ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

38 (1)

1985

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVIII, № 2, 1985 Механика

УДК 539.37 : 539.219.2 : 517.968

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОГО КОЛЬЦА С УЧЕТОМ СИЛ СЦЕПЛЕНИЯ

ГУЛКАНЯН Н. О., МКРТЧЯН А. М.

Плоская задача теории упругости для эксцентрического кольца, когда вдоль контуров приложены напряжения, решалась в [1, 2]. Решению плоской смешанной задачи для эксцентрического кольца, нагруженного по внутреннему контуру известной нагрузкой и соприкасающегося по наружному контуру с жесткой средой, посвящена работа [3]. Контактные задачи для эксцентрического кольца рассматривались в работах [4, 5]. В работе [4] эта задача решалась методами теории аналитических функций в случае, когда эксцентрическое кольцо по внешнему контуру неподвижно сцеплено с двумя жесткими штампами, симметрично расположенными относительно действительной оси и находящимися под действием двух равных и диаметрально противоположных сил, а внутренний контур свободен от напряжений. В статье [5] решалась задача о вдавливании штампа в упругое эксцентрическое кольцо, когда между штампом и материалом кольца отсутствует трение. Контактным задачам для частного случая эксцентрического кольца, а именно: для полуплоскости с круговым отверстием, к которой приложены штампы, без учета трения посвящены работы [6—8], а при наличии сцепления между штампами и полуплоскостью—работы [8—11].

В данной статье в биполярных координатах при помощи функции напряжений, представленной в виде рядов Фурье, и сингулярных интегральных уравнений решены плоские контактные задачи для эксцентрического кольца, прикрепленного с внутренней (или внешней) поверхности кольца к одному или к двум симметрично расположенным жестким штампам при полном сцеплении между штампами и материалом кольца. Принято, что штампы неподвижные и деформация происходит вследствие нагрузок, приложенных к остальным частям границы кольца. По всему контуру кольца вне штампов считаются заданными произвольные нормальные напряжения, а касательные напряжения приняты равными нулю. Выведены формулы для контактных напряжений под штампами с выделенной особенностью у краев штампов. Вычислены коэффициенты при особенностях для нескольких значений геометрических параметров и разных областей приложения нормальных нагрузок.

Решения таких задач могут быть построены также при помощи кусочно-однородных функций [12].

1. Решим контактную задачу для эксцентрического кольца, прикрепленного частью внутренней поверхности к неподвижному основанию (штампу), имеющему форму кольца (фиг. 1).

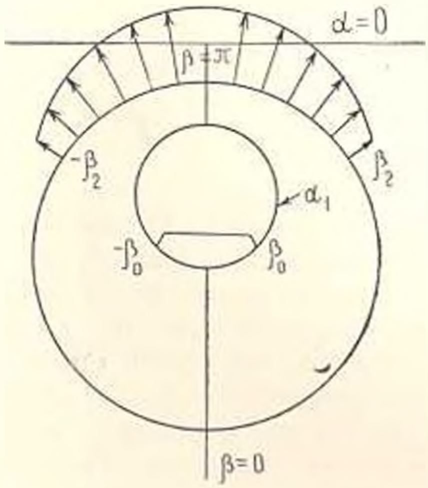
Пусть нормальная нагрузка приложена к кольцу симметрично относительно оси $\beta=0$ и $\beta=\pi$.

В силу наличия симметрии будем рассматривать только половину области кольца, требуя при этом выполнения условий симметрии

$$\tau_{\alpha\beta}(\alpha,0)=\tau_{\alpha\beta}(\alpha,\pi)=0 \qquad (\alpha_2\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1) \tag{1.1}$$

$$v(\alpha,0)=0,\quad v(\alpha,\pi)=0 \qquad (\alpha_2\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1) \tag{1.2}$$

а также следующих граничных условий:



Фиг. 1

$$a\sigma_\alpha(\alpha_2,\beta)=f_2(\beta), \quad \tau_{\alpha\beta}(\alpha_2,\beta)=0 \qquad (0\leqslant\beta\leqslant\pi) \tag{1.3}$$

$$\tau_{\alpha\beta}(\alpha_1,\beta)=0,\quad a\sigma_\alpha(\alpha_1,\beta)=f_1(\beta) \qquad (\beta_0\leqslant\beta\leqslant\pi) \tag{1.4}$$

$$u(\alpha_1,\beta)=0, \quad v(\alpha_1,\beta)=0 \qquad (0\leqslant\beta\leqslant\beta_0) \tag{1.5}$$

Здесь a — половина расстояния между полюсами системы.

Обозначая неизвестные нормальное и касательное напряжения под штампом соответственно через $\sigma(\beta)$ и $\tau(\beta)$ и принимая, что по всему контуру кольца известны напряжения, решим первую основную задачу теории упругости.

Представим напряжения в виде рядов Фурье

$$a\sigma_\alpha(\alpha_2,\beta)=f_2(\beta)=(\operatorname{ch}\alpha_2-\cos\beta)\left[\frac{f_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}f_k\cos k\beta\right]$$

$$a\tau_{\alpha\beta}(\alpha_1,\beta)=\begin{cases}\tau(\beta) & (0\leqslant\beta\leqslant\beta_0)\\ 0 & (\beta_0\leqslant\beta\leqslant\pi)\end{cases}=(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)\sum_{k=1}^{\infty}t_k\sin k\beta$$

$$a\sigma_\alpha(\alpha_1,\beta)=\begin{cases}\sigma(\beta) & (0\leqslant\beta\leqslant\beta_0)\\ f_1(\beta) & (\beta_0\leqslant\beta\leqslant\pi)\end{cases}=(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)\left[\frac{S_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}S_k\cos k\beta\right] \tag{1.6}$$

где

$$t_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\beta_0}\frac{\tau(\beta)\sin k\beta\,d\beta}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta},\qquad f_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f_2(\beta)\cos k\beta\,d\beta}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}$$

$$\frac{f_0}{2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{f_2(\xi)d\xi}{\operatorname{ch}\alpha_2-\cos\xi},\qquad S_k=\frac{2}{\pi}\left[\int\limits_0^{\beta_0}\frac{\sigma(\xi)\cos k\xi\, d\xi}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\beta_0}^{\pi}\frac{f_1(\xi)\cos k\xi d\xi}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi}\right],\quad \frac{S_0}{2}=\frac{1}{\pi}\left[\int\limits_0^{\beta_0}\frac{\sigma(\xi)d\xi}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi}+\int\limits_{\beta_0}^{\pi}\frac{f_1(\xi)d\xi}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi}\right]$$

Функцию напряжений $\Phi(\alpha,\beta)$ ищем в виде

$$g\Phi(\alpha,\beta)=A\beta\sin\beta+E_0\operatorname{sh}\alpha+F_0\alpha\operatorname{sh}\alpha+\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k(\alpha)\cos k\beta$$

где $ag=\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta$.
Используя связи напряжений и перемещений с функцией $g\Phi$ [1], выразим напряжения и перемещения через коэффициенты A, E_0, F_0 и через функцию $\Psi_k(\alpha)$ [5].

Представляя функцию $\Psi_k(\alpha)$ в виде

$$\Psi_1(\alpha)=E_1\operatorname{sh}2(\alpha-\alpha_2)+G_1\operatorname{ch}2(\alpha-\alpha_2)+F_1(\alpha-\alpha_2)+H_1$$

$$\Psi_k(\alpha)=E_k\operatorname{sh}(\alpha_1-\alpha)\operatorname{sh}k(\alpha_1-\alpha)+G_k\operatorname{sh}k(\alpha_1-\alpha)\operatorname{sh}(\alpha-\alpha_2)+\tag{1.7}$$

$$+F_k\operatorname{sh}k(\alpha-\alpha_2)\operatorname{sh}(\alpha_1-\alpha)+H_k\operatorname{sh}k(\alpha-\alpha_2)\operatorname{sh}(\alpha-\alpha_2)\quad(k\geqslant 2)$$

автоматически удовлетворим условиям (1.1) и первому из условий (1.2). Для выполнения второго условия (1.2) достаточно принять

$$F_0=A\frac{\mu}{\lambda+2\mu}$$

здесь λ и μ — постоянные Ламе.

Согласно второму условию (1.3) имеем $\Psi_k'(\alpha_2)=0$, а согласно (1.6) и первому условию (1.4) имеем $\Psi_k(\alpha_1)=t_k/k$.

Удовлетворяя первому условию (1.3), отделяя главную часть полученного выражения и разлагая остальную часть этого выражения в ряд по косинусам, а также учитывая (1.6), найдем

$$f_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left\{A[2\cos\beta(\operatorname{ch}\alpha_2-\cos\beta)-\sin^2\beta]-A\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\operatorname{sh}^2\alpha_2+\right.$$

$$\left.+\sin\beta\sum_{p=1}^{\infty}p\Psi_p(\alpha_2)\sin p\beta+\operatorname{ch}\alpha_2\sum_{p=1}^{\infty}\Psi_p(\alpha_2)\cos p\beta\right\}\frac{d\beta}{\operatorname{ch}\alpha_2-\cos\beta}\tag{1.8}$$

$$-k^2\Psi_k(\alpha_2)=f_k+F_k(\alpha_2)\tag{1.9}$$

где

$$F_k(\alpha_2)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left\{\frac{f_0}{2}(\operatorname{ch}\alpha_2-\cos\beta)-A[2\cos\beta(\operatorname{ch}\alpha_2-\cos\beta)-\sin^2\beta]+\right.$$

$$\left.+A\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\operatorname{sh}^2\alpha_2-\sin\beta\sum_{p=1}^{\infty}p\Psi_p(\alpha_2)\sin p\beta-\operatorname{ch}\alpha_2\sum_{p=1}^{\infty}\Psi_p(\alpha_2)\cos p\beta\right\}\frac{\cos k\beta d\beta}{\operatorname{ch}\alpha_2-\cos\beta}\tag{1.10}$$

Вводя обозначение $Z_k = -k^2\Psi_k(\alpha_2)$ и пользуясь известными значениями интегралов [1], входящих в (1.9) и (1.10), для определения значений Z_k и A получим совместную систему уравнений

$$A = \frac{1}{\exp(-\alpha_2) + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}} \left\{ -\frac{f_0}{2} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\exp(-p\alpha_2)}{p^2} Z_p(p + \operatorname{cth}\alpha_2) \right\}$$

$$Z_k = -A[\delta_{1k} + 2\operatorname{sh}\alpha_2 \exp(-k\alpha_2)] + 2A\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\operatorname{sh}\alpha_2 \exp(-k\alpha_2) +$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty} \frac{Z_p}{p^2} \cdot I^*_{kp}(\alpha_2) + f_k, \qquad \text{где}$$

$$I^*_{kp}(\alpha_2) = \frac{p}{2}\left\{ 2\exp(-(p+k)\alpha_2) + \frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_2}[\exp(-|k-p+1|\alpha_2) - \right.$$

$$\left. -\exp(-|p-k+1|\alpha_2)] \right\} + \operatorname{cth}\alpha_2[\exp(-|p-k|\alpha_2) + \exp(-(p+k)\alpha_2)]$$

$$\delta_{1k} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq 1 \\ 1, & \text{если } k = 1 \end{cases} \tag{1.11}$$

Удовлетворяя второму условию из (1.6) и поступая аналогичным образом, как и при удовлетворении первого условия (1.3), найдем

$$S_0 = -2A\left[\exp(-\alpha_1) + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\operatorname{sh}\alpha_1\right] - 2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{t_p}{p}\exp(-p\alpha_1) -$$

$$-2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{S_p+F_p}{p^2}(p+\operatorname{cth}\alpha_1)\exp(-p\alpha_1) \tag{1.12}$$

$$\Psi_k(\alpha_1) = -\frac{S_k}{k^2} - \frac{F_k}{k^2}, \qquad \text{где}$$

$$F_k = -A\left[2\delta_{1k} - \frac{\exp(-k\alpha_1)}{\operatorname{sh}\alpha_1} + \frac{1}{2\operatorname{sh}\alpha_1}(\exp(-|k-2|\alpha_1) + \exp(-(k+2)\alpha_1)) - \right.$$

$$\left. -\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\operatorname{sh}\alpha_1\exp(-k\alpha_1)\right] + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{t_p}{p}[\exp(-|p-k|\alpha_1 + \exp(-(p+k)\alpha_1)] +$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{S_p+F_p}{p^2}I^*_{kp}(\alpha_1) \tag{1.13}$$

$I^*_{kp}(\alpha_1)$ имеет такой же вид, как и $I^*_{kp}(\alpha_2)$, в котором α_2 заменено на α_1.

Перейдем теперь к решению поставленной задачи, когда на внутреннем контуре заданы смешанные граничные условия, то есть удовлетворим условиям (1.5).

После некоторых преобразований получим

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\mu}{\lambda+2\mu}k\Psi_k(\alpha_1) - \Psi'_k(\alpha_1)\right]\sin k\beta = \bar{R}^*_\tau(\beta)$$

$$(0 < \beta < \beta_0)$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left[k\Psi_k(\alpha_1) - \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\Psi'_k(\alpha_1)\right]\cos k\beta = \bar{R}^*_n(\beta) \tag{1.14}$$

где

$$R_v^*(\beta)=\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\overline{R}_v(\beta)+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{-2N_1^*\Psi_1''(\alpha_1)+2[\Psi_1'(\alpha_1)-\Psi_1'(\alpha_2)][1-\operatorname{ch}2(\alpha_1-\alpha_2)]\frac{1}{\Delta_1}\right\}\sin\beta$$

$$\overline{R}_v(\beta)=\overline{R}_1(\beta)-\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sin k\beta}{k}\{-(k^2-1)M_k\Psi_k(\alpha_1)+2kN_k^*\Psi_k'(\alpha_1)+$$

$$+(k^2-1)Q_k\Psi_k(\alpha_2)\}$$

$$\overline{R}_1(\beta)=-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left|A\sin\beta-\frac{\sin\beta\operatorname{sh}\alpha_1}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}E_0-\frac{\alpha_1\sin\beta\operatorname{sh}\alpha_1}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}\frac{\mu}{\lambda+2\mu}A\right|+$$

$$+\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}A\sin\beta\left(1-\frac{\alpha_1\operatorname{sh}\alpha_1}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}\right)+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k(\alpha_1)\cos k\beta+$$

$$+\frac{\operatorname{sh}\alpha_1}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\left\{\Psi_1'(\alpha_1)\sin\beta+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sin k\beta}{k}[2k(1+N_k)\Psi_k(\alpha_1)-\right.$$

$$\left.-\Psi_k'(\alpha_1)M_k-R_k\Psi_k(\alpha_2)]\right\}$$

$$\overline{R}_u^*(\beta)=\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\overline{f}_u(\beta)-\Psi_1(\alpha_1)\cos\beta+\frac{1}{2}\Psi_1'(\alpha_1)\cos\beta$$

$$\overline{R}_u(\beta)=\overline{G}_1(\beta)+\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\sum_{k=2}^{\infty}\cos k\beta[2kN_k\Psi_k(\alpha_1)-\Psi_k'(\alpha_1)M_k-R_k\Psi_k(\alpha_2)]$$

$$\overline{G}_1(\beta)=-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left\{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}A\operatorname{sh}\alpha_1+\frac{\mu}{\lambda+2\mu}A\alpha_1\frac{1-\operatorname{ch}\alpha_1\cos\beta}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}+E_0\frac{1-\operatorname{ch}\alpha_1\cos\beta}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}-\right.$$

$$\left.-\frac{\operatorname{sh}\alpha_1}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k(\alpha_1)\cos k\beta\right\}+\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\left|\frac{\mu}{\lambda+2\mu}A\operatorname{sh}\alpha_1+\right.$$

$$\left.+A\alpha_1\frac{1-\operatorname{ch}\alpha_1\cos\beta}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}\right|-\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}\left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sin k\beta}{k}\Psi_k'(\alpha_1)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^2-1}{k}\sin k\beta\int^{\alpha_1}\Psi_k(\alpha)d\alpha\right|-\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}\sin\beta\Psi_1'(\alpha_1)\qquad(1.15)$$

$$N_1^*=\frac{1}{2\Delta_1}\{2-[1+2(\alpha_1-\alpha_2)]\exp(-2(\alpha_1-\alpha_2))-\operatorname{ch}2(\alpha_1-\alpha_2)\}$$

$$\Delta_1=\operatorname{ch}2(\alpha_1-\alpha_2)-(\alpha_1-\alpha_2)\operatorname{sh}2(\alpha_1-\alpha_2)-1$$

$$M_k=\frac{1}{\Delta}2k^2\operatorname{sh}^2(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$N_k^*=\frac{1}{\Delta}\{\operatorname{sh}k(\alpha_1-\alpha_2)\exp(-k(\alpha_1-\alpha_2))+k^2\operatorname{sh}^2(\alpha_1-\alpha_2)-k\operatorname{sh}(\alpha_1-\alpha_2)\operatorname{ch}(\alpha_1-\alpha_2)\}$$

$$Q_k = 2k\,\mathrm{sh}\,(\alpha_1-\alpha_2)\,\mathrm{sh}\,k\,(\alpha_1-\alpha_2)\,\frac{1}{\Delta}$$

$$\Delta = \mathrm{sh}^2 k(\alpha_1-\alpha_2) - k^2\,\mathrm{sh}^2(\alpha_1-\alpha_2) \tag{1.15}$$

$$N_k = \frac{1}{\Delta}\{\mathrm{sh}\,k(\alpha_1-\alpha_2)\exp(-k(\alpha_1-\alpha_2)) + k^2\mathrm{sh}^2(\alpha_1-\alpha_2) + k\,\mathrm{sh}(\alpha_1-\alpha_2)\,\mathrm{ch}(\alpha_1-\alpha_2)\}$$

$$R_k = \frac{2k}{\Delta}\{\mathrm{sh}\,k(\alpha_1-\alpha_2)\,\mathrm{ch}(\alpha_1-\alpha_2) + k\,\mathrm{sh}(\alpha_1-\alpha_2)\,\mathrm{ch}\,k(\alpha_1-\alpha_2)\}$$

Выражая $\Psi_k(\alpha_1)$ и $\Psi'_k(\alpha_1)$ через неизвестные напряжения $\sigma(\xi)$ и $\tau(\xi)$ и воспользовавшись значениями рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\beta\cdot\cos k\xi}{k} = \frac{1}{2}\begin{cases}\pi-\beta & (\beta>\xi)\\ -\beta & (\xi>\beta)\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\beta\cdot\sin k\xi}{k} = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{1}{2\sin\frac{|\beta-\xi|}{2}} - \ln\frac{1}{2\sin\frac{\beta+\xi}{2}}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\beta\cos k\xi}{k} = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{1}{2\sin\frac{|\beta-\xi|}{2}} + \ln\frac{1}{2\sin\frac{\beta+\xi}{2}}\right]$$

приведем (1.14) к виду

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\beta_0}\frac{\sigma(\xi)d\xi}{\mathrm{ch}\alpha_1-\cos\xi}\left[\ln\frac{1}{2\sin\frac{|\beta-\xi|}{2}} + \ln\frac{1}{2\sin\frac{\beta+\xi}{2}}\right] + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\int_{\beta}^{\beta_0}\frac{\tau(\xi)d\xi}{\mathrm{ch}\alpha_1-\cos\xi} = Q^*_\sigma(\beta) \tag{1.16}$$

$$\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\int_0^{\beta}\frac{\sigma(\xi)d\xi}{\mathrm{ch}\alpha_1-\cos\xi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\beta_0}\frac{\tau(\xi)d\xi}{\mathrm{ch}\alpha_1-\cos\xi}\left[\ln\frac{1}{2\sin\frac{|\beta-\xi|}{2}} - \ln\frac{1}{2\sin\frac{\beta+\xi}{2}}\right] = Q^*_\tau(\beta) \qquad (0<\beta<\beta_0)$$

где

$$Q^*_\sigma(\beta) = R^*_\sigma(\beta) - \frac{1}{\pi}\int_{\beta_0}^{\pi}\frac{f_1(\xi)d\xi}{\mathrm{ch}\alpha_1-\cos\xi}\left[\ln\frac{1}{2\sin\frac{|\beta-\xi|}{2}} + \ln\frac{1}{2\sin\frac{\beta+\xi}{2}}\right] - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_k}{k}\cos k\beta + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\beta_0}\frac{\xi\tau(\xi)d\xi}{\mathrm{ch}\alpha_1-\cos\xi}$$

$$Q^*_\tau(\beta) = R^*_\tau(\beta) + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\,\frac{\beta}{\pi}\int_0^{\beta_0}\frac{\sigma(\xi)d\xi}{\mathrm{ch}\alpha_1-\cos\xi} + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\,\frac{\beta}{\pi}\int_{\beta_0}^{\pi}\frac{f_1(\xi)d\xi}{\mathrm{ch}\alpha_1-\cos\xi} - \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\beta}{k}F_k$$

Дифференцируя обе части (1.16) по β и принимая во внимание, что $\sigma(\xi)$ — четная, а $\tau(\xi)$ — нечетная функции, сведем (1.16) к системе уравнений:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\beta_0}^{\beta_0}\frac{\sigma(\xi)}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi}\operatorname{ctg}\frac{\beta-\xi}{2}\,d\xi-\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\,\frac{\tau(\beta)}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}=Q_\sigma(\beta)=Q_\sigma^{*}(\beta)$$

$$\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\,\frac{\sigma(\beta)}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}-\frac{1}{2\pi}\int_{-\beta_0}^{\beta_0}\frac{\tau(\xi)}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi}\operatorname{ctg}\frac{\beta-\xi}{2}\,d\xi=Q_\tau(\beta)=Q_\tau^{*}(\beta) \qquad (1.17)$$

Если сложить первое и второе уравнения (1.17) и ввести обозначение $\sigma(\beta)+i\tau(\beta)=(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)P(\beta)$, то для определения $P(\beta)$ получим сингулярное интегральное уравнение с ядром Гильберта

$$P(\beta)-\frac{i}{\pi(1-\nu)}\int_{-\beta_0}^{\beta_0}P(\xi)\operatorname{ctg}\frac{\xi-\beta}{2}\,d\xi=Q(\beta)=\frac{2}{1-\nu}\,[\,Q_\sigma(\beta)-iQ_\tau(\beta)\,]$$

здесь ν — коэффициент Пуассона.

Решение этого уравнения имеет вид [12]

$$P(\xi)=A^0Q(\xi)+B^0\frac{X(\xi)}{2\pi}\int_{-\beta_0}^{\beta_0}\frac{Q(\tau)\,d\tau}{X(\tau)\sin\dfrac{\tau-\xi}{2}}-2B(\xi)\,X(\xi)\left[A_1\sin\frac{\xi}{2}+B_1\cos\frac{\xi}{2}\right] \qquad (1.18)$$

где

$$A^0=-\frac{(1-\nu)^2}{(\nu+1)(3-\nu)},\quad B^0=-\frac{2i(1-\nu)}{(\nu+1)(3-\nu)},\quad A_1=iB_1\operatorname{th}\gamma\beta_0$$

$$X(z)=\left(\sin\frac{\beta_0-z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\gamma}\left(\sin\frac{\beta_0+z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\gamma},\quad \gamma=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{3-\nu}{1+\nu} \qquad (1.19)$$

Если проинтегрировать (1.18) от $-\beta_0$ до β_0, то получим значение B_1

$$B_1=-\frac{\operatorname{ch}\gamma\pi\operatorname{ch}\gamma\beta_0}{2\operatorname{ch}2\gamma\beta_0}\left[S_0-\frac{2}{\pi}\int_{-\beta_0}^{\beta_0}\frac{f_2(\xi)\,d\xi}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\xi}\right]$$

Если же умножить выражение (1.18) вначале на $\sin mx\,dx$ и проинтегрировать от $-\beta_0$ до β_0, а затем умножить на $\cos mx\,dx$ и проинтегрировать в тех же пределах, то после ряда преобразований получим систему уравнений

$$t_k=\sum_{m=1}^{\infty}a_{km}^{(1)}t_m+\sum_{m=1}^{\infty}b_{km}^{(1)}S_m+\sum_{m=1}^{\infty}c_{km}^{(1)}F_m+S_0T_{m1}^{(S)}+E_0T_{m1}^{(E)}+\bar{\gamma}_k^{(1)}$$

$$S_k=\sum_{m=1}^{\infty}a_{km}^{(2)}t_m+\sum_{m=1}^{\infty}b_{km}^{(2)}S_m+\sum_{m=1}^{\infty}c_{km}^{(2)}F_m+S_0T_{m2}^{(S)}+E_0T_{m2}^{(E)}+\bar{\gamma}_k^{(2)} \qquad (1.20)$$

где

$$\bar{\gamma}_{k}^{(1)} = 4G_0 \sum_{l=1}^{\infty} \Big\{ \bar{F}(-m+l,1) \int_0^{\beta_0} W(\beta)[f_1^*(\beta)\cos(C(\beta)) + f_2^*(\beta)\sin(C(\beta))]\, d\beta +$$

$$+ \bar{F}(l,1) \int_0^{\beta_0} W(\beta)\,[f_1^*(\beta)\cos(C(\beta) - m\beta) + f_2^*(\beta)\sin(C(\beta) - m\beta)] \Big\}$$

$$\bar{\gamma}_{m}^{(2)} = 4G_0 \sum_{l=1}^{\infty} \Big\{ \bar{F}(l,1) \int_0^{\beta_0} W(\beta)[f_1^*(\beta)\cos(C(\beta) - m\beta) + f_2^*(\beta)\sin(C(\beta) - m\beta)] -$$

$$- \bar{F}(l-m,1) \int_0^{\beta_0} W(\beta)[f_1^*(\beta)\cos(C(\beta)) + f_2^*(\beta)\sin(C(\beta))] \Big\}$$

$$f_1^*(\beta) = A\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\cos\beta - A\alpha_1 \frac{\operatorname{sh}\alpha_1(\operatorname{ch}\alpha_1\cos\beta - 1)}{(\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\beta)^2}\left(1 - \frac{\mu^2}{(\lambda+2\mu)^2}\right) + \Psi^{(1)}(\beta)$$

$$f_2^*(\beta) = \frac{\alpha_1 \operatorname{sh}^2\alpha_1 \sin\beta}{(\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\beta)^2} A - \frac{A\alpha_1\mu^2}{(\lambda+2\mu)^2}\, \frac{\operatorname{sh}^2\alpha_1 \sin\beta}{(\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\beta)^2} + \Psi^{(2)}(\beta)$$

$$\Psi^{(1)}(\beta) = -\frac{1}{2(\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\beta)^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{f_k}{k^2} Z_k [\sin k\beta(\operatorname{ch}\alpha_1\cos\beta - 1) +$$

$$+ k\sin\beta\cos k\beta(\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\beta)] - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{R_k}{k} Z_k \sin k\beta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{\beta_0}^{\pi} \frac{f_1(\xi)\,d\xi}{\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\xi}\left[\operatorname{ctg}\frac{\beta-\xi}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta+\xi}{2}\right]$$

$$\Psi^{(2)}(\beta) = \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{\infty}(p^2-1)Q_p \frac{Z_p}{p^2}\cos p\beta - \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sh}\alpha_1}{(\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\beta)^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{R_k}{k^2} Z_k \times$$

$$\times [\sin\beta\cdot\sin k\beta - k(\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\beta)\cos k\beta] + Z_1[1 - \operatorname{ch}2(\alpha_1 - \alpha_2)]\frac{\cos\beta}{\Delta_1}$$

$$\gamma_{m1}^{(S_0)} = (1-\nu)G_0 \sum_{l=1}^{\infty}\Big\{\bar{F}(-m+l,1)\int_0^{\beta_0} W(\beta)\cos(C(\beta))\,d\beta + \bar{F}(l,1)\times$$

$$\times \int_0^{\beta_0} W(\beta)\cos(C(\beta) - m\beta)\,d\beta\Big\} - \frac{\operatorname{ch}\gamma\beta_0 \exp(\beta_0\gamma)}{4\operatorname{ch}2\gamma\beta_0}\cdot\{[\bar{F}(-m,1) -$$

$$- \bar{F}(m,1)](1 + \operatorname{th}\gamma\beta_0) + [\bar{F}(1-m,1) - \bar{F}(m+1,1)](1 - \operatorname{th}\gamma\beta_0)\}$$

$$\gamma_{m2}^{(S_0)} = \frac{\operatorname{ch}\gamma\beta_0}{4\operatorname{ch}2\gamma\beta_0}\exp(\beta_0\gamma)\{[\bar{F}(-m,1) + \bar{F}(m,1)](1 + \operatorname{th}\gamma\beta_0) +$$

$$+ [\bar{F}(-m+1,1) + \bar{F}(m+1,1)](1 - \operatorname{th}\gamma\beta_0)\} + (1-\nu)G_0\sum_{l=1}^{\infty}\Big\{\bar{F}(l,1)\int_0^{\beta_0} W(\beta)\times$$

$$\times \cos(C(\beta) - m\beta)\,d\beta - \bar{F}(l-m,1)\int_0^{\beta_0} W(\beta)\cos(C(\beta))\,d\beta\Big\}$$

$$T_{m1}^{(2)} = -2G_0(1-\nu)\,\mathrm{sh}\,\alpha_1 \sum_{l=1}^{m} \Bigg\{ \bar{F}(l, 1) \int_0^{\beta_0} W(\beta) \left[\frac{1-\mathrm{ch}\,\alpha_1 \cos\beta}{(\mathrm{ch}\,\alpha_1 - \cos\beta)^2} \times \right.$$

$$\left. \times \cos(C(\beta) - m\beta) + \frac{\mathrm{sh}\,\alpha_1 \sin\beta}{(\mathrm{ch}\,\alpha_1 - \cos\beta)^2} \sin(C(\beta) - m\beta) \right] d\beta +$$

$$+ \bar{F}(-m+l, 1) \int_0^{\beta_0} W(\beta) \left[\frac{1-\mathrm{ch}\,\alpha_1 \cos\beta}{(\mathrm{ch}\,\alpha_1 - \cos\beta)^2} \cos(C(\beta)) + \frac{\mathrm{sh}\,\alpha_1 \sin\beta}{(\mathrm{ch}\,\alpha_1 - \cos\beta)^2} \sin(C(\beta)) \right] d\beta$$

$$T_{m2}^{(2)} = -2G_0(1-\nu)\,\mathrm{sh}\,\alpha_1 \sum_{l=1}^{m} \Bigg\{ \bar{F}(l, 1) \left[\int_0^{\beta_0} W(\beta) \frac{1-\mathrm{ch}\,\alpha_1 \cos\beta}{(\mathrm{ch}\,\alpha_1 - \cos\beta)^2} \cos(C(\beta) - m\beta) + \right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{sh}\,\alpha_1 \sin\beta}{(\mathrm{ch}\,\alpha_1 - \cos\beta)^2} \sin(C(\beta) - m\beta) \right] d\beta - \bar{F}(l-m, 1) \int_0^{\beta_0} W(\beta) \left[\frac{1-\mathrm{ch}\,\alpha_1 \cos\beta}{(\mathrm{ch}\,\alpha_1 - \cos\beta)^2} \times \right.$$

$$\left. \times \cos(C(\beta)) + \frac{\mathrm{sh}\,\alpha_1 \sin\beta}{(\mathrm{ch}\,\alpha_1 - \cos\beta)^2} \sin(C(\beta)) \right] d\beta \Bigg\}$$

$$W(\beta) = \sqrt{\sin\frac{\beta_0 - \beta}{2} \sin\frac{\beta_0 + \beta}{2}}$$

$$G_0 = \frac{2\exp(\beta_0 \gamma)}{\pi(1+\nu)(3-\nu)} \cdot \frac{1}{\mathrm{ch}\,\pi\gamma}$$

$$C(\beta) = \left(l - \frac{1}{2} \right) \beta - \gamma \ln \frac{\sin\dfrac{\beta_0 - \beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta_0 + \beta}{2}}$$

$$\bar{F}(\alpha, \beta) = \exp(i\alpha\beta_0) F\left(\alpha, \frac{1}{2} - i\gamma, \beta, 1 - \exp(2i\beta_0) \right)$$

(здесь $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ — гипергеометрическая функция)

$$g_1^{(1)}(\beta) = -\frac{1}{2} \frac{\sin\beta}{(\mathrm{ch}\,\alpha_1 - \cos\beta)^2} [(\cos\beta\,\mathrm{ch}\,\alpha_1 - 1) + \cos\beta\,(\mathrm{ch}\,\alpha_1 - \cos\beta)] - \frac{1}{2} \sin\beta$$

$$g_1^{(2)}(\beta) = \sin\beta - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \mathrm{sh}\,\alpha_1 \frac{\sin\beta\,\mathrm{ch}\,\alpha_1}{(\mathrm{ch}\,\alpha_1 - \cos\beta)^2}$$

$$g_1^{(3)}(\beta) = \frac{\mathrm{sh}\,\alpha_1}{2} \frac{\mathrm{ch}\,\alpha_1 \cos\beta - 1}{(\mathrm{ch}\,\alpha_1 - \cos\beta)^2} - N_1^* \cos\beta$$

$$g_1^{(4)}(\beta) = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} [\cos\beta\,(\mathrm{ch}\,\alpha_1 \cos\beta - 1) - \sin^2\beta(\mathrm{ch}\,\alpha_1 - \cos\beta)] \times$$

$$\times \frac{1}{(\mathrm{ch}\,\alpha_1 - \cos\beta)^2} + [1 - \mathrm{ch}\,2(\alpha_1 - \alpha_2)] \frac{1}{\Delta_1} \Bigg| \cos\beta$$

$$g_p^{(1)}(\beta) = \frac{1}{2}\sin p\beta\cdot M_p + \frac{1}{2}\frac{M_p}{p^2}\frac{1}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)^2}\{\sin p\beta(\operatorname{ch}\alpha_1\cos\beta-1)+$$

$$+p\sin\beta\cos p\beta(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)\} \qquad (p\geqslant 2)$$

$$g_p^{(2)}(\beta) = -\sin p\beta\cdot N_p - \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\operatorname{sh}\alpha_1\frac{1}{p^2}\frac{1}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)^2}\cdot[p\sin p\beta(\operatorname{ch}\alpha_1-$$

$$-\cos\beta)+\sin\beta\cos p\beta]-(1+N_p)\frac{1}{p^2}\frac{1}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)^2}[\sin p\beta(\operatorname{ch}\alpha_1\cos\beta-1)+$$

$$+p\sin\beta\cos p\beta\cdot(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)] \qquad (p\geqslant 2)$$

$$g_p^{(3)}(\beta) = -\cos p\beta\cdot N_p^{*}-\frac{\operatorname{sh}\alpha_1}{2p^2}M_p[p\cos p\beta(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)-$$

$$-\sin\beta\cdot\sin p\beta]\cdot\frac{1}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)^2} \qquad (p\geqslant 2)$$

$$g_p^{(4)}(\beta) = \frac{1}{2}\cos p\beta\frac{p^2-1}{p^2}M_p+\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{1}{p^2}[\cos p\beta(\operatorname{ch}\alpha_1\cos\beta-1)-$$

$$-p\sin\beta\sin p\beta(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)]\frac{1}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)^2}+\frac{\operatorname{sh}\alpha_1}{p^2}(1+N_p)\times$$

$$\times[p\cos p\beta(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)-\sin\beta\sin p\beta]\frac{1}{(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)^2} \qquad (p\geqslant 2)$$

$\overline{S}_m^{(i)}$ $(i=1,\ 2)$ — операторы, которые в применении к некоторой функции $f(\beta)$ после ряда преобразований и использования значений интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X(\xi)\,d\xi}{\sin\frac{\beta-\xi}{2}} = 2\pi i\,X(\beta)\operatorname{th}\pi\gamma$$

$$\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}dt = \mathrm{B}(\beta,\ \gamma-\beta)F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z) \quad (\operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}\beta>0)$$

где $\mathrm{B}(\alpha,\ \beta)$ — бета-функция, приводятся к виду

$$\overline{S}_m^{(1)} = \frac{B^0}{2\operatorname{ch}\pi\gamma}\sum_{l=1}^{m}\Bigg\{\overline{F}(-m+l,\ 1)\int_{\overline{b}}^{b}\frac{f(-i\ln y)\,y^{l-2}dy}{(b-y)^{-\frac{1}{2}+i\gamma}(y-\overline{b})^{-\frac{1}{2}-i\gamma}}+ \qquad (1.21)$$

$$+\overline{F}(l,\ 1)\int_{\overline{b}}^{b}\frac{f(-i\ln y)\,y^{l-2-m}\,dy}{(b-y)^{-\frac{1}{2}+i\gamma}(y-\overline{b})^{-\frac{1}{2}-i\gamma}}\Bigg\}$$

$$\overline{S}_m^{(2)} = \frac{B^0 i}{2}\frac{1}{\operatorname{ch}\pi\gamma}\sum_{l=1}^{m}\Bigg\{\overline{F}(l,\ 1)\int_{\overline{b}}^{b}\frac{f(-i\ln y)\,y^{l-2-m}\,dy}{(b-y)^{-\frac{1}{2}+i\gamma}(y-\overline{b})^{-\frac{1}{2}-i\gamma}}-$$

$$-\overline{F}(l-m,\ 1)\int_{\overline{b}}^{b}\frac{f(-i\ln y)\,y^{l-2}\,dy}{(b-y)^{-\frac{1}{2}+i\gamma}(y-\overline{b})^{-\frac{1}{2}-i\gamma}}\Bigg\}$$

$$b=\exp(i\beta_0), \quad \bar{b}=\exp(-\beta_0 i)$$

Из условия $u(\beta)=0$ при $\beta=0$ находим значение E_0

$$E_0=-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}A\,\mathrm{sh}\,\alpha_1+A\alpha_1\left(\frac{\lambda+2\mu}{\mu}-\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\right)+t_1+\sum_{p=2}^{\infty}\frac{t_p}{p}\left[1+\frac{\lambda+2\mu}{2\mu}M_p\right]+$$

$$+\sum_{p=2}^{\infty}\frac{F_p+S_p}{p^2}\left[\mathrm{cth}\,\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\lambda+2\mu}{\mu}p(1+N_p)\right]-\frac{\lambda+2\mu}{2\mu}\sum_{p=2}^{\infty}R_p\frac{Z_p}{p}+(F_1+S_1)\,\mathrm{cth}\,\frac{\alpha_1}{2} \tag{1.22}$$

Итак, имеем совокупность бесконечных уравнений (1.13), (1.20), из решения которой находим значения неизвестных S_k, F_k и t_k. Суммы модулей коэффициентов системы (1.20) имеют порядок $\ln k/\sqrt{k}$, а системы (1.13) имеют порядок $O(k^{-3/2})$. Свободные члены этих систем ограничены и стремятся к нулю, как $1/\sqrt{k}$.

Подставляя в (1.18) найденные значения неизвестных, определим приведенное напряжение $P(\beta)$. Отделяя мнимую и действительную части полученного выражения, найдем значения контактных напряжений $\sigma(\beta)$ и $\tau(\beta)$ с выделенной особенностью.

Заметим, что заменяя α_1 на α_2, будем иметь решение этой же задачи, когда кольцо прикреплено к неподвижному штампу снаружи.

Аналогичным образом может быть рассмотрена плоская контактная задача для эксцентрического кольца с двумя симметричными относительно оси $\beta=0$ и $\beta=\pi$ участками закрепления кольца к жестким неподвижным штампам при наличии сцепления, когда на остальных частях контура кольца заданы напряжения.

2. В качестве числового примера для задачи, рассмотренной в п. 1, вычислены коэффициенты при особенности контактных напряжений для различных значений β_0, α_1 и области ξ_0 приложения нагрузки на контуре $\alpha=\alpha_2$.

После некоторых преобразований выражения (1.18) контактные напряжения можно представить в удобном для вычислений виде

$$\sigma(\xi)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos\xi-\cos\beta_0}}(\mathrm{ch}\,\alpha_1-\cos\xi)[R\cos(h(\xi))-I\sin(h(\xi))]$$

$$\tau(\xi)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos\xi-\cos\beta_0}}(\mathrm{ch}\,\alpha_1-\cos\xi)[R\sin(h(\xi))+I\cos(h(\xi))] \tag{3.1}$$

где R и I—соответственно действительная и мнимая части выражения

$$-\frac{B_0}{\mathrm{ch}\,\pi\gamma}\sin\left(\frac{\xi}{2}-i\gamma\beta_0\right)+\frac{\mathrm{ch}\,\gamma\pi}{2\,\mathrm{ch}\,2\gamma\beta_0}\left[S_0-\frac{2}{\pi}\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{f_1(\xi)d\xi}{\mathrm{ch}\,\alpha_1-\cos\xi}\right]\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\xi}{2}-i\gamma\beta\right)+\frac{B_0}{2\pi}\int_{-\xi_0}^{\xi_0}\frac{[Q(\tau)-Q(\xi)]d\tau}{X(\tau)\sin\frac{\tau-\xi}{2}}$$

$$h(\beta) = \gamma \ln \frac{\sin \frac{\beta_0 - \beta}{2}}{\sin \frac{\beta_0 + \beta}{2}}$$

Как видно из (3.1), напряжения состоят из двух осциллирующих слагаемых. Вычислено максимальное значение $R_0 = (R^2 + I^2)^{1/2}$ коэффициентов при $(\cos\beta - \cos\beta_0)^{-1/2}$.

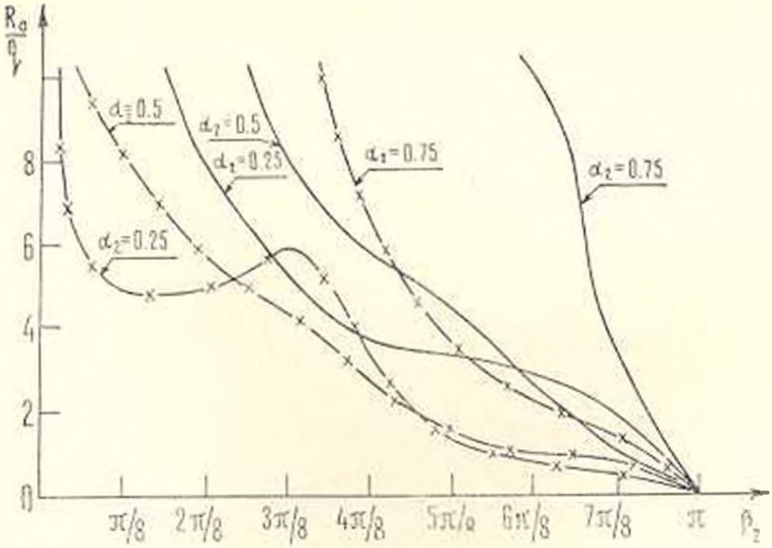
При расчетах принято $\nu = 0{,}3$, $E = 1 \cdot 10^6$ кг/см², $a = 1$, $\varepsilon = 1{,}009$, $f_1(\beta) = 0$

$$f_2(\beta) = \begin{cases} -p_0 & (\beta_2 < \beta < \pi) \\ 0 & (0 < \beta < \beta_2) \end{cases}$$

Результаты расчетов приведены в табл. 1 и на фиг. 2—3.

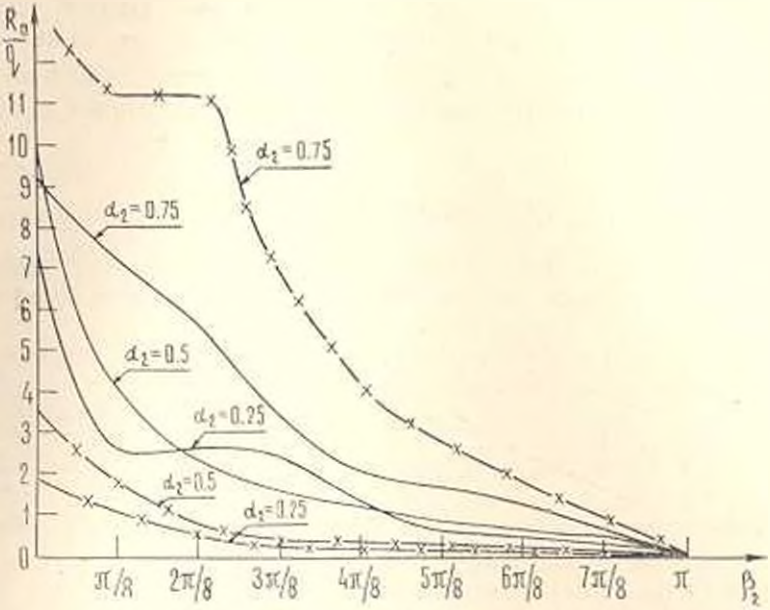
Таблица 1

	$\alpha_2=0{,}25$				$\alpha_2=0.5$			
$\beta_2 \backslash \beta_0$	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/8$	$\pi/16$	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/8$	$\pi/16$
$7\pi/8$	1.92	0.89	0.14	0.06	0.94	0.78	0.42	0.10
$6\pi/8$	3.08	0.72	0.16	0.09	2.78	0.93	0.61	0.16
$5\pi/8$	3.39	1.08	0.59	0.05	4.81	1.36	0.84	0.23
$4\pi/8$	3.61	3.20	1.26	0.13	6.28	2.68	1.24	0.34
$3\pi/8$	5.37	6.01	2.38	0.26	8.52	4.53	1.61	0.42
$2\pi/8$	9.61	4.95	2.51	0.26	11.7	5.60	2.17	0.64



Фиг. 2

В табл. 1 приведены максимальные значения коэффициента R_0/q при $(\cos\beta - \cos\beta_0)^{-1/2}$ для различных значений длины штампа и области приложения нагрузки. На фигурах изображены зависимость этих же коэффициентов от β_2 при фиксированных значениях β_0 для трех зна-



Фиг. 3

чений α_2, причем на фиг. 2 сплошные линии соответствуют $\beta_0=\pi/2$, а линии с крестиками — $\beta_0=\pi/4$, на фиг. 3 сплошные линии соответствуют $\beta_0=\pi/8$, а линии с крестиками — $\beta_0=\pi/16$.

Отметим, что если коэффициент при нормальной нагрузке в ходе осцилляции достигает максимального значения, то при этом коэффициент при особенности для касательного напряжения становится нулем, и наоборот.

ԱՐՏԱԿԵՆՏՐՈՆ ՕՂԱԿԻ ՀԱՄԱՐ ՀԱՐԹ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ ՀԱՐԱԿՑՄԱՆ ՈՒԺԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ն. Օ. ԳՈՒԼՔԱՆՅԱՆ, Ա. Մ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է հարթ կոնտակտային խնդիր արտակենտրոն օղակի համար։ Օղակի եզրագծի մի մասը ամրակցված է անշարժ կոշտ դրոշմի։ Դրոշմի և օղակի նյութի մեջ տեղի ունի հարակցում։ Եզրագծի մնացած մասում գործում են նորմալ բեռեր։

Խնդիրը բերված է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման, որն իր հերթին բերված է գծային հավասարումների քվազի լիովին ռեգուլյար անվերջ սիստեմների։

A PLANE CONTACT PROBLEM FOR AN ECCENTRIC RING TAKING INTO ACCOUNT COUPLING

N. O. GULKANIAN, A. M. MKRTCHIAN

Summary

A plane contact problem of the theory of elasticity for an eccentric ring is considered. One part of the contour of the ring is fastened to the

motionless hard punch. Between the punch and material of the ring coupling occurs. A normal load acts on the other parts of the contour. The problem is reduced to a singular integral equation which in its turn is reduced to a quasi-quite regular infinite system of linear equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уфлянд Я. С.* Биполярные координаты в теории упругости. М.-Л., 1950.
2. *Еганян В. В.* Плоская задача теории упругости для эксцентрического кольца.— Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. н., 1964, т. 17, № 1.
3. *Бабаджанян В. В.* Решение смешанной плоской задачи теории упругости для эксцентрического кольца.—Изв. АН СССР, МТТ, 1975, № 6.
4. *Заргарян С. С.* Об одной контактной задаче для эксцентрического круглого кольца.—Докл. АН Арм. ССР, 1971, т. 52, № 5.
5. *Гулканян Н. О., Мкртчян А. М.* Плоская контактная задача для эксцентрического кольца без учета трения.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1978, т. 31, № 1.
6. *Александрян М. А.* Контактная задача для полуплоскости, ослабленной круговой полостью.—Докл. АН Арм. ССР, 1968, т. 46, № 5.
7. *Tamate O.* On a contact problem of an elastic half—plane with a circular hole. Part 2. The case of frictionless contact.—Technol. Repts Tohoku Univ., 1964, vol. 29, № 2.
8. *Александрян М. А.* Вдавливание двух штампов в полуплоскость с круглым отверстием.—Докл. АН Арм. ССР, 1971, т. 53, № 3.
9. *Араминович И. Г.* Задача о давлении штампа на упругую полуплоскость с круговым отверстием.—Докл. АН СССР, 1957, т. 112, № 4.
10. *Tamate O.* On a contact problem of an elastic half-plane with a circular hole Part 1.—Technol. Repts Tohoku Univ., 1963, vol. 27, № 2.
11. *Араминович И. Г., Фотиева Н. Н., Лыткин В. Л.* Вдавливание жесткого штампа в полуплоскость с круговым отверстием. В сб. «Контактные задачи и их инженерные приложения», М.: Изд. НИИ Маш., 1969, с. 72—80.
12. *Нуллер Б. М.* О некоторых обобщениях метода кусочно-однородных решений.—Изв. ВНИИГ, 1978, т. 120.
13. *Чибрикова Л. И.* О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений.—Ученые записки Казанского госуниверситета, 1962, т. 122, кн. 3.
14. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Поступила в редакцию
1.VII. 1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVIII, № 2, 1985 Механика

УДК 539.3:537.86

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ ПЛАСТИНОК

БАГДАСАРЯН Г. Е., ДАНОЯН З. Н.

В работах [1, 2] на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел [1] получены основные уравнения и соотношения, описывающие магнитоупругие колебания тонких пластинок и оболочек при малых возмущениях.

В настоящей работе, исходя из основных положений нелинейной теории магнитоупругости и гипотезы магнитоупругости тонких тел, выведены основные уравнения и соотношения нелинейных магнитоупругих колебаний проводящих тонких пластинок в магнитном поле.

§ 1. Пусть упругая однородная изотропная тонкая пластинка постоянной толщины $2h$, изготовленная из материала с конечной электропроводностью, находится в стационарном магнитном поле с заданным вектором напряженности $\vec{H}_0$. Принимается, что для среды, окружающей пластинку, справедливы уравнения Максвелла для вакуума. Предполагается, что сторонние токи и сторонние заряды отсутствуют. Одновременно считается, что задача магнитостатики для начального (невозмущенного) состояния решена, то есть известны векторы напряженности и магнитной индукции для внешней $\vec{H}_0^{(e)}, \vec{B}_0^{(e)}$ и внутренней $\vec{H}_0$, $\vec{B}_0$ областей (внутренняя область—часть пространства, занятая пластинкой, внешняя—остальное пространство).

Пусть пластинка отнесена к неподвижной прямоугольной декартовой системе координат $OX_1X_2X_3$ так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью OX_1X_2.

Нелинейные колебания пластинки в магнитном поле будем описывать на основе геометрически нелинейной теории, считая прогибы пластинки сопоставимыми с ее толщиной, но малыми по сравнению с основными размерами. В соответствии с этим будем считать, что материал пластинки подчиняется законам Гука и Ома, а также линейным законам поляризации и намагничивания. При этом подразумевается, что изменение электромагнитного поля происходит квазистационарно. Предположим, что упругие и электромагнитные свойства материала пластинки характеризуются модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν, электропроводностью σ, магнитной проницаемостью μ, диэлектрической проницаемостью ε. Вышеприведенные величины не зависят от координат, времени, деформации и характеристик электромагнитного поля.

Известно [3, 1], что геометрическая нелинейность связана с необходимостью различать координаты начального и текущего состояний. Обозначим в выбранной системе координат начальные координаты любой частицы пластинки через x_i, а текущие — через ξ_i. Известно также, что колебание пластинки можно описать как с точки зрения Эйлера, так и с точки зрения Лагранжа. В первом случае характеристики движения пластинки считаются функциями пространственных координат текущего состояния пластинки ξ_i и времени t (переменные Эйлера), во втором же случае в качестве независимых переменных принимают материальные координаты частиц пластинки x_i и время t (переменные Лагранжа).

Поведение электромагнитного поля пластинки можно описать как в переменных Эйлера, так и в переменных Лагранжа, ибо закон движения пластинки

$$\xi_i = \xi_i(x_j, t) = u_i(x_j, t) + x_i \tag{1.1}$$

где u_i — компонента вектора перемещения $\vec{u}$, устанавливает взаимооднозначное соответствие между начальным и текущим состояниями пластинки. Это, в общем случае, нельзя сказать относительно электромагнитного поля внешней области пластинки. В случае, когда между внешними областями начального и текущего состояний пластинки отсутствует закон соответствия (например, когда пластинка находится в вакууме), то внешнюю задачу для электромагнитного поля в принципе можно сформулировать только в переменных Эйлера.

Ввиду того, что внутреннюю задачу магнитоупругости (как и задачу теории упругости без магнитного поля) удобно решать в переменных Лагранжа, целесообразно во внешней области произвести замену переменных, отображая внешнюю область текущего состояния пластинки на внешнюю область начального состояния. При этом отображающие функции

$$\xi_i = u_i^{(e)}(x_j, t) + x_i \tag{1.2}$$

выбираются так, чтобы точки деформированной границы пластинки отображались на недеформированную границу точно так же, как и при отображении (1.1). Очевидно, что при таком отображении в каждый момент времени деформированная поверхность пластинки является координатной поверхностью криволинейных координат x_i, определяемых формулами (1.1) и (1.2).

Трехмерная задача магнитоупругости в переменных Эйлера в абсолютной гауссовой системе единиц сводится к совместному интегрированию следующих систем дифференциальных уравнений [5—7].

Во внутренней области деформированной пластинки:

уравнения электродинамики для медленно движущейся среды [8] —

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial H_k}{\partial \xi_j} = \frac{4\pi}{c} j_i, \qquad \frac{\partial B_k}{\partial \xi_k} = 0$$

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_{ijk}\frac{\partial E_k}{\partial \xi_j} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial D_k}{\partial \xi_k} = 4\pi\rho_e \\
J_i = \sigma\left(E_i + \frac{\mu}{c}\varepsilon_{ijk}v_j H_k\right) \\
B_i = \mu H_i - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\varepsilon_{ijk}v_j E_k \\
D_i = \varepsilon E_i + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\varepsilon_{ijk}v_j H_k
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

уравнения теории упругости с учетом объемных сил электромагнитного происхождения (сил Лоренца) —

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial \xi_k} + F_i^{(e)} = \rho\frac{dv_i}{dt}, \quad F_i^{(e)} = \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}J_j B_k, \quad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \\
\sigma_{ij} = \beta_{jk}\frac{\partial W}{\partial \beta_{ik}}, \quad \beta_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

Во внешней области деформированной пластинки:
уравнения электродинамики для вакуума [8] —

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_{ijk}\frac{\partial H_k^{(e)}}{\partial \xi_j} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_i^{(e)}}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_k^{(e)}}{\partial \xi_k} = 0 \\
\varepsilon_{ijk}\frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \xi_j} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_i^{(e)}}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \xi_k} = 0
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

Здесь и в последующем величины, относящиеся к внешней области пластинки, отмечаются индексом (e), а по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

В приведенных выше уравнениях E_i и H_i — компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей, B_i и D_i — компоненты векторов магнитной и электрической индукции, J_i — компонента вектора плотности электрического тока, ρ_e — объемная плотность электрического заряда, v_i — компонента вектора скорости частиц пластинки, c — электродинамическая постоянная, численно равная скорости света в пустоте, σ_{ij} — компонента тензора напряжения Эйлера-Коши, $F_i^{(e)}$ — компонента силы Лоренца, β_{ij} — компонента градиента деформации Лагранжа, W — функция энергии деформации, отнесенная к единице объема деформированного тела, ρ — плотность деформированного тела, δ_{ik} — символ Кронекера, ε_{ijk} — символ Леви-Чивита.

Отметим, что в уравнениях (1.3) члены, соответствующие токам смещения $\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ и конвекционным токам $\rho_e\vec{v}$ отсутствуют, так как их влияние в случае медленно движущихся сред с высокой проводимостью в квазистационарных электромагнитных полях пренебрежимо мало [8].

К системам уравнений (1.3) — (1.5), определяющих поведение электромагнитного поля и колеблющейся в нем упругой проводящей пластинки, должны быть присоединены условия сопряжения на поверхности раздела двух сред, начальные условия и условия на бесконечности.

Условия сопряжения на поверхности деформированной пластинки S^*, вытекающие из законов сохранения, в переменных Эйлера запишутся следующим образом [5—8]:

$$\varepsilon_{ijk} N_j (H_k^{(e)} - H_k) = -\frac{v_N}{c}(D_i^{(e)} - D_i), \quad N_k(B_k^{(e)} - B_k) = 0 \tag{1.6}$$

$$\varepsilon_{ijk} N_j (E_k^{(e)} - E_k) = \frac{v_N}{c}(B_i^{(e)} - B_i), \quad N_k(D_k^{(e)} - D_k) = 4\pi\rho_s^*$$

$$N_k(\sigma_{ki} + T_{ki}) = P_i + N_k T_{ki}^{(e)} \tag{1.7}$$

Здесь N_k — компонента единичной внешней нормали к деформированной поверхности пластинки, v_N — нормальная скорость граничных точек пластинки, ρ_s^* — поверхностная плотность электрического заряда, P_i — компонента заданной удельной поверхностной силы, T_{ik} и $T_{ik}^{(e)}$ — компоненты тензоров напряжения Максвелла соответственно в пластинке и в вакууме, причем

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[H_i B_k + E_i D_k - \frac{\delta_{ik}}{2}(H_j B_j + E_j D_j)\right]$$

$$T_{ik}^{(e)} = \frac{1}{4\pi}\left[H_i^{(e)} H_k^{(e)} + E_i^{(e)} E_k^{(e)} - \frac{\delta_{ik}}{2}(H_j^{(e)} H_j^{(e)} + E_j^{(e)} E_j^{(e)})\right] \tag{1.8}$$

Используя закон движения (1.1) и переходя от переменных Эйлера ξ_i, t к переменным Лагранжа x_i, t [3, 4], из (1.2)—(1.7) получим следующие основные уравнения и граничные условия магнитоупругости в переменных Лагранжа [9—12].

Во внутренней области недеформированной пластинки:

уравнения Максвелла—

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\partial \bar H_k}{\partial x_j} = \frac{4\pi}{c}\bar j_i, \quad \frac{\partial \bar B_k}{\partial x_k} = 0, \quad \varepsilon_{ijk}\frac{\partial \bar E_k}{\partial x_j} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar B_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial \bar D_k}{\partial x_k} = 4\pi\rho_e \tag{1.9}$$

материальные соотношения электромагнитного поля—

$$\bar j_i = \sigma\left(\bar E_i + \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}\beta_{mj}\frac{\partial u_m}{\partial t}\bar B_k\right), \quad \bar B_i = \mu\bar H_i - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\varepsilon_{ijk}\beta_{mj}\frac{\partial u_m}{\partial t}\bar E_k \tag{1.10}$$

$$\tilde{D}_i = \varepsilon\tilde{E}_i + \frac{\varepsilon\mu-1}{c}\epsilon_{ijk}\beta_{mj}\frac{\partial u_m}{\partial t}\tilde{H}_k$$

уравнения движения—

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\beta_{jk}\bar{\sigma}_{ki}) + \frac{1}{c}\epsilon_{kjm}\beta_{nk}j_n B_m = \rho\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \qquad (1.11)$$

физические соотношения (закон Гука)—

$$\bar{\sigma}_{ik} = \frac{\partial W}{\partial\gamma_{ik}} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ik}\gamma_{mm} + \frac{E}{1+\nu}\gamma_{ik} \qquad (1.12)$$

геометрические соотношения—

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \qquad (1.13)$$

граничные условия на поверхности S недеформированной пластинки:

для электромагнитных величин—

$$\epsilon_{ijk}n_j(\tilde{H}_k^{(e)} - \tilde{H}_k) = -\frac{1}{c}n_j\frac{\partial u_m}{\partial t}\beta_{mj}(\tilde{D}_i^{(e)} - \tilde{D}_i)$$

$$\epsilon_{ijk}n_j(\tilde{E}_k^{(e)} - \tilde{E}_k) = \frac{1}{c}n_j\frac{\partial u_m}{\partial t}\beta_{mj}(\tilde{B}_i^{(e)} - \tilde{B}_i) \qquad (1.14)$$

$$n_j(\tilde{B}_j^{(e)} - \tilde{B}_j) = 0, \quad n_j(\tilde{D}_j^{(e)} - \tilde{D}_j) = 4\pi\sigma_s^*$$

для компонент суммарных тензоров напряжений—

$$n_j\beta_{im}(\bar{\sigma}_{mj} + \bar{T}_{mj}) = P_i + n_j\beta_{im}\bar{T}_{mj}^{(e)} \qquad (1.15)$$

В соотношениях (1.9)—(1.15) γ_{ij}—компонента тензора деформации Грина, $\bar{\sigma}_{mj}$—компонента тензора напряжений Кирхгофа (тензора обобщенных напряжений), n_i—компонента единичной нормалы к недеформированной поверхности пластинки. Кроме того, здесь приняты следующие обозначения:

$$\tilde{A}_i = A_k\beta_{ki}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \beta_{mi}\beta_{kj}\sigma_{mk}$$

$$\bar{T}_{ij} = \beta_{mi}\beta_{kj}T_{mk} = \frac{1}{4\pi}\left[\tilde{H}_i\tilde{B}_j + \tilde{E}_i\tilde{D}_j - \frac{\delta_{ij}}{2}(\tilde{E}_p\tilde{D}_p + \tilde{H}_p\tilde{B}_p)\right]$$

$$(1.16)$$

$$\bar{T}_{ij}^{(e)} = \beta_{mi}\beta_{kj}T_{mk}^{(e)} = \frac{1}{4\pi}\left[\tilde{H}_i^{(e)}\tilde{H}_j^{(e)} + \tilde{E}_i^{(e)}\tilde{E}_j^{(e)} - \frac{\delta_{ij}}{2}(\tilde{E}_p^{(e)}\tilde{E}_p^{(e)} + \tilde{H}_p^{(e)}\tilde{H}_p^{(e)})\right]$$

где под $\tilde{A}_i$ и A_i понимается любая из следующих пар величин:

$\tilde{H}_i, H_i$; $\tilde{E}_i, E_i$; $\tilde{B}_i, B_i$; $\tilde{D}_i, D_i$; $\tilde{E}_i^{(e)}, E_i^{(e)}$; $\tilde{H}_i^{(e)}, H_i^{(e)}$; $\tilde{B}_i^{(e)}, B_i^{(e)}$; $\tilde{D}_i^{(e)}, D_i^{(e)}$; $\tilde{j}_i, j_i$

Следует отметить, что основные уравнения и поверхностные условия (1.9) — (1.16) были получены на основе допущений теории малых деформаций. Согласно этой теории удлинения и сдвиги (компоненты деформации γ_{ij}) пренебрегаются по сравнению с единицей. Это допущение дает возможность не принимать во внимание различия между длинами, площадями и объемами до и после деформации при составлении уравнений и поверхностных условий. Кроме того, при этих допущениях, единичные векторы $\vec{e}_i$ сопутствующей материальной системы координат (криволинейная подвижная система координат Лагранжа) следует считать взаимноперпендикулярными. Совокупность этих векторов в каждой точке среды образует триедр декартовых осей, повернутый по отношению к единичным векторам $\vec{i}_j$ неподвижной системы координат $OX_1X_2X_3$ в соответствии с поворотом, получаемым в результате деформации окрестностью рассматриваемой точки среды [3]. При этом связь между векторами $\vec{e}_i$ и $\vec{i}_j$ дается приближенной формулой

$$\vec{e}_i = \beta_{ij}\vec{i}_j = \alpha_{ji}\vec{i}_j \tag{1.17}$$

где $\alpha_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$ —компонента градиента деформации Эйлера. Согласно (1.17) любой вектор можно представить в виде

$$\vec{A} = A_k\vec{i}_k = \bar{A}_k\vec{e}_k \tag{1.18}$$

из чего следует, что величины, отмеченные знаком (—), представляют собой компоненты соответствующих векторов в сопутствующей системе координат.

Используя замену переменных (1.2) и учитывая, что отображающие функции $u_i^{(e)}$ внешней области выражаются деформациями граничной поверхности пластинки, из (1.5) получаем уравнения электродинамики во внешней области в переменных x_i, t в следующем виде (при этом учитывается малость компонентов деформации границы пластинки):

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\partial \bar{H}_k^{(e)}}{\partial x_j} = \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{E}_i^{(e)}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \bar{H}_k^{(e)}}{\partial x_k} = 0$$

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\partial \bar{E}_k^{(e)}}{\partial x_j} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{H}_i^{(e)}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \bar{E}_k^{(e)}}{\partial x_k} = 0 \tag{1.19}$$

Наконец, отметим, что в уравнениях Максвелла в форме (1.9) и (1.10) не учтены члены, связанные с конвективными производными характеристик электромагнитного поля. Эффекты этих членов в случае проводящих твердых сред при изучении колебаний и распространения волн малы и при определении характеристик электромагнитного поля ими можно пренебречь [11, 12].

§ 2. В дальнейшем для простоты выкладок будем принимать, что невозмущенное магнитное поле постоянное, а магнитные и диэлектрические проницаемости материала пластинки равны единице ($\mu=1$, $\varepsilon=1$).

Характеристики возмущенного электромагнитного поля представим в виде

$$\bar{H}_i = H_{0i} + h_i^{*}, \quad \bar{E}_i - \bar{e}_i = e_i^{*} \tag{2.1}$$

где величины, отмеченные знаком $(\ast)$, представляют собой разность нормальных и тангенциальных компонент электромагнитного поля текущего и начального состояний, то есть эти величины являются возмущениями нормальных и тангенциальных компонент соответствующих векторов.

Аналогичное представление электромагнитного поля принимается также во внешней области

$$\bar{H}_i^{(e)} = H_{0i} + h_i^{(e)*}, \quad \bar{E}_i^{(e)} - \bar{e}_i^{(e)} = e_i^{(e)*}$$

Для приведения трехмерной задачи магнитоупругости тонких пластинок к двумерной примем гипотезу магнитоупругости тонких тел [1, 2], согласно которой:

а) нормальный к срединной плоскости прямолинейный элемент пластинки после деформации остается прямолинейным, нормальным к деформированной срединной поверхности пластинки и сохраняет свою длину;

б) возмущения тангенциальных компонент вектора напряженности электрического поля и возмущение нормальной компоненты вектора напряженности магнитного поля по толщине пластинки остаются неизменными.

Сформулированные гипотезы аналитически представляются следующим образом [1, 2]:

$$u_1 = u - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2 = v - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad u_3 = w(x_1, x_2, t) \tag{2.2}$$

$$e_1^{*} = \varphi(x_1, x_2, t), \quad e_2^{*} = \psi(x_1, x_2, t), \quad h_3^{*} = f(x_1, x_2, t) \tag{2.3}$$

где $u=u(x_1, x_2, t)$, $v=v(x_1, x_2, t)$, $w=w(x_1, x_2, t)$ — искомые перемещения срединной плоскости пластинки, φ, ψ, f — искомые функции возмущенного электромагнитного поля. В этих соотношениях точка (x_1, x_2, x_3) изменяется в пределах области Ω_0, где Ω_0 — область, занимаемая пластинкой в недеформированном состоянии.

Отметим, что перемещения пластинки, вообще говоря, выражаются формулами (2.2), если малы не только деформации (удлинения и сдвиги), но и углы поворота. При этом углы поворота, будучи малыми по сравнению с единицей, могут значительно превосходить удлинения и сдвиги, а прогибы могут быть сравнимы с толщиной пластинки [3, 13].

Из уравнений (1.9), (1.10), согласно (2.1), (2.2) и (2.3), получим

$$\frac{\partial h_1^*}{\partial x_3}-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}h_1^*=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{4\pi\sigma}{c}\Big[\psi+\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{H_{03}+f}{c}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}-$$
$$-x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial t}\Big)\Big] \tag{2.4}$$
$$\frac{\partial h_2^*}{\partial x_3}-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}h_2^*=\frac{\partial f}{\partial x_2}-\frac{4\pi\sigma}{c}\Big[\varphi-\frac{H_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{H_{03}+f}{c}\Big(\frac{\partial v}{\partial t}-$$
$$-x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_2\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial t}\Big)\Big]$$

Интегрируя неоднородные линейные дифференциальные уравнения (2.4) и удовлетворяя поверхностным условиям

$$h_1^*=h_1^{(e)*}=h_1^{\pm};\quad h_2^*=h_2^{(e)*}=h_2^{\pm}\quad \text{при}\quad x_3=\pm h \tag{2.5}$$

определяем возмущения тангенциальных компонент магнитного поля h_1^* и h_2^*. В их выражения входит функция $(\mathrm{ch}\,\tau)^{-1}\exp(x_3h^{-1}\tau)$, где $\tau=\dfrac{4\pi\sigma h}{c^2}\dfrac{\partial w}{\partial t}$. Для тонких пластинок безразмерная величина τ намного меньше единицы. Разлагая указанную функцию в ряд по степеням малого параметра τ и ограничиваясь членами не выше второй степени, для h_1^* и h_2^* окончательно получим

$$h_1^*=\frac{h_1^++h_1^-}{2}+x_3\Big\{\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{4\pi\sigma}{c}\Big[\psi+\frac{1}{c}\Big(H_{01}+\frac{h_1^++h_1^-}{2}\Big)\frac{\partial w}{\partial t}-$$
$$-\frac{H_{03}}{c}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial t}\Big)-\frac{f}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\Big]\Big\}+\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{x_3^2-h^2}{2}\Big\{(H_{03}+f)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial t}+$$
$$+\Big[\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{4\pi\sigma}{c}\Big(\psi+\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\Big)\Big]\frac{\partial w}{\partial t}\Big\} \tag{2.6}$$
$$h_2^*=\frac{h_2^++h_2^-}{2}+x_3\Big\{\frac{\partial f}{\partial x_2}-\frac{4\pi\sigma}{c}\Big[\varphi-\frac{1}{c}\Big(H_{02}+\frac{h_2^++h_2^-}{2}\Big)\frac{\partial w}{\partial t}+$$
$$+\frac{H_{03}}{c}\Big(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial t}\Big)+\frac{f}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\Big]\Big\}+\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{x_3^2-h^2}{2}\Big\{(H_{03}+f)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2\partial t}+$$
$$+\Big[\frac{\partial f}{\partial x_2}-\frac{4\pi\sigma}{c}\Big(\varphi-\frac{H_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\Big)\Big]\frac{\partial w}{\partial t}\Big\}$$

В выражениях (2.6) и в дальнейшем отброшены нелинейные члены выше второго порядка малости.

Из (1.9), в силу (1.10), (2.1), (2.2) и (2.3), для возмущения нормальной компоненты вектора напряженности электрического поля e_3^* найдем

$$e_3^*=\frac{c}{4\pi\sigma}\Big\{\frac{\partial h_2^*}{\partial x_1}-\frac{\partial h_1^*}{\partial x_2}-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial t}-x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial t}\Big)(H_{02}+h_2^*)-$$
$$-\Big(\frac{\partial v}{\partial t}-x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_2\partial t}\Big)(H_{01}+h_1^*)+\frac{\partial w}{\partial t}\Big(H_{02}\frac{\partial w}{\partial x_1}-H_{01}\frac{\partial w}{\partial x_2}\Big)\Big]\Big\} \tag{2.7}$$

Таким образом, возмущения всех компонент электромагнитного поля представлены с помощью формул (2.6) и (2.7) посредством шести искомых функций u, v, w, φ, ψ, f и значениями возмущений тангенциальных компонент магнитного поля $h_1^{\pm}$ и $h_2^{\pm}$ на поверхностях пластинки.

При удовлетворении поверхностных условий (2.5), кроме выражений (2.6), получаются также следующие два уравнения относительно искомых функций:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\psi+\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{H_{01}+f}{c}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial t}\right)+ \\
+\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{h_1^{+}+h_1^{-}}{2}\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{h_1^{+}-h_1^{-}}{2h} \qquad (2.8) \\
\frac{\partial f}{\partial x_2}-\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\varphi-\frac{H_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{H_{03}+f}{c}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial t}\right)+ \\
+\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{h_2^{+}+h_2^{-}}{2}\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{h_2^{+}-h_2^{-}}{2h}
\end{gathered}
$$

Подставляя (2.3) в седьмое уравнение системы (1.9), получим еще одно уравнение относительно основных искомых функций

$$
\frac{\partial\psi}{\partial x_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}=0 \qquad (2.9)
$$

Согласно (2.2), (2.3) из (1.12) и (1.13), в пределах принятых допущений, получим известные соотношения [13]

$$
\begin{gathered}
\tilde{\sigma}_{11}=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial v}{\partial x_2}-x_3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2\right] \\
\tilde{\sigma}_{22}=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial v}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial u}{\partial x_1}-x_3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2+\frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2\right] \\
\tilde{\sigma}_{12}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial x_1}-2x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right] \qquad (2.10)
\end{gathered}
$$

Из первых двух уравнений системы (1.11), в силу (2.2), (2.3) и (2.10), с учетом граничного условия (1.15) на поверхности пластинки (при $P_1=P_2=0$) определяем касательные напряжения $\tilde{\sigma}_{13}$ и $\tilde{\sigma}_{23}$ (в тексте их выражения не приведены), а также получаем следующие два уравнения:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+ \\
+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{\sigma(1-\nu^2)}{cE}\left[H_{03}\left(\psi+\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\right. \\
+f\left(\psi+\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{2H_{03}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\frac{H_{03}}{c}\frac{h_1^{+}+h_1^{-}}{2}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial t}-
\end{gathered}
$$

$$-H_{03}\left(\varphi-\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right)\frac{\partial w}{\partial x_1}+H_{01}\left(\psi+\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial w}{\partial x_2}\Bigg]-$$

$$-\frac{4\pi\sigma h^2}{3c^2}H_{03}\left(\psi-\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2\partial t}=\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\tag{2.11}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+$$

$$+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-\frac{\sigma(1-\nu^2)}{cE}\Bigg[H_{03}\left(\varphi-\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)+$$

$$+f\left(\varphi-\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{2H_{03}}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right)-\frac{H_{03}}{c}\frac{h_2^++h_2^-}{2}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{H_{03}^2}{c}\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial t}+$$

$$+H_{03}\left(\varphi-\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right)\frac{\partial w}{\partial x_2}-H_{03}\left(\psi+\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial w}{\partial x_2}\Bigg]-$$

$$-\frac{4\pi\sigma h^2}{3c^2}H_{03}\left(\varphi+\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial t}\right)=\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Остается удовлетворить третьему уравнению системы (1.11). Подставляя (2.10) и найденные выражения для $\bar{\sigma}_{13}$, $\bar{\sigma}_{23}$ в указанное уравнение и интегрируя по x_3 в пределах от $x_3=-h$ до $x_3=h$, с учетом (1.10), (2.2), (2.3) и третьего условия (1.15), получим

$$D\Delta^2 w+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{2Eh}{1-\nu^2}\Bigg\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Bigg[\frac{\partial w}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)+$$

$$+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)\Bigg]+\frac{\partial}{\partial x_2}\Bigg[\frac{\partial w}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+$$

$$+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)\Bigg]\Bigg\}-\frac{2h^3\sigma}{3c^2}H_{03}^2\frac{\partial\Delta w}{\partial t}+$$

$$+\frac{2\sigma h}{c}\Bigg[H_{03}\left(\psi-\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)-H_{03}\left(\varphi+\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{H_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\Bigg]+$$

$$+\frac{2\sigma h}{c}\Bigg[\left(\frac{h_1^++h_1^-}{2}-H_{03}\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)\left(\psi-\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{2H_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\left(\frac{h_2^++h_2^-}{2}-\right.$$

$$\left.-H_{03}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)\left(\varphi+\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{2H_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\frac{f}{c}\left(H_{02}\frac{\partial v}{\partial t}+H_{01}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg]-$$

$$-\frac{2\sigma h^3}{3c^2}H_{03}\Bigg[\left(\Delta f-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial w}{\partial t}+2\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2\partial t}+\right.$$

$$\left.+f\frac{\partial\Delta w}{\partial t}\right)\Bigg]=P_3 \tag{2.12}$$

При получении (2.11) и (2.12) было учтено условие равенства нулю нормальной (к деформированной поверхности пластинки) составляющей плотности тока при $x_3=\pm h$.

Таким образом, система трехмерных уравнений внутренней задачи нелинейной теории магнитоупругости тонких пластинок на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел (2.2), (2.3), как и в линейном случае [1], свелась к интегрированию шести двумерных дифференциальных уравнений (2.8), (2.9), (2.11), (2.12) относительно основных искомых функций u, v, w, φ, ψ, f.

§ 3. В двумерные уравнения магнитоупругости тонких пластинок, полученные в предыдущем пункте, входят неизвестные граничные значения $h_1^{\pm}$, $h_2^{\pm}$ возмущений тангенциальных компонент магнитного поля на поверхностях пластинки $x_3=\pm h$. Поэтому полученные уравнения необходимо рассматривать совместно с трехмерными уравнениями (1.5) или (1.19) для среды, окружающей пластинку, при общих граничных условиях (1.4) или (1.14) на поверхности раздела двух сред. Сказанное означает, что задача магнитоупругости в целом остается трехмерной. В работах [5, 14, 15], исходя из основных положений гипотезы магнитоупругости тонких тел, линейная трехмерная задача магнитоупругости тонких пластинок сведена к двумерной. Здесь, при помощи гипотезы магнитоупругости тонких тел и предположения, что влиянием токов смещения на характеристики колебания пластинки можно пренебречь, аналогично работе [15], определяются указанные граничные значения и на основе этого получается замкнутая двумерная система нелинейных уравнений магнитоупругости тонких пластинок с соответствующими граничными условиями.

Согласно работе [15], будем принимать, что соотношения (2.3) имеют место во всем слое $\Omega(\Omega: |x_3|<h,\ -\infty<x_i<+\infty\ (i=1, 2))$. То есть, вместо (2.3) принимаются следующие соотношения:

$$\left.\begin{array}{c} e_1^*=\varphi(x_1, x_2, t), \quad e_2^*=\psi(x_1, x_2, t), \\ h_3^*=f(x_1, x_2, t), \end{array}\right| \text{ при } (x_1, x_2, x_3)\in\Omega_0$$

$$\left.\begin{array}{c} e_1^{(e)*}=\varphi(x_1, x_2, t), \quad e_2^{(e)*}=\psi(x_1, x_2, t), \\ h_3^{(e)*}=f(x_1, x_2, t), \end{array}\right\} \text{ при } (x_1, x_2, x_3)\in\Omega\setminus\Omega_0 \tag{3.1}$$

Принимая (3.1) и поступая аналогичным образом как при получении уравнений (2.8), (2.9), определяем остальные компоненты электромагнитного поля в слое Ω и получаем три уравнения относительно φ, ψ, f в области $x_3=0$, $-\infty<x_i<+\infty$ $(i=1, 2)$. Эти уравнения имеют тот же вид, что и уравнения (2.8), (2.9), но под σ понимается следующая величина:

$$\sigma^*=\begin{cases} \sigma & \text{при } (x_1, x_2, 0)\in\Omega_0 \\ 0 & \text{при } (x_1, x_2, 0)\in\Omega\setminus\Omega_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Перейдем к определению граничных значений $h_1^{\pm}$ и $h_2^{\pm}$ на плоскостях $x_3=\pm h$, $-\infty<x_i<+\infty$ $(i=1, 2)$. Их определяем, решая уравнения

$$\epsilon_{ijk}\frac{\partial h_k^{(e)*}}{\partial x_j}=0, \qquad \frac{\partial h_k^{(e)*}}{\partial x_k}=0 \tag{3.3}$$

в областях $|x_3|>h$ при следующих граничных условиях:

$$h_3^{(e)\pm}\big|_{x_3=\pm h} = f(x_1, x_2, t) \tag{3.4}$$

Введя потенциальную функцию $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$ посредством

$$h_i^{(e)\pm} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \tag{3.5}$$

задачу определения $h_i^{(e)}$ вне слоя $|x_3|<h$, согласно (3.3)–(3.5), приводим к решению следующих задач Неймана в полупространствах $|x_3|>h$:

$$\Delta\Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=\pm h} = f \tag{3.6}$$

Решения задач (3.6) имеют вид (здесь верхний знак берется для $x_3>h$, нижний—для $x_3<-h$):

$$\Phi = \mp \frac{1}{2\pi} \int\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x_1', x_2', t)\, dx_1' dx_2'}{[(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3\mp h)^2]^{1/2}} \tag{3.7}$$

Из (3.7) в силу (3.5) и поверхностного условия (2.5) найдем

$$h_i^{\pm} = \mp \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \int\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x_1', x_2', t) dx_1' dx_2'}{[(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2]^{1/2}} \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в (2.8)–(2.12), получим замкнутую разрешающую систему уравнений относительно искомых функций u, v, w, φ, ψ, f. При этом интегральный оператор (3.8) будет входить только в уравнения (2.8), так как согласно (3.8), $h_i^+ + h_i^- = 0$ $(i=1, 2)$.

Таким образом, задача нелинейных магнитоупругих колебаний тонких пластинок свелась к решению системы двумерных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений при обычных условиях закрепления краев пластинки и условиях затухания возмущений на бесконечности $(r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to \infty)$.

ԲԱՐԱԿ ԷԼԵԿՏՐԱՀԱՂՈՐԴԻՉ ՍԱԼԵՐԻ ՈՉԳԾԱՅԻՆ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԵՎ ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, Զ. Ն. ԴԱՆՈՅԱՆ

Ամփոփում

Ոչգծային մագնիսաառաձգականության տեսության հիմնական դրույթների և բարակ մարմինների մագնիսաառաձգականության վարկածների հիման վրա դուրս են բերված մագնիսական դաշտում գտնվող հաղորդիչ բարակ սալերի ոչգծային մագնիսաառաձգական տատանումների հիմնական հավասարումները և առնչությունները։

THE BASIC EQUATIONS AND RELATIONS OF NONLINEAR MAGNETOELASTIC VIBRATIONS OF THIN ELECTROCONDUCTING PLATES

G. E. BAGDASARIAN, Z. N. DANOYAN

S u m m a r y

In the paper, by means of the basic statements of nonlinear magnetoelasticity theory and the hypothesis of magnetoelasticity of thin bodies, the basic equations and relations of nonlinear magnetoelastic vibrations of thin electroconducting plates in a magnetic field are deduced.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки.—ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек и пластин.—ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
3. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. М.—Л.: Гостехиздат, 1948.
4. *Бленд Д.* Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972.
5. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977.
6. *Селезов И. Т., Селезова Л. В.* Волны в магнитогидроупругих средах. Киев: Наукова думка, 1975.
7. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф.* Магнитотермоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1982.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957.
9. *Bazer J., Ericson W. B.* Nonlinear wave motion in magnetoelasticity. — Arch. Ration. Mech. and Anal., 1974, 55, № 2.
10. *Walker J. B., Pipkin A. C., Rivlin R. S.* Maxwell's equations in a deformed body.—Accad. Naz. Lincei. Ser. 8, 1965, 38, № 5.
11. *Thurston R. N.* Waves in solids. In: Handbuch der Physik. Berlin: Springer, 1960, v. VI/a.
12. *Махорт Ф. Г.* О теории деформирования поляризирующихся и намагничивающихся тел.—ПМ, 1980, 16, № 3.
13. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
14. *Белубекян М. В.* К задаче колебаний токонесущих пластинок.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. 28, № 2.
15. *Багдасарян Г. Е.* О приведении трехмерной задачи магнитоупругости тонких пластин к двумерной.—Ученые записки ЕрГУ, 1977, № 2.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
2.IV.1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVIII, № 2, 1985 Механика

УДК 593.3

ОБ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЯХ МЕХАНИКИ РАЗНОМОДУЛЬНЫХ ТЕЛ

ЛОМАКИН Е. В., СВЕКЛО В. А., ЧЕРНЫШОВ О. А.

В работе [1] получены соотношения между деформациями и напряжениями для изотропных упругих тел, сопротивление которых зависит от вида напряженного состояния. Это свойство для краткости обозначено термином «разномодульность», под которым у некоторых других авторов понималось различие упругих характеристик материла только при одноосных растяжении и сжатии [2]. Соотношения [1] были получены из условия существования упругого потенциала, имеющего такой же вид, как и потенциал для классического упругого тела, но константы которого зависят от вида напряженного состояния. При этом в качестве параметра вида напряженного состояния был выбран параметр $\xi=\sigma/\sigma_0$, где σ —среднее напряжение, σ_0—интенсивность напряжений. В общем случае параметр ξ мог принимать значения от $-\infty$ до $+\infty$.

В данной работе продолжается рассмотрение вопросов, связанных с исследованием определяющих соотношений механики разномодульных тел. В частности, на конечных интервалах изменения аргументов строятся определяющие функции деформированного и напряженного состояния среды. Устанавливается взаимно-однозначное соответствие между ними. Указывается достаточное условие единственности решения основных краевых задач.

1°. При построении зависимостей между напряжениями и деформациями упругого изотропного тела, сопротивление которого зависит от вида напряженного состояния, исходим из следующих допущений:

1. Упругий потенциал среды W зависит только от первых двух инвариантов тензора деформации

$$W=W(J_1, J_2), \quad J_1=3\varepsilon, \quad J_2=\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}=3\varepsilon^2+\frac{3}{2}\varepsilon_0^2 \tag{1.1}$$

Здесь $\varepsilon=1/3\,\varepsilon_{ii}$— средняя деформация,

$$\varepsilon_0=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2+(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{33})^2+(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33})^2+6\varepsilon_{12}^2+6\varepsilon_{23}^2+6\varepsilon_{13}^2}$$

— интенсивность тензора деформаций.

2. Упругий потенциал W удовлетворяет равенству

$$J_1 \frac{\partial W}{\partial J_1} + J_2^0 \frac{\partial W}{\partial J_2^0} = 2W, \quad J_2^0 = \sqrt{J_2} \tag{1.2}$$

Допущения 1, 2 вполне естественны, они выполняются для классического упругого изотропного тела. Допущение 2 обобщает свойство однородности потенциала W в классическом случае.

Для малых деформаций W является функцией шести независимых компонент тензора деформаций $\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$. При неучете тепловых эффектов имеем

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}, \quad e_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_{ij} & (i = j) \\ 2\varepsilon_{ij} & (i \neq j) \end{cases}$$

что в соответствии с допущением 1 позволяет установить общий вид связи между компонентами тензоров напряжений и деформаций

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial J_1} \delta_{ij} + \frac{1}{J_2^0} \frac{\partial W}{\partial J_2^0} \varepsilon_{ij} \tag{1.3}$$

или

$$\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = \frac{1}{J_2^0} \frac{\partial W}{\partial J_2^0} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}), \quad \sigma = \frac{\partial W}{\partial J_1} + \frac{1}{J_2^0} \frac{\partial W}{\partial J_2^0}, \quad \varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon_{ii} \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует, что в рассматриваемой среде главные направления тензоров напряжения и деформации совпадают.

Рассматривая (1.2) как дифференциальное уравнение с частными производными для функции W, запишем его общее решение

$$W = \varphi(\eta)(J_2^0)^2, \quad \eta = \frac{J_1}{J_2^0} \tag{1.5}$$

Здесь $\varphi(\eta)$—произвольная достаточное число раз дифференцируемая функция. По смыслу левой части равенства (1.5) $\varphi(\eta) > 0$ для всех возможных значений аргумента. Последний назовем параметром, а $\varphi(\eta)$—функцией вида деформированного состояния среды. Согласно (1.1) имеем $9/2\,\varepsilon_0^2 = (3 - \eta^2)(J_2^0)^2$. Откуда следует, что для всех видов деформированного состояния $\eta^2 \leq 3$.

Вычисляя производные от W в равенстве (1.3), получим

$$\sigma_{ij} = J_2^0 \varphi'(\eta)\delta_{ij} + \chi(\eta)\varepsilon_{ij}, \quad \chi(\eta) = 2\varphi(\eta) - \eta\varphi'(\eta) \tag{1.6}$$

что равносильно равенствам

$$\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = \chi(\eta)(\varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}), \quad 3\sigma = I_1 = 3\varphi'(\eta)J_2^0 + \chi(\eta)J_1 \tag{1.7}$$

Из (1.6) следует

$$\sigma_{ij} = \chi(\eta)\varepsilon_{ij} \quad (i \neq j)$$

Отсюда получаем еще одно ограничение на функцию $\psi(\eta)$,

$$\chi(\eta)=2\psi(\eta)-\eta\psi'(\eta)>0$$

для всех $\eta^2\leqslant 3$.

Рассмотрим сумму

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}=\sigma_{11}\varepsilon_{11}+\sigma_{22}\varepsilon_{22}+\sigma_{33}\varepsilon_{33}+2\sigma_{12}\varepsilon_{12}+2\sigma_{23}\varepsilon_{23}+2\sigma_{13}\varepsilon_{13}$$

Пользуясь (1.6), получим формулу Клапейрона

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}=\psi' J_1 J_2^0+\chi(J_2^0)^2=(\psi'\eta+\chi)(J_2^0)^2=2W$$

2°. Соотношения (1.6) при некоторых дополнительных условиях позволяют выразить J_k через Π_k ($k=1, 2$). $\Pi_2=3\sigma^2+3\cdot 2\sigma_0^2$, σ_0 — интенсивность тензора напряжений. Действительно, пользуясь (1.6), получим

$$\Pi_2^0=T_\psi J_2^0,\quad \Pi_2^0=\sqrt{\Pi_2},\quad T_\psi=[(3-\eta^2)(\psi')^2+4\psi^2]^{1/2} \tag{2.1}$$

Полагая $\beta=\Pi_1/\Pi_2^0$, на основании (1.7) и (2.1) получим

$$\beta=[(3-\eta^2)\psi'+2\eta\psi]T_\psi^{-1} \tag{2.2}$$

Равенство (2.2) определяет η как неявную функцию на промежутке $-3\leqslant\eta\leqslant 3$. Имеем

$$\frac{d\beta}{d\eta}=\chi\frac{2\psi\chi+(3-\eta^2)[2\psi\psi''-(\psi')^2]}{T_\psi^3} \tag{2.3}$$

При условии неравенства нулю числителя правой части (2.3) η является однозначной функцией β, то есть отношения Π_1/Π_2^0. Таким образом, инварианты J_k однозначно выражаются через Π_k ($k=1, 2$). Вычислим, рассматривая W как функцию только Π_k, левую часть равенства (1.2)

$$J_1\frac{\partial W}{\partial J_1}+J_2^0\frac{\partial W}{\partial J_2^0}=\left(J_1\frac{\partial\Pi_1}{\partial J_1}+J_2^0\frac{\partial\Pi_1}{\partial J_2^0}\right)\frac{\partial W}{\partial\Pi_1}+\left(J_1\frac{\partial\Pi_2^0}{\partial J_1}+J_2^0\frac{\partial\Pi_2^0}{\partial J_2^0}\right)\frac{\partial W}{\partial\Pi_2^0}$$

Легко проверить с помощью (1.6), что коэффициенты при $\partial W/\partial\Pi_1$, $\partial W/\partial\Pi_2^0$ равны, соответственно, Π_1 и Π_2. Таким образом, приходим к равенству

$$\Pi_1\frac{\partial W}{\partial\Pi_1}+\Pi_2^0\frac{\partial W}{\partial\Pi_2^0}=2W$$

Отсюда, аналогично рассмотренному выше, находим

$$W=\varphi(\beta)(\Pi_2^0)^2,\quad \beta=\Pi_1/\Pi_2^0 \tag{2.4}$$

Здесь $\varphi(\beta)$ — произвольная достаточное число раз дифференцируемая функция. Для всех отличных от нуля напряженных состояний среды $\Pi_2>0$, $\sigma_0=\sqrt{2}\sqrt{3-\beta^2}\,\Pi_2^0/3>0$. Поэтому $\beta^2\leqslant 3$. Из (2.4) следует, что функция $\varphi(\beta)$, как и функция $\chi(\eta)$, должна удовлетворять условию $\varphi(\beta)>0$ для всех $\beta^2\leqslant 3$.

Поскольку для рассматриваемой среды справедлива формула Клапейрона, то справедливы и равенства [3]

$$e_{ij}=\frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} \tag{2.5}$$

Из (2.4) и (2.5) следует

$$e_{ij}=\varphi' \Pi_2^0 S_{ij}+\omega(\beta)\sigma_{ij}, \quad \omega(\beta)=2\varphi(\beta)-3\varphi'(\beta)>0$$

или

$$e_{ij}-e\delta_{ij}=\omega(\beta)(\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij}), \quad J_1=3\varphi'(\beta)\Pi_2^0+\omega(\beta)\Pi_1 \tag{2.6}$$

Отметим, что параметр $\beta=\Pi_1/\Pi_2^0$ имеет некоторые преимущества перед $\xi=\sigma/\sigma_0$, использованном в [1], поскольку ограничения, накладываемые на функцию $\varphi(\beta)$, должны выполняться только на отрезке $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, а не на всей прямой, как было бы при использовании параметра ξ.

3. Напряженно-деформированное состояние рассматриваемой среды можно выразить либо с помощью функции $\varphi(\beta)$, либо $\psi(\eta)$. Между ними имеется связь. Действительно, зная функцию $\varphi(\beta)$, легко находим

$$\psi(\eta)=\varphi(\beta)T_\varphi^{-1}, \quad \eta=[(3-\beta^2)\varphi'+2\beta\varphi]T_\varphi^{-1}, \quad T_\varphi=[(3-\beta^2)(\varphi')^2+4\varphi^2]^{1/2} \tag{3.1}$$

т. е. имеем параметрическое задание функции $\psi(\eta)$, определяющей зависимость упругого потенциала W от компонент тензора деформаций.

Из (3.1) вытекает равенство

$$\psi'(\eta)=-\varphi'(\beta)\omega^{-1}(\beta)T_\varphi^{-1} \tag{3.2}$$

Здесь в левой части производная берется по η, а в правой части — по переменной β.

На основании (3.1) и (3.2) нетрудно убедиться, что

$$\chi(\eta)\omega(\beta)=1 \tag{3.3}$$

Поэтому из неравенств $\varphi(\beta)>0$, $\omega(\beta)>0$ следуют неравенства $\psi(\eta)>0$, $\chi(\eta)>0$ и наоборот. Покажем теперь, что из соотношений (1.7) вытекают соотношения (2.6) и наоборот. Действительно, из второго соотношения (2.6) имеем

$$J_1=\chi^{-1}(\Pi_1-3\psi' J_2^0)=\omega[\Pi_1+3\varphi' J_2^0\omega^{-1}T_\varphi]=\omega\Pi_1+3\varphi'\Pi_2^0$$

Равносильность первых соотношений (1.7) и (2.6) следует из (3.3). Таким образом, напряженно-деформированное состояние может быть описано либо с помощью потенциала (1.5), либо—(2.4).

Поскольку из (2.6) следует, что $\tau_0 = \omega(\beta)\sigma_0$, то для определения вида функции $\omega(\beta)$ может быть использована методика, указанная в работе [1]. Укажем лишь, что если $\omega(\beta) = \mathrm{const}$, то $\varphi = A + B\beta^2$, A, B—постоянные, и мы получим

$$W = A\Pi_1^2 + B\Pi_2$$

то есть классический потенциал, который является одним из частных решений уравнения (1.2).

4°. Исследуем теперь условия единственности решения краевых задач для рассмотренной среды. Будем исходить из соотношений, полученных на основе потенциала (1.5). Соотношения между деформациями и напряжениями нелинейные, поэтому воспользоваться классическим доказательством теоремы единственности не представляется возможным. Единственность решения выполняется, если потенциал является выпуклой функцией [4, 5]. Однако, условия выпуклости потенциала (1.5) как функции шести независимых компонент тензора деформаций весьма громоздки, проверка которых может вызвать большие затруднения. Покажем, что единственность решения будет обеспечена при условии выпуклости потенциала как функции двух инвариантов J_1 и J_2. Виртуальная работа поверхностных и объемных сил представляется следующим образом [5]:

$$\int_S F_j \delta u_j dS + \int_V P_j \delta u_j dV = \int_V \frac{\partial W}{\partial e_{pq}} \delta e_{pq} dV \tag{4.1}$$

Пусть на одной поверхности тела S_1 заданы внешние напряжения, на другой S_2—перемещения

$$\sigma_{ij}\nu_j = T_i^0 \text{ на } S_1, \quad u_i = u_i^0 \text{ на } S_2 \tag{4.2}$$

Предположим, что наряду с решением σ_{ij}, u_i, удовлетворяющим граничным условиям (4.2), существует решение σ'_{ij}, u'_i, удовлетворяющее тем же граничным условиям. Причем предположим, что u_i и u'_i сколь угодно близки, то есть $u'_i = u_i + \delta u_i$. Тогда виртуальная работа поверхностных сил и объемных сил на вариациях перемещения, соответствующего разности решений u'_i и u_i для первого решения, согласно (4.1), равна

$$\int_S F_i \delta u_i dS + \int_V P_i \delta u_i dV = \int_V \left(\frac{\partial W}{\partial e_{pq}}\right)' \delta e_{pq} dV \tag{4.3}$$

но выражение, стоящее под интегралом в правой части равенства (4.3) есть удельная элементарная работа деформации δW и поскольку W является также функцией J_1 и J_2, то справедливо

$$\left(\frac{\partial W}{\partial e_{pq}}\right)' \delta e_{pq} = \left(\frac{\partial W}{\partial J_k}\right)' (\delta J_k)', \quad k=1,\ 2$$

и

$$\int\limits_S F_j \delta u_j ds + \int\limits_V P_j \delta u_j dV = \int\limits_V \left(\frac{\partial W}{\partial J_k}\right)' (\delta J_k)' dV \tag{4.4}$$

Аналогично, для второго решения имеем

$$\int\limits_S F_j \delta u_j dS + \int\limits_V P_j \delta u_j dV = \int\limits_V \left(\frac{\partial W}{\partial J_k}\right)'' (\delta J_k)'' dV \tag{4.5}$$

Покажем, что с точностью до малых более высокого порядка значения δJ_k и $\delta J_k'$ совпадают. В самом деле $\delta J_1 = \delta J_1' = {}^1/_3(\delta e_{11} + \delta e_{22} + \delta e_{33})$,

$$\delta J_2 = \frac{e_{pq}' \delta e_{pq}}{\sqrt{e_{pq}' e_{pq}'}}, \quad \delta J_2' = \frac{e_{pq}' \delta e_{pq}}{\sqrt{e_{pq} e_{pq}}}$$

Поскольку $e_{pq}' = e_{pq} + \delta e_{pq}$, то получим

$$\delta J_2' = \left| \frac{e_{pq}'}{\sqrt{e_{pq}' e_{pq}'}} + o(\delta e_{pq}) \right| \delta e_{pq}$$

Поэтому

$$\delta J_2' = \delta J_2 + o(\delta e_{pq}) \delta e_{pq}$$

Отбрасывая малые более высокого порядка, чем δe_{pq}, получим $\delta J_2' = \delta J_2$.

Составляя теперь разность выражений (4.4) и (4.5), получаем

$$\int\limits_S \Delta F_j \delta u_j dS = \int\limits_V \Delta \left(\frac{\partial W}{\partial J_k}\right) \delta J_k dV \tag{4.6}$$

Выражения в левой части равенства (4.6) тождественно равны нулю, так как $\Delta F_j = 0$ на S_1, а $\delta u_j = 0$ на S_2. Если же наложить на функцию W условия выпуклости, то подынтегральное выражение в правой части равенства (4.6) будет всегда больше нуля, что обеспечивает единственность решения.

Известно, что необходимым и достаточным условием выпуклости функции f является положительная определенность гессиана

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}$$

Находим для W

$$c_{11} = \frac{\partial^2 W}{\partial J_1^2} = \varphi'', \qquad c_{12} = \frac{\partial^2 W}{\partial J_1 \partial J_2} = -\gamma_1 \varphi'' + \varphi'$$

$$c_{22} = \frac{\partial^2 W}{\partial J_2^2} = -2\varphi' \gamma_1 + \varphi'' \gamma_1^2 + 2\varphi$$

Вычисляя главные миноры матрицы $[c_{ij}]$

$$\Delta_1=c_{11}=\psi'', \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix}=2\psi\psi''-(\psi')^2$$

и накладывая на них условия положительности, получаем достаточное условие единственности

$$\psi''>0, \quad 2\psi\psi''-(\psi')^2>0 \tag{4.7}$$

Поскольку из положительной определенности потенциала следует, что $\psi>0$, то при выполнении второго условия (4.7) первое также выполняется. Таким образом, условия единственности решения можно записать в виде

$$\psi>0, \quad 2\psi\psi''-(\psi')^2>0 \tag{4.8}$$

Заметим, что условия (4.8) являются также достаточными для взаимной однозначности между параметрами η и β, как это видно из (2.3).

В заключение отметим, что между введенным ранее параметром вида напряженного состояния ξ и использованным в данной работе параметром β существует простая зависимость $\xi=\sqrt{2}\,\beta/[3(3-\beta^2)]$. Таким образом, неограниченный интервал изменения параметра ξ сведен к конечному интервалу для параметра β. Это часто бывает полезным при проведении расчетов с помощью того или иного численного метода.

ՏԱՐԱՄՈԴՈՒԼ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ՈՐՈՇԻՉ ԿԱՊԱԿՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ե. Վ. ԼՈՄԱԿԻՆ, Վ. Ա. [illegible] և Ա. ՉԵՐՆԻՇՈՎ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում են տարամոդուլ մարմինների մեխանիկայի որոշիչ կապակցությունների հետազոտման հետ կապված հարցեր։ Քննարկվում են լարվածային վիճակի տեսքից դեֆորմացիոն բնութագրերի կախվածության նկարագրման համար տարբեր պարամետրերի օգտագործման հնարավորությունը։

Վերլուծված են առաձգականության տեսության որոշ թեորեմների կիրառելիությունը տարամոդուլ նյութերի համար։

Ստացված են եզրային խնդիրների լուծման միակության պայմանները

ON CONSTITUTIVE RELATIONS IN THE MECHANICS OF MULTIMODULUS MATERIALS

E. V. LOMAKIN, V. A. SVEKLO, O. A. CHERNYSHOV

S u m m a r y

Some problems of constitutive relations for multimodulus materials are considered. The possibilities of different parameters for the description of the dependence of deformation properties on the stress state are discussed. Some theorems referring to the theory of elasticity are analysed for multimodulus materials. The conditions of the unique solution for the boundary problem are defined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ломакин Е. В., Работнов Ю. Н.* Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела.—Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 6.
2. *Амбарцумян С. А.* Разномодульная теория упругости. М.: «Наука», 1982.
3. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. М.: «Высшая школа», 1976.
4. *Хилл.* Новые горизонты в механике твердых тел.—Механика, 1957, № 4.
5. *Хилл.* О единственности и устойчивости в теории конечных упругих деформаций.—Механика, 1958, № 3.

Калининградский технический институт рыбной промышленности и хозяйства

Поступила в редакцию 18.IV.1983.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVIII, № 2, 1985 Механика

УДК 539.43 : 620.171 3 : 678

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ УСКОРЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

САРКИСЯН Н. Е.

Существующие критерии усталостного разрушения композитных материалов (КМ) не дают возможности рассчитать прочность образца хотя бы в простейшем случае одноосного нагружения, основываясь при этом лишь на характеристиках механических свойств материала, соответствующих кратковременному нагружению.

Поэтому широкое разнообразие видов современных КМ, существенная изменяемость их усталостных свойств в зависимости от многих технологических факторов, температурно-силовых и других эксплуатационных условий, на практике вызывают необходимость проведения большого числа испытаний, требующих значительной затраты дорогостоящих материалов, средств и времени. С этой точки зрения понятен интерес, проявляемый к различным методам сокращения усталостных испытаний материалов. Эти методы, как правило, основываются на том или ином критерии разрушения, либо на корреляционной связи, устанавливаемой между изменением определенного физического параметра испытуемого образца и временем до его разрушения (долговечностью). Тем самым, все предложенные методы ускоренного испытания, в свою очередь, требуют проведения того или иного количества усталостных испытаний.

Впервые в работе [1] был предложен способ ускоренного определения долговечности полимерных КМ в области многоцикловой усталости. Методика основана на инвариантности критической температуры циклического разогрева материала от напряжения и на линейном законе роста температуры в зависимости от числа циклов нагружения. Последний наблюдается на основной (по времени) стадии выносливости испытуемого образца. Дальнейшее уточнение этого подхода, его обобщение на случаи изменения ряда других физических параметров и разработка специальной методики ускоренного определения критических значений этих параметров по испытанию одного образца для разных уровней напряжения способствовали значительному расширению области прогнозирования усталостной долговечности [2, 3]. Указанные методики дали большой эффект и успешно применяются во многих работах по определению прочности полимерных КМ.

В работах [4, 5] предложен критерий оценки циклической прочности КМ в области многоцикловой усталости, основанный на знании кривой статического нагружения «напряжение-деформация» ($\sigma \sim \varepsilon$), получаемой в идентичных условиях нагружения. При этом установлено, что наиболее близкая корреляция усталостной прочности σ существует с так называемым пределом пропорциональности σ^*, а не с пределом прочности материала $\sigma_в$ или с модулем упругости E, как это считается традиционно. В качестве напряжения σ^* принимается напряжение, соответствующее началу отклонения статической кривой $\sigma \sim \varepsilon$ от линейного участка этой зависимости. Поэтому коэффициент усталостной прочности материала определяется отношением

$$K^* = \frac{\sigma}{\sigma^*} \quad (1)$$

где при симметричном цикле нагружения величина σ^* принимается как меньшее из значений, соответствующих диаграммам статического растяжения и сжатия (при циклическом изгибе—по диаграммам статического изгиба).

Указанная выше корреляционная зависимость легла в основу разработки ускоренного метода определения анизотропии усталостной прочности полимерных КМ при симметричном цикле осевого растяжения—сжатия и плоского изгиба [5]. Метод предусматривает кратковременные статические испытания образцов, вырезанных в различных направлениях φ. Усталостные испытания проводятся для образцов только одной ориентации φ. Усталостная прочность в других направлениях вычисляется по значениям σ^*_φ в предположении постоянства коэффициента усталости K^* для всех направлений φ, рассчитанного по формуле (1). Этот метод позволил с погрешностью около 10% оценить анизотропию усталостной прочности при двух-, трехкратном сокращении объема испытаний [5].

Однако, на наш взгляд, методика [4, 5] не может быть успешно применена для целого ряда КМ, поскольку она не учитывает существенную анизотропию коэффициента прочности КМ при многоцикловом нагружении. Кроме этого, ряд КМ, имеющих однонаправленную структуру армирования, при статическом деформировании в направлении волокон вплоть до разрушения образца проявляют почти линейный характер зависимости $\sigma \sim \varepsilon$. Для этих материалов достоверный выбор напряжения σ^* усложняется и, видимо, в качестве σ^* придется принимать значение предела прочности $\sigma_в$. Это приведет к искусственному значительному снижению коэффициента усталостной прочности K^*, что затруднит объективную оценку усталостного сопротивления материала.

Рассмотрим возможность построения метода ускоренного определения усталостной прочности полимерных композитных материалов, основанного на известных временных критериях разрушения. В настоящей работе для этой цели используются теории прочности [6] и [7], выражающиеся соответственно экспоненциальной и степенной функциями напряжения и долговечности

Временная зависимость, основанная на термофлуктуационной теории прочности твердых тел, имеет вид [6]:

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{u_0 - \gamma\sigma}{kT}\right) \tag{2}$$

где τ_0—постоянная, близкая к периоду тепловых колебаний атомов;

u_0—энергия элементарного акта процесса разрушения, являющаяся для полимерных материалов энергией химических связей;

k—постоянная Больцмана;

γ—коэффициент, характеризующий структуру полимерного материала;

T—абсолютная температура среды;

τ—время разрушения.

Для условий изотермического деформирования тел, заменив время τ числом циклов до разрушения N, зависимость (2) можно представить в простейшем виде

$$\sigma = \frac{2{,}3}{\alpha}(\lg A - \lg N) \tag{3}$$

где A и α—новые параметры, выражающиеся через постоянные формулы (2) и температуру T.

Рассмотрим теорию длительной прочности полимерных материалов, основанную на принципе метода размерностей [7]. В случае симметричного растяжения—сжатия с постоянной амплитудой напряжения σ и частотой ω количество циклов до разрушения по этой теории может быть определено из общего выражения

$$N = F\left(\frac{\sigma T_g}{T}, a_T\omega\right) \tag{4}$$

где искомая функция F зависит от двух переменных—гомологической температуры T_g (в частном случае, температуры стеклования) и частоты напряжения ω.

Коэффициент времени a_T должен быть найден экспериментально по кривым ползучести при различных температурах [7].

Для большого диапазона температур и напряжений функция F аппроксимируется степенной функцией вида [7]:

$$F = C \cdot \left(\frac{T}{\sigma T_g}\right)^{\beta} \tag{5}$$

где $\beta \geqslant 1$ и C являются новыми постоянными данного материала.

Снова принимая температуру испытания T постоянной, в частности, равной осредненной по времени температуре циклического разогрева, по (4) и (5) получаем расчетную зависимость простейшего вида

$$N = B\sigma^{-\beta} \tag{6}$$

где B—новая постоянная, определяемая для конкретных условий нагружения.

Статистический анализ экспериментальных данных в большинстве работ показывает, что кривые Велера зависимости многоцикловой усталостной прочности полимерных КМ независимо от вида деформации, частоты напряжения и свойства анизотропии лучше всего описываются уравнением

$$\sigma = a - b \cdot \lg N \qquad (7)$$

где a и b—параметры, зависящие от физико-механических свойств испытуемого материала и условий циклического нагружения.

Как видно, между эмпирической формулой (7) и формулой (3), являющейся упрощением зависимости (2), нет абсолютно никакой разницы. В отличие от (6) оба эти уравнения при стремлении значения циклического напряжения к нулю дают долговечность, стремящуюся не к бесконечности, а к определенной величине. В зависимости (7) логарифм долговечности стремится к отношению $\frac{a}{b}$, которое, кстати, может служить определенной характеристикой чувствительности материала к процессу усталости.

Мы считаем, что зависимости (6) и (7), являющиеся простейшими выражениями общих закономерностей (2) и (4), могут быть успешно применены для оценки в первом приближении циклической прочности полимерных КМ. При этом имеется в виду, что эмпирические параметры a и b (или B и β) в интегральной форме неявным образом отражают все возможные изменения физико-механических свойств материала, которые несомненно имеют место в процессе длительного нагружения и обусловлены особенностями КМ и условиями испытания.

Предлагаемый нами способ сокращения объема испытаний фактически является одним из возможных методов ускорения усталостных испытаний. Этот способ основывается на экспериментальном определении значений параметров a и b (или B и β) путем построения лишь начального участка кривой Велера $\sigma \sim \lg N$.

Как известно, мало- и многоцикловая усталость материалов определяется существенными различиями в механизмах разрушения. Поэтому, очевидно, значения указанных выше параметров должны быть определены отдельно для каждого вида усталости.

Для расчета циклической прочности в области малоцикловой усталости КМ при определении параметров формул (6) и (7) кратковременные испытания рекомендуется проводить при возможно высоких значениях циклического напряжения.

Известно, что кривая многоцикловой усталостной прочности полимерных КМ чаще всего описывается одним участком линейной зависимости (7). Появление начального по отношению к нему линейного участка, имеющего больший уклон в системе координат (σ, $\lg N$), менее характерно. Как известно, этот промежуточный участок отражает изменения в механизме разрушения, происходящие при переходе малоцикловой усталости к многоцикловой. Протяженность этого участка кривой Велера для полимерных КМ обычно не превышает нескольких десятков тысяч циклов. Поэтому для расчета многоцикловой усталости нами рекомендуется циклические напряжения выбирать такими, чтобы соответствующие долговечности оказались примерно в диапазоне от 20—30 тысяч до 100 тысяч циклов, то есть за пределами возможной стадии перехода между мало- и многоцикловой усталостью.

Для двух задаваемых значений напряжения σ определяется число циклов N до разрушения образца ($\sigma_1 > \sigma_2$, $N_1 < N_2$). В зависимости от разброса предела прочности материала (следовательно, и разброса усталостной прочности) при каждом значении напряжения может быть испытано 3—7 образцов. Используя среднеарифметические значения циклического напряжения и долговечности по двум уравнениям (7), находим искомые значения параметров a и b (либо по уравнениям (6) параметры B и β). Таким образом, количество опытов, необходимое для вычисления указанных параметров, будет не больше того, что требовалось бы для построения начального участка кривой $\sigma \sim \lg N$.

Воспользуемся предложенным здесь способом, а также методикой ускоренных испытаний [4, 5] и оценим анизотропию многоцикловой усталостной прочности стеклотекстолита на основе ткани Т-10 и связующего ЭДТ-10*.

Испытания по предложенному способу ускоренного определения усталостной прочности стеклотекстолита были проведены примерно 2,5 года спустя после изготовления материала. Образцы были вырезаны в направлении основы и утка ткани (угол вырезки φ соответственно 0 и 90°) и под углом $\varphi = 45°$. Опыты проводились в нормальных температурно-влажностных условиях среды при гармоническом пульсирующем цикле растяжения частотой 1200 цикл/мин. Подробнее экспериментальные данные по усталостным свойствам этого стеклотекстолита и методика испытаний описаны в работе [8].

Статические прочностные и деформативные характеристики стеклотекстолита, соответствующие указанному выше сроку хранения образцов, приведены в табл. 1. Указаны значения предела прочности ($\sigma_{в}$) и деформации разрушения ($\varepsilon_р$), а также напряжения σ^* и деформации ε^*, которые соответствуют начальному перегибу графика статической зависимости $\sigma \sim \varepsilon$.

Для сравнения значений многоцикловой усталостной прочности, подсчитанных по ускоренным методам, с экспериментальными данными в качестве последних используем корреляционные уравнения $\sigma \sim \lg N$, построенные в работе [8]. В частности, при пульсирующем растяжении стеклотекстолита в направлении основы ткани это уравнение имеет вид

$$\sigma = 514{,}6 - 66{,}08 \cdot \lg N \qquad (\text{МПа})$$

* Предложенный способ успешно опробирован также при анализе результатов испытания ориентированных стеклопластиков типа СВАМ и некоторых других полимерных КМ. Соответствующие результаты сравнения расчетных и экспериментальных данных не отличаются от обсуждаемых и поэтому здесь не приводятся

Таблица 1

Оценка усталостной прочности стеклотекстолита по методике [4,5]

Угол φ вырезки, град	Характеристики статической кривой $\sigma - \varepsilon$				Коэффициент K^* при числе циклов N				Усталостная прочность σ на базе N, МПа			
	σ^*, МПа	ε^*, $\times 10^{-3}$	σ_p, МПа	ε_p, $\times 10^{-3}$	10^4	10^5	10^6	$2 \cdot 10^6$	10^4	10^5	10^6	$2 \cdot 10^6$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	247,1	8,0	[illegible]25,6	19,5	1,02[illegible]	0,751	0,482	0,401	250,2 / —	184,2 / —	118,1 / —	98,3 / —
45	19,6	0,8	204,7	48,0	—»—	—»—	—»—	—»—	62,3 / 19,8	54,5 / 14,7	45,6 / 9,4	43,0 / 7,8
90	84,3	3,0	[illegible]64,8	25,0	—»—	—»—	—»—	—»—	133,2 / 84,7	107,3 / 62,6	81,4 / 40,2	73,6 / 33,4

По указанному уравнению и напряжению σ^* из табл. 1 при $\varphi=0°$ подсчитываются значения коэффициента усталостной прочности K^* для различных долговечностей N. Далее, с помощью этих значений K^* и напряжений σ^*, соответствующих $\varphi=45$ и 90°, по заданным N определяются напряжения σ для этих направлений. Результаты подсчета, который соответствует методике [5], приведены в табл. 1. Здесь в графах 10—13 в числителе указаны экспериментальные, а в знаменателе расчетные значения циклической прочности. Как видно из этих данных, расхождение между расчетом и экспериментом велико. Поэтому применение указанного метода ускоренного определения многоцикловой усталостной прочности при отнулевом растяжении нецелесообразно. Следует также отметить, что если здесь напряжение σ^*, соответствующее $\varphi=0°$, принимать, например, вдвое меньше, то для ориентации $\varphi=90°$ расхождение значительно уменьшится (в среднем 13,7% на базе $N=10^4 \div 2 \cdot 10^6$ циклов). Однако, даже в этом гипотетическом случае для угла вырезки $\varphi=45°$ расхождение между расчетными и экспериментальными данными сохранилось бы на прежнем высоком уровне (3—5 раз). Объяснение этого, на наш взгляд, заключается в том, что указанная методика не учитывает существенного влияния анизотропии КМ на коэффициент усталостной прочности при многоцикловом нагружении.

Рассмотрим возможность использования формул (6) и (7)* для приближенной оценки многоцикловой усталостной прочности рассматриваемого здесь стеклотекстолита.

В табл. 2 приведены опытные значения напряжений σ и соответствующие им долговечности N. В графах 3 и 5 в скобках указано количество образцов, которое было испытано для построения кривых усталости по предложенному способу. Как видно из табличных данных, общее время t, необходимое для построения полной усталостной кривой Велера, в рассматриваемых опытах сократилось в среднем в 15

* То же, что и зависимость (3).

раз (t/t^*). Вместе с этим, в 2—3 раза сокращается также количество разрушаемых образцов (n/n^*). При таком существенном выигрыше в сокращении объема усталостных испытаний одновременно обеспечивается также и достаточно удовлетворительное согласие между расчетными и экспериментальными значениями усталостной прочности

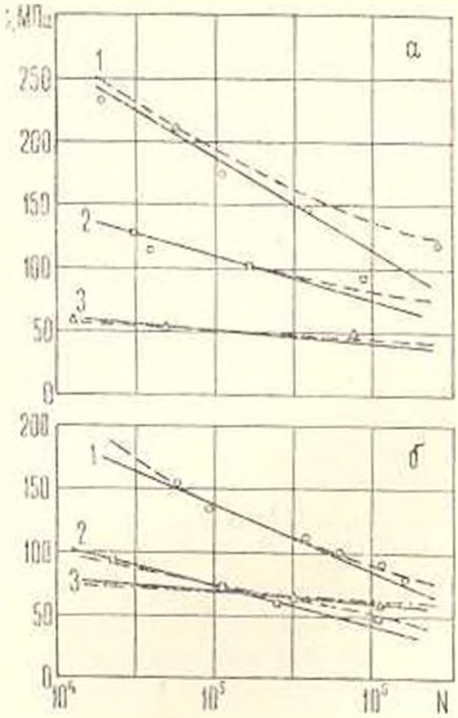
Таблица 2

Оценка усталостной прочности стеклотекстолита по предложенному методу

№ п/п	φ град.	σ_1 МПа	N_1 цикл	σ_2 МПа	N_2 цикл	a	b	$\lg B$	β	n/n^*	t/t^*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	210.8(3)	56000	186.3(4)	129000	51.577	6.964	13.742	6.749	3	12
2	45	59.0(3)	13000	53.7(3)	19000	9.768	0.915	15.109	14.125	2	18
3	90	129.2(3)	30000	110.3(6)	101000	29.654	3.678	13.061	7.663	2	7
4	0	154.8(3)	58000	112.1(3)	92000	46.690	6.487	11.202	5.373	3	20
5	45	72.3(3)	30000	65.4(3)	325000	10.407	0.678	25.211	23.896	2	5
6	90	91.4(5)	22000	74.0(3)	112000	20.336	[illegible]	11.839	7.725	3	13

Примечание: Строки 4—6 соответствуют испытаниям образцов с концентратором напряжения в виде центрального кругового отверстия.

На фиг. 1 построены графики, иллюстрирующие приемлемость предлагаемого метода (пунктирная и сплошная линии соответствуют формулам (6) и (7)). Точками на графиках обозначены среднеарифметические значения усталостной прочности и долговечности, полученные в основных испытаниях [8].



Фиг. 1

Сравнение расчетных кривых усталости с экспериментальными статистическими кривыми показывает, что формулы (6) и (7) могут быть с успехом использованы для прогнозирования многоцикловой усталостной прочности полимерных КМ. Действительно, отклонение расчетных данных от экспериментальных носит случайный характер, практически не зависит от выбора расчетной формулы и на базе $N=10^4 \div 2 \cdot 10^6$ циклов в среднем не превышает 5%, лишь в отдельных случаях доходит до 10—15%.

Как видно из графиков на фиг. 1, предлагаемый метод ускоренного определения многоцикловой усталостной прочности полимерных КМ приемлем для различных углов φ ориентации нагрузки, а также для образцов с концентратором напряжений.

Следует отметить, что если зависимости типа (6) и (7) можно использовать для ускоренного определения усталостной прочности композитов в условиях многоциклового нагружения, то, очевидно, имеется еще больше оснований для успешного их применения при оценке малоцикловой усталостной прочности КМ.

ԿՈՄՊՈԶԻՏ ՆՅՈՒԹԵՐԻ ՑԻԿԼԻԿ ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄԻ ԱՐԱԳ ԵՂԱՆԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ն. Ե. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Ամփոփում

Առաջարկված է կոմպոզիտ նյութերի բազմացիկլային հոգնածային ամրության անիզոտրոպիայի արագ որոշման եղանակ՝ հիմնված հարատևության և ամրության միջև երկպարամետրային կապերի վրա։ Ստացված է հաշվային և փորձնական տվյալների բավարար համաձայնություն։

ABOUT A METHOD OF SPEEDY DETERMINATION OF CYCLIC STRENGTH OF COMPOSITE MATERIALS

N. E. SARKISIAN

Summary

The method of speedy determination of anisotropy of multicyclical fatigue strength of composite materials is suggested, based on two-parametrical dependence between durability and strain. It is shown that the calculated and experimental data are in good agreement.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Олдырев П. П.* Определение усталостной долговечности пластмасс по температу-ре саморазогрева.—Механика полимеров, 1967, № 1, с. 111—117.
2. *Олдырев П. П., Парфеев В. М., Комар В. И.* Уточнение методики определения ус-талостной долговечности полимерных материалов по температуре разогрева.—Механика полимеров, 1977, № 5, с. 906—913.
3. *Олдырев П. П.* Новый метод ускоренных испытаний композитных материалов на усталость в режиме мягкого нагружения.—Заводская лаборатория, 1980, 46 № 9, с. 847—852.
4. *Олдырев П. П.* О корреляции между статической и усталостной прочностью арми-рованных пластиков.—Механика полимеров, 1973, № 3, с. 468—474.
5. *Олдырев П. П.* Об оценке анизотропии усталостной прочности композитных мате-риалов.—Механика композитных материалов, 1982, № 11, с. 57—61.
6. *Журков С. Н., Нарзуллаев Б. Н.* Временная зависимость прочности твердых тел.—Журн. техн. физики, 1953, 23, № 10, с. 1677—1689.
7. *Ильюшин А. А., Огибалов П. М.* О критерии длительной прочности полимеров.—Механика полимеров, 1966, № 6, с. 828—832.
8. *Саркисян Н. Е.* Анизотропия циклической прочности и разогрева стеклотекстолита при наличии концентратора.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1979, **32**, № 1, с. 63—70.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
16.III.1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVIII, № 2, 1985 Механика

УДК 624.159.1

ОДНОМЕРНЫЕ ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ СДВИГА В ГРУНТЕ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ДИЛАТАНСИЕЙ

МАРТИРОСЯН Р. Н.

Для практики динамики грунтов и инженерной сейсмологии интересно изучить процесс распространения волны сдвига в мягких грунтах. Необходимость развития исследований в этом направлении подтверждается тем, что при сильных землетрясениях в эпицентральной зоне амплитуды сейсмических смещений почвы бывают в 3—5 раз больше в поперечной волне, чем продольной, вследствие чего на поверхности земли и в основании сооружения образуются значительные пластические деформации.

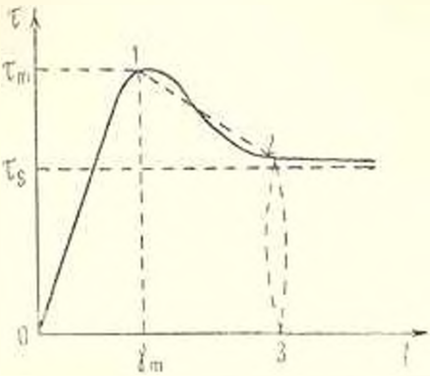
Основные экспериментально установленные факты [1] и др., выявившие характер влияния динамической нагрузки на механические свойства грунтов (в основном, песчаных) сводятся к тому, что динамическое воздействие вызывает изменение деформационных и прочностных свойств грунта (падение прочности до 25—70%). Это явление объясняется разрушением его структурных связей и перераспределением плотности грунта по глубине.

Между тем, в грунтах с зернисто-дисперсной структурой деформации сдвига вызывают объемные изменения (эффект дилатансии). Дилатансия проявляется как при упругом, так и при пластическом деформировании грунта, причем во всех случаях она может быть положительной и отрицательной. Чистое формоизменение без объемных деформаций может происходить только при так называемой критической плотности грунта.

При плотности, меньшей критической, сдвиг сопровождается разрушением структуры, приводящим грунт к уплотнению (отрицательная дилатансия). При плотности, большей критической, сдвиг сопровождается разрыхлением грунта (положительная дилатансия).

Такое специфическое для грунтов свойство дилатансии характеризуется тем, что механическая энергия волн сдвига поглощается трением на контактах частиц и изменением объема грунтовой среды в процессе сдвига.

Явление дилатансии подтверждено большим количеством опытных данных. Экспериментальный график сопротивления сдвигу плотного песчаного грунта, полученный Д. Тейлором, М. Н. Гольдштейном и др., показан на фиг. 1. На участке 0-1 грунт работает упруго и объемные изменения не происходят. Постепенное уменьшение прочности грунта после пиковой точки 1 происходит за счет постепенного уменьшения плотности. В области дилатансии (после точки 1, фиг. 1) разгрузка происходит жестко, то есть после разгрузки сдвиговая деформация полностью остается.



Фиг. 1. Диаграмма сопротивления сдвигу плотного песчаного грунта

Рассматривается разупрочнение (положительная дилатансия) плотного грунта при распространении одномерной плоской волны сдвига типа SH, фронт которой поляризован в горизонтальной плоскости. Координата z направлена вертикально вверх.

Приведенное в статье построение и решение задачи основываются на известной дилатансионной модели [7].

Если касательные напряжения $\tau < \tau_m$ (фиг. 1), то в грунте распространяются упругие волны. При этом можно считать, что волна сдвига не вызывает дилатансии, и при решении волновых задач используется известная теория упругих волн.

Когда касательные напряжения достигают значения $\tau = \tau_m$, в грунте распространяются упруго-пластические волны сдвига, вызывая дилатансию. При этом плотность грунта $\rho(\delta)$ является функцией объемной деформации δ.

Система уравнений движения и неразрывности деформации сдвига, подробный вывод и решение которой приведен в работе [3], получена из общих уравнений дилатансионных волн [7] для материала типа «плотного песка» при одномерном плоском случае, когда не учитывается нормальное давление.

$$[\exp(-\delta)]\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0, \qquad \frac{1}{1-k\delta}\frac{\partial \tau}{\partial t} - k_\delta^2\rho_0\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

где τ — касательные напряжения; V — скорость колебаний частиц; $\delta = \mathrm{const}$ — объемная деформация;

Система (1) имеет следующее решение:

$$\tau = \Phi_1(z - b_\delta t) + \Phi_2(z + b_\delta t)$$

$$V = -\frac{\exp(\delta/2)}{b_1\rho_0\sqrt{1-k\delta}}\left[\Phi_1(z - b_\delta t) - \Phi_2(z + b_\delta t)\right] \qquad (2)$$

где $b_\delta = b_1\sqrt{1-k\delta}\exp(\delta/2)$—скорость дилатирующей волны сдвига;

b_1—скорость пластической волны сдвига;

k—постоянный коэффициент, который зависит от физических характеристик грунта $(k\delta<1)$.

Произвольные функции Φ_1 и Φ_2 определяются из начальных и граничных условий.

Предположим, что на границе полубесконечной дилатирующей среды действуют касательные напряжения $\tau(t)$, монотонно возрастающие при $0 \leqslant t \leqslant t_p$ и достигающие в момент $t = t_p$ максимального значения $\tau_0 > \tau_m$, а затем монотонно убывающие при $t > t_p$:

$$\tau(0;\, t) = \begin{cases} \tau_n(t) & \dfrac{d\tau_n}{dt} \geqslant 0 \quad 0 \leqslant t \leqslant t_p \\ \tau_p(t) & \dfrac{d\tau_p}{dt} \leqslant 0 \quad t > t_p \end{cases} \qquad (3)$$

где $\tau_n(t)$—функция нагружения; $\tau_p(t)$—функция разгрузки; τ_m—пиковое значение касательных напряжений; t_p—момент разгрузки.

На фиг. 2 показаны характеристики волн на плоскости z, t.

В области 1 распространяются упругие волны, которые на положительных характеристиках для воздействия типа (3) определяются

$$\tau_1 = \tau_n\left(\frac{b_0 t - z}{b_0}\right), \qquad V_1 = -\frac{\tau_n}{\rho_0 b_0}\left(\frac{b_0 t - z}{b_0}\right) \qquad (4)$$

где τ_1 и V_1—соответственно касательное напряжение и скорость колебаний частиц в области 1;

b_0—скорость упругих волн сдвига.

Условие динамической неразрывности, выражающее закон сохранения импульса на фронте волны, записывается

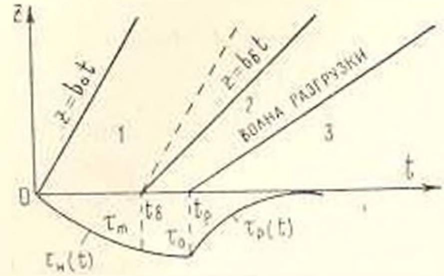
$$\tau_k \pm \rho_i b_i V_k = \tau_n \pm \rho_i b_i V_n \qquad (5)$$

где k и n—соответственно номера соседних областей;

$\rho_i b_i$—импеданс волны сдвига;

Знак (—) соответствует увеличению координаты z, (+) — уменьшению.

Имея в виду условие (5) и формулы (4) и (2), в области дилатансии получим



Фиг. 2. Характеристики волн на плоскости z, t при действии касательного импульса произвольной формы

$$\tau_2 = \frac{1+\nu}{2}\tau_n\left(\frac{b_0t-z}{b_0}\right)$$

$$V_2 = -\frac{1+\nu}{2\rho b_\delta}\tau_n\left(\frac{b_0t-z}{b_0}\right) \tag{6}$$

где $\nu = \frac{\rho b_\delta}{\rho_0 b_0}$

В момент $t = t_p$ начинается жесткая разгрузка. Уравнения движения и неразрывности в области разгрузки 3 при достижении плотности грунта критического значения ρ_k будут:

$$\rho_k\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{\partial z}, \qquad \frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial z} \tag{7}$$

Так как разгрузка происходит жестко (фиг. 1), то в уравнении $(7)_2$ $\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0$ и $V = V(t)$, тогда $(7)_1$ запишем

$$\frac{\partial\tau}{\partial z} = \rho_k\frac{dV}{dt} \tag{8}$$

Интегрируя (8) по параметру z и имея в виду, что $V = V(t)$, при условиях на границе $z = 0$, $\tau = \tau_p(t)$ получаем

$$\tau = \rho_k\frac{dV}{dt}\cdot z + \tau_p(t) \tag{9}$$

Из условия динамической неразрывности (5) на границе областей 2 и 3 с учетом (6), (8) и (9) получим следующее дифференциальное уравнение относительно V:

$$t\frac{dV}{dt} - V - B(t) = 0 \tag{10}$$

где

$$B(t) = \frac{(1+\nu)(1+\nu_p)}{2\rho_k b_p}\tau_n\left(\frac{b_0t-z}{b_0}\right) - \frac{1}{\rho_k b_p}\tau_p(t), \quad \nu_p = \frac{\rho_k b_p}{\rho\cdot b_\delta}$$

b_p — скорость волны разгрузки.

Общее решение уравнения (10) имеет вид

$$V = t\int \frac{B(t)}{t^2}\,dt + C_1 t \tag{11}$$

где произвольная постоянная C_1 определяется из условия $t = t_p$, $V = 0$.

Вычисляя производную $\frac{dV}{dt}$ из (11) и подставляя в уравнение (9), получим касательные напряжения в следующем виде:

$$\tau = \rho_к b_p \left| t \int \frac{B(t)}{t^2}\,dt - B(t) + C_1 t \right| + \tau_p(t) \tag{12}$$

Решения (11) и (12) зависят от конкретного вида функции $B(t)$, то есть от функций $\tau_a(t)$ и $\tau_p(t)$. Например, при действии треугольного импульса $\tau(t) = \tau_0 \frac{t}{\vartheta_2}$ (где ϑ_2—момент разгрузки).

Напряжения и скорость колебаний частиц определяются

$$\tau(t) = \frac{\tau_0}{\vartheta_2} \left| t - \frac{\sqrt{\rho_0/\rho_к}\,(t - \vartheta_2)}{\exp \delta/2} \right|$$

$$V(t) = -\frac{\exp \delta/2}{b_1 \rho_0 \sqrt{1 - k\delta}}\, \frac{\tau_0}{\vartheta_2} \left[t - \frac{\sqrt{\rho_0/\rho_к}\,(t - \vartheta_2)}{\exp \delta/2} \right] \tag{13}$$

а скорость волны разгрузки определяется следующей формулой:

$$b_p = b_1 \sqrt{\frac{\rho_0 (1 - k\delta)}{\rho_к}}\,(t - \vartheta_2) \tag{14}$$

где b_1—скорость пластической волны.

Как видно из этой формулы, скорость волны разгрузки существенно зависит от отношения исходной и критической плотностей и от величины дилатансии δ. При отсутствии дилатансии $\delta = 0$ и $\rho_0 = \rho_к$ имеем $b_p = b_1(t - \vartheta_2)$, что соответствует работе [6], где доказывается, что при билинейной модели Прандтля волна разгрузки распространяется со скоростью пластической волны. В формуле (14), совершая предельный переход $k\delta \to 1$, получим $b_p = 0$. Это значит, что когда дилатансия достигает сравнительно больших величин, грунт стремится к потере прочности и течению.

На фиг. 3 показан график изменения касательных напряжений и их пиковых значений во времени и по координате в дилатирующем грунте при действии треугольного импульса.

Исходя из существующих экспериментальных данных [2], можно предполагать, что при дилатансии вертикальная деформация является функцией от координаты z (фиг. 4).

Это положение подлежит исследованию при испытании грунтов на сдвиг в условиях скашивания.

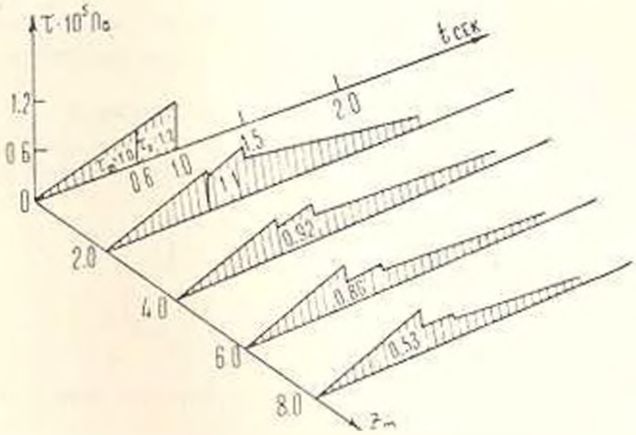
Если эту зависимость аппроксимировать квадратной параболой $\Delta = k_1 z^2$, то получим

$$\delta = \frac{d\Delta}{dz} = 2k_1 z \tag{15}$$

где $k_т$ — некоторый постоянный коэффициент, который меняется в зависимости от величии нормального давления и коэффициента пористости грунта.

Подставляя значение δ из (15) в систему (1), получим следующую систему двух уравнений с переменными коэффициентами:

$$\exp(-2k_1 z)\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0}\,\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0, \qquad \frac{1}{1-2kk_1 z}\,\frac{\partial \tau}{\partial t} - b_1^2\rho_0\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \tag{16}$$



Фиг. 3. График изменения касательного импульса треугольной формы

Следует отметить, что система (16) гиперболического типа. Ее решение ищем методом характеристик [1].

Система (16) имеет следующие характеристики:

$$\frac{dz}{\sqrt{1-2kk_1 z}\,\exp(k_1 z)} \pm b_1 dt = 0$$

или, интегрируя, имеем

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-rz}\,\exp(k_1 z)} \pm b_1 t = \text{const} \tag{17}$$

где $r = 2kk_1$.

Интеграл, стоящий в правой части (17), можно интегрировать, разлагая подынтегральную функцию в ряд Маклорена. Ограничиваясь первыми двумя членами полученного ряда ввиду его быстрой сходимости и интегрируя, из (17) получим

$$z - qz^2 \pm b_1 t = \text{const} \tag{18}$$

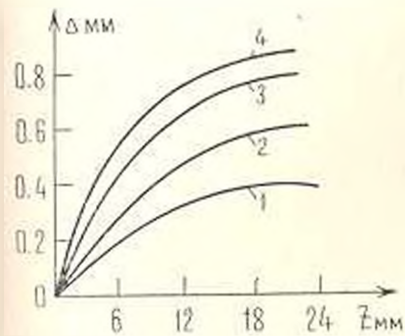
где $q = r/2 - k_1$.

Знак ($-$) соответствует прямой волне, а ($+$) — обратной.

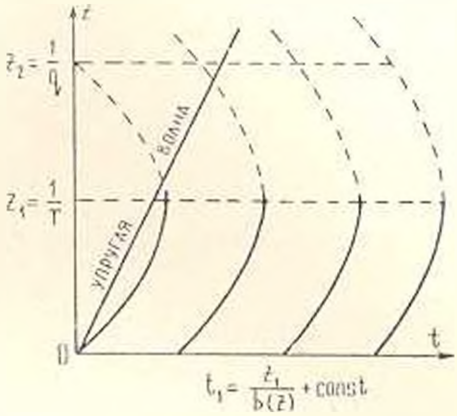
На фиг. 5 показано семейство положительных характеристик на координатной плоскости z, t.

Из системы находим, что на характеристиках (17) выполняются следующие соотношения:

$$\frac{\exp(k_1 z)}{\sqrt{1-rz}}\, d\tau \pm b_1 \rho_0 \, dV = 0 \qquad (19)$$



Фиг. 4. График зависимости вертикальной деформации в процессе сдвига от координаты. 1—4 соответствуют значениям деформации сдвига l = 3, 6, 9 и 12 мм



Фиг. 5. Семейство положительных характеристик на координатной плоскости z, t

Уравнение (19) нельзя сразу интегрировать, так как коэффициент у $d\tau$ зависит от z. После некоторых преобразований из (19) получим

$$d\tau \pm d\left[b_1 \rho_0 V \sqrt{1-rz}\, \exp(-k_1 z)\right] = \pm \rho_0 b(z) V \varphi(z)\, dz \qquad (20)$$

где

$$\varphi(z) = \left[\frac{r}{2(1-rz)} + k_1\right] \exp(-2k_1 z)$$

Теперь, интегрируя (20), получим

$$\tau \pm \frac{\rho_0 b(z)}{\exp(k_1 z)}\, V = \pm \rho_0 \int V b(z) \varphi(z)\, dz \qquad (21)$$

Если определить значения τ, то из уравнения (21) можно найти скорости колебаний частиц V.

Исключая из системы (16) V, получим следующее уравнение в частных производных второго порядка относительно τ:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - b^2(z) \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} - 2k_1 b^2(z) \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 \qquad (22)$$

где

$$b(z) = b_1 \sqrt{1-rz}\, \exp(k_1 z)$$

Следует отметить, что уравнение (22) гиперболического типа только до значения $z=z_1=\frac{1}{r}$. За координатой z_1 уравнение (22) не имеет места, исходя из понятия характеристик.

С помощью интегрального преобразования Лапласа находим решение уравнения (22), выраженное через функции Бесселя первого рода

$$\tau=\tau_0\exp\left(-\frac{z^2}{4}\right)\left\{\left(1-\frac{z^2}{4}\right)\Phi(z,t)-z^2\left[\Phi_1(z;t)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2b_1^2}\frac{\partial^2\Phi(z;t)}{\partial t^2}+r\frac{\partial^2\Phi_1(z;t)}{\partial t^2}\right]\right\} \qquad (23)$$

где

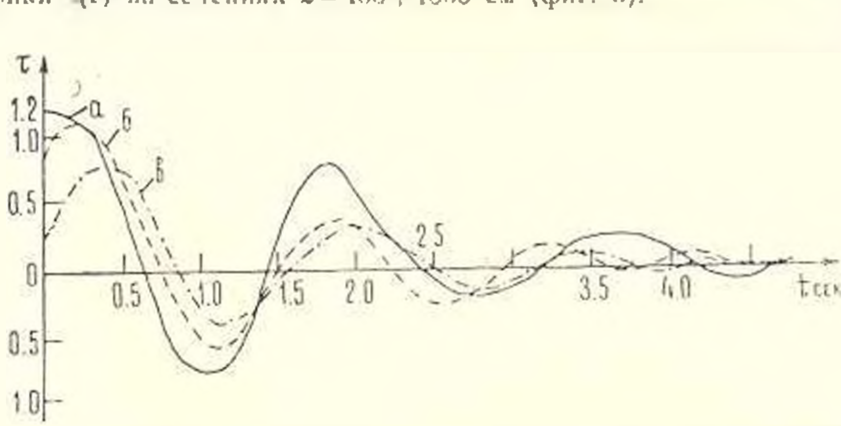
$$\Phi(z;t)=\frac{r_1b_1^2z^2}{8\sqrt{t^2-r_1^2z^4}}J_1\left(\frac{b_1}{4k^2}\sqrt{1-r_1^2z^2}\right)+\delta(t-r_1z^2)$$

$$\Phi_1(z;t)=\frac{1}{16}J_0\left(\frac{1}{4\sqrt{r_1}}\sqrt{t^2-r_1^2z^2}\right),\qquad r_1=\frac{r}{2b_0}$$

J_0; J_1 — функции Бесселя первого рода, соответственно нулевого и первого порядка.

δ — дельта-функция Дирака.

С помощью численного анализа по формуле (23) построены графики $\tau(t)$ на сечениях $z=400\div1000$ см (фиг. 6).



Фиг. 6. Графики изменения касательных напряжений $\tau(t)$ в разных сечениях дилатирующего грунта (а — $z=400$ см, б — $z=600$ см, в — $z=1000$ см)

В результате проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Явление дилатансии существенно влияет на интенсивность сейсмической волны сдвига. Вследствие дилатансии скорость пластической волны сдвига уменьшается на 20—30% и зависит от соотношения первоначальной и текущей плотностей грунта.

2. Скорость волны жесткой разгрузки в дилатирующем грунте существенно зависит от отношения исходной и критической плотностей и от величины дилатансии. С увеличением дилатансии скорость волны разгрузки уменьшается. При действии треугольного импульса волна разгрузки имеет линейный фронт.
3. Волна сдвига в дилатирующем грунте в случае переменной объемной деформации распространяется по криволинейным характеристикам. На координате $z = lr$ (r — постоянный коэффициент, который зависит от физических параметров данного грунта) грунт разрыхляется и волновое движение превращается в пластическое течение.
4. Результаты проведенных исследований могут быть использованы для определения волновой нагрузки на сооружение, а также при сейсмическом микрорайонировании площадок строительства ответственных сооружений.

ԴՐԱԿԱՆ ԴԻԼԱՏԱՆՍԻԱՅՈՎ ԳՐՈՒՆՏՈՒՄ ՀԱՐԹ ՄԻԱՉԱՓ ՍԱՀՔԻ ԱԼԻՔՆԵՐԸ

Ռ. Պ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Առաջարկվում է դրական դիլատանսիայի հաշվառման եղանակով փափուկ գրունտներում սահքի ալիքի տարածման դեպքում: Խիտ ավազային գրունտի սահքի դիմադրության փորձնական դիագրամայի հիման վրա, դիլատանսվող գրունտի կիսատարածման տիրույթի եզրին կամայական ձևի շոշափող իմպուլս ազդելու դեպքում կառուցված է ալիքային խնդրի լուծումը:

Պահպանելով ալիքի ֆրոնտի վրա դինամիկ անխզելիության պայմանը, որոշված է կոշտ բեռնաթափման ալիքի տեսքը: Ստացված է խնդրի լուծումը, երբ դիլատանսվող գրունտի եզրին ազդում է եռանկյունաձև իմպուլս: Այդ դեպքի համար կտրվածքներում կառուցվել են շոշափող լարումների բաշխվածության էպյուրաները:

ONE-DIMENSIONAL PLANE SHEAR WAVES IN POSITIVE DILATATIONAL SOIL

R. P. MARTIROSSIAN

S u m m a r y

The method of calculation of positive dilatation is suggested for shear wave propogation in soft soils. On the basis of the experimental diagram of shear resistance of dense sandy soil, the wave problem solution has been carried out during the effect on the boundary of dilatated semi-infinite soil of tangent impulse of arbitrary form. Rigid, unloading wave form is determined by keeping dynamic continuity condition at the wave front. The solution of the problem is given when the impulse of the triangle form effects the boundary of dilatated soil. For this case diagrams of distribution of tangent stresses in the sections are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 416 с.
2. *Гольдштейн М. Н.* Механические свойства грунтов. М.: Стройиздат, 1979. 305 с.
3. *Мартиросян Р. П.* Влияние дилатансии на распространение сейсмической волны сдвига в мягких грунтах.—Изв. АН АрмССР, Сер. техн. наук, 1981, т. 34, № 4. с. 31—38.
4. *Месчян С. Р., Бадалян Р. Г.* Исследование влияния вибрации на сопротивление грунта сдвигу.—Тр. Второго Всесоюзного симпозиума по реологии грунтов. Изд. ЕГУ, Ереван: 1976, с. 98—106.
5. *Поладкий В.* Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978. 308 с.
6. *Скобеев А. М.* К теории волны разгрузки. ПММ, 1962, вып. 26, с. 1015
7. *Николаевский В. Н.* и др. Сб. Успехи механики твердых деформируемых тел (к 100-летию Б. Г. Галеркина). М.: Наука, 1975, с. 397—412.

Институт геофизики и
инженерной сейсмологии

Поступила в редакцию
30.XI.1982

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVIII, № 2, 1985 Механика

УДК 539.3 : 534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В ПЛАСТИНАХ С КВАДРАТИЧНОЙ И КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

ТОНЧЯН Д. Х.

Нелинейные волны в упругих средах с квадратичной нелинейностью рассмотрены в [1], [2], [3]. Для нестационарных волн квадратичная нелинейность является определяющей. Вместе с тем для волн с медленно меняющимися амплитудой и фазой в диспергирующих средах, типичным примером которых можно считать волны в пластинах при наличии изгибных возмущений, существенное влияние на различные вопросы, связанные с распространением, дифракцией и устойчивостью волн, оказывает кубическая нелинейность [4], [5]. Приведенное в [6] значение кубического коэффициента для металлов настолько велико, что кубическая нелинейность по порядку оказывается большей, чем квадратичная нелинейность [1]. Во всех случаях желательно при рассмотрении вопросов устойчивости распространения [7] квазимонохроматических волн в пластинах наряду с кубической [8] учитывать и квадратичную нелинейность. Настоящая статья содержит рассмотрение вопросов устойчивости одномерных изгибных волн в пластинах с учетом квадратичной и кубической, а также геометрической нелинейности. Рассматривается высокочастотное приближение, хотя и предположено, что толщина пластины меньше длины волны, что позволяет применить длинноволновое приближение, с точки зрения теории пластин, или $kh \ll 1$, где k — волновое число, h — толщина пластин. Показана неустойчивость в адиабатическом приближении изгибных нелинейных волн в пластинах.

Рассматриваются волны в геометрически и физически нелинейных упругих пластинах с преобладанием изгибных деформаций.

Используем теорию Кирхгофа, согласно которой вертикальное перемещение пластины u_z зависит только от x, y, t. Здесь x, y, z — лагранжевы координаты, причем z перпендикулярен к пластине.

Для простоты рассмотрим одномерные волны по x и t, хотя полученное дисперсионное соотношение верно и для двумерных волн. Деформация по оси x

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \tag{1}$$

кроме того, имеет место

$$\varepsilon_x + \varepsilon_z = \frac{(1-2\nu)\varepsilon_x}{1-\nu} \qquad (2)$$

где ν — коэффициент Пуассона, u — продольное перемещение в срединной плоскости.

Внутренняя энергия по пятиконстантной нелинейной теории упругости [3] имеет вид

$$U = \bar{\mu}\varepsilon_x^2 + \varkappa\varepsilon_x^3, \qquad \bar{\mu} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \qquad (3)$$

$$\varkappa = \frac{A}{3}\left\{1 - \frac{\nu^3}{(1-\nu)^3}\right\} + B\left\{1 + \frac{\nu^2}{(1-\nu)^2}\right\}\frac{1-2\nu}{1-\nu} + \frac{C}{3}\,\frac{(1-2\nu)^3}{(1-\nu)^3}$$

где A, B, C — коэффициенты, характеризующие нелинейность. Заметим, что модули Ламэ λ и μ выражаются через ν и модуль Юнга E

$$\lambda = E\frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (4)$$

Ищем перемещения в виде [8]

$$u_z = a\sin\theta, \quad u = u_0 + b\sin 2\theta, \quad \theta = kx - \omega t \qquad (5)$$

Подставляя (1) в (3) и интегрируя по z в пределах от $-h/2$ до $h/2$, получим внутреннюю энергию

$$\overline{U} = \bar{\mu}\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\right)^2 + \bar{\mu}h\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^4\right\} + \frac{\varkappa h^3}{4}\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\right)^2 \qquad (6)$$

Введем осредненный лагранжиан

$$\overline{L} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L\,d\theta \qquad (7)$$

где $L = \overline{U} - \overline{T}$ — осредненный по z лагранжиан, а кинетическая энергия

$$\overline{T} = \int_{-h/2}^{h/2}\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2 dz = \frac{\rho h}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2 \qquad (8)$$

Здесь отброшено малое инерционное слагаемое $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$.

Подставляя (5) в (6), (7), (8) и осредняя по θ, получим

$$\overline{L} = \frac{\bar{\mu}h^3}{24}a^2k^4 + \bar{\mu}h\left\{\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + 2b^2k^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial u_0}{\partial x}a^2k^2 + \right.$$

$$+\frac{1}{2}ba^2k^3+\frac{3}{32}a^4k^4\Bigg]+\frac{\kappa h^3}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u_0}{\partial x}a^2k^4-\frac{1}{2}ba^2k^5+\frac{1}{16}a^4k^6\right)-\frac{1}{4}\rho h\omega^2a^2 \tag{9}$$

Варьируя $\bar{L}$ по u_0, получим

$$2\bar{\mu}h\frac{\partial^2u_0}{\partial x^2}+\frac{\bar{\mu}hk^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}a^2+\frac{\kappa h^3k^4}{8}\frac{\partial}{\partial x}a^2=0 \tag{10}$$

Интегрируя, получим

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}=-\frac{k^2}{4}a^2-\frac{\kappa h^2k^4a^2}{16\bar{\mu}} \tag{11}$$

Варьируя $\bar{L}$ по b, найдем

$$b=-\frac{a^2}{8}k+\frac{1}{32}\frac{\kappa h^2k^3a^2}{\bar{\mu}} \tag{12}$$

Варьируя $\bar{L}$ по a, получим

$$\frac{\bar{\mu}h^3}{24}k^4+\frac{1}{2}\bar{\mu}hk^2\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\bar{\mu}k}{2}bk^3+\frac{3}{16}a^2k^4\bar{\mu}h+$$

$$+\frac{\kappa h^3}{8}\frac{\partial u_0}{\partial x}k^4-\frac{1}{8}\kappa h^3k^5b+\frac{1}{32}\kappa h^3a^2k^6-\frac{\rho h}{4}\omega^2=0 \tag{13}$$

Подставляя сюда $\frac{\partial u_0}{\partial x}$ и b, получим

$$\frac{\rho h}{4}\omega^2=\frac{\bar{\mu}h^3}{24}k^4-\frac{3}{256}\frac{\kappa^2h^5k^8a^2}{\bar{\mu}} \tag{14}$$

Обозначим через ω_0 линейную частоту

$$\omega_0=\sqrt{\frac{\bar{\mu}h^2}{6\rho}}\,k^2 \tag{15}$$

Учитывая малость a, можно найти

$$\omega=\omega_0-\frac{3}{128}\frac{\kappa^2h^4k^8a^2}{\bar{\mu}\rho\omega_0} \tag{16}$$

Отсюда можно получить, записывая нелинейное дисперсионное соотношение

$$\omega=\omega_0+\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0a^2 \tag{17}$$

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0=-\frac{3}{128}\frac{\kappa^2h^4k^8}{\bar{\mu}\rho\omega_0} \tag{18}$$

Таким образом, для квадратичной нелинейной среды получается, что имеет место распространение волн, имеющих медленно меняющиеся амплитуду и фазу. Причем можно провести сравнение со случаем нелинейно-кубической среды [8], в которой показано, что имеет место неустойчивость волновых пакетов, даваемых (1).

Условие устойчивости для уравнений медленных модуляций имеет вид [8]:

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 > 0 \tag{19}$$

Преобразуя $\varkappa$, можно получить

$$\varkappa = \frac{(1-2\nu)\{A(1-\nu+\nu^2)+3B(1-2\nu+2\nu^2)+C(1-2\nu)^2\}}{3(1-\nu)^3} \tag{20}$$

Для несжимаемого материала $\nu=\frac{1}{2}$; $\varkappa=0$; $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0=0$, то есть нарушается условие медленно меняющихся параметров волн и требуется учесть слагаемые четвертой степени по ε_x в U.

Для $\nu=\frac{1}{3}$, взяв металлическую пластину, данные для которой даны в [3] стр. 305, получается $\varkappa=-5\cdot10^{12}\frac{г}{см\ сек^2}$ и условие неустойчивости выполняется.

Таким образом, так же, как и для кубической нелинейности имеет место неустойчивость для волн огибающих, описываемых уравнениями модуляций.

Отметим, что для указанных $\varkappa$ в (18) для $kh \ll 1$ первое слагаемое в скобке является главным по порядку, причем при отбрасывании геометрической нелинейности это слагаемое уменьшается вдвое и меняется знак. Таким образом, для квадратичной нелинейности, в отличие от кубической [8], учет геометрической нелинейности при всех значениях амплитуд необходим.

В работе [6] дано значение упругого модуля третьего порядка в виде $\mu\gamma_2$, где для металлов $\gamma_0 = -10^6$. Для упругой области ε_x имеет порядок 10^{-3} и кубическая нелинейность становится сравнимой с линейным слагаемым, что вряд ли допустимо. Для $\varepsilon_x \sim 10^{-4}$ кубическое слагаемое по порядку превосходит рассматриваемую квадратичную нелинейность. Таким образом, или указанное в [6] значение γ_2 для металлов завышенное, или следует наряду с квадратичной нелинейностью в рассматриваемых задачах теории модуляции учитывать кубическую нелинейность.

Для простоты, как и в работе [8], здесь ограничимся учетом кубических слагаемых в приближении [6]. Возьмем вместо (3) внутреннюю энергию в виде

$$U=\mu\varepsilon_x^2+\varkappa\varepsilon_x^3+\frac{3}{8}\mu\gamma_2\psi_0^4 \tag{21}$$

где ψ_0 — интенсивность деформации, и для рассматриваемой одномерной задачи

$$\gamma_0^2 = \frac{8}{9}\,\frac{1-\nu+\nu^2}{(1-\nu)^2}\,\varepsilon_x^2 \qquad (22)$$

В (6) за счет кубического слагаемого добавляется

$$\frac{1}{270}\,\mu\gamma_2\,\frac{(1-\nu+\nu^2)^2h^5}{(1-\nu)^4}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\right)^4 \qquad (23)$$

В (9) прибавится

$$\frac{1}{720}\,\mu\gamma_2\,\frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^4}\,a^4k^8h^5$$

В уравнении (13) добавится

$$\frac{1}{360}\,\mu\gamma_2\,\frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^4}\,h^5a^3k^8$$

и то же самое добавится в правую часть (14). При этом вместо (18) получится

$$\left(\frac{d\omega}{da^2}\right)_0 = -\frac{3}{128}\,\frac{\varkappa^2h^4k^8}{\mu\rho\omega_0} + \frac{1}{180}\,\frac{\mu\gamma_2k^8h^4}{\rho\omega_0}\,\frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^4} \qquad (24)$$

Для общности рассмотрения также следует учитывать инерционные слагаемые в T от продольных скоростей

$$\frac{\rho h}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} - 2b\omega\cos 2\varphi\right)^2$$

При этом в (9) добавится слагаемое

$$-\frac{\rho h}{2}\left\{\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)^2 + 2b^2\omega^2\right\}$$

Проводя варьирование по u_0, где учтено, что [5] $\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \approx (\omega_0(k))^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$, и по b, получим (11) и (12), где в правых частях добавятся

$$\frac{h^2k^2}{3}\,\frac{\partial u_0}{\partial x} \approx -\frac{k^4h^2a^2}{12} - \frac{\varkappa h^3k^6a^2}{48\mu} \quad \text{и} \quad -\frac{k^3h^2a^2}{96} + \frac{\varkappa h^3k^5a^2}{384\mu}$$

Тогда в (21) добавится $-\frac{3}{32}\,\frac{\mu k^6h^2}{\rho(1-\nu)\omega_0} - \frac{7}{192}\,\frac{\varkappa h^3k^8}{\rho\omega_0}$. С точностью до множителя $\frac{h^2k^6}{\rho\omega_0}$ первое слагаемое в правой части (21) для металлов имеет порядок $5\cdot 10^{12}$, второе слагаемое — порядок

$$\frac{1}{180}\rho\gamma_2 k^2 h^6 \frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^4} \approx \frac{1}{20}\cdot 10^{12}\gamma_2(kh)^2$$

Для реальных волн $kh \gg 0{,}1$ и, взяв γ_2 по [6], получим для второго слагаемого порядок $10^{12}\cdot\frac{1}{2}10^3$, который для выбранных длин волн больше порядка первого слагаемого и тем более превосходит последнее добавленное слагаемое. Таким образом, при значении γ_2, взятом из [6], кубическая нелинейность определяет величину коэффициента $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0$. Однако, следует пересмотреть значение γ_2, тем более, что для полимеров и композитов γ_2 может быть небольшим. Следует отметить, что все указанные слагаемые в (24) для металлов отрицательные. Таким образом, имеет место в адиабатическом приближении неустойчивость модуляционных волн. В более точном приближении с учетом в лагранжиане производных от амплитуд, можно получить [8], что волны устойчивы для амплитуд

$$a^2 < -\frac{\omega_0''(k)k_1^2}{4\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0}$$

где $\omega_0'' = 2\sqrt{\frac{\mu h^2}{6\rho}}$, а k_1 есть волновое число для возмущенных волновых пакетов, которое по смыслу волн огибающих [8] значительно меньше k. Поскольку $-\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0$ велико, амплитуды, которые соответствуют устойчивым волнам, малы. Таким образом, одновременный учет как кубической, так и квадратичной нелинейности приводит к сужению области устойчивости волн.

Автор благодарит А. Г. Багдоева и Л. А. Мовсисяна за ценные советы.

ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ԵՎ ԽՈՐԱՆԱՐԴԱՅԻՆ ՈՉԳԾԱՅՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ ԿՎԱԶԻՄՈՆՈԽՐՈՄԱՏԻԿ ՃԿՄԱՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Գ. Ե. ԹՈՓՉՅԱՆ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում է քառակուսային, խորանարդային, ինչպես նաև երկրաչափական ոչգծայնությամբ սալերում ծռող միաչափ ալիքների կայունության հարցերը։

Դիտարկվում է բարձր հաճախականության մոտավորությունները, ինչպես

ընդունվում է, որ սալի հաստությունը փոքր է ալիքի երկարությունից, որը ըստ սալերի տեսության, կամ որ $kh < 1$, որտեղ՝ k-ն ալիքային թիվն է, h-ը սալի հաստությունը։ Թույլ է տալիս կիրառել երկարալիք մոտավորում։ Ցույց է տրված սալերում ծռող ոչգծային ալիքների անկայունությունը ադիաբատ մոտավորումով։

THE INVESTIGATION OF STABILITY OF QUASIMONOCHROMATIC BENDING WAVES IN PLATES WITH QUADRATIC AND CUBIC NONLINEARITIES

D. KH. TORSHAN

S u m m a r y

This paper considers the problem of stability of one-dimensional bending waves in plates taking into account quadratic and cubic nonlinearity. High frequency approximation is considered although it is supposed that the thickness of the plate is less than the wavelength, which allows to apply high wave approximation in view of the theory of plates or for $kh < 1$, where k is the wave number and h the plate thickness. The unstability in adiabatic approximation of bent nonlinear waves in plates is shown.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные и линейные переходные волновые процессы деформации термоупругих и упругих тел. Таллин: Изд-во АН ЭССР, 1972. 174 с.
2. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 520 с.
3. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* К вопросу определения ударной волны в нелинейных задачах теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, 1968, т. 21, № 3, с. 19—24.
4. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
5. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
6. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: ИЛ, 1961. 777 с.
7. *Лайтхилл М. Дж.* Некоторые частные случаи применения теории Уизема. В кн.: Нелинейная теория распространения волн. М.: Мир, 1970, с. 43—76.
8. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Квазимонохроматические волны изгиба в нелинейно-упругих пластинах. Изв. АН СССР, МТТ, 1981, № 4, с. 169—176.

Ленинаканский педагогический
институт

Поступила в редакцию
17.VI.1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVIII, № 2, 1985 Механика

УДК 539.374

ОБ УЧЕТЕ ИЗМЕНЕНИЯ УПРУГИХ СВОЙСТВ ПРИ ПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ МАТЕРИАЛА

ГОХШТЕЙН Г. Е.

1. Существующие теории пластичности предполагают, что упругие свойства материала не зависят от пластических. Однако, экспериментальные исследования [1, 2] указывают на изменение модулей упругости при пластическом деформировании металлов.

Рассмотрим идеальное упругопластическое состояние несжимаемого материала с учетом влияния пластической деформации на его упругие свойства. Ограничимся анализом напряженного и деформированного состояния в процессе приложения нагрузки, а также непосредственно после окончания нагружения. В этом случае восстановлением упругих свойств материала при длительном отдыхе после пластической деформации [2] можно пренебречь и считать, что модуль упругости E является функцией только параметра q, характеризующего предыдущую пластическую деформацию. Выбирая в качестве такого параметра накапливаемую пластическую деформацию, запишем основные соотношения в виде [3, 4]

$$de_{ij} = de^{e}_{ij} + de^{p}_{ij}, \quad de^{e}_{ij} = \frac{3}{2E} ds_{ij}, \quad e_{ii} = 0$$

$$f(\sigma_{ij}) = 0, \quad E = E(q), \quad q = \int (2de^{p}_{ij} de^{p}_{ij})^{1/2} \tag{1.1}$$

Здесь σ_{ij}, e_{ij}—соответственно, компоненты тензоров напряжения и деформации; e^{e}_{ij}, e^{p}_{ij}—соответственно, компоненты упругой и пластической деформации; s_{ij}—компоненты девиатора напряжения; $f=0$—условие пластичности; по повторяющимся в одном члене нижним индексам здесь и в дальнейшем производится суммирование.

Для того, чтобы установить соотношения связи между напряжениями и деформациями необходимо ввести некоторые постулаты, касающиеся свойств материала в пластической области. В работах [5, 6] такие соотношения получены на основе постулатов А. А. Ильюшина и Д. Друккера. Рассмотрим случай, когда имеет место принцип максимума Р. Мизеса [7]

$$\sigma_{ij} de^{p}_{ij} \geqslant \sigma^{0}_{ij} de^{p}_{ij} \tag{1.2}$$

где σ^{0}_{ij}—компоненты тензора любого возможного напряженного состояния, удовлетворяющего условию

$$f(\sigma_{ij}^{0}) \leqslant 0 \tag{1.3}$$

В этом случае, в отличие от [5, 6], справедлив ассоциированный закон пластичности

$$de_{ij}^{p} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{1.4}$$

где $d\lambda$ — скалярный множитель.

Для условия пластичности Р. Мизеса

$$\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = k^2, \quad k = \text{const} \tag{1.5}$$

из соотношения (1.4) получим

$$de_{ij}^{p} = d\lambda s_{ij} \tag{1.6}$$

Уравнения (1.1), (1.6) интегрируются при условии, что при $\lambda=0$ имеет место чисто упругое состояние тела (компонентам припишем индекс e внизу), то есть

$$s_{ij} = s_{ije}, \quad e_{ij} = \frac{3}{2E} s_{ije} \quad \text{при} \quad \lambda = 0 \tag{1.7}$$

2. Положим

$$E = E_0 + \delta\omega(q), \quad \omega(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \omega^{(n)} \tag{2.1}$$

где δ — малый фиксированный параметр, характеризующий изменение модуля упругости при пластической деформации; E_0 — известная постоянная.

В соответствии с (2.1)

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \sigma_{ij}^{(n)}, \quad s_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n s_{ij}^{(n)}, \quad e_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n e_{ij}^{(n)}$$

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n q^{(n)}, \quad \lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \lambda_n \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{E} = (E_0 + \delta\omega)^{-1} = \frac{1}{E_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\delta \frac{\omega}{E_0}\right)^n \tag{2.3}$$

$$\omega = \omega(q^{(0)} + \delta q^{(1)} + \delta^2 q^{(11)} + \ldots) \tag{2.4}$$

Подставим (2.1)—(2.3) в соотношения (1.1), (1.5), (1.6), (2.4) и разложим (2.4) в ряд Тэйлора в окрестности $q^{(0)}$. После преобразований получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n de_{ij}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n de_{ij}^{e(n)} + \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n de_{ij}^{p(n)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n de_{ij}^{e(n)} = \frac{3}{2E_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \left(\frac{\omega}{E_0}\right)^m ds_{ij}^{(n-m)} \delta^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n de_{ij}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} d\lambda_m s_{ij}^{(n-m)} \delta^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \delta^n (s_{ij}^{(m)} s_{ij}^{(n-m)}) = 2k^2 \tag{2.5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n dq^{(n)} = (A + \delta B)^{1/2} = A^{1/2}\left(1 + \frac{1}{2}\delta\frac{B}{A} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\left(\delta\frac{B}{A}\right)^2 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\delta\frac{B}{A}\right)^3 - \right.$$

$$\left. - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\left(\delta\frac{B}{A}\right)^4 + \ldots\right)$$

$$A = 2de_{ij}^{p(0)} de_{ij}^{p(0)}, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \delta^{n-1} (2de_{ij}^{p(m)} de_{ij}^{p(n-m)})$$

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \omega^{(n)} = \omega(q^{(0)}) + \delta q^{(1)} \frac{d\omega}{dq}\bigg|_{q^{(0)}} + \delta^2 \left(q^{(2)} \frac{d\omega}{dq}\bigg|_{q^{(0)}} + \frac{(q^{(1)})^2}{2} \frac{d^2\omega}{dq^2}\bigg|_{q^{(0)}}\right) + \ldots$$

Приравнивая в (2.5) члены при одинаковых степенях параметра δ, получим систему уравнений, позволяющую развить метод последовательных приближений для материала, упругие свойства которого зависят от пластических. Ограничимся вторым приближением.

В нулевом приближении

$$de_{ij}^{(0)} = \frac{3}{2E_0} ds_{ij}^{(0)} + d\lambda_0 s_{ij}^{(0)}, \quad s_{ij}^{(0)} s_{ij}^{(0)} = 2k^2 \tag{2.6}$$

Соотношения (2.6) представляют собой уравнения Е. Рейсса и условие пластичности Р. Мизеса для материала с постоянным модулем упругости. Используя (2.5) и (2.6), найдем

$$dq^{(0)} = 2k d\lambda_0, \quad \omega^{(0)} = \omega(q^{(0)}) \tag{2.7}$$

В первом приближении

$$de_{ij}^{(1)} = \frac{3}{2E_0}\left(ds_{ij}^{(1)} - \frac{\omega^{(0)}}{E_0} ds_{ij}^{(0)}\right) + d\lambda_0 s_{ij}^{(1)} + d\lambda_1 s_{ij}^{(0)}, \quad s_{ij}^{(0)} s_{ij}^{(1)} = 0 \tag{2.8}$$

$$dq^{(1)} = 2k d\lambda_1, \quad \omega^{(1)} = q^{(1)} \frac{d\omega}{dq}\bigg|_{q^{(0)}} \tag{2.9}$$

Во втором приближении

$$de_{ij}^{(2)} = \frac{3}{2E_0}\left(ds_{ij}^{(2)} - \frac{\omega^{(0)}}{E_0} ds_{ij}^{(1)} + \frac{(\omega^{(0)})^2 - \omega^{(1)} E_0}{E_0^2} ds_{ij}^{(0)}\right) + d\lambda_0 s_{ij}^{(2)} + d\lambda_1 s_{ij}^{(1)} + d\lambda_2 s_{ij}^{(0)}$$

$$2s_{ij}^{(0)} s_{ij}^{(2)} + s_{ij}^{(1)} s_{ij}^{(1)} = 0 \tag{2.10}$$

$$dq^{(2)} = 2k d\lambda_2, \quad \omega^{(2)} = q^{(2)} \frac{d\omega}{dq}\bigg|_{q^{(0)}} + \frac{(q^{(1)})^2}{2} \frac{d^2\omega}{dq^2}\bigg|_{q^{(0)}} \tag{2.11}$$

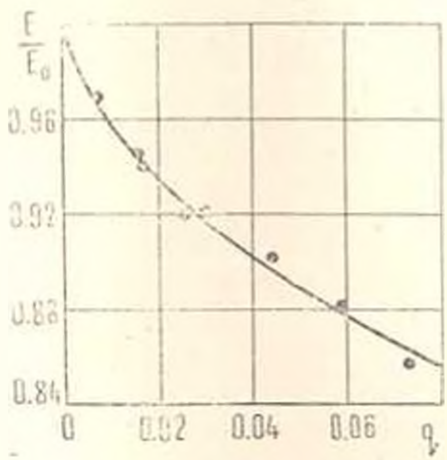
Уравнения (2.6)—(2.11) интегрируются при соответствующих линеаризованных условиях (1.7)

$$s_{ij}^{(n)} = s_{ij0}^{(n)}, \quad e_{ij}^{(n)} = \frac{3}{2E_0} s_{ij0}^{(n)} \quad (n \geq 0) \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{2.12}$$

$$s_{ij}^{(n)} = 0 \quad (n \geq 1) \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{2.13}$$

3. Функции $E(q)$ и $\omega(q)$ определяются из экспериментальных исследований упругих свойств материала, подвергнутого пластическому деформированию. В качестве примера на фиг. 1 представлены результаты испытаний образцов из стали 30ХГС [2]. Значение q в эксперименте изменялось от 0 до 0,073, а снижение модуля упругости при этом не превышало 15%. Примем последнюю величину за δ и аппроксимируем приведенные данные формулой

$$\frac{E}{E_0} = -0{,}57(q+0{,}001)^{1/2} + 1{,}018 \tag{3.1}$$



Фиг. 1

Зависимость (3.1) показана на фиг. 1 сплошной линией, а экспериментальные данные—темными точками.

Используя (2.1) и (3.1), получим

$$\omega = (0{,}12 - 3{,}8(q+0{,}001)^{1/2})E_0 \tag{3.2}$$

4. Для иллюстрации метода рассмотрим упругопластическое состояние цилиндрической толстостенной трубы радиусов a, b $(a < b)$ в условиях плоской деформации. Материал трубы—сталь 30ХГС. Зависимость модуля упругости от пластической деформации примем согласно п. 3, $E_0 = 20200$ кг/мм², предел текучести при сдвиге $k = 36{,}2$ кг/мм² [2].

Изложенным выше методом был проведен анализ напряженного и деформированного состояния трубы при нагружении ее внутренним давлением p, а также при последующей разгрузке. В результате получены выражения для напряжений, перемещений и деформаций в цилиндрических координатах r, θ, z (ось z направлена вдоль оси трубы)

$$\sigma_\rho^p = -p_0 + \ln(\rho/\alpha), \quad \sigma_\theta^p = 1 + \sigma_\rho^p, \quad \sigma_z^p = \frac{1}{2} + \sigma_\rho^p, \quad \tau_{\rho\theta}^p = 0, \quad p_0 = \frac{p}{2k}$$

$$\sigma_\rho^e = \frac{\rho_s^2}{2}(1-\rho^{-2}), \quad \sigma_\theta^e = \frac{\rho_s^2}{2}(1+\rho^{-2}), \quad \sigma_z^e = \frac{\rho_s^2}{2}, \quad \tau_{\rho\theta}^e = 0, \quad e_z = 0 \tag{4.1}$$

$$e_\rho = -e_\theta = -\frac{3k\rho_s^2}{2E\rho^2}, \quad u = e_\theta\rho, \quad \rho = \frac{r}{b}, \ \rho_s = \frac{r_s}{b}, \ \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\sigma_\rho^{p*} = \sigma_\rho^p - \frac{p_0\alpha^2}{1-\alpha^2}(1-\rho^{-2}), \quad \sigma_\theta^{p*} = \sigma_\theta^p - \frac{p_0\alpha^2}{1-\alpha^2}(1+\rho^{-2}), \quad \sigma_z^{p*} = \sigma_z^p - \frac{p_0\alpha^2}{1-\alpha^2}$$

$$\tau_{\rho\theta}^{p*} = 0, \quad \sigma_\rho^{e*} = \sigma_\rho^e - \frac{p_0\alpha^2}{1-\alpha^2}(1-\rho^{-2}), \quad \sigma_\theta^{e*} = \sigma_\theta^e - \frac{p_0\alpha^2}{1-\alpha^2}(1+\rho^{-2})$$

$$\sigma_z^{e*} = \sigma_z^e - \frac{p_0\alpha^2}{1-\alpha^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{e*} = 0, \quad e_z^{p*} = 0, \quad e_z^{e*} = 0 \tag{4.2}$$

$$e_\rho^{p*} = -e_\theta^{p*} = e_\rho + \frac{3p\alpha^2}{2E_0(1-\alpha^2)\rho^2}\left(1 - \delta\frac{\omega^{(0)}}{E_0} + \delta^2\frac{(\omega^{(0)})^2 - \omega^{(1)}E_0}{E_0^2}\right)$$

$$\omega^{(0)} = (0{,}12 - 3{,}8(q^{(0)} + 0{,}001)^{1/2})E_0, \quad q^{(0)} = \frac{3k}{E_0}\left(\frac{\rho_s^2}{\rho^2} - 1\right), \quad \omega^{(1)} = 0$$

$$u^{p*} = e_\theta^{p*}\rho, \quad e_\rho^{e*} = -e_\theta^{e*} = e_\rho + \frac{3p\alpha^2}{2E_0(1-\alpha^2)\rho^2}, \quad u^{e*} = e_\theta^{e*}\rho$$

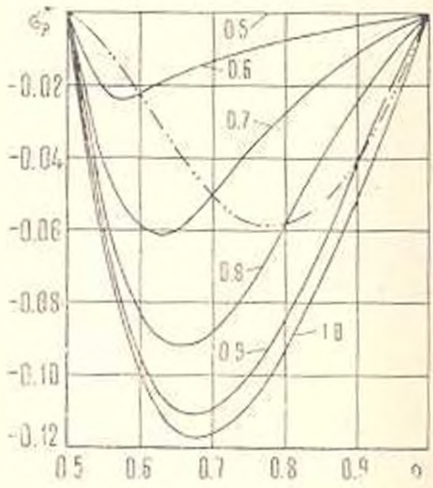
где ρ_s — граница упругопластической зоны, определяемая из уравнения

$$p_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rho_s^2 + \ln(\rho_s/\alpha) \tag{4.3}$$

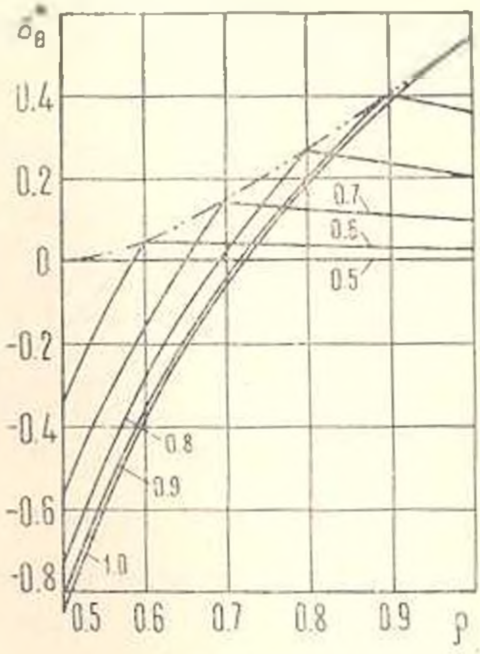
Все компоненты определены с учетом нулевого, первого и второго приближений и представлены в безразмерном виде: напряжения отнесены к $2k$, перемещения — к b; индекс p относит компоненту к упругопластической зоне $\alpha \le \rho \le \rho_s$, индекс e — к упругой зоне $\rho_s < \rho \le 1$; звездочкой отмечены компоненты остаточных напряжений, перемещений и деформаций при разгрузке (снижении внутреннего давления до нуля). Предполагается, что разгрузка не сопровождается вторичными пластическими деформациями.

Из (4.1) — (4.3) следует, что члены с δ и δ^2, учитывающие влияние изменения упругих свойств материала, входят только в выражения для e_ρ^{p*}, e_θ^{p*} и u^{p*}. Формулы для определения остальных компонент (4.1) и радиуса ρ_s (4.3) совпадают с известным решением той же задачи для трубы из несжимаемого материала с постоянным модулем упругости [3]. Таким образом, изменение упругих свойств материала необходимо учитывать только при разгрузке для определения остаточных перемещений и деформаций в упругопластической зоне трубы.

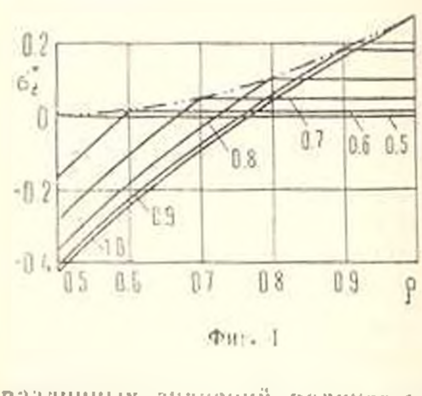
На фиг. 2—6 приведены графики безразмерных компонент остаточных напряжений и радиального перемещения u^*, а также накапливаемой пластической деформации q в зависимости от радиуса ρ для



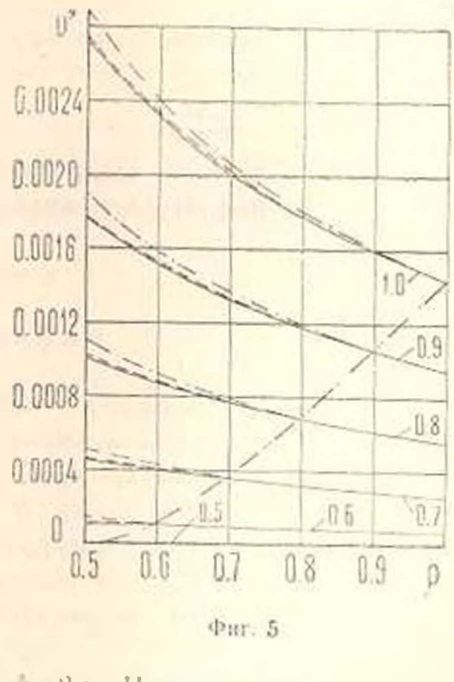
Фиг. 2



Фиг. 3



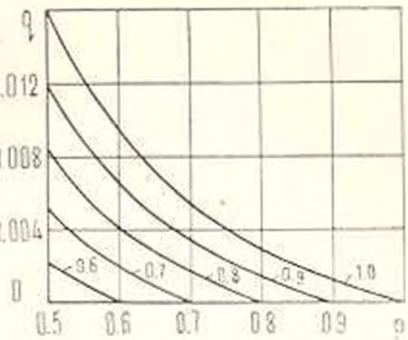
Фиг. 4



Фиг. 5

различных значений радиуса ρ_* при $b = 2a$. Нулевое, первое и второе приближения величины u^* показаны на фиг. 5 штрих-пунктирной, штриховой и сплошной линиями, соответственно.

Из фиг. 5 следует, что в упругопластической области величина u^*, определенная с учетом изменения модуля упругости, существенно меньше, чем u^*, вычисленная при условии $E = \mathrm{const}$. На внутренней поверхности трубы разница между ними составляет от 5,5% при $\rho_s = 1{,}0$ до 25 % при $\rho_s = 0{,}6$.



Фиг. 6

Остаточные напряжения (фиг. 2—4) удовлетворяют условию

$$\sigma_\theta^* - \sigma_\rho^* < 1 \tag{4.4}$$

откуда, с учетом (1.3) и (2.6) следует, что вторичные пластические деформации при разгрузке отсутствуют.

Величина q (фиг. 6) не превосходит 0,017, то есть принадлежит исследованному экспериментально диапазону q(см. п. 3).

ՆՅՈՒԹԻ ՊԼԱՍՏԻԿ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ԴԵՊՔՈՒՄ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՓՈՓՈԽՄԱՆ ՀԱՇՎԱՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Դ. Ն. ԳՈԽՇՏՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է անսեղմելի նյութի իդեալական առաձգա-պլաստիկական մոդելը նրա առաձգական հատկությունների վրա պլաստիկական դեֆորմացիաների ազդեցության հաշվառումով: Բերված են ելակետային կապակցությունների գծայնացումը Ռ. Միզեսի պլաստիկության պայմանի դեպքում: Ստացված է նշված նյութից խողովակի համար մոտավոր անալիտիկ լուծում ներքին ճնշմամբ բեռնավորման, ինչպես նաև բեռնաթափման դեպքում: Ցույց է տրված, որ խողովակի նյութի առաձգական հատկությունների փոփոխության հաշվառումը ազդում է դեֆորմացիաների և տեղափոխությունների բաշխման վրա միայն բեռնաթափման դեպքում:

THE CONSIDERATION OF CHANGE OF ELASTIC PROPERTIES DURING PLASTIC STRAIN OF MATERIAL

G. E. GOHSHTEIN

S u m m a r y

This paper deals with the perfect elastic-plastic state of uncompressible material taking into account the influence of plastic deformation on its elastic characteristics. The linearization of basic equations was carried out in accordance with the R. Mises criterion of plasticity. An approximate analytic solution was found for the cylindrical tube of the above mentioned material both under the internal pressure load and in relieved state. It has been shown that the change of the elastic properties of the tube material influences the distribution of strain and displacement only in the relieved state.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуков А. М.* Некоторые особенности кривой нейтрального нагружения.—Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 8.
2. *Жуков А. М.* Упругие свойства пластически деформированного металла и сложное нагружение.—Инженерный сб., 1960, т. 30.
3. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М.: «Высшая школа», 1969.
4. *Клюшников В. Д.* Математическая теория пластичности. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979.
5. *Ильюшин А. А.* О постулате пластичности.—ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.
6. *Ильюшин А. А.* О приращении пластической деформации и поверхности текучести.—ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
7. *Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: «Наука», 1978.

Всесоюзный заочный политехнический институт

Поступила в редакцию 1.IX.1982