ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

38 (1)

1985

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

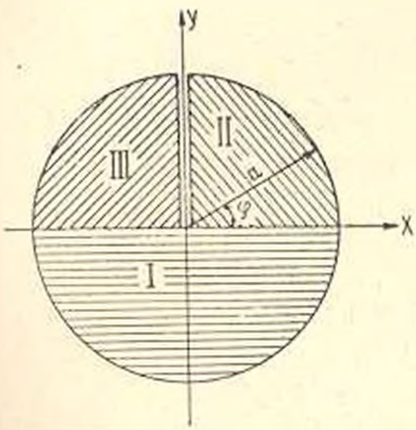
Մեխանիկա XXXVIII, № 5, 1985 Механика

УДК 539.319

КРУЧЕНИЕ СОСТАВНОГО КРУГОВОГО СТЕРЖНЯ С РАДИАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

АРУТЮНЯН Л. А., АПИКЯН Ж. Г.

Рассмотрим задачу о кручении призматического составного стержня с сечением в виде круга с радиальной трещиной между материалами (фиг. 1).



Фиг. 1

В полярных координатах r, φ функции напряжений $U_m(r, \varphi)$ $(m=1, 2, 3)$ удовлетворяют уравнению Пуассона [1]

$$\frac{\partial^2 U_m}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_m}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U_m}{\partial \varphi^2}=-2G_m$$

$$(m=1, 2, 3) \tag{1.1}$$

при граничных и контактных условиях

$$U_m(a, \varphi)=0, \quad m=1, 2, 3$$

$$U_m\left(r, \frac{\pi}{2}\right)=0, \quad m=2, 3$$

$$U_1(r,0)=U_2(r,0), \; U_3(r,\pi)=U_1(r,-\pi)$$

$$\frac{1}{G_1}\frac{\partial U_1(r,\varphi)}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=0}=\frac{1}{G_2}\frac{\partial U_2(r,\varphi)}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=0}$$

$$\frac{1}{G_3}\frac{\partial U_3(r,\varphi)}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=\pi}=\frac{1}{G_1}\frac{\partial U_1(r,\varphi)}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=-\pi} \tag{1.2}$$

где G_m $(m=1, 2, 3)$ — модули сдвига материалов тел.

С целью сведения задачи к решению гармонического уравнения положим

$$\frac{U_m(r, \varphi)}{G_m}=\Phi_m(t, \varphi)-\frac{a^2 e^{2t}}{2} \tag{1.3}$$

где $t=\ln r/a$ и функции $\Phi_m(t, \varphi)$ $(m=1, 2, 3)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial \varphi^2}=0 \tag{1.4}$$

Решение уравнения (1.4) ищем в виде ряда и интеграла Фурье

$$\Phi_1(t, \varphi) = \int_0^\infty [C_1(z)\operatorname{sh} z\varphi + D_1(z)\operatorname{ch} z\varphi]\sin zt\,dz + \sum_{k=1}^\infty A_k^{(1)} e^{kt}\sin k\varphi$$

$$(-\pi < \varphi < 0, \quad -\infty < t < 0)$$

$$\Phi_2(t, \varphi) = \int_0^\infty \left[C_2(z)\operatorname{sh} z\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + D_2(z)\operatorname{ch} z\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right]\sin zt\,dz +$$

$$+ \sum_{k=1}^\infty A_k^{(2)} e^{2kt}\sin 2k\varphi \qquad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < t < 0\right) \tag{1.5}$$

$$\Phi_3(t, \varphi) = \int_0^\infty \left[C_3(z)\operatorname{sh} z\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + D_3(z)\operatorname{ch} z\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right]\sin zt\,dz +$$

$$+ \sum_{k=1}^\infty A_k^{(3)} e^{2kt}\sin 2k\varphi \qquad \left(\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi, \quad -\infty < t < 0\right)$$

Удовлетворяя условиям (1.2), для определения постоянных $A_k^{(m)}$, C_m, D_m $(m = 1, 2, 3)$ получаем следующие выражения:

$$A_k^{(m)} = (-1)^m(1 - (-1)^k)\frac{a^2}{k\pi} \qquad (m = 1, 2, 3)$$

$$D_m(z) = -\frac{a^2 z}{\pi(4 + z^2)} \qquad (m = 2, 3)$$

$$D_1(z) = -\frac{a^2}{\pi}\left(\frac{z}{4 + z^2} + 8\mu_2(\mu_3 + 1)\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2}\operatorname{sh}\frac{3\pi z}{4}}{z(4 + z^2)\Delta\operatorname{ch}\frac{\pi z}{4}}\right) \tag{1.6}$$

$$C_1(z) = \frac{a^2}{\pi}\left(\frac{z}{4 + z^2}\operatorname{th}\frac{\pi z}{4} - \frac{\operatorname{sh}\frac{3\pi z}{4}}{z\operatorname{ch}\frac{\pi z}{2}\operatorname{ch}\frac{\pi z}{4}} + 8(\mu_3 + 1)\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi z}{2}\operatorname{sh}\frac{3\pi z}{4}}{z(4 + z^2)\Delta\operatorname{ch}\frac{\pi z}{4}}\right)$$

$$C_m(z) = \frac{a^2}{\pi}\left(\frac{z}{4 + z^2}\operatorname{th}\frac{\pi z}{4} - 8(\mu_{5-m} + 1)\frac{\operatorname{sh}\frac{3\pi z}{4}}{z(4 + z^2)\Delta\operatorname{ch}\frac{\pi z}{4}}\right) \qquad (m = 2, 3)$$

где

$$\Delta = \Delta(z) = (1 + \mu_2)(1 + \mu_3)\operatorname{ch}\pi z + 1 - \mu_2\mu_3; \quad \mu_2 = \frac{G_2}{G_1}; \quad \mu_3 = \frac{G_3}{G_1} \tag{1.7}$$

Подставляя значения (1.6) в (1.5), находим

$$\Phi_m(t,\varphi)=\frac{a^2}{2}+\frac{4a^2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\Delta_m(z,\varphi)\sin zt\,dz}{z(4+z^2)\Delta(z)\operatorname{ch}\frac{\pi z}{4}}=$$

$$=\frac{a^2}{2}+\frac{2a^2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta_m(z,\varphi)\exp(izt)\,dz}{z(4+z^2)\,\Delta(z)\operatorname{ch}\frac{\pi z}{4}}\qquad(m=1,\ 2,\ 3)\qquad(1.8)$$

где

$$\Delta_1(z,\ \varphi)=\Delta(z)\operatorname{ch}z\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)+2(\mu_2+1)\operatorname{sh}\frac{3\pi z}{4}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi z}{2}\operatorname{sh}z\varphi-\mu_2\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2}\operatorname{ch}z\varphi\right)$$

$$\Delta_2(z,\ \varphi)=\Delta(z)\operatorname{ch}z\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)-2(\mu_2+1)\operatorname{sh}\frac{3\pi z}{4}\operatorname{sh}z\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\qquad(1.9)$$

$$\Delta_3(z,\ \varphi)=\Delta(z)\operatorname{ch}z\left(\varphi-\frac{3\pi}{4}\right)-2(\mu_2+1)\operatorname{sh}\frac{3\pi z}{4}\operatorname{sh}z\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$$

Используя формулы для определения касательных напряжений [1]

$$\tau_{rz}=\frac{G\theta e^{-t}}{a}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi},\quad\tau_{\varphi z}=-\frac{G\theta e^{-t}}{a}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}-a^2e^{2t}\right)\qquad(1.10)$$

получаем

$$\tau_{rz}^{(m)}(t,\ \varphi)=\frac{2G_m\theta a}{i\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{\partial}{\partial\varphi}\Delta_m(z,\varphi)}{z(4+z^2)\operatorname{ch}\frac{\pi z}{4}}\ \frac{\exp(t(iz-1))}{\Delta(z)}\,dz$$

$$\tau_{\varphi z}^{(m)}(t,\ \varphi)=-G_m\theta a\left[\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta_m(z,\varphi)\exp(t(iz-1))}{(4+z^2)\Delta(z)\operatorname{ch}\frac{\pi z}{4}}dz-e^t\right]\qquad(1.11)$$

$$(m=1,\ 2,\ 3)$$

Для исследования поведения касательных напряжений в центре круга применим теорему о вычетах и представим (1.11) в виде бесконечного ряда

$$\tau_{rz}^{(m)}(t,\varphi)=4G_m\theta a\left[\frac{\frac{\partial}{\partial\varphi}\Delta_m(z_1,\varphi)}{z_1(4+z_1^2)\operatorname{ch}\frac{\pi z_1}{4}}\ \frac{\exp(t(iz_1-1))}{\Delta'(z_1)}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\text{Выч}\,(f_1^{(m)}(t,\varphi,z),\tilde z_k)\right]$$

$$(1.12)$$

$$\tau_{\varphi z}^{(m)}(t,\varphi)=G_m\theta ae^t-4iG_m\theta a\left[\frac{\Delta_m(z_1,\varphi)\exp(t(iz_1-1))}{(4+z_1^2)\Delta'(z_1)\operatorname{ch}\frac{\pi z_1}{4}}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\text{Выч}(f_2^{(m)}(t,\varphi,z)\tilde z_k)\right]$$

здесь $f_k^{(m)}(t,\ \varphi,\ z)$ $(k=1,\ 2)$—подынтегральная функция в (1.11), $\tilde z_k=z_k$ $(k\geqslant2)$; $\tilde z_1=-2i$; $\tilde z_k=2(2k-1)i$ $(k\leqslant0)$, а $z_k=\xi_k-i\eta_k$—корни уравнения

$$\Delta(z)=0\qquad(1.13)$$

которые расположены в порядке возрастания положительных значений η_k. Легко доказать, что все корни уравнения (1.13) мнимые, то есть $\xi_k=0$, причем

$$\eta_k=\frac{1}{\pi}\arccos h+2(k-1),\quad h=\frac{\mu_2\mu_3-1}{(\mu_2+1)(\mu_3+1)}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots) \tag{1.14}$$

Очевидно, что среди чисел η_k $(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ первое положительное число — η_1, причем $\eta_1<1$.

Характер напряженного состояния в центре круга определяется величиной η_1. В данной задаче в центре круга всегда имеется концентрация напряжений.

Представляет интерес изучение коэффициентов особенности для обоих касательных напряжений при различных направлениях приближения к центру круга и сравнение этих значений с порядком особенности напряжений.

В табл. 1 приведены значения порядка особенности напряжений. Как видно из таблицы, при увеличении μ_2 или μ_3 порядок увеличивается. Это значит, что при увеличении жесткости первого материала порядок особенности уменьшается.

Таблица 1

μ_3 \ μ_2	0,01	0,1	1	10	100
0,01	0,063	0,144	0,337	0,474	0,5
0,1	0,144	0,195	0,366	0,5	0,526
1	0,337	0,366	0,5	0,634	0,663
10	0,474	0,5	0,634	0,805	0,856
100	0,5	0,526	0,663	0,856	0,937

Определяя коэффициенты при особенности для напряжений $\tau^{(m)}_{\varphi z}$ и $\tau^{(m)}_{rz}$ $(m=1,\ 2,\ 3)$, получаем

$$K_m=-\frac{4iG_m}{G_1}\,\frac{\Delta_m(z_1,\varphi)}{(4+z_1^2)\Delta'(z_1)\operatorname{ch}\frac{\pi z_1}{4}},\quad R_m=\frac{4G_m}{G_1}\,\frac{\frac{\partial}{\partial\varphi}\Delta_m(z_1,\varphi)}{z_1(4+z_1^2)\Delta'(z_1)\operatorname{ch}\frac{\pi z_1}{4}} \tag{1.15}$$

или более подробно

$$K_1=\frac{8\sin\frac{3\pi\eta_1}{4}\left(\mu_2\sin\frac{\pi\eta_1}{2}\cos\eta_1\varphi-\cos\frac{\pi\eta_1}{2}\sin\eta_1\varphi\right)}{\pi(4-\eta_1^2)(\mu_2+1)\cos\frac{\pi\eta_1}{4}\sin\pi\eta_1}$$

$$K_2=\frac{8\mu_2\sin\frac{3\pi\eta_1}{4}\sin\eta_1\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{\pi(4-\eta_1^2)(\mu_2+1)\cos\frac{\pi\eta_1}{4}\sin\pi\eta_1},\quad K_3=\frac{8\mu_3\sin\frac{3\pi\eta_1}{4}\sin\eta_1\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}{\pi(4-\eta_1^2)(\mu_3+1)\cos\frac{\pi\eta_1}{4}\sin\pi\eta_1} \tag{1.16}$$

$$R_1 = \frac{8\sin\frac{3\pi\gamma_1}{4}\left(\mu_2\sin\frac{\pi\gamma_1}{2}\sin\gamma_1\varphi + \cos\frac{\pi\gamma_1}{2}\cos\gamma_1\varphi\right)}{\pi(4-\gamma_1^2)(\mu_2+1)\cos\frac{\pi\gamma_1}{4}\sin\pi\gamma_1} \tag{1.17}$$

$$R_2 = \frac{8\mu_2\sin\frac{3\pi\gamma_1}{4}\cos\gamma_1\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{\pi(4-\gamma_1^2)(\mu_2+1)\cos\frac{\pi\gamma_1}{4}\sin\pi\gamma_1}, \quad R_3 = -\frac{8\mu_1\sin\frac{3\pi\gamma_1}{4}\cos\gamma_1\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}{\pi(4-\gamma_1^2)(\mu_1+1)\cos\frac{\pi\gamma_1}{4}\sin\pi\gamma_1}$$

В табл. 2 и 3 приведены значения коэффициентов при особенности для касательных напряжений. В табл. 2 первая строка относится к случаю $\varphi=-\pi/2$, вторая — $\varphi=-\pi/4$, третья — $\varphi=0$. В табл. 3 первая строка относится к $\varphi=0$, вторая — $\varphi=\pi/4$, третья — $\varphi=\pi/2$.

Таблица 2

μ_2 \ μ_1	Значения K_1: 0,01	0,1	1	10	100	Значения R_1: 0,01	0,1	1	10	100
0,01	0,142 0,328 0,044	0,449 0,404 0,182	0,412 0,473 0,408	0,353 0,451 0,474	0,340 0,441 0,475	−0,001 0,296 0,440	−0,083 0,215 0,419	−0,232 0,004 0,239	−0,319 −0,150 0,044	−0,333 −0,178 0,005
0,1	0,449 0,300 0,020	0,446 0,360 0,134	0,402 0,439 0,369	0,340 0,420 0,437	0,325 0,410 0,438	0,083 0,345 0,457	0,000 0,264 0,425	−0,180 0,034 0,239	−0,278 −0,127 0,044	−0,293 −0,155 0,005
1	0,412 0,242 0,008	0,402 0,267 0,067	0,340 0,314 0,240	0,261 0,283 0,282	0,242 0,269 0,278	0,232 0,406 0,473	0,180 0,350 0,435	0,000 0,130 0,240	−0,117 −0,038 0,044	−0,136 −0,068 0,005
10	0,353 0,196 0,005	0,340 0,207 0,044	0,261 0,217 0,155	0,144 0,143 0,108	0,107 0,109 0,109	0,319 0,433 0,475	0,278 0,387 0,437	0,117 0,186 0,240	0,000 0,022 0,043	−0,020 −0,008 0,005
100	0,340 0,186 0,005	0,325 0,196 0,040	0,242 0,198 0,140	0,107 0,104 0,100	0,047 0,047 0,045	0,333 0,437 0,475	0,293 0,392 0,437	0,136 0,195 0,240	0,020 0,032 0,043	0,000 0,002 0,005

Значения R_3 и K_3 получаются соответственно из R_2 и K_2 при замене μ_2 на μ_1 и, наоборот.

Можно доказать, что K_1, K_2, K_3, R_2, R_3 не обращаются в нуль в соответствующих промежутках изменения φ, а R_1 обращается в нуль только для одного значения φ из $(-\pi, 0)$. Обращение K_1, K_2, K_3, R_1, R_2, R_3 в нуль эквивалентно следующим условиям:

$$\operatorname{tg}\gamma_1\varphi = \mu_2\operatorname{tg}\frac{\pi\gamma_1}{2}; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}-\frac{n\pi}{\gamma_1}; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{\gamma_1}; \quad \operatorname{ctg}\gamma_1\varphi = -\mu_1\operatorname{tg}\frac{\pi\gamma_1}{2};$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\gamma_1}-\frac{n\pi}{\gamma_1}; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\gamma_1}+\frac{n\pi}{\gamma_1} \tag{1.18}$$

Легко видеть, что углы $\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi}{\gamma_1}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\gamma_1}-\frac{n\pi}{\gamma_1}$ не лежат в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, а углы $\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{\gamma_1}$, $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\gamma_1}+\frac{n\pi}{\gamma_1}$ — в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ни при каком целом n.

Докажем, что первое из уравнений (1.18) не имеет корня в интервале $(-\pi, 0)$. В самом деле, общее решение указанного уравнения имеет вид

$$\varphi=\varphi_k=\varphi_0+\frac{k\pi}{\gamma_1}, \quad (k=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$$

где

$$\varphi_0=\frac{1}{\gamma_1}\operatorname{arctg}\left(\mu_2 \operatorname{tg}\frac{\pi\gamma_1}{2}\right)$$

Таблица 3

	Значения K					Значения K_1				
μ_1 \ μ_2	0.01	0.1	1	10	100	0.01	0.1	1	10	100
	0.044	0.182	0.408	0.474	0.475	0.005	0.042	0.239	0.437	0.475
0.01	0.030	0.116	0.235	0.259	0.257	0.033	0.146	0.410	0.591	0.620
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.045	0.167	0.173	0.644	0.672
	0.020	0.134	0.369	0.437	0.438	0.005	0.042	0.239	0.437	0.475
0.1	0.013	0.093	0.210	0.236	0.235	0.016	0.113	0.386	0.570	0.602
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.020	0.141	0.440	0.617	0.646
	0.008	0.067	0.240	0.282	0.278	0.005	0.042	0.239	0.437	0.475
1	0.005	0.038	0.130	0.147	0.144	0.009	0.070	0.314	0.479	0.531
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.009	0.080	0.340	0.520	0.550
	0.005	0.044	0.155	0.108	0.109	0.005	0.042	0.239	0.437	0.475
10	0.003	0.024	0.081	0.070	0.055	0.007	0.058	0.274	0.453	0.484
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.007	0.062	0.286	0.456	0.486
	0.005	0.040	0.140	0.100	0.045	0.005	0.042	0.239	0.137	0.475
100	0.003	0.022	0.073	0.050	0.024	0.007	0.056	0.269	0.440	0.485
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.007	0.059	0.270	0.446	0.475

Так как $0<\gamma_1<1$, то $\varphi_k>0$ при $k=0, 1, 2, \ldots$ С другой стороны, при $k=-2, -3, -4, \ldots$ имеем

$$\varphi_k\leqslant\varphi_{-2}=\varphi_0-\frac{2\pi}{\gamma_1}<-\pi$$

Остается доказать, что φ_{-1} тоже не лежит в интервале $(-\pi, 0)$. Если $\mu_2\mu_1<1$, то $h<0$ и $-(\mu_2+1)h<1$ или $1<\frac{1+h}{-\mu_2 h}$, откуда $\sqrt{\frac{1-h}{1+h}}<\frac{\sqrt{1-h^2}}{-\mu_2 h}$. Из последнего неравенства получаем

$$\mu_2 \operatorname{tg}\frac{\pi\gamma_1}{2}<\operatorname{tg}(\arccos(-h))$$

или

$$\operatorname{arctg}\left(\mu_2 \operatorname{tg}\frac{\pi\gamma_1}{2}\right)<\arccos(-h)$$

откуда $\gamma_1\varphi_0<\pi-\pi\gamma_1$. Окончательно получаем

$$\psi_{-1} = \psi_0 - \frac{\pi}{\gamma_1} < -\pi$$

Наконец, докажем, что уравнение

$$\operatorname{ctg}\gamma_1\varphi = -\mu_2 \operatorname{tg}\frac{\pi\gamma_1}{2}$$

имеет ровно один корень, лежащий в промежутке $(-\pi, 0)$. Все корни последнего уравнения даются формулой

$$\varphi = \psi_k = \frac{\pi}{\gamma_1}k + \psi_0 \quad (k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$$

где

$$\psi_0 = -\frac{1}{\gamma_1}\operatorname{arcctg}\left(\mu_2 \operatorname{tg}\frac{\pi\gamma_1}{2}\right)$$

Ясно, что $\psi_k > 0$ при $k = 1, 2, 3, \ldots$ и $\psi_k < -\pi$ при $k = -1, -2, -3, \ldots$ Для проверки остался только корень ψ_0. Покажем, что

$$-\pi < \psi_0 < 0 \quad \text{или} \quad 0 < -\gamma_1\psi_0 < \pi\gamma_1.$$

Неравенство $0 < -\gamma_1\psi_0$ очевидное. Докажем неравенство

$$-\gamma_1\psi_0 < \pi\gamma_1 \tag{1.19}$$

При $\frac{1}{2} \leq \gamma_1 < 1$ имеем

$$\pi\gamma_1 \geq \frac{\pi}{2} > -\gamma_1\psi_0$$

то есть неравенство (1.19) выполняется. При $0 < \gamma_1 < \frac{1}{2}$ имеем

$$h > 0,\ (\mu_2 + 1)h < \mu_2 \quad \text{или} \quad \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} < \mu_2\sqrt{\frac{1-h}{1+h}}$$

Из последнего неравенства найдем

$$\operatorname{ctg}\pi\gamma_1 < \mu_2 \operatorname{tg}\frac{\pi\gamma_1}{2}$$

откуда

$$\pi\gamma_1 > \operatorname{arcctg}\left(\mu_2 \operatorname{tg}\frac{\pi\gamma_1}{2}\right) \quad \text{или} \quad \pi\gamma_1 > -\gamma_1\psi_0$$

Таблица 4

μ_2 / μ_1	0,01	0,1	1	10	100
0,01	90°	77°45′	45°45′	10°	1°10′
0,1	102°15′	90°	52°	11°25′	1°20′
1	134°15′	128°	90°	24°	3°
10	170°	168°35′	156°	90°	17°10′
100	178°50′	178°40′	177°	162°50′	90°

Итак, в промежутке $(-\pi, 0)$ существует единственный угол $\varphi = -\varphi_0$, для которого $R_1 = 0$.

В табл. 4 приведены значения угла $-\varphi_0$.

В табл. 5 приведены значения касательных напряжений для различных упругих характеристик на некоторых радиальных линиях.

Таблица 5

$\mu_2 = 10;\ \mu_3 = 10$

	$\tau_{rz}(r,\varphi)/(G_1\theta a)$				$\tau_{z\varphi}(r,\varphi)/(G_1\theta a)$			
φ \ r/a	0.001	0.1	0.5	1	0.001	0.1	0.5	1
0	−0.0100	0.0037	0.1703	0	−0.0282	−0.0845	−0.0165	1.4543
−45	−0.0045	0.0077	0.0452	0	−0.0291	−0.0595	0.0108	1.0675
−90	0	0	0	0	−0.0294	−0.0516	0.0033	1.0266
−135	0.0045	−0.0077	−0.0452	0	−0.0291	−0.0595	0.0108	1.0675
−180	0.0100	−0.0037	−0.1703	0	−0.0282	−0.0845	−0.0165	1.4543

$\mu_2 = 10;\ \mu_3 = 1$

	$\tau_{rz}(r,\varphi)/(G_1\theta a)$				$\tau_{z\varphi}(r,\varphi)/(G_1\theta a)$			
φ \ r/a	0.001	0.1	0.5	1	0.001	0.1	0.5	1
0	0.0039	0.0105	0.1730	0	−0.0178	−0.1080	−0.0647	1.3883
245	0.0024	0.0282	0.0570	0	−0.0178	−0.0830	−0.0443	0.9906
−90	0.0073	0.0370	0.0284	0	−0.0163	−0.0715	−0.0688	0.9192
−135	0.0117	0.0486	0.0283	0	−0.0136	−0.0668	−0.0934	0.8763
−180	0.0150	0.0676	0.0461	0	−0.0097	−0.0614	−0.1262	0.8200

$\mu_2 = 1;\ \mu_3 = 1$

	$\tau_{rz}(r,\varphi)/(G_1\theta a)$				$\tau_{z\varphi}(r,\varphi)/(G_1\theta a)$			
φ \ r/a	0.001	0.1	0.5	1	0.001	0.1	0.5	1
0	−0.0060	−0.0487	−0.0372	0	−0.0060	−0.0655	−0.1407	0.7926
−45	−0.0032	−0.0221	−0.0139	0	0.0078	−0.0715	−0.1192	0.8385
−90	0	0	0	0	−0.0084	−0.0727	−0.1129	0.8488
−135	0.0032	0.0221	0.0139	0	−0.0078	−0.0715	−0.1192	0.8385
−180	0.0060	0.0478	0.0372	0	−0.0060	−0.0655	−0.1407	0.7996

ՇԱՌԱՎՂԱՅԻՆ ՃԱՔՈՎ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՁՈՂԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Լ. Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ժ. Դ. ԱՊԻԿՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է շառավղային ճաք ունեցող երեք նյութերից կազմված բաղադրյալ պրիզմատիկ կլոր ձողի ոլորման խնդիրը։

Խնդիրը լուծված է լարումների ֆունկցիայի օգնությամբ։ Անհայտ գործակիցների որոշման համար ստացված են վերջավոր արտահայտություններ։

Ուսումնասիրված է լարումների եզակիության կարգը և գործակիցը ե-

րեք նյութերի միացման կետի շրջակայքում։ Հաշված են լարումների արժեքները շառավղային գծերի վրա։ Կատարված է թվային ուսումնասիրության անալիզ։

THE TORSION OF A COMPOSED CIRCULAR ROD WITH A RADIAL CRACK

L. A. HARUTIUNIAN, J. G. APIKIAN

S u m m a r y

The problem of the torsion of a composed prismatic circular rod, formed out three different materials with a radial crack between them is considered.

The problem is solved with the aid of stress function. In order to determine the unknown coefficients, finite expressions are obtained. The order and the coefficient on singularity of stresses in the neighbourhood of the point of joint of three materials are studied.

The values of stresses on the radial lines are calculated. The analysis of numerical investigation is carried out.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
18.V.1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVIII, № 5, 1985 Механика

УДК 539.3

ПРОНИКАНИЕ ТОНКОГО ЖЕСТКОГО КОНУСА В ХРУПКИЙ МАТЕРИАЛ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

АЛОЯН М. А.

Рассматривается задача проникания тонкого жесткого конуса с большой скоростью в полупространство, заполненное хрупким материалом (например, горной породой).

При решении задачи предполагается, что скорость конуса существенно больше скоростей звука в среде и область возмущенного движения среды состоит из трех частей. В первой области материал не разрушен, во второй области из-за хрупких свойств материал разрушен и образованы многочисленные трещины, расположенные в меридиональных плоскостях, в третьей, примыкающей к конусу, области материал разрушен до мельчайших частиц. Поверхности раздела указанных областей—осесимметрические заостренные поверхности, вершины которых совпадают с вершиной жесткого конуса.

Для математического описания деформирования и движения материала в этих областях принимается модель, предложенная С. С. Григоряном в работах [3, 4, 6].

Сверхзвуковое установившееся движение конуса в упругой среде рассмотрено в [7, 8]. Задача о проникании тонкого тела вращения в упругую среду рассмотрена в работах [9, 10].

1. Пусть тонкий жесткий конус проникает в полупространство с постоянной скоростью v_0 и пусть ось конуса перпендикулярна к поверхности полупространства. В этом случае задача имеет осевую симметрию и поэтому в возмущенной области уравнения движения и компоненты тензора малой деформации будут

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{r}=\rho_0\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=\rho_0\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad \varepsilon_\varphi=\frac{u_r}{r},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial u_z}{\partial z},\quad \gamma_{r\varphi}=\gamma_{\varphi z}=0,\quad \gamma_{rz}=\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r} \tag{1.2}$$

Здесь r, φ, z — цилиндрические координаты точки, σ_r, σ_φ, σ_z, τ_{rz}— компоненты тензора напряжений, u_r, $u_\varphi=0$, u_z—смещения точки в радиальном, окружном и осевом направлениях соответственно, ε_r, ε_φ, ..., γ_{rz} — компоненты тензора малой деформации, ρ_0—плотность невозмущенной среды, t—время. Начало цилиндрической системы координат выбирается в точке касания вершины конуса со свободной поверхностью полупространства в момент времени $t=0$.

Согласно предложенной в работе [6] модели деформирование материала в неразрушенном состоянии описывается уравнениями линейной теории упругости

$$\sigma_r=2\mu\varepsilon_r+\lambda\theta,\quad \sigma_z=2\mu\varepsilon_z+\lambda\theta,\quad \sigma_\varphi=2\mu\varepsilon_\varphi+\lambda\theta,\quad \tau_{rz}=\mu\gamma_{rz},\quad \theta=\varepsilon_r+\varepsilon_\varphi+\varepsilon_z \tag{1.3}$$

Здесь λ, μ – коэффициенты Ламе, θ—объемная деформация.

Подставляя (1.3) с учетом (1.2) в систему (1.1), получим уравнения движения среды в неразрушенной области в перемещениях

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+a_1\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}+a_2\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}=\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+a_1\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+a_2\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z}+\frac{a_1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{a_2}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}=\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \tag{1.4}$$

где

$$a_1=\frac{\mu}{\lambda+2\mu},\quad a_2=\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu},\quad c_1^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}$$

В случае, когда тонкий конус проникает в полупространство с большой сверхзвуковой скоростью, движение в среде подобно случаю, описанному в [1, 2], в основном происходит в радиальном направлении и поэтому, следуя [5], будем предполагать, что компоненты вектора смещения и скорости во всех трех областях имеют порядки

$$u_r\sim u_0,\quad u_z\sim\varepsilon u_0,\quad v_r\sim v_0,\quad v_z\sim\varepsilon v_0 \tag{1.5}$$

а производные различных искомых функций оцениваются соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial r}\sim\frac{1}{l},\quad \frac{\partial}{\partial z}\sim\frac{\varepsilon}{l},\quad \frac{\partial}{\partial t}\sim\frac{1}{t_0} \tag{1.6}$$

где u_0, v_0, l, t_0—характерные значения смещения, скорости, длины и времени соответственно, $\varepsilon=c_1/v_0$—малый параметр. Оператор полной производной $d/dt=\partial/\partial t+v_i\,\partial/\partial x_i$ с учетом (1.5) и (1.6) примет вид

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}+O\left(\varepsilon^2\frac{v_0}{l}\right) \tag{1.7}$$

Соотношениями (1.5)–(1.7) будем оценивать порядки величин различных членов уравнений, описывающих движение среды в указанных выше трех областях.

Отбрасывая в (1.3) члены порядка ε^2 и выше, получим

$$\sigma_r=(2\mu+\lambda)\frac{\partial u_r}{\partial r}+\lambda\frac{u_r}{r},\qquad \sigma_\varphi=\lambda\frac{\partial u_r}{\partial r}+(2\mu+\lambda)\frac{u_r}{r}$$

$$\sigma_z=\lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}\right),\quad \tau_{rz}=\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right),\quad \theta=\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r} \tag{1.8}$$

Отбрасывая в уравнениях (1.4) члены порядка ε^2 и выше, получаем упрощенную систему уравнений движения среды в первой области

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}=\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+a_3\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{a_3}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}=\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

где (1.9)

$$a_3=\frac{\lambda+\mu}{\mu}, \quad c_2^2=\frac{\mu}{\rho_0}$$

Упрощенная система уравнений распалась на два уравнения. Первое уравнение системы (1.9) совпадает с точным уравнением плоской осесимметричной задачи. Решение этого уравнения $u_r(r, z, t)$ зависит от координаты z как от параметра. Точно также и в решение $u_z(r,z,t)$ второго уравнения системы (1.9) переменное z входит как параметр.

Системой определяющих параметров задачи являются λ, μ, ρ_0, α, v_k, r, z, t, где α—угол между образующей конуса с его осью. На основании П—теоремы [11]—решение первого уравнения системы (1.9) можно написать в виде

$$u_r=c_1\left(t-\frac{z}{v_k}\right)f_1\left(\xi, \eta, \frac{\lambda}{c_1^2\rho_0}, \frac{\mu}{c_1^2\rho_0}, \alpha\right) \tag{1.10}$$

то есть перемещение u_r от переменных r, z и t зависят только через комбинации

$$\xi=\frac{r}{c_1\left(t-\frac{z}{v_k}\right)}, \quad \eta=\frac{z}{c_1\left(t-\frac{z}{v_k}\right)}$$

поэтому решение задачи автомодельно.

Подставляя (1.10) в первое уравнение системы (1.9), получим

$$\xi^2(1-\xi^2)\frac{d^2 f_1}{d\xi^2}+\xi\frac{df_1}{d\xi}-f_1=0 \tag{1.11}$$

Общее решение (1.11) есть $f_1(\xi)=[A_1+B_1(\varphi(\xi)-\psi(\xi))]\xi$ и согласно (1.10) решение первого уравнения системы (1.9) будет

$$u_r=c_1\left(t-\frac{z}{v_k}\right)[A_1+B_1(\varphi(\xi)-\psi(\xi))]\xi \tag{1.12}$$

где $\varphi(\xi)=\ln\frac{1+\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$, $\psi(\xi)=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$, A_1 и B_1—произвольные постоянные.

Подставляя (1.12) во второе уравнение системы (1.9), получим уравнение для определения $u_z(r, z)$. Однако, как это видно из (1.8), для определения компонент тензора напряжений в первой области нет необходимости определять $u_z(r, z)$. Эта функция нужна только для определения τ_{rz}, порядок которого—$O\left(\varepsilon, \frac{\mu u_0}{l}\right)$.

Подставляя (1.12) в (1.8), получаем следующие формулы для определения нормальных напряжений в первой области

$$\sigma_r = 2(\lambda+\mu)A_1 + 2B_1[(\lambda+\mu)\varphi(\xi) + \mu\psi(\xi)]$$

$$\sigma_\varphi = 2(\lambda+\mu)A_1 + 2B_1[(\lambda+\mu)\varphi(\xi) - \mu\psi(\xi)], \quad \sigma_z = 2\lambda B_1\varphi(\xi) \qquad (1.13)$$

2. Во второй области материал среды разрушен и образованы многочисленные трещины, расположенные в меридиональных плоскостях, поэтому в этой области везде $\sigma_\varphi = 0$. Будем считать, что в этой области допустимо описание движения уравнениями сплошной среды [6[. Поэтому уравнения движения опять будут (1.1), но с учетом условия $\sigma_\varphi = 0$. Компоненты тензора напряжений определятся из (1.3), а компоненты тензора деформаций — из (1.2), кроме деформации ε_φ. Из (1.3) с учетом условия $\sigma_\varphi = 0$ получим

$$\varepsilon_\varphi = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(\varepsilon_r + \varepsilon_z)$$

и поэтому, отбрасывая члены порядка ε^2 и выше, получим

$$\theta = \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial u_r}{\partial r} \qquad (2.1)$$

Отбрасывая члены порядка ε^2 и выше, для компонент тензора напряжений во второй области получим

$$\sigma_r = 4\mu a_2 \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_z = 2\lambda a_2 \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \tau_{rz} = \mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \qquad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в первое из уравнений движения (1.1) при условии $\sigma_\varphi = 0$ и отбрасывая члены порядка ε^2 и выше, получаем следующее уравнение для определения u_r:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{c_3^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \qquad (2.3)$$

где $c_3^2 = 4a_2\mu/\rho_0$.

Рассматривая автомодельное решение уравнения (2.3), представим его в виде

$$u_r = c_3\left(t - \frac{z}{v_k}\right) f_2\left(\xi, \eta, \frac{\lambda}{c_1^2\rho_0}, \frac{\mu}{c_1^2\rho_0}, \alpha\right) \qquad (2.4)$$

где

$$\xi = \frac{r}{c_3\left(t - \dfrac{z}{v_k}\right)}, \quad \eta = \frac{z}{c_3\left(t - \dfrac{z}{v_k}\right)}$$

Подставляя (2.4) в (2.3), имеем

$$\xi(1-\xi^2)\frac{d^2 f_2}{d\xi^2} + \frac{df_2}{d\xi} = 0$$

Подставляя общее решение этого уравнения в (2.4), получим

$$u_r = c_2\left(t - \frac{z}{v_k}\right)[A_2(\xi^2\psi(\xi) - \varphi(\xi)) + B_2] \tag{2.5}$$

где A_2 и B_2—произвольные постоянные.

Подставляя (2.5) в (2.2), получаем следующие формулы для определения нормальных напряжений во второй области

$$\sigma_r = 4\mu a_2 A_2 \xi^2\psi(\xi), \quad \sigma_\theta = 0, \quad \sigma_z = 2\mu a_1 A_2 \xi^2\psi(\xi) \tag{2.6}$$

3. Будем считать, что в третьей области материал полностью разрушен путем скола до мельчайших частиц и находится в состоянии пластического течения. Для такого состояния разрушенного материала можно применить модель мягкого грунта, предложенную в работах [3, 4]. В работе [4] дается следующая зависимость между компонентами девиатора тензора напряжений и девиатора тензора скоростей деформаций

$$G\left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}\right) = \frac{dS_{ij}}{dt} - S_{ik}\Omega_{jk} - S_{jk}\Omega_{ik} + \lambda S_{ij} \tag{3.1}$$

где

$$e_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad 2\Omega_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}, \quad p = -\frac{1}{3}\sigma_{kk}$$

G—модуль сдвига, λ—положительный множитель, v_i—компоненты скорости точек среды, δ_{ij}—символ Кронекера.

Уравнения движения

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho\frac{dv_r}{dt}, \quad \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_r}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \rho\frac{dv_r}{dt} \tag{3.2}$$

уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.3}$$

условие пластичности

$$J_2 = \frac{1}{2}S_{ij} \cdot S_{ij} = F(p) \tag{3.4}$$

и соотношения (3.1) образуют полную замкнутую систему уравнений для решения задачи.

Функция $F(p)$ —положительная неубывающая функция своего аргумента. Опытом установлено [12], что $F(p) = (kp + b)^2$, где k и b—постоянные.

Будем считать, что материал в третьей области разрушен и раздавлен до максимальной плотности, и, таким образом, он несжимаем. Тогда $\rho = a\rho_0$, где $a \sim 1{,}3$ — коэффициент максимального уплотнения [13].

Уравнение неразрывности с учетом несжимаемости материала принимает вид

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0 \tag{3.5}$$

Интегрируя (3.5) и принимая во внимание условие на поверхности конуса $v_r = v_k \operatorname{tg}\alpha$, при $r = r_k$ получаем

$$v_r = v_k \operatorname{tg}\alpha \frac{r_k}{r} \tag{3.6}$$

где $r_k = (v_k t - z)\operatorname{tg}\alpha$ — радиус поперечного сечения конуса на глубине z.

Интегрируя (3.6) с учетом условия на конусе $u_r = r_k$ при $r = r_k$, получаем, следуя [9], выражение для радиального смещения

$$u_r = r - \sqrt{r^2 - r_k^2} \tag{3.7}$$

Из соотношений (3.1) при помощи (1.5) и (1.6) с учетом осевой симметрии задачи получаем следующие оценки для напряжений [5]:

$$S_{rr} \sim S_{\varphi\varphi} \sim S_{zz} \sim p \sim \sigma_0, \quad S_{rz} \sim \varepsilon\sigma_0 \tag{3.8}$$

где σ_0 — характерное значение напряжения.

Оценив порядки членов системы уравнений задачи соотношениями (1.5), (1.6), (1.7), (3.8), отбросив члены порядка ε^2 и выше, учитывая (3.5), получаем следующую упрощенную систему уравнений:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = a\rho_0\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right), \quad \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = a\rho_0\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \tag{3.9}$$

$$2G\frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{dS_{rr}}{dt} + \Lambda S_{rr}, \quad -2G\frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{dS_{\varphi\varphi}}{dt} + \Lambda S_{\varphi\varphi}, \quad 0 = \frac{dS_{zz}}{dt} + \Lambda S_{zz} \tag{3.10}$$

$$G\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = \frac{d\tau_{rz}}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)S_{rr} + \Lambda\tau_{rz}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\left(S_{rr}^2 + S_{\varphi\varphi}^2 + S_{zz}^2\right) = (kp + b)^2 \tag{3.11}$$

Первые три уравнения системы (3.10) допускают решение $S_{rr} = -S_{\varphi\varphi}$, $S_{zz} = 0$. Отсюда получаем

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\varphi), \quad p = -\frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_\varphi), \quad S_{rr} = -S_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\varphi) \tag{3.12}$$

Из условия пластичности (3.11) получаем следующую зависимость между σ_r и σ_φ

$$\sigma_\varphi = b_1\sigma_r + b_0 \tag{3.13}$$

где $\quad b_1 = \dfrac{1-k}{1+k}, \qquad b_0 = \dfrac{2b}{1+k}$.

Подставляя σ_φ из (3.13), v_r из (3.6) в первое из уравнений движения (3.9) и рассматривая автомодельное решение, получаем следующее дифференциальное уравнение для определения σ_r:

$$\frac{d\sigma_r}{d\xi}+\frac{\alpha_1}{\xi}\sigma_r=\frac{\alpha_2}{\xi}-\frac{\alpha_3}{\xi^2} \tag{3.14}$$

где $\xi=r/(v_k t-z)$, $\alpha_1=1-b_1$, $\alpha_2=b_0+a\rho_0 v_k^2 \operatorname{tg}^2\alpha$, $\alpha_3=a\rho_0 v_k^2 \operatorname{tg}^4\alpha$.

Проинтегрировав это уравнение, получаем

$$\sigma_r=\frac{C}{\xi^{\alpha_1}}+\frac{\alpha_3}{2-\alpha_1}\frac{1}{\xi^2}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \tag{3.15}$$

Определяя из условия на конусе $\sigma_r=\sigma_{rk}$ при $r=r_k$ значение постоянной интегрирования C и подставив в (3.15), получим

$$\sigma_r=\left(\frac{\xi_k}{\xi}\right)^{\alpha_1}\sigma_{rk}+\frac{\alpha_3}{2-\alpha_1}\left[\frac{1}{\xi^2}-\frac{1}{\xi_k^2}\left(\frac{\xi_k}{\xi}\right)^{\alpha_1}\right]+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left[1-\left(\frac{\xi_k}{\xi}\right)^{\alpha_1}\right] \tag{3.16}$$

где σ_{rk}—неизвестное пока значение напряжения σ_r на конусе, а $\xi_k=r_k/(v_k t-z)=\operatorname{tg}\alpha$.

4. Область возмущенного движения среды от области невозмущенного состояния отделяется конической поверхностью, на которой везде $\xi=r/c_1(t-z/v_k)=1$, а $u_r=0$. Учитывая это условие, из (1.12) получаем $A_1=0$.

Первый фронт разрушения, то есть поверхность раздела первой, неразрушенной, и второй, разрушенной меридионально расположенными трещинами, областей, является конической поверхностью, радиус круглого сечения которой на глубине z обозначим через r_1. Тогда для точек этой поверхности со стороны первой области $\xi_1=r_1/c_1(t-z/v_k)$, а со стороны второй области $\xi_2=r_1/c_3(t-z/v_k)$ и $c_3\xi_2=c_1\xi_1$.

На первом фронте разрушения имеем условия

$$\sigma_{\varphi 1}=\sigma_* \tag{4.1}$$

$$u_{r1}=u_{r2} \tag{4.2}$$

$$\rho_1\dot{r}_1(v_{r1}-v_{r2})=\sigma_{r2}-\sigma_{r1} \tag{4.3}$$

где σ_*—значение растягивающего напряжения, при котором происходит отрыв по главной площадке, $\dot{r}_1$—скорость распространения первого фронта разрушения. Индексами 1, 2 и 3 обозначены величины в первой, второй и в третьей областях соответственно.

Второй фронт разрушения, то есть поверхность раздела второй и третьей областей, также является конической поверхностью, радиус круглого сечения которой на глубине z обозначим через r_2. Тогда для точек второго фронта разрушения со стороны второй области $\xi_2=r_2/c_3(t-z/v_k)$, а со стороны третьей области $\xi_3=r_2/(v_k t-z)$ и $v_k\xi_3=c_3\xi_2$.

Разрушение в третьей области происходит путем скола, поэтому на втором фронте разрушения со стороны второй области достигается условие [6]

$$\sigma_r-\sigma_z=-2\tau_* \tag{4.4}$$

где τ_*—критическое значение касательных напряжений.

На втором фронте разрушения имеем также следующие условия:

$$u_{r2} = u_{r3} \tag{4.5}$$

$$\rho_2 r_2 (v_{r2} - v_{r3}) = \sigma_{r3} - \sigma_{r2} \tag{4.6}$$

где r_2 — скорость распространения второго фронта разрушения, $\rho_2 = \rho_0/(1-\theta_2)$, θ_2 — объемная деформация во второй области.

Из условия (4.1) находим значение постоянной B_1

$$B_1 = \frac{1}{a_3\varphi(\xi_1) - \psi(\xi_1)} \frac{\sigma_*}{2\mu}$$

Из условий (4.4) и (4.5) получаем значения постоянных

$$A_2 = -\frac{\tau_*}{\mu\xi_2\psi(\xi_2)}$$

$$B_2 = [\varphi(\xi_2) - \xi_2^2\psi(\xi_2)]A_2 + \xi_2 - \sqrt{\xi_2^2 - \left(\frac{v_k}{c_3}\xi_k\right)^2}$$

Неизвестные значения ξ_1 и ξ_2, которыми определяются границы указанных выше трех областей, определяются из условий (4.2) и (4.3), которые приводятся к следующей системе двух трансцендентных уравнений

$$\left[\sqrt{1-\left(\frac{c_1}{c_3}\xi_1\right)^2} - \varphi\left(\frac{c_1}{c_3}\xi_1\right)\right]A_2 + B_2 - \frac{c_1}{c_3}[\varphi(\xi_1) - \psi(\xi_1)]\xi_1 B_1 = 0$$

$$\left[\varphi\left(\frac{c_1}{c_3}\xi_1\right) - \psi\left(\frac{c_1}{c_3}\xi_1\right)\right]\xi_1 A_2 - \xi_1 B_2 + 2\frac{c_1}{c_3}\left\{\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 [a_3\varphi(\xi_1) + \psi(\xi_1)] - \xi_1^2\psi(\xi_1)\right\}B_1 = 0$$

Неизвестное значение σ_{rk} определяется из условия (4.6), которое приводится к следующему виду:

$$\sigma_{rk} = \rho_0 c_3^2 \left(\frac{c_3\xi_2}{v_k\xi_k}\right)^{\alpha_1} \frac{\xi_2}{1-2a_1\xi_2\psi(\xi_2)A_2}\left(B_2 - A_2\varphi(\xi_2) - \frac{v_k^2\xi_k^2}{c_3^2\xi_2}\right) +$$

$$+ \mu a_2 A_2 \left(\frac{c_3\xi_2}{v_k\xi_k}\right)^{\alpha_1}\xi_2\psi(\xi_2) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left[1 - \left(\frac{c_3\xi_2}{v_k\xi_k}\right)^{\alpha_1}\right] + \frac{\alpha_3}{2-\alpha_1}\left[\frac{1}{\xi_k^2} - \left(\frac{v_k}{c_3\xi_2}\right)^2\left(\frac{c_3\xi_2}{v_k\xi_k}\right)^{\alpha_1}\right]$$

Сила сопротивления полупространства, действующая на конус, равна работе сил σ_{rk} при проникании конуса в среду на единицу длины

$$R = \int_0^{v_k\xi_k t} \sigma_{rk} 2\pi r_k dr_k = \pi(v_k\xi_k t)^2 \sigma_{rk}$$

5. На основе полученных результатов рассмотрен численный пример. Рассматривается случай, когда тонкий конус ($\alpha = 5°40'$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \xi_k = 0{,}1$) со сверхзвуковой скоростью $v_k = c_1/\varepsilon$ ($\varepsilon = 0{,}3$) проникает в полупространство, материал которого — гранит: коэффициент Пуассона $\sigma = 0{,}3$, модуль Юнга $E = 22200{,}0$ МПа, $\rho_0 = 2500$ кг/м^3, $\sigma_* = 4{,}5$ МПа, $\tau_* = 75{,}0$ МПа. Результаты вычисления на ЭВМ следующие:

$\xi_1 = 0{,}431451$, $\xi_2 = 0{,}443213$. $B_1 = -0{,}018997$, $A_2 = -0{,}004343$, $B_2 = -0{,}000176$, $c_1 = 3390{,}30$ м/с, $c_2 = 1812{,}20$ м/с, $c_3 = 3063{,}15$ м/с. Напряжения на первом фронте разрушения со стороны первой области имеют значения: $\sigma_r = -27{,}46$ МПа, $\sigma_z = -6{,}89$ МПа, $\sigma_\theta = 4{,}5$ МПа; со стороны второй области следующие: $\sigma_r = -205{,}8$ МПа, $\sigma_z = -61{,}76$ МПа, $\sigma_\theta = 0$. Напряжения на втором фронте разрушения со стороны второй области: $\sigma_r = -214{,}29$ МПа, $\sigma_z = -64{,}29$ МПа, $\sigma_\theta = 0$; со стороны третьей области следующие: $\sigma_r = -3084{,}11$ МПа, $\sigma_z = \sigma_\theta = -1028{,}05$ МПа. На поверхности конуса $\sigma_{rk} = -3813{,}26$ МПа, $\sigma_{zk} = \sigma_{\theta k} = -1271{,}09$ МПа.

В момент $t = 10^{-4}$ с после начала проникания глубина проникания составляет $v_k t = 0{,}113$ м. На глубине $z = 0{,}04$ м $r_k = \xi_k(v_k t - z) = 0{,}0073$ м, $r_1 = \xi_1 c_1(t - z/v_k) = 0{,}00944$ м, $r_2 = \xi_2 c_2(t - z/v_k) = 0{,}00877$ м, радиус фронта возмущения $r_0 = c_1(t - z/v_k) = 0{,}02190$ м. Сила сопротивления полупространства $R = 1529{,}0$ кН.

Таким образом, первая, вторая и третья области, которые при $z = \mathrm{const}$ являются круговыми кольцами, на глубине $z = 0{,}04$ м имеют ширину соответственно 0,01246 м, 0,00067 м и 0,00147 м. Отсюда видно, что объем первой области значительно больше объема второй и третьей областей вместе взятых. Сравнивая полученные значения напряжений, заключаем, что конические поверхности, разделяющие три области, являются поверхностями сильного разрыва.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность С. С. Григоряну за постановку задачи и помощь при ее решении.

ԳԵՐՁԱՅՆԱՅԻՆ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՄԲ ԲԱՐԱԿ ԿՈՇՏ ԿՈՆԻ ԹԱՓԱՆՑՈՒՄԸ ՓԽՐՈՒՆ ՆՅՈՒԹԻ ՄԵՋ

Մ. Հ. ԱԼՈՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է բարակ կոշտ կոնի թափանցումը կիսատարածության մեջ մեծ գերձայնային արագությամբ։ Կիսատարածության նյութը փխրուն է (օրինակ լեռնային ապար)։ Խնդիրը լուծելիս ենթադրվում է, որ կիսատարածության շարժման մեջ գտնվող մասը բաղկացած է երեք տիրույթներից։ Առաջին տիրույթում նյութը քայքայված չէ։ Երկրորդ տիրույթում առաջացել են միջօրեական հարթություններով դասավորված բազմաթիվ ճաքեր։ Երրորդ տիրույթում նյութը լրիվ քայքայված է և վերածված է ավազի։

Խնդրի լուծման համար օգտագործված է գրունտների և կարծր ապարների համար Ս. Ս. Գրիգորյանի առաջարկած մոդելը։

Բոլոր երեք տիրույթներում գտնված են խնդրի հավասարումների ավտոմոդել լուծումները։ Որոշված են լարումները և կիսատարածության դիմադրության ուժը։ Լուծված է թվային օրինակ։

THE PENETRATION OF A THIN RIGID CONE WITH SUPERSONIC SPEED INTO FRIABLE MATERIAL

M. H. ALOYAN

S u m m a r y

The penetration of a rigid thin cone with great supersonic speed into half-space is considered. The material of half-space is friable (such as rock type). In the problem, it is assumed that the moving part of the half-space consists of three regions. The material of the first region is not destroyed. In the second region numerous cracks are formed which are distributed on the meridional planes. In the third region the material is completely destroyed and is reduced into sand. For the solution of the problem the model of soil and bed-rock offered by S. S. Grigorian is used. In all three regions the automodel solutions of the equations of the problem are found. The strength and resistance force of half-space are determined. The numerical example is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayes W. D.* On hypersonic similitude Quart.—Appl. Math., 1947, vol. 5, № 1, p. 34—39.
2. *Черный Г. Г.* Движения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
3. *Григорян С. С.* Об общих уравнениях динамики грунтов.—ДАН СССР, 1959, т. *124*, № 2, с. 285—287.
4. *Григорян С. С.* Об основных представлениях динамики грунтов.—ПММ, 1960, т. *24*, вып. 6, с. 1057—1072.
5. *Григорян С. С.* О приближенном решении некоторых задач динамики грунтов.—ПММ, 1962, т. *26*, вып. 5, с. 944—946.
6. *Григорян С. С.* Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород.—ПММ, 1967, т. *31*, вып. 4, с. 643—669.
7. *Кусукава К.* К теории ударных волн.—Сб. переводов, «Механика», 1952, вып. 1, с. 155—161.
8. *Апикян Ж. Г.* Движение жесткого конуса в упругой среде со сверхзвуковой скоростью.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1970, т. *23*, № 1, с. 14—19.
9. *Багдоев А. Г.* Проникание тонкого тела вращения в упругую среду.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1977, т. *30*, № 5, с. 17—37.
10. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н., Саркисян Г. А.* Решение некоторых нестационарных задач взаимодействия тел с упругими преградами.—Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 3, с. 75—81.
11. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Издательство Наука, 1972. 440 с.
12. *Алексеенко В. Д., Григорян С. С., Кошелев Л. И., Новгородов А. Ф., Рыков Г. В.* Измерение волн напряжений в мягких грунтах.—ПМТФ, 1963, № 2, с. 135—141.
13. *Талобр Ж.* Механика горных пород. М.: Госгортехиздат, 1960. 430 с.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию
19.V. 1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVIII, № 5, 1985 Механика

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ КРУГОВЫХ ТОКОВ

БАГДАСАРЯН Г. Е., МКРТЧЯН П. А.

1. Пусть изотропная замкнутая сферическая оболочка постоянной толщины $2h$ и радиуса срединной поверхности R находится в стационарном неоднородном магнитном поле $\vec{H}_0$. Считается, что оболочка изготовлена из упругого изотропного материала и покрыта тонким слоем сверхпроводящего сплава. Упругие свойства материала оболочки характеризуются модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ. Электромагнитные свойства среды, окружающей оболочку, эквивалентны свойствам вакуума.

Ортогональная система координат α_1, α_2, α_3 выбирается так, что срединная поверхность оболочки отнесена к сферическим координатам α_1, α_2 (α_1—полярный угол, α_2—азимутальный), а α_3 направлена по нормали к срединной поверхности.

В отношении тонкой оболочки считается справедливым гипотеза недеформируемых нормалей.

Известно, что при помещении сверхпроводящего тела в магнитное поле в его тонком поверхностном слое появляются экранирующие токи, препятствующие проникновению магнитного поля внутрь тела. Выталкивание магнитного поля приводит к изменению напряженности магнитного поля в области вне тела. Это изменение является результатом наложения на начальное поле $\vec{H}_0$ магнитного поля $\vec{H}^0$, создаваемого экранирующими токами. Поэтому невозмущенное магнитное поле $\vec{H}=\vec{H}_0+\vec{H}^0$ определяется из решения следующей задачи магнитостатики во внешней области [1]:

$$\operatorname{rot}\vec{H}=0, \quad \operatorname{div}\vec{H}=0 \tag{1.1}$$

$$\vec{n}_0(\vec{H}_0+\vec{H}^0)=0 \quad \text{при} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\in S \tag{1.2}$$

$$\vec{H}^0\to 0 \quad \text{при} \quad |\vec{r}|\to\infty \tag{1.3}$$

где $\vec{n}_0$ — единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности S тела, $\vec{r}$ — радиус-вектор рассматриваемой точки.

Вследствие того, что магнитное поле не проникает в область, занимаемую оболочкой, на поверхности оболочки компоненты тензора напряжений Максвелла претерпевают разрыв. Этим разрывом обусловлено появление магнитного давления $\vec{P}_0$, определяемого формулой

$$\vec{P}_0 = \vec{n}_0 \cdot \hat{T}^0 \tag{1.4}$$

где $\hat{T}^0$—тензор напряжений Максвелла

$$T^0_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(H_i H_k - \frac{\delta_{ik}}{2}\vec{H}^2\right) \tag{1.5}$$

δ_{ik}—символ Кронекера.

В силу (1.2) из (1.4) и (1.5) для поверхностной нагрузки получается выражение [1]

$$\vec{P}_0 = -\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\vec{n}_0 \tag{1.6}$$

Под действием нагрузки $\vec{P}_0$ в оболочке устанавливается начальное невозмущенное состояние, характеризующееся вектором перемещения $\vec{u}_0$ и тензором упругих напряжений $\hat{\sigma}_0$. Исходное состояние оболочки, как обычно, определяется из линейных уравнений теории упругости при поверхностных условиях, написанных без учета деформации поверхности, ограничивающей оболочку. Тогда характеристики невозмущенного состояния будут определяться из следующих уравнений равновесия и граничных условий на поверхности оболочки:

$$\operatorname{div} \hat{\sigma}_0 = 0 \tag{1.7}$$

$$\vec{n}_0 \cdot \hat{\sigma}_0 = \begin{cases} \vec{P}_0 & \text{при} \quad \alpha_3 = h \\ 0 & \text{при} \quad \alpha_3 = -h \end{cases} \tag{1.8}$$

Характеристики возмущенного состояния $(\vec{u}_0 + \vec{u},\ \hat{\sigma}_0 + \hat{\sigma},\ \vec{P}_0 + \vec{p},\ \vec{H} + \vec{h})$ должны удовлетворять нелинейным уравнениям и краевым условиям на деформированной поверхности оболочки. Принимая возмущения малыми, эти уравнения и граничные условия аналогично работам [2—4] линеаризуются. В результате получаются следующие линейные уравнения возмущенного состояния [5]:

в области, занимаемой оболочкой

$$\operatorname{div}[\hat{\sigma} + \hat{\sigma}_0(\nabla\vec{u})^*] = 0 \tag{1.9}$$

в области $(\alpha_3 > h)$ вне тела оболочки

$$\operatorname{rot} \vec{h} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{h} = 0 \tag{1.10}$$

Решения уравнений (1.9) и (1.10) связаны следующими линеаризованными условиями на поверхностях $\alpha_3 = \pm h$ оболочки:

$$\hat{\sigma}\cdot\vec{n}_0=\begin{cases}\vec{p} & \text{при}\quad \alpha_3=h\\ 0 & \text{при}\quad \alpha_3=-h\end{cases} \tag{1.11}$$

$$\vec{n}_0\cdot[\vec{h}+\vec{H}(\nabla\vec{u})^*+\vec{u}(\nabla\vec{H})]=0 \tag{1.12}$$

Здесь

$$\hat{\sigma}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{2\nu}{1-2\nu}(\operatorname{div}\vec{u})\hat{E}+\Delta\vec{u}+(\nabla\vec{u})^*\right] \tag{1.13}$$

$$\vec{p}=\vec{n}_0\hat{T},\quad T_{ik}=\frac{1}{4\pi}\left[H_k h_i+h_k H_i-\frac{\delta_{ik}}{2}(\vec{h}\cdot\vec{H}+\vec{H}\vec{h})\right] \tag{1.14}$$

где $\hat{E}$—единичный тензор, ∇—набла-оператор Гамильтона, $(\nabla\vec{u})^*$—транспонированный тензор $\nabla\vec{u}$, $\hat{T}$—тензор напряжений Максвелла возмущенного состояния.

Отметим, что граничное условие (1.12) является следствием условия непроникновения магнитного поля в толщу оболочки.

2. Пусть для рассматриваемой оболочки справедливы гипотеза Кирхгофа-Лява и допущение Кармана относительно углов поворота $2\vec{\omega}=\operatorname{rot}\vec{u}$, то есть принимается, что справедливы следующие приближенные соотношения:

$$u_1=\left(1+\frac{\alpha_3}{R}\right)u-\frac{\alpha_3}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1},\quad u_2=\left(1+\frac{\alpha_3}{R}\right)v-\frac{\alpha_3}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2},\quad u_3=w,$$

$$\omega_1=\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2},\quad \omega_2=-\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1},\quad \omega_3=0 \tag{2.1}$$

где $u(\alpha_1,\alpha_2)$, $v(\alpha_1,\alpha_2)$, $w(\alpha_1,\alpha_2)$—искомые тангенциальные и нормальное перемещения точек срединной поверхности оболочки, u_1, u_2, u_3—перемещения произвольной точки оболочки, $A_1=R$, $A_2=R\sin\alpha_1$—коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки.

В силу (2.1) поверхностное условие (1.12) принимает вид

$$h_3^+=\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2H_1^+w)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1H_2^+w)\right] \tag{2.2}$$

где индексом «+» здесь и в дальнейшем отмечены значения соответствующих величин на поверхности оболочки $\alpha_3=h$.

Подставляя (1.13) и (2.1) в (1.9) и осредняя полученные при этом уравнения по толщине оболочки, с учетом поверхностных условий (1.11) и (2.2) получим следующую систему дифференциальных уравнений устойчивости оболочки:

$$\frac{1}{A_1}\left[\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1}-\frac{h^2}{3R^3}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\Delta+2)w\right]+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{u}{R}-\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}\right)+$$

$$+\frac{1-\nu^2}{8\pi Eh}\frac{H_1^+}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2H_1^+w)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1H_2^+w)\right]=0$$

$$\frac{1}{A_2}\left[\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_2}-\frac{h^2}{3R^2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\Delta+2)w\right]+\frac{1-\nu}{R}\left(\frac{v}{R}-\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}\right)+$$

$$+\frac{1-\nu^2}{8\pi Eh}\frac{H_3^*}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2H_3^*w)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1H_3^*w)\right]=0$$

$$\left(\frac{h^2}{3R^2}\Delta-\frac{1+\nu}{R}\right)\Theta-\frac{h^2}{3R^4}(\Delta+1-\nu)(\Delta+2)w+ \tag{2.3}$$

$$+\frac{1-\nu^2}{2Eh}\left[\frac{T_1^0}{A_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2}+\frac{T_2^0}{A_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_2^2}+\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2S^0}{A_1A_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}\right)-\frac{1}{4\pi}(H_1^*h_1^*+H_2^*h_2^*)\right]=0$$

Здесь

$$\Theta=\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2u)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1v)\right]+\frac{2w}{R}$$

$$\Delta=\frac{R^2}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)\right]$$

T_1^0, T_2^0, S^0 — усилия, характеризующие начальное невозмущенное состояние оболочки, которые определяем, решая задачу (1.7)—(1.8).

Рассматривая систему уравнений (2.3), замечаем, что она не замкнута. В нее входят неизвестные граничные значения тангенциальных составляющих индуцированного магнитного поля h_1^* и h_2^* на поверхности оболочки $\alpha_3=h$. Их определяем, решая уравнения (1.10) при условии (2.2) и условии затухания возмущений на бесконечности. Эту задачу введением потенциальной функции $\Phi(\alpha_1, \alpha_2)$ посредством

$$\vec{h}=\operatorname{grad}\Phi \tag{2.4}$$

приводим к решению следующей внешней задаче Неймана в области $\alpha_3>h$ для функции Φ:

$$\Delta_1\Phi=0, \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_3}\right|_{\alpha_3=h}=h_3^*(\alpha_1, \alpha_2) \tag{2.5}$$

Здесь h_3^* определяется формулой (2.2), а Δ_1 — трехмерный оператор Лапласа в сферической системе координат.

Решение задачи Неймана (2.5) определяется формулой Бьеркнеса [6]

$$\Phi=-\frac{R+h}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{2}{r_1}-\ln\frac{1+r_1-\gamma_1\cos\theta_0}{\gamma_1(1-\cos\theta_0)}\right]h_3^*(\xi, \eta)\sin\xi\, d\xi\, d\eta \tag{2.6}$$

где

$$r_1^2=1+\gamma_1^2-2\gamma_1\cos\theta_0, \quad \gamma_1=\frac{R+\alpha_3}{R+h}$$

$$\cos\theta_0=\cos\xi\cos\alpha_1+\sin\xi\sin\alpha_1\cos(\eta-\alpha_2) \tag{2.7}$$

Из (2.4), в силу (2.6), найдем следующие выражения для компонент индуцированного магнитного поля на поверхности оболочки

$$h_1^* = -\frac{1}{A_1}\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}, \quad h_2^* = -\frac{1}{A_2}\frac{\partial F}{\partial \alpha_2} \tag{2.8}$$

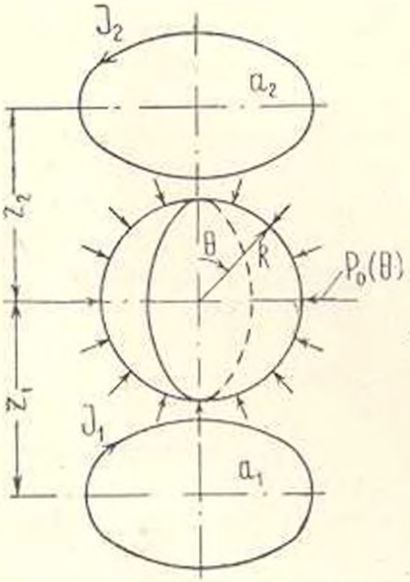
где

$$F = \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{2}{r_0} - \ln\left(1+\frac{2}{r_0}\right)\right] h_3^*(\xi, \eta)\sin\xi\, d\xi\, d\eta, \quad r_0^2 = 2(1-\cos\theta_0) \tag{2.9}$$

Подставляя (2.8) в систему (2.3) и учитывая (2.2) и (2.9), получим замкнутую двумерную систему разрешающих интегро-дифференциальных уравнений устойчивости относительно искомых функций u, v, w. Ее решения должны удовлетворять условиям непрерывности и однозначности на сфере.

3. На основе полученной системы рассмотрим задачу устойчивости сверхпроводящей сферической оболочки в неоднородном магнитном поле $\vec{H}_i$ создаваемом двумя параллельными кольцевыми постоянными токами (фиг. 1). Такая система токов может фиксировать оболочку в пространстве бесконтактно [7].

Невозмущенное магнитное поле системы сверхпроводящая оболочка-виток найдется методом изображений [1,8]. В итоге на поверхности сферы $\alpha_3 = h$ для компонент результирующего невозмущенного магнитного поля получаются выражения



Фиг. 1

$$H_2^* = 0, \quad H_3^* = 0$$

$$H_1^* = \frac{4}{Rc}\sum_{i=1}^{2}\frac{J_i a_i p_i^3 (a_i^2 + z_i^2 - R^2)}{(4Ra_i \sin\alpha_1)^{3/2}} \times$$

$$\times \int_0^{\pi/2}\frac{(1-2\sin^2 x)\,dx}{(1-p_i^2\sin^2 x)^{3/2}} \tag{3.1}$$

где

$$p_i^2 = \frac{4Ra_i \sin\alpha_1}{a_i^2 + z_i^2 + R^2 - 2R(z_i\cos\alpha_1 - a_i\sin\alpha_1)}$$

$$(c = 3 \cdot 10^{10}\ \text{см/сек})$$

Для простоты примем $p_i^2 \ll 1$, что равносильно условиям $z_i^2 + a_i^2 \gg R^2$. Тогда из (3.1) найдем

$$H_1^* = -\frac{3\pi}{c}\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{J_i a_i^2}{(a_i^2+z_i^2)^{3/2}} + \left(\sum_{i=1}^{2}\frac{5RJ_i z_i a_i^2}{(a_i^2+z_i^2)^{5/2}}\right)\cos\theta\right]\sin\theta \tag{3.2}$$

С такой точностью неравномерно распределенная поверхностная сила, действующая на оболочку в невозмущенном состоянии, определяется формулой

$$P_0(\theta)=-\frac{9\pi}{8c^2}\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{J_ia_i^2}{(a_i^2+z_i^2)^{3/2}}+\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{10RJ_iz_ia_i^2}{(a_i^2+z_i^2)^{5/2}}\right)\cos\theta\right]\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{J_ia_i^2}{(a_i^2+z_i^2)^{3/2}}\right)\sin^2\theta \tag{3.3}$$

Проекция главного вектора этих сил на вертикальную ось должна уравновешиваться силой тяжести оболочки $Q=8\pi R^2\gamma h$, где γ – удельный вес материала оболочки. Следовательно, условие бесконтактного удержания оболочки кольцевыми токами можно представить в виде

$$\left[1+\frac{J_2a_2^2}{J_1a_1^2}\left(\frac{a_1^2+z_1^2}{a_2^2+z_2^2}\right)^{3/2}\right]\left[1+\frac{z_2J_2a_2^2}{z_1J_1a_1^2}\left(\frac{a_1^2+z_1^2}{a_2^2+z_2^2}\right)^{5/2}\right]=\frac{4\gamma hc^2}{3\pi Rz_1J_1^2}\left(\frac{a_1^2+z_1^2}{a_1}\right)^4 \tag{3.4}$$

В исходную систему (2.3) входят неизвестные усилия T_1^0, T_2^0 и S^0 невозмущенного состояния. Их определяем, решая задачу (1.7)–(1.8). Принимая невозмущенное состояние оболочки безмоментным и осредняя уравнение (1.7) по толщине оболочки, с учетом (1.8) и (3.3) для определения указанных неизвестных усилий получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2T_1^0)-\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}T_2^0+A_1\frac{\partial S^0}{\partial\alpha_2}=2\gamma hA_2^2\\&\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1T_2^0)+\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2S^0)+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}S^0=0\\&\frac{T_1^0+T_2^0}{R}=\frac{2\gamma h}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}+P_0(\alpha_1)\end{aligned} \tag{3.5}$$

Решение уравнений (3.5) с учетом (3.3) и (3.4) имеет вид

$$\begin{aligned}&S^0=0\\&T_1^0=-q_0R\left[\frac{A_2^2}{A_1^2}+\frac{8\beta}{3A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(\frac{3A_2^2}{A_1^2}-1\right)\right]\\&T_2^0=-q_0R\left[\frac{3A_2^2}{A_1^2}+\frac{8\beta}{3A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(\frac{12A_2^2}{A_1^2}-1\right)\right]\end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}&q_0=\frac{9\pi J_1^2a_1^4}{32c^2(a_1^2+z_1^2)^3}\left[1+\frac{J_2a_2^2}{J_1a_1^2}\left(\frac{a_1^2+z_1^2}{a_2^2+z_2^2}\right)^{3/2}\right]^2\\&\beta=\frac{z_1R}{a_1^2+z_1^2}\left[1+\frac{J_2z_2a_2^2}{J_1z_1a_1^2}\left(\frac{a_1^2+z_1^2}{a_2^2+z_2^2}\right)^{5/2}\right]\left[1+\frac{J_2a_2^2}{J_1a_1^2}\left(\frac{a_1^2+z_1^2}{a_2^2+z_2^2}\right)^{3/2}\right]^{-1}\end{aligned} \tag{3.7}$$

Подстановкой (3.6), (3.1) в систему (2.3) и исключением неизвестных u и v рассматриваемая задача устойчивости сводится к исследованию следующего интегро-дифференциального уравнения относительно нормального перемещения w

$$[\lambda^2(\Delta+1)^2+1](\Delta+2)w+\frac{3q_0R}{2Eh}(\Delta+1-\nu)\left\{\left[\left(1+\frac{32\beta}{3A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right)\frac{A_2^2}{A_1^2}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{8\beta}{9A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right]\Delta w-\frac{2A_2^2}{3A_1^2}\left(1+\frac{12\beta}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2}-\frac{8A_2}{3A_1}\left(1+\frac{5\beta}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right)\frac{\partial F_1}{\partial\alpha_1}\Big\}+$$

$$+\frac{4q_0R}{Eh}\left(\frac{h^2}{3R^2}\Delta-1-\nu\right)\left\{\left[\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}+10\beta\left(1-\frac{13A_2^2}{10A_1^2}\right)\right]\frac{5A_2}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}+\frac{A_2^2}{A_1^2}\left(1+\right.\right. \tag{3.8}$$

$$\left.+\frac{10\beta}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2}+4\left[1-\frac{3A_2^2}{2A_1^2}+\frac{10\beta}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(1-\frac{5A_2^2}{2A_1^2}\right)\right]w\Big\}=0$$

где

$$F_1=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{2}{r_0}-\ln\left(1+\frac{2}{r_0}\right)\right]\frac{\partial}{\partial\xi}[(1+5\beta\cos\xi)w(\xi,\eta)\sin^2\xi]\,d\xi\,d\eta$$

$$\lambda^2=\frac{h^2}{3R^2(1-\nu^2)}$$

4. Решение уравнения (3.10) представим в виде разложения

$$w=\left(\sum_{n=i}^{\infty}w_nP_{nk}(\cos\alpha_1)\right)\cos k\alpha_2,\quad (k\leqslant n,\quad i=2,3\ldots) \tag{4.1}$$

где w_n — неизвестные коэффициенты, $P_{nk}(x)$ — присоединенные функции Лежандра.

Подставляя (4.1) в уравнение (3.8) и используя обычный процесс ортогонализации, после некоторых преобразований приходим к следующей бесконечной системе алгебраических уравнений относительно w_n

$$\Omega_m^2 w_m-\frac{q_0}{\rho Rh}\sum_{n=i}^{\infty}b_{mn}^{(k)}w_n=0,\quad (m=i,\ i+1,\ i+2,\ \ldots,\ k\leqslant n) \tag{4.2}$$

где

$$\Omega_m^2=\frac{E}{\rho R^2}(\lambda_m-2)\frac{1+\lambda^2(\lambda_m-1)^2}{\lambda_m-1+\nu};\quad \lambda_m=(m+1)m$$

$$b_{nm}^{(k)}=A_{kn}\delta_{n,m}+A_{kn}^{(2)}\delta_{n,m-2}+A_{kn}^{(3)}\delta_{n,m+2}+4\beta[A_{kn}^{(1)}\delta_{n,m-3}+ \tag{4.3}$$

$$+A_{kn}^{(3)}\delta_{n,m-1}+A_{kn}^{(4)}\delta_{n,m+1}+A_{kn}^{(5)}\delta_{n,m+3}]$$

В (4.3) $\delta_{i,j}$ — символы Кронекера, Ω_m — частота собственных колебаний оболочки в вакууме при отсутствии магнитного поля

$$A_{kn}^{(1)}=-\frac{(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}\left[n^2-6n-15+\frac{5(1+\nu)(2n^2+13n+20)}{\lambda_n-1+\nu}\right]$$

$$A_{kn}^{(2)}=-\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2(2n+1)(2n+3)}\left[n^2-5n-8+\frac{8(1+\nu)(n^2+5n+6)}{\lambda_n-1+\nu}\right]$$

$$A_{kn}^{(3)} = -\frac{n-k+1}{(2n+3)(2n+5)(4n^2-1)} \left\{ \frac{1}{3\lambda_n (2n+1)} [4n^8+180n^7+866n^6+1525n^5+ \right.$$

$$+1251n^4+305n^3-378n^2-270n-15k^2(12n^6+68n^5+109n^4-3n^3-$$

$$-91n^2-29n+15)] - \frac{5(1+\nu)}{\lambda_n-1+\nu} [4n^5+46n^4+130n^3+126n^2-30n-42-$$

$$\left. -2k^2(2n^3+15n^2-20n-29)] \right\} \tag{4.4}$$

$$A_{kn}^{(4)} = -\frac{n+k}{(4n^2-1)(4n^2-9)} \left\{ \frac{1}{3\lambda_{n-1}(2n+1)} [4n^8+84n^7-221n^6+63n^5+ \right.$$

$$+391n^4-669n^3+276n^2+72n-3k^2(60n^6-20n^5-199n^4-$$

$$-51n^3+262n^2+20n+3)] - \frac{5(1+\nu)}{\lambda_n-1+\nu} [4n^5-26n^4-4n^3+58n^2-$$

$$\left. -26n-6-2k^2(2n^3-9n^2-34n+6)] \right\}$$

$$A_{kn}^{(5)} = -\frac{(n+k)(n+k-1)}{2(4n^2-1)} \left[n^2-9n+6+\frac{8(1+\nu)(n^2-3n-10)}{\lambda_n-1+\nu} \right]$$

$$A_{kn}^{(6)} = -\frac{(n+k)(n+k-1)(n+k-2)}{(2n-3)(4n^2-1)} \left[n^2-12n+9+\frac{5(1+\nu)(2n^2-9n+9)}{\lambda_n-1+\nu} \right]$$

$$A_{kn} = \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} \left\{ \frac{1}{n(2n+1)} [2n^6-11n^5-20n^4-7n^3-8n^2+8n+k^2(10n^4+ \right.$$

$$\left. +31n^3+n^2-30n+12)] + \frac{4(1+\nu)}{\lambda_n-1+\nu} [2n^4+4n^3-2n-k^2(2n^2+2n-3)] \right\}$$

Условием существования нетривиального решения системы (4.2) является равенство нулю следующего бесконечного определителя:

$$|\delta_{mn} + c_{mn}| = 0 \tag{4.5}$$

где

$$c_{mn} = -q \frac{b_{mn}^{(k)}}{\Omega_m \Omega_n}, \quad q = \frac{q_0}{\rho R h}$$

В силу (4.3) и (4.4) легко заметить, что бесконечный определитель, входящий в уравнение (4.5), относится к классу сходящихся (нормальных) определителей.

Из уравнения (4.5) определяем критические значения кольцевых токов, при которых оболочка теряет статическую устойчивость. Это уравнение в первом приближении ($n = m = i$) имеет вид

$$\Omega_i^2 - q b_{ii}^{(k)} = 0 \tag{4.6}$$

Для второго приближения получается следующее уравнение:

$$[\Omega_i^2 - q b_{ii}^{(k)}][\Omega_{i+1}^2 - q b_{i+1,i+1}^{(k)}] + q^2 b_{i,i+1}^{(k)} \cdot b_{i+1,i}^{(k)} = 0 \tag{4.7}$$

Уравнения (4.6) или (4.7) необходимо рассматривать совместно с уравнением (3.4), представляющим собой условие бесконтактного удержания оболочки. Из (3.4) и (4.6) в первом приближении получается следующая система алгебраических уравнений относительно критических значений J_1^* и J_2^* кольцевых токов

$$a_1^2(a_2^2+z_2^2)^{3/2}J_1^*+a_2^2(a_1^2+z_1^2)^{3/2}J_2^*=\frac{4c}{3}\sqrt{\frac{2Eh}{\pi R}}\left[(a_1^2+z_1^2)(a_2^2+z_2^2)\right]^{3/2}B_{ik}$$
$$z_1a_1^2(a_2^2+z_2^2)^{5/2}J_1^*+z_2a_2^2(a_1^2+z_1^2)^{5/2}J_2^*=\frac{\gamma c}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{h}{ER}}\frac{\left[(a_1^2+z_1^2)(a_2^2+z_2^2)\right]^{5/2}}{B_{ik}} \tag{4.8}$$

где

$$B_{ik}^2=\frac{(\lambda_i-2)\left[1+\nu^2(\lambda_i-1)^2\right]}{(\lambda_i-1+\nu)A_{ki}} \tag{4.9}$$

Из (4.8) в частном случае, когда $a_1=a_2=a$, $z_1=|z_2|=z$, для критических значений получаются следующие формулы:

$$\frac{J_1^*}{c}=\frac{2B_{ik}}{3a^2}\sqrt{\frac{2Eh}{\pi R}}\left[(a^2+z^2)^{3/2}+\frac{3\gamma(a^2+z^2)^{5/2}}{8EzB_{ik}^2}\right]$$
$$\frac{J_2^*}{c}=\frac{2B_{ik}}{3a^2}\sqrt{\frac{2Eh}{\pi R}}\left[(a^2+z^2)^{3/2}-\frac{3\gamma(a^2+z^2)^{5/2}}{8EzB_{ik}^2}\right] \tag{4.10}$$

Минимум функции $J_1^*(i, k)$, как видно из (4.10), достигается при

$$B_{ik}^2=\frac{3\gamma(a^2+z^2)}{8Ez}=\min_{(i,k)}B_{ik}^2=b^2 \tag{4.11}$$

и составляет

$$\min\frac{J_1^*}{c}=\frac{4(a^2+z^2)^2}{3a^2\sqrt{z}}\sqrt{\frac{3\gamma h}{4\pi R}} \tag{4.12}$$

Легко заметить, что при условии (4.11) имеет место $J_2^*=0$ и $z^2\ll a^2$. В силу этого из (4.11) и (4.12) окончательно имеем

$$\min\frac{J_1^*}{c}=\frac{4ab}{3}\sqrt{\frac{2hE}{\pi R}},\qquad \min J_2^*=0$$

где величина b, согласно (4.11), является минимальным значением функции B_{ik} по волновым числам i и k.

Таблица 1

h/R	i	k	b	$\min\frac{J_1^*}{a}\left(10^4\ \frac{кА}{м}\right)$
1/100	13	13	0,9037	3,9651
1/125	14	14	0,8067	3,1646
1/200	18	18	0,6340	1,9659
1/250	21	21	0,5659	1,5691
1/500	29	29	0,3978	0,7797
1/1000	41	41	0,2802	0,3887

В табл. 1 для оболочки, изготовленной из диэлектрического материала КАСТ-В и покрытой тонким сверхпроводящим слоем, приведены значения J/a при различных отношениях h/R. Для выбранного материала $E=1{,}7\cdot10^{10}$ н/м², $\nu=0{,}15$.

Авторы благодарны профессору М. Н. Киселеву за полезное обсуждение.

ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՀՈՍԱՆՔՆԵՐԻ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԳԵՐՀԱՂՈՐԴԻՉ ՍՖԵՐԻԿ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, Պ. Հ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում հիմնվելով մագնիսաառաձգականության ոչ գծային հավասարումների և եզրային պայմանների վրա, արտածված են մագնիսական դաշտում գտնվող գերհաղորդիչ սֆերիկ թաղանթների գծայնացված հավասարումները և համապատասխան եզրային պայմանները։ Դիտարկված է գերհաղորդիչ սֆերիկ թաղանթի կայունության խնդիրը երկու զուգահեռ շրջանային հոսանքներով ստեղծված անհամասեռ մագնիսական դաշտում։ Որոշված են հոսանքների կրիտիկական այն արժեքները, որոնց դեպքում թաղանթը կորցնում է ստատիկ կայունությունը։

STABILITY OF A SUPERCONDUCTING SPHERICAL SHELL IN THE MAGNETIC FIELD OF CIRCULAR CURRENTS

G. E. BAGDASARIAN, P. A. MKRTCHIAN

Summary

In the paper based on non-lineary equations and boundary conditions of magnetoelasticity, linearised equations and corresponding boundary conditions for superconducting spherical shells in a magnetic field are deduced. The stability problem for the superconducting spherical shell in a non-uniform magnetic field is considered, which arises from two parallel circular currents. The critical values of the current are determined beyond which the shell is statically unstable.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д.* и *Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат. 1957. 532 с.
2. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.

3. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат, 1948. 212 с.
4. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
5. *Багдасарян Г. Е., Мкртчян П. А.* Устойчивость сверхпроводящей цилиндрической оболочки в магнитном поле.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1981, *34*, № 6, с. 36—47.
6. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
7. *Белоозеров В. Н.* Удержание сверхпроводящего шара системой круговых токов. —ЖТФ, 1966, *36*, вып. 5, с. 852—859.
8. *Левин М. Л.* О решении одной задачи квазистационарной электродинамики методом изображений.—ЖТФ, 1964, *34*, вып. 3, с. 393—398.

Институт механики АН Армянской ССР
Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
17.VI. 1983

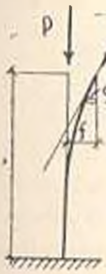
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVIII, № 5, 1985 Механика

УДК 624.046.3

КОНСОЛЬНЫЙ УПРУГИЙ СТЕРЖЕНЬ, НАГРУЖЕННЫЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛОЙ

РЖАНИЦЫН А. Р.

1. Стержень, нагруженный силой, всегда направленной по касательной к оси стержня на его свободном конце (фиг. 1), представляет собой неконсервативную систему. Действительно, работа, производимая внешней силой при переходе стержня из начального вертикального положения в искривленное, характеризуемое прогибом f и углом поворота φ его верхнего конца, будет различной при различных путях деформирования. Например, если сначала вызвать поступательное перемещение верхнего конца на расстояние f по горизонтали без поворота, а затем повернуть этот конец на угол φ (фиг. 2а), то работа следящей силы на этих перемещениях будет равна нулю. Если же сначала произвести поворот φ, а затем поступательное смещение f, то на втором этапе деформирования следящая сила произведет работу $P\sin\varphi f$ (фиг. 2б). Таким образом, работа внешней силы здесь зависит от пути деформирования и на замкнутом цикле может приобрести отличное от нуля значение.

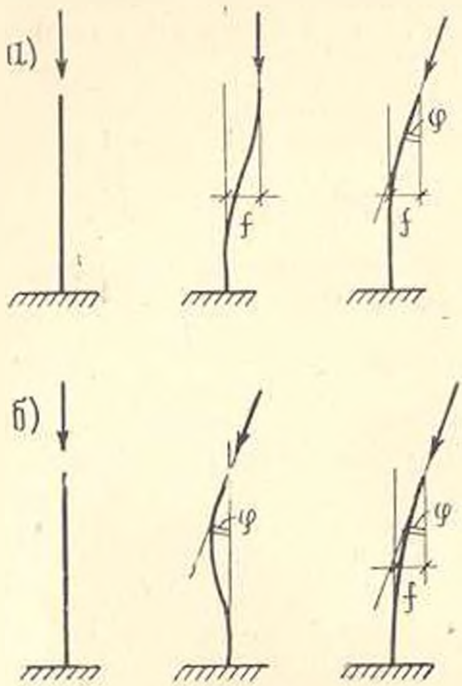


Фиг. 1

Поскольку для неконсервативных систем отсутствует понятие потенциальной энергии, то нельзя исходить из условия ее минимума, выражающегося в виде уравнений равновесия. Для следящей силы уравнение равновесия вообще невозможно составить, так как внешняя сила, создавая положительный внешний момент, не может уравновесить отрицательный момент внутренних сил (фиг. 1). Формальное решение задачи изгиба стержня путем приравнивания нулю определителя системы уравнений, выражающих граничные условия через произвольные постоянные общего интеграла дифференциального уравнения изгиба, приводит здесь к абсурдному результату о невозможности потери устойчивости стержня при любой его длине.

Для правильного решения задачи следует ввести силы инерции или силы диссипации (поглощения энергии). При этом решение будет зависеть от условий распределения масс и вязких сопротивлений по длине стержня.

2. Возьмем сначала наиболее простую задачу о поведении уп-



Фиг. 2

Фиг. 3

ругого консольного стержня, нагруженного следящей силой и имеющего на конце невесомое тело, движению которого оказывает сопротивление некоторая вязкая среда с усилием, пропорциональным скорости (фиг. 3)

$$Q=-n\dot{y}(l) \tag{2.1}$$

Тогда граничные условия на верхнем конце стержня будут:

$$y''(l)=0;\quad -EJy'''(l)=-n\dot{y}(l) \tag{2.2}$$

Будем искать решение в форме

$$y=v(x)\exp(\lambda t) \tag{2.3}$$

при этом граничные условия (2.2) после сокращения на $\exp(\lambda t)$ получают вид

$$v''(l)=0;\quad EJv'''(l)=n\lambda v(l) \tag{2.4}$$

Подставляя в них выражения общего интеграла уравнения изогнутой оси стержня и его производных

$$y=C_1\sin kx+C_2\cos kx+C_3x+C_4;\quad y'=kC_1\cos kx-kC_2\sin kx+C_3 \tag{2.5}$$

$$y''=-k^2C_1\sin kx-k^2C_2\cos kx;\quad y'''=-k^3C_1\cos kx+k^3C_2\sin kx;\quad k=\sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

С учетом (2.3) получим, обозначая $kl=\nu$:

$$C_1\sin\nu + C_2\cos\nu = 0;\quad EJk^3[-C_1\cos\nu + C_2\sin\nu] - n\lambda[C_1(\sin\nu - \nu) + C_2(\cos\nu - 1)] = 0$$

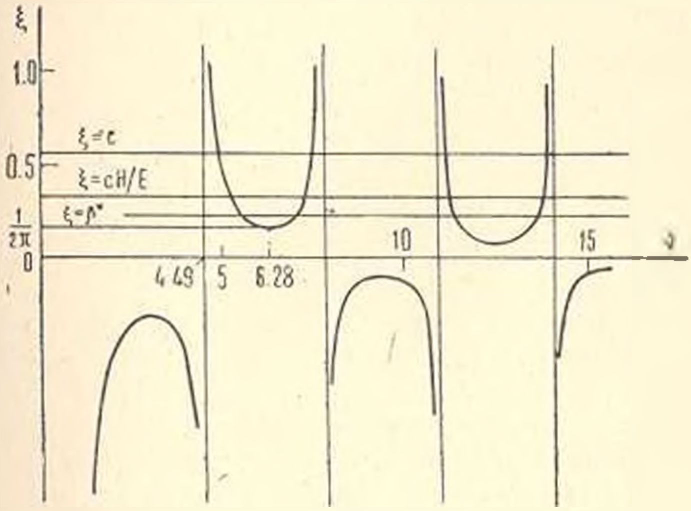
или, поскольку $EJk^3 = Pk$

$$C_1\sin\nu + C_2\cos\nu = 0;\quad C_1(-Pk\cos\nu - n\lambda\sin\nu + n\lambda\nu) + C_2(Pk\sin\nu - n\lambda\cos\nu + n\lambda) = 0$$

Приравняв нулю определитель этой системы уравнений, будем иметь

$$Pk + n\lambda(\sin\nu - \nu\cos\nu) = 0;\qquad \lambda = \frac{Pk}{n(\nu\cos\nu - \sin\nu)} \tag{2.6}$$

График изменения λ в функции от ν показан на фиг. 4.



Фиг. 4

При малых ν (то есть малых l при заданных P и EJ) λ отрицательно, что означает устойчивость вертикального положения стержня.

При $\nu = 0$ $\lambda = -\infty$, при $\nu = \dfrac{\pi}{2}$ $\lambda = -\dfrac{Pk}{n}$. Максимум λ достигается при

$$\nu\sin\nu = 0 \tag{2.7}$$

то есть при $\nu = \pi$; при этом $\lambda = -Pk/(n\pi)$.

Дальнейшее увеличение ν приводит к увеличению устойчивости, но при

$$\nu\cos\nu = \sin\nu;\quad \nu = \operatorname{tg}\nu \tag{2.8}$$

то есть при $\nu = 4{,}4934$ происходит скачкообразный переход через минус бесконечность, что означает мгновенное выпучивание стержня. Если это состояние стержня удастся каким-либо способом перейти, то при больших длинах прогибы будут возрастать во времени по экспоненциальному закону. С увеличением параметра длины до значения $\nu = 2\pi$, являющегося следующим корнем уравнения (2.7), интенсивность возрастания прогибов будет снижаться, а затем снова повышаться до значения $\nu = 7{,}7253$, являющегося вторым значением корня уравнения (2.8), когда произойдет новый перескок уже в область отрицательных λ и устойчивых движений стержня. Таким образом, при переходе через каждый новый корень уравнения (2.8) будет происходить скачкообразная смена устойчивых движений стержня на неустойчивые или наоборот. Как видим, картина потери устойчивости стержня здесь резко отличается от того, что имеет место в консервативных системах.

3. Предположим теперь, что вместо вязкого сопротивления на конце стержня имеется сосредоточенная масса m, которая создает инерционную силу $-m\ddot{y}(l)$. При этом, положив

$$y=v(x)\sin\omega t \tag{3.1}$$

получим на верхнем конце граничные условия

$$v''(l)=0; \quad EJv'''(l)=-\omega^2 mv(l)$$

Проведенное выше решение здесь остается в силе, но с заменой n на $-m\omega^2$, то есть будет

$$\omega^2=\frac{Pk}{m(\sin\nu-\nu\cos\nu)} \tag{3.2}$$

В зонах устойчивого движения квадрат частоты ω^2 будет положительным, а сама частота — действительной. В зонах неустойчивости ω^2 отрицательно, а частота — мнимая, что соответствует апериодическому движению по экспоненциальному закону. При ν, являющихся корнями уравнения (2.8), происходит скачкообразный переход от устойчивых движений с бесконечно большой частотой к неустойчивым с бесконечной скоростью выпучивания или наоборот.

При наличии и массы и сопротивления, задаваясь движением в форме (2.3), получим в (2.4) вместо $n\lambda$ величину $n\lambda+m\lambda^2$ и вместо (2.6) уравнение

$$n\lambda+m\lambda^2=\frac{Pk}{\nu\cos\nu-\sin\nu}$$

Обозначая

$$\frac{Pk}{\nu\cos\nu-\sin\nu}=\xi \tag{3.3}$$

получим

$$\lambda=\frac{-n\pm\sqrt{n^2+4m\xi}}{2m} \tag{3.4}$$

При малых длинах стержня ξ отрицательно и оба значения λ (3.4) тоже отрицательны, что означает устойчивые движения по затухающему экспоненциальному закону. При большой массе m значения λ могут стать комплексными, но действительная их часть, равная $-n/(2m)$, остается отрицательной. Движение при этом происходит по закону затухающих колебаний. После перехода ν через величину 4,4934 один из корней λ становится положительным, что соответствует неустойчивому движению по закону возрастающих колебаний. В данном случае мы имеем ту же картину, что и при отсутствии массы, но движения могут происходить не только по экспоненциальному закону, но и по закону затухающих или возрастающих колебаний.

Критические силы P или длины l, соответствующие корням ν уравнения (2.8), разграничивают области устойчивости и неустойчивости, однако переход через них вызывает не плавное, а скачкообразное изменение характера движения от абсолютной устойчивости к мгновенному выпучиванию и наоборот. Поэтому такой переход должен сопровождаться разрушением стержня, если на время его не будут введены дополнительные связи, изменяющие расчетную схему стержня. Как видно из (3.3), критические силы не зависят от величины массы m и сопротивления n на конце стержня.

4. Примем теперь вместо простого закона вязкости (2.1) более общую наследственную зависимость упруго-ползучей среды

$$Q=-EJy'''(l)=c\left[y(l)-\int\limits_{-\infty}^{t}R(t-\tau)y(l,\tau)d\tau\right] \tag{4.1}$$

где c—мгновенный коэффициент упругости, а $R(t-\tau)$—резольвента ядра ползучести, представляющая собой функцию разности рассматриваемого момента времени t и момента τ—элементарного перемещения верхнего конца стержня $y(\tau)d\tau$.

После подстановки в (4.1) формы движения (2.3) получим:

$$EJv'''(l)e^{\lambda t}=c\left[v(l)e^{\lambda t}-\int\limits_{-\infty}^{t}R(t-\tau)\cdot v(l)e^{\lambda\tau}d\tau\right]=$$

$$=c\left[v(l)e^{\lambda t}-\int\limits_{0}^{\infty}R(\theta)\cdot v(l)e^{-\lambda(\theta-t)}d\theta\right]=c\left[v(l)e^{\lambda t}-v(l)e^{\lambda t}\int\limits_{0}^{\infty}R(\theta)e^{-\lambda\theta}d\theta\right]$$

или

$$EJv'''(l)=c[v(l)-R^{*}(\lambda)v(l)] \tag{4.2}$$

где $R^{*}(\lambda)$—изображение Лапласа резольвенты $R(\theta)$; $\theta=t-\tau$.

Выражение (4.2) отличается от второго условия (2.4) только тем, что в нем произведена замена $n\lambda$ на $c[1-R^{*}(\lambda)]$. Поэтому можно сразу написать вместо (2.6)

$$c[1-R^{*}(\lambda)]=\xi \tag{4.3}$$

где

$$\xi=\frac{Pk}{\nu\cos\nu-\sin\nu}$$

Задаваясь значениями $\nu=l\sqrt{P/EJ}$, из графика на фиг. 4 или непосредственным вычислением найдем ξ и затем, решив уравнение (4.3), величину λ, знак которой укажет на то, будет ли стержень устойчивым ($\lambda<0$) или неустойчивым ($\lambda>0$).

Для экспоненциального ядра ползучести резольвента имеет вид [1]

$$R(\theta) = \frac{E-H}{\gamma H}\exp(-\theta/\gamma)$$

где E—мгновенный, H—длительный модули упругости, γ—время релаксации, $\theta=t-\tau$, а ее изображение —

$$R^*(\lambda) = \frac{E-H}{H\lambda\gamma+E}$$

Уравнение (4.3) здесь принимает вид

$$\frac{\xi}{c} = 1-\frac{E-H}{H\lambda\gamma+E} = \frac{H\lambda\gamma+H}{H\lambda\gamma+E}$$

откуда

$$H\lambda\gamma = \frac{E\xi-Hc}{c-\xi}$$

Условия отрицательности λ будут

$$\xi<Hc/E;\ \xi<c \quad \text{или} \quad \xi>Hc/E;\ \xi>c$$

Поскольку всегда $H<E$, эти условия можно записать в виде

$$\xi<Hc/E \quad \text{или} \quad \xi>c$$

Проведем на графике зависимости ξ от ν две горизонтали: $\xi=Hc/E$ и $\xi=c$ (фиг. 4). Тогда пересечения этих горизонталей с кривой $\xi(\nu)$ ограничат области неустойчивости, которые возможны лишь в тех интервалах, где функция $\xi(\nu)$ положительна.

Для сингулярного ядра вида

$$K(\theta) = \frac{A\exp(-\beta\theta)}{T^q\theta^{1-q}};\quad (0<q<1)$$

где A, T и q—некоторые положительные константы, имеем изображение [1]

$$K^*(\lambda) = \frac{A\Gamma(q)}{[(\lambda+\beta)T]^q}$$

где $\Gamma(q)$—гамма функция q. Изображение резольвенты этого ядра будет

$$R^*(\lambda) = \frac{K^*(\lambda)}{1+K^*(\lambda)} = \frac{A\Gamma(q)}{[(\lambda+\beta)T]^q+A\Gamma(q)}$$

Далее из уравнения (4.3) получаем

$$\frac{\xi}{c} = 1-\frac{A\Gamma(q)}{[(\lambda+\beta)T]^q+A\Gamma(q)} = \frac{[(\lambda+\beta)T]^q}{[(\lambda+\beta)T]^q+A\Gamma(q)}$$

и

$$\frac{c}{\xi} = 1+\frac{A\Gamma(q)}{[(\lambda+\beta)T]^q}$$

Отсюда следует

$$[(\lambda+\beta)T]^q=\frac{A\Gamma(q)}{c/\xi-1};\quad \lambda=\frac{1}{T}\sqrt[q]{\frac{A\Gamma(q)\xi}{c-\xi}}-\beta \tag{4.4}$$

λ будет отрицательным, если

$$\frac{A\Gamma(q)\xi}{c-\xi}<(\beta T)^q$$

При $\xi<c$

$$A\Gamma(q)\xi<(c-\xi)(\beta T)^q;\quad [A\Gamma(q)+(\beta T)^q]\xi<c(\beta T)^q;\quad \xi<\frac{c(\beta T)^q}{A\Gamma(q)+(\beta T)^q} \tag{4.5}$$

При $\xi>c$ знак неравенства (4.4) меняется и решающим будет $\xi>c$. В интервале, где $\frac{c(\beta T)^q}{A\Gamma(q)+(\beta T)^q}<\xi<c$, движение стержня неустойчиво.

Из (4.4) следует, что при $\xi=c$ λ меняет знак, переходя через бесконечность, а при

$$A\Gamma(q)\xi-(\beta T)^q(c-\xi)=0;\quad \xi=\frac{(\beta T)^q\cdot c}{A\Gamma(q)+(\beta T)^q}$$

плавно переходит через нуль. Таким образом, здесь, кроме описанных выше критических состояний мгновенного перехода к неустойчивости или к устойчивости, появляются обычные критические состояния, соответствующие отсутствию движения ($\lambda=0$).

Если на конце консоли имеется также масса m, то условие (4.1) получит вид:

$$Q=-EJy'''(l)=c\left|y(l)-\int_{-\infty}^{t}R(t-\tau)y(l,\tau)d\tau\right|+m\ddot{y}$$

а условие (4.2) —

$$EJv'''(l)=cv(l)[1-R^*(\lambda)]+m\lambda^2$$

Уравнение (4.3) при этом несколько усложнится и запишется в виде

$$c[1-R^*(\lambda)]+m\lambda^2=\xi$$

5. Возьмем теперь задачу об устойчивости стержня, на конце которого имеется безынерционное тело, создающее сопротивления вязкой среды и поступательному смещению $y(l)$ и повороту $y'(l)$, пропорциональные соответствующим скоростям $\dot{y}(l)$ и $\dot{y}'(l)$. При этом на верхнем конце стержня будут следующие граничные условия:

$$EJy''(l)+g\dot{y}'(l)=0;\quad EJy'''(l)-n\dot{y}(l)=0 \tag{5.1}$$

где n и g—коэффициенты пропорциональности вязкого сопротивления, зависящие от формы и размеров безынерционного тела.

С учетом (2.3) получаем

$$EJv''(l)+g\lambda v'(l)=0;\quad EJv'''(l)-n\lambda v(l)=0$$

Отсюда следует:

$$EJ(-k^2C_1\sin\nu-k^2C_2\cos\nu)+g\lambda[kC_1(\cos\nu-1)+kC_2\sin\nu]=0$$

$$EJ(-k^3C_1\cos\nu+k^3C_2\sin\nu)-n\lambda[C_1(\sin\nu-\nu)+C_2(\cos\nu-1)]=0$$

Определитель этой системы уравнений, в которой неизвестными являются C_1 и C_2, приравниваем нулю.

$$\begin{vmatrix} EJk\sin\nu + g\lambda(1-\cos\nu); & EJk\cos\nu - g\lambda\sin\nu \\ -EJk^3\cos\nu + n\lambda(\nu-\sin\nu); & EJk^3\sin\nu + n\lambda(1-\cos\nu) \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая этот определитель, получаем уравнение

$$E^2J^2k^4 + EJkn\lambda(\sin\nu - \nu\cos\nu) + EJk^3g\lambda\sin\nu + gn\lambda^2(2-2\cos\nu-\nu\sin\nu) = 0 \qquad (5.2)$$

или

$$\frac{1}{\lambda^2} + \left[\frac{gk}{P}\sin\nu + \frac{n}{kP}(\sin\nu - \nu\cos\nu)\right]\frac{1}{\lambda} + \frac{gn}{P^2}(2-2\cos\nu-\nu\sin\nu) = 0$$

откуда

$$\frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{2P}\Bigg\{gk\sin\nu + \frac{n}{k}(\sin\nu-\nu\cos\nu) \pm$$

$$\pm\sqrt{\left[gk\sin\nu + \frac{n}{k}(\sin\nu-\nu\cos\nu)\right]^2 - 4ng(2-2\cos\nu-\nu\sin\nu)}\Bigg\} \qquad (5.3)$$

Значение $1/\lambda$ может быть действительным, положительным или отрицательным и комплексным с положительной или отрицательной действительной частью; в особых случаях оно может быть мнимым. При переходе к обратной величине λ знак действительной части комплексного числа сохраняется согласно формуле

$$\frac{1}{\alpha \pm \beta i} = \frac{\alpha \mp \beta i}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Отрицательная действительная часть соответствует зоне устойчивости, положительная—неустойчивости. Действительные корни соответствуют движению по экспоненциальному закону, комплексные—затухающим или нарастающим колебаниям. Переход действительных значений $1/\lambda$ через нуль (то есть λ—через бесконечность) соответствует скачкообразным переходам от устойчивых к неустойчивым движениям, как было описано выше. Переход действительной части комплексного корня λ через нуль соответствует плавному переходу от затухающих колебаний к нарастающим или наоборот. При чисто мнимых корнях стержень совершает гармонические колебания.

При $g=0$ уравнение (5.3) приводит к формуле (2.6), а при $n=0$ — к формуле

$$\lambda = -\frac{P}{gk\sin\nu}$$

Последняя формула дает критические состояния стержня при $\nu=\pi, 2\pi \ldots$

Сопротивление среды можно заменить инерционным сопротивлением массы, помещенной на конце стержня; при этом следует вместо λn поставить $-m\omega^2$ (где m—масса, ω—частота колебаний), а вместо λg взять $-I\omega^2$ (где I—момент инерции массы при ее повороте вокруг конца стержня). Тогда получаем

$$\frac{1}{\omega^2}=\frac{1}{2P}\left\{lk\sin\nu+\frac{m}{k}(\sin\nu-\nu\cos\nu)\pm\right.$$

$$\left.\pm\sqrt{\left[lk\sin\nu+\frac{\nu m}{k}(\sin\nu-\nu\cos\nu)\right]^2-4m(2-2\cos\nu-\nu\sin\nu)}\right\}$$

Здесь положительная действительная часть ω^2 соответствует устойчивому колебательному движению, отрицательная действительная часть — неустойчивому колебательному или, при отсутствии мнимой части, апериодическому движению по экспоненциальному закону. Наконец, для упруго-наследственной среды величины m и g надо заменить на $c_1[1-R_1^*(\lambda)]$ и $c_2[1-R_2^*(\lambda)]$, где c_1 и c_2 — мгновенные упругие модули при поступательном смещении и повороте конца стержня, а $R_1^*(\lambda)$ и $R_2^*(\lambda)$ — соответствующие им изображения резольвент ядер ползучести.

6. Рассмотренные задачи можно обобщить на случаи иных дифференциальных уравнений изгиба стержня. Так, например, можно рассмотреть стержень на упругом основании с одним или двумя коэффициентами постели, нагруженный на свободном конце следящей сжимающей силой, учесть влияние сдвигов в тонкой стенке стержня двутаврового сечения, учесть силы инерции распределенной по длине стержня массы и т. д. Во всех этих случаях дифференциальное уравнение оси стержня имеет вид

$$y^{IV}+ay''+by=0 \tag{6.1}$$

а его общее решение —

$$y=C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x)+C_3Y_3(x)+C_4Y_4(x)$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 — произвольные постоянные.

Комбинируя частные решения $Y_i(x)$, можно общее решение уравнения (6.1) представить в виде

$$y=y_0U_0(x)+y_0'U_1(x)+y_0''U_2(x)+y_0'''U_3(x)$$

где y_0, y_0', y_0'' и y_0''' — значения функции y и ее производных в начальной точке оси стержня, то есть при $x=0$. $U_i(x)$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ — так называемые, функции Коши, обладающие тем свойством, что при $x=0$ все их производные, кроме i-й, обращаются в нуль, а i-я производная равна единице (нулевой производной считается сама функция).

Для консольного стержня, жестко закрепленного в точке $x=0$, $y_0=y_0'=0$ и

$$y=y_0''U_2(x)+y_0'''U_3(x)$$

Взяв условия на верхнем конце стержня в виде (2.4), получим

$$y_0''U_2''(l)+y_0'''U_3''(l)=0$$

$$EJ[y_0''U_2'''(l)+y_0'''U_3'''(l)]-m[y_0''U_2(l)+y_0'''U_3(l)]=0$$

или

$$y_0''U_2''+y_0'''U_3''=0$$

$$y_0''(EJU_2'''-mU_2)+y_0'''(EJU_3'''-mU_3)=0 \tag{6.2}$$

(аргумент l в функциях $U_i(l)$ для упрощения записей опускаем).

Приравняем нулю определитель системы уравнений (6.2)

$$EJ(U_2'U_3''' - U_2'''U_3') - n\lambda(U_2'U_3 - U_2U_3') = 0$$

и получим

$$\frac{EJ}{n\lambda} = \frac{U_2'U_3 - U_2U_3'}{U_2'U_3''' - U_2'''U_3'} \tag{6.3}$$

Подобным же образом можно рассмотреть случай вязкого сопротивления повороту конца стержня. При этом получаем

$$v'''(l) = 0;\ EJv''(l) + g\lambda v'(l) = 0;\quad y_0'U_2''' + y_0'''U_3''' = 0$$

$$EJ(y_0'U_2'' + y_0'''U_3'') + g\lambda(y_0'U_2' + y_0'''U_3') = 0$$

или

$$y_0'U_2''' + y_0'''U_3''' = 0$$

$$y_0'(EJU_2'' + g\lambda U_2') + y_0'''(EJU_3'' + g\lambda U_3) = 0$$

отсюда

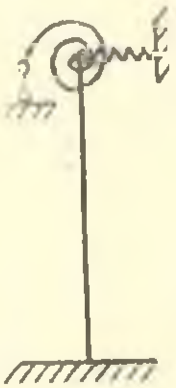
$$EJ(U_2'''U_3'' - U_2''U_3''') + g\lambda(U_2'''U_3' - U_2'U_3''') = 0$$

и

$$\frac{EJ}{g\lambda} = \frac{U_2'''U_3' - U_2'U_3'''}{U_2'''U_3'' - U_2''U_3'''} \tag{6.4}$$

В качестве функций $U_i(x)$ можно брать не только функции Коши, но и любые решения уравнения (6.1), удовлетворяющие граничным условиям на нижнем конце стержня, причем место постоянных y_0' и y_0''' должны занять другие соответствующие произвольные постоянные.

Заменив в формулах (6.3) и (6.4) сопротивления среды n или g на массу m или момент инерции массы I по вышеприведенным правилам, получим решения для стержня, несущего на конце массу, а введя изображения ядер ползучести, придем к решению задачи устойчивости для стержня, имеющего на конце сопротивление в упруго-ползучей среде.



Фиг. 5

7. Сопротивления движению конца стержня в вязкой среде или силы инерции сосредоточенной массы можно заменить упругими связями, препятствующими горизонтальному смещению и повороту конца стержня (фиг. 5). При этом уравнение (5.3) получит вид

$$E^2J^2k^4 + EJk\beta(\sin\nu - \nu\cos\nu) + EJk^2\alpha\sin\nu +$$
$$+ \alpha\beta(2 - 2\cos\nu - \nu\sin\nu) = 0 \tag{7.1}$$

где α—коэффициент упругости защемления, а β—коэффициент упругости опирания конца стержня.

Введя безразмерные величины

$$\beta^* = \frac{\beta}{EJk^3} = \frac{\beta}{kP};\quad \alpha^* = \frac{\alpha}{EJk} = \frac{\alpha k}{P}$$

вместо (7.1) будем иметь

$$1+\beta^*(\sin\nu-\nu\cos\nu)+\alpha^*\sin\nu+\alpha^*\beta^*(2-2\cos\nu-\nu\sin\nu)=0$$

откуда

$$\beta^*=-\frac{1+\alpha^*\sin\nu}{\sin\nu-\nu\cos\nu+\alpha^*(2-2\cos\nu-\nu\sin\nu)} \tag{7.2}$$

В случае $\alpha=0$, то есть отсутствия упругого защемления верхнего конца

$$\beta^*=(\nu\cos\nu-\sin\nu)^{-1}$$

Здесь мы снова можем воспользоваться графиком фиг. 4. Статическая потеря устойчивости возникает при значении ν, соответствующем точкам пересечения кривой $\xi(\nu)$ с горизонталью $\xi=-\beta^*$. Первая такая точка находится в интервале $4{,}4934<\nu<6{,}2832$ или, при $\beta^*<1/2\pi$, в более отдаленных участках изменения ν, соответствующих положительным значениям ξ. Однако, еще ранее при наличии хотя бы очень малой массы или вязкого сопротивления на конце стержня, а именно при $\nu=4{,}4934$, произойдет динамическая потеря устойчивости стержня.

В случае $\alpha=\infty$ верхний конец стержня не будет поворачиваться и следящая сила превратится в обычную силу постоянного направления.

При любом α можно найти условие минимума β^* из выражения (7.2)

$$\frac{d\beta^*}{d\nu}=0;\quad [\sin\nu-\cos\nu+\alpha^*(2-2\cos\nu-\nu\sin\nu)]\alpha^*\cos\nu-$$

$$-(1+\alpha^*\sin\nu)[\nu\sin\nu+\alpha^*(\sin\nu-\nu\cos\nu)]=0$$

Это условие выполняется при $\nu=2j\pi$ ($j=1, 2, 3\ldots$) независимо от величины α^*, и минимумы β^* при любых α^* будут равны

$$\min\beta^*=\frac{1}{2j\pi}$$

Если $\beta^*<\dfrac{1}{2j\pi}$, то потеря статической устойчивости невозможна с числом полуволн, меньшим $2j$.

Во всех случаях статическая потеря устойчивости должна происходить в зонах динамической неустойчивости, то есть она практически невозможна.

ՀԵՏԵՎՈՂ ՈՒԺՈՎ ԲԵՌՆԱՎՈՐՎԱԾ ԿՈՆՍՈԼԱՅԻՆ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՁՈՂ

Ա. Ռ. ՌԺԱՆԻՑԻՆ

Ամփոփում

Հետևող ուժով բեռնավորված ձողի կայունությունը դիտարկվում է այն ենթադրությամբ, որ նրա ծայրում առկա է՝ 1) ճնշման մածուցիկ դիմադրություն, 2) կենտրոնացված զանգվածներ, 3) առաձգական-ժապանդական

դիմադրության, 4) առաձգական հենում, ինչպես նաև մածուցիկ և իներցիոն դիմադրության կոմբինացիա։

Գտնված են կայուն և անկայուն շարժումների գոտիները։ Միջանկյալ, կրիտիկական վիճակներին համապատասխանում են մարման գործակցի կամ տատանման սեփական հաճախականության անցմամբ անվերջությունով։

CONSOLE ELASTIC BAR LOADED BY FOLLOWED FORCE

A. R. RZHANITSIN

S u m m a r y

The problem of stability of the bar, loaded by followed force is solved with assumptions that on the free edge there are: 1) viscous damping, 1) lumpeb mass, 3) elasto-heritageous resistance, 4) elastic support and combination of the viscous and inertial resistances. Zones of stable and non-stable movements are found. Critical loads correspond to transfer infinity by the damping coefficient or natural frequency.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968.
2. *Ржаницын А. Р.* Устойчивость неконсервативных систем с двумя степенями свободы. В сб. «Механика твердого тела», Труды II-го Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. М.: Наука, 1966.
3. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961.
4. *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. М.: Изд. Мир, 1971.
5. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963.

Московский инженерно-строительный
институт им. В. В. Куйбышева

Поступила в редакцию
6.I. 1984

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVIII, № 5, 1985 Механика

СКАЧКИ ПАРАМЕТРОВ НА ФРОНТЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В СМЕСИ

ВОЕНКОВ И. В., САГОМОНЯН А. Я.

Рассматривается смесь газа с жесткими твердыми частицами, движение которой описывается с помощью модели взаимопроникающих континуумов [1], причем давление газа P является общим для обеих фаз смеси. В настоящей работе определяются скачки параметров на фронте ударной волны в такой смеси. Уравнения, выражающие основные законы механики на ударном фронте, приведены в [2], обе фазы смеси считаются равноправными.

$$\rho_1(1-\omega)u_1=\rho_1^*(1-\omega^*)u_1^* \tag{1}$$

$$\rho_1(1-\omega)\,u_1(u_1-u_1^*)=P(1-\omega^*)-P(1-\omega) \tag{2}$$

$$\rho_1(1-\omega)u_1\left|\frac{u_1^2}{2}-\frac{u_1^{*2}}{2}+\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{P}{\rho_1}-\frac{P^*}{\rho_1^*}\right)\right|=P^*(1-\omega^*)u_1^*-P(1-\omega)u_1 \tag{3}$$

$$\rho_2\omega u_2=\rho_2^*\omega^*u_2^* \tag{4}$$

$$\rho_2\omega u_2(u_2-u_2^*)=P^*\omega^*-P\omega \tag{5}$$

$$P^*=f(\rho_2,\rho_2^*) \tag{6}$$

Здесь ω—объемная концентрация частиц, индексы 1.2 относятся к параметрам газа и частиц соответстьенно, звездочкой отмечены параметры за фронтом ударной волны, параметры перед фронтом считаются известными.

Уравнения для газа (калорически совершенного, с показателем адиабаты γ) можно преобразовать к виду

$$\frac{u_1^*}{u_1}=\frac{1}{m_1},\quad m_1=\frac{\rho_1^*}{\rho_1}\,\frac{1-\omega^*}{1-\omega} \tag{7}$$

$$\frac{\gamma P^*}{\rho_1^*}=\frac{a_1^2}{m_1}\,\frac{m_1(\gamma+1)-(\gamma-1)}{\gamma+1-m_1(\gamma-1)},\quad a_1^2=\frac{\gamma P}{\rho_1} \tag{8}$$

$$u_1^*=\frac{1}{\gamma+1}\left|u_1(\gamma-1)+\frac{2a_1^2}{u_1}\right| \tag{9}$$

Из последнего равенства следует, что наличие в потоке частиц не влияет на значение скорости несущей газовой фазы за ударной волной. Задавая значение скорости газа u_1 перед ударной волной, определим m_1

$$\frac{1}{m_1}=\frac{u_1^*}{u_1}=\frac{1}{\gamma+1}\left|\gamma-1+\frac{2}{M^2}\right|,\quad M=\frac{u_1}{a_1}$$

Примем $\rho_2=\rho_2^*=\mathrm{const}$, тогда исключая ρ_1^* из (7), (8), u_2^* из (4), (5) и, наконец, P^* из (5), (8), получим квадратное уравнение относительно объемной концентрации частиц ω^* за ударной волной

$$\left[\frac{\rho_1 a_1^2(1-\omega)}{\gamma\omega}\cdot\frac{m_1(\gamma+1)-(\gamma-1)}{\gamma+1-m_1(\gamma-1)}+P+\rho_2 u_2^2\right]\omega^{*2}-\left[P+\rho_2 u_2^2(1+\omega)\right]\omega^*+$$
$$+\rho_2 u_2^2\omega=0 \qquad (10)$$

Далее принято $P=10\,000$ кГ/м², $\rho_1=0{,}125$ кГс²/м⁴, $\rho_2=100$ кГс²/м⁴, $\gamma=1{,}4$, $u_1=u_2$.

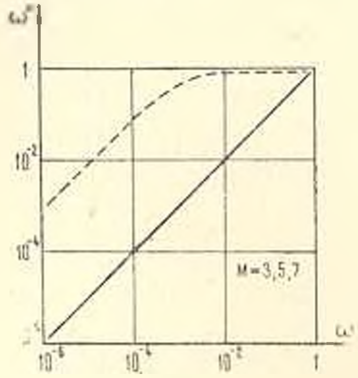
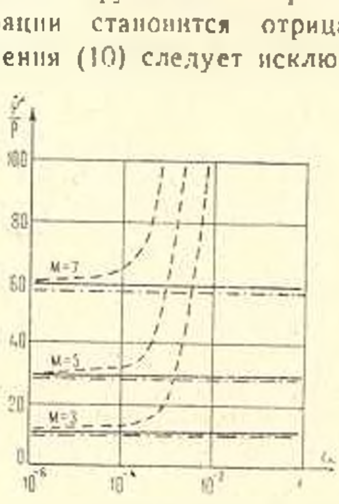
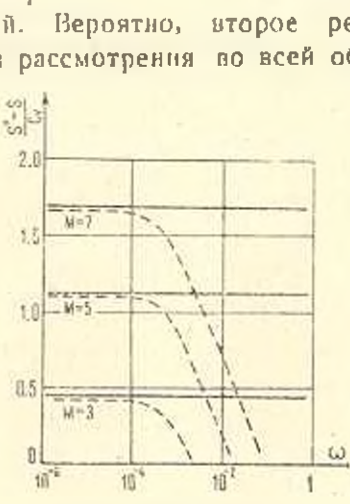


Рис. 1

Исследование уравнения (10) показывает, что оба его решения, приведенные на фиг. 1, соответствуют скачку уплотнения ($P^*>P$) для всех значений $0<\omega<1$, $M>1$ и практически не зависят от значения M. Первое решение (сплошные линии на фигурах) отвечает очень малому увеличению объемной концентрации за ударной волной: $\frac{\omega^*-\omega}{\omega}\approx 10^{-3}$. Давление за ударной волной при этом мало отличается от соответствующего давления в чистом газе, показанного на фиг. 2 штрих-пунктирной линией. Второе решение уравнения (10) (пунктирные линии на фигурах) соответствует резкому увеличению концентрации частиц за ударной волной. Давление в этом случае является сильно возрастающей функцией объемной концентрации. На фиг. 3 показано изменение энтропии газа $\frac{S^*-S}{c_v}=\ln\frac{P^*}{P}\left(\frac{\rho_1}{\rho_1^*}\right)^{\gamma}$ на ударной волне. Для второго решения это убывающая функция, которая с некоторого значения объемной концентрации становится отрицательной. Вероятно, второе решение уравнения (10) следует исключить из рассмотрения во всей области.



Фиг 2



Фиг 3

В важном для практики случае $\frac{\rho_1}{\rho_2} \ll 1$, $\omega \ll 1$ на основе асимптотических исследований соотношений на ударной волне, приведенных в [3], показано малое влияние частиц на характер изменения параметров газа на фронте ударной волны. Исследованное выше первое решение уравнения (10) во всей области изменения ω указывает на высокую точность допущений $\omega = \omega^*$, $u_2 = u_2^*$ и удовлетворительную точность допущения $\frac{P^*}{P} = \frac{\varkappa\rho_2^* - \rho_2}{\rho_1^* - \varkappa\rho_1}$, $\varkappa = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$, которые часто встречаются в практических расчетах.

В связи с проведенным выше анализом представляет интерес рассмотреть скорость распространения малых возмущений за фронтом ударной волны, где смесь является неравновесной (скорости и температуры фаз не совпадают между собой, характерная частота возмущений велика). Неравновесная («замороженная») скорость звука согласно [4] равна

$$a^2 = \frac{\dfrac{1-\omega}{\rho_1} + \dfrac{\omega}{\rho_2}}{\dfrac{1-\omega}{\rho_1 a_1^2} + \dfrac{\omega}{\rho_2 a_2^2}}$$

где a_1, a_2—скорости звука в чистых фазах.

Из этого простого выражения следует, что скорость распространения звука в смеси газа и воды равна или чуть больше скорости звука в чистом газе практически во всей области изменения ω: $0 < \omega \leqslant 0{,}99$.

ԽԱՌՆՈՒՐԴՈՒՄ ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔԻ ՃԱԿԱՏԻ ՎՐԱ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ԹՌԻՉՔՆԵՐԸ

Ի. Վ. ՎՈՍՏԿՈՎ, Ա. ՅԱ. ՍԱԳՈՄՈՆՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է հարվածային ալիքի ճակատի վրա խառնուրդի պարամետրերի թռիչքաձև փոփոխման խնդիրը։ Բերված է մեխանիկայի հիմնական օրենքները արտահայտող հավասարումների համակարգի քանակական անալիզ, անջատված են հարվածային ալիքի ճակատից դուրս եկող էապես տարբեր լուծումներ։ Վերջնական լուծումը ընտրված է էնտրոպիայի անալիզի և ասիմպտոտիկ հետազոտության օգնությամբ։ Նա նույնպես ցանկում է գործնական հաշվարկներում հաճախ օգտագործվող ենթադրությունների ներդաշնակության մեջ։

THE LEAPS OF THE PARAMETERS ON THE SHOCK WAVE FRONT IN MIXTURE

I. V. VOEIKOV, A. Ia. SAGOMONIAN

S u m m a r y

The nature of uneven change of the mixture parameters on the shock wave front is considered in the present paper. The quantitative analysis of simultaneous equations, presenting the main mechanical laws, is conducted. Two essentially different solutions down stream of the shock front are received. The final solution is selected by the aid of entropy analysis and asymptotic research. It also corresponds to the assumptions often used in practical calculations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рахматулин Х. А.* Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых тел.—ПММ, 1956, т. 20, в. 2, с. 181—195.
2. *Сагомонян А. Я.* Гиперзвуковое движение тонких тел в смеси.—Вестн. МГУ, Сер. математ., 1982, № 3, с. 100—106.
3. *Нигматулин Р. И.* Уравнения гидромеханики и волны уплотнения в двухскоростной и двухтемпературной сплошной среде при наличии фазовых превращений.—Изв. АН СССР, МЖГ, № 5, 1967, с. 33—48.
4. *Уоллис Г.* Одномерные двухфазные течения. М., Мир, 1972.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
12.III. 1984

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

Մեխանիկա XXXVIII, № 5, 1985 Механика

УДК 539.376

МЕТОД РЯДОВ ВОЛЬТЕРРА В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ НАСЛЕДСТВЕННОЙ УПРУГОСТИ

БЫРДИН А. П., РОЗОВСКИЙ М. И.

В данной статье изучаются две одномерные динамические задачи нелинейной наследственной упругости—о радиальных колебаниях цилиндра и о распространении волн в полуограниченной среде. Метод основан на представлении решения в виде нелинейного функционала, разлагающегося в интегростепенной ряд Вольтерра и аналитического по параметру, играющему роль амплитуды возмущения.

1. Определяющее соотношение для материалов выбирается в виде ряда Вольтерра-Фреше [1]

$$\sigma\{\varepsilon(t),\ \varepsilon(t-\tau)\}=\sum_{n=1}^{\infty}\hat{G}_n\varepsilon(t) \tag{1.1}$$

где $\sigma\{\cdot\}$—отнесенный к модулю упругости безразмерный функционал напряжения, $\varepsilon(t)$—соответствующая деформация, $\hat{G}_n$—оператор, действие которого на функции $\varepsilon(t)$ определено равенством

$$\hat{G}_n\varepsilon(t)=\int\limits_0^\infty\cdots\int G_n(t_1,\ldots,t_n)\prod_{m=1}^{n}\varepsilon(t-t_m)dt_m,\quad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{1.2}$$

Здесь $G_n(t_1,\ldots,t_n)$—ядра релаксации порядка n, причем в силу условия причинности $G_n=0$ при $t_m<0$, $1\leqslant m\leqslant n$.

Считая напряжение заданным, выражение (1.1) можно обратить, если ядро релаксации первого порядка $G_1(t)$ содержит мгновенную составляющую в виде дельта-функции [2], при этом выражение деформации через напряжение имеет аналогичный вид

$$\varepsilon(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\hat{K}_n\sigma(t) \tag{1.3}$$

Здесь операторы $\hat{K}_n$ определены формулой (1.2). В работе [3] предлагался конкретный способ разрешения функциональных уравнений типа (1.1) с использованием преобразования Фурье исходного и обратного соотношений. Были построены Фурье-образы выражений первых трех ядер K_n через заданные ядра G_n, $n=1,\ 2,\ 3$.

Если заменить линейный интегральный оператор $\hat{G}_1$ на оператор $\hat{G}_1^s=\hat{P}_s(d/dt)+\hat{G}_1$, где $P_s(x)$—полином s-го порядка по x с постоянными коэффициентами, то можно использовать указанное представление решения (1.3) и получить рекуррентное соотношение, связывающее Фурье-образы ядер решения K^*_n со всеми Фурье-образами заданных ядер G^*_m порядка, не превосходящего n [4].

Предполагая поведение материала при сжатии и растяжении одинаковым, используем частный случай рекуррентного соотношения для ядер нечетного порядка

$$K^*_{(n)}(\omega_1, \ldots, \omega_{(n)})G_1^{0*}\left(\sum_{l=1}^{2n+1}\omega_l\right) + \sum_{m=1}^{n}\sum_{|J|=n-m} K^*_{(J,1)}(\omega_1, \ldots, \omega_{(J,1)}) \times$$

$$\times K^*_{(J,2m+1)}(\omega_{(J,2m-1)+1}, \ldots, \omega_{(n)})G^*_{(m)}\left(\sum_{l=1}^{2j_1+1}\omega_l, \ldots, \sum_{l=(J,1)+\ldots+(J,2m-1)+1}^{2n+1}\omega_l\right) = \delta_{1,(n)} \tag{1.4}$$

Здесь $K^*_n(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — трансформанты Фурье ядер решения $K_n(t_1, \ldots, t_n)$.

$$K^*_{(n)}(\omega_1, \ldots, \omega_{(n)}) = (2\pi)^{-n}\int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty} K_{(n)}(t_1, \ldots, t_{(n)})\prod_{l=1}^{2n+1}\exp(-i\omega_l t_l)dt_l$$

$\delta_{1,(n)}$ — символ Кронекера, $G_1^{0*}(\omega) = P_1(-i\omega) + G_1^*(\omega)$, индексы в скобках следует понимать здесь и ниже как равенства $(n) = 2n+1$, $(J, m) = 2j_m+1$, $|J| = j_1 + \ldots + j_{2m+1}$ — длина мультииндекса J. Внутренняя сумма в выражении (1.4) берется по целым неотрицательным решениям уравнения $|J| = n-m$ и равна нулю при $m > n$. Если функции $G_n(t_1, \ldots, t_n)$ являются сепарабельными с коэффициентами a_n

$$G_{(n)}(t_1, \ldots, t_{(n)}) = a_{(n)}\prod_{l=1}^{2n+1}G_1(t_l), \quad a_1 = 1,$$

то Фурье-образы функций K_n при условии $P_1(d/dt) \equiv 0$ можно найти в замкнутом виде, исключая последовательно из рекуррентного равенства (1.4) ядра K_m для $m > 1$. Таким образом, получим

$$K^*_{(n)}(\omega_1, \ldots, \omega_{(n)}) = (2\pi)^{-n}f_n(a_3, \ldots, a_{(n)})K_1^*\left(\sum_{l=1}^{2n+1}\omega_l\right) \tag{1.5}$$

причем

$$f_n(1, \ldots, 1) = (-1)^n 2^{2n+1}(2n+1)!!/(2n+2)!!$$

Наличие в физическом соотношении (1.1) только одного нелинейного оператора $\bar{G}_3$ с сепарабельным ядром и условие $P_1(d/dt) \neq 0$ приводят к следующему выражению для Фурье-образов ядер решения:

$$K^*_{(n)}(\omega_1, \ldots, \omega_{(n)}) = (-1)^n(a_3/2\pi)^n K_1^*\left(\sum_{l=1}^{2n+1}\omega_l\right)\prod_{l=1}^{2n+1}K_1^*(\omega_l)G_1^*(\omega_l) \times$$

$$\times F\left\{G_1^*\left(\sum_{l=1}^{m}\omega_l\right), \; K_1^*\left(\sum_{l=1}^{m}\omega_l\right)\right\}, \quad 3 \leq m \leq 2n+1$$

Здесь $F\{\cdot\}$ — некоторая нелинейная функция Фурье-образов ядер $G_1(t)$ и $K_1(t)$, вид которой не приводим ввиду громоздкости. Формулы лы (1.5) и (1.6) будут использованы при построении решений рассматриваемых задач.

2. Пусть длинный полый цилиндр с внутренним a и внешним b радиусами, изготовленный из нелинейного наследственно-упругого материала, подвергается действию равномерно распределенного на внутренней границе давления $q(t)$. Цилиндр по внешней границе скреплен с упругой оболочкой толщины h. В предположении объемной несжимаемости, осевой симметрии и плоской малой деформации радиальные колебания описываются следующей краевой задачей [5]:

$$\partial\sigma_r/\partial r+(\sigma_r-\sigma_\varphi)/r=\rho\ddot{x}(t)/\rho_0 r,\quad \sigma_r(a/b,t)=-q(t)/2G \tag{2.1}$$

$$\sigma_r(1,t)=-\Delta x(t)-h\rho_1\ddot{x}(t)/b\rho_0,\quad \varepsilon_r=-ax(t)/br^2,\quad \varepsilon_\varphi=ax(t)/br^2$$

где σ_r и σ_φ—отнесенные к удвоенному модулю сдвига цилиндра $2G$ радиальное и окружное напряжения, ε_r и ε_φ—соответствующие деформации, $r=r'/b$ и $t=Bt'$—безразмерные координаты, r' и t'—радиальная координата и время, $B=(2G/ab\rho_0)^{1/2}$, $\rho_0=\rho\ln(b/a)+\rho_1 h/b$, ρ и ρ_1—плотности материалов цилиндра и оболочки, $\Delta=ahE_1/2Gb^2(1-\nu_1^2)$, E_1 и ν_1—модуль упругости и коэффициент Пуассона оболочки, $x(t)$—безразмерное радиальное перемещение цилиндра. В качестве реологических уравнений для σ_r и σ_φ выбираем соотношение (1.1) с одним нелинейным оператором $\hat{G}_3$ и, таким образом, замыкаем систему уравнений (2.1).

Проинтегрируем первое уравнение системы (2.1) по r на интервале $[a/b, 1]$ и исключим напряжения с помощью остальных уравнений. Таким образом, задачу (2.1) сведем к интегрированию нелинейного интегродифференциального уравнения

$$\ddot{x}(t)+\Delta x(t)+\lambda(\hat{G}_1+\lambda_1\hat{G}_3)x(t)=A(t) \tag{2.2}$$

где

$$\lambda=(b^2-a^2)/ab,\quad \lambda_1=1+\lambda^2/3,\quad A(t)=q(t)/2G$$

Уравнение (2.2) относится к рассмотренному в пункте 1 типу с оператором

$$\hat{G}_1^0=d^2/dt^2+\Delta+\lambda\hat{G}_1$$

Ядро оператора $\hat{G}_1$ выбираем в виде $G_1(t)=\delta(t)-WR(t)$, а ядро оператора $\hat{G}_3$ считаем сепарабельным с коэффициентом a_3. Значения параметров, входящих в уравнение (2.2), выбираем такими, что выполняются неравенства

$$\max|A(t)|<\lambda W<\alpha,\quad \alpha=\lambda\lambda_1 a_3 \tag{2.3}$$

В известной авторам литературе уравнения вида (2.2) рассматривались с малым параметром при нелинейном операторе и малым коэффициентом W и решались обычно методом осреднения. Однако, по условию (2.3) вязкость и нелинейность в системе нельзя считать малыми, поэтому используем методику, изложенную в части 1.

Полагая правую часть уравнения (2.2) равной $A\sin\omega t$, стационарное решение ищем в виде (1.3). Учитывая вид функции $A(t)$, имеем

$$x(t) = (A/2i)\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha A^2/2)^n \sum_{m=0}^{2n+1}(-1)^{n+m} C_{(n)}^{m} K_{(n)} \exp\left[i\omega(2n-2m+1)t\right] \quad (2.4)$$

Здесь i — мнимая единица, а операторы C_n^m определены выражением

$$C_n^m K_n = \sum K_n^*(\underbrace{-\omega, \ldots, -\omega}_{m}, \underbrace{\omega, \ldots, \omega}_{n-m}) \quad (2.5)$$

Сумма в формуле (2.5) берется по перестановкам аргументов группы $-\omega$ с аргументами группы ω. Число членов в сумме равно биномиальному коэффициенту $\binom{n}{m}$.

Решение (2.4) с учетом равенства (1.6) допускает оценку

$$|x(t)| \leqslant AM_1 \sum_{n=0} \binom{3n}{2n} \alpha_0^n/(2n+1) \quad (2.6)$$

где

$$\alpha_0 = A^2 M_0^3 \alpha, \quad M_1 = \max|K_1^*(\omega)|, \quad M_0 = \max|K_1^*(\omega) G_1^*(\omega)|$$

Условие сходимости ряда (2.6) определяет возможные значения параметра нелинейности a_3 как функцию амплитуды A и частоты вынуждающей силы ω: $\alpha_0 < 4/27$. При получении оценки (2.6) использовалось выражение для функции $F\{\cdot\}$ из (1.6) в случае $G_1^{0*}(\omega) = G_1^*(\omega)$

$$F\{G_1^*, K_1^*\} = 3\binom{3n-1}{n-1}/(2n+1)$$

Учет первых двух членов равенства (2.4) дает следующий вид приближенного решения:

$$x(t) = A|K_1^*(\omega)|\left[\sin(\omega t+\varphi) + 3\alpha_1 \sin(\omega t+\varphi_1)\right] + A|K_1^*(3\omega)|\alpha_1 \sin(3\omega t+\varphi_3) \quad (2.7)$$

где

$$\alpha_1 = \alpha A^2 |K_1^*(\omega) G_1^*(\omega)|/4, \quad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{Im}[K_1^*(\omega)]/\operatorname{Re}[K_1^*(\omega)]$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{Im}[K_1^{*2}(\omega) G_1^*(\omega)]/\operatorname{Re}[K_1^{*2}(\omega) G_1^*(\omega)]$$

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = \operatorname{Im}[K_1^*(3\omega) K_1^{*3}(\omega) G_1^{*3}(\omega)]/\operatorname{Re}[K_1^*(3\omega) K_1^{*3}(\omega) G_1^{*3}(\omega)]$$

Построенное решение (2.4) позволяет вычислить деформации по формулам (2.1), а затем и напряжения в любом приближении. Структура решения такова: первый член является решением линейной задачи, следующий дает поправку к первому и третью гармонику и так далее.

Прохождение через резонанс не влечет неограниченного роста амплитуды колебаний и максимум амплитуды первой гармоники достигается несколько левее частоты $\omega_0 = (\lambda+\Delta)^{1/2}$. С ростом геометрического фактора λ максимум снижается и ширина пика растет. При частоте внешней силы вблизи $\omega_0/3$ амплитуда поправочного члена основной гармоники становится меньше амплитуды третьей гармоники и, таким образом, искажение формы колебаний может оказаться существенным. Так, для слабосингулярного ядра Ржаницына

$$G_0(t)=\delta(t)-\nu\beta^{\nu}t^{\nu-1}e^{-\beta t}/\Gamma(\nu)$$

при следующих значениях параметров $\delta=0{,}05$, $\eta=0{,}15$, $\nu=0{,}66$, $\lambda=3{,}75$, $\Delta=0{,}89$, $B=9469{,}575\ \text{с}^{-1}$, $A=18{,}75\cdot 10^{-4}$, $\omega=\omega_m/3=0{,}6903$, где ω_m—резонансная частота для линейной вязкоупругой задачи, амплитуда третьей гармоники больше амплитуды поправочного члена основной гармоники примерно в десять раз.

3. Уравнение движения одномерной сплошной среды в безразмерных переменных $t=\beta t'$, $x=x'\beta/c$ имеет вид

$$\partial^2\varepsilon/\partial t^2=\partial^2\sigma/\partial x^2 \tag{3.1}$$

Здесь β^{-1}—время релаксации системы, $c=\sqrt{E/\rho}$—скорость звука в упругой среде, плотность которой равна ρ и упругий модуль E, x'—координата в направлении распространения волны.

Пусть к границе среды $x=0$ приложено напряжение

$$\sigma(0, t)=P\sin\omega t \tag{3.2}$$

где $\sigma(x, t)$ задано соотношением (1.1) с нечетными n.
Присоединяя к уравнениям (3.1), (3.2) условие на бесконечности

$$\varepsilon(\infty, t)=0 \tag{3.3}$$

получим краевую задачу с нелинейным граничным условием (3.2), [6].

Решение задачи (3.1)—(3.3) разыскиваем в виде ряда [7]

$$\varepsilon(x, t)=\sum_{n=0}^{\infty}P^{2n+1}\varepsilon_{(n)}(x, t) \tag{3.4}$$

$$\varepsilon_{(n)}(x, t)=\sum_{m=-n-1}^{n}A_{(n)}^{(m)}(x)\exp[i(2m+1)\omega t] \tag{3.5}$$

где $A_{(n)}^{-(m)}=\overline{A_{(n)}^{(m)}}$, черта означает комплексное сопряжение.

Подставляя выражение (3.4) в уравнение движения и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях P, получим систему уравнений относительно функции $\varepsilon_{(n)}(x, t)$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\hat{G}_1\right)\varepsilon_{(n)}(x, t)=\sum_{r=1}^{n}\sum_{|m|=n-r}\int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty}G_{(r)}(t_1, \ldots, t_{(r)})\times$$

$$\times\frac{\partial^2}{\partial x^2}\prod_{i=1}^{2r+1}\varepsilon_{(m_i)}(x, t-t_i)dt_i \tag{3.6}$$

Подставляя в выражение (3.6) соотношение (3.5), умножая уравнения на $\exp[-i\omega(2m+1)t]$ и интегрируя по t на интервале $[0, 2\pi/\omega]$, получим следующую краевую задачу для функций $A_{(n)}^{(k)}(x)$:

$$\left[G_1^*((2k+1)\omega)\frac{d^2}{dx^2}+(2k+1)^2\omega^2\right]A_{(n)}^{(k)}(x)=-\sum_{r=1}^{n}\sum_{|m|=n-r}\times$$

$$\times\sum_{|p|=n-r}a_{(r)}\frac{d^2}{dx^2}\prod_{l=1}^{2r+1}A_{(m_l)}^{(p_l)}(x)G_1^*((2p_l+1)\omega) \tag{3.7}$$

$$A_{(n)}^{(k)}(0)=i(-1)^{k+1}f_n2^{-2n-1}\binom{2n+1}{n-k}K_1^*((2k+1)\omega),\quad A_{(n)}^{(k)}(\infty)=0,$$

$$-n-1\leqslant k\leqslant n \tag{3.8}$$

Краевое условие (3.8) получается из сравнения выражений (3.4)—(3.5) при $x=0$ и (2.4); в последнем вместо функции $x(t)$ надо поставить граничное значение деформации $\varepsilon(0, t)$ и учесть равенство (1.5). Для $n=0$ и $n=1$ эти уравнения имеют вид:

$$A_1^{\pm1''}(x)+\omega^2 K_1^*(\pm\omega)A_1^{\pm1}(x)=0, \quad A_1^{\pm1}(0)=\mp iK_1^*(\pm\omega)/2, \; A_1^{\pm1}(\infty)=0 \qquad (3.9)$$

$$A_3^{\pm1''}(x)+\omega^2 K_1^*(\pm\omega)A_3^{\pm1}(x)=-2\pi(C_3^{2,2}G_3)K_1^*(\pm\omega)\frac{d^2}{dx^2}A_1^{\pm1}(x)|A_1^1(x)|^2$$

$$A_3^{\pm1}(0)=\mp ia_3 3K_1^*(\pm\omega)/8, \quad A_3^{\pm1}(\infty)=0$$

$$A_3^{\pm3''}(x)+9\omega^2 K_1^*(\pm3\omega)A_3^{\pm3}(x)=-2\pi(C_3^{0,3}G_3)K_1^*(\pm3\omega)\frac{d^2}{dx^2}(A_1^{\pm1}(x))^3$$

$$A_3^{\pm3}(0)=\mp ia_3K_1^*(\pm3\omega)/8, \quad A_3^{\pm3}(\infty)=0$$

Решая уравнения (3.9) при условии сепарабельности ядра оператора G_3, по формулам (3.5) построим деформации

$$\varepsilon_1(x, t)=|K_1^*(\omega)|\exp(-\gamma_1 x)\sin(\theta_1+\psi_1)$$

$$\varepsilon_3(x, t)=\frac{3a_3}{16}\frac{|K_1^*(\omega)|\exp(-\gamma_1 x)}{\sin(\psi_1/2)\sqrt{1+3\sin^2(\psi_1/2)}}[\sin(\theta_1+\beta_1)+$$

$$+\exp(-2\gamma_1 x)(1+8\sin^2(\psi_1/2))\sin(\theta_1+\beta_2)]+\frac{a_3}{4}\frac{|K_1^*(3\omega)|}{\sqrt{1-2\delta\cos(\psi_3-\psi_1)+\delta^2}}\times$$

$$\times[\delta\exp(-\gamma_3 x)\sin(\theta_3+\psi_3+\beta_3)-\exp(-3\gamma_1 x)\sin(3\theta_1+\psi_1+\beta_1)]$$

где $\gamma_n=n\omega\mathrm{Re}(-K_1^*(n\omega))^{1/2}$ — коэффициенты затухания волн, $\theta_n=n\omega(t-x/c_n)$ — волновая переменная, $\delta=|G_1^*(\omega)|/|G_1^*(3\omega)|$, $c_n=1/\mathrm{Im}(-K_1^*(n\omega))^{1/2}$ — фазовая скорость волн

$$G_1^*(n\omega)=|G_1^*(n\omega)|(\cos\psi_n-i\sin\psi_n), \qquad \mathrm{tg}\beta_1=-\mathrm{ctg}(\psi_1/2)\frac{2\cos^2\psi_1-4\cos\psi_1-1}{2(\cos^2\psi_1-\cos\psi_1-1)}$$

$$\mathrm{tg}\beta_3=\frac{\sin(2\psi_3-\psi_1)-\delta\sin\psi_3}{\cos(2\psi_3-\psi_1)-\delta\cos\psi_3}, \qquad \mathrm{tg}\beta_2=-\mathrm{ctg}(\psi_1/2)\frac{8\cos^2\psi_1-20\cos\psi_1+11}{2(4\cos^2\psi_1-6\cos\psi_1-1)}$$

Характеристические многочлены уравнений (3.7) для любого n имеют корни вида $(2k+1)\omega\sqrt{-K_1^*((2k+1)\omega)}$, определяющие коэффициенты затухания γ_k и скорости волн c_k. Следовательно, уравнения для функций $A_{(m)}^{(k)}$ с одинаковыми индексами k дают вклады в $\varepsilon_n(x, t)$ в виде волн, распространяющихся со скоростью c_k. Поскольку же правые части этих уравнений содержат функции $A_{(n)}^{(k)}$ с меньшими нижними индексами, чем левые, то в $\varepsilon_{(n)}(x, t)$ войдут и волновые члены с фазовыми скоростями c_m для $m<k$.

Таким образом, граничное возмущение распадается на ряд волн сложной формы, движущихся с различными скоростями. Спектр волны скорости c_n ограничен снизу гармоникой частоты $n\omega$. Анализ зависимости c_n от частоты ω при различных значениях параметра сингулярности α и дефекта упругого модуля ν для слабосингулярного ядра Ржаницына позволяет сделать следующие выводы.

При значениях η вблизи нуля кривые $c_n(\omega)$ растут медленно и расстояние между ними для различных n мало при всех ω. Следовательно, при малых η в среде распространяется волновой пакет со скоростями составляющих $\sqrt{1-\nu}<c_n<1$. При малых значениях ν его можно интерпретировать как волну, движущуюся с упругой скоростью. Эта же картина имеет место для любых η и ν, но при достаточно больших частотах ω.

При значениях параметров ν и η вблизи единицы можно указать такие значения ω, при которых c_3-c_1 и $c_5-c_3 \gg c_{2n+1}-c_{2n-1}$, $n\geqslant 3$. Следовательно, в этом случае возмущение распадается на две уединенные волны и расплывающийся волновой пакет со скоростями гармоник от c_5 до 1.

При $\eta=1$ и $\omega\to\infty$ коэффициенты затухания $\gamma_n\to\nu/2$ для всех значений n, при $\eta<1$ неограниченно растут. При небольших частотах γ_n для первых номеров n малы и, таким образом, уединенные волны могут иметь большую крутизну фронта и при малых x распространяются почти, не меняя формы.

Итак, рассмотрены две динамические задачи нелинейной наследственной упругости, к уравнениям которых нельзя применить обычно используемый в таких случаях метод осреднения. Предлагаемый здесь алгоритм позволяет строить решение в любом приближении. Единственность решения в классе аналитических функционалов следует из единственности разрешимости рекуррентного соотношения (1.4), существование решения вытекает из сходимости ряда (1.3) или же из оценки (2.6).

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԺԱՌԱՆԳԱԿԱՆ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԴԻՆԱՄԻԿ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ՎՈԼՏԵՐԱՅԻ ՇԱՐՔԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ

Ա. Պ. ԲԻՐԴԻՆ, Մ. Ի. ՌՈԶՈՎՍԿԻ

Ամփոփում

Զարգացվում է ժառանգական առաձգականության ոչ գծային դինամիկ խնդիրների լուծման մեթոդ։ Այն դեպքում, երբ ոչ գծայնության և մածուցիկության գործակիցները չի կարելի համարել փոքր, կառուցված են երկու գլանի տատանումների և կիսաանվերջ միջավայրում ալիքների մասին դինամիկ խնդիրների լուծումները։

VOLTERRA SERIES METHOD IN DYNAMICAL PROBLEMS OF NONLINEAR HEREDITARY ELASTICITY

A. P. BYRDIN, M. I. ROSOVSKY

Summary

A solution method for nonlinear dynamical problems of hereditary elasticity is developed. The solution of two dynamical problems—oscil-

lation of cylindres and waves in semi-infinite media—are found in the case where coefficients of nonlinearity and viscosity are not considered as small values.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел.— М.: Наука. 1977. 384 с.
2. *Победря Б. Е.* Математическая теория нелинейной вязко-упругости.—В сб.: Упругость и неупругость. М.: МГУ. 1973. вып. 8. с. 95—173.
3. *Nakada O.* Theory of Non-linear Responses. Journal of the Physical Society of Japan, 1960, 15, № 12, p. 2280--2288.
4. *Бырдин А. П., Россихин Ю. А.* О рассеянии энергии при периодическом возбуждении нелинейных наследственно-упругих систем.—В сб.: Физика структуры и свойств твердых тел. Куйбышев: КГУ, 1979, вып. 3. с. 200—201.
5. *Москвитин В. В.* Сопротивление вязко-упругих материалов.—М.: Наука, 1972. 328 с.
6. *Астафьев В. И., Мешков С. И.* Вынужденные колебания полубесконечного стержня из нелинейного наследственно-упругого материала.—Изв. АН СССР, МТТ, 1970. № 4, с. 93—98.
7. *Бырдин А. П., Розовский М. И.* Смешанная динамическая задача для нелинейного наследственно-упругого стержня.—В кн. Смешанные задачи механики деформируемого тела: Материалы 2 Всесоюзной конф.. Днепропетровск: ДГУ, 1981, с. 44—45.

Воронежский политехнический институт
Днепропетровский горный институт им. Артема

Поступила в редакцию
10.VI.1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVIII, № 5, 1985 Механика

УДК 539.376

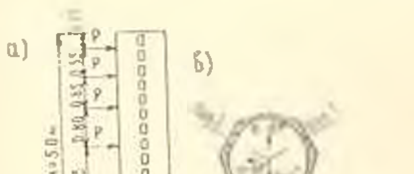
ПОЛЗУЧЕСТЬ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЯДЕР ЖЕСТКОСТИ МНОГОЭТАЖНЫХ ЗДАНИЙ ПРИ ПОСТОЯННЫХ СЖИМАЮЩИХ И СТУПЕНЧАТО-ВОЗРАСТАЮЩИХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ НАГРУЗКАХ

СААКЯН А. О., КОТИКЯН Р. А.

В индустриальном строительстве широкое применение получают многоэтажные здания с ядрами жесткости замкнутого поперечного сечения из монолитного железобетона. Прочность и деформативность таких конструкций недостаточно исследована, а работы, посвященные экспериментальным исследованиям ползучести железобетонных ядер жесткости, практически отсутствуют.

Настоящая работа имеет цель в определенной степени дополнить этот пробел.

Опыты были поставлены на железобетонной модели в 1/10 натурной величины оригинала, в качестве которого было принято ядро жесткости 16-этажного здания типа «Грилнетник». Модель была изготовлена на основе принципа простого механического подобия [1]. Модель состоит из ствола с регулярно расположенными по высоте проемами и из фундамента (фиг. 1). Соотношение жесткостей простенков и перемычек ствола (β) удовлетворяют условию $\beta \geqslant 14$. Ствол представляет тонкостенную полую конструкцию постоянного замкнутого поперечного сечения.



Фиг. 1

Продольная арматура ствола модели ядра жесткости с проемами состоит из 21 стержня. По высоте модели диаметр арматуры изменяется, исходя из закона изменения внешней нагрузки. Стыки продольной арматуры сварены внахлестку. В простенках ствола в качестве рабочей продольной арматуры применена арматура класса A-III, а в зоне конструктивного армирования—арматура класса B-I. Поперечная арматура модели ствола ядра жесткости подобрана согласно рекомендации [2]. Арматура перемычек подобрана также в соответствии с требованиями [3]. Продольная арматура перемычек принята симметричной, поперечная—в виде односрезных хомутов, которые распределены с одинаковым шагом по пролету перемычки.

В табл. 1 приводятся характеристики продольного и поперечного армирования простенков и перемычек ствола.

Модель изготовлена на экспериментальном полигоне ВНЭКТИ в специально разработанной сборно-разборной дерево-металлической опалубке. Бетон марки 300 приготовлен на базальтовом щебне фракции 5÷10 мм и кварцевом песке фракции 0÷5 мм. В качестве вяжущего был применен портландцемент активностью 400. Одновременно были изготовлены кубы размерами 7 см и призмы размерами 7×7×28 см. Положение бетонирования призм—горизонтальное. Образцы освобождались от форм через трое суток, после чего до испытания они хранились в естественных условиях.

Таблица 1

Характеристики армирования модели

	Вид армирования	№№ участка армирования	Высота участка армирования в м	Диаметр стержней в мм	Класс арматуры	Армирование участка в %
1	2	3	4	5	6	7
Простенки	Продольное	1	0÷0,54	8; 6	А—III	1,616
		2	0,54÷1,14	8; 6	А—III	1,376
		3	1,14÷1,44	6	А—III	1,030
		4	1,44÷1,74	6; 5	А—III, В—I	0,880
		5	1,74÷2,34	5	В—I	0,713
		6	2,34÷2,64	5; 3	В—I	0,500
		7	2,64÷5,0	3	В—I	0,258
	Поперечное	1	0÷5,0	3	В—I	0,34
Перемычки	Продольное	1	0÷2,75	5	В—I	1,55
		2	2,75÷5,0	4	В—I	1,00
	Поперечное	1		3	В—I	0,78
		2		3	В—I	0,78

Контрольные образцы арматуры вырезали из концевых участков стержней, предназначенных для армирования модели. Их испытание проводили в соответствии с ГОСТом 12004—66 на 100-тонном прессе.

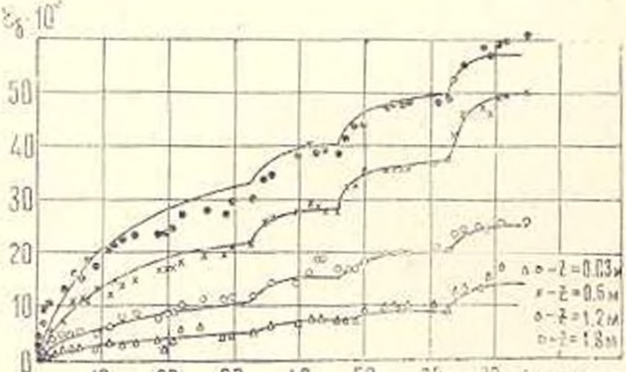
Экспериментальные кривые кратковременных деформаций бетонных призм и контрольных арматурных образцов подвергались статистической обработке по методике [4] и описывались корреляционным уравнением.

Модель была испытана на специально спроектированном стенде [5]. Поперечная нагрузка, изменяющаяся по высоте модели по треугольному закону, была заменена эквивалентной в виде пяти сосредоточенных горизонтальных сил, приложенных в центрах тяжести соответствующих грузовых площадей. Направление действия внешней поперечной нагрузки по отношению к плоскости проемов шва 3 составляет угол $\varphi=90°$, (фиг. 1).

До испытания с помощью пригружающего устройства создавалась дополнительная вертикальная нагрузка, обеспечивающая подобие гравитационных сил оригинала и модели. Чтобы трещины, образующиеся в бетоне, были хорошо видны, на поверхность модели нанесли меловый раствор.

Продольные деформации в бетоне и арматуре по высоте ствола измерялись с помощью тензорезисторов и индикаторов часового типа с ценой деления 0,001 мм, с базой 300 мм. Горизонтальные перемещения ствола модели определяли прогибомерами Аистова с погрешностью 0,01 мм. Сдвиги перемычек (взаимные вертикальные перемещения простенков в местах их примыкания к данному шву) измеряли индикаторами часового типа с ценой деления 0,01 мм. Ширину раскрытия трещин в бетоне измеряли портативным микроскопом типа «Мир-2» с точностью 0,05 мм.

На фиг. 2 приведены кривые ползучести бетона для разных уровней ствола модели при ступенчато-возрастающих нагрузках. В первом этапе нагружения прикладывалась расчетная нагрузка, соответствующая относительной нагрузке $q/q_{раз} = 0{,}532$, которая выдерживалась в течение 33 суток, после чего ступенчатое повышение внешнего момента до максимального значения во всех случаях производилось равными ступенями, составляющими 0,106 от разрушающего момента в заделке. В последних трех ступенях нагрузка выдерживалась соответственно 13, 17 и 12 суток. Разные кривые ползучести по высоте ствола обусловлены законом изменения внешних нагрузок.



Фиг. 2

В табл. 2 приведены показатели экспериментов, полученных при кратковременном и длительном испытаниях.

Как показали проведенные исследования, «характеристика» ползучести практически не зависит от сжимающих напряжений в бетоне и поэтому можно считать, что имеет место линейная ползучесть. Это обстоятельство дает возможность, с одной стороны, без особых трудностей, связанных с применением нелинейной теории ползучести, пользуясь принципом наложения для деформации ползучести бетона, прогнозировать величину этих деформаций при любых внешних нагрузках, с другой стороны, при аппроксимации семейства экспериментальных кривых при ступенчато возрастающих горизонтальных нагрузках воспользоваться линейной теорией ползучести.

Для аппроксимации экспериментальных кривых ползучести, как

Таблица 2

$q/q_{раз}$	Показатели	Показатели при высоте стнола в м (считая от заделки)			
		0,03	0,6	1,2	1,8
0,532	$10^5 \times \varepsilon_б$	39	26	12	5
	$\sigma_б$ в кгс/см²	86	57	27	12
	$10^5 \times \varepsilon_{пол}$ (30) по формуле (3)	32,0	21,5	10,05	4,45
	$\varphi(30)=\varepsilon_{пол}(30)/\varepsilon_б$	0,82	0,83	0,84	0,89
0,638	$10^5 \times \varepsilon_б$	46	33	16	7
	$\sigma_б$ в кгс/см²	99	69	37	17
	$10^5 \times \varepsilon_{пол}$(40) по формуле (3)	29,1	27,4	14,8	6,5
	$\varphi(40)=\varepsilon_{пол}(40)/\varepsilon_б$	0,86	0,83	0,92	0,93
0,744	$10^5 \times \varepsilon_б$	56	41	23	9
	$\sigma_б$ в кгс/см²	119	90	48	20
	$10^5 \times \varepsilon_{пол}$ (60) по формуле (3)	49,2	37	20	90
	φ (60)$=\varepsilon_{пол}(60)/\varepsilon_б$	0,88	0,90	0,67	1,0
0,851	$10^5 \times \varepsilon_б$	64	55	29	15
	$\sigma_б$ в кгс/см²	136	118	60	33
	$10^5 \times \varepsilon_{пол}$ (75)по формуле (3)	57	50	25	14,2
	$\varphi(75)=\varepsilon_{пол}(75)/\varepsilon_б$	0,69	0,91	0,86	0,95

и в работе [7], использована теория упруго-ползучего тела Н. Х. Арутюняна [8]. Мера ползучести бетона была выбрана в виде:

$$C(t)=C_0 f(t) \tag{1}$$

где

$$f(t)=1-0{,}5(e^{-\gamma_1 t}+e^{-\gamma_2 t}) \tag{2}$$

Коэффициенты C_0, γ_1 и γ_2 определяются из опыта. Теоретические кривые ползучести бетона при загружении разными ступенчатыми нагрузками рассчитывались по формуле:

$$\varepsilon_{пол}(t)=\sum_{i=0}^{n} 0.418\,[1-0{,}5(e^{-0{,}06 t_i}+e^{-0{,}11 t_i})]\,[\sigma_i-\sigma_{i-1}] \tag{3}$$

при этом

$$\sigma_{-1}=0$$

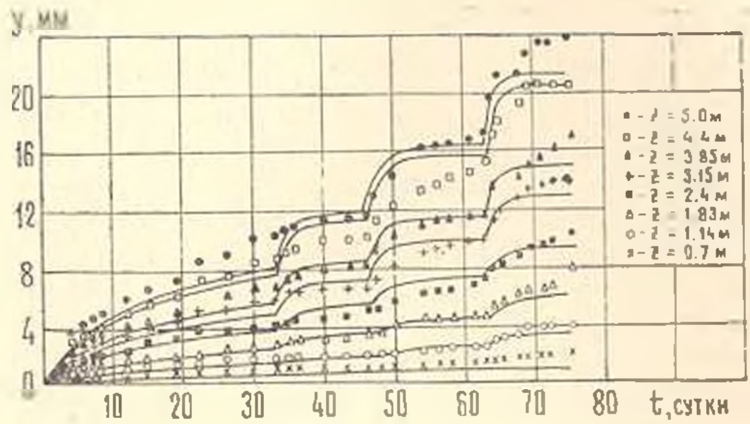
На фиг. 2 сплошными линиями показаны кривые, рассчитанные по формуле (3).

Как видим, в большинстве случаев расходимость экспериментальных и теоретических кривых деформации ползучести бетона при ступенчато-возрастающих внешних нагрузках незначительна.

Таким образом, теория упруго-ползучего тела практически удовлетворительно описывает экспериментальные кривые ползучести бетона ядра жесткости многоэтажных зданий при ступенчато-возрастающих нагружениях. Это подтверждает приемлемость принципа наложения воздействий, являющегося одной из основных гипотез теории упруго-ползучего тела.

Как известно, ползучесть бетона является основной причиной нарастания прогибов изгибаемого элемента при длительном действии нагрузки.

На фиг. 3 разными точками показаны эксперименталые кривые прогибов ядра жесткости при длительном действии ступенчато-возрастающих горизонтальных нагрузок.



Фиг. 3

Таблица 3

$M_{зад}$ в т. м.	Показатели	Показатели при высоте ствола z в м							
		0.7	1.14	1.83	2.40	3.15	3.85	4.40	5.00
20	$M(z)$ в т. м.	15.78	13.14	9.52	6.78	3.66	1.5	0.42	0.0
	Y_0 в мм	1.24	2.83	5.59	8.61	13.1	17.51	20.97	24.15
	$Y_п(33)$ по фор. (4)	0.344	1.29	2.13	3.39	4.63	5.41	7.33	7.72
	$Y_п(33)$ Y_0	0.277	0.455	0.36	0.39	0.35	0.31	0.35	0.32
24	$M(z)$ в т. м.	18.94	14.57	11.42	8.13	4.4	1.8	0.504	0.0
	Y_0 в мм	1.8	3.5	7.5	11.5	16.5	21.3	25.5	30.5
	$Y_п(40)$ по фор. (4)	0.507	1.8	3.148	5.24	6.86	8.01	10.94	11.42
	$Y_п(40)$ Y_0	0.282	0.514	0.42	0.45	0.41	0.37	0.43	0.37
28	$M(z)$ в т. м.	22.1	17.0	13.22	9.5	5.12	2.1	0.588	0.0
	Y_0 в мм	2.2	4.5	9.5	14	19.5	25	31	36.0
	$Y_п(56)$ по фор. (4)	0.713	2.5	4.37	7.02	9.68	11.28	15.41	16.08
	$Y_п(56)$ Y_0	0.324	0.55	0.46	0.501	0.496	0.45	0.497	0.45
32	$M(z)$ в т. м.	25.25	19.42	15.22	10.85	5.85	2.4	0.672	0.0
	Y_0 в мм	2.8	6.0	11.5	16.5	24	31	38	43.5
	$Y_п(75)$ по фор. (4)	0.946	3.32	5.85	9.3	12.77	14.9	20.3	21.25
	$Y_п(75)$ Y_0	0.34	0.55	0.51	0.56	0.53	0.48	0.53	0.49

В табл. 3 приведены прогибы при кратковременном действии нагрузки, ползучесть и «характеристика» ползучести прогибов для разных уровней ствола ядра жесткости.

По данным табл. 3 видно, что «характеристика» ползучести прогибов с увеличением длительности внешней нагрузки увеличивается и при $t = 75$ сут. величины прогибов, обусловленные ползучестью бетона составляют больше, чем 50% начального кратковременного прогиба.

С увеличением высоты ствола z, считая от заделки, прогибы при длительном действии внешней нагрузки увеличиваются.

В результате описания семейства экспериментальных кривых длительных деформаций прогибов при ступенчато-возрастающих нагрузках была получена следующая зависимость:

$$Y_{\text{дл}}(t, z) = 0{,}418[1-0{,}5(e^{-0{,}08t} + e^{-0{,}11t})] \times 0{,}05[M_{\text{зад.}} - M(z)]^2 \qquad (4)$$

Как видно из фиг. 3, где сплошными линиями представлены расчетные кривые, зависимость (4) достаточно хорошо описывает экспериментальные кривые деформаций прогибов при длительном действии внешних ступенчато возрастающих горизонтальных нагрузок.

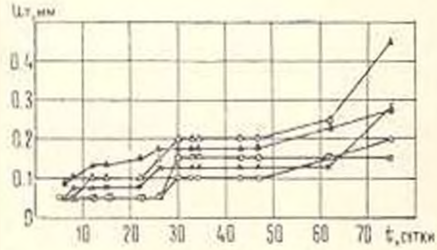
Длительно действующая горизонтальная нагрузка оказывает большое влияние и на ширину раскрытия трещин в железобетонных ядрах жесткости. В течение времени она увеличивается за счет роста деформаций арматуры в сечении с трещиной, обусловленного ползучестью бетона и частичным нарушением сцепления арматуры с бетоном.

На фиг. 4 приведены экспериментальные данные, показывающие изменение ширины раскрытия разных трещин, нормальных к продольной оси ствола модели ядра жесткости, при длительном действии ступенчато-возрастающей горизонтальной нагрузки. Как видно, вследствие ползучести бетона, ширина раскрытия этих трещин существенно увеличивается.

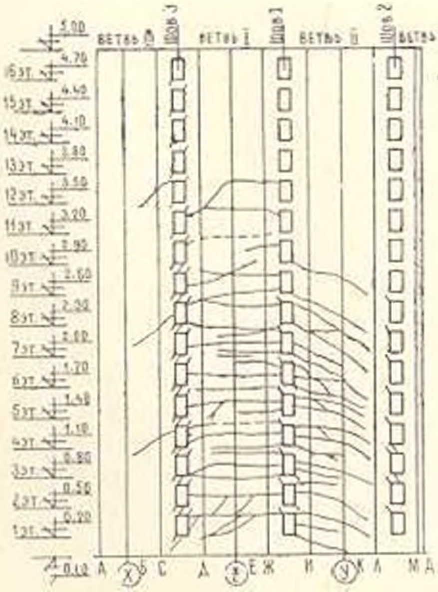
В табл. 4 приведены данные, полученные непосредственно из опыта, показывающие, что рост раскрытия трещин, нормальных к продольной оси ствола модели ядра жесткости, при ступенчато-возрастающих внешних нагрузках в течение времени составляет до 100% по отношению к ширине трещин при начальном кратковременном действии горизонтальной нагрузки. Схемы расположения трещин приведены на фиг. 5. (Пунктирами показаны трещины, открывающиеся при длительном действии внешней расчетной нагрузки).

Интересно рассматривать процесс развития косых трещин при длительном действии внешней ступенчато-возрастающей нагрузки, которые появляются в углах проемов швов 2 и 3 (фиг. 1). На фиг. 6 приведены экспериментальные кривые, показывающие изменение ширины раскрытия косых трещин в углах проемов. Как видно из этих графиков, ширина косых трещин по шву 3 существенно больше соответствующих величин шва 2.

В работе конструкции ядра жесткости особо важную роль играют перемычки, которые обеспечивают совместную работу простенков (ветвей). В зависимости от соотношения жесткостей перемычек и простенков изменяются напряженно-деформированное состояние сечения и несущая способность всей конструкции.



Фиг. 4



Фиг. 5

Таблица 1

№№ трещин	$M(z)/M_{зад}=0.53$			$M(z)/M_{зад}=0.638$			$M(z)/M_{зад}=0{,}744$			$M(z)/M_{зад}=0{,}851$		
	$t=33$ сут; $M_{зад}=20$ т. м			$t=47$ сут; $M_{зад}=24$ т. м			$t=62$ сут; $M_{зад}=28$ т. м			$t=75$ сут; $M_{зад}=32$ т. м		
	$a_t(0)$	$a_t(t)$	$\frac{a_t(t)}{a_t(0)}$	$a_t(0)$	$a_t(t)$	$\frac{a_t(t)}{a_t(0)}$	$a_t(0)$	$a_t(t)$	$\frac{a_t(t)}{a_t(0)}$	$a_t(0)$	$a_t(t)$	$\frac{a_t(t)}{a_t(0)}$
1	0.25	0.20	0.80	0.25	0.20	0.80	0.40	0.25	0.625	0.65	0.45	0.692
2	0.22	0.18	0.82	0.22	0.18	0.82	0.27	0.23	0.85	0.37	0.28	0.756
3	0.15	0.15	1.0	0.15	0.15	1.0	0.15	0.15	1.0	0.15	0.15	1.0
4	0.27	0.13	0.48	0.27	0.13	0.48	0.32	0.13	0.406	0.47	0.28	0.596
5	0.20	0.10	0.50	0.20	0.10	0.50	0.20	0.15	0.75	0.25	0.20	0.80

В работе [10] приведены интересные данные. Исследуя работу перемычек в системе ядра жесткости, авторы пришли к выводу, что при обычном армировании увеличение податливости перемычек существенно увеличивает податливость ядра в целом. Следовательно, деформации взаимного смещения концов перемычек в течение времени должны увеличивать податливость ядра жесткости с проемами.

В табл. 5 приведены экспериментальные данные ползучести взаимного смещения концов перемычек $\Delta_п(t)$ при различных уровнях и длительности действия внешней горизонтальной нагрузки. В этой же таблице приведены также деформации взаимного смещения концов перемычек при кратковременном действии внешней нагрузки.

Таблица 5

Высота ствола в м	$M_{изг}$ = 20 т.м			$M_{изг}$ = 32 т.м		
	$\Delta(0)$ в мм	$\Delta_п(t)$ в мм при t = 33сут	$\frac{\Delta_п(t)}{\Delta(0)}$	$\Delta(0)$ в мм	$\Delta_п(t)$ в мм при t = 75сут	$\frac{\Delta_п(t)}{\Delta_0(t)}$
0,7	1,39	0,52	0,374	1,92	0,69	2,16
1,9	0,49	0,27	0,551	0,83	0,68	1,22
3,16	0,40	0,18	0,450	0,60	0,50	1,20
3,70	0,25	0,12	0,480	0,42	0,36	1,16

Как видно из этих данных, отношение $\Delta_п(t)/\Delta(0)$ увеличивается с увеличением внешней нагрузки и ее длительности действия. Взаимные смещения концов перемычек при $t=75$ суток в два и более раза превышают соответствующие деформации при кратковременном действии внешней нагрузки.

Фиг. 6

Выводы

1. При испытании железобетонных ядер жесткости многоэтажных зданий под действием ступенчато-возрастающих горизонтальных нагрузок „характеристика" ползучести бетона не зависит от уровня внешней нагрузки, то есть имеет место линейная ползучесть.

«Характеристика» ползучести увеличивается с увеличением продолжительности действия внешней нагрузки и при $t=60\div75$ суток деформации ползучести достигают величины упруго-мгновенных деформаций бетона.

2. Линейная теория упруго-ползучего тела вполне удовлетворительно описывает экспериментальные кривые ползучести бетона ядра жесткости многоэтажных зданий при постоянно-сжимающих и ступенчато-возрастающих горизонтальных нагрузках.

3. Увеличение прогибов во времени является следствием ползучести бетона. При $t=75$ суток ползучесть прогибов составляет больше, чем 50% начального упругого прогиба. С увеличением высоты ствола ядра жесткости z, считая от заделки, прогибы при длительном действии внешних нагрузок увеличиваются.

4. Вследствие ползучести бетона ширина раскрытия трещин, нормальных к продольной оси ствола ядра жесткости, увеличивается. При расчетной горизонтальной нагрузке открываются две новые трещины, после чего с увеличением внешней горизонтальной нагрузки характер

трещинообразования не изменяется. Со временем увеличиваются абсолютные величины ширины раскрытия старых трещин и при $t = 60 \div 75$ суток удваиваются по отношению к их ширине при кратковременном нагружении.

5. Ползучесть бетона оказывает существенное влияние на взаимные смещения концов перемычек ствола ядра жесткости, увеличивая податливость перемычек. В пределах проведенных экспериментов $\Delta_n(t)/\Delta(0) = 1,60 - 1,70$.

ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ՍԵՂՄՈՂ ԵՎ ԱՍՏԻՃԱՆԱԿԱՆ ԶԵՎՈՎ ԱՃՈՂ ՀՈՐԻԶՈՆԱԿԱՆ ՈՒԺԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ ԲԱԶՄԱՀԱՐԿ ՇԵՆՔԵՐԻ ԵՐԿԱԹԲԵՏՈՆՅԱ ԿՈՇՏ ՄԻՋՈՒԿՆԵՐԻ ՍՈՂՔԸ

Ա. Հ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, Ռ. Ա. ԿՈՏԻԿՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում բերված են բազմահարկ շենքերի երկաթբետոնյա ամրության միջուկների բետոնի սողքի հետազոտման արդյունքները, ինչպես նաև բետոնի սողքի ազդեցությունը կոնստրուկցիայի ճկվածքների մեծացման, ճաքերի առաջացման ու լայնացման և միջնորմների վերջավորությունների փոխադարձ տեղաշարժի վրա։

Հաստատված է, որ երկարատև ազդող արտաքին բեռները բերում են բետոնի դեֆորմացիաների էապես մեծացման։ Իր հերթին բետոնի սողքը մեծացնում է կոնստրուկցիայի ճկվածքներն ու բացված նորմալ ճաքերի լայնությունները, միաժամանակ բացվում են նոր նորմալ ճաքեր։ Բետոնի սողքը բերում է նաև միջնորմների վերջավորությունների փոխադարձ տեղաշարժի մեծացման։

THE CREEP OF REINFORCED CONCRETE CORES OF MULTISTORY BUILDINGS UNDER CONSTANT COMPRESSABLE AND STEPWISE INCREASING LATERAL LOADS

A. O. SAHAKIAN, R. A. KOTIKIAN

Summary

Experimental and theoretical investigations of creep of reinforced concrete models of hardness core and its effect on values of deflections, on width of normal cracks and shear displacement of connecting beams are presented.

The significant increase of strain, deflections, width of cracks and displacement of beam ends is established. The obtained experimental curves are approximated by the theory of elasto-creeping bodies.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров А. Г.* О механическом подобии твердых деформируемых тел (о теории моделирования). Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1963.
2. *Баташев В. М.* Прочность, трещиностойкость и деформации железобетонных элементов с многорядным армированием. Киев: Будівельник, 1978
3. СНиП II-21-75. Бетонные и железобетонные конструкции. Госстрой СССР.
4. *Митропольский А. К.* Техника статистического вычисления. М.: Наука, 1961.
5. *Саакян А. О., Саакян Р. О., Шахназарян С. Х.* Стенд для испытания конструкций. Авторское свидетельство № 654871 «Бюллетень изобретений», 1979, № 12.
6. *Саакян А. О., Саакян Р. О., Шахназарян С. Х.* Возведение зданий и сооружений методом подъема. М.: Стройиздат, 1982.
7. *Саакян А. О., Котикян Р. А.* Ползучесть железобетонных моделей ядер жесткости многоэтажных зданий при действии горизонтальных нагрузок.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1982, т. 35, № 3.
8. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.-Л.: Гостехиздат, 1952.
9. *Васильев П. И.* Некоторые вопросы пластических деформаций бетона.—«Известия ВНИИГ», 1953, т. 49.
10. *Irwin A. W., Bolton C. I.* Torsion of Tall Buildings Cores—Proc. Inst. Civ. Engrs., Part 2, 1977, 63, sept., p. 579—591.

Всесоюзный проектно-экспериментальный
конструкторский и технологический институт

Поступила в редакцию
28.IV 1983