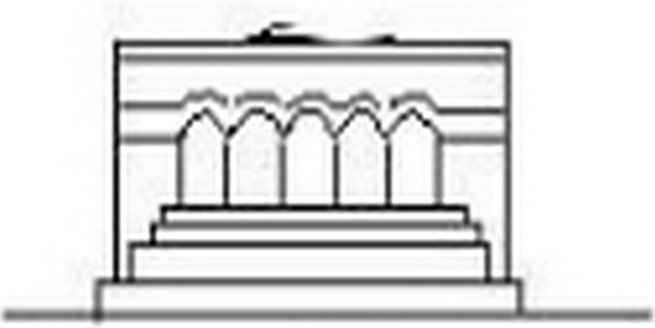
ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

38(1)



1985

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVIII, № 6, 1985 Механика

УДК 539.3

О МОДЕЛИРОВАНИИ ОДНОГО КЛАССА КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ВАРДАНЯН Г. С., ФРИШТЕР Л. Ю.

В различных областях техники широкое распространение находят конструкции, составленные из упругих элементов с различными физико-механическими характеристиками. Такие конструкции называются кусочно-однородными (составными) конструкциями.

При моделировании кусочно-однородных задач экспериментальным методом механики деформируемого твердого тела—методом фотоупругости, возникают трудности, связанные с необходимостью подбора оптически чувствительных материалов с различными модулями упругости, и методического характера. Моделирование составных конструкций при заданных внешних усилиях рассмотрено в работе [1].

Рассмотрим кусочно-однородное пространственное одно- или многосвязное тело Ω, состоящее из частей Ω_1 и Ω_2, соединенных между собой по поверхности Γ. Части Ω_1 и Ω_2 различаются только значением модуля упругости ($E_1<E_2$). Коэффициенты Пуассона и теплового расширения для этих частей примем одинаковыми.*

На наружной поверхности S могут быть заданы: на части S_σ—напряжения f_i и на части S_u—перемещения φ_i. Кроме того, в теле могут быть заданы массовые силы F_i и температурное поле T.

Напряжения σ_{ij} такой кусочно-однородной задачи удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} + F_i = 0 \tag{1}$$

Деформации ε_{ij}, связанные с перемещениями u_i соотношениями

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \tag{2}$$

удовлетворяют уравнениям неразрывности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial k \partial l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial i \partial j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial j \partial k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial i \partial l} = 0 \tag{3}$$

При этом на поверхности S выполняются граничные условия

* Коэффициенты теплового расширения частей также могут быть различными. Это не вызывает принципиальных трудностей.

$$\sum_j \sigma_{ij} n_j |_{S_\sigma} = f_i; \quad u_i|_{S_u} = \varphi_i \tag{4}$$

а на поверхности раздела Г—условия полного контакта

$$\sigma_{zi1}|_\Gamma = \sigma_{zi2}|_\Gamma; \quad u_{i1}|_\Gamma = u_{i2}|_\Gamma \tag{5}$$

Деформации и напряжения связаны следующими соотношениями:

$$\varepsilon_{ij1} = \frac{1}{E_1}[(1+\nu)\sigma_{ij1} - \delta_{ij}\nu S_1] + \varepsilon_{ij}^T \tag{6}$$

$$\varepsilon_{ij2} = \frac{1}{E_2}[(1+\nu)\sigma_{ij2} - \delta_{ij}\nu S_2] + \varepsilon_{ij}^T \tag{7}$$

Здесь

$$\varepsilon_{ij}^T = \delta_{ij}\alpha T \tag{8}$$

Остальные обозначения в соотношениях (1)—(7) общеприняты и не требуют объяснений.

Ниже рассматриваемая кусочно-однородная задача сводится к решению ряда однотипных однородных задач с дисторсиями, достаточно просто реализуемых на моделях методом „замораживания".

Введем вспомогательные задачи для отдельных частей Ω_1 и Ω_2, обусловленные только действием температурного поля. Решения этих задач обозначим через $(\sigma_{ij}^{'} \; \varepsilon_{ij}^{'} \; u_i^{'})$.

Для дальнейшего изложения введем сокращенную запись соотношений (1)—(7) в виде

$$\{\sigma F;\ \varepsilon u;\ S_\sigma f;\ S_u\varphi;\ \Gamma\sigma;\ \Gamma u;\ \varepsilon E_1\varepsilon^T;\ \varepsilon E_2\varepsilon^T\} \tag{9}$$

Рассмотрим также кусочно-однородную задачу для тела Ω

$$\{\sigma^{(H)}F;\ \varepsilon^{(H)}u^{(H)};\ S_\sigma f;\ S_u\varphi;\ \Gamma\sigma^{(H)};\ \Gamma u^{(H)};\ \varepsilon^{(H)}E_1\varepsilon';\ \varepsilon^{(H)}E_2\varepsilon'\} \tag{10}$$

отличающуюся от задачи (9) только тем, что в частях Ω_1 и Ω_2 вместо температуры заданы дисторсии соответственно $\varepsilon_{ij1}^{'}$ и $\varepsilon_{ij2}^{'}$.

Очевидно, что

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{'} + \sigma_{ij}^{(H)}; \quad u_i = u_i^{(H)}; \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(H)} \tag{11}$$

При этом, если температурное поле в отдельных частях Ω_1 и Ω_2 тела со свободными границами не вызывает напряжения ($\sigma_{ij}^{'}=0$), то решения задач (9) и (10) совпадают.

Далее рассмотрим соответствующую однородную задачу

$$\{\sigma^{(0)}F;\ \varepsilon^{(0)}u^{(0)};\ S_\sigma f;\ S_u\varphi;\ 0\sigma^{(0)};\ 0u^{(0)};\ \varepsilon^{(0)}E_1\varepsilon';\ \varepsilon^{(0)}E_1\varepsilon'\} \tag{12}$$

для тела Ω при тех же воздействиях, что и в задаче (10) и неоднородную задачу несовместности

$$\{\sigma^{(H.1)}0;\ \varepsilon^{(H.1)}u^{(H.1)};\ S_\sigma 0;\ S_u 0;\ \Gamma\sigma^{(H.1)};\ \Gamma u^{(H.1)};\ \varepsilon^{(H.1)}E_1 0;\ \varepsilon^{(H.1)}E_2 K\hat{\varepsilon}^{(0)}\} \tag{13}$$

Здесь

$$K = 1 - \frac{E_1}{E_2}; \quad \hat{\varepsilon}_{ij}^{(0)} = \varepsilon_{ij}^{'} - \varepsilon_{ij}^{(0)} \tag{14}$$

Согласно принципу сложения решения задач (10), (12) и (13) связаны следующим равенством:

$$(\sigma_{ij}^{(H)},\ u_i^{(H)},\ \varepsilon_{ij}^{(H)}) = (\sigma_{ij}^{(0)},\ u_i^{(0)},\ \varepsilon_{ij}^{(0)}) + (\sigma_{ij}^{(H,1)},\ u_i^{(H,1)},\ \varepsilon_{ij}^{(H,1)}) \tag{15}$$

Теперь рассмотрим однородную задачу несовместности

$$\{\sigma^{(1)}0;\ \varepsilon^{(1)}u^{(1)};\ S_\sigma 0;\ S_u 0;\ 0\sigma^{(1)};\ 0u^{(1)};\ \varepsilon^{(1)}E_1 0;\ \varepsilon^{(1)}E_2 K\,\widehat{\varepsilon}^{(0)}\} \tag{16}$$

и вторую неоднородную задачу несовместности

$$\{\sigma^{(H,2)}0;\ \varepsilon^{(H,2)}u^{(H,2)};\ S_\sigma 0;\ S_u 0;\ \Gamma\sigma^{(H,2)},\ \Gamma u^{(H,2)};\ \varepsilon^{(H,2)}E_1 0;\ \varepsilon^{(H,2)}E_2 K\,\widehat{\varepsilon}^{(1)}\} \tag{17}$$

где

$$\widehat{\varepsilon}_{ij}^{(1)} = K\varepsilon'_{ij} - K\varepsilon_{ij}^{(0)} - \varepsilon_{ij}^{(1)} \tag{18}$$

По принципу сложения решения задач (13), (16) и (17) тоже связаны равенством

$$(\sigma_{ij}^{(H,1)},\ u_i^{(H,1)},\ \varepsilon_{ij}^{(H,1)}) = (\sigma_{ij}^{(1)},\ u_i^{(1)},\ \varepsilon_{ij}^{(1)}) + (\sigma_{ij}^{(H,2)},\ u_i^{(H,2)},\ \varepsilon_{ij}^{(H,2)}) \tag{19}$$

Используя принцип математической индукции, получим

$$(\sigma_{ij}^{(H,n)},\ u_i^{(H,n)},\ \varepsilon_{ij}^{(H,n)}) = (\sigma_{ij}^{(n)},\ u_i^{(n)},\ \varepsilon_{ij}^{(n)}) + (\sigma_{ij}^{(H,n+1)},\ u_i^{(H,n+1)},\ \varepsilon_{ij}^{(H,n+1)}) \tag{20}$$

где $(\sigma_{ij}^{(n)},\ u_i^{(n)},\ \varepsilon_{ij}^{(n)})$ – решение „n"-ой однородной задачи несовместности

$$\{\sigma^{(n)}0;\ \varepsilon^{(n)}u^{(n)};\ S_\sigma 0;\ S_u 0;\ 0\sigma^{(n)};\ 0u^{(n)};\ \varepsilon^{(n)}E_1 0;\ \varepsilon^{(n)}E_1 K\,\widehat{\varepsilon}^{(n-1)}\} \tag{21}$$

Здесь

$$\widehat{\varepsilon}_{ij}^{(n-1)} = K^{n-1}\varepsilon'_{ij} - K^{n-1}\varepsilon_{ij}^{(0)} - K^{n-2}\varepsilon_{ij}^{(1)} - \ldots - K\varepsilon_{ij}^{(n-2)} - \varepsilon_{ij}^{(n-1)} \tag{22}$$

Как видно из (21), напряженно-деформированное состояние „n"-ой однородной задачи несовместности обусловлено дисторсиями в области Ω_2, равными деформациям (22), уменьшенным в „K" раз, вызванными напряжениями предыдущей задачи в той же области.

На основании (15), (19) и рекуррентного соотношения (20) получим

$$(\sigma_{ij}^{(H)},\ u_i^{(H)},\ \varepsilon_{ij}^{(H)}) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_{ij}^{(n)},\ u_i^{(n)},\ \varepsilon_{ij}^{(n)}) \tag{23}$$

Из (21) видно, что решение „n"-ой однородной задачи несовместности можно представить в виде

$$(\sigma_{ij}^{(n)},\ u_i^{(n)},\ \varepsilon_{ij}^{(n)}) = K^n(\widetilde{\sigma}_{ij}^{(n)},\ \widetilde{u}_i^{(n)},\ \widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(n)}) \tag{24}$$

где $(\widetilde{\sigma}_{ij}^{(n)},\ \widetilde{u}_i^{(n)},\ \widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(n)})$ – решение „n"-ой приведенной задачи несовместности

$$\{\widetilde{\sigma}^{(n)}0;\ \widetilde{\varepsilon}^{(n)}\widetilde{u}^{(n)};\ S_\sigma 0;\ S_u 0;\ 0\widetilde{\sigma}^{(n)};\ 0\widetilde{u}^{(n)};\ \widetilde{\varepsilon}^{(n)}E_1 0;\ \widetilde{\varepsilon}^{(n)}E_1 \widetilde{\varepsilon}^{(n-1)}\} \tag{25}$$

независящее от „K".

Здесь

$$\widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(n-1)} = \varepsilon'_{ij} - \widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(0)} - \widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(1)} - \ldots - \widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(n-2)} - \widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(n-1)} \tag{26}$$

С учетом (24) соотношение (23) можно записать в виде

$$(\sigma_{ij}^{(H)},\ u_i^{(H)},\ \varepsilon_{ij}^{(H)}) = \sum_{n=0}^{\infty} K^n(\tilde{\sigma}_{ij}^{(n)},\ \tilde{u}_i^{(n)},\ \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(n)}) \tag{27а}$$

или

$$\xi^{(H)} = \sum_{n=0}^{\infty} K^n \tilde{\xi}^{(n)} \tag{27б}$$

где через ξ обозначена любая компонента напряжений, перемещений или деформаций.

Используя очевидное неравенство

$$|\tilde{\xi}^{(n)}| \leqslant |\tilde{\xi}^{(1)}|_{\max} \tag{28}$$

где $|\tilde{\xi}^{(1)}|_{\max}$—наибольшее значение напряжений, перемещений или деформаций первой однородной задачи несовместности, получим, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} K^n \tilde{\xi}^{(n)}$ мажорируется сходящимся геометрическим рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} K^n$ $(0<K<1)$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} K^n \tilde{\xi}^{(n)}$ сходится равномерно.

Вследствие сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} K^n \tilde{\xi}^{(n)}$ его сумму можно оценить при помощи рекуррентных соотношений, выполняющихся с заданной точностью, для функциональной последовательности $\{\tilde{\xi}^{(n)}\}$.

В ряде случаев в качестве рекуррентного соотношения можно задать следующую линейную комбинацию:

$$\frac{\tilde{\xi}^{(n+1)} - \tilde{\xi}^{(n+2)}}{\tilde{\xi}^{(n)}} = c \quad (c<1) \tag{29}$$

В этих случаях ряд (27) суммируется и получается следующий окончательный результат:

$$\xi^{(H)} = \frac{1-K}{1-K+K^2c}\tilde{\xi}^{(0)} + \frac{K}{1-K+K^2c}\tilde{\xi}^{(1)} \tag{30}$$

Для иллюстрации предложенной методики решения кусочно-однородных задач рассмотрим следующий пример.

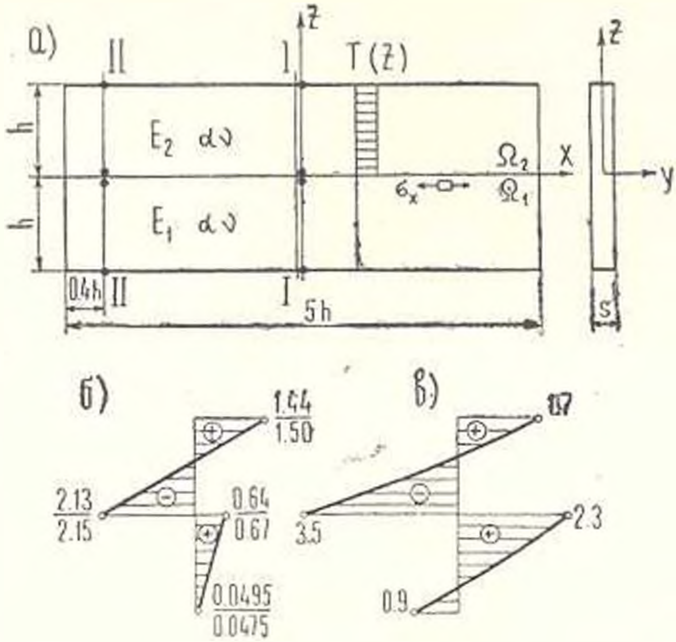
Полоса шириною $2h$ при отсутствии объемных и поверхностных сил находится под действием температурного поля

$$T(z) = \begin{cases} 0, & -h \leqslant z \leqslant 0 \\ T_0, & 0 < z \leqslant h \end{cases} \tag{31}$$

Область Ω_1 $(-h \leqslant z \leqslant 0)$ имеет модуль упругости E_1, а область Ω_2 $(0 < z \leqslant h)$ имеет модуль упругости E_2.

Напряжения исходной кусочно-однородной задачи согласно [2] определяются выражениями:

в области Ω_1

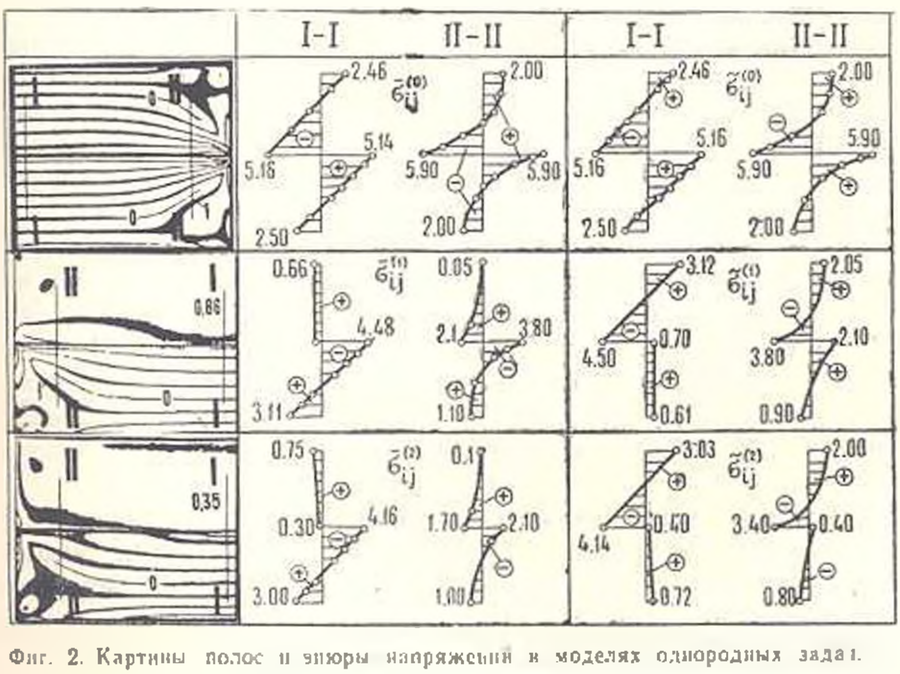


Фиг. 1. Пример моделирования термоупругих напряжений в биметаллической пластине:

а) схема кусочно-однородной задачи;

б) сравнение теоретических (числитель) и экспериментальных (знаменатель) значений напряжений σ_{xx} в долях $\alpha T_0 E_1$ по среднему сечению I—I;

в) эпюры экспериментальных значений напряжений $\sigma_1 - \sigma_2$ по сечению II—II.



Фиг. 2. Картины полос и эпюры напряжений в моделях однородных задач.

$$\sigma_{xx}=\frac{\alpha T_0E_1E_2}{E_1^2+E_2^2+14E_1E_2}\left[E_2+\left(7+\frac{12z}{h}\right)E_1\right] \tag{32а}$$

в области Ω_2

$$\sigma_{xx}=\frac{\alpha T_0E_1E_2}{E_1^2+E_2^2+14E_1E_2}\left[\left(\frac{12z}{h}-7\right)E_2-E_1\right] \tag{32б}$$

Напряжения вспомогательных задач для отдельных частей Ω_1 и Ω_2 равны нулю ($\sigma_{ij}=0$), а напряжения первых трех однородных задач, входящих в (27), определяются выражениями: в области Ω_1

$$\bar{\sigma}^{(0)}_{xx}=\alpha T_0E_1\left(\frac{1}{2}+\frac{3z}{4h}\right);\quad \bar{\sigma}^{(1)}_{xx}=\frac{1}{16}\alpha T_0E_1;\quad \bar{\sigma}^{(2)}_{xx}=\alpha T_0E_1\left(\frac{1}{32}-\frac{3z}{64h}\right) \tag{33а}$$

в области Ω_2

$$\bar{\sigma}^{(0)}_{xx}=\alpha T_0E_1\left(-\frac{1}{2}+\frac{3z}{4h}\right);\quad \bar{\sigma}^{(1)}_{xx}=\alpha T_0E_1\left(-\frac{7}{16}+\frac{3z}{4h}\right)$$

$$\bar{\sigma}^{(2)}_{xx}=\alpha T_0E_1\left(-\frac{13}{32}+\frac{45z}{64h}\right) \tag{33б}$$

Нетрудно проверить, что напряжения рассматриваемой кусочно-однородной задачи (32) связаны с напряжениями однородных задач (33) с помощью зависимости (30), то есть

$$\sigma_{xx}=\sigma^{(H)}_{xx}=\frac{1-K}{1-K+K^2c}\,\bar{\sigma}^{(0)}_{xx}+\frac{K}{1-K+K^2c}\,\bar{\sigma}^{(1)}_{xx} \tag{34}$$

где

$$K=1-\frac{E_2}{E_1};\quad c=\frac{\bar{\sigma}^{(1)}_{xx}-\bar{\sigma}^{(2)}_{xx}}{\bar{\sigma}^{(0)}_{xx}}=\frac{1}{16} \tag{35}$$

Экспериментальную реализацию предлагаемой методики иллюстрируем на примере моделирования термоупругих напряжений в биметаллической пластине (фиг. 1) при действии температурного поля вида (31).

Решаются первые три однородные задачи несовместности следующим образом:

1. Однородная модель из эпоксидного материала с модулем упругости $E_1=200$ кг/см² и оптической постоянной $\sigma^{1,0}=0{,}341$ кг/см в высокоэластичном состоянии с заданными размерами ($h=2$ см, $s=0{,}59$ см) склеивалась из двух элементов. Элемент области Ω_1 вырезался из пластины с «замороженными» деформациями при растягивающем напряжении $\sigma=1{,}97$ кг/см² в продольном направлении. Элемент области Ω_2 не деформировался. После склейки элементов и «размораживания» [3] в модели возникли напряжения $\bar{\sigma}^{(0)}_{xx}$.

2. Из предыдущей модели с «замороженными» деформациями $\bar{\varepsilon}^{(0)}_{ij}$ вырезалась область Ω_2, которая склеивалась с областью Ω_1, находящейся в естественном недеформированном состоянии. В результате «размораживания» в модели возникли напряжения $\bar{\sigma}^{(1)}_{xx}$.

3 Третья задача решалась аналогично второй—склеиванием области Ω_2 с «замороженными» деформациями $\bar{\varepsilon}^{(1)}_{ij}$ с недеформированной областью Ω_1 и последующим «размораживанием» модели.

На фиг. 2 приведены картины полос для исследованных трех однородных задач и эпюры порядков полос, соответствующие напряжениям $\bar{\sigma}^{(0)}_{xx}$, $\bar{\sigma}^{(1)}_{xx}$, $\bar{\sigma}^{(2)}_{xx}$ по среднему сечению I—I и напряжениям $\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2$ по сечению II—II на расстоянии $0{,}4h$ от торца пластины.

Заметим, что напряжения $\bar{\sigma}^{(1)}_{xx}$ и $\bar{\sigma}^{(2)}_{xx}$, определяемые экспериментально, отличаются от напряжений $\sigma^{(1)}_{xx}$ и $\sigma^{(2)}_{xx}$, входящих в соотношения (34) и (35). При определении $\sigma^{(1)}_{xx}$ и $\sigma^{(2)}_{xx}$ в моделях создавались дисторсии, равные соответственно $-\varepsilon^{(0)}_{xx}$ и $-\varepsilon^{(1)}_{xx}$, в то время как напряжения $\bar{\sigma}^{(1)}_{xx}$ и $\bar{\sigma}^{(2)}_{xx}$ обусловлены дисторсиями соответственно равными $\alpha T_0-\varepsilon^{(0)}_{xx}$ и $\alpha T_0-\varepsilon^{(0)}_{xx}-\varepsilon^{(1)}_{xx}$. С учетом этого переход от $\bar{\sigma}^{(1)}_{xx}$ и $\bar{\sigma}^{(2)}_{xx}$ к $\sigma^{(1)}_{xx}$ и $\sigma^{(2)}_{xx}$ соответственно осуществлялся по принципу сложения. Эпюры этих напряжений приведены также на фиг. 2.

Из эпюр напряжений на фиг. 2 видно, что значение c, вычисленное по формуле (35), колеблется от 0,03 до 0,07. Принимая $c=0{,}05$ и $K=5/6$ по формуле (34) определены экспериментальные значения напряжений кусочно-однородной задачи. Эти значения показаны на эпюрах фиг. 1 б (знаменатели) и фиг. 1 в. На фиг. 1 б в числителе показаны теоретические значения напряжений, вычисленные по формулам (32). Максимальное расхождение теоретических и экспериментальных значений не превышает 6%.

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿՏՈՐ ԱՌ ԿՏՈՐ ՀԱՄԱՍԵՌ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՄՈԴԵԼԱՎՈՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Գ. Ս. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ, Լ. ՅՈՒ. ՖՐԻՇՏԵՐ

Ամփոփում

Շարադրվում է բևեռա-օպտիկան մեթոդով առաձգականության տեսության կտոր առ կտոր համասեռ խնդիրների մոդելավորման մեթոդը։

Կտոր առ կտոր համասեռ խնդիրը բերվում է մի շարք միատիպ համասեռ խնդիրների լուծման։

Դիտարկվում են օրինակներ։

ON MODELLING OF ONE GROUP OF PIECEWISE HOMOGENEOUS PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY

G. S. VARDANIAN, L. JUR. FRISHTER

Summary

The techniques of modelling of piecewise homogeneous problems of the theory of elasticity by means of photoelasticity is presented in the paper. A piecewise homogeneous problem is redused to a number of homogeneous similar problems with distortions simulated on the models by the "freezing" method. Some examples, proving theoretically and experimentally the techniques in question, are suggested.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Варданян Г. С., Гетрик В. И.* О моделировании кусочно-однородных задач теории упругости поляризационно-оптическим методом. Материалы VIII Всесоюзной конференции по методу фотоупругости. Т. 1. Таллин: 1979, с. 33—37.
2. *Александровский С. В.* Расчет бетонных и железобетонных конструкций на температурные и влажностные воздействия (с учетом ползучести). М.: Стройиздат, 1966, с. 291—297.
3. *Варданян Г. С., Пригоровский Н. И.* Моделирование термоупругих напряжений в поляризационно-оптическом методе. Изд. АН СССР, Механика и машиностроение, 1962, № 4, с. 146—149.

Московский инженерно-строительный
институт им. В. В. Куйбышева

Поступила в редакцию
1.IV.1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVIII, № 6, 1985 Механика

УДК 539.375

АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ

КАЛОЕРОВ С. А.

В настоящее время достаточно хорошо разработаны методы определения коэффициента интенсивности напряжений в бесконечных анизотропных телах с «туннельными» трещинами в условиях антиплоской деформации. В работе [6] приведены решения задач теории трещин для изотропного кругового цилиндра и бесконечного тела с эллиптической или круговой полостью. В данной статье получены и исследованы комплексные потенциалы теории трещин продольного сдвига для многосвязных изотропных и анизотропных тел. Приводится решение задачи для тела с одной или двумя эллиптическими (круговыми) полостями и «туннельной» трещиной.

§ 1. Рассмотрим анизотропное тело с цилиндрическими полостями, находящееся в условиях антиплоской деформации или продольного сдвига. Выберем систему координат, совместив ось Oz с направлением сдвига. Пусть тело в каждой точке имеет плоскость упругой симметрии, перпендикулярную оси Oz. Сечение тела плоскостью Oxy образует область S изменения переменных x, y. На тело действуют внешние усилия, приложенные к цилиндрическим поверхностям и направленные вдоль образующих. Для простоты будем считать, что объемные силы отсутствуют.

Учитывая, что при указанных условиях $u=v=0$, $w=w(x, y)$

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}=a_{44}\tau_{yz}+a_{45}\tau_{xz}, \quad \gamma_{xz}=\frac{\partial w}{\partial x}=a_{45}\tau_{yz}+a_{55}\tau_{xz} \tag{1.1}$$

и вводя функцию напряжений $F(x, y)$ по формулам

$$\tau_{xz}=-\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}; \quad \tau_{yz}=\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \tag{1.2}$$

из уравнения совместности Сен-Венана получим

$$a_{44}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-2a_{45}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}+a_{55}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0 \tag{1.3}$$

Решая уравнение (1.3), находим [3, 7]

$$F(x, y)=2\,\mathrm{Re}\,\varphi_3(z_3) \tag{1.4}$$

где $\varphi_3(z_3)$ —произвольная аналитическая функция, определенная в области S_3, получаемой из области S аффинным преобразованием $z_3 = x + \mu_3 y$; μ_3—корень характеристического уравнения

$$a_{55}\mu^2 - 2a_{45}\mu + a_{44} = 0 \tag{1.5}$$

причем

$$\mu_3 = \alpha_3 + i\beta_3; \quad \alpha_3 = \frac{a_{45}}{a_{55}}; \quad \beta_3 = \frac{\varkappa}{a_{55}}; \quad \varkappa = \sqrt{a_{44}a_{55} - a_{45}^2}$$

Учитывая формулы (1.1), (1.2), (1.4), для напряжений и перемещения находим

$$\tau_{yz} = 2\mathrm{Re}\Phi_3(z_3), \quad \tau_{xz} = -2\mathrm{Re}[\mu_3\Phi_3(z_3)] \tag{1.6}$$

$$w(x, y) = -2\mathrm{Re}[i\varkappa\varphi_3(z_3)] \tag{1.7}$$

где

$$\Phi_3(z_3) = \varphi_3'(z_3)$$

Из условия Коши

$$\tau_{xz}\cos nx + \tau_{yz}\cos ny = Z_n$$

находим

$$2\mathrm{Re}\,\varphi_3(z_3) = -\int\limits_0^s Z_n ds + c \tag{1.8}$$

Здесь c—постоянная, произвольная для одного из контуров, ограничивающих область S. Исходя из формул (1.5), (1.8), граничные условия на контурах запишем в виде

$$2\,\mathrm{Re}\,[s_3\varphi_3(t_3)] = f_3(t_3) \tag{1.9}$$

где $s_3 = 1$, $f_3(t_3) = -\int\limits_0^s Z_n ds + c$ в случае первой основной задачи; $s_3 = i\varkappa$, $f_3(t) = -w^*$ (w^*—заданное значение смещения) для второй основной задачи.

Пусть S является конечной областью, ограниченной контурами L_m $(m = \overline{0, M})$ так, что L_0 охватывает все остальные. Такими же исследованиями, как и в плоской задаче [4], для функции $\varphi_3(z_3)$ получаем выражение

$$\varphi_3(z_3) = \sum_{m=1}^{M} A_{3m}\ln(z_3 - z_{3m}) + \varphi_{30}(z_3) \tag{1.10}$$

где

$$A_{3m} = -\frac{iZ_m}{4\pi} \tag{1.11}$$

Z_m—главный вектор усилий, приложенных к контуру L_m перпендикулярно к плоскости Oxy; $\varphi_{30}(z_3)$—функция голоморфная в области S_3, ограниченной контурами L_{3m}, получаемыми из L_m аффинным преобразованием $z_3 = x + \mu_3 y$; z_{3m}—произвольные точки внутри L_{3m}

Если область S бесконечная (L_0 уходит в бесконечность полностью), то

$$\varphi_3(z_3) = \Gamma_3 z_3 + \sum_{m=1}^{M} A_{3m} \ln (z_3 - z_{3m}) + \varphi_{30}(z_3) \tag{1.12}$$

Здесь

$$\Gamma_3 = \frac{\tau_{xz}^{\infty} + \mu_3 \tau_{yz}^{\infty}}{\bar{\mu}_3 - \mu_3} \tag{1.13}$$

$\varphi_{30}(z_3)$ — функция, голоморфная в области S_3, включая и точку $z_3 = \infty$.

Если тело ортотропно и главные направления упругости совпадают с направлениями осей x, y, то

$$a_{45} = 0;\ a_{44} = 1/G_{yz};\ a_{55} = 1/G_{xz};\ \mu_3 = i\beta_3;\ \beta_3 = \sqrt{G_{xz}/G_{yz}},\ \varkappa = \sqrt{1/G_{yz}G_{xz}} \tag{1.14}$$

где G_{xz}, G_{yz} — модули сдвига для соответствующих направлений.

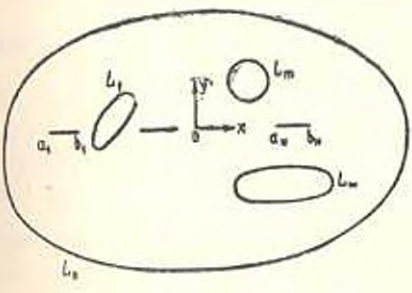
В случае изотропного тела

$$a_{45} = 0;\ a_{44} = a_{55} = \varkappa = 1/G;\ \mu_3 = i;\ w(x, y) = -2\mathrm{Re}\left[\frac{i}{G}\varphi(z)\right],\quad \tau_{yz} = 2\mathrm{Re}\Phi(z)$$

$$\tau_{xz} = -2\mathrm{Re}\, i\Phi(z) \tag{1.15}$$

§ 2. Пусть конечная многосвязная область S разрезана вдоль некоторой прямой отрезками $a_n b_n$ $(n = \overline{1, N})$ (следы „туннельных" трещин) (фиг. 1). Исходя из формулы (1.10), для $\Phi_3(z_3)$ имеем

$$\Phi_3(z_3) = A_3(z_3) + A_{3L}(z_3) + \Phi_{30}(z_3) \tag{2.1}$$



Фиг. 1

где

$$A_3(z_3) = \sum_{m=1}^{M} \frac{A_{3m}}{z_3 - z_{3m}};\quad A_{3L} = \sum_{n=1}^{N} \frac{A_{3n}^0}{z_3 - z_{3n}^0} \tag{2.2}$$

$A_{3n}^0 = -\dfrac{iZ_n^0}{4\pi}$; Z_n^0 — главный вектор внешних усилий на разрезе $a_n b_n$; z_{3n}^0 — точка приложения их равнодействующей; $\Phi_{30}(z_3)$ — функция, кусочно-голоморфная в области S с линией скачков L (разрезы вдоль вещественной оси при аффинном преобразовании переходят сами в себя).

Учитывая, что на разрезах, где $z_3 = t_3 = t = x$

$$\Phi_3^{\pm}(t) + \overline{\Phi_3^{\pm}(t)} = \tau_{yz}^{\pm} \tag{2.3}$$

и проводя элементарные преобразования условий (2.3), получим

$$[\Phi_{30}(t) - \overline{\Phi}_{30}(t)]^+ - [\Phi_{30}(t) - \overline{\Phi}_{30}(t)]^- = 2p(t)$$

$$[\Phi_{30}(t) + \overline{\Phi}_{30}(t)]^+ + [\Phi_{30}(t) - \overline{\Phi}_{30}(t)]^- = 2g(t) - 2A_3(t) - 2\overline{A}_3(t) \tag{2.4}$$

Здесь

$$p(t) = f_0^+(t) - f_0^-(t);\ g(t) = f_0^+(t) + f_0^-(t);\ f_0(t) = \tau_{yz} - A_{3L}(t) - \overline{A_{3L}(t)} \tag{2.5}$$

Следуя Мусхелишвили [5], введем функции

$$R_3(z_3) = \frac{\Phi_{30}(z_3) + \overline{\Phi}_{30}(z_3)}{2}; \quad Q_3(z_3) = \frac{\Phi_{30}(z_3) - \overline{\Phi}_{30}(z_3)}{2} \tag{2.6}$$

Тогда граничные условия (2.4) примут вид

$$Q_3^+(t) - Q_3^-(t) = p(t); \quad R_3^+(t) + R_3^-(t) = g(t) - A_3(t) - \overline{A}_3(t) \tag{2.7}$$

Решая краевые задачи (2.7) так же, как и в работе [1], находим

$$Q_3(z_3) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p(t)dt}{t - z_3} + F_1(z_3) + \Psi_1(z_3) - \overline{\Psi}_3(z_3)$$

$$R_3(z_3) = \frac{1}{2\pi i X(z_3)} \int_L \frac{X(t)[g(t) - A_3(t) - \overline{A}_3(t)]\,dt}{t - z_3} +$$

$$+ \frac{F_2(z_3) + \Psi_2(z_3) + \overline{\Psi}_4(z_3)}{X(z_3)} \tag{2.8}$$

где

$$X(z_3) = \prod_{n=1}^{N} \sqrt{(z_3 - a_n)(z_3 - b_n)} \tag{2.9}$$

$\Psi_j(z_3)$—функции, голоморфные в области, ограниченной контурами L_{3m} $(m = \overline{1, M})$; $F_p(z_3)$—функции, голоморфные внутри L_{30}.

Из равенств (2.6) следует, что

$$Q_3(z_3) = -\overline{Q}_3(z_3); \quad R_3(z_3) = \overline{R}(z_3) \tag{2.10}$$

Подставляя функции (2.8) в условия (2.10), получим

$$F_1(z_3) = -\overline{F}_1(z_3); \quad F_2(z_3) = \overline{F}_2(z_3) \tag{2.11}$$

$$\Psi_3(z_3) = \Psi_1(z_3); \quad \Psi_4(z_3) = \Psi_2(z_3) \tag{2.12}$$

Учитывая равенства (2.8)—(2.12) и вычисляя интегралы от $X(t)[A_3(t) + \overline{A}_3(t)]$, для $\Phi_3(z_3)$ находим

$$\Phi_3(z_3) = A_{3L}(z_3) + \frac{A_3(z_3) - \overline{A}_3(z_3)}{2} + \frac{D_3(z_3)}{X(z_3)} +$$

$$+ \frac{F_2(z_3) + \Psi_2(z_3) + \overline{\Psi}_2(z_3)}{X(z_3)} + F_1(z_3) + \Psi_1(z_3) - \overline{\Psi}_1(z_3) + f_1(z_3) \tag{2.13}$$

Здесь

$$D_3(z_3) = \sum_{m=1}^{M} \frac{A_{3m}}{2} \left[\frac{X(z_{3m})}{z_3 - z_{3m}} + \frac{X(\overline{z}_{3m})}{z_3 - \overline{z}_{3m}} \right]$$

$$f_1(z_3) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p(t)dt}{t - z_3} + \frac{1}{2\pi i X(z_3)} \int_L \frac{X(t)g(t)dt}{t - z_3} \tag{2.14}$$

Функции $F_1(z_3)$, $F_2(z_3)$, голоморфные внутри L_{30}, представимы в виде разложений по степеням z_3, причем в силу равенств (2.11)

$$F_1(z_3)=\sum_{k=0}^{\infty} i c_k z_3^k \quad F_2(z_3)=\sum_{k=0}^{\infty} d_k z_3^k \tag{2.15}$$

где c_k, d_k — вещественные постоянные.

Неизвестные функции $\Psi_1(z_3)$ и $\Psi_2(z_3)$, а также $F_1(z_3)$ и $F_2(z_3)$ находятся из граничных условий на контурах L_m $(m=\overline{0, M})$ и условий голоморфности комбинации $X(z_3)\overline{\Psi}_1(z_3)-\overline{\Psi}_2(z_3)$ в точках $\overline{z}_{3m}$ [1].

Аналогичными исследованиями в случае бесконечной области для $\Phi_3(z_3)$ опять получим формулу (2.13), где нужно принять

$$F_1(z_3)=ic_{30}; \quad F_2(z_3)=\sum_{k=0}^{N} d_{3N-k} z_3^k \tag{2.16}$$

причем из условий на бесконечности находим

$$c_{30}=\frac{\tau_{xz}^{\infty}}{2\beta_3}+\frac{a_3\tau_{yz}^{\infty}}{2\beta_3}; \; d_{30}=\frac{\tau_{yz}^{\infty}}{2}; \; d_{31}=\frac{Z-d_{30}(a_1+b_1+\ldots+a_N+b_N)}{2} \tag{2.17}$$

Z — главный вектор всех усилий, приложенных к телу. Остальные коэффициенты d_{3k} находятся из условий однозначности перемещений w при полном обходе по замкнутым контурам, окружающим каждый из разрезов a_nb_n. Эти условия имеют вид

$$2\mathrm{Re}\int_{a_nb_n}\frac{[\Psi_2(t)+\overline{\Psi}_2(t)+D_3(t)+F_2(t)]dt}{X(t)}+\mathrm{Re}\int_{a_nb_n}[f_1^+(t)-f_1^-(t)]dt=0$$

$$(n=\overline{1, N}) \tag{2.18}$$

Из системы (2.18) линейных алгебраических уравнений относительно d_{3k} находятся коэффициенты полинома $F_2(z_3)$. Если d_{31} вычисляется по формуле (2.17), то в системе (2.18) нужно оставлять $N-1$ уравнение.

Если имеет место геометрическая симметрия области S относительно линии разрезов, то $\Psi_i(z_3)$ и $\overline{\Psi}_i(z_3)$ определены в одних и тех же областях [1]. Поэтому $\Phi_3(z_3)$ можно записать в виде

$$\Phi_3(z_3)=A_{3L}(z_3)+\frac{A_3(z_3)-\overline{A}_3(z_3)}{2}+\frac{D_3(z_3)}{X(z_3)}+$$

$$+\frac{F_2(z_3)+\Psi_2(z_3)}{X(z_3)}+F_1(z_3)+\Psi_1(z_3)+f_1(z_3) \tag{2.19}$$

причем

$$\Psi_1(z_3)=-\overline{\Psi}_1(z_3); \quad \Psi_2(z_3)=\overline{\Psi}_2(z_3) \tag{2.20}$$

В этом случае для определения $\Psi_l(z_3)$, $F_p(z_3)$ нужно удовлетворять граничным условиям на контурах L_m и условиям (2.11), (2.20).

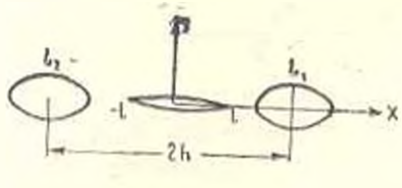
Вблизи контуров разреза a_kb_k

$$X(z_3)=\pm\sqrt{2l_kz_3^1}\,X^*(c\pm z_3^1), \; \Phi_3(z_3)=\frac{k_3}{2\sqrt{2z_3^1}}+O(1) \tag{2.21}$$

$$k_3^{\pm}=\frac{2}{\sqrt{l_k}\,X^*(c)}\left[D_3(c)+F_2(c)+\Psi_2(c)+\overline{\Psi}_2(c)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{X(t)g(t)dt}{t-c}\right] \tag{2.22}$$

где l_k — длина разреза; c — аффикс любого из концов; z_3^1 — малая величина; $O(1)$ — ограниченная величина; k_3 — коэффициент интенсивности напряжений для антиплоской деформации; $X^*(z_3)$ — это $X(z_3)$ без множителя $\sqrt{(z_3-a_k)(z_3-b_k)}$. Верхние знаки относятся к правому, нижние — к левому концу разреза.

§ 3. Пусть ортотропное (в частном случае при $\beta_3=1$ изотропное) тело, находящееся в условиях антиплоской деформации, ослаблено двумя одинаковыми продольными эллиптическими полостями и центральной прямолинейной «туннельной» трещиной между ними (фиг. 2). Как частный случай, будем рассматривать такое тело с одной правой полостью и трещиной. Обозначим контуры эллиптических отверстий сечения, их полуоси, расстояние между их центрами, длину трещины соответственно через L_1, L_2, a, b, $2h$, $2l$ (фиг. 2). Будем предполагать, что линия трещины совпадает с главным направлением упругости. Полости и трещины свободны от усилий, на бесконечности действуют усилия $\tau_{yz}^\infty=p$, $\tau_{xz}=0$.



Фиг. 2

В силу геометрической, упругой и силовой симметрии относительно осей координат

$$\Phi_3(z_3)=\overline{\Phi}_3(z_3); \quad \Phi_3(z_3)=\Phi_3(-z_3) \tag{3.1}$$

Из последних равенств следует, что $\Psi_1(z_3)=0$. Если, кроме того, учитывать, что $p(t)=g(t)=0$, $c_{30}=d_{31}=0$, то для $\Phi_3(z_3)$ получим

$$\Phi_3(z_3)=\frac{d_{30}z_3}{X(z_3)}+\frac{\Psi_2(z_3)}{X(z_3)} \tag{3.2}$$

где

$$X(z_3)=\sqrt{z_3^2-l^2}; \quad d_{30}=p/2; \quad z_3=x+i\beta_3 y \tag{3.3}$$

$\Psi_2(z_3)$ — функция, голоморфная вне контуров L_1, L_2.

Отображая внешность единичного круга на внешности эллипсов по формулам

$$z_3-h=R_3\left(\zeta_1+\frac{m_3}{\zeta_1}\right); \quad z_3+h=R_3\left(\zeta_2+\frac{m_3}{\zeta_2}\right) \tag{3.4}$$

где

$$R_3=(a+\beta_3 b)/2; \quad m_3=(a-\beta_3 b)/(a+\beta_3 b)$$

и учитывая указанную выше симметрию напряженного состояния, для функции окончательно находим

$$\Phi_3(z_3)=\frac{d_{30}z_3}{X(z_3)}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{X(z_3)}\left(\frac{1}{\zeta_1^k}+\frac{r(-1)^{k+1}}{\zeta_2^k}\right) \tag{3.5}$$

Здесь b_k—вещественные коэффициенты; r—постоянная, равная 0 или 1 для случаев одной или двух полостей соответственно.

Удовлетворяя граничному условию (1.9) на контуре правой полости (при этом в случае двух полостей в силу использованной симметрии граничное условие на контуре левой полости будет удовлетворяться автоматически), для определения b_k получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(B_{k-1}-m_3B_{k+1})b_k=0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[(1+\delta_k^1 m_3)B_{k+n-1}-m_3B_{k-n+1}+(1+m_3^n)r(D_{kn-1}-\right.$$

$$\left.-m_3D_{kn+1})\right]b_k+\sum_{k=1}^{n-1}(1-\delta_n^1)m_3^kB_{k-1}b_{n-k}-$$

$$-\sum_{k=1}^{n+1}m_3^{k-1}B_{k-1}b_{n-k+2}+\sum_{k=n}^{\infty}(1-\delta_n^1)m_3B_{k-n+1}b_k- \tag{3.6}$$

$$-\sum_{k=n+2}^{\infty}B_{k-n-1}b_k=-d_{30}(1+m_3^n)(B_{1n-1}-m_3B_{1n+1})\quad(n=1,2,\ldots)$$

где B_n, B_{1n}, D_{kn}—коэффициенты разложений функций $X^{-1}(z_3)$, $z_3X^{-1}(z_3)$, $(-1)^{k+1}X^{-1}(z_3)[\zeta_2(z_3)]^{-k}$ в ряды по полиномам Фабера для эллипса L_1. Они вычисляются через коэффициенты Фурье, которые в свою очередь находятся численным интегрированием [2].

Первое уравнение системы (3.6) представляет собой условие однозначности перемещений при обходе по замкнутому контуру, окружающему правую полость, или, все равно, что условие равенства нулю вычета функции $\Phi_3(z_3)$ в точке $z_3=h$.

После решения системы (3.6) функция (3.5) будет известной, что позволит вычислить напряжения (1.6). Для нахождения же коэффициентов интенсивности напряжений в соответствии с формулой (2.22) имеем

$$k_1^{\pm}=2d_{30}\sqrt{l}\pm\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2b_k}{\sqrt{l}}\left[\frac{1}{\zeta_1^k(\pm l)}\pm\frac{r(-1)^{k+1}}{\zeta_2^k(\pm l)}\right]$$

Верхние знаки относятся к правому, нижние—к левому концу трещины.

Полагая в приведенных формулах при расчетах $\beta_3=1$, получим решение задачи для изотропного тела с круговыми (если $a=b$) или эллиптическими полостями.

Ниже приводятся некоторые из полученных результатов численных исследований для изотропного и ортотропного тела. Коэффициенты интенсивности напряжений даны с точностью до множителя $p\sqrt{l}$, напряжения—с точностью до множителя p.

В табл. 1, 2 и 3 приведены значения коэффициента интенсивности напряжений соответственно для случаев изотропного тела с круговыми, эллиптическими полостями и ортотропного тела с круговыми полостями. При этом $\varepsilon = l/(h-a)$; в табл. 2 принималось, что $h/a = 1{,}25$, $\varepsilon = 0{,}5$.

Таблица 1

ε	k_3	h/a							
		Одна полость				Две полости			
		2	1,5	1,25	1,1	2	1,5	1,25	1,1
0,001	k_3^+	1,250	1,445	1,640	1,887	1,544	2,081	2,886	4,509
	k_3^-	1,250	1,444	1,640	1,765				
0,1	k_3^+	1,264	1,461	1,655	1,836	1,548	2,087	2,984	4,523
	k_3^-	1,239	1,431	1,629	1,821				
0,3	k_3^+	1,306	1,510	1,700	1,873	1,582	2,137	2,967	4,649
	k_3^-	1,225	1,415	1,618	1,822				
0,5	k_3^+	1,376	1,590	1,781	1,948	1,661	2,258	3,147	4,961
	k_3^-	1,222	1,412	1,621	1,836				
0,8	k_3^+	1,647	1,899	2,110	2,292	2,045	2,823	4,006	6,455
	k_3^-	1,246	1,444	1,668	1,908				
0,9	k_3^+	1,941	2,240	2,490	2,690	2,486	3,489	5,032	8,169
	k_3^-	1,272	1,479	1,712	1,958				

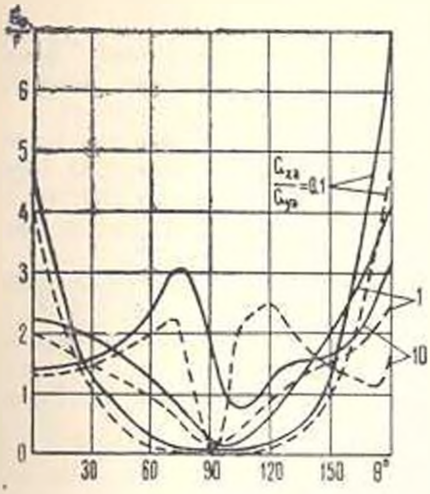
Таблица 2

К-во полостей	k_3	b/a							
		10	5	2	1	0,5	0,2	0,1	0,01
1	k_3^+	1,167	1,247	1,499	1,871	2,002	2,065	2,026	1,956
	k_3^-	1,100	1,217	1,433	1,621	1,709	1,670	1,640	1,592
2	$k_3^\pm$	2,010	2,313	2,703	3,141	3,315	3,179	3,031	2,845

Таблица 3

Кол-во полостей	k_3	ε	G_{xz}/G_{yz}					
			20	10	2	1	0,5	0,1
1	k_3^+	0,5	1,27	1,36	1,64	1,78	1,91	2,07
		0,8	1,48	1,58	1,93	2,11	2,30	2,62
		0,9	1,76	1,84	2,26	2,49	2,71	3,17
	k_3^-	0,5	1,24	1,31	1,53	1,62	1,68	1,71
		0,8	1,28	1,37	1,59	1,67	1,72	1,74
		0,9	1,29	1,38	1,63	1,71	1,77	1,79
2	$k_3^\pm$	0,5	2,36	2,53	2,98	3,15	3,27	3,28
		0,8	3,06	3,32	3,82	4,01	4,15	4,28
		0,9	3,44	4,01	4,81	5,03	5,19	5,41

На фиг. 3 изображены графики распределения нормальных напряжений τ_θ на площадках, перпендикулярных к контуру правой круговой полости для различных ортотропных материалов. При этом



Фиг. 3

считалось, что $\varepsilon=0.5$. Сплошные и штриховые линии относятся соответственно к телу с двумя и одной полостью и трещиной.

Из таблицы и графиков следует, что при сближении контуров отверстий и трещины друг с другом наблюдается большой рост концентрации напряжений и коэффициента интенсивности напряжений. Этот рост особенно значительный в случае двух полостей. С уменьшением отношения модулей сдвига G_{xz}/G_{yz} концентрация напряжений и коэффициент интенсивности напряжений растут.

ՃԱՔԵՐՈՎ ԲԱԶՄԱԿԱՊ ՄԱՐՄՆԻ ՀԱԿԱՀԱՐԹ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆ

Ս. Ա. ԿԱԼՈԵՐՈՎ

Ամփոփում

Ստացված է բազմակապ անիզոտրոպ կամ իզոտրոպ մարմնի համար հակահարթ դեֆորմացիայի կոմպլեքս պոտենցիալի ընդհանուր արտահայտությունը։ Կոմպլեքս պոտենցիալը պարունակում է փակ եզրագծերի վրա եզրային և որոշ լրացուցիչ պայմաններից որոշված երկու հոլոմորֆ ֆունկցիաներ։ Բերված է թվային հետազոտության մեկ կամ երկու խոռոչներ և ճաքեր ունեցող մարմնի համար։

ANTI-PLANE DEFORMATION OF MULTIPLY CONNECTED BODIES WITH CRACKS

S. A. KALOYEROV

Summary

The common expression of the complex potential of anti-plane deformation for the multiply connected anisotropic or isotropic body is obtained. Complex potential contains two holomorphic functions, defined on the boundary conditions on the reserved contours and some additional conditions.

Numerical investigations were carried out for the body with one or two cavities and cracks.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калоеров С. А.* Задача теории упругости для многосвязных пластинок с отверстиями и внутренними трещинами.—Теоретическая и прикладная механика, Киев-Донецк: Вища школа, Головное изд-во, 1982, вып. 13, с. 31—42.
2. *Космодамианский А. С., Калоеров С. А.* Температурные напряжения в многосвязных пластинках.—Киев-Донецк: Вища школа, Головное изд-во, 1983. 159 с.
3. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела.—М.: Наука, 1977. 415 с.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.—М.: Наука, 1966. 707 с.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Наука, 1968. 511 с.
6. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.—Киев: Наукова думка, 1981. 321 с.
7. *Си Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения.—В кн.: Разрушение. М.: Мир, 1975, т. 2, с. 83—203.

Донецкий государственный
университет

Поступила в редакцию
14.II. 1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVIII, № 6, 1985 Механика

УДК 539.3

К ПОСТРОЕНИЮ В ЦЕЛОМ ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАГНИТОУПРУГОСТИ*

САРКИСЯН С. О.

Как известно, линеаризованные уравнения магнитоупругости для тонких пластин и оболочек [1] состоят из трех групп уравнений. В первую группу входят трехмерные уравнения теории упругости с учетом массовых сил электромагнитного происхождения, во вторую группу входят трехмерные уравнения электродинамики для движущейся области, то есть для области, занимаемой оболочкой или пластинкой, в третью группу входят трехмерные уравнения электродинамики для среды, окружающей пластинку или оболочку, которая считается вакуумом.

Общеизвестны фундаментальные исследования С. А. Амбарцумяна с сотрудниками [2, 3] в области магнитоупругости тонких оболочек и пластин. В этих работах асимптотическому анализу подвергалась вторая группа уравнений. В исходном приближении было обнаружено, что тангенциальные компоненты вектора напряженности возбуждаемого электрического поля и нормальная компонента вектора напряженности возбуждаемого магнитного поля по толщине пластинки или оболочки остаются неизменными. Эти результаты были приняты в качестве гипотез и в соединении с гипотезами Кирхгоффа-Лява для тонких оболочек и пластин были сформулированы как гипотезы магнитоупругости тонких тел [1—3]. Основываясь на этих гипотезах, использованием метода осреднения в работах [2, 3] были осреднены по толщине оболочки или пластинки трехмерные уравнения первой и второй групп уравнений. Этим самым открыт огромный путь для изучения поставленных проблем в области магнитоупругости тонких тел.

Как отмечается в монографии [1], а также в работах [4—6], задача магнитоупругости в целом тем не менее остается трехмерной по причине того, что уравнения электродинамики для окружающей пластинку или оболочку среды из себя представляют трехмерные уравнения в бесконечной области с исключением области, занимаемой тонкой оболочкой или пластинкой.

* Работа была доложена на Всесоюзном школе-семинаре «Методы малого параметра и их применение», Минск: 16—25 сентября 1982 г., и опубликована в «Тезисы лекций и кратких научных сообщений Всесоюзной школы-семинара», Изд. Института математики АН БССР, Минск: 1982, 122 с

Отметим, что существуют некоторые подходы [4—6] для окончательного приведения трехмерной проблемы магнитоупругости тонких тел к двумерной проблеме.

Возникает естественный вопрос, нельзя ли построить равномерные асимптотические разложения во всей области изучаемого явления и именно таким путем свести в целом общую трехмерную проблему магнитоупругости тонких тел к двумерной проблеме. Получаемые таким образом двумерные уравнения будут асимптотически точными в целом.

Настоящая работа посвящена изучению этой задачи. Как видно, данная работа органически связана с исследованиями [2, 3] и по существу представляет продолжение этих исследований.

При построении и изучении асимптотических разложений в области оболочки как при рассмотрении первой группы уравнений, так и второй группы уравнений магнитоупругости существенно используется общеизвестный асимптотический метод А. Л. Гольденвейзера для статических задач теории оболочек [7—10].

В работах [11, 12] использованием вышеуказанного метода исследуются аналогичные задачи для статики анизотропных оболочек.

Как отмечается в работах [13, 14], область применимости асимптотического метода построения теории оболочек не ограничивается статикой. Если динамический пограничный слой регулярный [13, 14], это позволяет без существенных изменений применить вышеотмеченный асимптотический подход и получить асимптотически точные двумерные уравнения динамики тонких оболочек [13, 14].

В работах [15, 16] таким путем получены динамические двумерные уравнения для тонких изотропных пластин.

В работах [17, 18] построены асимптотически точные двумерные уравнения в целом для изучения магнитоупругих колебаний тонких пластин.

1. Рассматривается изотропная упругая оболочка постоянной толщины $2h$, изготовленная из материала с конечной электропроводностью σ. Оболочка находится во внешнем однородном магнитном поле с заданным вектором напряженности $\vec{H}_0=(H_\alpha, H_\beta, H_\gamma)$.

Отнесем срединную поверхность оболочки к линиям кривизны α, β и положение любой точки определим размерными координатами α, β и γ [10, 11].

Будем исходить из основных уравнений линеаризованной теории магнитоупругости [3] для трехмерной среды. Уравнения движения теории упругости с учетом массовых сил электромагнитного происхождения

$$\frac{1}{B}\partial_\alpha(B\sigma_\alpha)-k_\beta\sigma_\beta+\frac{1}{A}\partial_\beta(A\tau_{\beta\alpha})+k_\alpha\tau_{\alpha\beta}+\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\partial_\gamma\tau_{\alpha\gamma}+\frac{2\tau_{\alpha\gamma}}{R_1}=\rho\frac{\partial^2u_\alpha}{\partial t^2}+R_\alpha,\ (\alpha,\beta)$$

$$\partial_\gamma\sigma_\gamma-\left(\frac{\sigma_\alpha}{R_1}+\frac{\sigma_\beta}{R_2}\right)+\partial_\alpha\tau_{\alpha\gamma}+\partial_\beta\tau_{\beta\gamma}+k_\beta\tau_{\alpha\gamma}+k_\alpha\tau_{\beta\gamma}=\rho\frac{\partial^2u_\gamma}{\partial t^2}+R_\gamma \qquad (1.1)$$

$$\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\tau_{\alpha\beta}=\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\tau_{\beta\alpha},\quad \vec{R}=(R_\alpha,R_\beta,R_\gamma)=\frac{\sigma}{c}\left(\vec{e}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\times\vec{H}_0\right)\times\vec{H}_0$$

с соотношениями упругости [10].

Уравнения электродинамики в области оболочки [1]:

$$\operatorname{rot}\vec{h}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\vec{e}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\times\vec{H}_0\right)+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{e}}{\partial t},\quad \operatorname{div}\vec{h}=0$$

$$\operatorname{rot}\vec{e}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}}{\partial t},\quad \operatorname{div}\vec{e}=4\pi\rho_0,\quad \frac{\partial\rho_0}{\partial t}+\sigma\operatorname{div}\left(\vec{e}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\times\vec{H}_0\right)=0 \qquad (1.2)$$

Уравнения электродинамики во внешней от оболочки области (вакуум) [1]:

$$\operatorname{rot}\vec{h}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{e}}{\partial t},\quad \operatorname{rot}\vec{e}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}}{\partial t},\quad \operatorname{div}\vec{h}=0,\quad \operatorname{div}\vec{e}=0 \qquad (1.3)$$

где $\vec{u}=(u_\alpha,u_\beta,u_\gamma)$ — вектор перемещения точек оболочки, $\vec{e}=(E_\alpha,E_\beta,E_\gamma)$, $\vec{h}=(h_\alpha,h_\beta,h_\gamma)$, ρ_0 — компоненты индуцированного электромагнитного поля.

В данной работе строится итерационный процесс, позволяющий с любой асимптотической точностью удовлетворять уравнениям (1.1)—(1.3), механическим и электродинамическим условиям на лицевых поверхностях оболочки $\gamma=\pm h$. Этим процессом нельзя удовлетворять всем механическим и электродинамическим граничным условиям на боковой поверхности оболочки, для полного исследования задачи рассматриваются погранслои у боковой поверхности оболочки.

2. Займемся сначала построением основного итерационного процесса в области оболочки. Основным итерационным процессом определяется такое электромагнитоупругое состояние, которое проникнуто вглубь оболочки. Введем безразмерную систему координат, а также время по формулам [10, 15]

$$\alpha=R\lambda^{-p}\xi,\quad \beta=R\lambda^{-p}\eta,\quad \gamma=h\zeta=R\lambda^{-l}\zeta,\quad \lambda=\left(\frac{h}{R}\right)^{-\frac{1}{l}}=\varepsilon^{-\frac{1}{l}} \qquad (2.1)$$

$$\tau=\frac{t}{t_0},\quad t_0=\varepsilon^{\omega-1}\frac{R}{c_0},\quad c_0=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (2.2)$$

где R — характерный радиус кривизны оболочки, λ — большой параметр, p, l — целые числа, ω характеризует изменяемость процесса во времени. Введем также безразмерные величины по формулам работы [17, 18].

Преобразовав уравнения (1.1)—(1.3), используя для этого (2.1), (2.2), а также указанные выше формулы из работы [17, 18], будем искать решения вновь полученных уравнений в виде

$$v_\gamma=\lambda^{\varkappa+l-c}\sum\lambda^{-s}v_\gamma^{(s)},\quad v_\alpha=\lambda^{\varkappa+l-p}\sum\lambda^{-s}v_\alpha^{(s)},\quad \sigma_\alpha=\lambda^{\varkappa}\sum\lambda^{-s}\sigma_\alpha^{(s)};\quad \tau_{\alpha\beta}=\lambda^{\varkappa}\sum\lambda^{-s}\tau_{\alpha\beta}^{(s)};\ (\alpha,\beta) \qquad (2.3)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}=\lambda^{\varkappa+p-l}\sum\lambda^{-s}\sigma_{\alpha\gamma}^{(s)},\ (\alpha,\ \beta),\quad \sigma_{\gamma}=\lambda^{\varkappa-l+c}\sum\lambda^{-s}\sigma_{\gamma}^{(s)},\quad H_\alpha=\lambda^{\varkappa_1}H_{\alpha0},\ (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$$

$$h_\alpha=\lambda^{\varkappa_1}\sum\lambda^{-s}h_\alpha^{(s)};\quad E_\alpha=\lambda^{\varkappa_2}\sum\lambda^{-s}E_\alpha^{(s)};\ (\alpha,\ \beta,\ \gamma),\quad \rho_0=\lambda^{\varkappa_2}\sum\lambda^{-s}\rho_0^{(s)} \tag{2.4}$$

Здесь представления (2.3) совпадают с соответствующими представлениями монографии [10]; $c=0$ при $0\leqslant r-\frac{p}{l}\leqslant\frac{1}{2}$; $c=2p-l$ при $\frac{1}{2}\leqslant\frac{p}{l}<1$. Числа $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и ω в ходе решения уравнений (1.1)—(1.3) выбираются таким образом, чтобы в исходном приближении получились взаимосвязанные электромагнитоупругие явления, а также, чтобы инерционные члены входили в систему уравнений исходного приближения.

Таким образом, получаем

$$\varkappa=0,\quad \varkappa_1=l\left(\frac{1}{2}\omega-1\right),\quad \varkappa_2=\frac{3}{2}l\omega-2l-p \tag{2.5}$$

при этом, в случае $\quad 0\leqslant\frac{p}{l}\leqslant\frac{1}{2}\quad \omega=1 \qquad (2.6)$

а в случае $\quad \frac{1}{2}\leqslant\frac{p}{l}<1\quad \omega=\frac{2p}{l} \qquad (2.7)$

Подставляя (2.3), (2.4) в уравнения (1.1), (1.2) с учетом (2.5)—(2.7), получаем последовательность систем уравнений для определения коэффициентов разложения (2.3)—(2.4). Отметим, что касается упругой части задачи, операторы в указанных уравнениях тождественно совпадают с соответствующими операторами чисто упругой задачи [10, 11]. Здесь, для экономии места, приводятся только инерционные члены и силы электромагнитного происхождения, которые будут входить в правые части уравнения движения:

$$\frac{\partial^2 v_\alpha^{(s+2l\omega-2l-2p)}}{\partial\tau^2}+R_m(H_{\gamma0}^2+H_{\beta0}^2)\frac{\partial v_\alpha^{(s+2l\omega-2l-2p)}}{\partial\tau}-R_m\Big[H_{\gamma0}\Big(E_\beta^{(s+2l\omega-2l-2p)}+$$

$$+H_{\alpha0}\frac{\partial v_\gamma^{(s+2l\omega-2l-p+c)}}{\partial\tau}\Big)-H_{\beta0}\Big(E_\gamma^{(s+2l\omega-2l-2p)}-H_{\alpha0}\frac{\partial v_\beta^{(s+2l\omega-2l-2p)}}{\partial\tau}\Big)\Big];\quad (\alpha,\ \beta)$$

$$\tag{2.8}$$

$$\frac{\partial^2 v_\gamma^{(s)}}{\partial\tau^2}+R_m(H_{\alpha0}^2+H_{\beta0}^2)\frac{\partial v_\gamma^{(s)}}{\partial\tau}-R_m\Big[H_{\beta0}\Big(E_\alpha^{(s+2l\omega-2l-p+c)}+H_{\gamma0}\frac{\partial v_\beta^{(s+2l\omega-2l-p-c)}}{\partial\tau}\Big)-$$

$$-H_{\alpha0}\Big(E_\beta^{(s+2l\omega-2l-p-c)}-H_{\gamma0}\frac{\partial v_\alpha^{(s+2l\omega-2l-p-c)}}{\partial\tau}\Big)\Big]$$

Последовательность систем уравнений, которые получаются из соотношений упругости, аналогичны соответствующим системам уравнений [10, 11], поэтому они здесь не приводятся.

Из второй группы уравнений, то есть из (1.2) имеем

$$\frac{1}{B}\frac{\partial h_\gamma^{(s-l+p)}}{\partial\eta} - \frac{\partial h_\beta^{(s)}}{\partial\zeta} - \frac{1}{r_2}h_\beta^{(s-l)} - \frac{B\zeta}{r_2}\frac{\partial h_\beta^{(s-l)}}{\partial\zeta} = 4\pi R_m\Big[E_\alpha^{(s+l\omega-l-p)} + \Big(H_{\gamma 0}\frac{\partial v_\beta^{(s+l\omega-l-p)}}{\partial\tau} - H_{\beta 0}\frac{\partial v_\gamma^{(s)}}{\partial\tau}\Big)\Big] + 4\pi R_m\frac{\zeta}{r_2}\Big[E_\alpha^{(s+l\omega-2l-p)} + \Big(H_{\gamma 0}\frac{\partial v_\beta^{(s+l\omega-2l-p)}}{\partial\tau} - H_{\beta 0}\frac{\partial v_\gamma^{(s+l\omega-2l-p)}}{\partial\tau}\Big)\Big] + \Big(\frac{c_0}{c}\Big)^2\frac{\partial E_\alpha^{(s+2l\omega-3l-p)}}{\partial\tau} + \frac{\zeta}{r_2}\Big(\frac{c_0}{c}\Big)^2\frac{\partial E_\alpha^{(s+2l\omega-4l-p)}}{\partial\tau}; \qquad (\alpha,\ \beta)$$

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial B h_\alpha^{(s-l\omega+2p)}}{\partial\xi} + \frac{1}{AB}\zeta\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(\frac{B}{r_2}h_\alpha^{(s-l\omega-l+2p)}\Big) - \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\eta}\big(A h_\beta^{(s-l\omega+2p)}\big) - \frac{1}{AB}\zeta\frac{\partial}{\partial\eta}\Big(\frac{A}{r_1}h_\beta^{(s-l\omega-l+2p)}\Big) = 4\pi R_m\Big[E_\gamma^{(s)} + \Big(H_{\beta 0}\frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial\tau} - H_{\alpha 0}\frac{\partial v_\beta^{(s)}}{\partial\tau}\Big)\Big] + 4\pi R_m\zeta\Big(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\Big)\Big[E_\gamma^{(s-l)} + \Big(H_{\beta 0}\frac{\partial v_\alpha^{(s-l)}}{\partial\tau} - H_{\alpha 0}\frac{\partial v_\beta^{(s-l)}}{\partial\tau}\Big)\Big] + 4\pi R_m\frac{\zeta^2}{r_1 r_2}\times\Big[E_\gamma^{(s-2l)} + \Big(H_{\beta 0}\frac{\partial v_\alpha^{(s-2l)}}{\partial\tau} - H_{\alpha 0}\frac{\partial v_\beta^{(s-2l)}}{\partial\tau}\Big)\Big] + \Big(\frac{c_0}{c}\Big)^2\frac{\partial E_\gamma^{(s+l\omega-2l)}}{\partial\tau} + \zeta\Big(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\Big)\frac{\partial E_\gamma^{(s+l\omega-3l)}}{\partial\tau} + \frac{\zeta^2}{r_1 r_2}\frac{\partial E_\gamma^{(s+l\omega-4l)}}{\partial\tau} \qquad (2.9)$$

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\xi}\big(B h_\alpha^{(s-l+p)}\big) + \zeta\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{B}{r_2}h_\alpha^{(s-2l+p)} + \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\eta}\big(A h_\beta^{(s-l+p)}\big) + \frac{1}{AB}\zeta\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{A}{r_1}h_\beta^{(s-2l+p)} + \frac{1}{r_1}h_\gamma^{(s-l)} + \frac{1}{r_1}\frac{\zeta}{r_2}h_\gamma^{(s-2l)} + \frac{\partial h_\gamma^{(s)}}{\partial\zeta} + \zeta\Big(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\Big)\frac{\partial h_\gamma^{(s-l)}}{\partial\zeta} + \frac{\zeta^2}{r_1 r_2}\frac{\partial h_\gamma^{(s-2l)}}{\partial\zeta} = 0$$

$$\frac{1}{B}\frac{\partial E_\gamma^{(s-l+p)}}{\partial\eta} - \frac{1}{r_2}E_\beta^{(s-l)} - \frac{\partial E_\beta^{(s)}}{\partial\zeta} - \frac{\zeta}{r_2}\frac{\partial E_\beta^{(s-l)}}{\partial\zeta} = -\frac{\partial h_\alpha^{(s-l+p)}}{\partial\tau} - \frac{\zeta}{r_2}\frac{\partial h_\alpha^{(s-2l+p)}}{\partial\tau}$$

$$(\alpha,\ \beta)$$

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\xi}\big(BE_\beta^{(s)}\big) - \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\eta}\big(AE_\alpha^{(s)}\big) + \zeta\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(\frac{B}{r_2}E_\beta^{(s-l)}\Big) - \zeta\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\eta}\Big(\frac{A}{r_1}E_\alpha^{(s-l)}\Big) = -\frac{\partial h_\gamma^{(s)}}{\partial\tau} - \zeta\Big(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\Big)\frac{\partial h_\gamma^{(s-l)}}{\partial\tau} - \frac{\zeta^2}{r_1 r_2}\frac{\partial h_\gamma^{(s-2l)}}{\partial\tau}$$

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\xi}BE_\alpha^{(s-l+p)} + \frac{1}{AB}\zeta\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{B}{r_2}E_\alpha^{(s-2l+p)} + \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\eta}AE_\beta^{(s-l+p)} + \frac{1}{AB}\zeta\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{A}{r_1}E_\beta^{(s-2l+p)} + \frac{\partial E_\gamma^{(s)}}{\partial\zeta} + \zeta\Big(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\Big)\frac{\partial E_\gamma^{(s-l)}}{\partial\zeta} + \Big(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\Big)E_\gamma^{(s-l)} + 2\zeta\frac{1}{r_1 r_2}E_\gamma^{(s-2l)} + \zeta^2\frac{1}{r_1 r_2}\frac{\partial E_\gamma^{(s-2l)}}{\partial\zeta} = 4\pi\Big[\rho_0^{(s)} + \zeta\Big(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\Big)\rho_0^{(s-l)} + \frac{\zeta^2}{r_1 r_2}\rho_0^{(s-2l)}\Big]$$

Уравнения (2.8), (2.9) в совокупности составляют полную систему для последовательного определения всех неизвестных величин в области оболочки.

3. Рассмотрим теперь третью группу уравнений, то есть уравнения электродинамики (1.3) во внешней от оболочки области (вакуум). Займемся сначала построением основного итерационного процесса в этой области, представляющей собой бесконечную область с исключением области тонкой оболочки. Основной итерационный процесс определяет такое электродинамическое состояние, которое проникнуто вглубь во внешней от оболочки области.

Предполагается, что во внешней области электромагнитное поле в трех направлениях имеет одну и ту же изменяемость, равную изменяемости по направлениям α и β для внутренней задачи. По времени для внешней задачи принимается такая же изменяемость, что и для внутренней задачи.

Итак, во внешнюю среду введем безразмерную систему координат и время соответственно

$$\alpha = R\lambda^{-p}\xi, \quad \beta = R\lambda^{-p}\eta, \quad \zeta_1 = R\lambda^{-p}\gamma, \quad \tau = \frac{t}{t_0} \tag{3.1}$$

где t_0 определяется из (2.2) с учетом (2.6) или (2.7).

Преобразовав уравнения (1.3), используя для этого (3.1), будем щих в (3.2), с учетом (2.5), (2.6) или (2.7) примут вид

$$E_\alpha = \lambda^{\varkappa_1}\sum \lambda^{-s}E_\alpha^{(s)}; \quad (\alpha, \beta, \gamma), \quad h_\alpha = \lambda^{\varkappa_1}\sum \lambda^{-s}h_\alpha^{(s)}; \quad (\alpha, \beta, \gamma) \tag{3.2}$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ определяются соответственно из (2.5) с учетом (2.6) или (2.7).

Итак уравнения определения неизвестных коэффициентов, входящих в (3.2), с учетом (2.5), (2.6) или (2.7) примут вид

$$\operatorname{rot}\vec{h}^{(s)} = \left(\frac{c_0}{c}\right)^2 \frac{\partial \vec{E}^{(s)}}{\partial \tau}; \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial h^{(s)}}{\partial \tau}; \quad \operatorname{div}\vec{h}^{(s)} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{E}^{(s)} = 0 \tag{3.3}$$

Сопоставляя (3.3) с (1.3), легко убедиться, что в асимптотических приближениях основного итерационного процесса, как и следовало ожидать, уравнения не упрощаются (они остаются без изменений).

Рассмотрим теперь, как будет выглядеть в новой системе координат (3.1) тонкая область оболочки. В первоначально выбранной размерной системе координат лицевые поверхности оболочки будут $\gamma = \pm h$, в системе координат (3.1) эти поверхности определяются следующим образом (как и в работах [17, 18]):

$$\zeta_1 = \pm\frac{h}{R} = \pm\varepsilon \tag{3.4}$$

Здесь, стремя $\varepsilon \to 0$, будем иметь $\zeta_1 = \pm 0$. Это означает, что изменения компонентов электромагнитного поля по толщине $-\frac{h}{R} < \zeta_1 < \frac{h}{R}$ во внешней от оболочки области асимптотически не влияют на внутрений или основной итерационный процесс, а саму оболочку необходимо рассматривать как математический разрез. Следовательно, для внешней задачи (основного итерационного процесса) на таком математическом разрезе необходимо задавать те значения для компонентов электромагнитного поля, которые получаются на лицевых поверхностях оболочки при рассмотрении внутренней задачи (основного итерационного процесса).

Если рассматривать основной итерационный процесс для внутренней задачи, то есть уравнения (2.9), то легко убедиться, что в общем случае по «s» любое граничное значение для компонентов электромагнитного поля на лицевых поверхностях оболочки $\zeta = \pm 1$ можно представить в виде суммы двух слагаемых так, что одна часть этой суммы при переходе от $\zeta = +1$ к $\zeta = -1$ не изменяется, а вторая часть при указанном переходе терпит разрывы.

Используя каждый раз выражения этих разрывов из внутренней задачи, при помощи тензора Грина во всем пространстве (в R_3) для уравнений (3.3), можно написать решение уравнений (3.3) в интегральной форме следующим образом:

$$E_{\alpha0}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta_1, \tau) = \iint\limits_{\Omega} Q_{1\alpha}(\xi-\xi_0, \eta-\eta_0, \zeta_1, \tau)[h_{\alpha}^{(s)}]d\Omega +$$

$$+ \iint\limits_{\Omega} Q_{2\alpha}(\xi-\xi_0, \eta-\eta_0, \zeta_1, \tau)[h_{\beta}^{(s)}]d\Omega; \quad (\alpha, \beta) \tag{3.5}$$

и аналогичные выражения для $h_{\gamma0}^{(s)}$, $h_{\alpha1}^{(s)}$, (α, β), $E_{\gamma1}^{(s)}$, а также

$$h_{\alpha0}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta_1, \tau) = \iint\limits_{\Omega} G_{3\alpha}(\xi-\xi_0, \eta-\eta_0, \zeta_1, \tau)[E_{\alpha}^{(s)}]d\Omega + \iint\limits_{\Omega} G_{4\alpha}(\xi-\xi_0, \eta-\eta_0,$$

$$\zeta_1, \tau)[E_{\beta}^{(s)}]d\Omega + \iint\limits_{\Omega} G_{5\alpha}(\xi-\xi_0, \eta-\eta_0, \zeta_1, \tau)[h_{\gamma}^{(s)}]d\Omega; \quad (\alpha, \beta) \tag{3.6}$$

и аналогичные выражения для $h_{\gamma1}^{(s)}$, $E_{\alpha1}^{(s)}$, (α, β), $E_{\gamma0}^{(s)}$.

Здесь Ω — срединная поверхность оболочки, $(\xi_0, \eta_0)\in\Omega$, $(\xi, \eta, \zeta_1)\in R_3$, $[h_{\alpha}^{(s)}]$, (α, β, γ), $[E_{\alpha}^{(s)}]$, (α, β, γ) представляют вышеуказанные разрывы соответствующих величин на разрезе $\zeta_1 = \pm 0$ в области срединной поверхности оболочки, которые определяются из внутренней задачи, то есть из уравнений (2.9). Следует принимать во внимание, что компоненты электромагнитного поля во внешней от оболочки области были представлены в виде

$$h_{\alpha}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta_1, \tau) = h_{\alpha0}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta_1, \tau) + h_{\alpha1}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta_1, \tau), \quad (\alpha, \beta, \gamma), \quad (h_{\alpha}^{(s)}, E_{\alpha}^{(s)}) \tag{3.7}$$

где $h_{\alpha0}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta_1, \tau)$, $E_{\alpha0}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta_1, \tau)$, (α, β, γ) при прохождении через разрез $\zeta_1 = \pm 0$, $\xi, \eta \in \Omega$ не терпят разрывов, а $h_{\alpha1}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta_1, \tau)$, $E_{\alpha1}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta_1, \tau)$, (α, β, γ) при прохождении через указанный разрез скачкообразно изменяются.

Отметим, что в выражениях (3.5) и (3.6) функции $G_{i\alpha}$, $Q_{i\alpha}$, $i=1, 2\ldots 5$; (α, β, γ) из себя представляют тензор Грина уравнений (3.3) в R_3.

Зная $E_\gamma^{(s)}$ для внешней задачи и зная $E_\gamma^{(s)}$ для внутренней задачи, легко определить плотность поверхностного заряда χ, который возникает на лицевых поверхностях оболочки

$$\chi^{(s)+} = E_\gamma^{(s)+}(\text{внеш.}) - E_\gamma^{(s)+}(\text{внут.}); \quad \chi^{(s)-} = E_\gamma^{(s)-}(\text{внеш.}) - E_\gamma^{(s)-}(\text{внут.}) \tag{3.8}$$

4. Проведем анализ тех приближений основного итерационного процесса (2.8), (2.9), (3.5), (3.6), которые соответствуют основным допущениям классической теории оболочек [10, 8]. Рассматривая уравнения (2.8), (2.9), (3.5), (3.6), легко убедиться, что результатом классической теории оболочек, как и в [10, 11], должны соответствовать результаты, полученные асимптотическим интегрированием уравнений трехмерной задачи магнитоупругости, если ограничиться приближением до $s=2l-2p-1$ включительно, в частности при нулевой изменяемости ($p=0$, $l=1$) этому будут соответствовать приближения $s=0$; 1.

Рассмотрим первые два приближения в случае нулевой изменяемости. Для $s=0$ из соотношений (2.8), (2.9), а также из соотношений упругости [10], которые мы не приводили, имеем

$$v_\alpha^{(0)} = v_{\alpha 0}^{(0)}(\xi, \eta, \tau), \ (\alpha, \beta), \ v_\gamma^{(0)} = v_{\gamma 0}^{(0)}(\xi, \eta, \tau), \ E_\alpha^{(0)} = E_{\alpha 0}^{(0)}(\xi, \eta, \tau), \ (\alpha, \beta)$$

$$h_\gamma^{(0)} = h_{\gamma 0}^{(0)}(\xi, \eta, \tau) \tag{4.1}$$

Условия (4.1) из себя представляют выражения известных гипотез магнитоупругости [1].

Используя (4.1), а также соответствующие силовые граничные условия на лицевых поверхностях оболочки, уравнения движения в исходном приближении приводятся к следующим уравнениям:

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial(B\sigma_\alpha^{(0)})}{\partial\xi} - Rk_\beta\sigma_\beta^{(0)} + \frac{1}{AB}\frac{\partial(A\tau_{\beta\alpha}^{(0)})}{\partial\eta} + Rk_\alpha\tau_{\alpha\beta}^{(0)} - \frac{\partial^2 v_{\alpha 0}^{(0)}}{\partial\tau^2} - R_m H_{\gamma 0}^2\frac{\partial v_{\alpha 0}^{(0)}}{\partial\tau} +$$

$$+ R_m H_{\gamma 0}\left(E_{\beta 0}^{(0)} + H_{\alpha 0}\frac{\partial v_{\gamma 0}^{(0)}}{\partial\tau}\right) = -\frac{1}{2}p_\alpha^{(0)} \qquad (\alpha, \beta) \tag{4.2}$$

$$\frac{\sigma_\alpha^{(0)}}{r_1} + \frac{\sigma_\beta^{(0)}}{r_2} + \frac{\partial^2 v_{\gamma 0}^{(0)}}{\partial\tau^2} + R_m(H_{\alpha 0}^2 + H_{\beta 0}^2)\frac{\partial v_{\gamma 0}^{(0)}}{\partial\tau} - R_m\left|H_{\beta 0}\left(E_{\alpha 0}^{(0)} + H_{\gamma 0}\frac{\partial v_{\beta 0}^{(0)}}{\partial\tau}\right) -\right.$$

$$\left. - H_{\alpha 0}\left(E_{\beta 0}^{(0)} - H_{\gamma 0}\frac{\partial v_{\alpha 0}^{(0)}}{\partial\tau}\right)\right| = \frac{1}{2}p_\gamma^{(0)}$$

Напряжения $\sigma_\alpha^{(0)}$, (α, β), $\tau_{\alpha\beta}^{(0)}$, $\tau_{\alpha\gamma}^{(0)}$, (α, β), $\sigma_\gamma^{(0)}$, а также деформации $\varepsilon_i^{(0)}$, (1, 2), $\omega^{(0)}$ определяются аналогичными формулами из [10].

Для электродинамической части задачи получаем

$$h_\alpha^{(0)} = 4\pi R_m^* \left|E_{\beta 0}^{(0)} + \left(H_{\alpha 0}\frac{\partial v_{\gamma 0}^{(0)}}{\partial\tau} - H_{\gamma 0}\frac{\partial v_{\alpha 0}^{(0)}}{\partial\tau}\right)\right| + h_{\alpha 0}^{(0)}(\xi, \eta, \tau); \quad (\alpha, \beta) \tag{4.3}$$

$$[h_\alpha^{(0)}]=h_\alpha^{(0)+}-h_\alpha^{(0)-}=h_{\alpha1}^{(0)}=2\left[4\pi R_m\left(E_{\beta0}^{(0)}+H_{\alpha0}\frac{\partial v_{\gamma0}^{(0)}}{\partial\tau}-H_{\gamma0}\frac{\partial v_{\alpha0}^{(0)}}{\partial\tau}\right)\right] \quad (\alpha,\beta) \tag{4.4}$$

$$E_\gamma^{(0)}=H_{\alpha0}\frac{\partial v_{\beta0}^{(0)}}{\partial\tau}-H_{\beta0}\frac{\partial v_{\alpha0}^{(0)}}{\partial\tau};\quad \rho_0^{(0)}=0 \tag{4.5}$$

Так как $[E_\alpha^{(0)}]=0$; (α, β), $[h_\gamma^{(0)}]=0$, то, как это следует из (3.6) во внешней области $h_{\alpha0}^{(0)}(\xi, \eta, \zeta_1, \tau)=0$; (α, β), $h_{\gamma1}^{(0)}(\xi, \eta, \zeta_1, \tau)=0$; $E_{\alpha1}^{(0)}(\xi, \eta, \zeta_1, \tau)=0$; (α, β); $E_{\gamma0}^{(0)}(\xi, \eta, \zeta_1, \tau)=0$; из того, что $h_{\alpha0}^{(0)}(\xi, \eta, \zeta_1, \tau)=0$ во внешней области и условий непрерывности для этой величины на лицевых поверхностях оболочки будет следовать, что в (4.3) $h_{\alpha0}^{(0)}(\xi, \eta, \tau)=0$; (α, β).

Отличные от нуля величины внешней задачи определяются из уравнений (3.5) при $s=0$ с учетом (4.4).

Используя данные исходного приложения, для приближений $s=1$ из (2.8), (2.9) получим

$$\sigma_\alpha^{(1)}=\sigma_{\alpha0}^{(1)}+\zeta\sigma_{\alpha1}^{(1)};\ \tau_{\alpha\beta}^{(1)}=\tau_{\alpha\beta0}^{(1)}+\zeta\tau_{\alpha\beta1}^{(1)};\ v_\alpha^{(1)}=v_{\alpha0}^{(1)}+\zeta v_{\alpha1}^{(0)};\ (\alpha, \beta),\ v_\gamma^{(1)}=v_{\gamma0}^{(1)}-\nu\zeta(\sigma_\alpha^{(0)}+\sigma_\beta^{(0)})$$

$$\tau_{\alpha\gamma}^{(1)}=\tau_{\alpha\gamma0}^{(1)}+\zeta\tau_{\alpha\gamma1}^{(1)}+\zeta^2\tau_{\alpha\gamma2}^{(1)}+\zeta^3\tau_{\alpha\gamma3}^{(1)};\ (\alpha, \beta),\ \sigma_\gamma^{(1)}=\sigma_{\gamma0}^{(1)}+\zeta\sigma_{\gamma1}^{(1)}+\zeta^2\sigma_{\gamma2}^{(1)}+\zeta^3\sigma_{\gamma3}^{(1)} \tag{4.6}$$

$$h_\alpha^{(1)}=h_{\alpha0}^{(1)}+\zeta h_{\alpha1}^{(1)}+\zeta^2 h_{\alpha2}^{(1)}+\zeta^3 h_{\alpha3}^{(1)},\ (\alpha, \beta),\ h_\gamma^{(1)}=h_{\gamma0}^{(1)}+\zeta h_{\gamma1}^{(1)}+\zeta^2 h_{\gamma2}^{(1)}$$

$$E_\alpha^{(1)}=E_{\alpha0}^{(1)}+\zeta E_{\alpha1}^{(1)}+\zeta^2 E_{\alpha2}^{(1)},\ (\alpha, \beta),\ E_\gamma^{(1)}=E_{\gamma0}^{(1)}+\zeta E_{\gamma1}^{(1)},\ \rho_0^{(1)}=\rho_0^{(1)}(\xi, \eta, \tau) \tag{4.7}$$

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial(B\sigma_{\alpha0}^{(1)})}{\partial\xi}-Rk_\beta\sigma_{\beta0}^{(1)}+\frac{1}{AB}\frac{\partial(A\tau_{\alpha\beta0}^{(1)})}{\partial\eta}+Rk_\alpha\tau_{\alpha\beta0}^{(1)}-\frac{\partial^2 v_{\alpha0}^{(1)}}{\partial\tau^2}+R_m(H_{\gamma0}^2+H_{\beta0}^2)\frac{\partial v_{\alpha0}^{(1)}}{\partial\tau}-$$

$$-R_m\left[H_{\gamma0}\left(\overline{E}_{\beta0}^{(1)}+H_{\alpha0}\frac{\partial v_{\gamma0}^{(1)}}{\partial\tau}\right)-H_{\beta0}\left(E_{\gamma0}^{(1)}-H_{\alpha0}\frac{\partial v_{\beta0}^{(1)}}{\partial\tau}\right)\right]+R_mH_{\gamma0}\frac{1}{3}\frac{\partial h_{\alpha1}^{(0)}}{\partial\tau};\quad (\alpha, \beta) \tag{4.8}$$

$$\frac{\sigma_{\alpha0}^{(1)}}{r_1}+\frac{\sigma_{\beta0}^{(1)}}{r_2}=-\frac{\partial^2 v_{\gamma0}^{(1)}}{\partial\tau^2}-R_m(H_{\alpha0}^2+H_{\beta0}^2)\frac{\partial v_{\gamma0}^{(1)}}{\partial\tau}+R_m\left[H_{\beta0}\left(\overline{E}_{\alpha0}^{(1)}+H_{\gamma0}\frac{\partial v_{\beta0}^{(1)}}{\partial\tau}\right)-\right.$$

$$\left.-H_{\alpha0}\left(\overline{E}_{\beta0}^{(1)}-H_{\gamma0}\frac{\partial v_{\alpha0}^{(1)}}{\partial\tau}\right)\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial h_{\alpha1}^{(0)}}{\partial\tau}-\frac{1}{2}\frac{\partial h_{\beta1}^{(0)}}{\partial\tau}$$

$$[h_\alpha^{(1)}]=2\left\{\frac{1}{A}\frac{\partial h_{\gamma0}^{(0)}}{\partial\tau}+4\pi R_m\left[\overline{E}_{\beta0}^{(1)}+\left(H_{\alpha0}\frac{\partial v_{\gamma0}^{(1)}}{\partial\tau}-H_{\gamma0}\frac{\partial v_{\alpha0}^{(1)}}{\partial\tau}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}4\pi R_m\frac{\partial h_{\alpha1}^{(0)}}{\partial\tau}+\left(\frac{c_0}{c}\right)^2\frac{\partial E_{\beta0}^{(0)}}{\partial\tau},\quad (\alpha, \beta)\right. \tag{4.9}$$

$$[E_\alpha^{(1)}]=2\left[\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(H_{\alpha0}\frac{\partial v_{\beta0}^{(0)}}{\partial\tau}-H_{\beta0}\frac{\partial v_{\alpha0}^{(0)}}{\partial\tau}\right)-\frac{E_{\alpha0}^{(0)}}{r_1}\right],\quad (\alpha, \beta)$$

$$[h_\gamma^{(1)}]=-2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)h_{\gamma0}^{(0)}$$

где $\overline{E}_{\alpha0}^{(1)}$, (α, β) из себя представляют значения четной части относительно ζ для выражений $E_\alpha^{(1)}|_{\zeta=\pm1}$; (α, β) (4.7).

Отметим, что для коэффициентов перед степенями в (4.6) и (4.7) получаются конкретные формулы для их вычисления, но для экономии места эти формулы здесь не приводятся. По такой же причине в уравнениях (4.8) не приведены внешние силы, они имеют аналогичный вид, как в [10, 11].

С учетом (4.9) при $s=1$ с помощью формул (3.5) и (3.6) определяются все искомые величины во внешней от оболочки области.

5. Представим полученные результаты через термины классической линейной теории оболочек [10]. Для этого вводим понятия усилий, моментов и компонентов смещения срединной поверхности оболочки соответствующим образом, как в [10, 11]. Поступая, таким образом, известным способом [10, 11], сложив уравнения (4.2) и (4.8), получим

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial BT_1}{\partial\alpha}-k_3T_2+\frac{1}{AB}\frac{\partial AS_{21}}{\partial\beta}+k_2S_{\alpha\beta}=2\rho h\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\frac{2\sigma h}{c^2}H_\gamma^2\frac{\partial u}{\partial t}-$$

$$-\frac{2\sigma h}{c}H_\gamma\left(\overline{E}_\beta+\frac{1}{c}H_\alpha\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\frac{4\pi}{3}\frac{\sigma^2h^3}{c^2}H_\gamma\left[\frac{\partial E_\beta}{\partial t}+\frac{1}{c}\left(H_\alpha\frac{\partial^2w}{\partial t^2}-H_\gamma\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right)\right]+$$

$$+\frac{h}{2\pi c^2}H_\beta\left(H_\beta\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-H_\alpha\frac{\partial^2v}{\partial t^2}\right);\quad(\alpha,\ \beta) \tag{5.1}$$

$$\frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}=-2\rho h\frac{\partial^2w}{\partial t^2}-\frac{2\sigma h}{c^2}(H_\alpha^2+H_\beta^2)\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{2\sigma h}{c}\left[H_\beta\left(\overline{E}_\alpha+\frac{1}{c}H_\gamma\frac{\partial v}{\partial t}\right)-\right.$$

$$\left.-H_\alpha\left(\overline{E}_\beta-\frac{1}{c}H_\gamma\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]+\frac{4\pi}{3}\frac{\sigma^2h^3}{c^2}\left\{H_\beta\left[\frac{\partial\overline{E}_\alpha}{\partial t}+\frac{1}{c}\left(H_\gamma\frac{\partial^2v}{\partial t^2}-H_\beta\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-H_\alpha\left[\frac{\partial\overline{E}_\beta}{\partial t}+\frac{1}{c}\left(H_\alpha\frac{\partial^2w}{\partial t^2}-H_\gamma\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right)\right]\right\}$$

Соотношения упругости получаются в аналогичном виде, как в [10].

Поступая аналогичным образом с соответствующими уравнениями (3.5) при $s=0$ и $s=1$ и подставляя $\zeta_1=0$, получим

$$\overline{E}_\alpha(\alpha,\beta,t)=\iint\limits_{\Omega}Q_{1\alpha}(\alpha-\alpha_0,\beta-\beta_0,t)[h_\alpha]d\Omega+\iint\limits_{\Omega}Q_{2\alpha}(\alpha-\alpha_0,\beta-\beta_0,t)[h_\beta]d\Omega,\quad(\alpha,\beta) \tag{5.2}$$

$$\overline{h}_\gamma(\alpha,\beta,t)=\iint\limits_{\Omega}G_{1\gamma}(\alpha-\alpha_0,\beta-\beta_0,t)[h_\alpha]d\Omega+\iint\limits_{\Omega}G_{2\gamma}(\alpha-\alpha_0,\beta-\beta_0,t)[h_\beta]d\Omega$$

где

$$[h_\alpha]=2h\left\{\frac{1}{A}\frac{\partial\overline{h}_\gamma}{\partial\alpha}+4\pi\frac{\sigma}{c}\left[\overline{E}_\beta+\frac{1}{c}\left(H_\alpha\frac{\partial w}{\partial t}-H_\gamma\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]+\frac{1}{c}\frac{\partial\overline{E}_\beta}{\partial t}-\right.$$

$$\left.-\frac{16\pi^2}{3}\frac{\sigma^2h^2}{c^3}\left[\frac{\partial\overline{E}_\beta}{\partial t}+\frac{1}{c}\left(H_\alpha\frac{\partial^2w}{\partial t^2}-H_\gamma\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right)\right]\right\},\quad(\alpha,\ \beta),\ (\alpha_0,\beta_0)\in\Omega,\ (\alpha,\beta)\in R_2 \tag{5.3}$$

Уравнения (5.1)—(5.3) с учетом соотношений упругости [10] составляют замкнутую систему интегро-дифференциальных уравнений для определения основных расчетных величин. После определения указанных основных расчетных величин остальные расчетные величины будут определяться соответствующими формулами.

Отметим, что уравнения (5.1) и соответствующие соотношения упругости представляют уравнения колебания оболочки по безмоментной теории [10] с учетом сил электромагнитного происхождения. Как нам кажется, эти важные уравнения приводятся здесь впервые.

Уравнения (5.1)—(5.3) позволяют определять величины с асимптотической точностью $O(\varepsilon^2)$. На таком уровне точности учтены силы электромагнитного происхождения в уравнениях (5.2), а также на таком уровне точности написаны выражения (5.3) для $[h_\alpha]$, (α, β). Все эти факторы могут оказаться существенными в конкретных задачах магнитоупругости для тонких оболочек.

При ненулевом показателе изменяемости из систем (2.8), (2.9), (3.5), (3.6) с учетом (2.6), (2.7) следует, что при $s \in [0, l-2p+c)$ разрешающая система имеет структуру (4.1)—(4.5), если же $s \in [l-2p+c, 2l-2p-1]$, то соответствующая система имеет структуру (4.7)—(4.9). Поэтому форма решений уравнений (2.8), (2.9), (3.5), (3.6) будет такой же, как при $s=0$; 1, $p=0$; $l=1$.

Соответствующая система разрешающих уравнений, вытекающая из (2.8), (2.9), (3.5), (3.6), отвечающих точности $O(\varepsilon^{2-2r})$, в терминах усилий и моментов будет

$$\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial BT_1}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}T_2 + \frac{\partial AS_{21}}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta}S_{12}\right] + \frac{N_1}{R_1} = 2\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\sigma h}{c^2}H_\gamma^2\frac{\partial u}{\partial t} -$$

$$-\frac{2\sigma h}{c}H_\gamma\left(\bar E_\beta + \frac{1}{c}H_\alpha\frac{\partial w}{\partial t}\right) + \frac{8\pi}{3}\frac{\sigma^2 h^3}{c^3}H_\gamma\left[\frac{\partial \bar E_\beta}{\partial t} + \frac{1}{c}\left(H_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - H_\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right] +$$

$$+\frac{h}{2\pi c^2}H_\beta\left(H_\beta\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - H_\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right); \quad (\alpha, \beta) \tag{5.4}$$

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial BN_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial AN_2}{\partial\beta}\right) = -2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2\sigma h}{c^2}(H_\alpha^2 + H_\beta^2)\frac{\partial w}{\partial t} +$$

$$+\frac{2\sigma h}{c}\left[H_\beta\left(\bar E_\alpha + \frac{1}{c}H_\gamma\frac{\partial v}{\partial t}\right) - H_\alpha\left(\bar E_\beta - \frac{1}{c}H_\beta\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right] - \frac{8\pi}{3}\frac{\sigma^2 h^3}{c^3}\left\{H_\beta\frac{\partial \bar E_\beta}{\partial t} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{c}\left(H_\gamma\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - H_\beta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\right] - H_\alpha\left[\frac{\partial \bar E_\beta}{\partial t} + \frac{1}{c}\left(H_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - H_\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right]\Bigg\} \tag{5.5}$$

$$\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial BM_1}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}M_2 + \frac{\partial AH_{21}}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta}H_{12}\right] - N_1 = -\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial t^2} -$$

$$-\frac{2\sigma h^3}{3c}H_\gamma\left[\frac{1}{c}H_\gamma\frac{\partial\gamma_1}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(H_\alpha\frac{\partial v}{\partial t} - H_\beta\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\bar E_\beta}{R_2} - \frac{1}{c}\frac{\nu}{1-\nu}H_\alpha \times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\partial t}\right] - \frac{2\sigma h^3}{3c}H_\beta\left\{\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}B\left[\bar E_\alpha + \frac{1}{c}\left(H_\gamma\frac{\partial v}{\partial t} - H_\beta\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right] +\right.$$

$$+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}A\left[\overline{E}_3+\frac{1}{c}\left(H_\alpha\frac{\partial w}{\partial t}-H_\gamma\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]\Bigg|. \quad (\alpha,\ \beta) \tag{5.6}$$

Соотношения упругости будут выражаться аналогичными формулами [10], поэтому здесь они не приводятся.

К уравнениям движения (5.4)—(5.6) следует присоединить соответствующие уравнения, вытекающие из электродинамической части задачи (2.9), (3.5). Эти уравнения и в случае ненулевой изменяемости имеют вид (5.2), (5.3).

Итак, (5.4)—(5.6), (5.2) и (5.3) будут представлять ту замкнутую систему интегро-дифференциальных уравнений, которая необходима для исследования колебаний проводящей тонкой оболочки по моментной теории.

Подставляя таким образом в полученные интегро-дифференциальные уравнения кривизны $k_1=1/R_1=k_2=1/R_2=0$, получаем двумерные уравнения колебания пластинок в магнитном поле.

6. Вблизи края оболочки возникает магнитоупругое состояние погранслоя, которое должно резко затухать при удалении от края вглубь оболочки. Введение пограничного слоя дает возможность удовлетворить граничным условиям на боковой поверхности оболочки в терминах трехмерной теории, установить граничные условия внутренней задачи и уточнить магнитоупругое состояние вблизи края.

Чтобы вблизи боковой поверхности оболочки $\alpha=\alpha_0$ построить погранслой, введем новые независимые переменные по формулам [10], а по времени изменяемость погранслоя должна соответствовать изменяемости по времени внутренней задачи, то есть для погранслоя тоже вводится безразмерное время по формуле (2.2), (2.6) или (2.7). Преобразовав уравнения (1.1)—(1.3) указанным выше образом, будем искать решения вновь полученных уравнений в виде

$$\mathcal{Y}_i=\lambda^{\varkappa_i}\sum_s\lambda^{-s}\mathcal{Y}_i^{(s)} \tag{6.1}$$

где $\mathcal{Y}_i$ —любое из напряжений, перемещений и компонентов возбуждаемого электромагнитного поля внутри или вне оболочки.

После подстановки (6.1) в уравнения магнитоупругости (1.1)—(1.3) мы получим непротиворечивую систему относительно $\mathcal{Y}_i^{(s)}$, если

$$\varkappa_{\sigma_i}=\varkappa_{v_i}=-l+p,\quad \varkappa_{h_i}=\varkappa_{e_i}=\varkappa_{E_i}=\varkappa_i=\frac{3}{2}l\omega-4l+p,\quad \varkappa_{E_3}=\frac{3}{2}l\omega-5l+2p \tag{6.2}$$

Для упругой части задачи получаемая система аналогична системе уравнений статики оболочек [10]. Так, для определения $v_\xi^{(s)}$ и $v_\gamma^{(s)}$ получаются уравнения плоской деформации для полуполосы, а определение $v_\eta^{(s)}$ сводится к решению антиплоской задачи для полуполосы. Для динамических процессов, соответствующих (2.6) или (2.7), обе эти задачи имеют квазистатический характер, как инерционные члены, так и силы электромагнитного происхождения не входят в уравнения ряда первых приближений, а в тех приближениях, в которых они появляются, определяются через величины, известные из предыдущих приближений. Легко убедиться, что двумерным уравнениям внутренней задачи (5.4)—(5.6), отвечающим точности $O(\varepsilon^{2-2\chi})$, соответствуют те же граничные условия, что и в статике оболочки [10].

Определение электродинамического погранслоя для всех компонент индуцированного электромагнитного поля приводится к решению одинаковой по виду системе уравнений на плоскости (ξ_1, ζ). Например, для $h_\alpha^{(s)}$ указанные уравнения имеют вид

$$\Delta h_\alpha^{(s)} - 4\pi R_m \frac{\partial}{\partial \tau}\left(H_{\alpha 0}\frac{\partial v_\gamma^{(s)}}{\partial \zeta} - H_{\gamma 0}\frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial \zeta}\right) = R_\alpha^{(s)} \tag{6.3}$$

$$\Delta h_\alpha^{(s)} = R_{\alpha}^{(s)}; \qquad \Delta = \frac{1}{A_0^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \tag{6.4}$$

Уравнение (6.3) имеет место во внутренней области для оболочки, то есть $-1 \leqslant \zeta \leqslant 1$; $0 \leqslant \xi_1 < \infty$, а уравнение (6.4) имеет место во внешней от оболочки области.

Отметим, что исследован также погранслой по времени, эти результаты будут приведены в другой работе автора.

В заключение выражаю искреннюю благодарность С. А. Амбарцумяну за обсуждение данной работы и за ценные указания.

ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՌԱՉԱՓ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ԻՆՏԵԳՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ ՀԱՂՈՐԴԻՉ ԲԱՐԱԿ ԹԱՂԱՆԹԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԱՄԲՈՂՋՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԵՐԿՉԱՓ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ս. Հ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում կառուցվում են հավասարաչափ ասիմպտոտիկ վերլուծություններ բարակ թաղանթի մագնիսաառաձգականության եռաչափ հավասարումների համար: Այս ճանապարհով բարակ թաղանթի մագնիսաառաձգականության եռաչափ խնդիրը ամբողջության մեջ բերվել է երկչափ խնդրի և ստացվել են ասիմպտոտիկորեն ճիշտ երկչափ ինտեգրադիֆերենցիալ հավասարումները դիտարկվող խնդրի համար: Ուսումնասիրվում է սահմանային շերտը թաղանթի եզրային մակերևույթի մոտ:

THE CONSTRUCTION OF A TWO-DIMENSIONAL THEORY OF VIBRATION OF A CONDUCTIVE THIN SHELL BY MEANS OF ASYMPTOTIC INTEGRATION OF THREE-DIMENSIONAL EQUATIONS OF MAGNETOELASTICITY

S. O. SARKISIAN

Summary

In the paper the uniform asymptotic expansions are built for three-dimensional equations of magnetoelasticity of thin shells. In this way the general three-dimensional problem of magnetoelasticity of thin shells is deduced to an appropriate two-dimensional problem. The exact asymptotic two-dimensional integro-differential equations are obtained for the problem under consideration. The boundary layer at the shell lateral side is investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Изд. Наука, 1977. 272 с.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки.—ПММ, 1971, т. *35*, вып. 2.
3. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек и пластин.—ПММ, 1973, т. *37*, вып. 1, с. 111—130.
4. *Белубекян М. В.* К задаче колебаний токонесущих пластин.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. *28*, №2, с. 22—30.
5. *Багдасарян Г. Е.* К теории колебаний и устойчивости проводящих пластин в продольном магнитном поле.—Докл. АН Арм. ССР, 1975, т. *61*, №5, с. 275—282.
6. *Багдасарян Г. Е.* О приведении трехмерной задачи магнитоупругости тонких пластин к двумерной. Ученые записки ЕГУ, сер. естест. наук, 1977, №2, с. 46—50.
7. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.—ПММ, 1963, т. *27*, вып. 4, с. 593—608.
8. *Гольденвейзер А. Л.* О двумерных уравнениях общей линейной теории тонких упругих оболочек. В сб.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. Изд. Наука, 1968, с. 161—176.
9. *Гольденвейзер А. Л.* Погранслой и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки.—ПММ, 1969, т. *33*, вып. 6, с. 997—1028.
10. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Изд. Наука, 1976.
11. *Агаловян Л. А.* О некоторых соотношениях классической линейной теории анизотропных оболочек и возможностях их уточнения.—Изв. АН СССР, МТТ, 1972, №1, с. 109—120.
12. *Агаловян Л. А.* О приведении пространственной задачи теории упругости к двумерной для ортотропных оболочек и погрешностях некоторых прикладных теорий.—Докл. АН Арм. ССР, 1979, т. *69*, №3, с. 151—156.
13. *Гольденвейзер А. Л.* Асимптотический метод построения теории оболочек. В кн.: Материалы I Всесоюзной школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси: изд. ТГУ, 1975, с. 151—213.
14. *Гольденвейзер А. Л.* Асимптотический метод в теории оболочек. Успехи механики. Государст. научное издательство «Polish Scientific Publishers», Варшава: 1982, т. *5*, вып. 1/2, с. 137—182.
15. *Гусейн-Заде М. И.* Асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений тонкой пластинки.—ПММ, 1974, т. *38*, вып. 6, с. 1072—1078.
16. *Гусейн-Заде М. И.* Асимптотический анализ граничных и начальных условий в динамике тонких пластинок.—ПММ, 1978, т. *42*, вып. 5, с. 899—907.
17. *Саркисян С. О.* К построению двумерной теории колебаний проводящей тонкой пластинки конечной длины методом асимптотического интегрирования уравнений магнитоупругости.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1982, т. *35*, №6, с. 34—43.
18. *Саркисян С. О.* Асимптотический анализ уравнений, граничных и начальных условий в магнитоупругости тонких пластинок конечных размеров. Механика. Межвузовский сборник научных трудов (посвященный 60-летию С. А. Амбарцумяна). Ереван: Изд. ЕГУ, 1982, вып. 2, с. 126—133.

Ленинаканский филиал Ереванского
политехнического ин-та им. К. Маркса

Поступила в редакцию
22.XI. 1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVIII, № 6, 1985 Механика

УДК 531.38

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОМОЩИ МАХОВИКОВ

СААКЯН Л. С.

На основании теоремы Н. Н. Красовского [1] решается задача об оптимальной стабилизации положения равновесия твердого тела при помощи маховиков. Полученный закон управления представляет собой линейную функцию скоростей и координат тела. Выясняется, что при найденном законе управления остальные положения равновесия тела являются неустойчивыми.

§ 1. Рассмотрим твердое тело с неподвижной точкой в центре масс o, по главным осям инерции которого расположены оси трех однородных симметричных маховиков. Маховики приводятся во вращение специальными двигателями. Других внешних сил, действующих на тело, нет.

Введем следующие обозначения: $oX_1X_2X_3$ — неподвижная система координат; $ox_1x_2x_3$—подвижная система осей координат, жестко связанная с телом и совмещенная с его главными осями инерции; p_i —проекции абсолютной мгновенной угловой скорости вращения тела на оси x_1, x_2, x_3; C_i —моменты инерции системы относительно осей x_1, x_2, x_3; T_i—осевые моменты инерции маховиков, ω_i — относительные угловые скорости вращения маховиков $(i=1, 2, 3)$.

Уравнения движения системы запишем в форме трех динамических уравнений Эйлера

$$C_1\dot{p}_1+T_1\dot{\omega}_1+(C_3-C_2)p_2p_3+p_2H_3-p_3H_2=0 \quad (1\,2\,3); \quad H_i=T_i\omega_i, \ (i=1,2,3) \tag{1.1}$$

Уравнения, описывающие вращательное движение маховиков, без учета внутреннего трения в осях имеют вид

$$T_i(\dot{\omega}_i+\dot{p}_i)=-u_i \quad (i=1, 2, 3) \tag{1.2}$$

где $-u_i$—управляющие моменты, создаваемые двигателями. Направляющие косинусы между осями $oX_1X_2X_3$ и $ox_1x_2x_3$ зададим в виде таблицы (см. табл. 1) и к уравнениям (1.1) присоединим девять кинематических уравнений Пуассона

$$\dot{\alpha}_{i1}=\alpha_{i2}p_3-\alpha_{i3}p_2 \quad (1\,2\,3); \quad (i=1, 2, 3) \tag{1.3}$$

имея ввиду, что переменные α_{ik} $(i, k=1, 2, 3)$ связаны шестью геометрическими соотношениями

Таблица 1

	x_1	x_2	x_3
X_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
X_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
X_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki}\alpha_{li} = \begin{cases} 1, & k=l \\ 0, & k\neq l \end{cases} \quad (k,\ l=1,\ 2,\ 3) \tag{1.4}$$

Уравнения (1.1)—(1.3) при выключенном управлении ($u_i=0$, $i=1, 2, 3$) допускают следующее частное решение:

$$p_i=0, \quad \alpha_{ik}= \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i\neq k \end{cases} \quad (i,\ k=1,\ 2,\ 3), \quad \omega_i=\omega_i^0=\mathrm{const} \tag{1.5}$$

принадлежащее семейству решений $p_i=0$, $\alpha_{ik}=\alpha_{ik}^0$, где α_{ik}^0 удовлетворяют соотношению (1.4), описывающему равновесие тела и равномерные вращения маховиков.

Рассмотрим задачу оптимальной стабилизации положения равновесия (1.5), которая состоит в следующем: требуется так подобрать u_i, как функции переменных p_i, α_{ik}, чтобы при достаточно малых начальных возмущениях тело асимптотически приближалось к исходному положению

$$p_i=0, \quad \alpha_{ik}= \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i\neq k \end{cases} \quad (i,\ k=1,\ 2,\ 3) \tag{1.6}$$

и, кроме того, обеспечивался минимум некоторого функционала, интегральным образом, характеризующего качество переходного процесса. При этом угловые скорости ω_i маховиков могут и не достигать своих исходных значений ω_i^0. Поскольку в данной задаче имеет место закон сохранения вектора-момента количества движения системы относительно точки o, то есть $G=\mathrm{const}$, то, следуя [2], можно угловые скорости ω_i вращения маховиков исключить из уравнений движения, используя проекции вектора G на оси $oX_1X_2X_3$

$$\sum_{i=1}^{3} (C_ip_i+H_i)\alpha_{ki}=h_k^0=\mathrm{const}, \quad h_k^0=T_k\omega_k^0, \quad (k=1,\ 2,\ 3) \tag{1.7}$$

Так как $\det\|\alpha_{ki}\|_{k,i=1}^{3}=1$, то из (1.7) находим

$$C_ip_i+H_i=h_1^0\alpha_{1i}+h_2^0\alpha_{2i}+h_3^0\alpha_{3i}, \quad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{1.8}$$

Теперь уравнения (1.1) с учетом (1.2), (1.8) принимают вид

$$(C_1-T_1)\dot{p}_1=(h_1^0\alpha_{12}+h_2^0\alpha_{22}+h_3^0\alpha_{32})p_3-(h_1^0\alpha_{13}+h_2^0\alpha_{23}+h_3^0\alpha_{33})p_2+u_1, \quad (1,\ 2,\ 3) \tag{1.9}$$

Угловые скорости ω_i маховиков в полученные уравнения (1.9) явно не входят, и, следовательно, можно решить обычную задачу об оптимальной стабилизации положения равновесия (1.6).

Составим уравнения возмущенного движения, приняв для вариаций переменных следующие обозначения:

$$p_i=p_i, \quad \delta_{ii}=\alpha_{ii}-1, \quad \alpha_{ik}=\alpha_{ik}, \quad (i\neq k;\ i,\ k=1,\ 2,\ 3)$$

$$(C_1-T_1)\dot{p}_1=(h_1\alpha_{12}+h_2\delta_{22}+h_3\alpha_{32})p_3-(h_1\alpha_{13}+h_2\alpha_{23}+h_3\delta_{33})p_2+ \\ +h_2p_3-h_3p_2+u_1, \quad (1,\ 2,\ 3) \tag{1.10}$$

$$\dot{\alpha}_{11} = \alpha_{12} p_3 - \alpha_{13} p_2, \quad \dot{\alpha}_{21} = \alpha_{22} p_3 - \alpha_{23} p_2 + p_3, \quad \dot{\alpha}_{31} = \alpha_{32} p_3 - \alpha_{33} p_2 - p_2, \quad (1,\ 2,\ 3) \tag{1.11}$$

где через h_i обозначены возмущения постоянных кинетического момента (1.7).

§ 2. Пусть на движениях системы (1.10), (1.11) требуется минимизировать следующий функционал:

$$T = \int\limits_0^{\infty} \Big[C_1 p_1^2 + C_2 p_2^2 + C_3 p_3^2 + \frac{1}{4C_1} (n_3 \alpha_{32} - n_2 \alpha_{23} + u_1)^2 +$$

$$+ \frac{1}{4C_2} (n_1 \alpha_{13} - n_3 \alpha_{31} + u_2)^2 + \frac{1}{4C_3} (n_2 \alpha_{21} - n_1 \alpha_{12} + u_3)^2 \Big] dt \tag{2.1}$$

который, очевидно, удовлетворительно обеспечивает затухание возмущенного движения и оценивает ресурсы, затрачиваемые на формирование управляющих воздействий u_i ($i = 1, 2, 3$). В выражении (2.1) $n_i = \mathrm{const} > 0$ ($i = 1, 2, 3$) будут определены далее.

Рассмотрим определенно-положительную функцию

$$2V = \sum_{i=1}^{3} (C_i - T_i) p_i^2 + n_1 (\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2) + n_2 (\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2) + n_3 (\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2) \tag{2.2}$$

Для определения стабилизирующих воздействий u_i ($i = 1, 2, 3$) составим выражение [1]

$$B[V;\ p_1, p_2, p_3;\ \alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33};\ u_1, u_2, u_3] = -\Big[p_1 (n_2 \alpha_{23} - n_3 \alpha_{32}) +$$

$$+ p_2 (n_3 \alpha_{31} - n_1 \alpha_{13}) + p_3 (n_1 \alpha_{12} - n_2 \alpha_{21}) - \sum_{i=1}^{3} p_i u_i \Big] + C_1 p_1^2 + C_2 p_2^2 + C_3 p_3^2 + \tag{2.3}$$

$$+ \frac{1}{4C_1} (n_3 \alpha_{32} - n_2 \alpha_{23} + u_1)^2 + \frac{1}{4C_2} (n_1 \alpha_{13} - n_3 \alpha_{31} + u_2)^2 + \frac{1}{4C_3} (n_2 \alpha_{21} - n_1 \alpha_{12} + u_3)^2 \geqslant 0$$

которое, согласно условиям теоремы об оптимальной стабилизации, при $u_i = u_i^0$ достигает минимума, равного нулю.

Оптимальные управляющие воздействия имеют вид:

$$u_1^0 = -2C_1 p_1 + n_2 \alpha_{23} - n_3 \alpha_{32}, \quad u_2^0 = -2C_2 p_2 + n_3 \alpha_{31} - n_1 \alpha_{13}$$

$$u_3^0 = -2C_3 p_3 + n_1 \alpha_{12} - n_2 \alpha_{21} \tag{2.4}$$

Поскольку подынтегральное выражение в (2.1) является лишь знакопостоянной формой, то для установления факта асимптотической устойчивости невозмущенного движения (1.6) воспользуемся теоремой Барбашина и Красовского [3].

Производная функции (2.2) по времени, составленная в силу уравнений возмущенного движения (1.10), (1.11), с учетом (2.4) имеет вид

$$\dot{V} = -2(C_1 p_1^2 + C_2 p_2^2 + C_3 p_3^2) \tag{2.5}$$

то есть является знакопостоянной отрицательной функцией от вариаций переменных системы, а многообразие N точек, где $V=0$, имеет вид

$$p_1=p_2=p_3=0, \quad \delta_{ii}, \ \alpha_{ij} \text{ — произвольны.} \tag{2.6}$$

Покажем, что в некоторой окрестности невозмущенного движения

$$p_i=0, \quad \delta_{ii}=0, \quad \alpha_{ij}=0, \quad (i \neq j; \ i, j=1, 2, 3) \tag{2.7}$$

многообразие (2.6), при соответствующем выборе величин n_i в (2.4), не содержит других целых движений системы, кроме (2.7). При значениях $p_1=p_2=p_3=0$ уравнения движения (1.10), (2.4), (1.11) принимают вид

$$n_2\alpha_{23}=n_3\alpha_{32}, \ n_3\alpha_{31}=n_1\alpha_{13}, \ n_1\alpha_{12}=n_2\alpha_{21}, \ \dot{\delta}_{ii}=0, \ \dot{\alpha}_{ij}=0. \ (i \neq j; i, j=1,2,3) \tag{2.8}$$

Соотношения (1.4) с учетом (2.8), записанные в вариациях переменных, имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}
\delta_{11}^2+\alpha_{12}^2+\alpha_{13}^2+2\delta_{11}=0, \quad \alpha_{12}(1+k_1+\delta_{22}+k_1\delta_{11})+\alpha_{13}\alpha_{23}=0 \\
k_1^2\alpha_{12}^2+\delta_{22}^2+\alpha_{23}^2+2\delta_{22}=0, \quad \alpha_{13}(1+k_2+\delta_{33}+k_2\delta_{11})+k_3\alpha_{12}\alpha_{23}=0 \\
k_2^2\alpha_{13}^2+k_3^2\alpha_{23}^2+\delta_{33}^2+2\delta_{33}=0, \quad \alpha_{23}(1+k_3+\delta_{33}+k_3\delta_{22})+k_1k_2\alpha_{12}\alpha_{13}=0
\end{gathered} \tag{2.9}$$

где обозначено: $k_1=\dfrac{n_1}{n_2}, \ k_2=\dfrac{n_1}{n_3}, \ k_3=\dfrac{n_2}{n_3}, \ k_2=k_1k_3.$

Поскольку каждый элемент матрицы направляющих косинусов равен своему алгебраическому дополнению, то, поступая аналогично, как и выше, для величин $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}$ будем иметь следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
\alpha_{12}(1+k_1+k_1\delta_{33})=-k_2\alpha_{13}\alpha_{23}, \quad \alpha_{13}(1+k_2+k_2\delta_{22})=k_2\alpha_{12}\alpha_{23} \\
\alpha_{23}(k_1+k_2+k_2\delta_{11})=k_1k_2\alpha_{12}\alpha_{13}
\end{gathered} \tag{2.10}$$

Подставив выражения (2.10) во вторую группу уравнений (2.9), получим

$$\begin{gathered}
\alpha_{12}(k_1k_2\delta_{11}+k_2\delta_{22}+k_1\delta_{33}+k_1k_2+k_1+k_2+1)=0 \\
\alpha_{13}(k_1k_2\delta_{11}+k_2\delta_{22}+k_1\delta_{33}+k_1k_2+k_1+k_2+1)=0 \\
\alpha_{23}(k_1k_2\delta_{11}+k_2\delta_{22}+k_1\delta_{33}+k_1k_2+k_1^2+k_2+k_1)=0
\end{gathered} \tag{2.11}$$

Величины $k_1>0, \ k_2>0$ можно выбрать так, чтобы первые два уравнения системы (2.11) имели место только при $\alpha_{12}=\alpha_{13}=0$. Действительно, рассмотрим соотношение

$$k_1k_2\delta_{11}+k_2\delta_{22}+k_1\delta_{33}+k_1k_2+k_1+k_2+1=0 \tag{2.12}$$

Уравнение (2.12) в пространстве переменных δ_{ii} $(i=1, 2, 3)$ определяет плоскость, которая отстоит от начала координат на расстоянии

$$k=\frac{(1+k_1)(1+k_2)}{\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_1^2k_2^2}} \tag{2.13}$$

Из (2.13) имеем уравнение

$$[(1+k_1)^2 - h^2(1+k_1^2)]k_2^2 + 2(1+k_1)^2 k_2 + (1+k_1)^2 - h^2 k_1^2 = 0$$

из которого получим

$$k_2 = \frac{-(1+k_1)^2 \pm \sqrt{h^2 k_1^2 (1+k_1^2)\left[\frac{(1+k_1)^2}{k_1^2} + \frac{(1+k_1)^2}{1+k_1^2} - h^2\right]}}{(1+k_1)^2 - h^2(1+k_1^2)} \qquad (2.14)$$

Так как вариации δ_{ii} $(i=1, 2, 3)$ меняются в пределах $-2 \leqslant \delta_{ii} \leqslant 0$, то при $h^2 > 12$ плоскость (2.12) с кубом $-2 \leqslant \delta_{ii} \leqslant 0$ общих точек иметь не будет (12 — квадрат расстояния от вершины $\delta_{ii} = -2$ $(i=1,2,3)$ куба до начала координат).

Следовательно, если k_1 определить из условия

$$\frac{(1+k_1)^2}{k_1^2} + \frac{(1+k_1)^2}{1+k_1^2} = h^2 > 12, \quad (0 < k_1 < 1) \qquad (2.15)$$

а k_2 из условия (2.14), с учетом (2.15), то есть

$$k_2 = -\frac{(1+k_1)^2}{(1+k_1)^2 - h^2(1+k_1^2)} > 0 \qquad (2.16)$$

то первые два уравнения (2.11) имеют место только при $\alpha_{12} = \alpha_{13} = 0$. Первое уравнение (2.9) при этом примет вид $\delta_{11}^2 + 2\delta_{11} = 0$, то есть $\delta_{11} = 0$, либо $\delta_{11} = -2$.

Из третьего соотношения (2.10) получим

$$\alpha_{23}(k_1 + k_2 + k_2\delta_{11}) = k_1 k_2 \alpha_{12}\alpha_{13} = 0.$$

то есть $\alpha_{23} = 0$, так как $\delta_{11} = 0$, либо $\delta_{11} = -2$, а $k_1 \neq k_2$. Тогда из первой группы уравнений (2.9) следуют равенства

$$\delta_{22}^2 + 2\delta_{22} = 0, \quad \text{то есть} \quad \delta_{22} = 0, \quad \text{либо} \quad \delta_{22} = -2$$

$$\delta_{33}^2 + 2\delta_{33} = 0, \quad \text{то есть} \quad \delta_{33} = 0, \quad \text{либо} \quad \delta_{33} = -2$$

Таким образом, если начальные возмущения принадлежат области $\delta_{10}^2 + \delta_{20}^2 + \delta_{30}^2 < 4$, то многообразие N точек, где $\dot V = 0$, при условиях (2.15), (2.16) не содержит других целых движений системы, кроме движения (2.7). Следовательно, невозмущенное движение (2.7) асимптотически устойчиво по Ляпунову [3] по отношению к (p_i), δ_{ii}, α_{ij}. Аналогично, как в [4], можно показать, что при наличии управляющих воздействий (2.4), за все время движения системы (1.10), (1.11), либо $\omega = 0$, либо $\omega \to 0$ при $t \to +\infty$, ω — вектор мгновенной угловой скорости тела.

Найденным движениям системы, кроме (2.7), соответствуют положения равновесия тела, при которых

$$p_i = 0, \quad \alpha_{ik} = \begin{cases} \pm 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, 3) \qquad (2.17)$$

Покажем, что все положения равновесия тела (2.17), кроме (1.6), при управлении (2.4) неустойчивы по Ляпунову.

Рассмотрим, например, положение равновесия

$$p_i=0, \quad \alpha_{11}=-1, \quad \alpha_{22}=1, \quad \alpha_{33}=-1, \quad \alpha_{ik}=0, \quad (i\neq k; \quad i, k=1, 2, 3)$$

Составим уравнения возмущенного движения, сохраняя за вариациями переменных принятые обозначения. Имеем

$$(C_1-T_1)\dot{p}_1=(h_1\alpha_{12}+h_2\alpha_{22}+h_3\alpha_{32})p_3-(h_1\alpha_{13}+h_2\alpha_{23}+h_3\alpha_{33})p_2+$$
$$+h_2p_3-h_3p_2-2C_1p_1+n_2\alpha_{23}-n_3\alpha_{32}, \quad (1\ 2\ 3) \qquad (2.18)$$
$$\dot{\alpha}_{11}=\alpha_{12}p_3-\alpha_{13}p_2, \quad \dot{\alpha}_{21}=\alpha_{22}p_3-\alpha_{23}p_2+p_3,$$
$$\dot{\alpha}_{31}=\alpha_{32}p_3-\alpha_{33}p_2+p_2 \qquad (1\ 2\ 3)$$

Рассмотрим функцию

$$2V_1=\sum_{i=1}^{3}(C_i-T_i)p_i^2-n_1(\alpha_1+r_1)^2+n_2(\alpha_2-r_2)^2-n_3(\alpha_3+r_3)^2 \qquad (2.19)$$

где $\alpha_i^T=(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3})$, $(i=1, 2, 3)$, а r_i — единичные орты подвижных осей ox_i $(i=1, 2, 3)$.

Производная по времени от функции (2.19), составленная в силу уравнений возмущенного движения (2.18), равна

$$\dot{V}_1=-2(C_1p_1^2+C_2p_2^2+C_3p_3^2)$$

Возьмем последовательность начальных данных $\omega_k\to 0$, $\alpha_{1k}\to -r_1$, $\alpha_{2k}\to r_2$, $\alpha_{3k}\to -r_3$ так, чтобы было $V_1<0$ при $t-t_0>0$. Так как функция V_1 не возрастает, то при $t\geqslant t_0$ будет $V_1\leqslant V_{10}$, где V_{10} — значение функции V_1 при $t=t_0$. С другой стороны, $\omega_i^2\to 0$ при $t\to\infty$ на любом движении системы (1.10), (1.11), (2.4) и тело стремится к одному из положений равновесия (2.17) или (1.6), то есть $\alpha_i\times r_i\to 0$ при $t\to+\infty$, $(i=1, 2, 3)$.

Если $\alpha_1\to -r_1$, $\alpha_2\to r_2$, $\alpha_3\to -r_3$ при $t\to+\infty$, то из (2.19) следовало бы $V_1\to 0$. Но из неравенства $V_1\leqslant V_{10}<0$ вытекает, что во все время движения $n_1(\alpha_1+r_1)^2+n_3(\alpha_3+r_3)^2>k>0$, то есть не стремится к нулю при $t\to+\infty$.

Это означает, что интегральные кривые, начинающиеся в сколь угодно малой окрестности выбранного положения равновесия, покидают некоторую фиксированную окрестность при возрастании времени, что свидетельствует о неустойчивости по Ляпунову.

Аналогичным путем факт неустойчивости можно установить и для остальных положений равновесия (2.17).

Таким образом, установлено следующее утверждение.

При управляющих воздействиях (2.4), приложенных к маховикам, где $n_i>0$ $(i=1, 2, 3)$ связаны соотношениями

$$n_1=n_2k_1, \quad n_2=n_3k_3, \quad k_2=k_1k_3$$

а величины k_1, k_2 определяются из условий (2.15) (2.16), любое движение твердого тела либо является состоянием покоя, либо стремится к такому состоянию, причем положение равновесия (1.6) асимптотически устойчиво по Ляпунову по отношению к переменным $\dot{p}_i$, $z_{ii}-1$, z_{ij}, а любое другое положение равновесия (2.17), отличное от (1.6), обязательно будет неустойчивым. При этом, управляющие воздействия (2.4) минимизируют функционал (2.1).

Найденное управление (2.4) с точностью до постоянных множителей, совпадает с линейной частью управления, полученного в [2].

ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅԱՆ ԴԻՐՔԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՍՏԱԲԻԼԻԶԱՑԻԱՆ ԹԱՓԱՆԻՎՆԵՐԻ ՄԻՋՈՑՈՎ

Լ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ն. Ն. Կրասովսկու թեորեմի հիման վրա լուծված է պինդ մարմնի հավասարակշռության դիրքի օպտիմալ ստաբիլիզացիայի խնդիրը թափանիվների միջոցով։ Ստացված ղեկավարման օրենքը իրենից ներկայացնում է մարմնի արագության և կոորդինատների գծային ֆունկցիա։ Պարզվում է, որ գտած ղեկավարման օրենքի դեպքում մարմնի մնացած հավասարակշռության դիրքերը անկայուն են։

OPTIMUM STABILIZATION OF THE POSITION OF EQUILIBRIUM OF THE SOLID SUBSTANCE WITH THE HELP OF HANDWHEELS

L. S. SAHAKIAN

S u m m a r y

On the basis of Crasovsky's theorem [1] the problem of optimum stabilization of the position of equilibrium of the solid substance with the help of handwheels is solved.

The obtained law of control is a linear function of velocities and coordinates of the substance. As it turns out, by means of the obtained law of control, the rest of the positions of equilibrium of the substance are unstable.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. В кн. Теория устойчивости движения. Доп. 4. М.: Наука, 1966.
2. *Крементуло В. В.* Стабилизация стационарных движений твердого тела. М.: Наука, 1977.
3. *Барбашин Е. А., Красовский Н. Н.* Об устойчивости движения в целом. ДАН СССР, 1952, 86, № 3.
4. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 7.XII. 1983

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

Մեխանիկա XXXVIII, № 6, 1985 Механика

УДК 620.1+539.4

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РАСТУЩЕГО ТЕЛА

ТРИНЧЕР В. К.

Постановки задачи об определении напряженно-деформированного состояния (НДС) растущих тел даны в ряде работ [1—8]. Однако, в указанных работах вводились более или менее существенные ограничения на модель среды и условия на растущей границе. Ниже рассматривается общая геометрическая линейная квазистатическая постановка задачи расчета растущих тел в приложении к растущему круговому цилиндру; дано доказательство корректности постановки. Для линейно-упругого цилиндра, находящегося в состоянии плоской деформации, решение задачи сведено к квадратурам. Для наиболее исследованного в литературе случая осесимметричного НДС [9—12] получено конечное решение задачи при произвольных условиях на растущей границе, а также общее решение обратной задачи, то есть задачи определения условий на растущей границе, обеспечивающих получение требуемого НДС к концу роста тела.

Пусть в начальный момент времени $t=0$ тело занимает объем

$$\Omega(0):\quad r=x_1\in[r_0,\ r_1],\quad \theta=x_2\in[0,\ 2\pi],\quad z=x_3\in[z_1,\ z_2]$$

Растущая граница задана монотонной функцией одного переменного:

$$x_1=f(t)\quad (f(0)=r_1)\quad \text{или}\quad t=t^*(x_1).$$

Поле температур также задано: $T=T(x,\ t)$. Постановка задачи включает в себя следующие соотношения:

1. Уравнения равновесия

$$\frac{\partial\dot{\sigma}_{11}}{\partial x_1}+\frac{1}{x_1}\frac{\partial\dot{\sigma}_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\dot{\sigma}_{13}}{\partial x_3}+\frac{\dot{\sigma}_{11}-\dot{\sigma}_{22}}{x_1}=0\qquad \text{и т. д.}\tag{1}$$

2. Соотношения Коши для тензора скоростей полных деформаций

$$\dot{e}_{11}=\frac{\partial\dot{u}_1}{\partial x_1},\quad \dot{e}_{12}=\frac{1}{x_1}\frac{\partial\dot{u}_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\dot{u}_2}{\partial x_1}-\frac{\dot{u}_2}{x_1}\qquad \text{и т. д.}$$

$$\left(\dot{u}(\bar{x},\ t)=\frac{\partial u(\bar{x},\ t)}{\partial t}\right)\tag{2}$$

Относительно этих соотношений см. замечания ниже.

3. Выражения для тензора скоростей силовых деформаций

$$\dot{e}^c_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{e}^T_{ij} \qquad (3)$$

где тензор скоростей температурных деформаций $\dot{e}^T_{ij}$ предполагается известным в силу заданности поля температуры и определяется, например, соотношениями

$$\dot{e}^T_{ij} = \alpha_k(T)\delta_{ik}\delta_{kj}\dot{T}(\vec{x}, t)$$

4. Какие-либо уравнения состояния, для определенности примем соотношения нелинейной вязкоупругости

$$\sigma_{ij} - A_{ijkl}(e^c_{mn}, T)e^c_{kl} = \varphi(\sigma_{ij} - B_{ijkl}\dot{e}^c_{kl}) \qquad (4)$$

(здесь заложено предположение, что полный тензор силовых деформаций e^c_{ij} есть $e^c_{ij} = \int \dot{e}^c_{ij}(\vec{x}, \tau)d\tau$, что является приближенно верным равенством при малых деформациях; таким образом, речь идет о постановке задачи при малых деформациях и перемещениях).

Полная система уравнений (1)—(4) должна быть дополнена начальными и граничными условиями. В начальном объеме $\Omega(0)$ условия при $t=0$ зависят, как известно, от принимаемой модели среды; при модели среды типа (4) эти условия в общем случае могут быть записаны в виде (как в общем случае и для тела со стационарной границей)

$$\sigma_{ij}(\vec{x}, 0) = \sigma^0_{ij}(\vec{x}), \quad e^c_{ij}(\vec{x}, 0) = e^0_{ij}(\vec{x}) \qquad (5')$$

$$e_{ij}(\vec{x}, 0) = 0, \quad u_i(\vec{x}, 0) = 0 \quad (r_0 \leqslant x_1 \leqslant r_1) \qquad (5'')$$

При этом функции $\sigma^0_{ij}(\vec{x})$ удовлетворяют уравнениям равновесия и соответственно независимыми среди них являются 3 функции; функции $e^0_{ij}(\vec{x})$ при модели среды типа (4) все являются независимыми. Соотношения (5″) не существенны в этом смысле, что начальные значения величин e_{ij} и u_i могут быть заданы и произвольными функциями от $\vec{x}$; вид этих функций, как видно из системы (1)—(4), куда величины e_{ij} и u_i входят только их частными производными по t, не влияет на расчет величин σ_{ij}, e^c_{ij}, $\Delta e_{ij} = e_{ij}(\vec{x}, t) - e_{ij}(\vec{x}, 0)$, $\Delta u_i = u_i(\vec{x}, t) - u_i(\vec{x}, 0)$. Отметим, что именно эти последние величины являются, в принципе, однозначно определенными; напротив, начальным значениям величин e_{ij} и u_i соответствуют произвольные начальные показания деформометров и индикаторов перемещения. Соотношения (5″) принимаются, таким образом, для удобства (как это обычно делается и в постановках для тела со стационарной границей).

На стационарной части границы принимаются какие-либо стандартные граничные условия, например:

$$\lambda\sigma_{1i}(r_0, x_2, x_3, t) - u_i(r_0, x_2, x_3, t) = 0$$

$$\sigma_{3i}(x_1, x_2, z_1, t) = \sigma_{3i}(x_1, x_2, z_2, t) = 0 \qquad (6)$$

На растущей части границы необходимо задание полного НДС; для растущего тела с моделью среды типа (4), это означает

$$\sigma_{ij}(\vec{x}, t^*(x_1)) = \sigma^{н}_{ij}(\vec{x}), \quad e^{с}_{ij}(\vec{x}, t^*(x_1)) = e^{н}_{ij}(\vec{x}) \tag{7'}$$

$$e_{ij}(\vec{x}, t^*(x_1)) = 0, \quad u_i(\vec{x}, t^*(x_1)) = 0, \quad (r_2 < x_1) \tag{7''}$$

Для соотношений (7") полностью справедливы вышесделанные замечания относительно (5"). Тензора $\sigma^{н}_{ij}(\vec{x})$, $e^{н}_{ij}(\vec{x})$ при $x_1 > r_1$ должны быть определены из технологии или физики роста тела до решения краевой задачи, как, вообще говоря, двенадцать независимых функций; при упругой модели среды независимыми являются шесть функций, например, $\sigma^{н}_{ij}(\vec{x})$. Необходимость задания полного НДС на растущей границе можно пояснить следующими соображениями: непрерывный рост тела можно рассматривать как предельный случай сопряжения тел, и задание НДС на растущей границе («внутри» границы) соответствует заданию начального НДС в бесконечно малом объеме $d\Omega(t)$, присоединяемому к телу в момент t за время dt. Из требования самоуравновешенности НДС в бесконечно малом объеме не следует при $x_1 > r_1$ ограничения непосредственно на величины $\sigma^{н}_{ij}(\vec{x})$ (см. ниже).

Возможность независимого задания тензоров $\sigma^{н}_{ij}(\vec{x})$ и $e^{н}_{ij}(\vec{x})$ на растущей границе можно проиллюстрировать на следующем идеализированном технологическом процессе. Пусть растущий цилиндр образуется намоткой вязкоупругой ленты (с уравнением состояния типа (4)), причем лента после вхождения в контакт с растущим телом образует сплошную среду с уравнением состояния исходного материала. Компоненты тензора $\sigma^{н}_{ij}(\vec{x})$ определяются натяжением ленты и давлением в среде, в которой происходит намотка, а компоненты тензора силовых деформаций $e^{н}_{ij}(\vec{x})$ определяются временем нахождения ленты в нагруженном состоянии до вхождения в контакт с наматываемым цилиндром. Все компоненты тензоров $\sigma^{н}_{ij}$ и $e^{н}_{ij}$ (кроме, очевидно, компонент, являющихся нулевыми в силу симметрии наматываемого тела) в данном случае легко определяются и могут независимо задаваться варьированием параметров технологии намотки.

Для постановки задачи об определении НДС растущего тела существенным является использование соотношений Коши в их первичном виде, то есть относительно скоростей тензора полных деформаций. Из этих соотношений следует приближенная справедливость соотношений Коши относительно тензора полных деформаций $\varepsilon_{ij} \approx e_{ij}$ для тела со стационарной границей. Действительно, имеем, например,

$$\frac{\partial u_1(\vec{x}, t)}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^t \dot{u}_1(\vec{x}, \tau)\, d\tau = \int_0^t \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_1}\, d\tau = \int_0^t \dot{e}_{11}\, d\tau = e_{11}(\vec{x}, t) \tag{8}$$

Для тела с растущей границей имеем, напротив, неравенство

$$\frac{\partial u_1(\vec{x}, t)}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \int\limits_{t^*(x_1)}^{t} \dot{u}_1 d\tau = e_{11}(\vec{x}, t) - \dot{u}_1(\vec{x}, t^*(x_1)) \frac{dt^*}{dx_1} \neq e_{11}(\vec{x}, t) \tag{9}$$

Итак, специфика постановки (1)—(7) задачи для растущего тела заключается: 1) в использовании соотношений Коши только в виде (2); 2) в формулировке граничных условий на растущей части границы в виде (7).

Для доказательства корректности постановки (1)—(7) приведем ее к следующему эквивалентному виду: рассмотрим систему уравнений (2)—(4) и уравнения (1), взятого в продифференцированном по t виде. Относительно уравнения состояния (4) необходимо заметить, что если, в частности, имеем упругую модель среды, то уравнение состояния также берем в виде, продифференцированном по t. Так сформированную систему уравнений обозначим (1′)—(4′). Граничные условия на стационарной части границы также продифференцируем по времени (и обозначим (6′)).

Покажем теперь, что из граничных условий (7) следуют стандартные граничные условия 2-го рода относительно компонент тензора $\dot{\sigma}_{ij}$. Действительно, подставляя следующие из (7) равенства вида

$$\frac{d\sigma_{11}(x, t^*(x_1))}{\partial x_1} = \frac{\partial \sigma^{п}_{11}(x)}{\partial x_1} - \dot{\sigma}_{11}(x, t^*(x_1)) \frac{dt^*}{dx_1}, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = \frac{\partial \sigma^{п}_{12}}{\partial x_2} \quad \text{и т. д.}$$

в уравнения равновесия, получаем

$$\begin{gathered}
\dot{\sigma}_{11}(\vec{x}, t^*(x_1)) = \frac{1}{dt^*/dx_1} \left| \frac{\partial \sigma^{п}_{11}}{\partial x_1} + \frac{1}{x_1} \frac{\partial \sigma^{п}_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma^{п}_{13}}{\partial x_3} + \frac{\sigma^{п}_{11} - \sigma^{п}_{22}}{x_1} \right| = \Phi_1(\vec{x}) \\
\dot{\sigma}_{12}(x, t^*(x_1)) = \frac{1}{dt^*/dx_1} \left| \frac{\partial \sigma^{п}_{12}}{\partial x_1} + \ldots \right| = \Phi_2(\vec{x}) \\
\dot{\sigma}_{13}(x, t^*(x_1)) = \frac{1}{dt^*/dx_1} \left| \frac{\partial \sigma^{п}_{13}}{\partial x_1} + \ldots \right| = \Phi_3(\vec{x})
\end{gathered} \tag{10}$$

Соотношения (10) определяют через заданные функции $\sigma^{п}_{ij}(\vec{x})$ компоненты вектора скоростей изменения напряжений на растущей части границы; таких соотношений 3 и только 3—по числу уравнений равновесия.

Система уравнений (1′)—(4′) с граничными условиями (6′), (10) в каждый момент времени t является корректной линейной краевой задачей относительно скоростей изменения НДС $\dot{\sigma}_{ij}(\vec{x}, t)$, $\dot{u}_i(\vec{x}, t)$ и т. д. с уравнением состояния вида $\dot{\sigma}_{ij} = A_{ijkl}(\vec{x})\dot{e}^{c}_{kl} + B_{ij}(\vec{x})$. Эта задача заменой переменных $s_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - B_{ij}(\vec{x})$ сводится к обычной задаче с массовыми силами с уравнением состояния вида $s_{ij} = A_{ijkl}(\vec{x})\dot{e}^{c}_{kl}$.

Второй вариант постановки замыкается всегда корректными соотношениями:

$$\sigma_{ij}(\vec{x}, t) = \int\limits_{t^*(x_1)}^{t} \dot{\sigma}_{ij}(\vec{x}, \tau)d\tau + \sigma^{н}_{ij}(\vec{x}), \quad e_{ij}(\vec{x}, t) = \int\limits_{t^*(x_1)}^{t} \dot{e}_{ij}d\tau$$

$$e_{ij}(\vec{x}, t) = \int\limits_{t^*(x_1)}^{t} \dot{e}_{ij}d\tau + e^{н}_{ij}(\vec{x}), \quad u_i(\vec{x}, t) = \int\limits_{t^*(x_1)}^{t} \dot{u}_i d\tau \tag{11}$$

Соотношения (11) записаны для приращенной части тела; для области $\Omega(0)$ нижний предел в интегралах соотношений (11) следует заменить на нуль.

Применяя к тензору напряжений, представленному соотношением (11), оператор уравнения равновесия

$$L_k\sigma_{ij} = \int\limits_{t^*(x_1)}^{t} L_k\dot{\sigma}_{ij}d\tau - \sigma_{1k}(\vec{x}, t^*(x_1))\frac{dt^*}{dx_1} + L_k\sigma^{н}_{ij}(\vec{x}) = 0$$

видим, что это равенство выполняется в силу уравнений (1) и (10) при любых функциях $\sigma^{н}_{ij}(\vec{x})$.

Из постановки задачи в виде (1′)—(4′), (6′), (10), (11) непосредственно вытекает и следующий метод решения—метод Эйлера по переменной t: имея НДС на временном слое $t = t_n$ в области $\Omega(t_n)$, определяем скорости изменения НДС в области $\Omega(t_n)$ из решения краевой задачи (1′), . . ., (10). На временном слое $t_{n+1} = t_n + \Delta t_{n+1}$ НДС определяется соотношениями вида

$$\sigma_{ij}(\vec{x}, t_{n+1}) = \sigma_{ij}(\vec{x}, t_n) + \dot{\sigma}_{ij}(\vec{x}, t_n)\Delta t_{n+1}, \quad \vec{x}\in\Omega(t_n)$$

$$\sigma_{ij}(\vec{x}, t_{n+1}) = \sigma^{н}_{ij}(\vec{x}), \quad \vec{x}\in\Delta\Omega(t_{n+1}) \quad \text{или} \quad x_1 = f(t_{n+1}) \tag{12}$$

после чего имеем необходимые данные для решения краевой задачи в области $\Omega(t_{n+1})$. Для решения краевых задач при каждом t_n применимы стандартные программы. Отметим, что при линейно-упругой модели среды с модулями, возможно, зависящими от координаты $\vec{x}$, но не от времени и, в частности, не от температуры $T(\vec{x}, t)$, краевые задачи (1′)—(4′), (6′), (10) при каждом t являются независимыми; соответственно, в этом случае поле скоростей изменения НДС растущего тела может быть построено полностью без построения самого НДС.

В заключение рассмотрим две задачи для линейно-упругого растущего цилиндра.

1. Пусть цилиндр находится в состоянии плоской деформации и НДС осесимметрично, то есть рассмотрим многократно исследованную одномерную по координате задачу. Примем ортотропную модель среды с модулями, не зависимыми от координат.

$$\sigma_{rr} = a e^c_{rr} + b e^c_{\theta\theta}, \qquad \sigma_{\theta\theta} = b e^c_{rr} + c e^c_{\theta\theta}$$

Здесь несущественные для задачи члены опущены. На стационарной границе $r = r_0$ имеем

$$\lambda \dot{\sigma}_{rr}(r_0, t) - \dot{u}(r_0, t) = 0$$

На растущей границе примем условия в общем для данной задачи виде

$$\sigma_{rr}(r, t^*(r)) = \sigma^n_{rr}(r), \quad \sigma_{\theta\theta}(r, t^*(r)) = \sigma^n_{\theta\theta}(r)$$

Граничные условия (10) имеют в рассматриваемом случае вид

$$\dot{\sigma}_{rr}(r, t^*(r)) = \frac{1}{dt^*/dr}\left[\frac{d\sigma^n_{rr}}{dr} + \frac{\sigma^n_{rr} - \sigma^n_{\theta\theta}}{r}\right] = \Phi(r)$$

Не снижая общности, для упругой задачи можно принять $t^*(r) = r$. Кроме того, примем $\gamma = 0$, $r_1 = r_0$.

Общая постановка (1′)—(4′) сводится к уравнению

$$\frac{\partial^2 \dot{u}(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{u}(r, t)}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2}\dot{u}(r, t) = 0 \quad \left(k^2 = \frac{c}{a}\right)$$

имеющему общее решение

$$\dot{u}(r, t) = A_1(t) r^k + A_2(t) r^{-k}$$

Соответственно, имеем

$$\dot{\sigma}_{rr}(r, t) = \frac{1}{r}\left[(ka + b) A_1(t) r^k - (ka - b) A_2(t) r^{-k}\right]$$

Подставляя последние выражения в граничные условия, получаем систему 2-х линейных алгебраических уравнений относительно $A_i(t)$, решением которой являются выражения

$$A_1(t) = r_0^{-k}\left[1 + \frac{\lambda}{r_0}(ak - b)\right] t\Phi(t)/F(t)$$

$$A_2(t) = -r_0^{k}\left[1 - \frac{\lambda}{r_0}(ak + b)\right] t\Phi(t)/F(t)$$

где

$$F(t) = t^k\left[ak + b + \frac{\lambda}{r_0}(c^2 - b^2)\right] + t^{-k}\left[ak - b - \frac{\lambda}{r_0}(c^2 - b^2)\right]$$

Окончательно общее решение получаем в виде

$$\sigma_{rr}(r, t) = \frac{1}{r} F(r) \int_r^t \frac{\tau\Phi(\tau)}{F(\tau)} d\tau + \sigma^n_{rr}(r)$$

$$u(r, t) = \left\{\left(\frac{r}{r_0}\right)^k\left[1 + \frac{\lambda}{r_0}(ak - b)\right] + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-k}\left[1 - \frac{\lambda}{r_0}(ak + b)\right]\right\} \times$$

$$\times \int_r^t \frac{\tau\Phi(\tau)}{F(\tau)} d\tau \qquad (13)$$

и т. д.

Очевидно, что и при $T \neq 0$ общее решение вычисляется в квадратурах. Решение (13) можно считать принципиально новым, по-видимому, лишь постольку, поскольку эта задача не рассматривалась ранее с общими граничными условиями на растущей границе.

Перейдем к обратной задаче: какова должна быть программа нагружения, то есть функции $\sigma^{н}_{rr}(r)$, $\sigma^{н}_{\theta\theta}(r)$, чтобы к концу процесса роста $t=R$ в теле было заданное напряженное состояние $\sigma^{k}_{rr}(r)$, $\sigma^{k}_{\theta\theta}(r)$ $(r \in [r_0, R])$.

Одно решение этой задачи можно считать очевидным:

$$\sigma^{н}_{rr}(r) = \sigma^{k}_{rr}(r), \quad \sigma^{н}_{\theta\theta}(r) = \sigma^{k}_{\theta\theta}(r)$$

Естественно, оно следует и из общего решения (13), поскольку, в силу самоуравновешенности напряжений σ^{k}_{rr}, $\sigma^{k}_{\theta\theta}$, в этом случае $\Phi(t)=0$. Получим общее решение задачи. Преобразуя равенство $\sigma_{rr}(r, R) = \sigma^{k}_{rr}(r)$, имеем:

$$\int\limits_{r}^{R} \frac{\tau\Phi(\tau)}{F(\tau)}\, d\tau = \frac{r(\sigma^{k}_{rr}(r) - \sigma^{н}_{rr}(r))}{F(r)}$$

Дифференцируя его по r, получаем уравнение

$$-\frac{r\,d\sigma^{н}_{rr}/dr + \sigma^{н}_{rr} - \sigma^{н}_{\theta\theta}}{F(r)} = \frac{\sigma^{k}_{rr} - \sigma^{н}_{rr}}{F(r)} + \frac{r}{F(r)}\left(\frac{d\sigma^{k}_{rr}}{dr} - \frac{d\sigma^{н}_{rr}}{dr}\right) - \frac{r(\sigma^{k}_{rr} - \sigma^{н}_{rr})}{F^{2}(r)}\,\frac{dF}{dr}$$

из которого следует

$$\sigma^{н}_{\theta\theta} - \frac{r}{F(r)}\,\frac{dF}{dr}\,\sigma^{н}_{rr} = \sigma^{k}_{\theta\theta} - \frac{r}{F(r)}\,\frac{dF}{dr}\,\sigma^{k}_{rr} = \psi(r) \tag{14}$$

При любых функциях $\sigma^{н}_{\theta\theta}$, $\sigma^{н}_{rr}$, удовлетворяющих уравнению (14), к концу роста тела в нем будет заданное НДС; тривиальное решение, как видно, является решением этого уравнения. То же уравнение (14), естественно, можно получить и из равенства $\sigma_{\theta\theta}(r, R) = \sigma^{k}_{\theta\theta}(r)$; выкладки при этом, однако, существенно более громоздки.

II. Рассмотрим теперь цилиндр, находящийся в состоянии двумерной плоской деформации. Для упрощения записей примем уравнения состояния в виде

$$\sigma_{ij} = e'_{ij} \quad (\sigma_{ij} = \dot{e}'_{ij} - \dot{e}_{ij})$$

и граничные условия при $r = r_0$ в виде

$$\dot{u}_1 = \dot{u} = 0, \quad \dot{u}_2 = \dot{v} = 0$$

На растущей границе примем условия

$$\sigma^{н}_{rr}(r, \theta) = \sigma_r(r)\sin m\theta$$

$$\sigma^{н}_{\theta\theta}(r, \theta) = \sigma_\theta(r)\sin m\theta \qquad (m \geqslant 2)$$

$$\sigma^{н}_{r\theta}(r, \theta) = \tau(r)\cos m\theta$$

Соответственно, граничные условия (10) имеют вид

$$\dot{\sigma}_{rr}(r, \theta, r) \equiv \dot{e}_{rr} = \left(\frac{d\dot{\sigma}_r}{dr} + \frac{-m\dot{\tau} + \dot{\sigma}_r - \dot{\sigma}_\theta}{r}\right) \sin m\theta \equiv \Phi_1(r) \sin m\theta$$

$$\dot{\sigma}_{r\theta}(r, \theta, r) = \dot{e}_{r\theta} = \left(\frac{d\dot{\tau}}{dr} + \frac{m\dot{\sigma}_\theta + 2\dot{\tau}}{r}\right) \cos m\theta \equiv \Phi_2(r) \cos m\theta$$

Решение задачи (1′)—(4′) для рассматриваемого случая находится в виде

$$\begin{aligned} \dot{u}(r, \theta, t) &= (A_1(t) r^{m+1} + \ldots + A_4(t) r^{-m-1}) \sin m\theta \\ \dot{v}(r, \theta, t) &= (k_1 A_1(t) r^{m+1} + \ldots + k_4 A_4(t) r^{-m-1}) \cos m\theta \end{aligned} \tag{15}$$

где константы $k_i(m)$ известны. Соответственно, имеем

$$\dot{e}_{rr}(r, \theta, t) = \frac{1}{r} [(m+1) A_1(t) r^{m+1} + \ldots] \sin m\theta$$

$$\dot{e}_{r\theta}(r, \theta, t) = \frac{1}{r} [(k_1 + 1) m A_1(t) r^{m+1} + \ldots] \cos m\theta$$

$$\dot{e}_{\theta\theta}(r, \theta, t) = \frac{1}{r} [(1 + mk_1) A_1(t) r^{m+1} + \ldots] \sin m\theta$$

Подставляя полученные выражения для $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{\sigma}_{rr}$, $\dot{\sigma}_{r\theta}$ в граничные условия, получаем линейную алгебраическую систему 4-х уравнений относительно функции

$$\begin{aligned} & A_1(t) r_0^{m+1} + \ldots = 0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & A_1(t) m (k_1 + 1) \cdot t^{m+1} + \ldots = t\Phi_2(t) \end{aligned} \tag{16}$$

Формулами (11), (15), где $A_i(t)$ определены системой уравнений (16), решение задачи о плоской деформации цилиндра сведено к квадратурам.

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԱՃՈՂ ՄԱՐՄՆԻ ՀԱՄԱՐ ԽՆԴՐԻ ԴՐՎԱԾՔԸ ԵՎ ՈՐՈՇ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԸ

Վ. Կ. ՏՐԻՆՉԵՐ

Ամփոփում

Տրված է աճող մարմնում լարումների որոշման խնդրի դրվածքը միջավայրի մոդելի և աճող եզրի պայմանների վրա առանց էական սահմանափակումների։

Հարթ դեֆորմացիոն վիճակում գտնվող աճող գլանի համար գծային առաձգական մոդելի դեպքում խնդրի լուծումը ստացված է կվադրատուրաներով։ Առանցքասիմետրիկ դեպքի համար ստացված է հակադարձ խնդրի լուծումը փակ տեսքով։

FORMULATION AND SOME GENERAL SOLUTIONS OF THE PROBLEMS FOR CYLINDRICAL GROWING SOLIDS

V. K. TRINCHER

S u m m a r y

The formulation of the problem for stress state distribution in a growing solid is given without any significant restrictions on the model of the media and the condition on the growing boundary.

In the case of linear elastic media the analytic solution for the problem of deformation in a growing cylindrical body in plane state conditions is presented.

The closed solution of the inverse problem for an axisymmetrical case is given. The inverse problem is the problem of determination of conditions on the growing boundary which provide the given stress state to the end time growth.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саусвелл Р. В.* Введение в теорию упругости. М.: ИЛ, 1948.
2. *Рашбо Э. И.* Определение напряжений в массивах от действия собственного веса с учетом порядка их возведения. Тр. ин-та строит. мех. АН СССР, 1953, № 18.
3. *Дятловицкий Л. И.* Исследование напряжений в гравитационных пластинах.—ПМ, 1956, т. II, в. 2.
4. *Харлаб В. Д.* Линейная теория ползучести наращиваемого тела. Тр. ЛИСИ, 1966, вып. 49.
5. *Пильмов В. А.* О напряжениях, возникающих при затвердевании материалов.—Изв. АН СССР, МТТ, 1967, № 4.
6. *Дятловицкий Л. И., Вайнберг А. И.* Формирование напряжений в гравитационных плотинах. Киев: Наукова думка, 1975.
7. *Арутюнян Н. Х.* Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела.—ПММ, 1977, т. *41*.
8. *Тарнопольский Ю. М., Портнов Г. Г., Бейль А. И.* Механика намотки композитов.—Изв. АН Латв. ССР, 1980, № 12.
9. *Портнов Г. Г., Бейль А. И.* Модель для учета нелинейных свойств полуфабриката при силовом анализе намотки композитов.—Механика полимеров, 1977, № 2.
10. *Турусов Р. А., Давтян С. П., Шкадинский Н. С., Розенберг Б. А., Андреевская С. Д., Ениколопян Н. С.* Механические явления в условиях распространения фронта отверждения.—ДАН СССР, 1979, т. *247*, № 1.
11. *Арутюнян Н. Х., Зевин А. А.* Задачи оптимизации в теории ползучести для наращиваемых тел, подверженных старению.—МТТ, 1979, № 1.
12. *Арутюнян Н. Х., Метлов В. В.* Нелинейные задачи теории ползучести неоднородно стареющих тел с изменяющейся границей.—ДАН СССР, 1982, т. 246, № 6.

Институт механики МГУ

Поступила в редакцию
17.II. 1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVIII, № 6, 1985 Механика

УДК 532.5

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИЗГИБНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАСТИНЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

АВАГЯН С. Г.

В настоящей работе рассматриваются задачи о распространении волн с медленно меняющимися амплитудами и фазами [1] на поверхности раздела жидкости с физически нелинейной упругой пластиной при наличии изгибных волн в ней. Получается нелинейное дисперсионное соотношение, играющее основную роль в условиях устойчивости решений уравнений модуляции амплитуд и фаз. Применяется вариационный принцип для системы жидкость-пластина путем сложения проинтегрированных по глубине лагранжианов жидкости [1] и пластины [2]. Решение для бесконечно глубокой жидкости, покрытой пластиной, получено [4], где дается решение как указанным методом, так и путем прямого решения уравнения Лапласа для жидкости и удовлетворения граничных условий на границе раздела, причем решение ищется в форме разложения Стокса [1] в виде суммы последовательных гармоник. Совпадение решений, полученных последним и вариационным методами для бесконечно глубокой жидкости, дает уверенность в том, что метод настоящей работы является соответствующим рассматриваемой задаче. Показано, что наличие пластины увеличивает продольную и уменьшает поперечную устойчивость [3] модулированных волн в некотором диапазоне.

В работах [7, 8] имеется обзор задач распространения линейных и нелинейных волн по поверхности жидкости, покрытой упругой пластиной. Линейная задача об изгибе пластины под действием сосредоточенной силы с нахождением асимптотики в виде волн с медленно меняющейся амплитудой решена в [6]. Исследование уточненных теорий для пластин, которое необходимо при высоких частотах, дано в работе [9]. Для жидкости конечной глубины со свободной поверхностью уравнения модуляции амплитуд и фаз квазимонохроматических волн и условие устойчивости волновых пакетов рассмотрены в [1].

Рассмотрим волны на поверхности жидкости конечной глубины, ограниченной нелинейной упругой пластиной. Для решения данной задачи применим вариационный принцип. Сущность задачи заключается в следующем: несжимаемая весомая жидкость конечной глубины h_0 покрыта вдоль поверхности $z=0$ пластиной. С помощью вариационного подхода находится усредненный лагранжиан. Движение жидкости рассматривается в эйлеровых координатах X, Y, Z, а уравнение пластины — в лагранжевых x, y, z. В силу того, что пренебрегается геометрическая нелинейность, уравнение пластины можно записывать также в эйлеровых координатах

$$X=x+u_x, \quad Y=y+u_y, \quad Z=z+u_z \tag{1}$$

где u_x, u_y, u_z — компоненты перемещений точек срединной плоскости пластины по направлению x, y, z. Надо отметить, что ось z направлена вверх. В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть плоскость xz. Вариационный принцип дается равенством

$$\delta \iint\limits_{R} L\, dx\, dt = 0$$

где L — осредненный по z лагранжиан. Для нашего случая лагранжиан равен сумме лагранжианов жидкости и пластины

$$L = L_ж + L_п \tag{2}$$

Усредненный по фазе лагранжиан находится по формуле [1]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} L d\theta \tag{3}$$

где θ — фазовая функция. Из (2) и (3) следует, что

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_ж + \mathcal{L}_п \tag{4}$$

Таким образом, для нахождения усредненного лагранжиана надо вычислить усредненный лагранжиан жидкости $\mathcal{L}_ж$ и пластины $\mathcal{L}_п$. Лагранжиан жидкости вычисляется по формуле [1]

$$L_ж = -\rho_0 \int\limits_{-h_0}^{\eta} \left| \varphi_t + \frac{1}{2} (\Delta\varphi)^2 + gz \right| dz \tag{5}$$

где ρ_0 — плотность жидкости, φ — потенциал скоростей, $\varphi_t = \partial\varphi/\partial t$. Наиболее общая форма периодического волнового пакета для одномерного случая такова: $\varphi = \beta x - \gamma t + \Phi(\theta, z)$, $\theta = kx - \omega t$, $\eta = N(\theta)$, где $\eta = N(\theta)$ — уравнение поверхности $z=0$. $\Phi(\theta, z)$, как и $N(\theta)$, периодические функции от θ, ω — частота, k — волновое число. Параметр β — средняя горизонтальная скорость φ_x, а величина γ связана со средней высотой волн. Подставляя значение φ в (5), получим

$$L_ж = -\rho_0 \int\limits_{-h_0}^{N} \left| -\gamma - \omega\Phi_\theta + \frac{1}{2} (\beta + k\Phi_\theta)^2 + \frac{1}{2} \Phi_z^2 + gz \right| dz = \rho_0 \left(\gamma - \frac{1}{2}\beta^2 \right) (N + h_0) - \frac{1}{2} \rho_0 g (N^2 - h_0^2) + (\omega - \beta k)\rho_0 \int\limits_{-h_0}^{N} \Phi_\theta dz - \rho_0 \int\limits_{-h_0}^{N} \left(\frac{1}{2} \Phi_z^2 + \frac{1}{2} k^2 \Phi_\theta^2 \right) dz$$

Нижними индексами обозначены производные по θ и z соответственно. Периодические функции $\Phi(\theta, z)$ и $N(\theta)$ представляются в виде рядов Фурье

$$\Phi(\theta, z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \operatorname{ch} kn(z + h_0) \sin n\theta \tag{6}$$

$$N(\theta) = b + a\cos\theta + \sum_{2}^{\infty} a_n \cos n\theta \tag{7}$$

где a—амплитудный параметр, а b—средняя высота поверхности волы. Так как для наших целей достаточно первых нелинейных членов в $\mathscr{L}$, то удовлетворимся членами порядка a^3 включительно, поэтому из (6) и (7) принимаем

$$\Phi = A_1 \operatorname{ch} k(z + h_0) \sin\theta + \frac{A_2}{2} \operatorname{ch} 2k(z + h_0) \sin 2\theta$$

$$N = b + a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta$$

где $a_1 = a$. После соответствующих вычислений получаем

$$L_\kappa = \rho_0\left(\gamma - \frac{1}{2}\beta^2\right)(b + h_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta) - \frac{1}{2}\rho_0 g[(b + a_1\cos\theta +$$

$$+ a_2\cos 2\theta)^2 - h_0^2] + \frac{(\omega - \beta k)\rho_0}{k}\Big| A_1\cos\theta \operatorname{sh} k(b + h_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta) +$$

$$+ \frac{A_2}{2}\cos 2\theta \operatorname{sh} 2k(b + h_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta)\Big| - \frac{\rho_0 k^2}{2}\Big\{\frac{A_1^2}{4k}\operatorname{sh} 2k(b + h_0 +$$

$$+ a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta) + \frac{A_1^2}{2}(2h_0 + b + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta)\cos 2\theta +$$

$$+ \frac{A_2^2}{8k}\operatorname{sh} 4k(b + h_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta) + \frac{A_2^2}{2}(2h_0 + b + a_1\cos\theta +$$

$$+ a_2\cos 2\theta)\cos 4\theta + \frac{1}{3}A_1A_2\cos\theta \operatorname{sh} 3k(b + h_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta) +$$

$$+ A_1A_2\cos 3\theta \operatorname{sh} k(b + h_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta)\Big\}$$

Обозначая $h = b + h_0$, будем иметь

$$-\frac{\mathscr{L}_\kappa}{\rho_0} = \left(\frac{1}{2}\beta^2 - \gamma\right)h + \frac{1}{2}gb^2 - \frac{1}{2}gh_0^2 + \frac{1}{4}ga_1^2 + \frac{1}{4}ga_2^2 -$$

$$-\frac{(\omega - \beta k)}{k}(\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2) + k\left(\frac{1}{2}\mu_{11}A_1^2 + \mu_{12}A_1A_2 + \frac{1}{2}\mu_{22}A_2^2\right) + O(a_1^4) \tag{8}$$

где

$$\mu_1 = \frac{1}{2}ka_1 \operatorname{ch} kh + \frac{1}{4}k^2 a_1 a_2 \operatorname{sh} kh + \frac{1}{16}k^3 a_1^3 \operatorname{ch} kh$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2}ka_2 \operatorname{ch} 2kh + \frac{1}{4}k^2 a_1^2 \operatorname{sh} 2kh$$

$$\mu_{11}=\frac{1}{4}\operatorname{sh}2kh+\frac{1}{4}k^2a_1^2\operatorname{sh}2kh+\frac{1}{4}ka_2$$

$$\mu_{12}=\frac{1}{4}ka_1\operatorname{ch}3kh, \qquad \mu_{22}=\frac{1}{8}\operatorname{sh}4kh$$

Для нахождения A_1 и A_2 (8) варьируем по A_1 и A_2, при этом получим

$$\mathscr{L}_{ж A_1}=\mu_{11}A_1+\mu_{12}A_2-\frac{\omega-\beta k}{k^2}\mu_1=0, \qquad \mathscr{L}_{ж A_2}=\mu_{12}A_1+\mu_{22}A_2-\frac{\omega-\beta k}{k^2}\mu_2=0$$

Подставляя A_1 и A_2 в $\mathscr{L}_ж$, можно получить

$$-\mathscr{L}_ж=\rho_0\left(\frac{1}{2}\beta^2-\gamma\right)h+\frac{1}{2}\rho_0 g b^2-\frac{1}{2}\rho_0 g h_0^2+\frac{1}{4}\rho_0 g a_1^2+\frac{1}{4}\rho_0 g a_2^2-$$

$$-\frac{1}{4}\rho_0\frac{(\omega-\beta k)^2}{kT}\left[a_1^2-\frac{2T^2-1}{4T^2}k^2a_1^4-\frac{3-T^2}{2T}ka_1^2a_2+(1+T^2)a_2^2\right]$$

где $T=\operatorname{th}kh$. Как известно, лагранжиан равен разности кинетической и потенциальной энергий. Тогда лагранжиан пластины будет

$$L_п=K-\Pi \tag{9}$$

где K — кинетическая энергия пластины, а Π — потенциальная энергия. Пусть срединная плоскость пластинки в недеформированном состоянии совпадает с плоскостью $z=0$. Кинетическая энергия пластинки вычисляется по формуле

$$K=\frac{1}{2}\rho\int\limits_{-\bar{h}/2}^{\bar{h}/2}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u_y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2\right]dz \tag{10}$$

так как скорости частиц $V_x=\frac{\partial u_x}{\partial t}$, $V_y=\frac{\partial u_y}{\partial t}$, $V_z=\frac{\partial u_z}{\partial t}$, причем производные вычисляются в лагранжевых координатах, где ρ — плотность пластины, $\bar{h}$ — толщина. Из теории пластинок известно [2], что потенциальная энергия пластины имеет следующий вид:

$$\Pi=\int\limits_{-\bar{h}/2}^{\bar{h}/2}\left(\frac{9}{2}K_1\varepsilon_0^2+3K_1\varkappa_1\varepsilon_0^3+\frac{3}{4}G\psi_0^2+\frac{3}{8}G\gamma_2\psi_0^4\right)dz \tag{11}$$

где K_1 — модуль объемного сжатия, G — модуль сдвига, $\varkappa_1$ — функция удлинения, γ_2 — функция сдвига, ψ_0 — интенсивность деформации сдвига

$$\psi_0=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}(\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2-\varepsilon_x\varepsilon_y-\varepsilon_y\varepsilon_z-\varepsilon_z\varepsilon_x)+\frac{1}{2}\gamma_{xy}^2} \tag{12}$$

Как и в линейной теории упругой среды, примем, что поперечное удлинение ε_z равно $\varepsilon_z=-\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$, где ν — коэффициент Пуассона.

Для среднего удлинения имеем

$$\varepsilon_0 = -\frac{1}{3}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\,z\Delta u_z$$

где Δ — оператор Лапласа, равный $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Исходя из линейной теории тонких пластинок при небольших прогибах и предполагая, что $u_x = 0$, $u_y = 0$, получим [2]

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\,\partial y}$$

Тогда из (12) квадрат интенсивности деформации сдвига будет

$$\gamma_0^2 = \frac{8}{9}\left\{\nu_1\left[\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)^2\right] + \nu_2\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + 3\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right\}z^2$$

где $\nu_1 = \frac{\nu}{(1-\nu)^2} + 1$, $\nu_2 = \frac{2\nu}{(1-\nu)^2} - 1$

Имея в виду соотношение $\nu = \frac{1}{2}\,\frac{3K_1 - G}{3K_1 + G}$, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, из (11) получим

$$\Pi = \int\limits_{-\overline{h}/2}^{\overline{h}/2}\left\{\frac{E(1-2\nu)}{6(1-\nu)^2}z^2\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)^2 - \frac{E\varkappa_1}{1-2\nu}\,\frac{z^3}{27}\,\frac{(1-2\nu)^3}{(1-\nu)^3}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)^3 + \right.$$

$$+ \frac{Ez^2}{3(1+\nu)}\left[\frac{1-\nu+\nu^2}{(1-\nu)^2}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{1-\nu+\nu^2}{(1-\nu)^2}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{4\nu-1-\nu^2}{(1-\nu)^2}\cdot\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \right.$$

$$\left. + 3\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y}\right)^2\right] + \frac{8}{27}G\gamma_2 z^4\left[\frac{1-\nu+\nu^2}{(1-\nu)^2}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{1-\nu+\nu^2}{(1-\nu)^2}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)^2 + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{4\nu-1-\nu^2}{(1-\nu)^2}\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + 3\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y}\right)^2\right]^2\right\}dz$$

После интегрирования имеем

$$\Pi = \frac{E\overline{h}^3}{24(1-\nu^2)}\left[\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)^2\right] + \frac{E\overline{h}^3\nu}{12(1-\nu^2)}\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} +$$

$$+ \frac{E\overline{h}^3}{12(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y}\right)^2 + \frac{G\gamma_2\overline{h}^5}{270}\left\{\frac{1-\nu+\nu^2}{(1-\nu)^2}\left[\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)^2\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{4\nu-1-\nu^2}{(1-\nu)^2}\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + 3\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}^2 \qquad (13)$$

Учитывая тот факт, что $u_x = 0$, $u_y = 0$, из (10) после интегрирования для кинетической энергии пластины будем иметь

$$K = \frac{1}{2}\rho\overline{h}\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2 \qquad (14)$$

Подставляя (13) и (14) в (9), получим

$$L_{n}=\frac{1}{2}\rho\bar{h}\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2-\frac{G\bar{h}^3}{12(1-\nu)}\left[\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)^2\right]-\frac{G\bar{h}^3}{6}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y}\right)^2-$$

$$-\frac{G\bar{h}^3\nu}{6(1-\nu)}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}-\frac{G\gamma_2\bar{h}^5}{270}\left\{\frac{1-\nu+\nu^2}{(1-\nu)^2}\left[\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{4\nu-1-\nu^2}{(1-\nu)^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+3\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}^2$$

Имея в виду, что $u_z=N=b+a_1\cos\theta+a_2\cos 2\theta$, $\theta=kx-\omega t$, после вычисления по (3) усредненный лагранжиан пластины можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{L}_n=\frac{1}{4}\rho\bar{h}\omega^2(a_1^2+4a_2^2)-\frac{G\bar{h}^3k^4}{24(1-\nu)}(a_1^2+16a_2^2)-$$

$$-\frac{G\gamma_2\bar{h}^5}{270}\frac{(1-\nu-\nu^2)^2}{(1-\nu)^4}k^8\left(\frac{3}{8}a_1^4+48a_1^2a_2^2\right)$$

При решении рассматривался одномерный случай. Полагая $\theta=\alpha_1 x+\alpha_2 y-\omega t$, нетрудно показать, что L для пространственного случая дается в одномерном виде, где нужно полагать $k^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2$. Из (4) для общего усредненного лагранжиана будем иметь

$$\mathcal{L}=-\rho_0\left(\frac{1}{2}\beta^2-\gamma\right)h-\frac{1}{2}\rho_0 g h^2+\frac{1}{2}\rho_0 g h_0^2-\frac{1}{4}\rho_0 g a_1^2-\frac{1}{4}\rho_0 g a_2^2+$$

$$+\frac{1}{4}\rho_0\frac{(\omega-\beta k)^2}{kT}\left|a_1^2-\frac{2T^2-1}{4T^2}k^2a_1^4-\frac{3-T^2}{2T}ka_1^2a_2+(1+T^2)a_2^2\right|+$$

$$+\frac{1}{4}\rho\bar{h}\omega^2(a_1^2+4a_2^2)-\frac{G\bar{h}^3k^4}{24(1-\nu)}(a_1^2+16a_2^2)-\frac{G\gamma_2\bar{h}^5}{270}\frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^4}k^8\times$$

$$\times\left(\frac{3}{8}a_1^4+48a_1^2a_2^2\right) \tag{15}$$

В общем случае изменение средних значений γ, β, h связано с волновым движением, и, как показывается [1], изменения этих величин имеют порядок $O(a_1^2)$. Поэтому в членах с a_1^4 можно считать $T=T_0=\operatorname{th} kh_0$. Варьируя по a_2 (15), получим

$$\mathcal{L}_{a_2}=0;\ -\frac{\rho_0 g a_2}{2}-\frac{\rho_0(\omega-\beta k)^2}{4kT_0}\left|\frac{3-T_0^2}{2T_0}ka_1^2-2(1+T^2)a_2\right|+$$

$$+2\rho\bar{h}\omega^2a_2-\frac{4}{3}\frac{G\bar{h}^3k^4}{1-\nu}a_2=0$$

Отсюда $a_2=\varkappa a_1^2$, где

$$\varkappa=-\frac{3-T_0^2}{4T_0}\,\frac{\rho_0(\omega-\beta k)^2k}{\rho_0 gkT_0-4\rho\bar{h}kT_0\omega^2-\rho_0(\omega-\beta k)^2(1+T_0^2)+\frac{8}{3}\frac{G\bar{h}^3k^5T_0}{(1-\nu)}}$$

Дисперсионное соотношение $\mathcal{L}_{a_1}=0$ из (15) дает

$$-\frac{\rho_0 g}{4}+\frac{\rho_0}{4}\frac{(\omega-\beta k)^2}{kT_0}\left(1-\frac{2T_0^2-1}{2T_0^2}k^2a_1^2-\frac{3-T_0^2}{2T_0}ka_2\right)+\frac{1}{4}\rho\bar{h}\omega^2-$$

$$-\frac{G\bar{h}^3k^4}{24(1-\nu)}-\frac{G\gamma_2\bar{h}^5}{360}\frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^4}k^8a_1^2 \qquad (16)$$

При нулевом среднем значении $\eta=0$, $\varphi_x=0$ имеем $a_1=0$, $\beta=0$ и из (16) получится частота линейной теории

$$\omega_0^2=\frac{g\rho_0+G\bar{h}^3k^4/6(1-\nu)}{\rho\bar{h}+\rho_0/kT_0}$$

Подставляя в (16) $a_2=\varkappa a_1^2$ и полагая $\omega=\omega_0+\left(\frac{\partial\omega}{\partial a_1^2}\right)_0 a_1^2$, получим

$$\rho_0 g-\frac{\rho_0}{kT_0}\left|\omega_0-\beta k+\left(\frac{\partial\omega}{\partial a_1^2}\right)_0 a_1^2\right|^2\left(1-\frac{2T_0^2-1}{2T_0^2}k^2a_1^2-\frac{3-T_0^2}{2T_0}k\varkappa a_1^2\right)-$$

$$-\rho\bar{h}\left|\omega_0+\left(\frac{\partial\omega}{\partial a_1^2}\right)_0 a_1^2\right|^2+\frac{G\bar{h}^3k^4}{6(1-\nu)}+\frac{G\gamma_2\bar{h}^5}{90}\frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^4}k^8a_1^2=0$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial a_1^2}\right)_0=\frac{\frac{\rho_0\omega_0^2}{2T_0}\left(\frac{2T_0^2-1}{2T_0^2}k+\frac{3-T_0^2}{2T_0}\varkappa\right)+\frac{G\gamma_2\bar{h}^5}{180}\frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^4}k^8+\frac{\rho_0\omega_0\beta}{T_0a_1^2}}{\rho\bar{h}\omega_0+\rho_0\omega_0/kT_0} \qquad (17)$$

Нам остается найти значение β. Для этой цели используем следующие соотношения:

$$\mathcal{L}_b=0,\quad -\rho_0 gb+\rho_0\gamma-\frac{\rho_0\omega_0^2a_1^2}{4\operatorname{sh}^2kh_0}=0,\quad -\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_\gamma+\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}_\beta=0,\quad \frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{\partial\gamma}{\partial x}=0 \qquad (18)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_\omega+\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}_k=0,\qquad \frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial\omega}{\partial x}=0 \qquad (19)$$

имеем

$$\mathcal{L}_\gamma=(h_0+b)\rho_0,\quad \mathcal{L}_\beta=-\beta h\rho_0-\frac{\rho_0\omega_0}{2T_0}a_1^2,\quad \mathcal{L}_\omega=\left(\frac{\rho_0}{2kT_0}+\frac{\rho\bar{h}}{2}\right)\omega_0a_1^2 \qquad (20)$$

Для волн, движущихся по спокойной воде глубиной h_0, можно предположить, что β и $b=h-h_0$ малы и линеаризовать уравнения (18), (19), после чего, решая все совместно, получим, имея в виду, что $\frac{\partial}{\partial t}=-C_0(k)\frac{\partial}{\partial x}$

$$\beta=-\frac{\frac{g\omega_0}{2T_0}+\frac{\omega_0^2C_0(k)}{4\operatorname{sh}^2kh_0}}{gh_0-C_0^2(k)} \qquad (21)$$

где $C_0(k)$ — групповая скорость, которая равна $C_0(k)=\frac{\partial\omega_0}{\partial k}$, то есть

$$C_g(k) = \frac{1}{2} c_0(k) \left(\frac{4Dk^4}{g\rho_0 + Dk^4} + \frac{\rho_0 + \dfrac{2\rho_0 k h_0}{\operatorname{sh} 2kh_0}}{\rho_0 + \rho \bar{h} k T_0} \right)$$

где $c_0(k)$ - фазовая скорость

$$c_0(k) = \sqrt{\frac{(g\rho_0 + Dk^4)T_0}{k(\rho_0 + \rho \bar{h} k T_0)}}$$

D — цилиндрическая жесткость пластины $D = \dfrac{G\bar{h}^3}{6(1-\nu)}$. Подставляя значение β из (21) в (17), получим

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial a_1^2}\right)_0 = \frac{\dfrac{\rho_0 \omega_0^2}{2T_0}\left(\dfrac{2T_0^2 - 1}{2T_0^2} k + \dfrac{3 - T_0^2}{2T_0} \varkappa\right) + \dfrac{G_{12} \bar{h}^5}{180} \dfrac{(1 - \nu + \nu^2)^2}{(1-\nu)^4} k^8 - \dfrac{\dfrac{g\omega_0}{2T_0} + \dfrac{\omega_0^2 C_g(k)}{4\operatorname{sh}^2 kh_0}}{gh_0 - C_g^2(k)} \dfrac{\rho_0 \omega_0}{T_0}}{\rho \bar{h} \omega_0 + \rho_0 \omega_0 / kT_0}$$

Полученное соотношение необходимо при определении условий устойчивости волновых пакетов, представляющих решения вида (6), (7) уравнений для медленных изменений амплитуд A_c, a_1, b и фаз нелинейных волн [1]. Дадим вывод уравнений для амплитуд a_1 и волновых чисел k_i квазимонохроматических волн, обобщающих уравнения [1] на неоднородную среду и выведем из них условия устойчивости решений полученных уравнений, причем для рассматриваемой изотропной среды получаются, в частности, условия продольной и поперечной устойчивости [3]. Пусть имеем фазовую функцию $\theta(X, t)$, где $X = (x_1, x_2, x_3)$, тогда частота ω и волновые числа k_i определяются формулами $\omega = -\dfrac{\partial\theta}{\partial t}$, $k_i = \partial\theta / \partial x_i$. Очевидно тогда равенство

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_i} + \frac{\partial k_i}{\partial t} = 0 \tag{22}$$

Имеем еще следующее соотношение:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_\omega + \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{L}_{k_i} = 0 \tag{23}$$

Так как $\dfrac{\partial}{\partial t} = -C_i \dfrac{\partial}{\partial x}$, то получится $\mathcal{L}_{k_i} = -C_i \mathcal{L}_\omega$, где $C_i = \dfrac{\partial \omega_0}{\partial k_i}$ — групповая скорость. Из (20)

$$\mathcal{L}_\omega = q a_1^2, \quad \text{где} \quad q = \frac{1}{2} \rho \bar{h} \omega_0 + \frac{\rho_0 \omega_0}{2kT_0}$$

С учетом последних значений $\mathcal{L}_\omega$ и $\mathcal{L}_{k_i}$ получим из (23)

$$a_1^2 \frac{\partial q}{\partial t} + q \frac{\partial a_1^2}{\partial t} + q \frac{\partial \omega_0}{\partial k_i} \frac{\partial a_1^2}{\partial x_i} + a_1^2 \frac{\partial \omega_0}{\partial k_i} \frac{\partial q}{\partial x_i} + a_1^2 q \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial k_i \partial x_i} = 0$$

После соответствующих выкладок, полагая, что

$$\frac{\partial q}{\partial x_i}=\left.\frac{\partial q}{\partial x_i}\right|_{k_j=\mathrm{const}}+\frac{\partial q}{\partial k_j}\frac{\partial k_i}{\partial x_j};\quad \frac{\partial \omega_0}{\partial x_i}=\left.\frac{\partial \omega_0}{\partial x_i}\right|_{k_j=\mathrm{const}}+\frac{\partial \omega_0}{\partial k_j}\frac{\partial k_i}{\partial x_j}$$

получим

$$\frac{\partial a_1^2}{\partial t}+\frac{\partial \omega_0}{\partial k_i}\frac{\partial a_1^2}{\partial x_i}+a_1^2\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x_i \partial k_i}+\frac{a_1^2}{q}\left(\frac{\partial \omega_0}{\partial k_i}\frac{\partial q}{\partial x_i}-\frac{\partial \omega_0}{\partial x_i}\frac{\partial q}{\partial k_i}\right)=0$$

Для однородной среды $\frac{\partial q}{\partial x_i}=\frac{\partial \omega_0}{\partial x_i}=0$ и будем иметь

$$\frac{\partial a_1^2}{\partial t}+\frac{\partial \omega_0}{\partial k_i}\frac{\partial a_1^2}{\partial x_i}+a_1^2\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial k_i \partial k_j}\frac{\partial k_i}{\partial x_j}=0 \tag{24}$$

Выведем условия устойчивости. Полагая в (22) и (24) $k_i=k_{i_0}+\mu_i$; $a_1^2=a_0^2+a'$ и линеаризируя относительно малых значений μ_i, a', а также полагая $a'=A\exp\left[i(\Omega t-k_i'x_i)\right]$, $\mu_i=K_i\exp\left[i(\Omega t-k_i'x_i)\right]$, получим Ω, которое является вещественным при выполнении соотношения

$$\frac{\partial^2\omega_0}{\partial k_i \partial k_j}\left(\frac{\partial \omega}{\partial a_1^2}\right)_0 k_i' k_j'>0$$

Выберем ось x_1 по нормали к волне и учтем малость k_2, k_3. Полагая $k=\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}$, получим условия устойчивости

$$\frac{\partial^2\omega_0}{\partial k^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial a_1^2}\right)_0 k_1'^2+\frac{1}{k}\frac{\partial \omega_0}{\partial k}\left(\frac{\partial \omega}{\partial a_1^2}\right)_0 (k_2'^2+k_3'^2)>0$$

Для продольной устойчивости $k_2'=0$, $k_3=0$ и поэтому получим $\frac{\partial^2\omega_0}{\partial k^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial a_1^2}\right)_0>0$

Для поперечной устойчивости $k_1=0$, поэтому $\left(\frac{\partial \omega}{\partial a_1^2}\right)_0>0$.

Таблица 1

F	$-4\cdot 10^3$														
E	10^2			$8\cdot 10$			$4\cdot 10$			0,01			0,001		
ψ	0,1			0,12			0,2			10			100		
kh_0	1	2	∞	1	2	∞	1	2	∞	1	2	∞	1	2	∞
$\left(\frac{\partial\omega}{\partial a_1^2}\right)_0\frac{1}{\omega_0 k^2}$	−0,88	0,14	[illegible]	−0,5	−0,09	0,34	−0,74	−0,08	−0,002	−39603,94	−39603,936	−39603,9	−3996004	−3996004	−3996004
$\frac{\partial^2\omega_0}{\partial k^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial a_1^2}\right)_0\frac{1}{gk}$	19,62	−5,35	−7,54	22,08	3,92	−3,53	39,88	[illegible]	0,04	−795[illegible],6	−7679,88	−7696,41	−80059	−79526	−79648

$$\psi=\frac{\gamma h k}{\rho_0},\quad E=\frac{g\rho_0}{Dk^4},\quad F=\frac{\gamma_1}{30}\left(\frac{\rho_0}{f}\right)^3\frac{(1-[illegible])^2}{(1-\nu)^3}$$

Численное решение задачи для устойчивости приведено в табл. 1, откуда следует, что с уменьшением глубины и с увеличением параметра Ψ поперечная устойчивость уменьшается и, наоборот, с уменьшением глубины и с увеличением Ψ продольная устойчивость увеличивается, где $\Psi = \bar{\rho} h k/\rho_0$. Следует отметить, что в табл. 1 знаки коэффициентов, характеризующих продольную и поперечную устойчивости, противоположные, причем для малых значений параметра Ψ для бесконечной глубины имеется продольная неустойчивость и поперечная устойчивость, а для больших Ψ имеет место обратное явление. Таким образом, наличие пластины для глубокой жидкости изменяет характер устойчивости.

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԽՈՐՈՒԹՅԱՆ ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՎՐԱ ԳՏՆՎՈՂ ՍԱԼՈՒՄ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԾՌՄԱՆ ԱԼԻՔՆԵՐԸ

Ս. Գ. ԱՎԱԳՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում են անսեղմելի կշիռ ունեցող հեղուկը ծածկող սալում կվազիմոնոխրոմատիկ ալիքները։ Նշված համակարգի համար ձևակերպվում է վարիացիոն սկզբունքը։ Ներմուծվում է ըստ փուլի միջինացված լագրանժիանը և նրա համար Ուիզեմի մեթոդով գրվում է ամպլիտուդի և ալիքային թվի վարիացիոն հավասարումները։

Ստացված է ոչ գծային դիսպերսիոն հարաբերակցություն, որը բնութագրում է ալիքների պարուրիչների համար ստացված հավասարումների կայունությունը։

Ցույց է տրված, որ սալի առկայությունը, որևէ դիապազոնում, բերում է երկայնական կայունության տիրույթի մեծացման և փոքրացման՝ լայնական կայունության համար։

NONLINEAR BENDING WAVES IN PLATE ON SURFACE OF FINITE DEPTH FLUID

S. G. AVAGIAN

Summary

The quasimonocromatic waves in plate contacting with ponderable incompressible fluid are considered.

The variational principle for the mentioned system is formulated. The averaged on phase Lagrangian is introduced and by means of the method of Whitham the variational equations for amplitudes and wave numbers are written for it.

The nonlinear dispersion relation characteristing the stability of the revealed equations for envelope waves is obtained. The presence of the plate in some interval causes the increase of the region of longitudinal stability and the decrease of transversal stability.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны М.: Мир, 1977. 622 с.
2. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: ИЛ, 1961. 777 с.
3. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
4. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Некоторые вопросы распространения квазимонохроматических нелинейных волн в пластинах и оболочках. В кн.: Труды XII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, т. 1. Ереван: Изд-во Ереванского университета, 1980, с. 106—112.
5. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1961. 275 с.
6. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.
7. *Григолюк Э. И.* и *Горшков А. Г.* Взаимодействие слабых ударных волн с упругими конструкциями. М.: Изд-во МГУ. Ин-т механики. Научн. труды № 13, 1971. 180 с.
8. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г.* Динамика твердых тел и тонких оболочек вращения, взаимодействующих с жидкостью. М.: Изд-во МГУ, 1975. 179 с.
9. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М.: ВИНИТИ, 1973. 272 с.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила в редакцию
7.V. 1983