ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

38 (1)

1985

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVIII, № 4, 1985 Механика

УДК 539.3

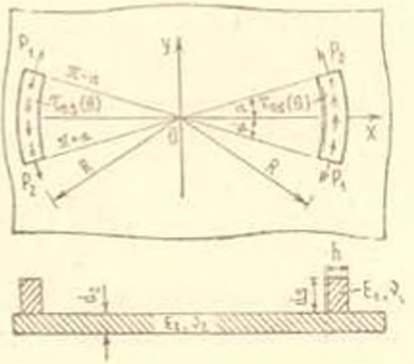
ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ КОЛЬЦЕОБРАЗНЫХ БРУСЬЕВ К УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ

ТУМАНЯН Р. С.

Рассматривается задача о передаче нагрузок от неполных упругих круговых брусьев (накладок) малых поперечных сечений к упругой бесконечной пластине.

Обсуждаемая здесь задача относится к разделу теории упругости о контактном взаимодействии тонкостенных элементов в виде накладок с массивными деформируемыми телами, основные достижения которого отражены в [1]. Здесь укажем лишь на работы [2—10], близко примыкающие к приводимому ниже исследованию.

1. Пусть упругая бесконечная пластина (E_2, ν_2) высотой d_2 на своей верхней грани усилена двумя кольцеобразными упругими брусьями (E_1, ν_1) с круговыми осями радиусов R, имеющими высоту d_1, ширину h, угол раствора 2α $(0<\alpha<\pi/2)$ и расположенными симметрично относительно вертикальной оси oy. К концам брусьев в направлении их осей приложены сосредоточенные силы, а их верхние грани в этом же направлении загружены произвольными тангенциальными силами (фиг. 1).



фиг. 1

Будем считать, что $h, d_1 \ll R (h<d_1)$. Требуется определить контактные напряжения под брусьями и коэффициенты их интенсивностей на концах брусьев.

Кольцеобразные брусья рассматриваются в рамках классической теории тонких оболочек, имеющих пренебрежимо малые изгибные жесткости в вертикальном и поперечном направлениях, а упругая бесконечная пластина — в рамках плоской теории упругости при условиях обобщенного плоского напряженного состояния.

Для вывода определяющего уравнения поставленной задачи воздействие кольцеобразных накладок заменим неизвестными осевыми тангенциальными $\tau_1(\theta)$ и поперечными радиальными $q_1(\theta)$ контактными напряжениями. По известной методике [11] после простых выкладок для деформации в окружном направлении $\varepsilon_\theta^{(2)}$ от сосредоточенных вдоль круговой дуги радиуса R и раствора 2α тангенциальных и радиальных сил интенсивностей $\bar{\tau}_s(\theta)$ и $\bar{q}_s(\theta)$ соответственно получим следующее выражение:

$$\varepsilon_\theta^{(2)}=\frac{(1+\nu_2)(3-\nu_2)}{8\pi E_2 d_2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\left|\operatorname{ctg}\frac{u-\theta}{2}+\operatorname{tg}\frac{u-\theta}{2}-2\sin(u-\theta)\right|\bar{\tau}_s(u)du-$$

$$-\frac{1-\nu_2^2}{2\pi E_2 d_2}\left[\frac{\alpha}{R}(P_1+P_2)-\int_{-\alpha}^{\alpha}\bar{\tau}_s(u)udu+\int_{-\alpha}^{\alpha}\tau_{0s}(u)\,udu\right] \tag{1.1}$$

Поскольку $h, d_s \ll R$, то жесткостями изгиба брусьев в вертикальном и поперечном направлениях пренебрегаем. В итоге согласно [12] придем к уравнениям

$$\frac{1}{R}\frac{dT_1(\theta)}{d\theta}+\frac{\tau_{0s}(\theta)-\bar{\tau}_s(\theta)}{d_s}=0;\quad \bar{q}_s(\theta)=-\frac{d_s}{R}T_1(\theta) \tag{1.2}$$

и граничным условиям

$$T_1(-\alpha)=\frac{P_1}{d_s};\quad T_1(\alpha)=\frac{P_2}{d_s} \tag{1.3}$$

Здесь $T_1(\theta)$ — осевое усилие в брусе. Отметим, что согласно (1.2) функцией $\bar{q}_s(\theta)$ дается также радиальное усилие в брусе.

Из этих уравнений при помощи закона Гука для осевой деформации $\varepsilon_1(\theta)$ накладки получим следующее выражение:

$$\varepsilon_1(\theta)=\frac{1}{A_s E_1}\left\{P_1+R\int_{-\alpha}^{\theta}[\bar{\tau}_s(u)-\tau_{0s}(u)]du\right\};\quad (-\alpha<\theta<\alpha) \tag{1.4}$$

где $A_s=hd_s$ — ее площадь поперечного сечения.

Далее, запишем условие контакта

$$\varepsilon_\theta^{(2)}=\varepsilon_1(\theta);\quad (-\alpha<\theta<\alpha)$$

которое с учетом (1.1) и (1.4) решение поставленной контактной задачи после перехода к безразмерным величинам окончательно сводит к решению следующего сингулярного интегро-дифференциального уравнения:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left|\operatorname{ctg}\frac{u-\theta}{2}+K(u-\theta)\right|\varphi'(u)du=\lambda\varphi(\theta)+f(\theta)-\nu_0^* C;\quad (-\alpha<\theta<\alpha) \tag{1.5}$$

при граничных условиях

$$\varphi(-\alpha)=0;\quad \varphi(\alpha)=1 \tag{1.6}$$

вытекающих из условий равновесия накладок.

Здесь введены обозначения

$$\lambda = \frac{8\pi R d_2 E_2}{(1+\nu_2)(3-\nu_2) h d_1 E_1}; \quad \nu_0^* = \frac{4(1-\nu_2)}{3-\nu_2}; \quad \varphi(\theta) = \int_{-\alpha}^{\theta} \tau(u)\,du$$

$$f(\theta) = \lambda \left[p_1 - \int_{-\alpha}^{\theta} \tau_0(u)\,du \right] + \nu_0^* \left[\pi(p_1 + p_2) + \int_{-\alpha}^{\alpha} \tau_0(u)\,u\,du \right]$$

$$\tau(u) = \frac{R}{P}\,\bar{\tau}_s(u); \quad \tau_0(u) = \frac{R}{P}\,\tau_{0s}(u) \tag{1.7}$$

$$p_1 = \frac{P_1}{P}; \quad p_2 = \frac{P_2}{P}; \quad P = P_1 - P_2 + R\int_{-\alpha}^{\alpha} \tau_{0s}(u)\,du$$

$$K(u-\theta) = \operatorname{tg}\frac{u-\theta}{2} - 2\sin(u-\theta); \quad C = \int_{-\alpha}^{\alpha} \tau(u)\,u\,du$$

При этом радиальные контактные напряжения будут определяться по формуле

$$q(\theta) = -p_1 - \varphi(\theta) + \int_{-\alpha}^{\theta} \tau_0(u)\,du; \quad q(\theta) = \frac{R}{P}\,\bar{q}_s(\theta) \tag{1.8}$$

и при больших R можно считать $\bar{q}_s(\theta) \approx 0$.

Отметим, что первый интеграл в (1.5) следует понимать в смысле главного значения по Коши.

2. Для решения сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.5) при граничных условиях (1.6), следуя известной процедуре [6, 8], положим

$$\tau(\theta) = \varphi'(\theta) = \frac{\sec\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\alpha)}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right); \quad (-\alpha < \theta < \alpha) \tag{2.1}$$

где $T_n(\theta)$—многочлены Чебышева первого рода; X_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$)—неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Отсюда после простых выкладок получим

$$\varphi(\theta) = \sec\frac{\alpha}{2}\left\{ X_0\left[\pi - \arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} X_n \sin\left[n \arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\}; \quad (-\alpha < \theta < \alpha) \tag{2.2}$$

Из граничных условий (1.6) непосредственно находим

$$X_0 = \pi^{-1}\cos\frac{\alpha}{2}$$

Относительно остальных коэффициентов $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ получим следующую бесконечную систему линейных уравнений:

$$X_m+\sum_{n=1}^{\infty} K_{m,n}X_n=f_m-\gamma_0 C h_m; \quad (m=1,\ 2,\ \ldots) \tag{2.3}$$

где введены обозначения

$$K_{m,n}=\frac{2\lambda}{n\pi^2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi\sin m\varphi\sin n\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\varphi}\,d\varphi-h^{(1)}_{m,n}-h^{(2)}_{m,n}-$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sqrt{1-\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}\cos^2\varphi}-1}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos\varphi}\right)^{n}\frac{\operatorname{tg}\varphi\sin m\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}\cos^2\varphi}}\,d\varphi; \quad (m,n=1,2,\ldots)$$

$$f_m=\left(2\pi^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^{-1}\int_{-\alpha}^{\alpha}f(\theta)\frac{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}}{\cos(\theta/2)}\,U_{m-1}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)d\theta+$$

$$+2\lambda\pi^{-2}X_0\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\int_0^{\pi}\frac{(\pi-\varphi)\sin\varphi\sin m\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\varphi}\,d\varphi- \tag{2.4}$$

$$-2\pi^{-1}X_0\int_0^{\pi}\left(1-\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}\cos^2\varphi}}\right)\frac{\operatorname{tg}\varphi\sin m\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\varphi}\,d\varphi+$$

$$+X_0\left(f^{(1)}_m+f^{(2)}_m\right); \quad (m=1,\ 2,\ \ldots)$$

$$h_{2k}=0;\ h_{2k-1}=(-1)^{k-1}2\pi^{-1}\cos\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\right)^{2k-1}; \quad (k=1,\ 2,\ \ldots)$$

$$h^{(1)}_{2k,2p}=0;\ h^{(1)}_{2k-1,\,2p-1}=(-1)^{k+p}8(2k-1)\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\right)^{2(k+p-1)}; \quad (k,\ p=1,2,\ldots)$$

$$h^{(2)}_{2k,2p}=(-1)^{k+p}\,16k\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\right)^{2(k+p)};\ h^{(2)}_{2k-1,2p-1}=0; \quad (k,\ p=1,\ 2,\ \ldots)$$

$$f^{(1)}_{2k}=(-1)^k 8k\cos\frac{\alpha}{2}\left(2\cos\frac{\alpha}{2}-1\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\right)^{2k};\ f^{(1)}_{2k-1}=0; \quad (k=1,2,\ \ldots)$$

$$f^{(2)}_{2k}=(-1)^k 2\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\right)^{2k};\ f^{(2)}_{2k-1}=0; \quad (k=1,\ 2,\ \ldots)$$

Здесь $U_{m-1}(\theta)$ $(m=1,\ 2,\ \ldots)$ — многочлены Чебышева второго рода.

3. Перейдем к исследованию (2.3). С этой целью оценим суммы

$$S_m=\sum_{n=1}^{\infty}|K_{m,n}|\leqslant S^{(1)}_m+S^{(2)}_m+S^{(3)}_m+S^{(4)}_m; \quad (m=1,\ 2,\ \ldots) \tag{3.1}$$

где

$$S^{(1)}_m=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n}K^{(1)}_{m,n}\right|; \qquad S^{(2)}_m=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n}K^{(2)}_{m,n}\right|$$

$$S^{(3)}_m = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\,K^{(3)}_{m,n}\right|; \qquad S^{(4)}_m = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\,R_{m,n}\right|$$

$$\left.\begin{aligned}
K^{(1)}_{m,n} &= \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f_1(\varphi, t)\sin m\varphi \sin nt \, d\varphi\, dt \\
K^{(2)}_{m,n} &= \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f_2(\varphi, t)\sin m\varphi \sin nt \, d\varphi\, dt \\
K^{(3)}_{m,n} &= \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f_3(\varphi, t)\sin m\varphi \sin nt \, d\varphi\, dt \\
R_{m,n} &= 2\lambda\pi^{-2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi \sin m\varphi \sin n\varphi}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\varphi}\,d\varphi
\end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

а функции $f_1(\varphi, t)$, $f_2(\varphi, t)$ и $f_3(\varphi, t)$ имеют вид

$$f_1(\varphi, t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\,\frac{\sin\varphi \sin t}{\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos\varphi\cos t\right)^2}$$

$$f_2(\varphi, t) = -2\,\mathrm{tg}^4\frac{\alpha}{2}\,\frac{\sin 2\varphi \sin 2t}{\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\varphi\right)^2\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2 t\right)^2}$$

После простых преобразований получим

$$S^{(4)}_m \leqslant \frac{\lambda\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{2\pi^2}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|M_{m+n-1}|}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|M_{m-n+1}|}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|M_{m+n+1}|}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|M_{m-n-1}|}{n}\right|$$

Здесь

$$|M_p| = \int_0^{\pi}\frac{|\sin p\varphi|}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\varphi}\,d\varphi \leqslant \frac{B}{|p|}; \quad B = \frac{2+\pi\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

Оценив каждую сумму в выражении $S^{(4)}_m$, окончательно будем иметь

$$\begin{aligned}
S^{(4)}_m \leqslant \frac{\lambda\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{2\pi^2}\Bigg\{ &\frac{B}{m-1}\left|c+\ln(m-1)+\frac{1}{2(m-1)}-\varkappa(m-1)\right| + B_m + \\
&+B\left|\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{3}{m+1}\left(c+\ln m+\frac{1}{2m}-\varkappa(m)\right)\right| + \\
&+\frac{B}{m+1}\left|c+\ln(m+1)+\frac{1}{2(m+1)}-\varkappa(m+1)\right| + B_m + \qquad (3.3) \\
+\frac{B}{m-1}\Bigg|3c+\ln(m-1)(m-2)^2 &+ \frac{1}{2(m-1)}+\frac{1}{m-2}-\varkappa(m-1)-2\varkappa(m-2)\Bigg|\Bigg\}
\end{aligned}$$

Здесь учтена известная формула 0.131 [13], где c — постоянная Эйлера, а функция

$$\varkappa(m) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k}{m(m+1)\dots(m+k-1)}$$

где

$$A_k = \frac{1}{k}\int_0^1 x(1-x)(2-x)\dots(k-1-x)dx \quad (k=2, 3, \dots)$$

$$B_m = \begin{cases} B\pi^2/6 & \text{при} \quad m=1 \\ 0 & \text{при} \quad m=2, 3, \dots, \end{cases} \qquad B'_m = \begin{cases} B\pi^2/6 & \text{при} \quad m=1 \\ B & \text{при} \quad m=2, 3, \dots \end{cases}$$

Отсюда видно, что, по крайней мере,

$$\varkappa(m) = o\left(\frac{1}{m}\right) \quad \text{при} \quad m\to\infty$$

Из неравенства (3.3) следует, что

$$S_m^{(4)} = o(m^{\varepsilon-1}) \quad \text{при} \quad m\to\infty$$

где ε — сколь угодно малое положительное фиксированное число.

Обращаясь к оценке сумм $S_m^{(j)}$ ($j=1, 2, 3$) из (3.2), при помощи известного неравенства Коши-Буняковского и равенства Парсеваля для двойных рядов Фурье легко показать, что

$$S_m^{(j)} = o(m^{(\varepsilon-1)/2}) \quad \text{при} \quad m\to\infty \quad (j=1, 2, 3)$$

В результате

$$S_m = o(m^{(\varepsilon-1)/2}) \quad \text{при} \quad m\to\infty$$

что и означает, что бесконечная система линейных уравнений (2.3) при любом значении физического параметра $\lambda (0 \leqslant \lambda < \infty)$ квазивполне регулярна.

Далее можно показать, что при $m\to\infty$ свободные члены бесконечной системы (2.3) стремятся к нулю со скоростью не менее, чем $m^{-1/2}$.

Займемся определением постоянной C. Пусть $\{X_m^{(f)}\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{X_m^{(h)}\}_{m=1}^{\infty}$ будут решениями бесконечной системы (2.3) при правых частях, равных $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ соответственно. Тогда решение $\{X_m\}_{m=1}^{\infty}$ системы (2.3) будет даваться формулой

$$X_m = X_m^{(f)} - \nu_0^* C X_m^{(h)} \quad (m=1, 2, \dots) \tag{3.4}$$

С другой стороны, из (1.7) и (2.1) получим

$$C = \left|1+\nu_0^*\sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n^{(h)}\right|^{-1} \left|X_0 C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n^{(f)}\right| \tag{3.5}$$

где

$$C_n = 2 \sec \frac{\alpha}{2} \int\limits_0^{\pi} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cos \varphi \right) \cos n\varphi d\varphi; \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (3.6)$$

Отметим, что исходя из (2.1), для коэффициентов интенсивностей тангенциальных контактных напряжений в концевых точках накладок получим

$$A_1 = \lim_{\theta \to \alpha} \sqrt{\alpha - \theta}\, \tau(\theta) = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} \left(X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \right)$$

$$A_2 = \lim_{\theta \to -\alpha} \sqrt{\alpha + \theta}\, \tau(\theta) = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} \left[X_0 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n X_n \right] \qquad (3.7)$$

4. Для числовых расчетов было положено $\tau_0(\theta) \equiv 0$ и рассмотрены два случая загружения накладок. В первом случае (симметричное нагружение) $P_1 = P_2$. Тогда $P = 0$ и в качестве P формально можно принять P_1, что даст $p_1 = p_2 = 1$. Поскольку в разбираемом случае распределение $\tau(\theta)$ нечетное, то вместо (2.1) будем иметь

$$\tau(\theta) = \frac{\sec \frac{\theta}{2}}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\alpha)}} \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n-1} T_{2n-1} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right); \quad (-\alpha < \theta < \alpha) \qquad (4.1)$$

а вместо (1.8) —

$$q(\theta) = -1 + \sec \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^{-1} X_{2n-1} \sin \left[(2n-1) \arccos \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

$$(-\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha) \qquad (4.2)$$

Соответствующая (2.3) бесконечная система имеет вид

$$X_{2m-1} + \sum_{n=1}^{\infty} K_{2m-1,2n-1} X_{2n-1} = f_{2m-1} - \nu_0^* C h_{2m-1}; \quad (m = 1, 2, \ldots) \qquad (4.3)$$

где

$$f_{2m-1} = (-1)^{m-1} 2\pi^{-1} (\lambda + 2.08\alpha) \cos \frac{\alpha}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} \right)^{2m-1}$$

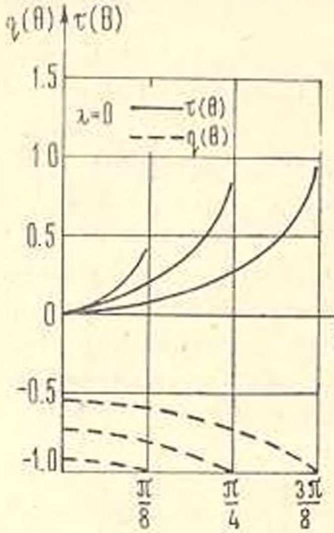
$$(m = 1, 2, \ldots)$$

$$h_{2m-1} = (-1)^{m-1} 2\pi^{-1} \cos \frac{\alpha}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} \right)^{2m-1},$$

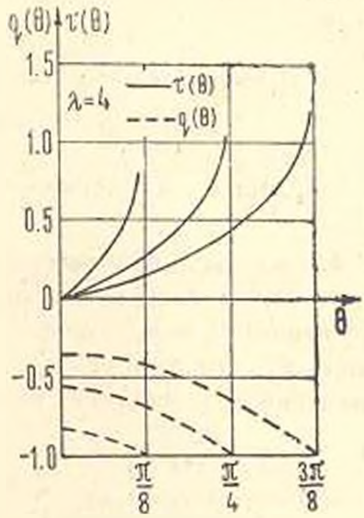
а выражение $K_{2m-1,2n-1}$ дается формулой (2.4). Отметим, что из (4.2) $q(\alpha) = -1$, а из (3.5)

$$C = \left[1 + \nu_0^* \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n-1} X_{2n-1}^{(h)} \right]^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n-1} X_{2n-1}^{(f)}$$

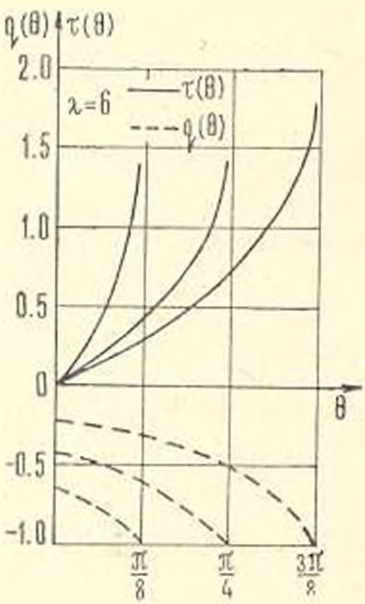
Численная реализация (4.1) — (4.3) была осуществлена при $\lambda = 0$; 4; 6; $\alpha = \pi/8$; $\pi/4$; $3\pi/8$; $\nu_2 = 0.3$. Причем каждое значение λ сочеталось со всеми заданными значениями α. Сначала на ЭВМ „ЕС—1022" была решена соответствующая укороченная система (4.3). Затем вычисления производились по формулам (4.1) и (4.2). Значения коэффициентов интенсивностей A_1 и A_2 ($A_2 = -A_1$) подсчитались по формуле (3.7). Значения $\tau(\theta)$ и $q(\theta)$, вычисленные с точностью до 10^{-4}, приведены на графиках (фиг. 2—4), а значения A_1 — в табл. 1.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Таблица 1

α \ λ	0.0	4.0	6.0
$\pi/8$	0.05790	0.29609	0.39441
$\pi/4$	0.16659	0.44138	0.54219
$3\pi/8$	0.31596	0.57170	0.66116

Анализ численных результатов позволяет утверждать, что по мере возрастания размеров контактной зоны напряжения $\tau(\theta)$ и $q(\theta)$ (по абсолютной величине) заметно падают. Такую же закономерность можно обнаружить при возрастании λ, то есть при уменьшении жесткости системы накладка—основание E_1/E_2. Из табл. же 1 видно, что по мере возрастания λ и α коэффициент A_1 заметно увеличивается. Последнее обстоятельство указывает на то, что при возрастании этих параметров нагрузка, в основном, поглощается в концевых зонах накладок. Кроме того, здесь сказывается эффект взаимовлияний друг на друга брусьев. Вследствие последнего по мере возрастания α значение

A_1 получается больше, чем соответствующее значение A_1 при изолированном одном брусе.

Во втором случае (кососимметрическое нагружение) $P_2=-P_1$. В этом случае $P=2P_2$ и соответствующие (4.1)—(4.3) формулы будут

$$\tau(\theta)=\frac{\sec\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}}\left[\pi^{-1}\cos\frac{\alpha}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}X_{2n}T_{2n}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)\right];\quad(-\alpha<\theta<\alpha)\tag{4.4}$$

$$q(\theta)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sec\frac{\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}X_{2n}\sin\left[2n\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\right]+$$

$$+\pi^{-1}\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right);\quad(-\alpha\leqslant\theta\leqslant\alpha)$$

$$X_{2m}+\sum_{n=1}^{\infty}K_{2m,2n}X_{2n}=f_{2m};\quad(m=1,2,\ldots)\tag{4.5}$$

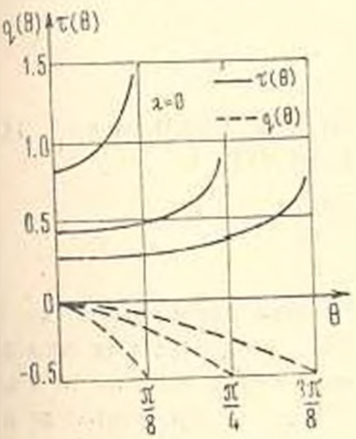
где

$$f_{2m}=-2\lambda\pi^{-2}\sin\frac{\alpha}{2}\int_0^{\pi}\frac{\varphi\sin\varphi\sin 2m\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\varphi}\,d\varphi+$$

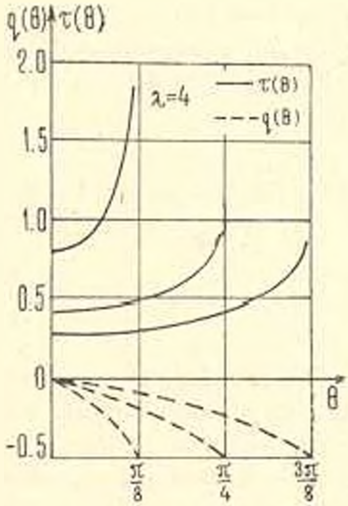
$$+(-1)^m 2\pi^{-1}\cos\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\right)^{2m}\left[4m\cos\frac{\alpha}{2}\left(2\cos\frac{\alpha}{2}-1\right)+1\right]-$$

$$-2\pi^{-1}\cos\frac{\alpha}{2}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}\cos^2\varphi}}\right)\frac{\operatorname{tg}\varphi\sin 2m\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\varphi}\,d\varphi;\ (m=1,2,\ldots)$$

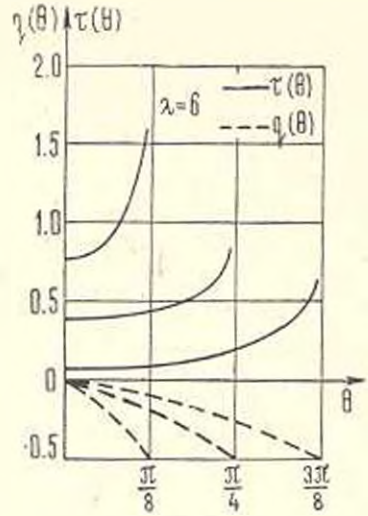
а $K_{2m,2n}$, как ранее, дается формулой (2.4), причем $q(\alpha)=-1/2$.



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Ход изменения $\tau(\theta)$ и $q(\theta)$ при указанных выше значениях параметров λ и α показан на графиках (фиг. 5—7). Закономерности их изменения те же, что и в первом случае. Вдобавок здесь можно утверждать, что при $\alpha < \pi/8$ напряжениями $q(\theta)$ (по абсолютной величине) можно пренебрегать по сравнению с $\tau(\theta)$.

В заключение приношу глубокую благодарность С. М. Мхитаряну за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԱՆՎԵՐՋ ՍԱԼԻՆ ԵՐԿՈՒ ՄԻԱՏԵՍԱԿ ՕՂԱԿԱՁԵՎ ՉՈՐՍՈՒՆԵՐԻՑ ԲԵՌԻ ՓՈԽԱՆՑՈՒՄԸ

Ռ. Ս. ԹՈՒՄԱՆՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է առաձգական անվերջ սալին շրջանագծային առանցքներով երկու միատեսակ առաձգական չորսուններից բեռի փոխանցման վերաբերյալ կոնտակտային խնդիրը։

Խնդրի լուծումը բերվում է սինգուլյար ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը, որի կորիզը ներկայացված է Հիլբերտի կորիզի և ռեգուլյար կորիզի գումարի տեսքով։ Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների ապարատի օգնությամբ այդ հավասարումը իր հերթին բերվում է համարժեք քվազիլիովին ռեգուլյար անվերջ գծային հավասարումների սիստեմի։

Ստացված են թվային արդյունքներ։

LOAD TRANSFEER FROM TWO EQUAL CIRCULAR BEAMS TO AN ELASTIC INFINITE PLATE

R. S. TUMANIAN

Summary

The problem of a contact task of a load transfer from two equal elastic beams with circular axes to an elastic infinite plate is considered.

The solution of this problem is reduced to the solution of a singular integro-differential equation, whose nucleus is represented as a sum of Gilbert's nucleus and regular nucleus. In its turn, this equation by

means of Chebishov's apparatus of orthogonal polynominals is reduced to an equivalent quasi-whole regular infinite system of linear equations.
Numerical examples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976.
2. *Стернберг Е., Муки Р.* Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. Прикладная механика. Труды американского о-ва инженеров-механиков, русский перевод, серия Е, 1968, т. 35, № 4.
3. *Арутюнян Н. Х.* Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением.—ПММ, т. 32, вып. 4, 1968.
4. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками.—ПММ, т. 33, вып. 5, 1969.
5. *Arutunian N. K., Mkhitarian S. M.* Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners. Trends in elasticity and thermoelasticity. Witold Novacki Anniversary Volume. Groningen, Wolters-Noordhoff Publ., 1971, p. 3–20.
6. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи полупространства, усиленного упругими накладками.—ПММ, т. 36, вып. 5, 1972.
7. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К периодической контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением.—ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
8. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К периодической контактной задаче для полуплоскости с упругими накладками.—ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
9. *Александров В. М., Солодовник М. Д.* Эффективный метод решения задачи о взаимодействии накладки (стрингера) с упругой полуплоскостью и некоторые новые качественные результаты. Труды X Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Т. 1, Тбилиси: Изд-во «Мецниереба», 1975.
10. *Александров В. М., Соловьев А. С.* Некоторые смешанные плоские задачи теории упругости и их приложение к расчету погрешностей тензоизмерений.—МТТ, 1970, № 1.
11. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
12. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962.
13. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

Кировоканский филиал ЕрПИ
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
13.V.1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVIII, № 4, 1985 Механика

УДК 539.376

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ДЕФОРМИРУЮЩЕЙСЯ ПО СТЕПЕННОМУ ЗАКОНУ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КОНЕЧНЫМ ИЛИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ

МХИТАРЯН С. М.

Обсуждаются две смешанные задачи о напряженном состоянии плоскости, ослабленной прямолинейным конечным или полубесконечным разрезом, к берегам которого приложена одинаковая нормальная разрывающая нагрузка произвольной интенсивности. Эти задачи рассматриваются в постановке нелинейной теории установившейся ползучести при степенной зависимости между интенсивностями напряжений и скоростями деформаций в первом приближении сообразно обобщенному принципу суперпозиции перемещений [1, 2], несколько модифицированному в настоящей работе. Определяющие интегральные уравнения задачи решаются в замкнутой форме методом Карлемана продолжения в комплексную плоскость, позволяющем выражения раскрытий разрезов и коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений на их концах получить в квадратурах довольно простой структуры. На примере рассматриваемых задач показана эквивалентность энергетического метода Гриффитса и силового критерия Ирвина.

Такими же интегральными уравнениями описываются обсуждаемые здесь задачи в постановке линейной теории упругости, когда модуль упругости плоскости по вертикальной координате изменяется по степенному закону. С этой точки зрения задача о конечном разрезе рассмотрена в [3, 4]. Исследование обширного класса смешанных и контактных задач для линейно-деформируемого основания общего типа, включающего указанный степенной тип, проведено в [5, 6], а также в [7].

Многие краевые задачи, в том числе контактные, нелинейной теории установившейся ползучести при степенной зависимости между напряжениями и скоростями деформаций рассмотрены в работах [8—10], в которых используется обобщенный принцип суперпозиции перемещений или уточняется этот принцип.

Укажем также на работу [11], позволяющую расширить класс исследуемых здесь задач.

1. Пусть плоскость, отнесенная к правой системе координат Oxy, вдоль оси Ox содержит конечный разрез $L=\{y=0;\ |x|\leqslant a\}$ или полубесконечный разрез $L=\{y=0;\ x\geqslant 0\}$, берега которых загружены одинаковыми по величине и противоположными по направлению вер-

тикальными силами произвольной интенсивности $p(x)$, обладающими конечными равнодействующими и моментами. Пусть далее, материал плоскости подчиняется физическому закону $\sigma_i = K_0 \xi_i^{\mu}$ $(0<\mu\leq 1)$, где σ_i и ξ_i, соответственно, интенсивности напряжений и скоростей деформаций, а K_0 и μ — константы материала [1, 2]. Требуется определить раскрытия берегов разрезов и поле напряжений в плоскости, в частности, коэффициенты интенсивности нормальных разрушающих напряжений на концах разрезов.

Основываясь на обобщенном принципе суперпозиции перемещений [1, 2], выведем основные уравнения поставленных задач. Сначала коротко остановимся на этом принципе.

Как известно [1], плоская нелинейная граничная задача для полуплоскости, следующей указанному степенному закону и загруженной на своей границе вертикальной сосредоточенной силой, имеет точное решение. Согласно последнему вертикальные перемещения[1] $v(x)$ граничных точек верхней полуплоскости $y>0$, загруженной на своей границе направленной вдоль Oy вертикальной сосредоточенной силой P, в условиях несжимаемости материала выражаются формулой

$$v(x)=A\frac{P^{m}}{r^{m-1}}, \quad A=\frac{(2-m)\sin(\lambda\pi/2)}{\lambda K_0^{m}(m-1)J^{m}(\mu)}, \quad m=1/\mu \tag{1.1}$$

$$\lambda=\sqrt{2\mu-1}/\mu, \quad J(\mu)=4\int_0^{\pi/2}(\cos\lambda\vartheta)^{\mu}\cos\vartheta\, d\vartheta$$

где r — расстояние точки приложения силы P от точки $(x, 0)$.

Введя обобщенные перемещения $v_{*}=[|v(x)|]^{\mu}$, из (1.1) будем иметь

$$v_{*}=|A|^{\mu}P/r^{1-\mu} \tag{1.2}$$

Поскольку последние линейно зависят от приложенных сил P, то к ним применяется обычный принцип суперпозиции, что и составляет сущность обобщенного принципа суперпозиции перемещений [1]. Очевидно, что такой принцип в определенном смысле может быть оправдан лишь для значений μ, достаточно близких к единице (случай $\mu=1$ соответствует линейно-упругому материалу).

Основанные на указанном принципе решения контактных задач о вдавливании штампов в полуплоскость или смешанных задач о разрезах в плоскости характеризуются тем, что в концевых точках штампов или разрезов порядок особенностей напряжений равен $\mu/2$. С другой стороны, анализ асимптотического поведения напряжений вблизи концевой точки трещины в упругопластических степенно упрочняющихся телах при плоской деформации показывает [12], что точный порядок особенности напряжений равен $\mu/(\mu+1)$. По мере приближения μ к единице разница между этими двумя порядками стремится к нулю.

---

[1] $v(x)$ фактически будут скорости, а не перемещения. Однако, для простоты в дальнейшем будем употреблять термин „перемещения".

Но по мере приближения μ к нулю (случай $\mu=0$ соответствует идеально пластическому материалу) эта разница становится существенной.

Однако, оставаясь в рамках работ [1, 2], обобщенный принцип суперпозиции перемещений можно провести так, чтобы в концевых точках штампов или разрезов получить точный порядок напряжений. А именно, обобщенные перемещения введем следующим образом: $v_{об.}=[|v(x)|]^{\mu/(\mu+1)}$. Тогда согласно (1.1)

$$v_{об.}=|A|^{\mu/(\mu+1)}\frac{p^{1/(\mu+1)}}{r^{1-2\mu/(\mu+1)}}=|A|^{\mu/(\mu+1)}\frac{p^{1-\mu/(\mu+1)}}{r^{1-2\mu/(\mu+1)}}$$

Будем считать, что значения μ весьма близки к нулю. При этом величинами $\mu/(\mu+1)$ по сравнению с единицей будем пренебрегать, в то время как величины $2\mu/(\mu+1)$ будем оставлять. В результате

$$v_{об.}=|A|^{\mu/(\mu+1)}\frac{p}{r^{1-2\mu/(\mu+1)}}$$

Исходя из последней формулы, к $v_{об.}$ опять можно применять обычный принцип суперпозиции, который в конечном итоге обеспечит точный порядок особенностей напряжений в концевых точках штампов или разрезов.

Таким образом, обобщенный принцип суперпозиции перемещений можно провести по-разному для значений μ, близких к единице и близких к нулю. На основе изложенных соображений в дальнейшем будем считать, что в показателе r в формуле (1.2) μ может быть заменен на $2\mu/(\mu+1)$.

Перейдем теперь к выводу основных уравнений поставленных задач. С этой целью отдельно рассмотрим верхнюю и нижнюю полуплоскости $y \gtrless 0$, загруженные на своих границах заданными вертикальными силами $p(x)$, действующими на берегах разреза L, и неизвестными пока нормальными силами $\sigma(x)$, действующими вне разреза L. Силы $\sigma(x)$ только знаком отличаются от разрушающих нормальных напряжений. Придерживаясь обобщенного принципа суперпозиции перемещений, для вертикальных перемещений $v_\pm(x)$ граничных точек верхней и нижней полуплоскостей, соответственно, будем иметь следующие выражения:

$$v_\pm(x)=\pm A\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q(s)ds}{|x-s|^{1-\mu}}\right|^{1/\mu}\quad(1/2<\mu<1)\tag{1.3}$$

$$q(x)=\begin{cases}p(x), & x\in L\\ \sigma(x), & x\in L'\end{cases},\qquad -\infty<x<\infty$$

где L' — дополнительный к разрезу L интервал.

Далее, как обычно, введем в рассмотрение функцию скачка вертикальных перемещений на разрезе

$$v_+(x)-v_-(x)=\begin{cases}\chi(x), & x\in L\\ 0, & x\in L'\end{cases}$$

с помощью которой из (1.3) будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(s)ds}{|x-s|^{1-\mu}} = h(x); \quad h(x) = \begin{cases} (2A)^{-1}|\chi(x)|^{\mu}, & x \in L \\ 0, & x \in L' \end{cases}$$

Отсюда по известной формуле обращения ([13], с. 584) получим следующее ключевое уравнение:

$$q(x) = \frac{\operatorname{tg}(\pi\mu/2)}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_{L} \frac{\operatorname{sgn}(x-s)}{|x-s|^{\mu}} h(s) ds \quad (-\infty < x < \infty) \tag{1.4}$$

Так как вследствие непрерывности перемещений функция $\chi(x)$ на концах разреза L обращается в нуль, то при помощи интегрирования по частям уравнение (1.4) можно представить в виде

$$q(x) = \frac{\operatorname{tg}(\pi\mu/2)}{2\pi} \int_{L} \frac{\operatorname{sgn}(x-s)}{|x-s|^{\mu}} h'(s) ds \quad (-\infty < x < \infty) \tag{1.5}$$

В случае конечного разреза L из (1.5) получим следующие основные уравнения:

$$\int_{-a}^{a} \frac{\operatorname{sgn}(x-s)}{|x-s|^{\mu}} \psi'(s) ds = g(x) \quad (|x| < a) \tag{1.6}$$

$$\sigma(x) = \frac{\operatorname{tg}(\pi\mu/2)}{(2A)^{\mu} 2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\operatorname{sgn}(x-s)}{|x-s|^{\mu}} \psi'(s) ds \quad (|x| > a) \tag{1.7}$$

$$\psi(x) = [\chi(x)]^{\mu}, \quad g(x) = 2\pi \operatorname{ctg}(\pi\mu/2)(2A)^{\mu} p(x) \tag{1.8}$$

Интегро-дифференциальное уравнение (1.6) должно рассматриваться при граничных условиях

$$\psi(\pm a) = 0 \tag{1.9}$$

Введением безразмерных величин

$$\begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} = \begin{matrix} x/a \\ s/a \end{matrix}; \quad \begin{matrix} \sigma_0(\xi) \\ p_0(\xi) \end{matrix} = \begin{cases} (2A)^{\mu} \sigma(a\xi) \\ (2A)^{\mu} p(a\xi) \end{cases}$$

$$\varphi'(\xi) = \psi'(a\xi) a^{1-\mu}; \quad -1 \leqslant \xi, \ \eta \leqslant 1$$

уравнения (1.6)—(1.7) преобразуем к следующим:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sgn}(\xi-\eta)}{|\xi-\eta|^{\mu}} \varphi'(\eta) d\eta = f(\xi) \quad (|\xi| < 1) \tag{1.10}$$

$$\sigma_0(\xi) = \frac{\operatorname{tg}(\pi\mu/2)}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sgn}(\xi-\eta)}{|\xi-\eta|^{\mu}} \varphi'(\eta) d\eta \quad (|\xi| > 1) \tag{1.11}$$

где согласно (1.8)

$$f(\xi) = g(a\xi) = 2\pi \operatorname{ctg}(\pi\mu/2) p_0(\xi) \tag{1.12}$$

При этом условия (1.9) запишутся в виде

$$\varphi(\pm 1) = 0 \tag{1.13}$$

В случае полубесконечного разреза L основные уравнения задачи будут

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sgn}(\xi-\eta)}{|\xi-\eta|^\mu} \varphi'(\eta)d\eta = f(\xi) \quad (\xi>0) \tag{1.14}$$

$$\sigma_0(\xi) = \frac{\operatorname{tg}(\pi\mu/2)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sgn}(\xi-\eta)}{|\xi-\eta|^\mu} \varphi'(\eta)d\eta \quad (\xi<0) \tag{1.15}$$

$$\varphi(0) = 0 \tag{1.16}$$

где обозначения прежние[1].

2. Решение интегро-дифференциального уравнения (1.10) при граничных условиях (1.13) можно получить из известных результатов [3, 13]. Однако, здесь его решение будет построено методом Карлемана продолжения уравнения в комплексную плоскость, отличным от указанных. Этот метод позволяет кроме раскрытия разреза определить также нормальные разрушающие напряжения вне разреза и, тем самым, найти полное решение задачи.

Основываясь на идеях работы [14], введем в рассмотрение функцию комплексного переменного

$$\Phi(z) = (z^2-1)^{\mu/2} \int_{-1}^{1} \frac{\varphi'(\eta)d\eta}{(z-\eta)^\mu} \tag{2.1}$$

В комплексной плоскости $z=\xi+i\eta$, разрезанной вдоль отрезка $[-1, 1]$ вещественной оси, можно выбирать однозначную аналитическую ветвь этой функции. Выберем ту ветвь, которая в окрестности бесконечно удаленной точки имеет представление

$$\Phi(z) \sim 1 \quad \text{при} \quad z\to\infty$$

Далее, на берегах разреза по отрезку $[-1,1]$ вещественной оси будем считать

$$z-1 \to (1-\xi)e^{\pm i\pi}; \quad z+1 \to 1+\xi; \quad (z\to\xi\pm i0)$$

$$z-\eta \to \xi-\eta \quad (\xi>\eta); \quad z-\eta \to (\eta-\xi)e^{\pm i\pi} \quad (\eta>\xi) \ (|\xi|<1)$$

Тогда для граничных значений выбранной ветви функции $\Phi(z)$ на верхнем и нижнем берегах разреза соответственно будем иметь

$$\Phi^+(\xi) = (1-\xi^2)^{\mu/2} \left| e^{i\pi\mu/2} \int_{-1}^{\xi} \frac{\varphi'(\eta)d\eta}{(\xi-\eta)^\mu} + e^{-i\pi\mu/2} \int_{\xi}^{1} \frac{\varphi'(\eta)d\eta}{(\eta-\xi)^\mu} \right|$$

$$(|\xi|<1)$$

$$\Phi^-(\xi) = (1-\xi^2)^{\mu/2} \left| e^{-i\pi\mu/2} \int_{-1}^{\xi} \frac{\varphi'(\eta)d\eta}{(\xi-\eta)^\mu} + e^{i\pi\mu/2} \int_{\xi}^{1} \frac{\varphi'(\eta)d\eta}{(\eta-\xi)^\mu} \right|$$

[1] В случае полубесконечного разреза L в качестве a можно брать длину любого конечного отрезка, расположенного на L.

Отсюда

$$\int_{-1}^{\xi}\frac{\varphi'(\eta)d\eta}{(\xi-\eta)^{\mu}}=\frac{(1-\xi^2)^{-\mu/2}}{2i\sin(\pi\mu)}\left[\Phi^+(\xi)e^{i\pi\mu/2}-\Phi^-(\xi)e^{-i\pi\mu/2}\right] \tag{2.2}$$

$$(|\xi|<1)$$

$$\int_{\xi}^{1}\frac{\varphi'(\eta)d\eta}{(\eta-\xi)^{\mu}}=\frac{(1-\xi^2)^{-\mu/2}}{2i\sin(\pi\mu)}\left[\Phi^-(\xi)e^{i\pi\mu/2}-\Phi^+(\xi)e^{-i\pi\mu/2}\right] \tag{2.3}$$

При помощи (2.2) – (2.3) уравнение (1.10) можно свести к элементарной краевой задаче

$$\Phi^+(\xi)-\Phi^-(\xi)=2i\sin(\pi\mu/2)(1-\xi^2)^{\mu/2}f(\xi)\quad(|\xi|<1) \tag{2.4}$$

о скачке аналитической функции на разрезе. При этом уравнение (1.10) и краевая задача (2.4) в классе типа гельдеровских функций эквивалентны [13, 15].

Решение краевой задачи (2.4) имеет вид

$$\Phi(z)=\frac{\sin(\pi\mu/2)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\eta^2)^{\mu/2}f(\eta)d\eta}{\eta-z}+C \tag{2.5}$$

где C—произвольная постоянная, подлежащая определению. Теперь по формулам Племеля-Сохоцкого из (2.5) определим граничные значения $\Phi^{\pm}(\xi)$ $(|\xi|<1)$ и их выражения подставим в (2.2). Получим

$$\int_{-1}^{\xi}\frac{\varphi'(\eta)d\eta}{(\xi-\eta)^{\mu}}=\frac{1}{2}f(\xi)+(1-\xi^2)^{-\mu/2}\frac{\operatorname{tg}(\pi\mu/2)}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\eta^2)^{\mu/2}f(\eta)d\eta}{\eta-\xi}+$$

$$+C(1-\xi^2)^{-\mu/2}\quad(|\xi|<1) \tag{2.6}$$

что полностью совпадает с известным результатом из [13] (с. 579). Чтобы найти решение исходного уравнения (1.10), остается к (2.6) применить формулу обращения Абеля, которая даст

$$\varphi'(\xi)=\frac{\sin(\pi\mu)}{\pi}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{2}\int_{-1}^{\xi}\frac{f(\eta)d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}}+CG_{\mu}(\xi)+\right.$$

$$\left.+\frac{\operatorname{tg}(\pi\mu/2)}{2\pi}\int_{-1}^{\xi}\frac{(1-\eta^2)^{-\mu/2}d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}}\int_{-1}^{1}\frac{(1-u^2)^{\mu/2}f(u)du}{u-\eta}\right]\quad(|\xi|<1) \tag{2.7}$$

$$G_{\mu}(\xi)=\int_{-1}^{\xi}(1-\eta^2)^{-\mu/2}(\xi-\eta)^{\mu-1}d\eta$$

В последнем интеграле положив

$$1+\eta=tv,\quad t=1+\xi\quad(0\leqslant t,\ v\leqslant 1)$$

при помощи известной формулы ([16], с. 300, формула 3.197.3) находим

$$G_\mu(\xi)=\left(\frac{1+\xi}{2}\right)^{\mu/2}\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu/2)}{\Gamma(1+\mu/2)}F\left(\mu/2,\ 1-\mu/2;\ 1+\mu/2;\ \frac{1+\xi}{2}\right)\quad(|\xi|\leqslant 1)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера, а $F(a,\ b;\ c;\ x)$ — гипергеометрическая функция Гаусса. Легко видеть, что ([17], с. 112, формула (46)) $G_\mu(1)=\pi\operatorname{cosec}(\pi\mu/2)$.

Далее, из (2.7) получим

$$\psi(\xi)=\frac{\sin(\pi\mu)}{2\pi}\int_{-1}^{\xi}\frac{f(\eta)d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}}+CG_\mu(\xi)+$$

$$+\frac{\sin(\pi\mu)\operatorname{tg}(\pi\mu/2)}{2\pi^2}\int_{-1}^{\xi}\frac{(1-\eta^2)^{-\mu/2}d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}}\int_{-1}^{1}\frac{(1-u^2)^{\mu/2}f(u)du}{u-\eta}\quad(|\xi|\leqslant 1)\qquad(2.8)$$

Очевидно, что $\psi(-1)=0$. Чтобы удовлетворить и второму граничному условию (1.13), то есть условию $\psi(1)=0$, в (2.8) положим $\xi=1$ и результат приравняем нулю. Поменяв порядок интегрирования в получающемся при этом повторном интеграле в (2.8) и воспользовавшись формулой 3.228.2 из [16] (с. 304), обнаружим, что $C=0$.

С учетом последнего и (1.12) формулы (2.7) и (2.8) представим в виде

$$\varphi'(\xi)=2\cos^2(\pi\mu/2)\frac{d}{d\xi}\left[\int_{-1}^{\xi}\frac{p_0(\eta)d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}}\right]+$$

$$+\frac{\sin(\pi\mu)}{\pi}\frac{d}{d\xi}\left[\int_{-1}^{1}(1-u^2)^{\mu/2}p_0(u)du\int_{-1}^{\xi}\frac{(1-\eta^2)^{-\mu/2}d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}(u-\eta)}\right]\quad(|\xi|<1)\qquad(2.9)$$

$$\varphi(\xi)=2\cos^2(\pi\mu/2)\int_{-1}^{\xi}\frac{p_0(\eta)d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}}+$$

$$+\frac{\sin(\pi\mu)}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-u^2)^{\mu/2}p_0(u)du\int_{-1}^{\xi}\frac{(1-\eta^2)^{-\mu/2}d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}(u-\eta)}\quad(|\xi|\leqslant 1)\qquad(2.10)$$

Чтобы не иметь дело с сингулярными интегралами, берущимися в смысле Коши, преобразуем входящий во вторые слагаемые формул (2.9) и (2.10) внутренний интеграл. В результате, как выше, можем записать

$$I_\mu(\xi,u)=\int_{-1}^{\xi}\frac{(1-\eta^2)^{-\mu/2}d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}(u-\eta)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\xi}{2}\right)^{\mu/2-1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(\frac{1+\xi}{2}\right)^k M_\mu^k(\xi,u)\qquad(2.11)$$

$$M_\mu^k(\xi,u)=\int_0^1\frac{v^{k-\mu/2}(1-v)^{\mu-1}}{y-v}dv\quad\left(y=\frac{1+u}{1+\xi}\right),\quad a_k=(-1)^k\binom{-\mu/2}{k}$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

Приняв во внимание известные формулы ([16], с. 300 формула 3.197.3 и с. 304 формула 3.228.3), находим

$$
M_{\mu}^{k}(\xi, u)=\begin{cases} \dfrac{1+\xi}{1+u}\cdot\dfrac{\Gamma(\mu)\Gamma(k+1-\mu/2)}{\Gamma(k+1+\mu/2)}F\left(1,\ k+1-\mu/2;\ k+1+\mu/2;\ \dfrac{1+\xi}{1+u}\right) & (\xi<u) \\ \dfrac{\Gamma(\mu-1)\Gamma(k+1-\mu/2)}{\Gamma(k+\mu/2)}F\left(1,\ 1-k-\mu/2;\ 2-\mu;\ \dfrac{\xi-u}{1+\xi}\right)- \\ \qquad -\left(\dfrac{1+u}{1+\xi}\right)^{k-\mu/2}\left(\dfrac{\xi-u}{1+\xi}\right)^{\mu-1}\pi\operatorname{ctg}(\pi\mu) & (u<\xi) \end{cases} \tag{2.12}
$$

Формулы (2.11) и (2.12) в сочетании с эффективными вычислительными процедурами из [18] для гипергеометрической функции могут быть использованы при числовых расчетах для раскрытия разреза $\varphi(\xi)$.

Обратимся теперь к уравнению (1.11). Сопоставление (2.1) и (2.5) даст

$$
\sigma_0(\xi)=\frac{\sin(\pi\mu/2)}{\pi}\operatorname{sgn}\xi(\xi^2-1)^{-\mu/2}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\eta^2)^{\mu/2}p_0(\eta)d\eta}{\eta-\xi}\quad(|\xi|>1)
$$

Это соотношение после перехода к прежним переменным примет вид

$$
\sigma(x)=\frac{\sin(\pi\mu/2)}{\pi}\operatorname{sgn}x(x^2-a^2)^{-\mu/2}\int_{-a}^{a}\frac{(a^2-s^2)^{\mu/2}p(s)ds}{s-x}\quad(|x|>a) \tag{2.13}
$$

Отсюда для коэффициентов интенсивности нормальных разрушающих напряжений на концах разреза получим следующие выражения:

$$
\begin{aligned} K_1&=-\lim_{x\to a+0}\left[(x-a)^{\mu/2}\sigma(x)\right]=\frac{\sin(\pi\mu/2)}{\pi(2a)^{\mu/2}}\int_{-a}^{a}(a-s)^{\mu/2-1}(a+s)^{\mu/2}p(s)ds \\ K_2&=-\lim_{x\to -a-0}\left[|x+a|^{\mu/2}\sigma(x)\right]=\frac{\sin(\pi\mu/2)}{\pi(2a)^{\mu/2}}\int_{-a}^{a}(a-s)^{\mu/2}(a+s)^{\mu/2-1}p(s)ds \end{aligned} \tag{2.14}
$$

Таким образом, нормальные разрушающие напряжения вне разреза, взятые с обратным знаком, даются формулой (2.13), а их коэффициенты интенсивности на концах разреза — формулами (2.14). В предельном случае $\mu\to 1$ формулы (2.14) переходят в выражения коэффициентов интенсивности в известной задаче Гриффитса [19].

Отметим, что введенная по формуле (2.1) функция $\Phi(z)$ в данном случае представляет собой аналог известного комплексного потенциала для линейно-упругой полуплоскости.

3. Теперь построим решение уравнения (1.14). Введем функцию

$$
\Phi(z)=z^{\mu-1}\int_{0}^{\infty}\frac{\varphi'(\eta)d\eta}{(z-\eta)^{\mu}} \tag{3.1}
$$

В комплексной плоскости $z=\xi+i\tau$, разрезанной вдоль луча вещественной оси, можно выбирать однозначную аналитическую ветвь этой функции. Выберем ту ветвь, которая в окрестности бесконечно удаленной точки имеет асимптотическое представление

$$\Phi(z)\sim\frac{1}{z}\quad \text{при}\quad z\to\infty$$

Далее, на берегах разреза по лучу $[0,\ \infty)$ вещественной оси будем считать $(z\to\xi\pm i0)$

$$z\to\xi;\ z-\eta\to\xi-\eta\quad(\xi>\eta),\ z-\eta\to(\eta-\xi)e^{\pm i\pi}\quad(\eta>\xi)$$

Тогда после определения граничных значений выбранной ветви функции $\Phi(z)$ на верхнем и нижнем берегах разреза будем иметь

$$\int_0^\xi\frac{\varphi'(\eta)d\eta}{(\xi-\eta)^\mu}=\frac{\xi^{1-\mu}}{2i\sin(\pi\mu)}\left[\Phi^+(\xi)e^{i\pi\mu}-\Phi^-(\xi)e^{-i\pi\mu}\right]\quad(|\mu|<1)\qquad(3.2)$$

$$\int_\xi^\infty\frac{\varphi'(\eta)d\eta}{(\eta-\xi)^\mu}=\frac{\xi^{1-\mu}}{2i\sin(\pi\mu)}\left[\Phi^-(\xi)-\Phi^+(\xi)\right]\qquad(3.3)$$

При помощи (3.2) и (3.3) уравнение (1.14) можно свести к эквивалентной краевой задаче

$$\Phi^+(\xi)=e^{-i\pi\mu}\Phi^-(\xi)+2ie^{-i\pi\mu/2}\sin(\pi\mu/2)\xi^{\mu-1}f(\xi)\quad(\xi>0)\qquad(3.4)$$

Далее, следуя известной процедуре [13, 19], решение краевой задачи (3.4) представим в виде

$$\Phi(z)=\frac{\sin(\pi\mu/2)}{\pi e^{i\pi\mu/2}}z^{\mu/2-1}\int_0^\infty\frac{\eta^{\mu/2}f(\eta)d\eta}{\eta-z}\qquad(3.5)$$

Теперь по формулам Племеля-Сохоцкого из (3.5) найдем $\Phi^\pm(\xi)$ $(\xi>0)$ и подставим в (3.2). В результате получим

$$\int_0^\xi\frac{\varphi'(\eta)d\eta}{(\xi-\eta)^\mu}=\frac{1}{2}f(\xi)+\frac{\mathrm{tg}(\pi\mu/2)}{2\pi}\xi^{-\mu/2}\int_0^\infty\frac{\eta^{\mu/2}f(\eta)d\eta}{\eta-\xi}\quad(\xi>0)$$

Отсюда по формуле обращения Абеля с учетом (1.12) будем иметь

$$\varphi(\xi)=2\cos^2(\pi\mu/2)\int_0^\xi\frac{p_0(\eta)d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}}+\frac{\sin(\pi\mu)}{\pi}\int_0^\infty u^{\mu/2}p_0(u)du\int_0^\xi\frac{\eta^{-\mu/2}d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}(u-\eta)}$$
$$(\xi>0)\qquad(3.6)$$

Легко показать, что

$$J_\mu(\xi,u)=\int_0^\xi\frac{\eta^{-\mu/2}d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}(u-\eta)}=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu/2)}{\Gamma(1+\mu/2)}\dfrac{\xi^{\mu/2}}{u}F\left(1,\ 1-\mu/2;\ 1+\mu/2;\ \dfrac{\xi}{u}\right)\\ \qquad(\xi<u)\\ \dfrac{\Gamma(\mu-1)\Gamma(1-\mu/2)}{\Gamma(\mu/2)}\xi^{\mu/2-1}F\left(1,\ 1-\mu/2;\ 2-\mu;\right.\\ \left.1-\dfrac{u}{\xi}\right)-\mathrm{ctg}(\pi\mu)u^{-\mu/2}(\xi-u)^{\mu-1}\quad(u<\xi)\end{cases}$$

Очевидно, что (3.6) удовлетворяет условию (1.16).

Обращаясь к вопросу определения нормальных напряжений вне разреза, заметим, что сопоставление (1.15), (3.1) и (3.5) даст

$$\sigma_0(\xi)=\frac{\sin(\pi\mu/2)}{\pi}|\xi|^{-\mu/2}\int\limits_0^\infty\frac{\eta^{\mu/2}p_0(\eta)d\eta}{\eta-\xi}\quad(\xi<0)$$

Перейдя к прежним переменным, отсюда получим

$$\sigma(x)=\frac{\sin(\pi\mu/2)}{\pi}|x|^{-\mu/2}\int\limits_0^\infty\frac{s^{\mu/2}p(s)ds}{s-x}\quad(x<0)\tag{3.7}$$

Итак, нормальные разрушающие напряжения вне полубесконечного разреза, взятые с обратным знаком, даются формулой (3.7).

Для коэффициента интенсивности нормальных напряжений на конце разреза из (3.7) находим

$$K_0=-\lim_{x\to-0}[|x|^{\mu/2}\sigma(x)]=\frac{\sin(\pi\mu/2)}{\pi}\int\limits_0^\infty s^{\mu/2-1}p(s)ds\tag{3.8}$$

В предельном случае $\mu\to1$ (3.8) совпадает с известным результатом [19].

4. Формулами (2.14) и (3.8) дается асимптотическое поведение нормальных напряжений вблизи концевых точек разрезов. При помощи известного метода [20] получим такие же формулы для вертикальных обобщенных перемещений. При этом для простоты ограничимся первой задачей и рассмотрим симметричное загружение берегов конечного разреза: $p(-x)=p(x)$.

Тогда согласно (2.14)

$$K_1=K_2=K=\frac{(2a)^{1-\mu/2}\sin(\pi\mu/2)}{\pi}\int\limits_0^a\frac{p(s)ds}{(a^2-s^2)^{1-\mu/2}}\tag{4.1}$$

и можем записать, что ($H(x)$—функция Хевисайда)

$$\sigma(x)\simeq\sigma_1(x)=-KH(x-a)|x-a|^{-\mu/2}\quad x\to a+0\tag{4.2}$$

С другой стороны, исходя из (1.3), будем иметь

$$\left|\frac{v_*(x)}{A}\right|=w(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{q(s)ds}{|x-s|^{1-\mu}}\quad(-\infty<x<\infty)\tag{4.3}$$

Далее, введя в рассмотрение образы Фурье

$$[\overline{w}(\lambda),\ \overline{q}(\lambda),\ \overline{\sigma}_1(\lambda)]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[w(x),\ q(x),\ \sigma_1(x)]\,e^{i\lambda x}dx$$

которые в общем случае трактуются в рамках теории обобщенных функций, соотношение (4.3) представим в виде

$$\bar{w}(\lambda) = 2\Gamma(\mu)\cos(\pi\mu/2)|\lambda|^{-\mu}\bar{q}(\lambda)$$

откуда вытекает, что [20]

$$\bar{w}(\lambda) \sim \bar{w}_a(\lambda) = 2\Gamma(\mu)\cos(\pi\mu/2)|\lambda|^{-\mu}\bar{\sigma}_1(\lambda) \quad (|\lambda| \to \infty)$$

Но

$$\bar{\sigma}_1(\lambda) = -Ke^{i\lambda a}\Gamma(1-\mu/2)[\sin(\pi\mu/4) + i\cos(\pi\mu/4)\,\mathrm{sgn}\,\lambda]\,|\lambda|^{\mu/2-1}$$

При этом была использована таблица образов Фурье некоторых обобщенных функций из [20] (с. 43). Опять воспользовавшись этой таблицей, окончательно находим

$$w(x) \sim w_a(x) = \begin{cases} 2K\dfrac{\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu/2)}{\Gamma(1+\mu/2)}\cos(\pi\mu/2)(a-x)^{\mu/2}, & x \to a-0 \\ 0, & x \to a+0 \end{cases} \tag{4.4}$$

где $w_a(x)$ — обратное преобразование Фурье функции $\bar{w}_a(\lambda)$. Следовательно,

$$w_*(x) = |v_*(x)|^{\lambda} \sim A^{\lambda} w_a(x) \quad x \to a \tag{4.5}$$

В предельном случае $\mu \to 1$ формулы (4.2) и (4.4) — (4.5) переходят в известные асимптотические формулы для нормальных напряжений и вертикальных перемещений в окрестности края трещины на ее продолжении [21].

Отметим, что если в (4.3) A^{λ} заменить на θ_0/ν и μ — на $1-\nu$, где θ_0 — определенная константа [5], то обобщенные перемещения $|v_*(x)|^{\lambda}$ совпадут с истинными вертикальными перемещениями граничных точек линейно-упругой верхней полуплоскости, модуль упругости которой изменяется по степенному закону

$$E(y) = E_0 y^{\nu} \qquad (0 \leqslant \nu < 1) \tag{4.6}$$

Таким образом, обобщенные перемещения можно истолковать и в указанном смысле.

Теперь запишем уравнение энергетического баланса [21, 22]

$$dU = -d\Pi \tag{4.7}$$

для тела с распространяющимся разрезом (трещиной), выражающее условие локального разрушения тела. Здесь U — потенциальная энергия тела к моменту разрушения, а Π — поверхностная энергия разрушения, причем

$$d\Pi = 2\gamma\, da$$

где γ — плотность поверхностной энергии. Следовательно, уравнение (4.7) можно представить в виде

$$\frac{dU}{da} = G = -2\gamma \tag{4.8}$$

где G — интенсивность освобождающейся энергии тела (приток энергии в вершину трещины), расходуемой на его разрушение.

Для вычисления G воспользуемся известным подходом Ирвина [21, 22], предполагая, что конец трещины $x=a$ мысленно продвигается вправо на величину Δa. Тогда

$$G = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{1}{2\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sigma(x) 2w_{-}(x)\,dx$$

так как $\sigma_y = -\sigma(x)$. Воспользовавшись асимптотическими формулами (4.2), (4.4)—(4.5), будем иметь

$$G = -2K^2A^\mu \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu/2)}{\Gamma(1+\mu/2)} \cos(\pi\mu/2) \lim_{\Delta a \to 0} \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \left(\frac{\Delta a - x}{x}\right)^{\mu/2} dx$$

Вычислив входящий сюда элементарный интеграл, окончательно получим

$$G = -2K^2A^\mu \cos(\pi\mu/2)\Gamma(\mu)\Gamma^2(1-\mu/2) \tag{4.9}$$

Сопоставление (4.8) и (4.9) показывает, что в данном случае энергетический критерий Гриффитса, когда G достигает критической величины $G_c = \mathrm{const}$, эквивалентен силовому критерию Ирвина, когда K достигает критической величины $K_c = \mathrm{const}$.

Рассмотрим частный случай, когда $p(x) = p_0 = \mathrm{const}$. Тогда из (4.1) находим

$$K = 2^{\mu/2-1} \sin(\pi\mu/2) p_0 a^{\mu/2} [\pi\Gamma(\mu)]^{-1}\Gamma^2(\mu/2) \tag{4.10}$$

Сопоставляя (4.8) и (4.9), для предельной разрушающей нагрузки получим следующее выражение:

$$p_0 = \left[\frac{2^{2-\mu}\gamma}{A^\mu \cos(\pi\mu/2)\Gamma(\mu)a^\mu}\right]^{1/2} \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu/2)}$$

которое при переходе к линейно-упругой плоскости (указанным выше способом), состоящей из двух полуплоскостей, модули упругости которых по их глубине изменяются по степенному закону (4.6), совпадает с формулой (4.7) из [3].

Согласно сказанному в первом пункте, в (4.10) μ может быть заменен на $2\mu/(\mu+1)$, что даст

$$\bar{K} = 2^{-1/(\mu+1)} \sin[\pi\mu/(\mu+1)]\, p_0 a^{\mu/(\mu+1)} \{\pi\Gamma[2\mu/(\mu+1)]\}^{-1}\Gamma^2[\mu/(\mu+1)]$$

В таблице даны приведенные значения коэффициентов интенсивности

$$L = K(p_0 a^{\mu/2})^{-1}, \quad \bar{L} = \bar{K}[p_0 a^{\mu/(\mu+1)}]^{-1}$$

при различных μ.

Значения L, $\bar{L}$

μ	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1
L	0.95	0.93	0.90	0.87	0.84	0.81	0.79	0.74	0.71
$\bar{L}$	0.87	0.85	0.83	0.81	0.79	0.76	0.74	0.73	0.71

По мере приближения μ к единице значения L и $\bar{L}$ все меньше и меньше отличаются друг от друга.

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԿԱՄ ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ՃԱՔՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ԵՎ ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՕՐԵՆՔՈՎ ԶԵՎԱՓՈԽՎՈՂ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Հաստատված սողքի ու գծային տեսության դրվածքով, երբ լարումների և դեֆորմացիաների միջև կախվածությունը տրվում է աստիճանային օրենքով, առաջին մոտավորությամբ կամ առաձգականության գծային տեսության դրվածքով, երբ հարթության առաձգականության մոդուլը ըստ ուղղաձիգ կոորդինատի փոփոխվում է աստիճանային օրենքով, դիտարկված են վերջավոր և կիսաանվերջ ճաքերով թուլացված հարթության լարվածային վիճակի վերաբերյալ խնդիրները։ Կոշիի ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումները կառուցված են փակ տեսքով՝ հավասարումները կոմպլեքս տիրույթ շարունակելու Կարլեմանի մեթոդով։ Ճաքերի ծայրակետերի շրջակայքում նորմալ լարումների և տեղափոխությունների համար ստացված են ասիմպտոտիկ բանաձևեր, որոնց օգնությամբ ձևակերպված է ճաքերի տարածման պայմանը։ Ցույց է տրված Գրիֆիթսի էներգետիկ և Իրվինի ուժային հայտանիշների համարժեքությունը։

ON STRESSED STATE OF PLANE STRAINED WITH A DEGREE LAW, WEAKENED BY FINITE OR SEMIFINITE CROSS SECTION

S. M. MCHITARIAN

Summary

By means of the Karleman method of continuation closed solutions of mixed problems about stressed state of plane strained with a degree law with sections of finite or semifinite length are built into the complex plane. The equivalence of Griffit's energetic criterion and forced criterion is shown.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести.—ПММ, 1959, т. 23, вып. 5, с. 901—924.
2. *Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения.—ПММ, 1963, т. 27, вып. 5, с. 813—820.
3. *Попов Г. Я., Радиолло М. В.* К теории трещин в неоднородных или ортотропных средах.—ПМ, 1975, т. 11, вып. 5, с. 36—44.
4. *Пальцун Н. В., Приварников А. К.* О напряженном состоянии возле щели в пространстве с переменным модулем упругости.—ПМ, 1967, т. 3, вып. 9, с. 138—141.
5. *Попов Г. Я.* Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев—Одесса: Вища Школа, 1982. 168 с.

6. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.
7. *Рвачев В. Л., Проценко В. С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наукова думка, 1977. 235 с.
8. *Арутюнян Н. Х., Александров В. М.* Некоторые вопросы механики ледяного покрова. Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории упругости. Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1979. 399 с.
9. *Арутюнян Н. Х., Сумбатян М. А.* Плоская задача теории ползучести для слоя.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1980, т. 33, № 3, с. 18—28.
10. *Александров В. М., Сумбатян М. А.* Об одном решении контактной задачи нелинейной установившейся ползучести для полуплоскости.— МТТ, 1983, № 1, с. 107—113.
11. *Гольдштейн Р. В.* К пространственной задаче теории упругости для тел с плоскими трещинами произвольного разрыва. М.: Ин-т проблем механики АН СССР. Препринт № 122, 1979. 66 с.
12. *Rice J. R., Rosengren G. F.* Plane strain deformation near a crack tip in a power law hardening material.— J. Mech. and Phys. Solids, 1968, v. 16, N. 1, p. 1—12.
13. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
14. *Carleman T.* Über die Abelsche Integralgleichung mit Konstanten Integrationsgrenzen.—Math. Z., 1922, Bd. 15, Heft 1/2, s. 111—120.
15. *Сакалюк К. Д.* Обобщенное интегральное уравнение Абеля.—ДАН СССР, 1960, т. 131, № 4, с. 748—751.
16. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
17. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 296 с.
18. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980. 608 с.
19. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
20. *Lighthill M. J.* Introduction to Fourier analysis and generalised functions. Cambridge: at the University press, 1959. 79 p.
21. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
22. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, 1974. 416 с.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
23.VI.1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVIII, № 4, 1985 Механика

УДК 539.376

О НЕКОТОРЫХ КРИТЕРИЯХ РАЗРУШЕНИЯ КОМПОЗИТОВ

ГОРБАЧЕВ В. И., ПОБЕДРЯ Б. Е.

В настоящее время в теории разрушения композитов наиболее распространенным является феноменологический подход, основанный на критериях разрушения эквивалентной однородной анизотропной среды [1—5]. Материальные константы, входящие в каждый из критериев, определяются из серии довольно сложных экспериментов. При таком подходе трудно изучить влияние геометрических и механических свойств компонентов на характеристики прочности композита.

В данной работе предложен способ вывода критерия прочности композита в целом, основанный на идее осреднения, и учитывающий феноменологические критерии разрушения каждого компонента в отдельности. Для случая слоистого композита при хрупком разрушении слоев даны явные выражения пределов прочности в разных направлениях и выписан критерий разрушения при сложном напряженном состоянии.

1. Рассмотрим композиционный материал с периодической структурой, т. е. такой материал, в котором можно выделить типичный много раз повторяющийся элемент (ячейку периодичности). Для простоты выберем прямоугольную декартову систему координат. В зависимости от строения композита, имеющего периодическую структуру, его механические характеристики могут быть периодическими функциями одной, двух или трех координат x_i.

Будем считать, что выполняются обычные правила суммирования [6] и производная обозначается индексом после запятой.

Предположим, что композит является упругим. Тогда связь между напряжениями $\underline{\sigma}$ и деформациями $\underline{\varepsilon}$ описывается обобщенным законом Гука

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}(\vec{x})\varepsilon_{kl},\quad \varepsilon_{ij}=J_{ijkl}(\vec{x})\sigma_{kl} \tag{1.1}$$

где тензоры модулей упругости $\underline{C}$ и податливости $\underline{J}$ являются взаимообратимыми

$$\underline{C}:\underline{J}=\underline{J}:\underline{C}=\underline{\Delta}$$

$$(C_{ijkl}J_{klmn}=J_{ijkl}C_{klmn}=\Delta_{ijmn}) \tag{1.2}$$

а $\underline{\Delta}$ — единичный тензор четвертого ранга

$$\Delta_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \qquad (1.3)$$

Как известно, квазистатическая задача теории упругости [7]

$$(C_{ijkl}(\vec{x})u_{k,l})_{,j} + X_i = 0 \qquad (1.4)$$

$$u_i|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad C_{ijkl}(\vec{x})\, u_{k,l}\, n_j|_{\Sigma_2} = S_i^0 \qquad (1.5)$$

методом осреднения

$$u_i(\vec{x}) = \sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q \sum_{p=0}^{q} N^{(p)}_{ijk_1\ldots k_p}(\vec{\xi})\, w^{(q-p)}_{j,k_1\ldots k_p}, \quad N^{(0)}_{ij} = \delta_{ij} \qquad (1.6)$$

(где $\vec{\xi} = \vec{x}/\alpha$ — так называемые быстрые переменные [8], а α — малый геометрический параметр) сводится к двум рекуррентным последовательностям задач [9].

Первая из этих последовательностей заключается в решении задач теории упругости для однородной среды с приведенным тензором $\underline{h}$ (иначе тензором эффективных модулей упругости)

$$h_{ijkl} w^{(p)}_{k,lj} + X_i^{(p)} = 0 \qquad (1.7)$$

$$w_i^{(p)}|_{\Sigma_1} = u_i^{(p)}, \quad h_{ijkl}\, w^{(p)}_{k,l}\, n_j|_{\Sigma_2} = S_i^{(p)} \quad (p = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (1.8)$$

а вторая последовательность в решении задач теории упругости для неоднородной среды на ячейке периодичности

$$(C_{ijml}\, N^{(p+1)}_{mnk_1\ldots k_{p+1},l})_{,j} + X^{(p+1)}_{ink_1\ldots k_{p+1}} = 0 \qquad (1.9)$$

$$\langle N^{(p+1)}_{mnk_1\ldots k_{p+1},l}\rangle = 0, \quad \langle N^{(p+1)}_{mnk_1\ldots k_{p+1}}\rangle = 0 \quad (p = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (1.10)$$

При этом входные данные в задаче (1.7), (1.8) и в задаче (1.9), (1.10) определяются из предыдущих приближений. В нулевом приближении (то есть при $p=0$) из (1.7), (1.8) получается задача по так называемой теории эффективного модуля для определения «осредненного» поля перемещений $\vec{v} = \vec{w}^{(0)}$

$$h_{ijkl}\, v_{k,lj} + X_i = 0 \qquad (1.11)$$

$$v_i|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad h_{ijkl}\, v_{k,l}\, n_j|_{\Sigma_2} = S_i^0 \qquad (1.12)$$

После решения задачи (1.9), (1.10) при $p=0$

$$(C_{ijml}\, N^{(1)}_{mnk_1,l})_{,j} + C_{ijnk_1,j} = 0 \qquad (1.13)$$

$$\langle N_{mnk_1,l}\rangle = 0, \quad \langle N_{mnk_1}\rangle = 0 \qquad (1.14)$$

определяется тензор $\underline{h}$ [9]

$$h_{ijkl} = \langle C_{ijkl} + C_{ijmn} N^{(1)}_{mkl,n}\rangle \qquad (1.15)$$

и обратный к тензору $\underline{h}$ эффективный тензор податливостей $\underline{H}$ [9]. Можно решать задачу теории упругости при ее постановке в напряжениях [9]. Тогда в качестве решения задачи по теории эффективного модуля получаем тензор напряжений $\underline{\sigma}$.

2. Введем тензор концентрации напряжений $\underline{A}$ и тензор концентрации деформаций $\underline{B}$, такие что

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}(\vec{x})\sigma_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = B_{ijkl}(\vec{x})e_{kl} \tag{2.1}$$

то есть эти тензоры показывают как напряжения (деформации) в компонентах композита связаны с напряжениями (деформациями), вычисленными по теории эффективного модуля.

Поскольку напряжения и деформации теории эффективного модуля связаны законом Гука

$$\sigma_{ij} = h_{ijkl}e_{kl}, \quad e_{ij} = H_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{2.2}$$

а напряжения и деформации в компонентах также подчиняются закону Гука (1.1), то между тензорами концентрации можно установить связь вида

$$\begin{aligned} \underline{A}(\vec{x}) &= \underline{C}(\vec{x}) : \underline{B}(\vec{x}) : \underline{H} \\ \underline{B}(\vec{x}) &= \underline{J}(\vec{x}) : \underline{A}(\vec{x}) : \underline{h} \end{aligned} \tag{2.3}$$

или в координатной форме

$$\begin{aligned} A_{ijkl}(\vec{x}) &= C_{ijpq}(\vec{x})B_{pqmn}(\vec{x})H_{mnkl} \\ B_{ijkl}(\vec{x}) &= J_{ijpq}(\vec{x})A_{pqmn}(\vec{x})h_{mnkl} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Тензоры концентрации в отличие от тензоров эффективных модулей не симметричны по паре индексов. При однородной деформации $\underline{e}$ тензор $\underline{B}$ (а также и $\underline{A}$) будет просто периодической функцией координат $\vec{x}$ и представляется в виде

$$B_{ijkl}(\vec{x}) = \Delta_{ijkl} + \Delta_{ijmn}N^{(0)}_{mkl,n}(\vec{x}) \tag{2.5}$$

а функции $N^{(0)}_{mkl}$ определяются из решения задачи (1.13), (1.14).

3. Перейдем к выводу критерия разрушения композита в целом, если известны критерии разрушения каждой фазы. Примем, что критерий разрушения компонентов композита представляется общей зависимостью вида [5]

$$P_{ij}(\vec{x})\sigma_{ij} + P_{ijkl}(\vec{x})\sigma_{ij}\sigma_{kl} + P_{ijklmn}(\vec{x})\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn} + \ldots = 1 \tag{3.1}$$

где $P_{i_1 \ldots i_{2q}}(\vec{x})$ — тензоры ранга $2q$, $q = 1, 2, \ldots$, называемые тензорами прочности по напряжениям.

Иногда критерий прочности удобнее записывать в деформациях

$$Q_{ij}(\vec{x})\varepsilon_{ij} + Q_{ijkl}(\vec{x})\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + Q_{ijklmn}(\vec{x})\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn} + \ldots = 1 \tag{3.2}$$

где $Q_{i_1 \ldots i_{2q}}(\vec{x})$ — тензоры ранга $2q$, $q = 1, 2, \ldots$, называемые тензорами прочности по деформациям.

Если материал ведет себя упруго вплоть до разрушения (хрупкое разрушение) или рассматриваются упругопластические простые процессы, то критерии (3.1) и (3.2) эквивалентны между собой.

Подставим в (3.1) напряжения σ_{ij}, выраженные с помощью тензора концентрации напряжений (2.1) через напряжения, вычисленные по теории эффективного модуля, и результат осредним. Тогда получим

$$P^*_{ij}\sigma_{ij} + P^*_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + P^*_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn} + \ldots = 1 \tag{3.3}$$

где $P^*_{i_1\ldots i_{2q}}$ $(q = 1, 2 \ldots)$ называются эффективными тензорами прочности по напряжениям

$$P^*_{i_1\ldots i_{2q}} = \langle P_{j_1\ldots j_{2q}} A_{j_1 j_2 i_1 i_2} \ldots A_{j_{2q-1} j_{2q} i_{2q-1} i_{2q}} \rangle \quad (q = 1, 2, \ldots) \tag{3.4}$$

Аналогично для критерия (3.2) имеем

$$Q^*_{ij} e_{ij} + Q^*_{ijkl} e_{ij} e_{kl} + Q^*_{ijklmn} e_{ij} e_{kl} e_{mn} + \ldots = 1 \tag{3.5}$$

где $Q^*_{i_1\ldots i_{2q}}$ $(q = 1, 2 \ldots)$ называются эффективными тензорами прочности по деформациям

$$Q^*_{i_1\ldots i_{2q}} = \langle Q_{j_1\ldots j_{2q}} B_{j_1 j_2 i_1 i_2} \ldots B_{j_{2q-1} j_{2q} i_{2q-1} i_{2q}} \rangle \quad (q = 1, 2, \ldots) \tag{3.6}$$

Легко показать, что если эквивалентны критерии (3.1), (3.2), то критерии (3.3), (3.5) также эквивалентны.

4. Рассмотрим хрупкое разрушение слоистого композита с изотропными слоями (ось x_3 перпендикулярна слоям). В этом случае

$$C_{ijkl}(x_3) = \frac{E(x_3)}{1+\nu(x_3)}\left[\Delta_{ijkl} + \frac{\nu(x_3)}{1-2\nu(x_3)}\delta_{ij}\delta_{kl}\right] \tag{4.1}$$

где $E(x_3)$ и $\nu(x_3)$ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Предположим, что поле макродеформаций (а значит и поле макронапряжений) однородно, а критерий разрушения материала слоев имеет вид

$$P_{ijkl}(x_3)\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 1 \tag{4.2}$$

где

$$P_{ijkl}(x_3) = \frac{1}{2\tau_0^2(x_3)} I_{ijkl}, \quad I_{ijkl} = \Delta_{ijkl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{4.3}$$

τ_0 — предел прочности материала слоя при чистом сдвиге. Критерий (4.2) с тензором прочности по напряжениям (4.3) является критерием энергии формоизменения и указывает на то, что наступление разрушения не зависит от величины гидростатического давления.

Из задачи (1.13), (1.14) находим

$$N^{(1)}_{mkl,3} = C^{-1}_{m3n3}\left[\langle C^{-1}_{n3p3}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3kl}\rangle - C_{n3kl}\right] \tag{4.4}$$

Отсюда и из (1.15) получим известные выражения для компонент тензора эффективных модулей упругости [9] слоистого композита

$$h_{ijkl} = \langle C_{ijkl}\rangle - \langle C_{ijm3} C^{-1}_{m3n3} C_{n3kl}\rangle +$$
$$+ \langle C_{ijm3} C^{-1}_{m3n3}\rangle \langle C^{-1}_{n3p3}\rangle^{-1} \langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3kl}\rangle \tag{4.5}$$

Обращая (4.5), найдем тензор эффективных модулей податливости $\underline{H}$ для слоистого композита.

Компоненты тензора концентрации деформаций $\underline{B}$ следуют из формул (2.5) и (4.4)

$$B_{ijkl}=\Delta_{ijkl}+\Delta_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}\left[<C^{-1}_{n3p3}>^{-1}<C^{-1}_{p3q3}C_{q3kl}>-C_{n3kl}\right] \tag{4.6}$$

Отсюда видно ,что

$$B_{ijkl}=\Delta_{ijkl} \quad \text{при} \quad i,\ j=1,2 \tag{4.7}$$

для остальных компонент после подстановки (4.1) и (4.6) имеем

$$B_{3333}=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\Big/<\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}>$$

$$B_{3311}=B_{3322}=-\frac{\nu}{1-\nu}+B_{3333}<\frac{\nu}{1-\nu}>,\quad B_{1313}=B_{2323}=\frac{1+\nu}{2E}\Big/<\frac{1+\nu}{E}> \tag{4.8}$$

Используя зависимости (2.4) и (4.6), найдем выражения для компонент тензора концентрации напряжений в слоистом композите

$$A_{ijkl}=(C_{ijmn}-C_{ijp3}C^{-1}_{p3q3}C_{q3mn}+C_{ijp3}C^{-1}_{p3q3}<C^{-1}_{q3t3}>^{-1}<C^{-1}_{t3r3}C_{r3mn}>)H_{mnkl} \tag{4.9}$$

Отсюда и из (4.5) следует, что

$$A_{i3kl}=A_{3ikl}=\Delta_{i3kl} \tag{4.10}$$

Остальные компоненты тензора концентрации напряжений определяются по следующим формулам:

$$A_{1111}=A_{2222}=\frac{E}{1-\nu^2}\,\frac{<E/(1-\nu^2)>-\nu<E\nu/(1-\nu^2)>}{<E/(1-\nu)><E/(1+\nu)>}$$

$$A_{1122}=A_{2211}=\frac{E}{1-\nu^2}\,\frac{\nu<E/(1-\nu^2)>-<E\nu/(1-\nu^2)>}{<E/(1-\nu)><E/(1+\nu)>} \tag{4.11}$$

$$A_{1133}=A_{2233}=\frac{\nu}{1-\nu}-\frac{E}{1-\nu}\,\frac{<\nu/(1-\nu)>}{<E/(1-\nu)>},\quad A_{1212}=\frac{1}{2}\,\frac{E/(1+\nu)}{<E/(1-\nu)>}$$

Между коэффициентами A_{ijkl} имеется зависимость

$$A_{1111}-A_{1122}=2A_{1212} \tag{4.12}$$

Для определения коэффициентов эффективного тензора прочности по напряжениям в формуле (3.4) положим $\phi=2$, подставим в нее тензор прочности слоев (4.3) и вычисленные коэффициенты тензора $\underline{A}$ (4.10), (4.11). В результате получим следующие неравные нулю компоненты тензора прочности

$$P^*_{1111}=P^*_{2222}=\frac{1}{6}<\left(\frac{A_{1111}-A_{1122}}{\tau_b}\right)^2+\left(\frac{A_{1111}}{\tau_b}\right)^2+\left(\frac{A_{1122}}{\tau_b}\right)^2>$$

$$P^*_{1133}=P^*_{2233}=-\frac{1}{6}<\frac{(1-A_{1133})(A_{1111}+A_{1122})}{\tau_b^2}>$$

$$P^*_{1122}=-\frac{1}{6}<\left(\frac{A_{1111}-A_{1122}}{\tau_b}\right)^2-2\frac{A_{1111}A_{1122}}{\tau_b^2}>$$

$$P^*_{3333}=\frac{1}{3}<\left(\frac{1-A_{1133}}{\tau_b}\right)^2>,\quad P^*_{1313}=P^*_{2323}=\frac{1}{4}<1/\tau_b^2>$$

$$P^*_{1212}=<\left(\frac{A_{1212}}{\tau_b}\right)^2> \qquad (4.13)$$

Между компонентами эффективного тензора прочности имеет место зависимость, аналогичная (4.12)

$$P^*_{1111}-P^*_{1122}=2P^*_{1212} \qquad (4.14)$$

Следовательно, эффективный тензор прочности слоистого композита также, как эффективный тензор модулей упругости, обладает пятью независимыми коэффициентами, а плоскость, параллельная слоям, является плоскостью изотропии упругих и прочностных свойств.

Введем технические пределы прочности: σ_L и σ_F — пределы прочности при растяжении (сжатии) вдоль и поперек слоев, τ_L и τ_F — пределы прочности при чистом сдвиге вдоль и поперек слоев, σ_P — предел прочности при всестороннем гидростатическом давлении. Технические переменные связаны с компонентами тензора прочности по формулам

$$\sigma_F=1/\sqrt{P^*_{3333}},\quad \sigma_L=1/\sqrt{P^*_{1111}},\quad \tau_F=\frac{1}{2\sqrt{P^*_{1313}}},\quad \tau_L=\frac{1}{2\sqrt{P^*_{1212}}}$$

$$\sigma_P=1/\sqrt{P^*_{3333}+4P^*_{1111}+4P^*_{1122}-4P^*_{1212}}=$$

$$=\sqrt{3}/\sqrt{<\frac{1}{\tau_b^2}\left[\frac{E}{1-\nu}\,\frac{<(1-2\nu)/(1-\nu)>}{<E/(1-\nu)>}-\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right]^2>} \qquad (4.15)$$

С использованием технических пределов условие разрушения слоистого композита примет вид

$$\frac{\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2}{\sigma_L^2}+\frac{\sigma_{33}^2}{\sigma_F^2}+\frac{\sigma_{12}^2}{\tau_L^2}+\frac{\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2}{\tau_F^2}+\left(\frac{2}{\sigma_L^2}-\frac{1}{\tau_L^2}\right)\sigma_{11}\sigma_{22}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_P^2}+\frac{1}{\tau_L^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sigma_F^2}-\frac{4}{\sigma_L^2}\right)(\sigma_{11}+\sigma_{22})\sigma_{33}=1 \qquad (4.16)$$

Таким образом, разрушение слоистого композита может наступить и от всестороннего давления, несмотря на то, что материал каждого слоя в отдельности не разрушается при всестороннем давлении.

Аналогично можно получить критерий разрушения слоистого композита в деформациях. Для этого необходимо положить

$$Q_{ijkl}(x_3)=\frac{2}{\gamma_b^2(x_3)}I_{ijkl} \qquad (4.17)$$

где $\gamma_b(x_3)$ — предел прочности материала по деформациям при чистом сдвиге, связанный с пределом прочности $\tau_b(x_3)=G(x_3)\cdot\gamma_b(x_3)$ ($G(x_3)$ — модуль сдвига), и воспользоваться формулой (3.6). В результате получим выражения для коэффициентов эффективного тензора прочности по деформациям

$$Q^*_{1111}=Q^*_{2222}=\frac{2}{3}\left\langle\frac{1}{\gamma_b^2}\left[1+B_{3311}+(B_{3311}-1)^2\right]\right\rangle$$

$$Q^*_{1133}=Q^*_{2233}=\frac{2}{3}\left\langle\frac{B_{3333}(2B_{3311}-1)}{\gamma_b^2}\right\rangle$$

$$Q^*_{1122}=\frac{2}{3}\left\langle\frac{1}{\gamma_b^2}\left[2B_{3311}(B_{3311}-1)-1\right]\right\rangle, \quad Q^*_{3333}=\frac{4}{3}\left\langle\left(\frac{B_{3333}}{\gamma_b}\right)^2\right\rangle$$

$$Q^*_{1313}=Q^*_{2323}=4\left\langle\left(\frac{B_{1313}}{\gamma_b}\right)^2\right\rangle \quad Q^*_{1212}=\left\langle 1/\gamma_b^2\right\rangle \tag{4.18}$$

Причем

$$Q^*_{1111}-Q^*_{1122}=2Q^*_{1212} \tag{4.19}$$

Коэффициенты B_{ijkl} определяются по формулам (4.7) и (4.8). Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$Q^*_{ijkl}=P^*_{pqmn}h_{pqij}h_{mnkl} \tag{4.20}$$

Критерий разрушения в деформациях для слоистого композита примет вид

$$Q^*_{1111}(e_{11}^2+e_{22}^2)+Q^*_{3333}e_{33}^2+4Q^*_{1212}e_{12}^2+4Q^*_{1313}(e_{13}^2+e_{23}^2)+$$
$$+2(Q^*_{1111}-2Q^*_{1212})\,e_{11}e_{22}+2Q^*_{1133}(e_{11}+e_{22})e_{33}=1 \tag{4.21}$$

Отметим, что приведенные выше рассуждения можно использовать и при определении начала пластических деформаций в композиционном материале, а критерии (4.16) и (4.21) можно рассматривать как критерии пластичности в слоистом композите. При этом во всех формулах последнего раздела необходимо τ_b и γ_b заменить на τ_s и γ_s — пределы текучести по напряжениям и деформациям при чистом сдвиге. Тогда σ_F, σ_L, σ_p, τ_F, τ_L, определяемые по формулм (4.15), являются техническими пределами текучести.

ԿՈՄՊՈԶԻՏՆԵՐԻ ՔԱՅՔԱՅՄԱՆ ՈՐՈՇ ՉԱՓԱՆԻՇՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Վ. Ի. ԳՈՐԲԱՉՈՎ, Բ. Ե. ՊՈԲԵԴՐՅԱ

Ամփոփում

Աշխատանքում առաջարկված է. միջինացման եղանակի վրա հիմնված և յուրաքանչյուր կոմպոզիտի առանձին-առանձին քայքայման ֆենոմենոլոգիական չափանիշի հաշվառմամբ. կոմպոզիցիոն նյութերի ամրության չափանիշների արտածման եղանակով։ Շերտավոր կոմպոզիտների դեպքի համար, շերտերի փխրուն քայքայման դեպքում, տրվում են լարումների և դեֆորմացիաների ամրության տենզորների բացահայտ արտահայտություններ շերտերի երկրաչափական և մեխանիկական բնութագրիչների միջոցով։ Գտնված են տարբեր ուղղություններով շերտավոր կոմպոզիտների ամրության սահմանի համար բանաձևեր և դուրս է բերված լարվածային վիճակի դեպքում ամրության չափանիշ։

ON SOME CRITERIA OF COMPOSITE FRACTURE

V. I. GORBACHEV, B. E. POBEDRYA

S u m m a r y

Method of criterion derivation of composite fracture has been suggested. This method is based on the idea of averaging. Formulas of strength tensors are derived for layer composite under brittle fracture of layers.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ашкенази Е. К., Ганов Э. В.* Анизотропия конструкционных материалов. Справочник. Л.: Машиностроение, 1980. 246 с.
2. *Гольденблат И. И., Копнов В. А.* Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 190 с.
3. *Ву Э. М.* Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред. В сб. «Композиционные материалы», т. 2. «Механика композиционных материалов». М.: Мир, 1978, с. 401—492.
4. *Ву Э. М.* Прочность и разрушение композитов. В сб. «Композиционные материалы», т. 5, «Разрушение и усталость». М.: Мир, 1978, с. 206—267.
5. *Малмейстер А. К.* Геометрия теорий прочности. «Механика полимеров», 1966, № 4, с. 519—527.
6. *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд. МГУ, 1974. 206 с.
7. *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд. МГУ, 1981, с. 343.
8. *Бахвалов Н. С.* Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами. ДАН СССР, 1975, 221, № 3, с. 516—519.
9. *Победря Б. Е., Горбачев В. И.* О статических задачах упругих композитов. Вестник МГУ, сер. матем. и мех., 1977, № 5, с. 101—110.

НПО ЦНИИТМАШ

Поступила в редакцию
11.11.1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVIII, № 4, 1985 Механика

УДК 548.0 : 539.376

К ВОПРОСУ О РЕОЛОГИИ МОНОКРИСТАЛЛОВ

СИМОНЯН А. М., СИМОНЯН Н. М.

Прогнозирование ползучести кристаллов вообще весьма затруднительно при рассмотрении сложного напряженного состояния, изменяющегося во времени по произвольному закону. Для обобщения реологических соотношений при одноосном напряженном состоянии на случай сложного напряженного состояния обычно принимается предположение об изотропном упрочнении материала ([1] стр. 334), то есть выбираются какие-либо инварианты, определяющиеся тензорами напряжений и деформаций, и затем соотношения для этих инвариантов, легко проверяемые при одноосном напряженном состоянии, оставляются в силе и для сложного напряженного состояния. Однако, обобщения такого рода оказываются оправданными редко и лишь при определенных программах изменения напряженного состояния во времени.

В настоящей работе строятся реологические соотношения для монокристаллов с гранецентрированной кубической решеткой на основе концепции скольжения дислокаций, которая получила частные подтверждения в работе [2] и согласно которой разница при рассмотрении осевого или сложного напряженного состояния не является принципиальной.

Основными гипотезами здесь приняты следующие:

1. Деформации ползучести имеют место лишь за счет скольжения дислокаций в системе плоскостей {111} и системе направлений $<110>$.

2. Скольжение дислокаций в некоторой системе скольжения, то есть в некоторой плоскости из системы плоскостей {111} и в некотором направлении из системы направлений $<110>$ (например, в системе скольжения (111) $[01\bar{1}]$, определяется лишь историей изменения касательного напряжения, соответствующего этой системе скольжения.

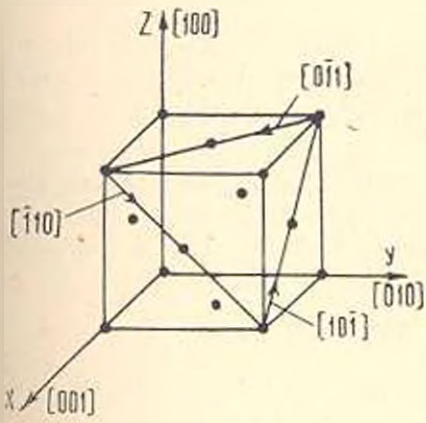
3. Сопротивляемость кристалла скольжению во всех системах скольжения одна и та же.

1. Получение основных формул

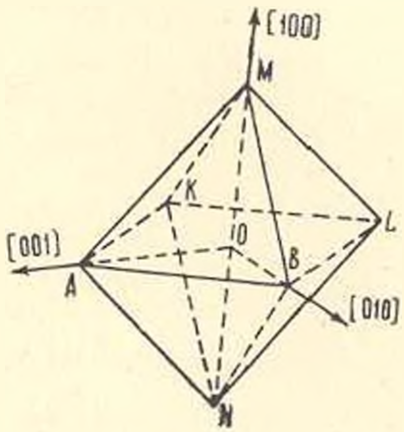
Рассмотрим гранецентрированный кубический кристалл, элемент которого показан на фиг. 1. Положим, что он находится в сложном напряженном состоянии, определяемом тензором напряжений

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Определим касательные напряжения, соответствующие системам скольжения, показанным на фиг. 2, где каждая грань является плоскостью скольжения, а каждое ребро—направлением скольжения. Поскольку в каждой грани имеется три направления скольжения и всего четыре



Фиг. 1



Фиг. 2

грани, не параллельные друг другу, то получается 12 систем скольжения. Соответственные им касательные напряжения определяются по формулам

$$\tau_{AB}(AMB) = \tau_{[01\bar{1}]}(111) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sigma_y - \sigma_z + \tau_{yz} - \tau_{zx})$$

$$\tau_{AM}(AMB) = \tau_{[\bar{1}01]}(111) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sigma_x - \sigma_z - \tau_{yz} + \tau_{xy})$$

$$\tau_{BM}(AMB) = \tau_{[1\bar{1}0]}(111) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sigma_z - \sigma_x - \tau_{xy} + \tau_{zx})$$

$$\tau_{BL}(BML) = \tau_{[01\bar{1}]}(11\bar{1}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sigma_x - \sigma_y - \tau_{yz} - \tau_{zx})$$

$$\tau_{LM}(BML) = \tau_{[101]}(11\bar{1}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sigma_z - \sigma_x + \tau_{yz} + \tau_{xy})$$

$$\tau_{MB}(BML) = \tau_{[\bar{1}10]}(11\bar{1}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sigma_y - \sigma_z - \tau_{xy} + \tau_{zx})$$

$$\tau_{LK}(LMK) = \tau_{[011]}(1\bar{1}\bar{1}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sigma_y - \sigma_x - \tau_{yz} + \tau_{zx})$$

$$\tau_{KM}(LMK) = \tau_{[110]}(1\bar{1}\bar{1}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sigma_z - \sigma_y - \tau_{xy} - \tau_{zx})$$

$$\tau_{ЛК}(LMK) = \tau_{[10\bar{1}]}(\bar{1}\bar{1}1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sigma_x - \sigma_z + \tau_{yz} + \tau_{xy})$$

$$\tau_{КЛ}(AMK) = \tau_{[011]}(\bar{1}11) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sigma_x - \sigma_y + \tau_{yz} + \tau_{zx})$$

$$\tau_{ЛМ}(AMK) = \tau_{[10\bar{1}]}(1\bar{1}1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sigma_z - \sigma_x - \tau_{yz} + \tau_{xy})$$

$$\tau_{МК}(AMK) = \tau_{[\bar{1}\bar{1}0]}(1\bar{1}1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sigma_y - \sigma_z - \tau_{xy} - \tau_{zx}) \qquad (1.1)$$

Из формул (1.1) можно видеть, что касательные напряжения, соответствующие системам скольжения, связаны друг с другом семью соотношениями, поскольку они определяются уже при задании 5 величин $\sigma_x - \sigma_y$, $\sigma_y - \sigma_z$, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}.

Согласно первой группе этих соотношений, сумма касательных напряжений в каждой плоскости скольжения в направлениях, соответствующих обходу контура грани октаэдра (фиг. 2) против часовой стрелки, равна нулю:

$$\tau_{[01\bar{1}]}(111) + \tau_{[\bar{1}01]}(111) + \tau_{[1\bar{1}0]}(111) = 0$$

$$\tau_{[011]}(11\bar{1}) + \tau_{[\bar{1}0\bar{1}]}(11\bar{1}) + \tau_{[\bar{1}10]}(11\bar{1}) = 0$$

$$\tau_{[0\bar{1}1]}(1\bar{1}1) + \tau_{[110]}(\bar{1}\bar{1}1) + \tau_{[\bar{1}01]}(\bar{1}\bar{1}1) = 0 \qquad (1.2)$$

$$\tau_{[011]}(\bar{1}11) + \tau_{[101]}(\bar{1}11) + \tau_{[\bar{1}\bar{1}0]}(111) = 0$$

Согласно второй группе соотношений, сумма касательных напряжений в направлениях, соответствующих обходу оснований октаэдра против часовой стрелки в плоскостях, лежащих по одну сторону от оснований октаэдра, равна нулю. При использовании напряжений, фигурирующих в (1.1), эта группа соотношений запишется так:

$$\tau_{[011]}(111) + \tau_{[011]}(11\bar{1}) + \tau_{[011]}(1\bar{1}\bar{1}) + \tau_{[011]}(111) = 0$$

$$\tau_{[\bar{1}01]}(111) + \tau_{[101]}(11\bar{1}) - \tau_{[\bar{1}0\bar{1}]}(\bar{1}\bar{1}1) - \tau_{[10\bar{1}]}(1\bar{1}1) = 0$$

$$\tau_{[1\bar{1}0]}(111) - \tau_{[\bar{1}10]}(11\bar{1}) - \tau_{[110]}(\bar{1}\bar{1}1) + \tau_{[110]}(1\bar{1}1) = 0 \qquad (1.3)$$

Согласно 2-й и 3-й гипотезам скольжение дислокаций в некоторой системе скольжения определяется лишь историей изменения соответствующего касательного напряжения, и, следовательно, справедливы уравнения

$$\gamma_{[01\bar{1}]}(111) = \Phi[\tau_{[01\bar{1}]}(111)]; \quad \gamma_{[\bar{1}01]}(111) = \Phi[\tau_{[\bar{1}01]}(111)]; \ldots \qquad (1.4)$$

где Φ—некоторый оператор по времени; γ—часть деформации сдвига, вызванная скольжением лишь в соответствующей системе скольжения, а не деформация сдвига, соответствующая данной системе скольжения, что существенно, так как скольжение в некоторой другой системе скольжения также дает вклад в деформацию сдвига в данной системе скольжения.

Используя 3-ю гипотезу, запишем также очевидные соотношения

$$\Phi[\tau_{[01\bar1]}(111)] = \Phi[-\tau_{[0\bar11]}(111)] = -\Phi[\tau_{[0\bar11]}(111)]$$

$$\Phi[\tau_{[\bar101]}(111)] = \Phi[-\tau_{[10\bar1]}(111)] = -\Phi[\tau_{[10\bar1]}(111)] \qquad (1.5)$$

. . . .

С помощью выбора оператора Φ можно описывать реологию кристалла, происходящую по произвольным законам.

Например, для описания идеальной пластичности достаточно принять

$$\Phi[\lambda(t)] = 0, \quad \text{если} \quad |\lambda(\xi)| < \tau_s, \quad 0 < \xi < t \qquad (1.6)$$

$\Phi[\lambda(t)] \neq 0$, если имеется ξ из $[0, t]$, для которого $|\lambda(\xi)| = \tau_s$, τ_s — критическое касательное напряжение.

Запишем выражение для деформаций в ортогональных координатах x, y, z, как для сумм вкладов от скольжений:

$$\sqrt{6}\,\varepsilon_x = \gamma_{[1\bar10]}(111) - \gamma_{[\bar101]}(111) + \gamma_{[101]}(11\bar1) - \gamma_{[1\bar10]}(11\bar1) +$$

$$+ \gamma_{[110]}(\bar111) - \gamma_{[\bar10\bar1]}(\bar1\bar11) + \gamma_{[10\bar1]}(\bar111) - \gamma_{[1\bar10]}(1\bar11)$$

$$\sqrt{6}\,\varepsilon_y = \gamma_{[01\bar1]}(111) - \gamma_{[1\bar10]}(111) + \gamma_{[\bar110]}(11\bar1) - \gamma_{[0\bar1\bar1]}(11\bar1) -$$

$$- \gamma_{[011]}(1\bar11) + \gamma_{[\bar110]}(1\bar11) + \gamma_{[01\bar1]}(\bar1\bar11) - \gamma_{[110]}(\bar11\bar1)$$

$$\sqrt{6}\,\varepsilon_z = \gamma_{[\bar101]}(111) - \gamma_{[01\bar1]}(111) + \gamma_{[011]}(1\bar1\bar1) - \gamma_{[10\bar1]}(111) +$$

$$+ \gamma_{[101]}(\bar1\bar11) - \gamma_{[0\bar11]}(11\bar1) + \gamma_{[0\bar11]}(11\bar1) - \gamma_{[101]}(11\bar1)$$

$$\sqrt{6}\,\gamma_{xy} = \gamma_{[01\bar1]}(111) - \gamma_{[\bar101]}(111) - \gamma_{[0\bar11]}(1\bar11) + \gamma_{[101]}(11\bar1) -$$

$$- \gamma_{[0\bar11]}(111) + \gamma_{[\bar10\bar1]}(\bar1\bar11) + \gamma_{[011]}(\bar111) - \gamma_{[10\bar1]}(1\bar11)$$

$$\sqrt{6}\,\gamma_{yz} = -\gamma_{[\bar110]}(111) + \gamma_{[\bar101]}(111) - \gamma_{[110]}(11\bar1) + \gamma_{[101]}(11\bar1) +$$

$$+ \gamma_{[\bar10\bar1]}(\bar1\bar11) - \gamma_{[110]}(\bar1\bar11) - \gamma_{[\bar110]}(\bar111) + \gamma_{[10\bar1]}(1\bar11)$$

$$\sqrt{6}\,\gamma_{zx} = -\gamma_{[01\bar1]}(111) + \gamma_{[1\bar10]}(111) + \gamma_{[110]}(11\bar1) - \gamma_{[011]}(11\bar1) +$$

$$+ \gamma_{[0\bar11]}(1\bar1\bar1) - \gamma_{[110]}(11\bar1) + \gamma_{[011]}(1\bar11) - \gamma_{[\bar110]}(1\bar11) \qquad (1.7)$$

При использовании (1.7), (1.4), (1.5) и (1.1) окончательно получим следующие соотношения между деформациями и напряжениями в монокристалле с гранецентрированной кубической структурой в ортогональных координатах x, y, z, оси которых совпадают соответственно с кристаллографическими осями [001]; [010] и [100]

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{ij}^{1,2} \left\{ \Phi\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y + (-1)^i \tau_{yz} + (-1)^j \tau_{zx}}{\sqrt{6}}\right] + \right.$$

$$\left. + \Phi\left[\frac{\sigma_x - \sigma_z + (-1)^i \tau_{xy} + (-1)^j \tau_{yz}}{\sqrt{6}}\right] \right\}$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_y &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{i,j}^{1,2} \left\{ \Phi \left[\frac{\sigma_y - \sigma_x + (-1)^i \tau_{xy} + (-1)^j \tau_{yz}}{\sqrt{6}} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \Phi \left[\frac{\sigma_y - \sigma_z + (-1)^i \tau_{xy} + (-1)^j \tau_{zx}}{\sqrt{6}} \right] \right\} \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{i,j}^{1,2} \left\{ \Phi \left[\frac{\sigma_z - \sigma_x + (-1)^i \tau_{xy} + (-1)^j \tau_{yz}}{\sqrt{6}} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \Phi \left[\frac{\sigma_z - \sigma_y + (-1)^i \tau_{xy} + (-1)^j \tau_{zx}}{\sqrt{6}} \right] \right\} \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{i,j}^{1,2} \left\{ \Phi \left[\frac{\tau_{xy} + (-1)^i \tau_{zx} + (-1)^j (\sigma_y - \sigma_z)}{\sqrt{6}} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \Phi \left[\frac{\tau_{xy} + (-1)^i \tau_{yz} + (-1)^j (\sigma_x - \sigma_z)}{\sqrt{6}} \right] \right\} \\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{i,j}^{1,2} \left\{ \Phi \left[\frac{\tau_{yz} + (-1)^i \tau_{xy} + (-1)^j (\sigma_x - \sigma_z)}{\sqrt{6}} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \Phi \left[\frac{\tau_{yz} + (-1)^i \tau_{zx} + (-1)^j (\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{6}} \right] \right\} \\
\gamma_{zx} &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{i,j}^{1,2} \left\{ \Phi \left[\frac{\tau_{zx} + (-1)^i \tau_{xy} + (-1)^j (\sigma_y - \sigma_z)}{\sqrt{6}} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \Phi \left[\frac{\tau_{zx} + (-1)^i \tau_{yz} + (-1)^j (\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{6}} \right] \right\}
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

где суммирование производится по всем комбинациям i, j, принимающим значения 1 и 2, то есть каждая из формул (1.8) состоит из восьми слагаемых операторов Φ по соответствующим функциям.

Определение оператора Φ может быть осуществлено при изучении реологии монокристалла в условиях осевого напряженного состояния, если направление осевого напряжения совпадает с одной из осей [100], [010] или [001]. Например, если действует напряжение $\sigma_x(t)$, направление которого, как указано выше, совпадает с осью [001], то согласно (1.8) имеем

$$
\varepsilon_x = \frac{8}{\sqrt{6}} \Phi \left[\frac{\sigma_x(t)}{\sqrt{6}} \right] \tag{1.9}
$$

Таким образом, если деформации одноосной ползучести описываются некоторым выражением

$$
\varepsilon_x = \Pi[\sigma_x(t)] \tag{1.10}
$$

то для построения оператора Φ, с помощью которого описывается ползучесть при любом напряженном состоянии по формулам (1.8), достаточно принять

$$\Phi[\sigma(t)] = \frac{\sqrt{6}}{8}\,\Pi[\sqrt{6}\,\sigma(t)] \tag{1.11}$$

При плоском напряженном состоянии в случае, если равны нулю напряжения на площадке с нормалью, совпадающей с одной из осей x, y и z, или, что то же, [001], [010] и [100], уравнения (1.8) записываются более кратко. Например, если $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$, то

$$\varepsilon_x = \frac{2}{\sqrt{6}}\left[2\Phi\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{\sqrt{6}}\right)+\Phi\left(\frac{\sigma_x+\tau_{xy}}{\sqrt{6}}\right)+\Phi\left(\frac{\sigma_x-\tau_{xy}}{\sqrt{6}}\right)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{2}{\sqrt{6}}\left[2\Phi\left(\frac{\sigma_y-\sigma_x}{\sqrt{6}}\right)+\Phi\left(\frac{\sigma_y+\tau_{xy}}{\sqrt{6}}\right)+\Phi\left(\frac{\sigma_y-\tau_{xy}}{\sqrt{6}}\right)\right] \tag{1.12}$$

$$\varepsilon_z = \frac{2}{\sqrt{6}}\left[\Phi\left(\frac{\sigma_x+\tau_{xy}}{\sqrt{6}}\right)+\Phi\left(\frac{\sigma_y+\tau_{xy}}{\sqrt{6}}\right)+\Phi\left(\frac{\sigma_x-\tau_{xy}}{\sqrt{6}}\right)+\Phi\left(\frac{\sigma_y-\tau_{xy}}{\sqrt{6}}\right)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{6}}\left[\Phi\left(\frac{\sigma_y+\tau_{xy}}{\sqrt{6}}\right)+\Phi\left(\frac{\sigma_x+\tau_{xy}}{\sqrt{6}}\right)+\Phi\left(\frac{\tau_{xy}-\sigma_y}{\sqrt{6}}\right)+\Phi\left(\frac{\tau_{xy}-\sigma_x}{\sqrt{6}}\right)\right]$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

Если же при плоском или даже при осевом напряженном состоянии площадка или площадки, на которых напряжения равны нулю, имеют нормали, не совпадающие с какой-либо из осей [001], [010] и [100], то следует определить напряжения в системе координат x, y, z и использовать формулы (1.8).

Эти процедуры будут осуществлены для оценки анизотропии реологических свойств монокристалла. Положим, что на монокристалл действует растягивающее напряжение $\sigma(t)$, направление которого с осями [001], [010] и [100] соответствует α, β и δ.

Пользуясь формулами

$$\sigma_x = \sigma\cos^2\alpha, \quad \sigma_y = \sigma\cos^2\beta, \quad \sigma_z = \sigma\cos^2\delta$$

$$\tau_{xy} = \sigma\cos\alpha\cos\beta, \quad \tau_{yz} = \sigma\cos\beta\cos\delta, \quad \tau_{zx} = \sigma\cos\alpha\cos\delta \tag{1.13}$$

зависимостью осевой деформации ε в направлении действия напряжения σ от деформаций в системе координат x, y, z

$$\varepsilon = \varepsilon_x\cos^2\alpha + \varepsilon_y\cos^2\beta + \varepsilon_z\cos^2\delta + \gamma_{xy}\cos\alpha\cos\beta + \gamma_{yz}\cos\beta\cos\delta + \gamma_{zx}\cos\delta\cos\alpha \tag{1.14}$$

а также соотношениями (1.8), получим соотношение между ε и σ, определяющее реологическую анизотропию монокристалла

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left\{(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\beta-\cos\delta)\Phi\left[\frac{\sigma(t)}{\sqrt{6}}(\cos\alpha+\cos\beta)\times\right.\right.$$

$$\left.\times(\cos\alpha-\cos\beta-\cos\delta)\right]+(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\beta+\cos\delta)\Phi\left[\frac{\sigma(t)}{\sqrt{6}}(\cos\alpha+\cos\beta)\times\right.$$

$$\left.\times(\cos\alpha-\cos\beta+\cos\delta)\right]+(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\alpha+\cos\beta-\cos\delta)\Phi\left[\frac{\sigma(t)}{\sqrt{6}}(\cos\alpha-\cos\beta)\times\right.$$

$$\times(\cos\alpha+\cos\beta-\cos\delta)\Big|+(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\beta+\cos\delta)\Phi\Big|\frac{\sigma(t)}{\sqrt{6}}(\cos\alpha-\cos\beta)\times$$

$$\times(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\delta)\Big|+(\cos\beta+\cos\delta)(\cos\beta-\cos\delta+\cos\alpha)\Phi\Big|\frac{\sigma(t)}{\sqrt{6}}(\cos\beta+\cos\delta)\times$$

$$\times(\cos\beta-\cos\delta+\cos\alpha)\Big|+(\cos\beta+\cos\delta)(\cos\beta-\cos\delta-\cos\alpha)\Phi\Big|\frac{\sigma(t)}{\sqrt{6}}(\cos\beta+\cos\delta)\times$$

$$\times(\cos\beta-\cos\delta-\cos\alpha)\Big|+(\cos\beta-\cos\delta)(\cos\beta+\cos\delta-\cos\alpha)\Phi\Big|\frac{\sigma(t)}{\sqrt{6}}(\cos\beta-\cos\delta)\times$$

$$\times(\cos\beta+\cos\delta-\cos\alpha)\Big|+(\cos\beta-\cos\delta)(\cos\beta-\cos\delta+\cos\alpha)\Phi\Big|\frac{\sigma(t)}{\sqrt{6}}(\cos\beta-\cos\delta)\times$$

$$\times(\cos\beta+\cos\delta+\cos\alpha)\Big|+(\cos\delta+\cos\alpha)(\cos\delta-\cos\alpha+\cos\beta)\Phi\Big|\frac{\sigma(t)}{\sqrt{6}}(\cos\delta+\cos\alpha)\times$$

$$\times(\cos\delta-\cos\alpha+\cos\beta)\Big|+(\cos\delta+\cos\alpha)(\cos\delta-\cos\alpha-\cos\beta)\Phi\Big|\frac{\sigma(t)}{\sqrt{6}}(\cos\delta+\cos\alpha)\times$$

$$\times(\cos\delta+\cos\alpha-\cos\beta)\Big|+(\cos\delta-\cos\alpha)(\cos\delta+\cos\alpha+\cos\beta)\Phi\Big|\frac{\sigma(t)}{\sqrt{6}}(\cos\delta-\cos\alpha)\times$$

$$\times(\cos\delta-\cos\alpha-\cos\beta)\Big|+(\cos\delta-\cos\alpha)(\cos\delta+\cos\alpha-\cos\beta)\Phi\Big|\frac{\sigma(t)}{\sqrt{6}}(\cos\delta-\cos\alpha)\times$$

$$\times(\cos\delta+\cos\alpha-\cos\beta)\Big|\Big| \tag{1.15}$$

Формула (1.15) позволяет сделать некоторые выводы об анизотропии монокристалла даже без конкретизации оператора Φ. Например, при сравнении реологических свойств монокристалла при действии напряжения σ в направлении [001] ($\cos\alpha=1$, $\cos\beta=\cos\delta=0$), которые определяются вытекающим из (1.15) соотношением

$$\varepsilon(t)=\frac{8}{\sqrt{6}}\Phi\left|\frac{\sigma(t)}{\sqrt{6}}\right|,\quad \alpha=0,\quad \beta=\delta=\frac{\pi}{2} \tag{1.16}$$

и реологических свойств при действии напряжения σ в направлении [011] $\left(\cos\alpha=\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\delta=0\right)$, которые, согласно (1.15), определяются соотношением

$$\varepsilon(t)=\frac{4}{\sqrt{6}}\Phi\left|\frac{\sigma(t)}{\sqrt{6}}\right|,\quad \alpha=\beta=\frac{\pi}{4},\quad \delta=\frac{\pi}{2} \tag{1.17}$$

приходим к заключению, что в направлении [001] монокристалл деформируется в два раза быстрее, чем в направлении [011], независимо от оператора Φ. Этот вывод получил экспериментальное подтверждение при изучении ползучести монокристаллов алюминия при различных программах изменения растягивающего напряжения и температуры [2].

При действии напряжения σ, направленного вдоль оси [111]

$\left(\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, согласно (1.15), имеем

$$\varepsilon(t) = \frac{6}{\sqrt{6}}\,\Phi\left|\frac{2\tau(t)}{3\sqrt{6}}\right|, \quad \alpha = \beta = \gamma \qquad (1.18)$$

Из сравнения (1.16) и (1.18) видно, что деформативные свойства монокристалла в различных направлениях различаются более, чем в два раза.

Рассмотрим теперь вопрос о пластичности монокристалла. Согласно (1.6) и (1.9), пластичность монокристалла при действии нагрузки вдоль оси x начинается с момента достижения $\frac{\sigma_x}{\sqrt{6}}$ некоторого критического значения τ_s, то есть $\sigma_{x_{тек}} = \sqrt{6}\,\tau_s$, что совпадает с значениями $\sigma_{y_{тек}}$ и $\sigma_{z_{тек}}$. Согласно (1.17) такое же значение предела текучести соответствует растяжению в направлении [011], как и в направлениях [101] и [110]. Если же растягивающее напряжение направлено вдоль оси [111], то, согласно (1.18), предел текучести выше на 50 %.

$$\frac{2\sigma_{[111]тек}}{3\sqrt{6}} = \tau_s, \quad \sigma_{[111]тек} = \frac{3}{2}\sqrt{6}\,\tau_s = 1{,}5\,\sigma_{x_{тек}} \qquad (1.19)$$

Условие пластичности при сложном напряженном состоянии запишется так:

$$\max\{|\sigma_i - \sigma_j| + |\tau_{ik}| + |\tau_{jk}|\} = \sigma_{x_{тек}} \qquad (1.20)$$

где i, j и k могут принимать значения x, y и z.

2. Обсуждение результатов

Рассмотрим гипотезы, лежащие в основе вышеизложенной реологической теории.

Согласно первой гипотезе движение линейных дислокаций в гранецентрированных кубических кристаллов имеет место лишь в системах скольжения {111} <110>. Движение дислокации в этих системах скольжения имеет теоретические и экспериментальные обоснования ([3], [4] и др.), видимо, является превалирующим, хотя при высоких температурах наблюдается скольжение и в иных системах скольжения ([4], [5]).

Более проблематична справедливость второй гипотезы о зависимости скольжения дислокаций в некоторой системе скольжения только от истории изменения касательного напряжения, соответствующего этой системе скольжения. Как показано в работе [6], гидростатическое давление упрочняюще влияет на пластичность монокристаллов, что не согласуется с данной гипотезой. Однако, здесь следует учесть, что в этих экспериментах [6] влияние гидростатического давления на пластичность проявлялось лишь при значениях гидростатического напряжения, по крайней мере, на порядок больших осевого напряжения, так что при обычных условиях нагружения, когда приложение гидростатического давления не является самоцелью, влиянием шарового тензора напряжения можно пренебречь, как это и имеет место в основных соотношениях (1.8). Следует отметить, что в гипотезе 2 пренебрегается, кроме того, взаимодействие скольжений в разных системах и влияние упрочнения в одной системе скольжения на деформативные свойства в другой системе скольжения.

В работе [7] отмечается существенная анизотропия деформационных свойств гранецентрированных кубических монокристаллов, которая является сходной как в количественном, так и в качественном отношениях для монокристаллов различных металлов, что вообще согласуется с (1.15).

Положим, что у поликристаллов, состоящих из хаотически расположенных зерен гранецентрированных кубических монокристаллов, пластические деформации начинаются с достижением условия пластичности в каком-либо монокристаллическом зерне.

Согласно (1.6), условие пластичности определяется достижением касательного напряжения в какой-либо системе скольжения критического значения τ_n, причем в поликристалле всегда можно найти монокристаллическое зерно с такой ориентацией атомных плоскостей, что в одной из систем скольжения возникает наибольшее касательное напряжение, равное $\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)$, где σ_1 и σ_3—наибольшее и наименьшее значения главных напряжений. Отсюда мы получим условие пластичности Треска—Сен-Венана о постоянстве максимального касательного напряжения [8]. Вообще говоря, построение модели внутризеренной ползучести поликристалла на основе реологических свойств монокристаллов, на наш взгляд, может быть осуществлено лишь с чрезвычайной осторожностью, так как деформационные свойства монокристаллов количественно существенно зависят от размера и формы зерен.

3. Иллюстрации использования соотношений (1.8)

Рассмотрим чистый изгиб моментом $M_y(t)$ длинного монокристаллического стержня, сечение которого имеет ось симметрии (фиг. 3), причем оси x, y, z совпадают с кристаллографическими, соответственно обозначениям п. 1. Примем гипотезу плоских недеформируемых сечений

$$\varepsilon_x = \vartheta(t) z \tag{3.1}$$

и подставим оператор П, описывающий одноосную ползучесть, соответственно теории течения [9]

$$\Pi[x(t)] = k\int_0^t |x(\xi)|^m \operatorname{sign} x(\xi)\, d\xi \tag{3.2}$$

Используя (1.11), (3.1), (3.2), а также уравнения равновесия

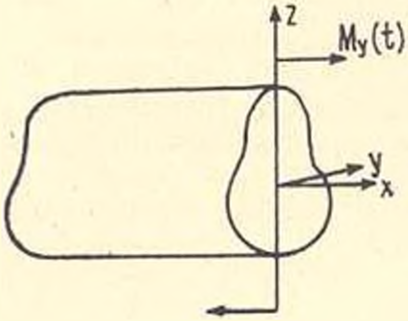
$$\int_F \sigma_x dF = 0, \quad \int_F \sigma_x z dF = M_y \tag{3.3}$$

получим
$$\sigma_x(t) = \frac{M_y(t) z^{1/m}}{\int_F |z|^{1/m} z dF} \tag{3.4}$$

где местоположение оси y (или начало отсчета z) определяется условием

$$\int_F |y|^{1/m} \operatorname{sign} y \, dF = 0 \tag{3.5}$$

то есть распределение напряжений не отличается от изотропного случая.



Фиг. 3

Рассмотрим теперь кручение длинной тонкостенной цилиндрической трубы радиуса r и толщины δ при угле закручивания на единицу длины $\theta(t)$. Переходя к цилиндрическим координатам r, φ, x

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad \operatorname{arctg}\varphi = \frac{z}{y} \tag{3.6}$$

используя очевидные условия

$$\gamma_{\varphi x} = \theta(t), \quad \gamma_{rx} = 0 \tag{3.7}$$

для определения напряжений τ_{yx} и τ_{zx} (остальные напряжения равны нулю) получим

$$2\Phi\left[\frac{\tau_{yx}(t,\varphi)}{\sqrt{6}}\right]\sin\varphi + 2\Phi\left[\frac{\tau_{zx}(t,\varphi)}{\sqrt{6}}\right]\cos\varphi + \Phi\left[\frac{\tau_{yx}(t,\varphi)+\tau_{zx}(t,\varphi)}{\sqrt{6}}\right]\times$$
$$\times(\sin\varphi+\cos\varphi) + \Phi\left[\frac{\tau_{yx}(t,\varphi)-\tau_{zx}(t,\varphi)}{\sqrt{6}}\right] = 0 \tag{3.8}$$

$$2\Phi\left[\frac{\tau_{yx}(t,\varphi)}{\sqrt{6}}\right]\cos\varphi - 2\Phi\left[\frac{\tau_{zx}(t,\varphi)}{\sqrt{6}}\right]\sin\varphi + \Phi\left[\frac{\tau_{yx}(t,\varphi)+\tau_{zx}(t,\varphi)}{\sqrt{6}}\right]\times$$
$$\times(\cos\varphi-\sin\varphi) + \Phi\left[\frac{\tau_{yx}(t,\varphi)-\tau_{zx}(t,\varphi)}{\sqrt{6}}\right](\cos\varphi+\sin\varphi) = \theta(t) \tag{3.9}$$

Крутящий момент определяется по формуле

$$M(t) = \delta r^2 \int_0^{2\pi} [\tau_{yx}(t,\varphi)\cos\varphi - \tau_{zx}(t,\varphi)\sin\varphi] d\varphi \tag{3.10}$$

ՄՈՆՈԲՅՈՒՐԵՂՆԵՐԻ ՌԵՈԼՈԳԻԱՅԻ ՀԱՐՑԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Ն. Մ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

Ամփոփում

Հիմնվելով դիսլոկացիաների սահքի կոնցեպցիայի վրա, կառուցվում են նիստակենտրոնային խորանարդ ցանցով մոնոբյուրեղների հարաբերակցությունները։

Ընդունված են հետևյալ վարկածները

1. Սողքը տեղի ունի դիսլոկացիաների սահքի պատճառով {111} հարթություններում <110> ուղղությունների համակարգում։

2. Դիսլոկացիաների սահքը՝ սահքի որևէ համակարգում, որոշվում է միայն շոշափող լարման փոփոխման պատմությամբ սահքի այդ համակարգում։

3. Սահքի բոլոր համակարգերում բյուրեղի դիմադրողականությունը սահքին նույնն է։

Ստացված են հարաբերակցություններ դեֆորմացիաների և լարումների միջև բարդ լարվածային վիճակի դեպքում՝ ելնելով նշված կոնցեպցիայից։

ON THE RHEOLOGY OF SINGLE CRYSTALS

A. M. SIMONIAN, N. M. SIMONIAN

S u m m a r y

Based on the concept of dislocation slip a rheological relation has been constructed for single crystals with a face-centered cubic lattice. The following hypotheses have been adopted

1. The creep is due to the slip of dislocations in the set of planes {111} and the system of <110> directions.

2. The slip of dislocations in a certain slip system is determined only by the history of shear stress corresponding to this slip system.

3. The resistability of a crystal to the slip is the same in all the slip systems.

The relation between strains and stresses has been obtained by the complex stress state according to this conception.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 714 с.
2. *Симонян А. М.* Исследования ползучести алюминиевых монокристаллов.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1979, т. 32, № 6.
3. *Cottrell A. H.* Dislocation and Plastic Flow in Crystals. Oxford: 1953.
4. *Розенберг В. М.* Ползучесть металлов. М.: Металлургия, 1967.
5. *Шмидт Е., Боас В.* Пластичность кристаллов. М.–Л.: ГОНТИ, 1938.
6. *Spitzig W.* A Effect of Hydrostatic Pressure on Plastic flow Properties of Iron Single Crystals. Acta Metallurgica. 1979, vol. 27, № 4.
7. *Бернер Р., Кронмюллер Г.* Пластическая деформация монокристаллов. М.: Мир, 1969.
8. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
9. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960.

СКТБ Института механики
АН АрмССР

Поступила в редакцию
6.IV.1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVIII, № 4, 1985 Механика

УДК 624.046.3 : 539.3

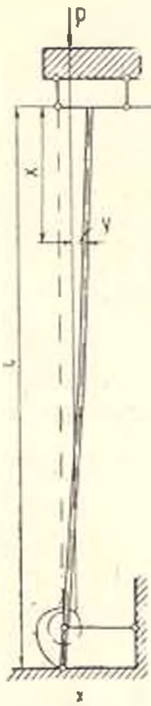
НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

ГОЛЬДИН В. Г., КОЛМАНОВСКИЙ В. Б.

Задачи оптимизации устойчивости упругих систем имеют весьма длительную историю, изложенную, например, в работах [1—7]. В [7] для нескольких способов заделки получено необходимое и достаточное условие оптимальности, а также дано выражение для формы стержня, при которой критическая сила потери устойчивости максимальна.

В [1] рассмотрен консольный упруго заделанный стержень. В настоящей работе получены оптимальная форма потери устойчивости и значение критической силы для иных способов заделки упругого стержня. Поскольку способ решения всех рассмотренных ниже задач идентичен, изложим его подробно лишь для первой из них, ограничиваясь в отношении остальных постановкой задачи и формулировкой полученных результатов.

1. *Верхний конец стержня может свободно смещаться, но не может поворачиваться, нижний конец стержня упруго заделан.* Верхний конец стержня находится под действием вертикальной сжимающей силы P. Линия действия сжимающей силы при потере устойчивости остается вертикальной (фиг. 1). Длина стержня равна l, а коэффициент жесткости заделки $\varkappa$. Через E обозначен модуль Юнга материала, а через $J(x)$ — момент инерции поперечного сечения. Задача об устойчивости такого стержня рассмотрена в книге [4].



Фиг. 1

Обозначим через $y(x)$ прогиб стержня, отсчитываемый от линии действия сжимающей силы. Деформации стержня предполагаются достаточно малыми. Тогда соотношения, определяющие $y(x)$ в рамках линейной теории упругости, имеют вид [4]

$$y'' + P(EJ)^{-1}y = 0 \qquad (1.1)$$

$$y'(0) = 0, \quad y'(l) = P\varkappa^{-1}y(l) \qquad (1.2)$$

Здесь $y'(x) = dy(x)/dx$. Обозначим через $S(x)$ площадь поперечного сечения стержня. Считается, что поперечные сечения стержня — подобные фигуры. Тогда

$$J(x) = k\,S^2(x) \tag{1.3}$$

Здесь постоянная $k>0$ определяется формой поперечного сечения стержня. Кроме того, имеется ограничение на объем стержня

$$\int_0^l S(x)dx = V,\ V>0 \tag{1.4}$$

где V—заданное число. Задача состоит в выборе такой функции $S(x) \geqslant 0$, удовлетворяющей ограничению (1.4), при которой критическая сила P_0 потери устойчивости будет максимальной. Известно [1, 2, 5—7], что куб оптимальной площади поперечного сечения $S(x)$ пропорционален квадрату соответствующего прогиба. Поскольку, однако, прогиб удовлетворяет однородной краевой задаче (1.1), (1.6), то величина размерного множителя в условиях оптимальности может быть принята равной единице. Таким образом, необходимое условие оптимальности, связывающее площадь поперечного сечения $S(x)$ и его прогиб $y(x)$, имеет вид

$$y^2(x) = S^3(x),\quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{1.5}$$

С учетом (1.3), (1.5) соотношения (1.1), (1.4) принимают вид

$$y''(x) + \frac{P}{Ek} y^{-\frac{1}{3}}(x) = 0,\quad \int_0^l y^{\frac{2}{3}}(x)dx = V$$

Введем новые величины x_1, P_1, $y_1(x_1)$ по формулам

$$x_1 = \frac{x}{l},\quad P_1 = P\frac{l}{\alpha},\quad y_1(x_1) = \left(\frac{Ek}{Pl^2}\right)^{\frac{3}{4}} y(x) \qquad 0 \leqslant x_1 \leqslant 1 \tag{1.6}$$

В новых переменных получаем следующую краевую задачу

$$y_1'' + y^{-\frac{1}{3}} = 0,\quad y_1'(0) = 0,\ y_1'(1) = P_1 y_1(1)$$

$$\int_0^1 y_1^{\frac{2}{3}}(x)dx = \frac{\gamma}{\sqrt{P_1}},\quad \gamma = \frac{V}{l}\left(\frac{Ek}{l\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.7}$$

На основании [7] решение задачи (1.7) записывается в параметрической форме следующим образом:

$$y_1(\theta) = C_1 \sin^3\theta \tag{1.8}$$

$$x_1(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} C_1^{\frac{2}{3}}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + C_2 \tag{1.9}$$

Здесь C_1, C_2—постоянные, параметр $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$. Числа θ_0 и θ_1 удовлетворяют условиям

$$x_1(\theta_0) = 0,\quad x_1(\theta_1) = 1 \tag{1.10}$$

С учетом краевых условий задачи (1.7) заключаем, что справедливы формулы

$$\left.\frac{dy_1}{dx_1}\right|_{\theta=\theta_0}=0 \tag{1.11}$$

$$\left.\left[\frac{dy_1}{dx_1}-P_1y_1(x_1)\right]\right|_{\theta=\theta_1}=0 \tag{1.12}$$

Из изопериметрического условия вытекает, что

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} y_1^{\frac{2}{3}}(\theta)\frac{dx_1}{d\theta}\,d\theta=\frac{\gamma}{\sqrt{P_1}} \tag{1.13}$$

Для определения постоянных величин θ_0, θ_1, C_1, C_2, а также силы P_1 преобразуем соотношения (1.10) – (1.13).

Из (1.11) имеем $\sqrt{3}\,C_1^{1/3}\cos\theta_0=0$. Поскольку ищется нетривиальное решение $y_1\neq 0$, то $C_1\neq 0$. Значит,

$$\cos\theta_0=0 \tag{1.14}$$

отсюда следует, что $\sin 2\theta_0=0$. Из (1.10) вытекает, что

$$\frac{\sqrt{3}}{2}C_1^{\frac{2}{3}}\left(\theta_0-\frac{1}{2}\sin 2\theta_0\right)+C_2=0$$

Так как $\sin 2\theta_0=0$, то

$$\frac{\sqrt{3}}{2}C_1^{\frac{2}{3}}\theta_0+C_2=0,\quad C_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}C_1^{\frac{2}{3}}\theta_0 \tag{1.15}$$

Ввиду (1.10) будет

$$1=\frac{\sqrt{3}}{2}C_1^{\frac{2}{3}}\left(\theta_1-\frac{1}{2}\sin 2\theta_1\right)+C_2=\frac{\sqrt{3}}{2}C_1^{\frac{2}{3}}\left(\theta_1-\theta_0-\frac{1}{2}\sin 2\theta_1\right)$$

$$C_1^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}\left(\theta_1-\theta_0-\frac{1}{2}\sin 2\theta_1\right)} \tag{1.16}$$

С учетом (1.12) заключаем, что

$$\sqrt{3}\,C_1^{\frac{1}{3}}\cos\theta_1=P_1C_1\sin^3\theta_1,\quad C_1^{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}\cos\theta_1}{P_1\sin^3\theta_1} \tag{1.17}$$

Из (1.13) следует, что

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} y_1^{\frac{2}{3}}(\theta)\frac{dx_1}{d\theta}\,d\theta=\int_{\theta_0}^{\theta_1} C_1^{\frac{2}{3}}\sin^2\theta\,\frac{\sqrt{3}}{2}C_1^{\frac{2}{3}}(1-\cos 2\theta)\,d\theta=$$

$$=\sqrt{3}\,C_1^{\frac{4}{3}}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sin^4\theta\,d\theta=\sqrt{3}\,C_1^{\frac{4}{3}}\left(\frac{3}{8}\theta_1-\frac{\sin 2\theta_1}{4}+\frac{1}{32}\sin 4\theta_1-\frac{3}{8}\theta_0+\frac{\sin 2\theta_0}{4}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{32}\sin 4\theta_0\right)=\gamma P_1^{-\frac{1}{2}}$$

Так как $\sin 2\theta_0=\sin 4\theta_0=0$, то получаем соотношение

$$\frac{\sqrt{3}}{8} C_1^{\frac{1}{2}} \left(3\theta_1 - 2\sin 2\theta_1 + \frac{1}{4}\sin 4\theta_1 - 3\theta_0\right) = \frac{\gamma}{\sqrt{P_1}} \tag{1.18}$$

Из (1.16) и (1.17) находим выражение для P_1

$$P_1 = \frac{3\cos\theta_1 \left(\theta_1 - \theta_0 - \frac{1}{2}\sin 2\theta_1\right)}{2\sin^3\theta_1} \tag{1.19}$$

Исключим C_1 и P_1 из равенства (1.18) с помощью формул (1.17) и (1.19). Получим уравнение, связывающее параметры θ_1 и θ_0

$$\gamma = \frac{3\theta_1 - 2\sin 2\theta_1 + \frac{1}{4}\sin 4\theta_1 - 3\theta_0}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\cos\theta_1}{\left(\theta_1 - \theta_0 - \frac{1}{2}\sin 2\theta_1\right)^3 \sin^3\theta_1}} \tag{1.20}$$

Если числа θ_0^*, θ_1^* удовлетворяют уравнению (1.20), то числа $\theta_0^* + \pi m$, $\theta_1^* + \pi m$ (m—целое) также удовлетворяют этому уравнению. Так как переход от одной пары чисел к другой может лишь изменить знак функции $y_1(\theta$, который не имеет значения в рассматриваемом случае, то, согласно (1.14), можно положить $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$. Определим теперь интервал, в котором следует искать θ_1. Этот интервал должен удовлетворять двум условиям:

1) при изменении параметра θ_1 внутри этого интервала правая часть уравнения (1.20) должна изменяться от 0 до ∞, поскольку $\gamma \in (0, \infty)$.

2) на искомом интервале функция $y_1(\theta)$ должна иметь наименьшее возможное число узлов, так как вычисляется наименьшее собственное значение краевой задачи (1.2) (соответствующее наибольшей величине критической силы).

Нетрудно убедиться, что этим требованиям удовлетворяет интервал $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Таким образом, задача сводится к определению при заданном значении параметра γ числа $\theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ из уравнения

$$\gamma = \frac{3\theta_1 - 2\sin 2\theta_1 + \frac{1}{4}\sin 4\theta_1 + \frac{3}{2}\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\cos\theta_1}{\left(\theta_1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right)^3 \sin^3\theta_1}} \tag{1.21}$$

После этого величина P_1, пропорциональная критической силе, определяется из уравнения (1.19), постоянная C_1 вычисляется по формуле (1.16) и постоянная C_2—по формуле (1.15). Наконец, функция $y_1^{(0)}(x_1)$, пропорциональная оптимальному профилю, определяется с помощью соотношений (1.8), (1.9). Полученные при различных значениях параметров результаты вычислений обсуждаются в § 4.

2. *Упруго опертый на концах стержень имеет заделку на одном и шарнир на другом конце.* Как и в первом параграфе, обозначим через P вертикальную сжимающую силу, через l, V — соответственно длину и объем стержня, через E — модуль Юнга материала стержня. Пусть далее $J(x)$ — момент инерции поперечного сечения, $S(x)$ — площадь поперечного сечения стержня, $y(x)$ — прогиб стержня, а постоянные α_1, α_2 — коэффициенты жесткости заделки концов. Запишем соотношение, аналогичное (1.1) и (1.2), для рассматриваемого случая [4]

$$y'' + P(EJ)^{-1}y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = \frac{1}{l}\left[Py'(l)\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right) + y(l)\right] \tag{2.1}$$

Положим $\alpha = \alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1}$. Тогда $\alpha^{-1} = \alpha_1^{-1} + \alpha_2^{-1}$.
Условие (2.1) перепишется в виде

$$y(0) = 0, \quad y'(l)\left(1 - \frac{P}{l\alpha}\right) = \frac{y(l)}{l} \tag{2.2}$$

Будем считать, что объем стержня задан, то есть справедливо ограничение (1.4). Используя далее необходимое условие оптимальности (1.5) и проведя замену переменных (1.6), получим следующую краевую задачу:

$$y_1'' + y_1^{-1/3} = 0, \; y_1(0) = 0, \; y_1(1) = y_1'(1)(1 - P_1)$$

$$\int_0^1 y_1^{2/3}(x)dx = \frac{\gamma}{\sqrt{P_1}}, \quad \gamma = \frac{V}{l}\left(\frac{Ek}{l\alpha}\right)^{1/2} \tag{2.3}$$

Соотношения (1.8) — (1.10) сохраняются в прежнем виде. Из (2.2) получаем

$$C_1 \sin^3\theta_0 = 0 \tag{2.4}$$

Значит,

$$\sin\theta_0 = 0, \; \sin 2\theta_0 = 0, \; \sqrt{3}\,C_1^{1/3}(1 - P_1)\cos\theta_1 = C_1\sin^3\theta_1, \; C_1^{2/3} = \frac{\sqrt{3}(1 - P_1)\cos\theta_1}{\sin^3\theta_1} \tag{2.5}$$

Из (1.10) следует, что

$$\frac{\sqrt{3}}{2}C_1^{1/3}\theta_0 + C_2 = 0, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}C_1^{1/3}\left(\theta_1 - \theta_0 - \frac{1}{2}\sin 2\theta_1\right) = 1 \tag{2.6}$$

Отсюда имеем

$$C_1^{2/3} = \frac{2}{\sqrt{3}\left(\theta_1 - \theta_0 - \frac{1}{2}\sin 2\theta_1\right)} \tag{2.7}$$

Из (2.5) и (2.6) получаем выражение для P_1

$$P_1 = 1 - \frac{2\sin^3\theta_1}{3\left(\theta_1 - \theta_0 - \frac{1}{2}\sin 2\theta_1\right)\cos\theta_1} \tag{2.8}$$

В соотношении (1.18), к которому сводится требование ограниченности объема, не участвуют граничные условия. Поэтому оно остается неизменным и для рассматриваемого случая

$$\frac{\sqrt{3}}{8} C_1^{1/3} \left(3\theta_1 - 2\sin 2\theta_1 + \frac{1}{4}\sin 4\theta_1 - 3\theta_0\right) = \gamma P_1^{-1/2}$$

С учетом (2.7) получаем уравнение

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{3\theta_1 - 2\sin 2\theta_1 + \frac{1}{4}\sin 4\theta_1 - 3\theta_0}{\left(\theta_1 - \theta_0 - \frac{1}{2}\sin 2\theta_1\right)^2} \sqrt{P_1} = \gamma \tag{2.9}$$

Здесь P_1 выражается формулой (2.8). Рассуждая аналогично § 1, в соответствии с (2.4) положим $\theta_0 = 0$, то есть $C_2 = 0$. Величину θ_1 будем искать в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$. Уравнение (2.9) сведется к следующему:

$$\gamma = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{3\theta_1 - 2\sin 2\theta_1 + \frac{1}{4}\sin 4\theta_1}{\left(\theta_1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta_1\right)^2} \sqrt{1 - \frac{2\sin^3\theta_1}{3\left(\theta_1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta_1\right)\cos\theta_1}} \tag{2.10}$$

Алгоритм вычислений здесь следующий:

1) задать величину параметра $\gamma \in (0, \infty)$;

2) определить $\theta_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ из уравнения (2.10);

3) определить величину P_1 по формуле (2.8);

4) определить зависимость $y_1^{2/3}(x_1)$ по формулам (1.8), (1.9).

3. *Верхний конец шарнирно оперт, нижний упруго заделан.* Через P, l, V, $\varkappa$, E, $J(x)$, $y(x)$ обозначим те же величины, что и в § 1. Прогиб стержня $y(x)$ удовлетворяет соотношениям

$$y'' + P(EJ)^{-1} = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = y(l)\left(\frac{1}{l} + \frac{Py(l)}{\varkappa}\right)$$

Краевая задача, аналогичная (1.7) и (2.3), запишется следующим образом:

$$y_1'' + y_1^{-1/3} = 0, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(1) = (1 + P_1) y_1(1)$$

$$\int_0^1 y_1^{2/3}(x)\,dx = \frac{\gamma}{\sqrt{P_1}}, \quad \gamma = \frac{V}{l}\left(\frac{Ek}{l\varkappa}\right)^{1/2}$$

Используя (1.8) — (1.10), получим

$$C_1 \sin^3\theta_0 = 0, \quad \sin\theta_0 = 0; \quad \sin 2\theta_0 = 0, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} C_1^{1/3}\theta_0 + C_2 = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} C_1^{1/3}\left(\theta_1 - \theta_0 - \frac{1}{2}\sin 2\theta_1\right) = 1, \quad \sqrt{3}\, C_1^{1/3}\cos\theta_1 = (1 + P_1) C_1 \sin^3\theta_1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{8} C_1^{4/3} \left(3\theta_1 - 2\sin 2\theta_1 + \frac{1}{4}\sin 4\theta_1 - 3\theta_0 \right) = \gamma P_1^{-1/2}$$

Отсюда вытекает равенство

$$P_1 = \frac{3\left(\theta_1 - \theta_0 - \frac{1}{2}\sin 2\theta_1\right)\cos\theta_1}{2\sin^3\theta_1} - 1 \tag{3.1}$$

Аналогично первым двум параграфам имеем

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{3\theta_1 - 2\sin 2\theta_1 + \frac{1}{4}\sin 4\theta_1 - 3\theta_0}{\left(\theta_1 - \theta_0 - \frac{1}{2}\sin 2\theta_1\right)^2} \sqrt{\frac{3\left(\theta_1 - \theta_0 - \frac{1}{2}\sin 2\theta_1\right)\cos\theta_1}{2\sin^3\theta_1} - 1} = \gamma \tag{3.2}$$

Проводя далее рассуждения, подобные § 1, получим, что $\theta_0 = 0$, а число θ_1 следует искать в интервале $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$. Уравнение (3.2) принимает вид

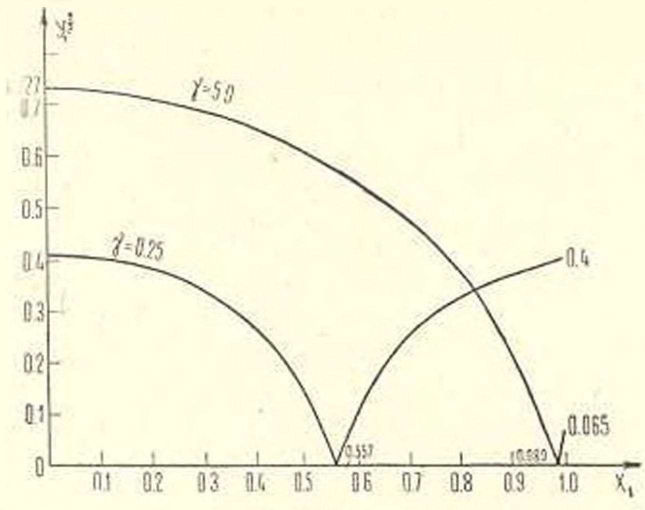
$$\gamma = \sqrt{\frac{3\left(\theta_1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta_1\right)\cos\theta_1}{2\sin^3\theta_1} - 1}\; \frac{3\theta_1 - 2\sin 2\theta_1 + \frac{1}{4}\sin 4\theta_1}{2\sqrt{3}\left(\theta_1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta_1\right)^2} \tag{3.3}$$

Способ вычисления тот же, что и выше. Именно, вначале задается $\gamma \in (0, \infty)$, далее определяется параметр $\theta_1 \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, затем вычисляется величина P_1 по формуле (3.1) и, наконец, находится зависимость $y_1^{2/3}(x_1)$ по формулам (1.8), (1.9).

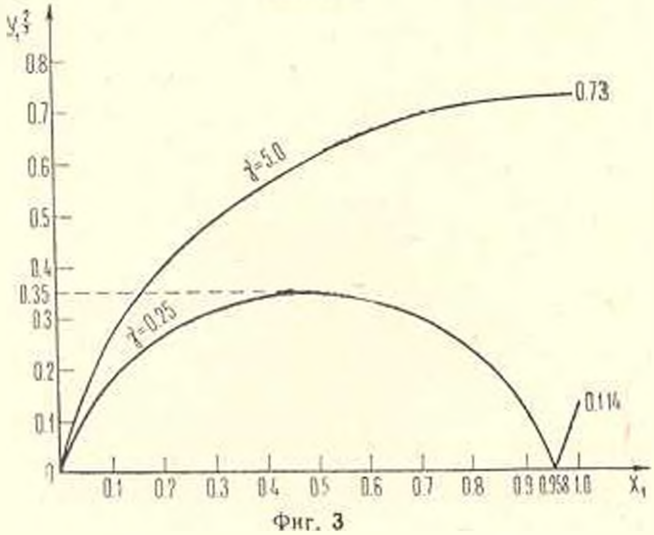
4. *Результаты расчетов.* Схема решения задачи в каждом конкретном случае сводится к следующему:

1) по заданным значениям V, l, E, k, $\varkappa$ (см. § 1) находим величину γ (см. (1.7)); 2) определяем θ_1; 3) определяем P_1; 4) находим функцию $y_1(x_1)$; 5) с помощью формул (1.6) находим фактическое значение критической силы P_0 и прогиб $y(x)$; 6) находим оптимальную площадь поперечного сечения из условия (1.5).

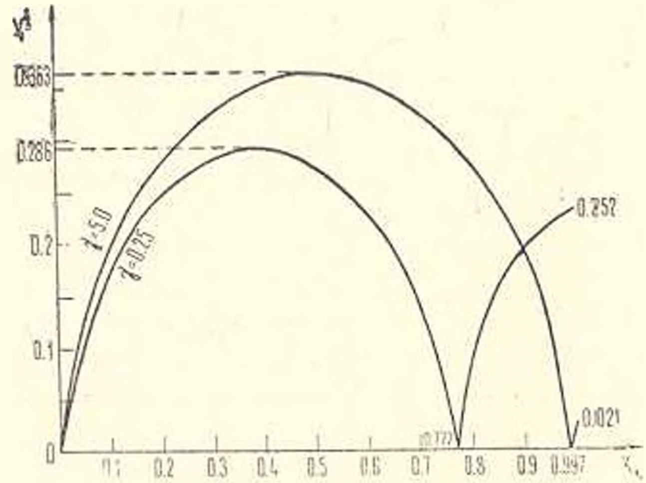
Уравнения (1.21), (2.10) и (3.3) были решены относительно θ_1 на ЭВМ. Параметр γ изменялся от 0,25 до 10 с шагом 0,25. Для задач 1, 2, 3 на фигурах, соответственно, 2, 3, 4, построены графики зависимости $y_1^{2/3}(x_1)$ при $\gamma = 0{,}25$; $\gamma = 5$. При $\gamma = 10$ кривые на фиг. 2—4 практически не отличаются от соответствующих кривых при $\gamma = 5$. Отметим, что функция $y_1^{2/3}(x_1)$ пропорциональна площади поперечного сечения, то есть ее график представляет собой модель оптимального профиля стержня. На фиг. 5 кривые 1, 2, 3 представляют зависимость $\lg P_1$ от γ для задач 1, 2, 3 соответственно.



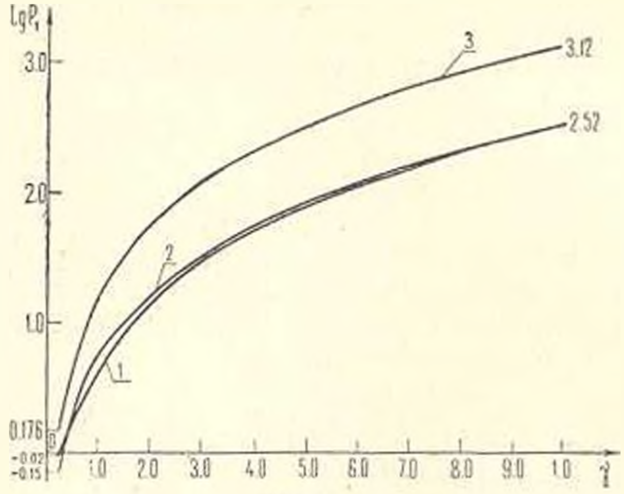
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՁՈՂԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՄԱՆ ՈՐՈՇ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Վ. Գ. ԳՈԼԴԻՆ, Վ. Բ. ԿՈԼՄԱՆՈՎՍԿԻ

Ամփոփում

Աշխատանքը նվիրված է առաձգական ձողերի կայունության խնդիրների դիտարկմանը։ Ստացված են կայունության կորստի օպտիմալ ձևը և կրիտիկական ուժի արժեքը առաձգական ձողի ծայրերի տարբեր ձևերով ամրացման համար։

SOME PROBLEMS OF STABILITY OPTIMIZATION OF ELASTIC BEAMS

V. G. COLDIN, V. B. KOLMANOVSKY

Summary

In the present paper the solution of problem of stability optimization of elastic beams is presented. The shape of the optimal beam and the critical value of the load are derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баничук Н. В.* Оптимизация устойчивости стержня с упругой заделкой. Изв. АН СССР, МТТ, 1974, № 4, стр. 150—154.
2. *Лурье А. И.* Применение принципа максимума к простейшим задачам механики. Тр. Ленинградского политехн. ин-та. Л.: Машиностроение. 1965, № 252, стр. 34—46.
3. *Николаи Е. Л.* Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонн. Изв. Петерб. политехн. ин-та, 1907, т. 8.
4. *Ржаницын А. Р.* Устойчивость равновесия упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955.
5. *Clausen T.* Über die Formarchitektonisher Säulen. — Bull. phys.— math. Acad. St.—Peterbourg, 1851, p. 279—294.
6. *Lagrange J. L.* Sur la figure des colonnes. Miscellanea Taurinensia, (Royal Society of Turin), Tomus U, 1770—1773, p. 123.
7. *Tadjbakhsh I., Keller J. B.* Strongest Columns and Isoprimetric Inequalities for Eigenvalues. Journal of Applied Mechanics, March 1962, p. 159—164.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила в редакцию
31.I.1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVIII, № 4, 1985 Механика

УДК 517.9 : 532

ОБОСНОВАНИЕ ПРИМЕНИМОСТИ УРАВНЕНИЙ КОРОТКИХ ВОЛН ПРИ ПОЛУЧЕНИИ УРАВНЕНИЯ МОДУЛЯЦИИ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

БАГДОЕВ А. Г., ПЕТРОСЯН Л. Г.

В работе [1] были получены и решены уравнения нестационарных двумерных коротких волн для сжимаемой жидкости. С учетом вязкости и теплопроводности соответствующие уравнения получены в [2]. Исследование лучевых решений и дифракционных задач для неоднородных сред проведено в [3, 4].

Построение общего вида уравнения коротких волн для слабо диссипативных сред и конкретизация коэффициентов для теплопроводящей жидкости с несимметричным тензором напряжений выполнены в [5, 6].

Получение уравнений для волн модуляций из уравнения коротких волн, заменяющего систему уравнений среды, для микрополярных электропроводящих жидкостей с пузырьками газа при наличии магнитного поля и их применение к дифракционным задачам приводятся в работе [7].

Примененный в указанной работе метод получения уравнений модуляций является довольно общим и простым.

В настоящей работе на примере более простой среды, представляющей вязкую жидкость с пузырьками газа, дается вывод уравнений модуляций из исходной системы уравнений и показывается, что окончательное уравнение модуляции совпадает в основных порядках с уравнением, полученным в работе [7], для данного вида среды. Тем самым, обосновывается возможность использования общего подхода [7] для получения уравнений модуляций волн, основанного на использовании уравнения коротких волн, вид которого известен для произвольных сред [5, 6].

Для простоты рассматривается плоская задача.

Уравнения движения вязкой сжимаемой жидкости (смеси) имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0 \quad (3)$$

где u, v—проекции скорости частицы на оси x, y; p—давление, ρ—плотность, t—время, $\nu=\frac{\mu}{\rho}$ —коэффициент кинематической вязкости. Здесь произведены осреднения величин (среднее давление p, ρ—плотность и т. д.). Осреднение проводится по элементу объема смеси, содержащему много пузырьков, но имеющему малые линейные размеры по сравнению с характерной длиной движения.

Ниже рассматривается гомогенная жидкость, представляющая собой простейшую модель жидкости с пузырьками газа, в которой пренебрегают всеми эффектами, связанными с пузырьковой структурой газосодержания, за исключением сжимаемости [8].

Обозначим величины, относящиеся к газовой фазе, индексом g, а к жидкости—индексом f; например, ρ_f и ρ_g означают плотности жидкости и газа соответственно. Определим β как объем газа в единице объема смеси, тогда для плотности газа имеем [8]

$$\rho=\rho_f(1-\beta)+\rho_g\beta$$

В континуальной теории вкладом газа в массовую плотность обычно пренебрегают, тогда для плотности смеси запишем [8]

$$\rho=\rho_f(1-\beta) \quad \text{или} \quad \frac{d\rho}{dt}=-\rho_f\frac{d\beta}{dt} \tag{4}$$

плотность жидкости ρ_f считается постоянной.

Если допустить, что газ и жидкость движутся с одинаковой скоростью, то массу газа в единице массы смеси можно считать постоянной [8]

$$\frac{\rho_g\beta}{\rho_f(1-\beta)}=\text{const}$$

Учитывая, что при постоянной температуре T (изотермический процесс) давление в газе p_g пропорционально ρ_g, то предыдущее равенство можно переписать в виде [8]

$$\frac{p_g\beta}{1-\beta}=\text{const} \quad \text{или} \quad \frac{1}{p_g}\frac{dp_g}{dt}=-\frac{1}{\beta(1-\beta)}\frac{d\beta}{dt} \tag{5}$$

Уравнение состояния для пузырька при изотермическом процессе имеет вид

$$p_gR^3=\text{const} \quad \text{или} \quad \frac{1}{p_g}\frac{dp_g}{dt}+\frac{3}{R}\frac{dR}{dt}=0 \tag{6}$$

где R—радиус пузырька.

Пользуясь условием непрерывности напряжений на границе пузырька и жидкости, в том числе и вязких напряжений, можно получить для давления p в жидкости следующее выражение [8]:

$$p_g-p=\rho_fR\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}\rho_f\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+\frac{4\mu}{R}\frac{dR}{dt} \tag{7}$$

Здесь допускается, что соотношение (7) между p и p_g существует и в смеси.

В силу малости R квадрат $\frac{dR}{dt}$ отбрасываем и заменяем полные производные на частные, причем после линеаризации получим

$$p_g - p = \rho_l R_0 \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + \frac{4\mu}{R_0}\frac{\partial R}{\partial t} \quad (R = R_0 + R') \tag{8}$$

Из уравнений (6), полагая $p_g = p_{g0} + p'_g$, в том же порядке имеем

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{R_0}{3p_{g0}}\frac{\partial p_g}{\partial t} \tag{9}$$

Подставляя $\frac{\partial R}{\partial t}$ в (8), можно получить

$$p_g - p = -A\frac{\partial^2 p_g}{\partial t^2} - B\frac{\partial p_g}{\partial t}, \qquad \text{где} \quad A = \rho_l \frac{R_0^2}{3p_{g0}}, \quad B = \frac{4\mu}{3p_{g0}} \tag{10}$$

Из (4) и (5) находим

$$\frac{1}{p_g}\frac{dp_g}{dt} = \frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho}{dt} \tag{11}$$

Используя уравнения (3) и (11), получим

$$\frac{dp_g}{dt} + \frac{p_g}{\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \tag{12}$$

Полагая $\beta = \beta_0 + \beta'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$, $p = p_0 + p'$, из (5) и (10) получим в главных порядках следующие соотношения:

$$p_{g0} = p_0, \quad p'_g \approx p', \quad \beta' \approx -\frac{\beta_0(1-\beta_0)}{p_0}p' \tag{13}$$

Тогда имеем

$$\frac{p_g}{\beta} \approx \frac{p_0}{\beta_0} + \frac{(2-\beta_0)}{\beta_0}p' \tag{14}$$

Так как скорость звука в рассматриваемой среде определяется в виде [8] $c_0^2 = p_0/\beta_0\rho_0$, то

$$\frac{p_g}{\beta} = \rho_0 c_0^2\left(1 + n\frac{p'}{\rho_0 c_0^2}\right) \quad \left(n = \frac{2-\beta_0}{\beta_0}\right)$$

Тогда уравнение непрерывности (12) примет вид

$$\frac{\partial p_g}{\partial t} + u\frac{\partial p_g}{\partial x} + v\frac{\partial p_g}{\partial y} + \rho_0 c_0^2\left(1 + n\frac{p'}{\rho_0 c_0^2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \tag{15}$$

Из (11) в основных порядках получим

$$\rho' = \frac{p'}{c_0^2} \quad \text{или} \quad \rho = \rho_0 + \frac{p'}{c_0^2} \tag{16}$$

Решение (1), (2) и (15) ищем в виде медленноменяющихся амплитуд

$$u = U_0 + U_1 \exp(-\delta k^2 t + i\tau) + U_2 \exp(-2\delta k^2 t + 2i\tau) + \text{к. с.}^*$$

$$v = V_0 + V_1 \exp(-\delta k^2 t + i\tau) + V_2 \exp(-2\delta k^2 t + 2i\tau) + \text{к. с.}$$

$$p' = P_0 + P_1 \exp(-\delta k^2 t + i\tau) + P_2 \exp(-2\delta k^2 t + 2i\tau) + \text{к. с.} \qquad (17)$$

где $\tau = kx - kc_0 t - \omega t$, k — волновое число, которое считается большим, ω — частота, δ — постоянная.

Подставляя (17) в (1), (2) и (15) и приравнивая слагаемые с e^0, $e^{i\tau}$, $e^{2i\tau}$, получим три системы, состоящие каждая из трех уравнений.

В дальнейшем рассматриваются две важные задачи: а) дифракционная задача, в которой существенны изменения амплитуд и фаз вдоль волны и имеют место порядки $x \sim 1$, $y \sim \frac{1}{\sqrt{k}}$, $t \sim 1$; б) задачи, близкие к одномерным по x и t.

Сначала рассмотрим нестационарную дифракционную задачу.

Не выписывая уравнения для свободных членов, отметим, что из них следуют порядки

$$U_0 \sim U_1^2, \quad V_0 \sim \frac{1}{\sqrt{k}} U_1^2, \quad P_0 \sim \frac{1}{k} U_1^2$$

Из уравнений (1) и (15) для первой гармоники, оставляя линейные недифференцируемые члены главного порядка, можно получить

$$\left(-\delta k^2 - ic_0 k - i\omega + \frac{4}{3}\nu k^2\right) U_1 = -\frac{1}{\rho_0} ikP_1 \qquad (18)$$

$$[(-\delta k^2 - ic_0 k - i\omega) + A(\delta k^2 + ic_0 k + i\omega)^3 - B(\delta k^2 + ic_0 k + i\omega)^2] P_1 +$$
$$+ \rho_0 c_0^2 ikU_1 = 0 \qquad (19)$$

Предполагая малость всех слагаемых в скобках по сравнению с членом $ic_0 k$, получим

$$\omega \approx -\frac{1}{2} Ac_0^3 k^3, \quad \delta \approx \frac{Bc_0^2}{2} + \frac{2}{3}\nu, \quad P_1 \approx \rho_0 c_0 U_1 \qquad (20)$$

Подобным же образом из уравнений для второй гармоники можно получить

$$P_2 \approx \rho_0 c_0 U_2 \qquad (21)$$

Аналогичным образом можно подставить (17) в уравнение (2) и получить уравнения для первой и второй гармоники. Оставляя в них главные члены, получим

$$V_1 \approx -\frac{i}{k}\frac{\partial U_1}{\partial y}, \quad V_2 \approx -\frac{i}{2k}\frac{\partial U_2}{\partial y}$$

Отсюда следует, что

$$|v| \ll |u| \qquad (22)$$

---

* К. С. обозначает комплексно-сопряженные слагаемые

Напишем теперь уравнения (1) и (15) для второй гармоники в главных порядках

$$\frac{\partial U_2}{\partial t}-2(\delta k^2+ikc_0+i\omega)U_2+ikU_1^2=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_2}{\partial x}-\frac{1}{\rho_0}2ikP_2-\frac{16}{3}\nu k^2U_2+\frac{ik}{\rho_0c_0^2}P_1$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial t}-2(\delta k^2+ikc_0+i\omega)P_2+(1+n)ikU_1P_1-8Aik^3c_0^3P_2+4Bk^2c_0^2P_2+2\rho_0c_0ikU_2=0$$

Предполагая, что $Ac_0^3k^3\gg1$, можно производные отбросить и тогда с учетом (2) получим

$$2\left(-\delta k^2-ic_0k+\frac{1}{2}Aic_0^3k^3+\frac{8}{3}\nu k^2\right)U_2=-\frac{1}{\rho_0}2ikP_2$$

$$2\left(-\delta k^2-ic_0k-\frac{7}{2}Aic_0^3k^3+2Bc_0^2k^2\right)P_2+2ik\rho_0c_0^2U_2+(1+n)\rho_0c_0ikU_1^2=0$$

Отсюда найдем значение U_2 в виде

$$U_2=-\frac{(1+n)i}{-6Aic_0^3k^2+4\delta k}U_1^2 \tag{23}$$

Из уравнений для свободных членов, предполагая [9], что они обусловлены основной волной $x\approx c_0t$ и полагая в них $\frac{\partial}{\partial t}\approx-c_0\frac{\partial}{\partial x}$, можно в главных порядках получить $P_0\approx\rho_0c_0U_0$. Тогда, учитывая (20) и (21), можно в основном порядке получить

$$p'\approx\rho_0c_0u \tag{24}$$

что является известным соотношением на волне.

Учитывая то, что в нелинейных членах в уравнениях (1), (2) и (15) следует оставлять только малые основного порядка, которые получаются дифференцированием экспоненциальных множителей, фигурирующих в соотношениях (17), можно оставить в них лишь производные по x и упростить согласно (24).

Тогда уравнения (1), (2) и (15) с учетом (16), (22) и (24) примут вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\nu\Delta u \tag{25}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\nu\Delta v \tag{26}$$

$$\frac{\partial p_g}{\partial t}+u\frac{\partial p_g}{\partial x}+\rho_0c_0^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+np'\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{27}$$

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Из (25) и (26), полагая $u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}p'+\frac{4}{3}\nu\Delta\varphi \tag{28}$$

Из уравнения (27) с учетом (24) получим

$$\frac{\partial p_g}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho_0 c_0 (n+1) \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \tag{29}$$

Применяя к полученному уравнению оператор $\left(1 + A \frac{\partial^2}{\partial t^2} + B \frac{\partial}{\partial t} \right)$ и исключая с помощью (28) p', с учетом (10) получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{4}{3} \nu \Delta \varphi - c_0^2 \left(1 + A \frac{\partial^2}{\partial t^2} + B \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \varphi - c_0 (n+1) \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \tag{30}$$

Здесь в нелинейном члене отброшены малые слагаемые, содержащие множители ν, A и B.

Дифференцируя (30) по x и заменяя φ через u, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta u + A c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta u + 2\delta \frac{\partial}{\partial t} \Delta u + c_0 (n+1) \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \tag{31}$$

Здесь использовано выражение для δ из (20).

Подставляя из (17) значение u в (31), учитывая значение ω из (20) и приравняв слагаемые с первой гармоникой, получим

$$2 \frac{\partial U_1}{\partial t} ki(-c_0 - \gamma k^2) + 2 \frac{\partial U_1}{\partial x} kic_0 (-c_0 + 2\gamma k^2 + 2\delta ki) +$$

$$+ c_0 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} (-c_0 + 2\gamma k^2 + 2\delta ki) + \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} \left(1 + \frac{2\gamma}{c_0} k^2 \right) + 2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial t} (-4\gamma k^2 - 2\delta ki) +$$

$$+ \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} c_0 (-c_0 + 2\gamma k^2 + 2\delta ki) + (n+1) k^2 c_0 U_1 U_2 \exp(-2\delta k^2 t) = 0 \tag{32}$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2} A c_0^3 \tag{33}$$

Для стационарной задачи дифракции уравнение (32) примет вид

$$2 \frac{\partial U_1}{\partial x} c_0 ik + c_0 \Delta U_1 + \frac{(n+1) c_0 k^2 \overline{U}_1 U_2 \exp(-2\delta k^2 t)}{-c_0 + 2\gamma k^2 + 2\delta ki} = 0$$

Подставляя сюда значение U_2 из (23) и отбрасывая вторые степени γ и δ, получим

$$2 \frac{\partial U_1}{\partial x} ik + \Delta U_1 - \frac{(n+1)^2 \overline{U}_1 U_1^2 k \exp(-2\delta k^2 t)}{4 c_0 (3\gamma k + \delta i)} = 0 \tag{34}$$

В случае нестационарных волн обычно различают следующие задачи: а) задачи дифракции, для которых вторыми производными по x и t можно пренебречь; б) задачи, близкие к одномерным по x и t, в которых вторую производную по y можно считать малой и основными по порядку членами в (32) будут слагаемые с первыми производными.

Для нестационарной задачи удобно в (32) перейти к переменной

$x_1 = x - c_0 t$, тогда $\left.\frac{\partial U_1}{\partial t}\right|_{x} = \left.\frac{\partial U_1}{\partial t}\right|_{x_1} - c_0 \frac{\partial U_1}{\partial x_1}$ и в случае квазиодномерных задач, предполагая первое слагаемое в правой части малым (как это видно из дальнейшего) и отбрасывая $\left.\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}\right|_{x_1}$, можно получить

$$-2ik \frac{\partial U_1}{\partial t}(c_0 + \gamma k^2) + 2ikc_0 \frac{\partial U_1}{\partial x_1}(3\gamma k^2 + 2\delta ik) - 2c_0 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial t} +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} c_0(6\gamma k^2 + 3\delta ik) + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} c_0(-c_0 + 2\gamma k^2 + 2\delta ik) +$$

$$+ \frac{(n+1)^2 c_0 k^2 \overline{U}_1 U_1^2 \exp(-2\delta k^2 t)}{4(3\gamma k^2 + \delta ki)} = 0 \qquad (35)$$

Следуя [9], приравниваем в (35) производные первого порядка для того, чтобы исключить производную по t и $\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial t}$, имеющую более высокий порядок малости. Тогда получим

$$\left.\frac{\partial U_1}{\partial t}\right|_{x_1} \approx (3\gamma k^2 + 2\delta ik)\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \qquad (36)$$

откуда видна малость производной по t.

Уравнение (35) примет вид

$$i \left.\frac{\partial U_1}{\partial t}\right|_{x} + i\frac{\partial U_1}{\partial x}(c_0 - 3\gamma k^2 - 2\delta ki) + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}(-3\gamma k - i\delta) +$$

$$+ \frac{1}{2k}\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}(c_0 - 3\gamma k^2 - 2\delta ki) = -\frac{(1+n)^2 \overline{U}_1 U_1^2 \exp(-2\delta k^2 t) ik}{2(-12\gamma ik^2 + 4\delta k)} \qquad (37)$$

В стационарной задаче дифракции в (34) и (37) вторую производную по x следует отбросить.

Тогда можно видеть, что в указанной задаче уравнение (37) совпадает с уравнением (34).

Сравним полученные результаты с уравнением модуляции, полученным с помощью уравнения коротких волн [7], которое в обозначениях данной статьи примет вид

$$c_0 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t \partial x_1} + ikc_0 \frac{\partial U_1}{\partial t} - i\frac{\partial U_1}{\partial x_1}[3\gamma k^3 c_0 + 2i\delta c_0 k^2] + c_0(-3\delta ik - 6\gamma k^2)\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}c_0^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{(n+1)^2 k^2 c_0 \overline{U}_1 U_1^2 \exp(-2\delta k^2 t)}{2(4\delta ik + 12\gamma k^2)} +$$

$$+ c_0(n+1)k^2 U_0 U_1 \exp(-\delta k^2 t) \qquad (38)$$

В дифракционных задачах член U_0 можно отбросить и уравнение (38) будет совпадать с уравнением (35).

Следует отметить, что хотя проделанные при получении (37) преобразования делались для задач типа б), тем не менее, уравнение

(37) пригодно и для дифракционных задач а), поскольку в них вторые производные по x и t несущественны.

Для задач б) следует учитывать тот факт, что порядки производных по y будут иными и соответственно изменятся порядки для U_0, V_0, P_0. При этом уравнение (31) вновь имеет место. Подставляя в (31) уравнения (17), для свободных членов в главных порядках с учетом соотношения

$$\left.\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}\right|_x = \left.\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}\right|_{x_1} - 2c_0\frac{\partial^2 U_0}{\partial t\partial x_1} + c_0^2\frac{\partial^2 U_0}{\partial x_1^2}$$

и (36), которое в смысле порядков имеет место и для U_0 [9], получим

$$-2c_0\frac{\partial^2 U_0}{\partial t\partial x_1} - c_0^2\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = 2\gamma c_0\frac{\partial^4 U_0}{\partial x_1^4} - 2\delta c_0\frac{\partial^3 U_0}{\partial x_1^3} +$$

$$+ (n+1)c_0\frac{\partial}{\partial x_1}\left(U_0\frac{\partial U_0}{\partial x_1}\right) + (n+1)c_0\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}U_1\overline{U}_1\right)\exp(-2\delta k^2 t)$$

Выведенное уравнение совпадает с уравнением [7], которое было получено из уравнений коротких волн.

Отметим, что множитель $\exp(-2\delta k^2 t)$ по предположению близок к единице, поэтому в [7] уравнение, аналогичное (34) (без второй производной по x), получаемое также из (38), называлось уравнением для стационарной задачи дифракции.

Заметим, что, взяв линейное затухание в уравнениях (17) в виде $\exp(-2\delta k^2 x/c_0)$, снова можно получить уравнение (37) с теми же коэффициентами при производных по x и t и в нелинейном члене, только будет некоторое отличие в малых добавках к c_0 в коэффициенте при второй производной по y (эти добавки вообще не учитываются при получении уравнений коротких волн). Несущественность малых добавок в коэффициентах видна также из решений для узких пучков, полученных в [7].

ԳԱԶԱՀԵՂՈՒԿ ԽԱՌՆՈՒՐԴԻ ՄՈԴՈՒԼՅԱՑԻԱՅԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍՏԱՑՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ ԿԱՐՃ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՄԱՆ ՀԻՄՆԱՎՈՐՈՒՄԸ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Տրվում է մոդուլյացիայի հավասարումների ստացումը գազի բշտիկներ պարունակող մածուցիկ հեղուկ միջավայրի ելակետային հավասարումների սիստեմից: Ցույց է տրվում, որ մոդուլյացիայի վերջնական հավասարումները հիմնական կարգերում համընկնում են կարճ ալիքների հավասարումներից ստացված հավասարումների հետ: Դրանով իսկ հիմնավորվում է վերջիններիս (որոնց տեսքը հայտնի է կամայական միջավայրերի համար) օգտագործման հնարավորությունը ալիքների մոդուլյացիայի հավասարումների ստացման համար:

THE ESTIMATION OF APPLICATION OF EQUATIONS OF SHORT WAVES IN DERIVATION OF MODULATION EQUATION FOR FLUID-GAS MIXTURE

A. G. BAGDOEV, L. G. PETROSSIAN

S u m m a r y

The derivation of modulation equations from the initial system of equations of the medium which represents viscous fluid with bubbles of gas has been given. It has been shown that the final equation of modulation coincides, in main orders, with the equation obtained from equations of short waves. Thus the possibility of using the latter (the form of which is known for arbitrary media) for the derivation of equations of modulation of waves has been proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыжов О. С., Христианович С. А.* О нелинейном отражении слабых ударных волн.— ПММ, 1952. т. 22, № 5. с. 586—599.
2. *Шефтер Г. М.* Учет эффектов вязкости и теплопроводности при распространении импульсов в неоднородной движущейся жидкости.—ПММ, 1969, т. 33, № 1, с. 162—168.
3. *Бабич В. М.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов для анизотропной упругой среды. Сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн.—Л.: ЛГУ, 1961, № 5, с. 36—46.
4. *Бабич В. М., Кирпичникова Н. Я.* Метод пограничного слоя в задачах дифракции. —Л.:ЛГУ, 1974. 124 с.
5. *Багдоев А. Г., Петросян Л. Г.* Уравнения коротких волн для теплопроводящей жидкости с несимметричным тензором напряжений. I. Упрощенные уравнения коротких волн для произвольной нелинейной слабо диссипативной среды.— ЖТФ, 1980, т. 50, вып. 12, с. 2504—2511.
6. *Багдоев А. Г., Петросян Л. Г.* Уравнения коротких волн для теплопроводящей жидкости с несимметричным тензором напряжений. II. Коэффициенты уравнений коротких волн для теплопроводящей жидкости с моментными напряжениями. —ЖТФ, 1980, т. 50, вып. 12, с. 2512—2519.
7. *Багдоев А. Г., Петросян Л. Г.* Распространение волн в микрополярной электропроводящей жидкости.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1983. т. 36, № 5, с. 3—16.
8. *Ван Вейнгарден Л.* Одномерные течения жидкости с пузырьками газа.—Реология суспензий (сб. статей), М.: Мир, 1975, с. 68—103.
9. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны.—М.: Мир, 1977. 624 с.

Институт механики
АН Армянской ССР

Ереванский
государственный университет

Поступила в редакцию
29.IV.1983