\theta_0 - \theta)$, δ_{ik} — символ Кронекера.

Функция $f_i^0(\theta)$ учитывает осевую деформацию i -той накладки, обусловленную приложенными к ней известными силовыми факторами.

При этом радиальные напряжения будут определяться по формуле

$$q_i(\theta) = -q_i - \varphi_i(\theta) + \int_{-\alpha}^{\theta} \tau_0^{(i)}(\theta_0) d\theta_0, \quad q_i(\theta) = \frac{R_i}{P} \bar{q}_{is}(\theta), \quad (1.4)$$

где

$$q_i = \frac{Q_i}{P}, \quad \tau_0^{(i)}(\theta_0) = \frac{R_i}{P} \bar{\tau}_{0s}^{(i)}(\theta_0).$$

2. Для решения систем сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (1.2) при граничных условиях (1.3), следуя известной процедуре (7,8), положим

$$\varphi_i(\theta) = \varphi_i'(\theta) = \frac{\sec \theta/2}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}} \sum_{n=0}^{\infty} x_n^{(i)} T_n \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \quad (2.1)$$

$$(-\alpha < \theta < \alpha; \quad i = 1, 2, \dots, N),$$

где $T_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — многочлены Чебышева первого рода. Отсюда после простых выкладок получим

$$\varphi_i(\theta) = \sec \frac{\alpha}{2} \left\{ x_0^{(i)} \left[\pi - \arccos \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \right] - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} x_n^{(i)} \sin \left[n \arccos \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \right] \right\} \quad (-\alpha \leq \theta \leq \alpha; \quad i = 1, 2, \dots, N). \quad (2.2)$$

Из граничных условий непосредственно находим $x_0^{(i)} = \pi^{-1} \cos \frac{\alpha}{2}$.

Относительно остальных коэффициентов $\{x_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$ получим следующую систему бесконечных систем линейных уравнений:

$$x_m^{(i)} + \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} K_{m,n}^{(i,k)} x_n^{(k)} = a_m^{(i)} \quad (i=1, 2, \dots, N; m=1, 2, \dots), \quad (2.3)$$

где введены обозначения

$$K_{m,n}^{(i,k)} = c [ik^{-1} A_{m,n}^{(i,k)} - \lambda i \delta_{ik} B_{m,n}], \quad c = (2\pi^2)^{-1} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

$$a_m^{(i)} = c \left[i f_m^{(i)} - x_0^{(i)} \sum_{k=1}^N ik^{-1} A_{m,0}^{(i,k)} - x_0^{(i)} \pi h_m \sec \frac{\alpha}{2} \right],$$

$$A_{m,n}^{(i,k)} = 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f_1(\varphi, t) \sin m\varphi \cos nt d\varphi dt,$$

$$B_{m,n} = -\frac{4}{n} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi \sin m\varphi \sin n\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \varphi} d\varphi,$$

$$f_m^{(i)} = \int_{-\alpha}^{\alpha} f_i^{(i)}(\theta) \frac{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}}{\cos \frac{\theta}{2}} U_{m-1} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) d\theta + h_m^{(i)},$$

$$f_1(\varphi, t) = K_{ik}^* \left| 2 \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cos t \right) - 2 \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cos \varphi \right) \right| \frac{\sin \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \varphi}.$$

Здесь $U_{m-1}(x)$ ($m=1, 2, \dots$) — многочлены Чебышева второго рода, а коэффициенты h_m и $h_m^{(i)}$ выражаются в конечном виде или однократными интегралами Фурье простых структур.

3. Перейдем к исследованию (2.3). С этой целью оценим суммы

$$S_m = \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} |K_{m,n}^{(i,k)}| \leq S_m^{(1)} + S_m^{(2)} \quad (i=1, 2, \dots, N; m=1, 2, \dots), \quad (3.1)$$

где

$$S_m^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} C_{m,n}^{(i,k)} \right|, \quad S_m^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} R_{m,n}^{(i,k)} \right|,$$

$$C_{m,n}^{(i,k)} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \Phi^{(i,k)}(\varphi, t) \sin m\varphi \sin nt d\varphi dt,$$

$$R_{m,n}^{(i,k)} = \frac{2\lambda}{\pi^2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} i \delta_{ik} \int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi \sin m\varphi \sin n\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \varphi} d\varphi, \quad (3.2)$$

$$\Phi^{(i,k)}(\varphi, t) = -\frac{i}{2k} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial t} |f_1(\varphi, t)|.$$

Согласно неравенству Коши—Буняковского можем записать

$$S_m^{(1)} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} |C_{m,n}^{(1,k)}| \right|^{1/2}.$$

Из (3.2) видно, что последовательность $|C_{m,n}^{(1,k)}|_{m,n=1}^{\infty}$ является последовательностью коэффициентов Фурье функции $\Phi^{(1,k)}(\varphi, t)$ по системе $\{\sin m\varphi \sin nt\}_{m,n=1}^{\infty}$, которые составляют полную ортогональную систему в квадрате $0 \leq \varphi, t \leq \pi$. Поэтому на основе известного неравенства Бесселя двойной ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |C_{m,n}^{(1,k)}|^2$ сходится. Далее, как в (8), получим, что $S_m^{(1)} = O(m^{-(1-\epsilon)/2})$ при $m \rightarrow \infty$. Такой же порядок имеют суммы $S_m^{(2)}$. В результате $S_m = O(m^{-(1-\epsilon)/2})$ при $m \rightarrow \infty$, т. е. система (2.3) при любом значении параметра λ квазивполне регулярна.

Далее можно показать, что свободные члены бесконечных систем стремятся к нулю при $m \rightarrow \infty$ со скоростью не менее, чем $m^{-1/2}$.

Радиальные контактные напряжения будут выражаться формулой (1.4), где $\varphi_i(\theta)$ дается при помощи (2.2).

Институт механики
Академии наук Армянской ССР
Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса.

Ս. Մ. ՄԵԼԻՍՅԱՆ, Ի. Ս. ԹՈՒՄԱՆՅԱՆ

Առաձգական հարթությանը կամայական թվով միմյանցից հավասարահեն ղասավորված օղակաձև վերդրակներից բեռի փոխանցման մասին

Դիտարկվում է կամայական թվով միմյանցից հավասարահեն ղասավորված շրջանագծային առանցքներով վերդրակներից առաձգական հարթությանը բեռի փոխանցման վերաբերյալ կոնտակտային խնդիրը: Ծնթադրվում է, որ վերդրակների տակ գործում են ինչպես շոշափող, այնպես էլ շառավղային կոնտակտային լարումներ: Խնդրի լուծումը բերվում է սինգուլյար ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի լուծմանը, որը Չեբիշևի բազմանդամների մեթոդի օգնությամբ իր հերթին բերվում է հավասարումների անվերջ համակարգերի համակարգին: Հետազոտվում է վերջին սինգուլյարությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Н. Х. Арутюнян, ПММ, т. 32, вып. 4 (1968). ² Б. Л. Абрамян, МТТ, № 5, 1972. ³ Развитие теории контактных задач в СССР, Наука, М., 1976. ⁴ К. Л. Агамян, МТТ, № 2, 1972. ⁵ Н. И. Мухелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Наука, М., 1966. ⁶ Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян, Кручение упругих тел, Физматгиз, М., 1963. ⁷ Г. А. Морарь, Г. Я. Попов, ПММ, т. 35, вып. 1 (1971). ⁸ Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян, ПММ, т. 36, вып. 5 (1972).

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3 : 517.946

В. Г. Мазья, С. А. Назаров

О парадоксе Сапонджяна—Бабушки
 в задачах теории тонких пластин

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 7/IV 1983)

Известный парадокс Сапонджяна—Бабушки (¹⁻³) заключается в том, что при аппроксимации тонкой круговой пластины правильными многоугольниками со свободно опертыми краями предельное решение не удовлетворяет условиям свободного опирания на окружности. Различным аспектам этого парадокса в последнее время уделялось много внимания (см. (⁴⁻⁷) и др.). В настоящей работе найдены другие эффекты той же природы. В частности, рассмотрены пластины с выпуклыми отверстиями; здесь в отличие от случая выпуклой пластины краевое условие на многоугольнике в пределе не сохраняется. Указаны способы аппроксимации гладкого контура, приводящие к предельному переходу от условий свободного опирания к условиям жесткого защемления.

1°. Выпуклая пластина. Рассмотрим пластину ω , ограниченную выпуклым замкнутым контуром γ единичной длины. Обозначим через $P^{(N)} = \{p_j^{(N)}\}_{j=1}^N$ набор точек на γ , делящих этот контур на N дуг равной длины. Впишем в ω ломаную γ_N с вершинами в точках $p_j^{(N)}$. Пластину, ограниченную контуром γ_N , обозначим через ω_N . Прогиб u_N пластины ω_N со свободно опертым краем удовлетворяет краевой задаче

$$D\Delta^2 u_N(x) = q(x), \quad x \in \omega_N; \quad (1)$$

$$u_N(x) = \Delta u_N(x) = 0, \quad x \in \gamma_N. \quad (2)$$

Так как пластина выпуклая, то равномерно (по N) ограничены интегралы $\int_{\omega_N} |\nabla u_N(x)|^2 dx$, $\int_{\omega_N} |\nabla \Delta u_N(x)|^2 dx$. Поэтому предельное решение u и его лапласиан Δu являются слабыми пределами последовательностей в пространстве Соболева $\dot{W}_2^1(\omega)$. Значит, u удовлетворяет граничным условиям (2) на γ , которые, разумеется, не являются условиями свободного опирания контура γ . В этой неустойчивости и заключается парадокс Сапонджяна—Бабушки.

Отметим, прежде всего, что задавая в вершинах многоугольника ω_N сосредоточенные моменты, можно добиться выполнения произволь-

ного распределения моментов на γ в пределе. Точнее, подчиним функцию u_N дополнительному условию

$$\Delta u_N(x) \sim \frac{1}{4} m(\rho_j^{(N)}) r^{-\pi/\alpha_j^{(N)}} \sin \frac{\pi\theta}{\alpha_j^{(N)}}, \quad r \rightarrow 0, \quad (3)$$

где (r, θ) — полярные координаты с центром $\rho_j^{(N)}$, $\alpha_j^{(N)}$ — раствор угла многоугольника ω_N в точке $\rho_j^{(N)}$, m — гладкая функция на γ . Такое решение существует и единственно, но обращает интеграл энергии в бесконечность. Можно показать, что последовательность решений задач (1)–(3) сходится в $W_2^1(\omega)$ к решению v уравнения (1) в ω с граничными условиями

$$v=0, \quad \Delta v = \kappa m \quad \text{на } \gamma, \quad (4)$$

где κ — кривизна контура γ . В частности, при соответствующем выборе функции m можно прийти при $N \rightarrow \infty$ к решению задачи о свободно опертой пластине ω .

2°. Пластина с отверстием. Пусть теперь пластина ограничена двумя гладкими замкнутыми контурами Γ и γ , причем кривая γ расположена внутри Γ . Рассмотрим пластину Ω_N , получающуюся из Ω заменой γ на ломаную γ_N . Прогиб u_N пластины Ω_N удовлетворяет краевой задаче

$$D\Delta^2 u_N(x) = q(x), \quad x \in \Omega_N; \quad L_1 u_N(x) = L_2 u_N(x) = 0, \quad x \in \Gamma; \quad (5)$$

$$u_N(x) = \Delta u_N(x) = 0, \quad x \in \gamma_N, \quad (6)$$

где $\{L_1, L_2\}$ — какой-нибудь из операторов граничных условий в теории тонких пластин.

Оказывается, что в отличие от случая выпуклой пластины здесь краевое условие не сохраняется при $N \rightarrow \infty$. Именно, последовательность $\{u_N\}$ сходится к решению w краевой задачи

$$D\Delta^2 w(x) = q(x), \quad x \in \Omega; \quad L_1 w(x) = L_2 w(x) = 0, \quad x \in \Gamma; \quad (7)$$

$$w(x) = \Delta w(x) + 4\kappa(s) \frac{\partial w}{\partial n}(x) = 0, \quad x \in \gamma, \quad (8)$$

где (s, n) — криволинейные координаты точки x ; n — расстояние до γ вдоль внутренней (по отношению к Ω) нормали; s — длина дуги, измеренная на γ от точки $\rho_1^{(N)}$.

Причина неустойчивости краевого условия $\Delta u = 0$ на вогнутом участке границы связана с появлением на аппроксимирующей ломаной входящих углов. В окрестности такого угла $\nabla \Delta u \notin L_2$, и поэтому рассуждение, приведенное в п. 1° в связи с парадоксом Сапонджяна — Бабушки, неприменимо. В угловых точках лапласиан решения задачи (5), (6) имеет особенность вида (3), которая отсутствует у решения задачи (1), (2). С накоплением этих сосредоточенных моментов и связано возникновение слагаемого $4\kappa \partial w / \partial n$ в (8) (ср. с (4)). Между прочим, здесь, как и в случае выпуклой пластины, можно, распределяя дополнительные моменты в вершинах ломаной γ_N , прийти к про-

извольным значениям Δw на γ . Сформулированные заключения являются непосредственными следствиями асимптотических формул для u_N при бесконечном увеличении числа звеньев ломаной γ_N . При $n \leq N^{-1/2}$ главный член асимптотики решения u_N задачи (5), (6) совпадает с w . При $n \leq N^{-1/2}$ вне кругов $D_j^{(N)}$ радиусов $N^{-3/2}$ с центрами

в точках $p_j^{(N)}$: $u_N(x) \sim w(x) + \frac{1}{N^2} z(s) \frac{\partial w}{\partial n}(x) W(sN, nN)$, где пограничный слой $W(y_1, y_2)$ — экспоненциально убывающая при $y_2 \rightarrow \infty$ бигармоническая функция в полуполосе $\{y \in R^2: y_2 > 0, |y_1| < 1/2\}$, удовлетворяющая условиям периодичности при $y_1 = -1/2$ и $y_1 = 1/2$. Кроме того, $W(y_1, 0) = \frac{1}{2}(y_1^2 - |y_1|)$, $\Delta_y W(y_1, 0) = 4$ при $|y_1| < \frac{1}{2}$; $W(y) \sim \frac{1}{\pi}|y| \times$
 $\times \left(\sin \theta \log \frac{1}{|y|} + \theta \cos \theta \right) - \frac{y_1}{2}$ при $|y| \rightarrow 0$. Внутри кругов $D_j^{(N)}$: $u_N(x) \sim$
 $\sim -\frac{\partial W}{\partial n}(x) r^{2-\pi/\beta_j^{(N)}} \sin \frac{\pi\theta}{\beta_j^{(N)}}$, где $\beta_j^{(N)} = 2\pi - \alpha_j^{(N)}$; (r, θ) — те же полярные координаты, что и в (3).

3°. Переход к условиям жесткого защемления. При других способах аппроксимации гладкого контура многоугольными возможен также переход в пределе от условий свободного опирания к условиям жесткого защемления.

Пусть G — плоская область, ограниченная гладким контуром Γ . Приближим ее последовательностью областей G_N , построенных следующим образом. Пусть $\eta_1^{(N)}, \dots, \eta_N^{(N)}$ — замкнутые дуги на Γ , не имеющие общих внутренних точек. Через $\zeta_j^{(N)}$, $1 \leq j \leq N$, обозначим хорды, стягивающие ближайшие концы дуг $\eta_j^{(N)}$ и $\eta_{j+1}^{(N)}$, и через $\zeta_N^{(N)}$ — хорду, соединяющую концы дуг $\eta_N^{(N)}$ и $\eta_1^{(N)}$. (Не исключается случай вырождения $\eta_j^{(N)}$ и $\zeta_j^{(N)}$ в точку). Проведем через середину дуги $\eta_j^{(N)}$ внутреннюю нормаль к Γ и на ней на расстоянии h_N отметим точку $q_j^{(N)}$; $h_N = o(1)$ при $N \rightarrow \infty$. Соединим $q_j^{(N)}$ с концами дуги $\eta_j^{(N)}$ отрезками $T_{j,1}^{(N)}$ и $T_{j,2}^{(N)}$ (если $\eta_j^{(N)}$ — точка, то $T_{j,1}^{(N)} = T_{j,2}^{(N)}$). Пусть Γ_N — ломаная, составленная из отрезков $T_{j,k}^{(N)}$ и хорд $\zeta_j^{(N)}$; $|\eta_j^{(N)}|$ и $|\zeta_j^{(N)}|$ — длины дуг $\eta_j^{(N)}$ и хорд $\zeta_j^{(N)}$, а G_N — область, ограниченная контуром Γ_N . Предположим, что при $N \rightarrow \infty$ реализуется один из следующих двух вариантов:

- i) $\sum_{j=1}^N |\zeta_j^{(N)}| = o(1)$, $|\eta_j^{(N)}| = o(h_N)$, $|\zeta_j^{(N)}| = o(|\log h_N|^{-1})$;
- ii) $\sum_{j=1}^N |\zeta_j^{(N)}| = o(1)$, $|\zeta_j^{(N)}| = o(|\eta_j^{(N)}|)$, $|\eta_j^{(N)}| = o(h_N^{2/3})$.

Будем считать, что пластина G_N свободно оперта по отрезкам $T_{j,1}^{(N)}$ и $T_{j,2}^{(N)}$, что на хордах $\zeta_j^{(N)}$ выполнены какие-нибудь однородные условия теории пластин. Тогда предельное при $N \rightarrow \infty$ решение будет удовлетворять условиям жесткого защемления на контуре Γ .

Доказательство этого факта не требует построения асимптотики

и основано на сравнительно грубых интегральных оценках. Например, в случае i) всякая функция U , равная нулю на $T_{i,1}^{(N)}$ и $T_{i,2}^{(N)}$, $1 \leq j \leq N$, удовлетворяет неравенству

$$\int_{x: n-h^{(N)}} \left| \frac{\partial U}{\partial n}(x) \right|^2 ds \leq \text{const} \frac{\max |r_j^{(N)}|}{|\log h_N|} \int_{\Omega^N} \sum_{i,k=1}^2 \left| \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k}(x) \right|^2 dx.$$

Оценки такого рода малочувствительны к способу аппроксимации области, и для них несущественно, какому уравнению удовлетворяет функция U . Поэтому сказанное выше о предельном переходе к условию жесткого защемления для решения уравнения Софи Жермен относится в равной мере к уравнениям нелинейного изгиба и к динамическим задачам теории пластин.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Վ. Գ. ՄԱՋՅԱ, Ս. Ա. ՆԱԶԱՐՈՎ

Բարակ սալերի խնդիրներում առաջացող Սապոնջյան-Բաբուշկայի պարադոքսի վերաբերյալ

Հայտնի Սապոնջյան-Բաբուշկայի պարադոքսը կայանում է նրանում, որ եզրերով ազատ հենված կանոնավոր բազմանկյուն սալի ծոման խնդրի լուծումից կողմերի թիվն անսահման մեծացնելով չի ստացվում եզրերով ազատ հենված կլոր սալի ծոման խնդրի լուծումը: Այդ պարադոքսի տարբեր դրվածքներ մեծ ուշադրության են արժանացել վերջին ժամանակները: Աշխատանքում ուսումնասիրվում են նույն բնույթի հարցեր: Մասնավորապես, ուսումնասիրվում են ուռուցիկ անցքերով սալեր: Այստեղ, ի տարբերություն ուռուցիկ սալի ծոման խնդրի, սահմանային դեպքում, եզրային պայմանը բազմանկյան վրա չի պահպանվում: Ցույց են տրվում ողորկ եզրի այնպիսի մոտարկություններ, որոնք բերում են սահմանային դեպքում եզրով ազատ հենված սալի եզրային պայմանից ամրակցված եզրի պայմանին: Վերջինս տեղի ունի նաև ոչ գծային ծոման և սալերի ծոման դինամիկական խնդիրներում:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ О. М. Сапонджян, Изв. АН АрмССР, т. 5, № 2 (1952). ² И. Бабушка, Чехословацкий мат. журн., т. 11, № 2 (1961). ³ О. М. Сапонджян, Изгиб тонких упругих плит, Айкастан, Ереван, 1975. ⁴ А. Hanuska, Beton- und Stahlbetongau, v. 9, 1969. ⁵ N. W. Murray, Proc. Camb. Phil. Soc., v. 73 (1973). ⁶ G. Rieder, Mech. Res. Comm. v. 1 (1974) ⁷ K. Rajaiah, A. K. Rao, J. Appl. Mech., v. 48, (1981).

УДК 621.315.592

ФИЗИКА

Р. Г. Тарханян

**Высокочастотный эффект Нернста и диэлектрическая
 проницаемость полупроводников при наличии градиента
 температуры**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. М. Авакьянцем 13/VI 1983)

1. В работе исследована возможность возникновения высокочастотного термоэлектрического поля в анизотропных полупроводниках при наличии градиента температуры $\vec{\nabla}T$ и электромагнитной волны — аналог эффекта Нернста—Эттингсгаузена в случае, когда роль внешнего магнитного поля играет магнитное поле \vec{H} электромагнитной волны. Эффект обусловлен холловским дрейфом носителей заряда под действием \vec{H} и постоянного термоэлектрического поля, компенсирующего $\vec{\nabla}T$. При наличии этого эффекта частота волны, распространяющейся в кристалле, оказывается существенно зависящей от $\vec{\nabla}T$ (1,2). Такие волны были обнаружены экспериментально (3) и получили название термомагнитных волн (4). В указанных работах, однако, не учитывалось то обстоятельство, что в изотропных (кубических) и анизотропных кристаллах эффект проявляется по-разному. Несмотря на широкое применение анизотропных полупроводников (например, Te, Se, CdS и другие соединения групп A_2B_5 и A_2B_6) в электронном приборостроении указанный эффект в них до сих пор не исследовался. В настоящей статье построена строгая теория этого явления, определена величина переменного термоэлектрического поля с учетом анизотропии параметров полупроводника, а также получен и исследован тензор комплексной диэлектрической проницаемости полупроводников при наличии градиента температуры.

2. Рассмотрим анизотропный полупроводник с одним сортом носителей заряда. Кинетическое уравнение для функции распределения носителей $f(\vec{p}, \vec{r}, t)$ при наличии градиента температуры $\vec{\nabla}T$ и электромагнитной волны $\vec{E}, \vec{H} \sim \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]$ имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\nabla f + e\left(\vec{E}_0 + \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}\vec{H}]\right) \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} + \frac{f - f_0}{\tau(\varepsilon)} = 0, \quad (1)$$

где \vec{E}_0 — статическое термоэлектрическое поле, $\tau(\varepsilon)$ — время релаксации, зависящее от энергии электронов (или дырок) $\varepsilon = (2m)^{-1} \mu_{ij} p_i p_j$, m — масса свободного электрона, μ_{ij} — безразмерный тензор обратной эф-

эффективной массы, $\vec{v} = m^{-1} \hat{\mu} \vec{p}$ — скорость, $f_0(\epsilon)$ — равновесная функция распределения Ферми — Дирака.

Решение уравнения (1) ищем в виде $f = f_0 + f_1 + f_2$, где f_1 — стационарная неравновесная добавка к f_0 , обусловленная градиентом температуры, $f_2 \sim e^{-i\omega t}$ — нестационарная добавка, обусловленная наличием электромагнитного поля. Используя (1), получим

$$f_1 = \vec{v} g_1, \quad g_1 = -\tau \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{\epsilon}}{T} + \hat{e} \hat{\alpha} \right) \vec{\nabla} T, \quad (2)$$

$$f_2 = \vec{v} g_2, \quad g_2 = -\frac{\tau}{1 - i\omega\tau} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} e \vec{E} + \frac{e}{mc} \left[\vec{H}, \hat{\mu} \vec{g}_1 \right] \right), \quad (3)$$

где $\vec{\epsilon}$ — химический потенциал, $\hat{\alpha}$ — термоэлектрический тензор, компоненты которого определяются из условия равенства нулю постоянного тока:

$$\vec{J}_0 = e \int \vec{v} f_1 d\vec{p} = 0, \quad d\vec{p} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} dp_x dp_y dp_z. \quad (4)$$

Используя (3), для составляющих переменного тока $\vec{J} = e \int \vec{v} f_2 d\vec{p}$ получим

$$J_i = \sigma_{ik} E_k + \sigma_{ihl} \epsilon_{kl} \nabla_l T, \quad (5)$$

где

$$\sigma_{ik} = e^2 \int \frac{v_i v_k \tau}{1 - i\omega\tau} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) d\vec{p} \quad (6)$$

— тензор высокочастотной электропроводности в отсутствие пространственной дисперсии,

$$\sigma_{ihl} = -\frac{e^3}{mc} \int \frac{v_i v_j \tau^2}{1 - i\omega\tau} \delta_{jkn} \mu_{nm} \left(\alpha_{ml} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{\epsilon}}{Te} \delta_{ml} \right) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) d\vec{p} \quad (7)$$

— псевдотензор третьего ранга, описывающий высокочастотные термомагнитные эффекты, δ_{ml} — символ Кронекера, δ_{jkn} — тензор Леви — Чивита.

Соотношение (5) представляет собой материальное уравнение, связывающее переменные части плотности тока и напряженностей электрического и магнитного полей при наличии градиента температуры в анизотропной проводящей среде. Это соотношение можно переписать в виде

$$E_i = \rho_{ij} J_j - \rho_{ij} \sigma_{jkl} H_k \nabla_l T, \quad (8)$$

где ρ_{ij} — высокочастотный тензор удельного сопротивления. Добавочный член в (8), пропорциональный \vec{H} и $\vec{\nabla} T$, описывает интересующий нас новый термомагнитный эффект — возникновение добавочного переменного термоэлектрического поля.

Для определенности рассмотрим одноосный полупроводник с носителями, изоэнергетические поверхности которых представляют собой эллипсоиды вращения. Исключая из (7) величины α_{ml} с помощью

(4) и (5) с помощью условия $N = \int f_0 d\rho$ (N — концентрация носителей), для тензоров (6) и (7) в системе главных осей тензора μ_{ij} получим

$$\sigma_{ik} = \sigma(\omega) \mu_{ij} \delta_{jk}, \quad (9)$$

$$\sigma_{ikl} = \sigma(\omega) Q(\omega) \mu_{ij} \mu_{kl} \delta_{ikl}, \quad (10)$$

где

$$\sigma(\omega) = \frac{Ne^2}{m} \left\langle \frac{\tau}{1 - i\omega\tau} \right\rangle, \quad (11)$$

$$Q(\omega) = \frac{Ne^2}{m^2 c \tau(\omega)} \left(\left\langle \frac{\tau^2 x}{1 - i\omega\tau} \right\rangle - \frac{\langle \tau x \rangle}{\langle \tau \rangle} \left\langle \frac{\tau^2}{1 - i\omega\tau} \right\rangle \right). \quad (12)$$

Символ $\langle \rangle$ означает усреднение:

$$\langle \varphi(x) \rangle = z_0^{-3/2} \int_0^\infty \varphi(x) x^{3/2} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial x} \right) dx, \quad (13)$$

$$x = \frac{\varepsilon}{T}, \quad z_0 = \frac{z_0}{T}, \quad z_0 = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 N \mu_{\perp})^{2/3} \mu_{\parallel}^{1/3} \text{ — уровень Ферми при } T=0,$$

μ_{\parallel} и μ_{\perp} — главные значения тензора μ_{ij} вдоль и поперек оптической оси кристалла.

Легко видеть, что компоненты тензора ε_{ikl} удовлетворяют соотношениям симметрии

$$\sigma_{ikl}(\omega) = -\sigma_{ilk}(\omega), \quad \sigma_{ikl}^*(\omega) = \sigma_{ikl}(-\omega) \quad (14)$$

и что при $\varphi = \text{const}$ $\langle \varphi \rangle = \varphi$. Тогда из (12) следует, что если время релаксации τ не зависит от энергии ε (например, при рассеянии носителей на нейтральных примесях), то $Q(\omega) = 0$, т. е. термоэлектроманнитные эффекты невозможны.

Заметим, что при $\omega \rightarrow 0$ (12) переходит в известное (6) выражение для постоянной Нернста в статическом магнитном поле. Поэтому введенный выше коэффициент $Q(\omega)$ может быть назван высокочастотным коэффициентом Нернста. Отметим также, что при учете (9) и (10) материальное соотношение (8) принимает вид

$$E_i = \frac{1}{\mu_{ij} \sigma(\omega)} J_i + Q(\omega) [\hat{\mu} \nabla T, \vec{H}]_i, \quad (15)$$

откуда следует, что переменное термоэлектрическое поле в анизотропном полупроводнике возникнет не в направлении вектора $[\nabla T, \vec{H}]$, как это имеет место в изотропном веществе, а вдоль вектора $[\hat{\mu} \nabla T, \vec{H}]$. Это значит, что анизотропия эффективной массы приводит к вращению термоэлектрического поля вокруг вектора \vec{H} и к появлению составляющей этого поля в плоскости, содержащей \vec{H} и ∇T .

Используя (11—13) и полагая, что время релаксации $\tau(x) = \tau_0 x^r$, нетрудно получить явные выражения для кинетических коэффициентов $\sigma(\omega)$ и $Q(\omega)$ при произвольном значении параметра рассеяния r и при произвольной степени вырождения газа свободных носителей.

Так, в области высоких частот в линейном приближении по малому параметру $(\omega\tau_0)^{-1}$ получим

$$\sigma(\omega) = \frac{iNe^2}{m\omega} \left(1 + \frac{1}{i\omega\tau_0} \cdot \frac{F_{3/2-r}}{F_{3/2}} \right), \quad (16)$$

$$Q(\omega) = \frac{i}{m\omega} \left[\frac{F_{r+5/2}}{F_{r+3/2}} - \frac{F_{3/2}}{F_{3/2}} + \frac{1}{i\omega\tau_0} \left(\frac{F_{5/2}F_{3/2-r}}{F_{3/2}^2} - \frac{F_{5/2-r}}{F_{3/2}} \right) \right], \quad (17)$$

где $F_k = F_k(\zeta/T) = \int_0^\infty x^k \left(-\frac{\partial f_0}{\partial x} \right) dx$ — однопараметрический интеграл

Ферми. В предельных случаях сильно вырожденных и невырожденных носителей

$$F_k(z) = z^k \left[1 + k(k-1) \frac{\pi^2}{6z^2} + \dots \right] \quad (18a)$$

и

$$F_k(z) = e^z \Gamma(k+1) \quad (18b)$$

соответственно. При условии $\exp\left(\frac{\zeta}{T}\right) \ll 1$, используя (18b), из (16)

и (17) получим

$$Q(\omega) = \frac{r}{c} \cdot \frac{\sigma(\omega)}{Ne^2}, \quad \sigma(\omega) = \frac{Ne^2}{m\omega} \left[i + \frac{1}{\omega\tau_0} \cdot \frac{4\Gamma\left(\frac{5}{2}-r\right)}{3\sqrt{\pi}} \right],$$

откуда следует, что знак и величина коэффициента $Q(\omega)$ существенно зависят от r , т. е. от механизма рассеяния носителей.

3. Исследуем теперь влияние градиента температуры на электромагнитные свойства анизотропных полупроводников. Подставим материальное соотношение (5) в уравнение Максвелла $c \operatorname{rot} \vec{H} = 4\pi \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\epsilon}^L \vec{E})$, где $\hat{\epsilon}^L$ — тензор диэлектрической проницаемости кристаллической решетки, и введем вектор электрической индукции $\vec{D} = \hat{\epsilon}^L \vec{E} + \frac{4\pi i}{\omega} \vec{J}$. Тогда уравнение Максвелла и соответствующее материальное

соотношение можно представить в виде

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \vec{D} = \hat{\epsilon}^E \vec{E} + \hat{\epsilon}^T \nabla T, \quad (19)$$

где

$$\epsilon_{jk}^E = \epsilon_{jk}^L + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{jk}, \quad \epsilon_{jk}^T = \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{jlk} H_l. \quad (20)$$

Таким образом, наличие градиента температуры приводит к тому, что вектор индукции \vec{D} оказывается суммой двух векторов: вектора „истинной“ электрической индукции $\hat{\epsilon}^E \vec{E}$ и вектора $\hat{\epsilon}^T \nabla T$, который мо-

жет быть назван вектором термоэлектрической индукции. Свойства симметрии тензоров $\hat{\epsilon}^E$ и $\hat{\epsilon}^T$ определяются согласно обобщенному принципу симметрии кинетических коэффициентов (5). Действительно, учитывая (9) и (14), получим

$$\epsilon_{jk}^T(\vec{H}) = \epsilon_{kj}^T(-\vec{H}), \quad \epsilon_{jk}^E = \epsilon_{kj}^E. \quad (21)$$

Кроме того, из (20) и (21) следует, что тензор $\hat{\epsilon}^T$ антисимметричен: $\epsilon_{jk}^T(\vec{H}) = -\epsilon_{kj}^T(\vec{H})$. Так как антисимметричный тензор второго ранга дуален аксиальному вектору \vec{a} с компонентами $a_x = \epsilon_{yz}^T$, $a_y = -\epsilon_{xz}^T$, $a_z = \epsilon_{xy}^T$, то материальное соотношение (19) можно переписать в виде

$$\vec{D} = \hat{\epsilon}^E \vec{E} + [\vec{\nabla} T, \vec{a}], \quad (22)$$

откуда следует, что вектор термоэлектрической индукции всегда направлен перпендикулярно вектору $\vec{\nabla} T$.

Исключая из (20) магнитное поле $\vec{H} = \frac{c}{\omega} [\vec{k} \vec{E}]$, представим материальное соотношение (19) в виде

$$\vec{D} = \hat{\epsilon} \vec{E}, \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^E + \frac{4\pi ic}{\omega^2} \sigma_{ijkl} \delta_{npj} k_p \nabla_l T, \quad (23)$$

где ϵ_{ij} — тензор комплексной диэлектрической проницаемости. Используя (9), (10), (20) и (23), легко показать, что в системе координат с осью z вдоль оптической оси кристалла \vec{C} и осью x в плоскости, проходящей через $\vec{\nabla} T$ и \vec{C} , тензор ϵ_{ij} имеет вид

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp}^E + \gamma k_z \nabla_z T & 0 & -\gamma k_x \nabla_z T \\ -\frac{\mu_{\perp}}{\mu_{\parallel}} \gamma k_y \nabla_x T & \epsilon_{\perp}^E + \gamma \left(k_z \nabla_z T + \frac{\mu_{\perp}}{\mu_{\parallel}} k_x \nabla_x T \right) & -\gamma k_y \nabla_z T \\ -\gamma k_z \nabla_x T & 0 & \epsilon_{\parallel}^E + \gamma k_x \nabla_x T \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где

$$\gamma = \frac{4\pi ic}{\omega^2} \mu_{\perp} \mu_{\parallel} \sigma(\omega) Q(\omega), \quad \epsilon_{\perp, \parallel}^E = \epsilon_{\perp, \parallel}^L + \frac{4\pi}{\omega} i \sigma(\omega) \mu_{\perp, \parallel}. \quad (25)$$

В отсутствие же градиента температуры выражение для ϵ_{ij} гораздо проще:

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp}^E & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp}^E & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel}^E \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Сравнение тензоров (24) и (26) показывает, что наличие $\vec{\nabla} T$ приводит, во-первых, к появлению гиротропии, т. е. членов в ϵ_{ij} , линейных по волновому вектору \vec{k} . Эти члены зависят как от направления вектора $\vec{\nabla} T$, так и от направления распространения волны. Такая терминдуцированная гиротропия в отличие от естественной оптической активности может иметь место не только в кристаллах

без центра симметрии, но и в центросимметричных кристаллах. Во-вторых, наличие $\vec{\nabla}T$ приводит к существенному изменению частотной зависимости компонент тензора комплексной диэлектрической проницаемости. Это обстоятельство открывает возможность управления частотой воли, распространяющихся в кристалле, путем изменения $\vec{\nabla}T$. И наконец, градиент температуры приводит к резкому изменению свойств симметрии тензора диэлектрической проницаемости и тем самым к изменению всех электромагнитных свойств полупроводников.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Հ. ԹԱՐԵԱՆՅԱՆ

Բարձրհաճախային ներնստի էֆեկտը և կիսահաղորդիչների դիէլեկտրիկական թափանցելիությունը ջերմաստիճանի գրադիենտի առկայության դեպքում

Ուսումնասիրված է ջերմաստիճանի գրադիենտի ($\vec{\nabla}T$) ազդեցությունը կիսահաղորդիչների էլեկտրամագնիսական հատկությունների վրա: Կառուցված է նոր ջերմաէլեկտրամագնիսական էֆեկտի տեսությունը ոչ իզոտրոպ կիսահաղորդիչներում: Ցույց է տրված, որ $\vec{\nabla}T$ -ի առկայության դեպքում էլեկտրական ինդուկցիայի վեկտորին գումարվում է մի նոր վեկտոր՝ $\epsilon^T \vec{\nabla}T$, որը միշտ ուղղված է ΔT -ին ուղղահայաց: Օգտագործելով կինետիկ հավասարումը, ստացված է բացահայտ արտահայտություն ϵ^T տենզորի համար և ցույց է տրված, որ այդ տենզորը բավարարում է Օնզագերի ընդհանրացված սկզբունքին: Ցույց է տրված, որ փոփոխական ջերմաէլեկտրական դաշտի մեծությունը և ուղղությունը կախված են լիցքակիրների ցրման մեխանիզմից և որ էֆեկտիվ դանգվածի անիզոտրոպիայի հետևանքով այդ դաշտի լարվածության վեկտորը պտտվում է փոփոխական մագնիսական դաշտի վեկտորի շուրջը: Ջերմաստիճանի գրադիենտն զգալի կերպով փոխում է կիսահաղորդիչի դիէլեկտրիկ թափանցելիության կախումը ալիքի հաճախականությունից և հանգեցնում է օպտիկական ակտիվության առաջացմանը նույնիսկ սիմետրիայի կենտրոն ունեցող բյուրեղներում:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Л. Э. Гуревич, ЖЭТФ, т. 44, 458 (1963). ² Л. Э. Гуревич, Б. Л. Гельмонт, ЖЭТФ, т. 47, 1806 (1964). ³ В. Н. Копылов, Письма в ЖЭТФ, т. 28, 131 (1978). ⁴ Л. Э. Гуревич, Г. Г. Зегря, ЖЭТФ, т. 78, 123 (1980). ⁵ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИФМЛ, М., 1959. ⁶ А. И. Ансельм, Введение в теорию полупроводников, Наука, М., 1978.

УДК 550.341

СЕЙСМОЛОГИЯ

С. Р. Асланян, А. А. Киракосян, С. Н. Назаретян

Сейсмическая активность и максимальные возможные землетрясения на территории Армянской ССР и сопредельных районов (Представлено академиком АН Армянской ССР А. А. Габриеляном 28/II 1983)

В последнее время на основе применения статистического подхода к изучению сейсмического режима появилась возможность количественно оценить сейсмичность Малого Кавказа. Были использованы исходные данные за 1952—1968 (1,2) и 1962—1972 гг. (3). Известно, что чем больше время наблюдений, тем надежнее определяются показатели сейсмичности. Однако важнее, чтобы исходные данные за весьма ограниченные сроки были надежными.

Накопленные за последние 8—10 лет наиболее точные данные о землетрясениях Армении позволили нам по известной методике Ю. В. Ризниченко (4) построить карты сейсмической активности (A) и максимальных возможных землетрясений (K_{\max}).

За период с 1962 по 1980 гг. для изучаемой территории землетрясения с $K \geq 9$ являются надежно представительными, поэтому нами использованы сейсмические толчки начиная с девятого энергетического класса.

При расчетах сейсмической активности мы пользовались методом суммирования при постоянной точности. Карта (рис. 1,а) построена в изолиниях с помощью круговой палетки с числом 0,5. Наклон графика взят $\gamma = 0,5$ а, период наблюдений $T = 19$ лет. Активность отнесена к площади величиной 1000 км².

Закон повторяемости землетрясений Армянского нагорья достаточно обстоятельно изучен Н. К. Карапетян на основе данных за 290 лет (1679—1968). По этим исследованиям, наклон графика повторяемости равен 0,52 (по методу суммирования) и 0,51 (по методу распределения) (1).

Надо отметить, что наклон графика повторяемости для Кавказа в целом и отдельно для Грузии и Джавахетского нагорья по наблюдениям за 1962—1970 гг. с учетом и без учета группирования землетрясений почти одинаков и равен 0,5 (3). Почти такая же величина получена нами для территории Армянской ССР за 1962—1980 гг.

Как следует из карты, относительно обширной площадью активности величиной до единицы характеризуется район Васпураканских гор, где имеется также несколько изолированных максимумов. Максимальной величиной активности характеризуются и Джавахетское нагорье, Зангезур, районы гор Чобандаг и Большой Гиналдаг. Выде-

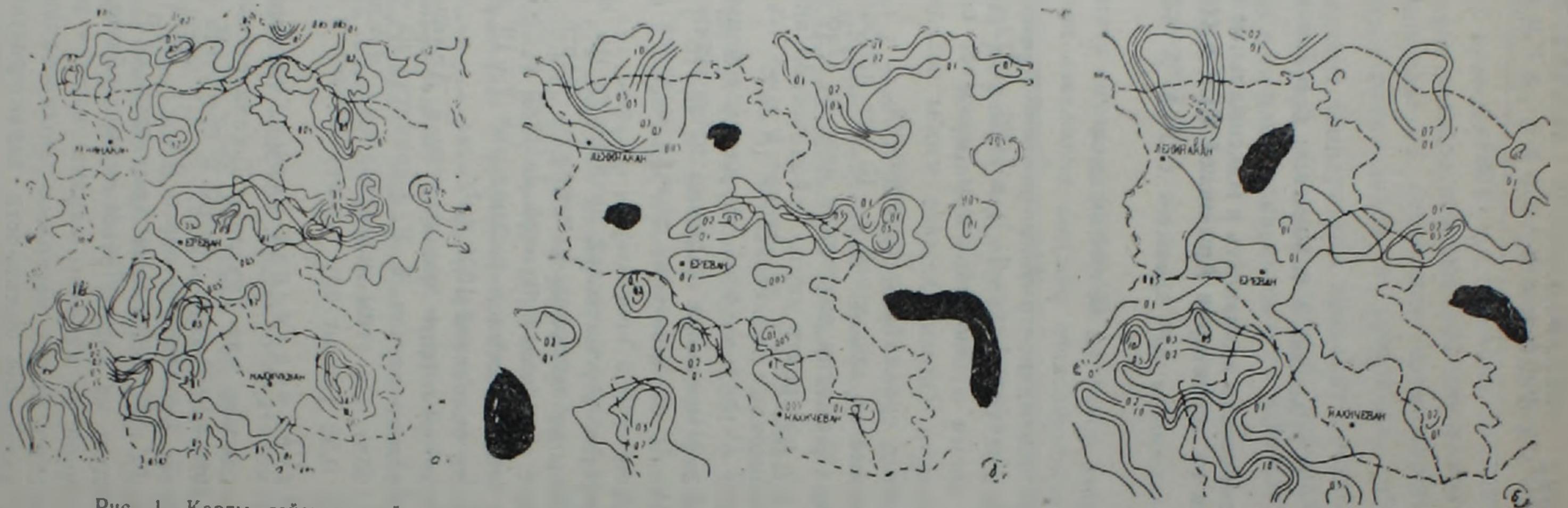


Рис. 1. Карты сейсмической активности территории Армянской ССР и сопредельных районов по сейсмологическим данным: за 1962—1980 (а), 1962—1970 (б) и 1971—1980 гг. (в)

ляется также центральная часть Армянской ССР как зона активности величиной до 0,5, совпадающая с Ереван-Севанским грабенсинклинорием (5). В зону относительно слабой активности попадают северо-восточная часть республики, Октемберянский район, Сюникские горы и центральная часть Нахичеванской АССР.

Для изучения изменения активности за шестидесятые и семидесятые годы построены две карты активности (рис. 1, б, в). Существенное изменение активности наблюдается в юго-западной части исследуемой территории, где меняются как площадь области высокой активности, так и величина. Подобную картину можно объяснить как изменениями сейсмичности, так и улучшением условий сейсмических регистраций. По площади изменена также область высокой активности Джавахетского нагорья. Вторая карта, на наш взгляд, более характерно и относительно точно отражает сейсмическую активность области.

Карта максимальных возможных землетрясений (рис. 2) составлена по данным за 1962—1980 гг. с помощью новых зависимостей между энергией сильных землетрясений Кавказа и средней сейсмической активностью в области, окружающей эпицентр (2). Для сравнения на карте приведены также аналогичные данные, полученные Э. А. Джибладзе, Н. К. Карапетян и Ж. О. Манукян для разных пе-

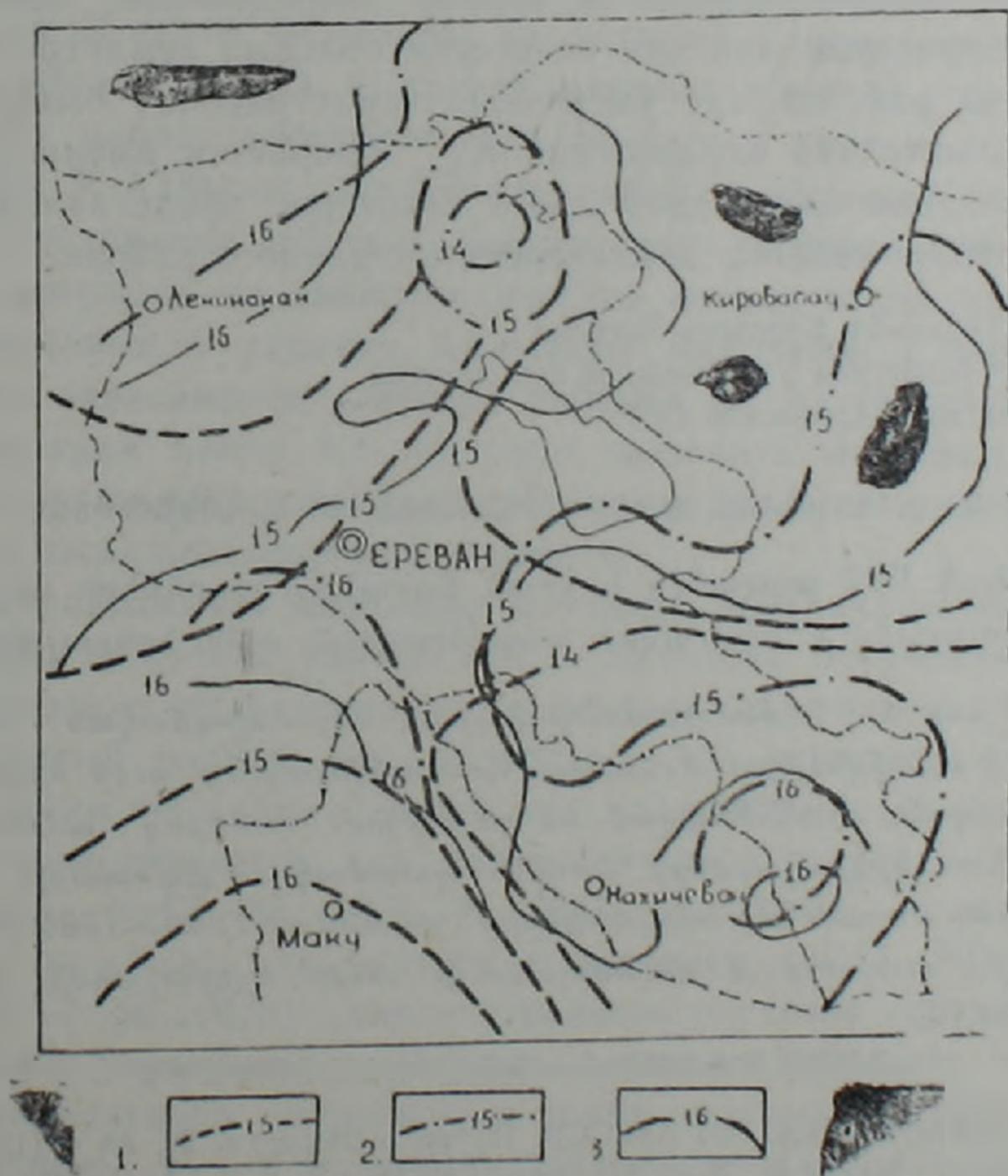


Рис. 2. Карта максимальных возможных землетрясений K_{max} (А) на территории Армянской ССР и сопредельных районов. 1—за 1952—1968 (2); 2—1962—1973 (3); 3—1962—1980 гг.

риодов времени. Построенная нами карта в отличие от существующих основана на новых, сравнительно точных, данных за большой период времени.

Из приведенных результатов следует, что для территории Армянской ССР и сопредельных районов максимальное возможное землетрясение имеет значение $K_{\max} = 16$. Это естественно, так как за историческое прошлое на изучаемой территории не было зарегистрировано более сильных землетрясений. Однако области с максимальными возможными землетрясениями у разных авторов заметно отличаются друг от друга. Более или менее одинакова область с $K_{\max} = 16$ северо-западной части Армянской ССР и центральной части республики, которая характеризуется $K_{\max} = 15$. Ереван-Севанский грабен-синклинорий характеризуется чуть более высокими значениями K_{\max} (но далеко не $K_{\max} = 16$) по сравнению с соседними районами.

Сравнительно большие расхождения между данными K_{\max} по разным исходным данным наблюдаются на юго-востоке исследуемой территории. На наш взгляд, наиболее близки к истине данные, по которым область известных очаговых зон Загезура характеризуется $K_{\max} = 16$.

Не противоречит историческим макросейсмическим данным отношение юго-западной части карты к области с $K_{\max} = 16$.

В заключение отметим, что было бы неверно принимать карты максимальных землетрясений за основу определения сейсмической опасности территории, так как не всегда сильные землетрясения происходят в тех районах, где умеренные землетрясения бывают наиболее часто, а методика определения K_{\max} опирается именно на такую связь. Полученная карта дает лишь некоторое представление о возможных наиболее сильных землетрясениях данного района.

Ордена Трудового Красного Знамени
Институт геофизики и инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ռ. ԱՍԼԱՆՅԱՆ, Ս. Ա. ԿՐԱՎՈՍՅԱՆ, Ս. Ն. ՆԱԶԱՐԵԹՅԱՆ

Հայկական ՍՍՀ տարածքի և նրան հարակից շրջանների սեյսմիկ
ակտիվությունը և հնարավոր առավելագույն ուժի երկրաշարժերը

Ելնելով նոր և համեմատաբար ճշգրիտ սեյսմոլոգիական տվյալներից
կառուցված է ակտիվության և հնարավոր առավելագույն ուժի երկրաշարժերի
բարտեզներ, որոնք համեմատված են գոյություն ունեցող համանման քար-
տեղների հետ: Երկրաշարժերի մասին պատմական փաստացի նյութերին
համեմատաբար մոտ են նոր աղբյուրները՝ ստացված 1962—1980 թթ. տվյալ-
ներով: ՀՍՍՀ տարածքում առավելագույն ուժի երկրաշարժի էներգետիկ
դասը՝ $K_{\max} = 16$.

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ Н. К. Карапетян, Изв. АН АрмССР. Науки о Земле, т. 29, № 4 (1976). ² Н. К. Карапетян, Ж. О. Манукян, Изв. АН АрмССР. Науки о Земле, т. 30, № 2 (1977).
³ Э. А. Джибладзе, Энергия землетрясений, сейсмический режим и сейсмотектонические движения Кавказа, Мецниереба, Тбилиси, 1980. ⁴ Ю. В. Ризниченко, Изв. АН СССР. Сер. геофиз., № 9, 1958. ⁵ А. А. Габриелян и др., Сейсмотектоника Армянской ССР, Изд. Ереванского ун-та, 1981.

УДК 591.182+577.352

БИОФИЗИКА

В. Л. Арванов, С. Б. Мажинян, С. Н. Айрапетян

О блокирующем действии бескалиевого раствора на Cl^- -зависимые ацетилхолиновые ответы мембраны

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. В. Фанарджяном 5/IV 1983)

Нами показано, что сердечный гликозид убаин может подавлять определенные ацетилхолиновые (АХ) ответы нейрональной мембраны (1). Убаин блокировал АХ вызванные токи, реализующиеся за счет увеличения мембранной проницаемости для ионов Cl^- (Cl^- -зависимые ответы) и не действовал на те АХ-ответы, в генерации которых Cl^- участия не принимал. Считается, что ингибирующее действие исследуемого препарата на Na, K -АТФазу мембраны обусловлено его воздействием на K -центр фермента, на который убаин действует конкурентно с ионами K^+ (2). С другой стороны, известно, что фактором, подавляющим работу электрогенного Na -насоса за счет инактивации K -центра Na, K -АТФазы, аналогично убаину, является бескалиевый раствор. Исследование действия бескалиевого раствора (где ионы K^+ полностью заменены на эквиосмотические концентрации ионов Na^+) на чувствительные к убаину АХ-ответы мембраны и параллельное исследование зависимости действия убаина на АХ-ответы от наружной концентрации ионов K^+ поможет выяснить механизм действия убаина на холинорецептивные свойства мембраны. Изучению данного вопроса и посвящена настоящая работа.

Опыты проводили с помощью методики внутриклеточной перфузии гигантских нейронов улитки *Helix*. Методика получения экспериментальной модели перфузированного нейрона была описана ранее (1). Трансмембранный ионный ток, вызванный АХ, регистрировали с помощью методики фиксации напряжения на мембране. Ионный состав растворов, применявшихся для наружной и внутренней перфузии, соответствовал: $NaCl$ —85, KCl —4, $CaCl_2$ —8, $MgCl_2$ —5, трис-ацетат (рН 7,5)—7 (в мМ/л) для наружного раствора и KCl —90, трис-ацетат (рН 7,5)—7 (в мМ/л)—для внутреннего раствора соответственно.

Как видно из верхней части рис. 1, полное удаление ионов K^+ из наружного раствора приводило к почти полному подавлению АХ-ответов мембраны, как и в случае действия убаина. Следует отметить, что зависимость амплитуды АХ-вызванного транспортного тока от наружной концентрации ионов K^+ имела неградуальный характер. После добавления 2 мМ K^+ в бескалиевую среду имело место быст-

рое восстановление АХ-ответов, которые были блокированы бескальциевым раствором, тогда как дальнейшее увеличение концентрации ионов K^+ в перфузате до 4 мМ, а затем до 10 мМ приводило лишь к незначительному увеличению амплитуды АХ-ответов.

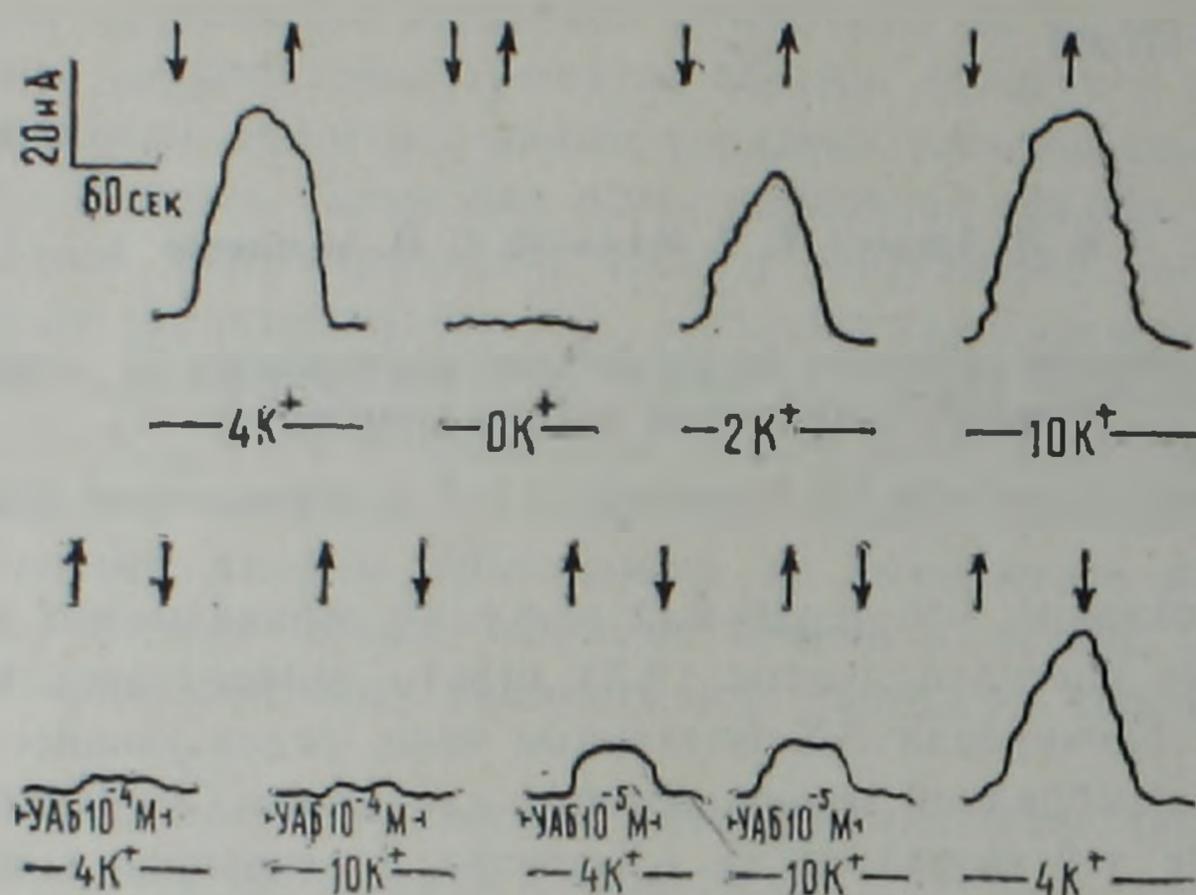


Рис. 1. Действие уабанна (уаб) и бескальциевого раствора на АХ-вызванные токи мембраны типа А. Стрелками показано время действия АХ

Однако очевидно, что уменьшение концентрации K^+ в наружном растворе приводит не только к инактивации К-центра Na, К-АТФазы, расположенного с наружной стороны мембраны, но и изменяет электрохимический градиент для ионов K^+ (E_K) на мембране. Возникает вопрос: обусловлено ли уменьшение АХ-ответов при удалении K^+ из наружного раствора изменением E_K или же подавление АХ-ответов в условиях бескальциевого раствора является результатом инактивации К-центра Na, К-АТФазы. Для выяснения этого вопроса АХ-вызванные токи измеряли при соответствующих изменениях концентраций ионов K^+ во внутриклеточном растворе, когда концентрация K^+ в наружном растворе оставалась постоянной. Изменение концентрации K^+ во внутриклеточном растворе осуществлялось посредством частичной замены КСI на эквиосмотические концентрации сахарозы. Для того чтобы исключить при этом изменение E_{Cl} , ионы Cl^- во внутриклеточном растворе предварительно замещались непроницающими через мембрану ионами ацетата. На рис. 2 показана идентичность вольт-амперных характеристик АХ-ответов при частичной замене внутриклеточного K^+ на сахарозу и при соответствующей замене КСI на К-ацетат. Таким образом, изменение E_K путем изменения внутриклеточной концентрации ионов K^+ не влияло на равновесный потенциал для АХ-ответов, которые подавлялись в бескальциевом растворе. Следовательно, показанную на рис. 1 зависимость АХ-ответов мембраны типа А от наружной концентрации ионов K^+ нельзя объяснить изменением электрохимического градиента для K^+ .

Можно предположить, что удаление ионов K^+ из окружающей

среды переводит холинорецептор в состояние, в котором он не способен взаимодействовать с АХ.

В пользу этого предположения говорят полученные данные о том, что уабайн, являясь специфическим блокатором К-центра Na, К-АТФазы, оказывает на Cl⁻-зависимые АХ-ответы мембраны подавляющее действие, аналогичное действию бескалиевого раствора (рис. 1). При этом исследование вольт-амперных характеристик мембраны показало полную идентичность в действии уабайна и бескалиевого раствора на вольт-амперные характеристики АХ-ответов мембраны (рис. 2).

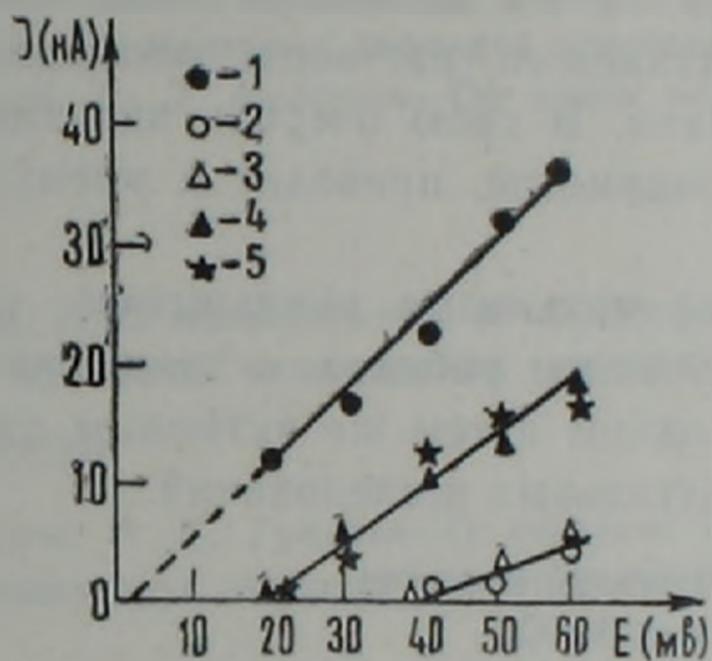


Рис. 2. Вольт-амперные характеристики для АХ-ответов мембраны типа А: 1—в нормальных внутри- и внеклеточных растворах; 2—под действием 10^{-4} М уабайна; 3—в бескалевом растворе; 4—при замещении 40 мМ внутриклеточного КСI на К-ацетат; 5—при замещении 40 мМ КСI на 62,8 мМ сахарозы

Полученные данные позволяют предположить, что по крайней мере одним из путей подавляющего действия уабайна на холинорецептивные свойства мембраны является инактивация уабайном К-центра Na, К-АТФазы.

Известно, что увеличение концентрации ионов K^+ в наружном растворе приводит к уменьшению воздействия уабайна на К-центр Na, К-АТФазы (3). Если бы подавляющее действие уабайна на АХ-ответы мембраны осуществлялось только лишь за счет инактивации уабайном К-центра Na, К-АТФазы, то следовало бы ожидать значительного уменьшения действия уабайна на АХ-вызванные токи при увеличении в наружном растворе концентрации K^+ . Как видно на нижней части рис. 1, увеличение концентрации наружного K^+ в 2,5 раза (с 4 до 10 мМ) существенно не влияло на блокирующее действие уабайна, ни в случае частичного, ни в случае более полного подавления АХ-ответов. Полученные данные позволяют предположить, что уабайн помимо своего воздействия на К-центр Na, К-АТФазы способен связываться еще с одним активным центром на мембране (Х-центром), специфичным и к АХ. По-видимому, конкурентное с АХ

воздействие убаина на X-центр и определяет другую сторону блокирующего действия убаина на АХ-ответы мембраны. В пользу этого предположения говорит ряд имеющихся в литературе данных о наличии двух форм убаинсвязывающих участков на молекуле Na, K-АТФазы (1-6). Согласно же данным Коветиани (7) на молекуле Na, K-АТФазы имеется центр, специфичный к АХ (X-центр), отличный от Na- и K-центров этого фермента.

Таким образом, суммируя вышеизложенные данные, можно предположить, что для генерации Cl⁻-зависимых ответов АХ мембраны нейронов улитки *Helix* обязательным условием является активация K-центра Na, K-АТФазы ионами K⁺. Предполагается, что блокирующее действие убаина на АХ-вызванные токи мембраны этого типа, как и действие бескальцевого раствора, опосредовано инактивацией K-центра Na, K-АТФазы. В свою очередь инактивация K-центра Na, K-АТФазы, по всей видимости, приводит к уменьшению сродства холинорецептора к АХ.

Однако выяснение механизма уменьшения сродства холинорецептора к АХ под действием убаина, а также возможности связывания убаина и АХ с одним и тем же активным центром на мембране требует дальнейших детальных исследований.

Институт экспериментальной биологии
Академии наук Армянской ССР

Վ. Լ. ԱՐՎԱՆՈՎ, Ս. Բ. ՄԱԺԻՆՅԱՆ, Ս. Ն. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

Կալիումազուրկ լուծույթի ճնշող ազդեցությունը թաղանթի բլորից կախված
ացետիլխոլինային պատասխանների վրա

Հարման ֆիքսման մեթոդով, խխունջի հսկա ներվաբջջի թաղանթի վրա, ուսումնասիրվել է կալիումազուրկ միջավայրի ազդեցությունը բջջաթաղանթի ացետիլխոլինային զգայունության վրա: Պարզվել է, որ բլոր իոններից կախված, ուարաինով ճնշվող ացետիլխոլինային պատասխանները ճնշվում են նաև միջավայրից կալիումի իոնների հեռացումով, որը կախված չէ թաղանթի վրա գոյություն ունեցող կալիումական իոնների գրադիենտի մեծացումից:

Ուսումնասիրությունները բերել են հետևյալ եզրակացությունների.

1. Թաղանթի ուարաինի նկատմամբ զգայուն ացետիլխոլինային ուժեղացումների ակտիվացման նախապայման է հանդիսանում Na, K, Mg-ԱԵՖազա ֆերմենտի կալիումական կենտրոնի ակտիվ վիճակը:

2. Ուարաինը ճնշում է ացետիլխոլինի նկատմամբ թաղանթի զգայունությունը, ԱԵՖազայի կալիումական կենտրոնի արգելակման ճանապարհով: Ենթադրվում է, որ ուարաինը նշված կենտրոնից բացի ազդում է նաև ԱԵՖազայի հատուկ մեդիատորային կենտրոնի վրա:

ԳՆԻՍԻՅԵՐ

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 В. Л. Арванов, С. Н. Айрапетян, ДАН СССР, т. 251, № 1 (1980). 2 J. C. Skou, In: Perspectives in Membranes Biology, N. Y., 1974. 3 В. К. Лушко, Натриевый насос биологических мембран, Научная думка, Киев, 1977. 4 Y. Atsunobu, Y. Shisuko, Mol. Pharmacol., v. 19 (1981). 5 I. Godfraind, A. De Pover, T. Lutete Di-Nzuzi, Biochem. Pharmacol., v. 29, (1980). 6 L. C. Cantley, I. Josephon, I. Gelles e. a., Na, K-ATPase Struct. and Kinet., London e. a., 1979. 7 З. П. Коветиани, в сб.: Вопросы биохимии нервной и мышечной системы, Мецниереба, Тбилиси, 1972.