

Մ Ե Ն Ա Ն Ի Կ Ա



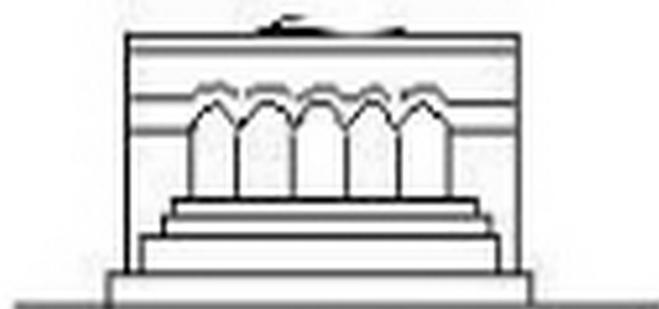
МЕХАНИКА



MECHANICS



38(1)



1985

совпадают с осью симметрии, ось Oy перпендикулярно поверхностям тел; ось Oz находится в плоскости симметрии тела и перпендикулярна оси Ox . Обозначим через u_j ($j=1, 2, 3$) компоненты вектора перемещения по осям x, y, z .

Пусть u_j^0 обозначают решения задачи о соударении бесконечных по высоте тел, в которой $u_2^0=0, u_{1,3}^0=u_{1,3}(x, z, t)$. Имеют место как для u_j , так и для u_j^0 начальные условия при $t=0$ [5], $u_3^0=0, u_1^0=0, \frac{\partial u_3^0}{\partial t}=0$

$$\frac{\partial u_j^0}{\partial t} = -V_0 \varepsilon(x - |z|k) + V_0 \varepsilon(k|z| - x) \quad (1)$$

причем $x - |z|k$ есть уравнения граней угла OQ и OP , где $\varepsilon(x)$ — единичная функция, $k = -\operatorname{tg} \psi$.

Решение динамических уравнений упругой среды в плоской задаче для $u_{1,3}^0$ при условиях (1) можно искать методом интегральных преобразований Лапласа по t и Фурье по (x, z) [7], причем для изображения по Лапласу от u_j^0 запишем

$$\bar{u}_j^0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_j^0 \exp[-s(\bar{\alpha}x + \bar{\gamma}z)] d\bar{x} d\bar{z} \quad (2)$$

где $s = -i\omega$ есть параметр преобразования Лапласа. Для трансформант получится после решения уравнений

$$\bar{u}_1^0 = \frac{V_0 k (b^2 \bar{\alpha}^2 + a^2 \bar{\gamma}^2 - \omega^2)}{\pi^2 s^2 (\bar{\gamma}^2 - \alpha^2 k^2) \mu}, \quad \bar{u}_3^0 = -\frac{V_0 k (a^2 - b^2) \bar{\alpha} \bar{\gamma}}{\pi^2 s^2 (\bar{\gamma}^2 - \alpha^2 k^2) \mu} \quad (3)$$

$$\mu = (a^2 \bar{\alpha}^2 + b^2 \bar{\gamma}^2 - \omega^2)(b^2 \bar{\alpha}^2 + a^2 \bar{\gamma}^2 - \omega^2) - (a^2 - b^2)^2 \bar{\alpha}^2 \bar{\gamma}^2$$

где a, b — скорости продольных и поперечных волн, $\mu=0$ дает дисперсионные соотношения для этих волн

$$\bar{\gamma}_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \bar{\alpha}^2}, \quad \bar{\gamma}_2 = \sqrt{\frac{\omega^2}{b^2} - \bar{\alpha}^2}, \quad \alpha = \frac{\bar{x}}{\omega}, \quad \gamma = \frac{\bar{z}}{\omega} \quad (4)$$

Для преобразования от $\Delta^0 = \frac{\partial u_1^0}{\partial x} + \frac{\partial u_3^0}{\partial z}$ получится

$$\bar{\Delta}^0 = \frac{i V_0 k \bar{\alpha}}{\pi^2 s^2 a^2 (\bar{\gamma}^2 - \alpha^2 k^2) (\bar{\gamma}_1^2 - \bar{\gamma}_2^2)} \quad (5)$$

Следует отметить, что полюсы знаменателя $\bar{\gamma} = \mp \alpha k$ соответствуют плоским волнам AB и $A'B'$ (фиг. 1) и соответствующим поперечным волнам, причем слагаемые в решении, дающие эти волны, можно получить выделением особенности в решении, поэтому при вычислении интегралов в Δ^0 учитываются только полюсы $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1$ для продольных волн. Тогда можно получить при $z > 0$

$$\bar{\Delta}^0 = \frac{V_0 k}{\pi \omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{x} \exp(i\omega(\bar{x}x + \bar{\gamma}z))}{(\bar{\gamma}_1^2 - x^2 k^2) \bar{\gamma}_1} d\bar{x} \quad (6)$$

Полное решение плоской задачи для u_j^0 , u_j^0 дано в [8]. Обозначим

$$u_j = u_j^0 + U_j \quad (7)$$

причем начальные условия для u_j нулевые, а граничные условия на поверхностях $y = \pm h$, $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$, $\sigma_{zz} = 0$ запишутся в виде

$$\begin{aligned} \alpha^2 \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial y} + K \left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}_3}{\partial z} \right) &= -K \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x} + \frac{\partial u_3^0}{\partial z} \right) \\ y = \pm h, \quad \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial y} + \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial z} + \frac{\partial \bar{U}_3}{\partial y} = 0, \quad -\infty < x < +\infty \\ &-\infty < z < +\infty \end{aligned} \quad (8)$$

где $K = \alpha^2 - 2b^2$.

Решение уравнений теории упругости можно искать в виде

$$\bar{U}_{1,2} = \sum_{n=1}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_{1,2}^{(n)} \exp(i(\bar{x}x + \bar{\gamma}z)) \cos \bar{\beta}_n y d\bar{x} d\bar{\gamma} \quad (9)$$

$$\bar{U}_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_3^{(n)} \exp(i(\bar{x}x + \bar{\gamma}z)) \sin \bar{\beta}_n y d\bar{x} d\bar{\gamma}$$

где $\bar{\beta}_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{\alpha^2} - \bar{x}^2 - \bar{\gamma}^2}$, $\bar{\beta}_2 = \sqrt{\frac{\omega^2}{b^2} - \bar{x}^2 - \bar{\gamma}^2}$, причем можно получить

$$\bar{U}_2^{(1)} = -\frac{\bar{\beta}_1}{i\alpha} \bar{U}_1^{(1)}, \quad \bar{U}_3^{(1)} = -\frac{\bar{\gamma}}{\alpha} \bar{U}_1^{(1)}, \quad \bar{U}_3^{(2)} = -\frac{1}{\bar{\gamma}} [i\bar{x} \bar{U}_1^{(1)} - i\bar{\beta}_1 \bar{U}_3^{(1)}] \quad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (8), можно получить

$$\bar{U}_1^{(1)} = -\frac{\bar{x}K(\bar{u}_1^0 \bar{x} + \bar{u}_3^0 \bar{\gamma})[\omega^2 - 2b^2(\bar{x}^2 + \bar{\gamma}^2)]}{R_1(\bar{x}, \bar{\gamma}) \cos \bar{\beta}_1 h} \quad (11)$$

$$\bar{U}_1^{(2)} = \frac{b^2 K(\bar{u}_1^0 \bar{x} + \bar{u}_3^0 \bar{\gamma}) 2\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \bar{x} \sin \bar{\beta}_1 h}{\sin \bar{\beta}_2 h \cos \bar{\beta}_1 h R_1(\bar{x}, \bar{\gamma})}$$

$$\bar{U}_3^{(2)} = -\frac{i2b^2 K \bar{\beta}_1 \sin \bar{\beta}_1 h (\bar{x}^2 + \bar{\gamma}^2) V_0 k \bar{x}}{\alpha^2 b^2 \alpha^2 \sin \bar{\beta}_2 h \cos \bar{\beta}_1 h R_1(\bar{x}, \bar{\gamma}) (\bar{\gamma}^2 - \alpha^2 k^2) (\bar{\gamma}^2 - \bar{\gamma}_1^2)}$$

где $R_1(\bar{x}, \bar{\gamma}) = [\omega^2 - 2b^2(\bar{x}^2 + \bar{\gamma}^2)]^2 + 4\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 b^4 (\bar{x}^2 + \bar{\gamma}^2) \operatorname{tg} \bar{\beta}_1 h \operatorname{ctg} \bar{\beta}_2 h$

Для упрощения полученного решения можно рассматривать область на некотором удалении от места соударения и полагать $\frac{h}{x} \ll 1$, что соответствует длинноволновому приближению $\bar{x}h \ll 1$, $\bar{\beta}_1 h \ll 1$.

Тогда можно получить, полагая, что $\Delta = \Delta^0 + \Delta^1$

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}, \quad \Delta^1 = \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z}$$

$$\bar{U}_1^{(0)} = \frac{V_0 K k \bar{\omega} [\omega^2 - 2b^2(\bar{a}^2 + \bar{\gamma}^2)]}{\omega^2 - s^2 a^2 (\gamma^2 - s^2 k^2) (\bar{\gamma}^2 - \bar{\gamma}_1^2) [1 - c_0^2(a^2 + \bar{\gamma}^2)]} \quad (12)$$

$$\bar{U}_1^1 = \frac{i V_0 K k \bar{\omega} [\omega^2 - 2b^2(\bar{a}^2 + \bar{\gamma}^2)]}{\pi^2 \omega^2 a^2 (\gamma^2 - s^2 k^2) (\bar{\gamma}^2 - \bar{\gamma}_1^2) [1 - c_0^2(a^2 + \bar{\gamma}^2)]}, \quad c_0^2 = \frac{4b^2}{a^2} (a^2 - b^2)$$

где c_0 есть скорость продольных волн в пластинках [5]. Вычисляя в $\bar{\Delta}$ интегралы по $\bar{\gamma}$ в полюсах, соответствующих продольным волнам, для которых $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1$ и волнам в пластинках, где $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_2$, $\bar{\gamma}_2 = \sqrt{\frac{a^2}{c_0^2} - \bar{a}^2}$, получим при $z > 0$

$$\Delta^1 = -\bar{\Delta}^0 + \frac{V_0 K k}{\pi a^2 c_0^2} \int \frac{a \left(1 - \frac{2b^2}{c_0^2}\right) \exp(i\omega(\bar{a}x + \bar{\gamma}_2 z))}{(\bar{\gamma}_1^2 - a^2 k^2)(\bar{\gamma}_2^2 - \bar{\gamma}_1^2) \bar{\gamma}_2} dz \quad (13)$$

где

$$\bar{\gamma}_2 = \sqrt{\frac{1}{c_0^2} - \bar{a}^2}$$

Для получения значения Δ можно к полученному интегралу применить метод [5] вычисления интегралов, основанный на замене контура интегрирования контуром, на котором $\bar{a}x + \bar{\gamma}_2 z$ вещественно.

Учитывая, что $\frac{\partial \Delta}{\partial t}$ содержит под знаком интеграла ω только в показательной функции, можно видеть, что обратное преобразование от нее будет иметь вид $\delta(t - \bar{a}x - \bar{\gamma}_2 z)$, и вычисление интеграла дает

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = -2 \operatorname{Re} \frac{i V_0 2b^2 k}{\pi c_0^2 a^2} \frac{z_2}{[\bar{\gamma}_1^2(a_2) - a^2 k^2] [-x - \bar{\gamma}_1^2(a_2) z] \bar{\gamma}_2(a_2)} \quad (14)$$

где z_2 находится из уравнения

$$\bar{\gamma}_2 = \bar{\gamma}_2(a_2), \quad t - \bar{a}_2 x - \bar{\gamma}_2 z = 0, \quad z_2 = \frac{t x + i z \sqrt{t^2 - \frac{x^2 + z^2}{c_0^2}}}{x^2 + z^2} \quad (15)$$

Тогда можно получить

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = -2 \operatorname{Re} \frac{V_0 4b^2 k}{\pi c_0^2 a^2} \frac{a_2}{\frac{1}{c_0^2} - a_2^2 (1 + k^2)} \frac{1}{\sqrt{t^2 - \frac{x^2 + z^2}{c_0^2}}} \quad (16)$$

Как видно из решения, оно будет верно не только для $z > 0$, но и для произвольного z . Можно из (16) получить асимптотику решения вблизи точечной волны $r = \sqrt{x^2 + z^2} = c_0 t$. Согласно (15) $z_2 \approx \frac{x}{c_0^2 t}$ и,

обозначая $x = r \cos \theta$, из (15), (16) получим

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} \approx -2 \frac{V_0 k 2b^2}{\pi a^2 c_0} \frac{\cos^2 \psi \cos \theta}{\cos^2 \psi - \cos^2 \theta} \frac{1}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_0^2}}} \quad (17)$$

Вдали от B, B' (фиг. 1) $\theta - \psi = 0(1)$ и можно записать

$$\Delta \approx -2 \frac{V_0 \sin 2\psi b^2}{\pi a^2 \sqrt{c_0}} \frac{\cos \theta}{\cos^2 \psi - \cos^2 \theta} \frac{\sqrt{2} \sqrt{t - \frac{r}{c_0}}}{\sqrt{r}} \quad (18)$$

При $r = c_0 t$ $\Delta = 0$, но при $\theta = \psi$ знаменатель обращается в нуль. Рассмотрим решение около B . Поскольку

$$a_2 = \frac{t \cos \theta + i \sin \theta \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_0^2}}}{r}$$

для малых $t - \frac{r}{c_0}$ и $\theta - \psi$ можно записать

$$\frac{1}{c_0^2} - a_2^2 \frac{1}{\cos^2 \psi} \approx \frac{c_0^2 \operatorname{ctg} \psi \left(\theta - \psi + i \sqrt{\frac{2c_0}{r}} \sqrt{t - \frac{r}{c_0}} \right)}{2 \left| (\theta - \psi)^2 + \frac{2c_0}{r} \left(t - \frac{r}{c_0} \right) \right|}$$

В рассматриваемой окрестности $\theta - \psi \sim \sqrt{t - \frac{r}{c_0}}$, тогда получится

$$\Delta \approx -2 \frac{\sqrt{2} V_0 b^2 \sin \psi}{\pi a^2 t r} t^2 \left| \sqrt{t - \frac{r}{c_0}} - \sqrt{\frac{t}{2}} \operatorname{ctg} \psi \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2} \left(t - \frac{r}{c_0} \right)}{(\theta - \psi) \sqrt{t}} \right|$$

или

$$\Delta \approx 2 \frac{V_0 b^2 \cos \psi}{\pi a^2 c_0} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2} \left(t - \frac{r}{c_0} \right)}{\sqrt{t} (-\theta + \psi)} \quad (19)$$

при $\theta > \psi$, что соответствует окрестности BB' .

Полученное решение дает асимптотику решения, соответствующую пластинчатым волнам, причем вне точечной волны при $x^2 + z^2 > c_0^2 t^2$ a_2 действительно и $\frac{\partial \Delta}{\partial t} = 0$. Это относится к области впереди точечной волны, где отсутствуют плоские волны, причем картина волн такая же, как и на фиг. 1. Для получения решения позади плоских волн, которым соответствует $a_2 = \frac{1}{c_0 \sqrt{1+k^2}}$, можно в (14) выделить особую часть решения, полагая, что a_2 следует заменить на $a_2 - i0$, и обобщенную функцию $\frac{1}{a_2 - a_2 + i0}$ записать в виде [9]

$$\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} + \pi i^2 (z_1 - z_2)$$

Тогда получится в области постоянного Δ

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \frac{2V_0 k b^2}{c_0 a^2 \sqrt{1+k^2}} \frac{\alpha_2' \delta(\alpha_2 - \alpha_1)}{\gamma_3(\alpha_2) [-x - \gamma_3(\alpha_2) z]} \quad (20)$$

Учитывая, что

$$\gamma_3(\alpha_2) = \frac{-k}{c_0 \sqrt{1+k^2}}, \quad \delta(t - \alpha_2 x - \gamma_3 z) = \frac{\delta(\alpha_2 - \alpha_1)}{-x - \gamma_3(\alpha_2) z} \quad (21)$$

можно получить позади плоских волн

$$\Delta = - \frac{2V_0 b^2}{c_0 a^2 \sqrt{1+k^2}} \delta \left(t - \frac{x - k|z|}{c_0 \sqrt{1+k^2}} \right) \quad (22)$$

где вместо z подставлено $|z|$, чтобы учесть обе плоские пластинчатые волны. При $k=0$ отсюда получится решение [3]. Решение на AB в $(1+k^2)^{-1/2}$ раз меньше, чем решение плоской задачи [5].

Подобным же образом можно получить решение для больших x для $u_{1,2,3}$. Отметим, что найденные значения решения (16) имеют место не только для правого тела, но и для всех значений $x^2 + y^2 < c^2 t^2$. Позади плоских волн EF и GH решение дается (22), где следует

под знаком δ поставить $t + \frac{x - k|z|}{c_0 \sqrt{1+k^2}}$. В области между ними и то-

чечной волной решение будет равно сумме (22), то есть значение Δ там вдвое больше. Из (16) можно получить особенность решений вблизи волны $x^2 + z^2 = c^2 t^2$.

Для задачи соударения, в которой при $x < 0$ на обеих поверхностях тел имеется жесткая заделка, граничные условия имеют вид $y = \pm h, -\infty < z < +\infty$

$$x > 0 \quad a^2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + K \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) = -K \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x} + \frac{\partial u_2^0}{\partial z} \right) \quad (23)$$

$$x < 0 \quad \bar{u}_2 = 0$$

$$-\infty < x < +\infty \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} = 0$$

Подставляя (9) в (21) и обращая преобразования по (x, z) , можно получить соотношения

$$\bar{U}_1^{(1)} \frac{i \cos \bar{\beta}_1 h}{z} |\omega^2 - 2b^2(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2)| + \bar{U}_3^{(2)} 2b^2 \bar{\beta}_2 \cos \bar{\beta}_2 h = -K(i\alpha \bar{u}_1^0 + i\bar{\gamma} \bar{u}_3^0) + \Omega^* \quad (24)$$

$$\Omega^* = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i(\alpha x + \bar{\gamma} z)) \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} \right)_{y=h} dx$$

$$V^- = \frac{1}{4x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} \exp(-i(\bar{\alpha}x + \bar{\gamma}z))(U_2)_{y=h} dx$$

$$\frac{i\bar{\beta}_2}{a} \bar{U}_1^{(1)} \sin \bar{\beta}_1 h + \bar{U}_1^{(2)} \sin \bar{\beta}_2 h = V^- \quad (25)$$

$$-2\bar{U}_1^{(1)} \bar{\beta}_1 \sin \bar{\beta}_1 h - \bar{\beta}_2 \bar{U}_1^{(2)} \sin \bar{\beta}_2 h + i\bar{a} \bar{U}_1^{(2)} \sin \bar{\beta}_2 h = 0$$

$$-\frac{\bar{\gamma} \bar{\beta}_1}{a} \frac{2 \sin \bar{\beta}_1 h}{\sin \bar{\beta}_2 h} \bar{U}_1^{(1)} + \bar{U}_1^{(2)} i \left(\bar{\gamma} - \frac{\bar{\beta}_2}{\bar{\gamma}} \right) + \frac{\bar{\beta}_2}{\bar{\gamma}} \bar{U}_1^{(2)} = 0$$

Исключая из полученных уравнения $\bar{U}_1^{(2)}$, $\bar{U}_1^{(1)}$, $\bar{U}_1^{(1)}$, можно получить уравнение

$$\frac{V^-}{\bar{\beta}_2 h} \left[\omega^2 - \frac{4b^2}{a^2} (a^2 - b^2)(\bar{\alpha}^2 + \bar{\gamma}^2) \right] = \Omega^+ + f(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}) \quad (26)$$

где произведены упрощения для $\bar{\alpha}h \ll 1$

$$f(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}) = -\frac{iKkV_0 \bar{a}^2}{s^2 \pi^2 a^2 (\bar{\gamma}^2 - \bar{\alpha}^2 k^2) (\bar{\alpha} + \bar{\alpha}_3) (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_1)} \quad (27)$$

Проводя факторизацию, получим

$$f^-(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}) = \frac{iKkV_0 \bar{a}^2}{\pi^2 a^2 (\bar{\gamma}^2 - \bar{\alpha}^2 k^2) (\bar{\alpha} + \bar{\alpha}_3) (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_1)} +$$

$$+ \frac{iKkV_0 \frac{\bar{a}}{k}}{\pi^2 a^2 \left(\bar{\alpha} + \frac{\bar{\gamma}}{k} \right) 2\bar{\gamma} \left(-\frac{\bar{\gamma}}{k} + \bar{\alpha}_2 \right) \left(-\frac{\bar{\gamma}}{k} + \bar{\alpha}_1 \right)} +$$

$$+ \frac{iKkV_0 \bar{a}_3}{\pi^2 a^2 (\bar{\gamma}^2 - \bar{\alpha}_3^2 k^2) (\bar{\alpha} + \bar{\alpha}_3) (-\bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_1)} \quad (28)$$

$$f^+(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}) = \frac{iKkV_0}{2\pi^2 a^2 k \left(\bar{\alpha} + \frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \left(-\frac{\bar{\gamma}}{k} + \bar{\alpha}_3 \right) \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} + \bar{\alpha}_1 \right)} +$$

$$+ \frac{iKkV_0 \bar{a}_3}{\pi^2 a^2 (\bar{\gamma}^2 - k^2 \bar{\alpha}_3^2) (\bar{\alpha} + \bar{\alpha}_3) (\bar{\alpha}_3 + \bar{\alpha}_1)}$$

где

$$\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_1(\bar{\gamma}) = \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \bar{\gamma}^2}, \quad \bar{\alpha}_3 = \bar{\alpha}_3(\bar{\gamma}) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \bar{\gamma}^2}$$

Подобным же образом записывается множитель при V^- и после решения уравнения (24) получится

$$\bar{U}_1^{(1)} = -\frac{ia\bar{a}_3}{4b^2(a^2 - b^2)} \frac{\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_3} [\omega^2 - 2b^2(\bar{\alpha}^2 + \bar{\gamma}^2)] f^-(\bar{\alpha}, \bar{\gamma})$$

$$\bar{U}_1^{(1)} = \frac{i\bar{\beta}_2}{\alpha} \bar{U}_1^{(0)}, \quad \bar{U}_1^{(0)} = \frac{\bar{\gamma}}{\alpha} \bar{U}_1^{(1)} \quad (29)$$

Значение $\bar{\Delta}'$ найдется в виде

$$\bar{\Delta}' = \frac{\omega^2 \bar{U}_1^{(1)}}{\alpha a^2} i \quad (30)$$

и для $\bar{\Delta}'$ получится

$$\bar{\Delta}' = -\frac{1}{4b^2(a^2-b^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{\exp(i(\bar{\alpha}_3 x + \bar{\gamma} z)) [\omega^2 - 2b^2(\bar{\alpha}^2 + \bar{\gamma}^2)]}{(\alpha - \alpha_3)(\alpha + \alpha_1)} f^-(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}) d\bar{\alpha} d\bar{\gamma} \quad (31)$$

Вычисляя для $x > 0$ вычеты в полюсах $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_3$, $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_1$, можно решение получить в следующем виде:

$$\bar{\Delta}' = -\frac{\pi i K \omega^2}{4b^2(a^2-b^2)^2} \int \frac{\exp(i(\bar{\alpha}_3 x + \bar{\gamma} z))}{\alpha_3 + \alpha_1} f^-(\bar{\alpha}_3, \bar{\gamma}) d\bar{\gamma} - \frac{k V_0}{\pi a^2} \int \frac{\exp(i(\bar{\alpha}_3 x + \bar{\gamma} z))}{\bar{\gamma}^2 - \alpha_1^2 k^2} d\bar{\gamma}$$

Учитывая (6), где в (31) взят вычет в интеграле по α , получим

$$\bar{\Delta} = -\frac{i K \omega^2}{4b^2(a^2-b^2)^2} \int \frac{\exp(i(\bar{\alpha}_3 x + \bar{\gamma} z))}{\alpha_3 + \alpha_1} f^-(\bar{\alpha}_3, \bar{\gamma}) d\bar{\gamma} \quad (32)$$

Проводя обращение интегральных преобразований подобно (14), можно получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial t} = & -2 \operatorname{Re} l \frac{k V_0}{\pi(a^2-b^2)} \frac{1}{-\alpha_3(\gamma_0)x - z} \frac{1}{\alpha_3(\gamma_0) + \alpha_1(\gamma_0)} \frac{1}{\gamma_0^2 - \alpha_1^2(\gamma_0)k^2} \times \\ & \times \left[\alpha_2(\gamma_0) + \frac{K^2 k}{8a^2 b^2 (a^2 - b^2)} \frac{1}{\frac{\gamma_0}{k} + \alpha_1(\gamma_0)} \right] \quad (33) \end{aligned}$$

где

$$\gamma_0 = \frac{tz + ix \sqrt{t^2 - \frac{x^2 + z^2}{c^2}}}{x^2 + z^2}$$

Таким образом, получено решение для малых h при $x > 0$ внутри точечной волны $x^2 + z^2 < c^2 t^2$. Вне ее γ_0 действительно и решение равно нулю.

В области впереди точечной волны, где имеются плоские волны, асимптотика решений записывается, как и выше.

ՀԱՎԱՍԱՐ ԵՐԿՆԻՍ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ԵՎ ԿՈՒԳԱԶԵՐԻ
ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿԱԾ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ
ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԲԱՆՈՒՄԸ

Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, ՅՈՒ. Ս. ՍԱԳԱՐՅԱՆ

Ա մ փ ո ս մ

Գտնված է իրար հանդեպ հավասար հաստատուն արագությամբ շարժվող և արտաքինից երկնիստ անկյուններով և հարթ մակերևույթներով սահմանափակված վերջավոր բարձրությամբ առաձգական մարմինների բախման խնդրի լուծման ասիմպտոտիկան: Գտնված է խնդրի լուծման ասիմպտոտիկան կետային սալաձև ալիքների շրջակայքում: Առաձգական միջավայրում դինամիկ հավասարումների լուծումը որոշված է կապլասի և Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով: Գտնված է նաև ասիմպտոտիկան խառը եզրային պայմաններով խնդրի լուծման համար:

THE IMPACT OF ELASTIC BODIES BOUNDED BY EQUAL
TWO-SIDED ANGLES AND PARALLEL PLANES

A. N. MARTIROSSIAN, I. S. SAFARIAN

S u m m a r y

The asymptote of the solution of the problem of impact of elastic bodies of finite depth bounded by two-sided angles and moving to meet one another with constant equal velocities is found. The asymptote of the solution of the problem near point plate wave is found. The solutions of dynamical equations for elastic medium are given by the method of integral transformations of Laplace and Fourier. Also the asymptote of the solution of mixed boundary problem is revealed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л—М.: ОНТИ, 1937.
2. Малков М. А. Двумерная задача об упругом соударении стержней.—ДАН СССР, 1965, т. 148, № 4.
3. Малков М. А. Асимптотика двумерной задачи об упругом соударении стержней.—ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
4. Skulak R. Longitudinal Impact of some Infinite Bars.—Journal of Applied Mechanics, 1957, 24, 1. 59—64.
5. Багдоян А. Г., Мартиросян А. Н. Задача соударения стержней при смешанных граничных условиях.—ДАН СССР, 1976, т. 226, № 3.
6. Мартиросян А. Н. Некоторые нестационарные граничные задачи для упругой среды, граничащей с жидкостью.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1982, т. 35, № 2.
7. Пюбл Б. Применение метода Винера—Хопфа для решения в частных производных. М.: ИЛ, 1962.
8. Мартиросян А. Н. Решение некоторых нестационарных граничных задач теории упругости. Канд. диссертация, ЕГУ, 1977.
9. Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлик С. Г., Натансон Г. И., Гиз Л. М., Слабодецкий Л. Н., Смирнов М. М. Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964.

Երևանский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Поступила в редакцию
3.VI. 1983

УДК 537.2 : 539.3

К ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СДВИГОВЫХ ВОЛН
 В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

АВЕТИСЯН А. С.

Исследованию распространения электроупругих волн в пьезоэлектрических кристаллах посвящен ряд работ, обзор которых приведен в [1]. В этих работах рассматривается как плоское поле упругих смещений $u = [u_1(x_1, x_2, t), u_2(x_1, x_2, t), 0]$, так и антиплоское поле смещений $u = [0, 0, u_3(x_1, x_2, t)]$. В [2] рассматривается возможность постановки плоской и антиплоской задач для кристаллов. В настоящей работе исследуется возможность постановки этих задач для кристаллических сред с учетом пьезоэлектрического эффекта. Показывается, что учет пьезоэффекта суживает семейство тех кристаллов, для которых возможны плоская и антиплоская задачи без учета пьезоэффекта.

§ 1. Уравнения электроупругости в квазистатической постановке при отсутствии массовых сил имеют вид [9]

$$c_{ijmn} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_n} + e_{ijm} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_m} = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

$$e_{ijm} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_m} - \varepsilon_{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

Здесь c_{ijmn} , e_{ijm} и ε_{ij} — тензоры упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических постоянных, соответственно, φ — потенциал электрического поля.

На основе анализа уравнения (1.1) выясняем для каких кристаллов возможна постановка плоской задачи при учете пьезоэлектрического эффекта. Для плоской задачи одна из компонент вектора упругого перемещения должна равняться нулю, а остальные характеристики механического и электрического полей не должны зависеть от соответствующей координаты.

Пусть $u_\alpha = 0$; $\partial / \partial x_\alpha = 0$; $\alpha = 1, 2, 3$ (1.2)

Как показано в [2], без учета пьезоэлектрического эффекта плоская задача возможна при условиях

$$c_{\alpha\alpha\beta\beta} = c_{\alpha\beta\beta\alpha} = c_{\alpha\beta\alpha\beta} = c_{\beta\beta\alpha\alpha} = c_{\alpha\beta\alpha\beta} = c_{\beta\alpha\beta\alpha} = 0 \quad (1.3)$$

Здесь и в дальнейшем $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$; $\beta, \gamma \neq \alpha$; $\beta \neq \gamma$.
 Условия (1.3) выполняются для кристаллов ромбической, тетраго-

нальной, гексагональной и кубической симметрии [2]. Принимая условия (1.3) и учитывая пьезоэффект для указанных кристаллов, на основе (1.1) с учетом (1.2) получим дополнительное соотношение, обусловленное пьезоэффектом

$$e_{i,m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_m} = 0; \quad i, m \neq 2 \quad (1.4)$$

Для тождественного выполнения этого условия необходимо равенство нулю следующих пьезомодулей:

$$e_{2,1} = e_{2,3} = e_{2,2} = 0 \quad (1.5)$$

Соотношения (1.3) и (1.5) необходимы для существования плоской задачи. В общем случае из соотношения (1.3) не следует соотношение (1.5). Следовательно, в общем случае для вышеуказанных кристаллических сингоний постановка плоской задачи невозможна. Рассмотрим для каких частных случаев симметрии выполняются одновременно соотношения (1.3) и (1.5).

Пусть пьезоэлектрическая среда отнесена к прямоугольной декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 , ось x_2 совпадает с главной осью симметрии кристалла.

Поле перемещений выберем так, что $u_2 = 0; \partial/\partial x_2 = 0$. Тогда соотношение (1.4) примет вид

$$e_{12m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_m} + e_{32m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3 \partial x_m} = 0; \quad m = 1, 3 \quad (1.6)$$

Для тождественного выполнения этого соотношения необходимо равенство нулю пьезомодулей $e_{121}, e_{123}, e_{321}, e_{323}$. Условие (1.6) тождественно выполняется для класса $2mm$ ромбической, класса $4mm$ тетрагональной и классов $6mm$ и $\bar{6}m2$ гексагональной симметрии. Уравнения электроакустики для этих классов имеют вид:

$$e_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + c_{55} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + e_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + (e_{13}^* + e_{15}^*) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

$$e_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + c_{55} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + e_{11}^* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + e_{33}^* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \quad (1.7)$$

$$e_{11}^* \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + (e_{13}^* + e_{15}^*) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + e_{33}^* \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + e_{13}^* \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - e_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - e_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0$$

Значения коэффициентов для соответствующих классов приведены в табл. 1.

Из уравнения (1.7) и табл. 1 видно, что для класса $2mm$ ромбической симметрии в случае плоской деформации уравнения относительно упругих и электрических полей разделяются. В остальных случаях упругие и электрические поля взаимосвязаны. Для классов $4mm$ и $6mm$ уравнения электроакустики совпадают.

Таблица 1

	2m	4m	6m	6m2
ϵ_{55}	ϵ_{55}	ϵ_{44}	ϵ_{44}	ϵ_{44}
ϵ_{11}	0	0	0	ϵ_{11}
ϵ_{13}	0	ϵ_{13}	ϵ_{13}	0
ϵ_{35}	0	ϵ_{13}	ϵ_{35}	0
ϵ_{33}	0	ϵ_{33}	ϵ_{33}	0

Кроме вышеуказанных классов существуют классы, для которых плоская задача возможна при добавочных условиях относительно электрического поля. Для классов 4 и 422 тетрагональной, а также для классов 6 и 622 гексагональной симметрии плоская задача возможна, если заранее предполагается, что

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_1} = 0 \quad (1.8)$$

Для класса 6 гексагональной симметрии это условие имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = 0 \quad (1.9)$$

Уравнения электроакустики для этих классов получаются из (1.7) с учетом (1.8) или (1.9), соответственно.

Рассмотрим плоскую задачу, когда $u_3 = 0$ и $\partial^2 \varphi / \partial x_3^2 = 0$. Тогда условие (1.4) принимает вид

$$\epsilon_{11k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_k} + \epsilon_{22k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_k} = 0; \quad k=1, 2 \quad (1.10)$$

и тождественно выполняется для класса 422 тетрагональной и классов 6, 622 и 6m2 гексагональной симметрии. При этом уравнения электроупругости имеют вид

$$\begin{aligned} c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (c_{11} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_1} + c_{44} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + e_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - 3e_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_1} - \\ - 2e_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ c_{11} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (c_{11} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + e_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - 3e_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} - \\ - 2e_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - 3e_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_1} - 2e_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + c_{11} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - 3e_{11} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_1} - 2e_{11} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \\ - e_{11} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Значения коэффициентов со звездочками приведены в табл. 2. Из (1.11) и из табл. 2 видно, что для классов 422 и 622 в случае плоской деформации уравнения, определяющие упругие и электрические поля, разделяются.

Таким образом, выявлено, что постановка плоской задачи возможна только для некоторых классов ромбической, тетрагональной и гексагональной симметрии.

Таблица 2

	422	622	6	6m2
e_{11}^*	0	0	e_{21}	e_{11}
e_{22}^*	0	0	e_{11}	0

Плоскую задачу рассмотрели Tseng и White [3]. Они исследовали волны Рэлея в кристаллах CdSe, CdS, ZnO (гексагональная симметрия, класс 6 *mm*).

Рассмотрим теперь вопрос существования антиплоской деформации. Для антиплоской задачи две компоненты вектора упругого перемещения должны быть равны нулю, а остальные характеристики механического и электрического полей не должны зависеть от третьей координаты

$$u_a = u_3 = 0; \quad \partial_i \partial x_j = 0 \quad (1.12)$$

В работе [2] показано, что без учета пьезоэффекта антиплоская задача возможна для кристаллов ромбической, тетрагональной и гексагональной симметрий, для которых выполняется условие

$$c_{2a12} = c_{2a13} = c_{2212} = c_{2213} = c_{4212} = c_{4213} = 0 \quad (1.13)$$

Учет пьезоэффекта приводит к следующим добавочным условиям для существования антиплоской задачи:

$$\begin{aligned} e_{2a1k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_a \partial x_k} + e_{221k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_k} &= 0 \\ e_{421k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_a \partial x_k} + e_{441k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_k} &= 0 \quad k = a, \beta \end{aligned} \quad (1.14)$$

Для тождественного выполнения условий (1.14) необходимо, чтобы

$$e_{2a1k} = e_{2a2k} = e_{421k} = e_{441k} = e_{221k} = e_{441k} = 0 \quad (1.15)$$

Условия (1.15) выполняются не для всех классов вышеуказанных сингоний.

Рассмотрим случай, когда упругое поле имеет вид $u = [0, 0, u_3(x_1, x_2, t)]$ и $\partial_i \partial x_j = 0$. В этом случае условие (1.15) выполняется для классов 222 и 2mm ромбической, классов 4; $\bar{4}$; 42m; 422 и 4mm тетрагональной, классов 6; 622; 6mm гексагональной и для всех классов кубической симметрии. Уравнения электроупругости для этих классов имеют вид

$$e_{55}^* \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + e_{44} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + e_{15}^* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + e_{24} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + (e_{14}^* + e_{23}^*) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \quad (1.16)$$

$$e_{15}^* \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + (e_{14}^* + e_{23}^*) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + e_{24} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} - e_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - e_{22}^* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0$$

Значения коэффициентов со звездочками приведены в табл. 3. Из таблицы видно, что для классов 422 и 622 в случае антиплоской деформации имеем несвязанные уравнения относительно упругих и электрических полей.

Таблица 3

	222	2mm	куб.	422	4	$\bar{4}$	42m	4mm	6	622	6mm
e_{55}^*	e_{55}	e_{55}	e_{11}	e_{11}	e_{11}	e_{33}	e_{11}	e_{11}	e_{11}	e_{11}	e_{11}
e_{14}^*	e_{14}	0	e_{14}	0	0	e_{14}	e_{14}	0	0	0	0
e_{15}^*	0	e_{15}	0	0	e_{15}	e_{15}	0	e_{15}	e_{15}	0	e_{15}
e_{24}^*	0	e_{24}	0	0	e_{24}	$-e_{24}$	0	e_{24}	e_{24}	0	e_{24}
e_{23}^*	e_{23}	0	e_{23}	0	0	e_{11}	e_{11}	0	0	0	0
e_{22}^*	e_{22}	e_{22}	e_{11}	e_{11}	e_{11}	e_{33}	e_{11}	e_{11}	e_{11}	e_{11}	e_{11}

Другой случай антиплоского упругого поля $\mathbf{u} = [0, u_2(x_1, x_2, t), 0]$ и $\partial/\partial x_2 = 0$ возможен для класса 222 ромбической, классов 422 и $\bar{4}2m$ тетрагональной, 622 гексагональной и кубической симметрий. Уравнения электроупругости для этих классов имеют вид

$$e_{66}^* \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + e_{34} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (e_{14}^* + e_{23}^*) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \quad (1.17)$$

$$(e_{14}^* + e_{23}^*) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} - e_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - e_{22}^* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0$$

Значения коэффициентов со звездочками приведены в табл. 4.

Таблица 4

	222	422	42m	622	куб.
e_{66}^*	e_{66}	e_{66}	e_{66}	e_{64}	e_{44}
e_{34}^*	e_{34}	0	e_{34}	0	e_{14}
e_{37}^*	e_{37}	e_{37}	e_{37}	e_{37}	e_{11}

Как видно, при учете пьезоэлектрического эффекта антиплоская задача возможна для более узкого семейства кристаллов по сравнению с результатами, полученными в [2].

Вопросу распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрических кристаллах посвящена обширная литература. Гуляев и Bleustein впервые показали существование чисто сдвиговых поверхностных волн в

кристаллах класса 6mm гексагональной симметрии [4—5]. Tseng решил аналогичную задачу для класса 2mm ромбической и класса 23 кубической симметрии [6]. Paul и Anandam исследовали поперечные поверхностные волны в пьезоэлектрическом кристалле класса 622 гексагональной симметрии [7]. В работе [8] рассмотрено распространение, преломление и отражение поперечных волн в пьезокристаллах для многих классов.

§ 2. В качестве примера рассмотрим распространение сдвиговых волн $u = [0, 0, u_3(x_1, x_2, t)]$ в пьезокристалле класса 222 ромбической симметрии. Уравнения пьезоакустики для этой задачи получим из (1.16) с учетом табл. 3.

$$c_{44} \left(a \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right) + (e_{14} + e_{25}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

$$(e_{14} + e_{25}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \epsilon_{11} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) = 0$$

Здесь $a = c_{53}/c_{44}$; $b = \epsilon_{22}/\epsilon_{11}$. Для скорости распространения объемных сдвиговых волн получим выражение

$$v^2 = c_1^2 \left[1 - (1-a) \cos^2 \theta + \frac{x^2}{4} \frac{\sin^2 \theta}{1 + (b-1) \sin^2 \theta} \right] \quad (2.2)$$

где $c_1^2 = c_{44}/\rho$; $x^2 = (e_{14} + e_{25})^2 / (c_{44} \epsilon_{11})$.

Вдоль координатных осей x_1 , x_2 скорости распространения сдвиговых волн, соответственно, равны: $c_2^2 = c_{53}/\rho$, $c_3^2 = c_{44}/\rho$.

Рассмотрим задачу распространения поверхностных сдвиговых волн. Пусть граница полупространства есть плоскость $x_2 = 0$ и ось x_2 направлена в глубь кристалла. Ось x_3 совпадает с главной осью симметрии кристалла. Волна распространяется вдоль оси x_1 .

Сначала рассмотрим задачу со свободной границей. Граничные условия для свободной границы запишутся в виде

$$c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + e_{14} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0; \quad \varphi = \varphi_0, \quad e_{14} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \epsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_2} \quad (2.3)$$

Потенциал φ_0 в вакууме удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi_0 = 0 \quad (2.4)$$

Затухающие по x_2 решения системы уравнений (2.1) и (2.4) будут

$$u_3 = [A_1 \exp(ks_1 x_2) + A_2 \exp(ks_2 x_2)] \exp ik(x_1 - vt)$$

$$\varphi = [i_1 A_1 \exp(ks_1 x_2) + i_2 A_2 \exp(ks_2 x_2)] \exp ik(x_1 - vt) \quad (2.5)$$

$$\varphi_0 = A_3 \exp(kx_2) \exp ik(x_1 - vt)$$

Здесь $s_{1,2}$ — коэффициенты затухания

$$s_{1,2} = - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1+x^2}{b} + \frac{2c_1^2 - c_2^2 - v^2}{c_1^2} \right) \pm \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1+x^2}{b} + \frac{2c_1^2 - c_2^2 - v^2}{c_1^2} \right)^2 - \frac{1}{b} \left(\frac{2c_1^2 - c_2^2 - v^2}{c_1^2} \right) \right]^{1/2} \right]^{1/2}$$

$$\lambda_k = \frac{c_{44}(v^2/c_1^2 - s_2^2 - a)}{i(e_{24} + e_{23})s_k}; \quad k=1, 2 \quad (2.6)$$

Подставляя решения (2.5) в граничные условия (2.3), получим дисперсионное уравнение следующего вида:

$$(c_{44}e_{22}s_1s_2 - e_{14}^2) \left(s_1s_2 + a - \frac{v^2}{c_1^2} \right) + e_{14}(e_{24} + e_{23})s_1s_2 - \frac{e_{24} \cdot c_{44}}{e_{24} + e_{23}} s_1^2s_2^2 - \\ - \frac{e_{24} \cdot c_{44}}{e_{24} + e_{23}} \left(\frac{v^2}{c_1^2} - a \right) \left[\frac{v^2}{c_1^2} - a + s_1^2 + s_2^2 \right] + \varepsilon_0 c_{44}(s_1 + s_2) \left(\frac{v^2}{c_1^2} - a \right) = 0 \quad (2.7)$$

где s_1 и s_2 определяются по формулам (2.6).

В общем случае коэффициенты затухания α_1 и α_2 и дисперсионное уравнение могут быть комплексными. Таким образом, скорость поверхностной волны должна удовлетворять не одному, как при действительных значениях s_j , а двум вещественным уравнениям, что возможно в двух случаях: либо, когда скорость есть комплексная величина $v = v' + iv''$ и тогда поверхностные волны не являются собственными колебаниями системы (то есть распространение поверхностной волны невозможно), либо действительная и мнимая части дисперсионного уравнения линейно зависимы и содержат общий вещественный множитель. Обращение в нуль этого множителя и определяет скорость поверхностной волны [8].

Более простой вид дисперсионного уравнения получается в случае металлизированной свободной границы. Тогда граничные условия имеют вид [8]

$$c_{44} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + e_{14} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0; \quad \varphi = 0; \quad e_{14} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \varepsilon_{22} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} - \varepsilon_n \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_2} \quad (2.8)$$

В этом случае дисперсионное уравнение получается в следующем виде:

$$(v^2 - c_2^2)(s_1^2 - s_2^2) = 0 \quad (2.9)$$

$v = c_2$ (c_2 — скорость объемной волны по направлению ox_1), а равенство нулю второго множителя $s_1^2 - s_2^2$ дает комплексное решение для фазовой скорости v . Следовательно, поверхностная волна не является собственным колебанием системы.

Такой же результат получается, если вместо граничных условий (2.3) или (2.8) рассмотреть условия

$$c_{44} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + e_{24} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0; \quad \varphi = \varphi_0; \quad e_{14} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \varepsilon_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0 \quad (2.10)$$

В этом случае дисперсионное уравнение вновь имеет комплексное решение для фазовой скорости v и, следовательно, поверхностная волна не является собственным колебанием системы.

На основании исследований, проведенных при граничных условиях (2.8) и (2.10), можно сделать вывод, что в случае граничных условий (2.3) существование поверхностной сдвиговой волны в пьезокристалле класса 222 ромбической симметрии невозможно.

ՊԻԵԶՈՒԷԼԵԿՏՐԻԿ ՄԻՋԱՎԱՑՐՈՒՄ ՍԱՀՔԻ ԱԿՒՔՆԵՐԻ
ՏԱՐԱԾՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Ս. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Ուսումնասիրվում է հարթ և հակահարթ խնդիրների դրվածքի հնարավորությունը բյուրեղային միջավայրի համար պինգոէլեկտրական էֆեկտի հաշվառումով: Ցույց է տրվում, որ պինգոէֆեկտի հաշվառումը նեղացնում է այն բյուրեղների դասը, որոնց համար հնարավոր են հարթ և հակահարթ խնդիրները առանց պինգոէֆեկտի հաշվառման: Դիտարկվում է սահքի մակերևույթային ալիքների տարածումը շեղանկյուն սիմետրիայի 222 դասի բյուրեղներում, տարրեր եղրային պայմանների դեպքում:

ABOUT THE PROBLEM OF THE PROPAGATION OF
TRANSVERSAL WAVES IN PIEZOELECTRIC BODIES

A. S. AVETISSIAN

S u m m a r y

The possibility of formulation of the plane and antiplane problems in crystal bodies with account of piezoelectric effect is studied.

It is shown that the account of piezoelectric effect reduces the class of these crystals for which the plane and antiplane problems are possible.

The propagation of surface transversal waves in the crystals of class 222 of orthorhombic symmetry with different boundary conditions is considered.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кудрявцев Б. А. Механика пьезоэлектрических материалов. Итоги науки и техники. Серия «Механика твердого деформируемого тела», 1978, т. 11.
2. Ханджян А. А. О плоской и антиплоской задаче теории упругости в однородных анизотропных средах. Ученые записки ЕГУ, 1982, № 2.
3. Tseng C. C. and White R. M. Propagation of piezoelectric and elastic surface waves on the basal plane of hexagonal piezoelectric crystals.—J. Appl. Phys. 1967, vol. 38, № 11.
4. Гуляев Ю. В. Поверхностные электрозвуконные волны в твердых телах. Письма в ЖЭТФ, 1969, т. 9, № 1.
5. Bleustein J. L. A new surface waves in piezoelectric materials.—Appl. Phys. Lett. 1968, vol. 13, № 12.
6. Tseng C. C. Piezoelectric surface waves in cubic and orthorhombic crystals.—Appl. Phys. Lett. 1970, vol. 16, № 6.
7. Paul H. S. and Anandam C. Transvers waves in piezoelectric 622 crystal class.—Pure and Appl. Geophys. 1971, vol. 88, № 5.
8. Балакирева М. К., Глинский Н. А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982.
9. Руде Д., Дьелесан Э. Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
11.XI. 1983

УДК 539.374

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИ
 АНИЗОТРОПНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ТРУБЫ

АКОПЯН А. Г.

Рассматривается предельное состояние анизотропной, идеальной жестко-пластической, несжимаемой, длинной конической трубы при различных внешних воздействиях. Принимается, что материал трубы подчиняется соотношениям жестко-пластического тела Мизеса—Хилла [6] и главные оси анизотропии совпадают с осями сферической системы координат, центр которой помещен в вершине конической трубы.

Плоская задача пластически анизотропных тел изучалась сравнительно много. В работах [1, 2] получены основные уравнения плоской деформации пластически анизотропных тел. Частные решения осесимметричной задачи теории идеальной пластичности цилиндрически анизотропного материала получены в работе [3]. Осесимметричное радиальное течение анизотропной массы в коническом канале исследовано в работе [4]. Предельное состояние изотропной конической трубы при равномерных внутреннем и внешнем давлениях изучено в [1]. Вопросы пластического течения изотропной конической трубы под влиянием различных внутренних и внешних воздействий исследованы в работе [5].

§ 1. Общие уравнения задачи

В случае осесимметричного течения дифференциальные уравнения равновесия в сферической системе координат в обычных обозначениях имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [(\sigma_\theta - \sigma_r) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\theta}] &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (3\tau_{r\theta} + 2\tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta) &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Зависимости между компонентами тензора скоростей деформации, скоростей перемещения и напряжений—

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \Omega [H_0(\sigma_r - \sigma_\theta) + G_0(\sigma_r - \sigma_z)]$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \Omega [F_0(\sigma_\theta - \sigma_r) + H_0(\varepsilon_\theta - \varepsilon_r)] \\
\varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \theta = \Omega [G_0(\sigma_r - \sigma_\theta) + F_0(\sigma_r - \sigma_\theta)] \\
2\gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} = \Omega N_0 \tau_{r\theta} \\
2\gamma_{r\varphi} &= \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} = \Omega M_0 \tau_{r\varphi} \\
2\gamma_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{w}{r} \operatorname{ctg} \theta = \Omega L_0 \tau_{\theta\varphi}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Условие текучести Мизеса-Хилла—

$$F_0(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + G_0(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + H_0(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + L_0 \tau_{\theta\varphi}^2 + M_0 \tau_{r\varphi}^2 + N_0 \tau_{r\theta}^2 = 1 \tag{1.3}$$

Компоненты напряжений удобно представить в виде

$$\sigma_r = \sigma_\theta + \frac{1}{\Omega} (F\varepsilon_r - G\varepsilon_\theta) \tag{1.4}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r - \frac{1}{\Omega} [H\varepsilon_r + (G + H)\varepsilon_\theta]$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{2}{\Omega} N \tau_{r\theta}, \quad \tau_{r\varphi} = \frac{2}{\Omega} M \tau_{r\varphi}, \quad \tau_{\theta\varphi} = \frac{2}{\Omega} L \tau_{\theta\varphi}$$

$$\Omega = \sqrt{(F+H)\varepsilon_r^2 + 2H\varepsilon_r\varepsilon_\theta + (G+H)\varepsilon_\theta^2 + 4L\tau_{\theta\varphi}^2 + 4M\tau_{r\varphi}^2 + 4N\tau_{r\theta}^2}$$

где

$$\begin{aligned}
F &= \frac{F_0}{\Delta}, \quad G = \frac{G_0}{\Delta}, \quad H = \frac{H_0}{\Delta}, \quad L = \frac{1}{L_0}, \quad M = \frac{1}{M_0}, \quad N = \frac{1}{N_0} \\
\Delta &= F_0 G_0 + G_0 H_0 + H_0 F_0
\end{aligned}$$

Скорости перемещений и компоненты напряжений можно выразить через неизвестные функции $f(\theta)$ и $\psi(\theta)$

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \sigma_\theta + \frac{1}{\omega} \{ [G + \lambda(G+F)] f' + (\lambda F - G) f \operatorname{ctg} \theta \} \\
\sigma_\theta &= \sigma_r + \frac{1}{\omega} \{ [(1+\lambda)G + H] f' - [(1+\lambda)H + G] f \operatorname{ctg} \theta \} \\
\tau_{r\theta} &= \frac{N}{\omega} \left\{ f'' + \operatorname{ctg} \theta f' + \left[(2+\lambda)(1-\lambda) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] f \right\} \\
\tau_{r\varphi} &= (\lambda + 2)(\lambda - 1) M \frac{\psi \sin \theta}{\omega}, \quad \tau_{\theta\varphi} = (\lambda + 2) L \frac{\psi \sin \theta}{\omega}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\omega = \left\{ \lambda^2(F+H)(f' + f \operatorname{ctg} \theta)^2 + 2\lambda H(f' + f \operatorname{ctg} \theta) [f \operatorname{ctg} \theta - (\lambda+1)f'] + \right. \\ \left. + (G+H) [f \operatorname{ctg} \theta - (\lambda+1)f']^2 + N \left\{ f'' + \operatorname{ctg} \theta f' + \left[(2+\lambda)(1-\lambda) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] f \right\}^2 + (\lambda+2)^2 \sin^2 \theta [(\lambda-1)^2 M \psi^2 + L \psi'^2] \right\}^{1/2} \\ u = r^\lambda (f' + f \operatorname{ctg} \theta), \quad v = -(\lambda+2)r^\lambda f, \quad \omega = (\lambda+2)r^\lambda \psi \sin \theta \\ \lambda = \text{const} \quad (1.6)$$

Из уравнений равновесия (1.1) и соотношения (1.5) получим выражение

$$\tau_\theta = -C + D \ln r - 3 \int \tau_\theta d\theta + \int \{ [(1+\lambda)G + H] f' - \\ - [(1+\lambda)H + G] f \operatorname{ctg} \theta \} \operatorname{ctg} \theta \frac{d\theta}{\omega} \quad (1.7)$$

и систему из двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений относительно $f(\theta)$ и $\psi(\theta)$

$$\frac{1}{\omega} \{ [\lambda(2F+G) + G-H] f' \sin \theta + [\lambda(2F+H) + H-G] f \cos \theta \} + \\ + N \left(\frac{\sin \theta}{\omega} \left\{ f'' + \operatorname{ctg} \theta f' + \left[(2+\lambda)(1-\lambda) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] f \right\} \right)' + D \sin \theta = 0 \quad (1.8) \\ L \left(\frac{\sin^2 \theta}{\omega} \psi' \right)' + 3(\lambda-1)M \frac{\sin^2 \theta}{\omega} \psi = 0$$

где C и D — произвольные постоянные.

Характером течения материала определяются краевые условия для системы уравнений (1.8).

При $\lambda = -2$, $\psi(\theta) = 0$ имеем случай радиального течения, рассмотренный в работе [4].

§ 2. Кручение анизотропной конической трубы распределенными кольцевыми касательными силами, действующими на боковых поверхностях

Пусть на внутренней и на внешней боковых поверхностях длинной ортотропной конической трубы, соответственно, приложены кольцевые касательные распределенные нагрузки (фиг. 1).

$$\tau_{\theta r} = q_1 \quad \text{при} \quad \theta = \alpha; \quad \tau_{\theta r} = q_2 \quad \text{при} \quad \theta = \beta \quad (2.1)$$

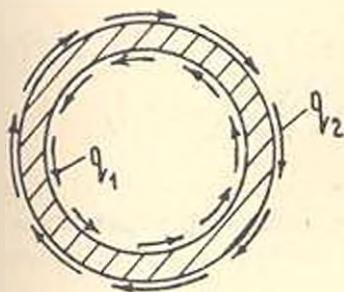
При подстановке в (1.6)–(1.8) $f(\theta) = 0$, $D = C = 0$ получается

$$u = v = 0, \quad \omega = (\lambda+2)r^\lambda \psi \sin \theta, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \tau_{r\theta} = 0$$

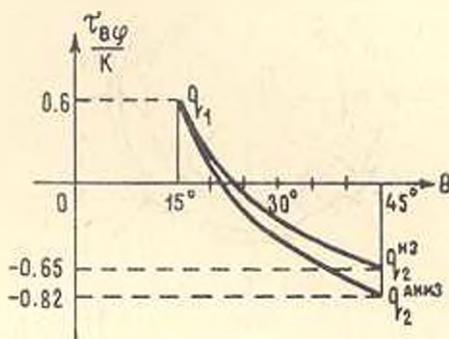
Второе уравнение (1.8) после преобразования, если опускать индексы при $\tau_{\theta r}$, можно написать в виде

$$\tau' + 2\text{ctg}\theta\tau + 3\sqrt{\frac{M}{L}}\sqrt{L-\tau^2} = 0 \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) при граничных условиях (2.1) определяет предельное напряженное состояние ортотропной конической трубы. Численное решение (2.2) получено для случая, когда $q_1 = 0,6k$, $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $M = 2k^2$, $L = k^2$ и для изотропного материала ($M = L = k^2$) k — пластическая постоянная. Приведены графики для обоих случаев (фиг. 2). Как видно из графиков, значение q_2 анизотропного тела увеличивается на 26 %.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для значения ω получим

$$\omega = (\lambda + 2) \sin\theta \sqrt{(\lambda - 1)^2 M \psi^2 + L \psi'^2}$$

Подставляя это в соотношения (1.5) для $\tau_{\theta\psi}$, опуская индексы, получим

$$\tau = \frac{L \psi'}{\sqrt{(\lambda - 1)^2 M \psi^2 + L \psi'^2}}$$

Откуда находим

$$\psi(\theta) = A \exp \left[(\lambda - 1) \sqrt{\frac{M}{L}} \int_{\alpha}^{\theta} \frac{\tau}{\sqrt{L - \tau^2}} d\theta \right]$$

где A — произвольная постоянная, которая определяется из условия закрепления.

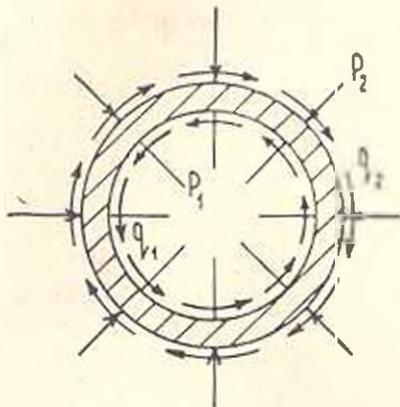
§ 3. Анизотропная коническая труба под совместным воздействием нормальных и кольцевых касательных сил

Положим, что на внутренней и на внешней боковых поверхностях длинной конической трубы из ортотропного материала действуют, соответственно, нормальные давления и кольцевые касательные распределенные силы (фиг. 3).

$$\varepsilon_0 = -p_1, \quad \tau_{\theta 0} = q_1 \quad \text{при } \theta = \alpha; \quad \varepsilon_0 = -p_2, \quad \tau_{\theta 0} = q_2 \quad \text{при } \theta = \beta \quad (3.1)$$

В соотношениях (1.6) и (1.8) подставляем $\lambda = 1$, $D = 0$. Из второго уравнения (1.8) и граничного условия при $\theta = \alpha$ следует

$$\tau_{\theta 0} = q_1 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \theta} \quad (3.2)$$



Фиг. 3

К первому уравнению (1.8) присоединяем значение $\tau_{\theta 0}$ из (1.5), опуская при нем индексы

$$(\tau \sin \theta)' + \frac{1}{\omega} \{ [2(G+F) - H] f' \sin \theta + [2(H+F) - G] f \cos \theta \} = 0 \quad (3.3)$$

$$\tau = \frac{N}{\omega} (f' + f \operatorname{ctg} \theta)'$$

Для значения ω из (1.5), делая некоторые преобразования с учетом значений $\tau_{\theta 0}$ и $\tau_{\theta 1}$, получим

$$\omega = TQ \quad (3.4)$$

где

$$T = \frac{\sqrt{NL}}{\sqrt{NL - N\tau_{\theta 0}^2 - L\tau_{\theta 1}^2}}$$

$$Q = \sqrt{(F+H+4G)f'^2 + 2(F-2H-2G)f'f \operatorname{ctg} \theta + (F+G+4H)f^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}$$

Подставляя (3.4) в систему уравнений (3.3), находим

$$(\tau \sin \theta)' + \frac{1}{TQ} \{ [2(G+F) - H] f' \sin \theta + [2(H+F) - G] f \cos \theta \} = 0 \quad (3.5)$$

$$f'' + \operatorname{ctg} \theta f' - \frac{1}{\sin^2 \theta} f - \frac{\tau}{N} TQ = 0$$

Вводя новую функцию $\varphi = f'/f$, можно снизить на единицу порядок второго уравнения (3.5) и привести его к виду

$$\varphi' = -\tau \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{T\Phi} \{ [2(G+F) - H] \varphi + [2(H+F) - G] \operatorname{ctg} \theta \} \quad (3.6)$$

$$\varphi' = -\varphi^2 - \varphi \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{\tau}{N} T\Phi$$

где обозначено

$$\Phi = \sqrt{(F+H+4G)\varphi^2 + 2(F-2H-2G)\varphi \operatorname{ctg} \theta + (F+G+4H) \operatorname{ctg}^2 \theta}$$

Крайние условия для системы (3.6) будут

$$\tau = 0 \quad \text{при } \theta = \alpha, \quad \theta = \beta \quad (3.7)$$

На ЭВМ ЕС-1022 было получено решение нелинейной двухточечной граничной задачи (3.6), (3.7) при следующих значениях параметров:

$$\alpha = 15^\circ, \beta = 45^\circ, q_1 = 0,6k, L = 2k^2, N = k^2, F = 3k^2, G = 2,5k^2, H = 1,5k^2$$

Решение представлено в виде графика (фиг. 4). Для нормальных напряжений из формул (1.5) и (1.7), с учетом граничного условия при $\theta = \alpha$ и значения ω из (3.4), а также значения функции φ , получим следующие соотношения:

$$\sigma_r = -p_1 - 3 \int_{\alpha}^{\theta} z_{r\theta} d\theta + \int_{\alpha}^{\theta} [(2G + H)\varphi - (2H + G) \operatorname{ctg}\theta] \operatorname{ctg}\theta \frac{d\theta}{T\Phi}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \frac{1}{T\Phi} [(2G + F)\varphi + (F - G) \operatorname{ctg}\theta] \quad (3.8)$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_r + \frac{1}{T\Phi} [(2G - H)\varphi - (2H + G) \operatorname{ctg}\theta]$$

Если в уравнениях (3.2) и (3.8) учесть граничное условие при $\theta = \beta$, то получим соотношения, определяющие предельное состояние ортотропной конической трубы

$$q_1 \sin^2 \alpha = q_2 \sin^2 \beta \quad (3.9)$$

$$p_1 - p_2 = -3 \int_{\alpha}^{\beta} z_{r\theta} d\theta + \int_{\alpha}^{\beta} [(2G + H)\varphi - (2H + G) \operatorname{ctg}\theta] \operatorname{ctg}\theta \frac{d\theta}{T\Phi}$$

Подставляя значение ω из (3.4) в соотношение (1.5) для $z_{r\theta}$, приходим к уравнению, определяющему $\varphi(\theta)$

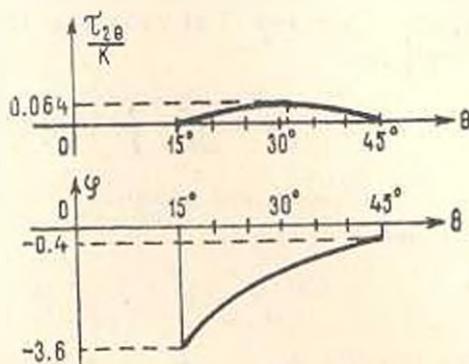
$$\varphi(\theta) = \frac{q_1 \sin^2 \alpha}{3L} \int_{\alpha}^{\theta} \frac{T\Phi}{\sin^2 \theta} d\theta + \operatorname{const} \quad (3.10)$$

В случае изотропного материала, если в системе (3.3) принять

$$F = G = H = 2L = 2M = 2N = 2k^2, \quad f = \frac{E}{\sin \theta}, \quad E = \operatorname{const}$$

получим $\tau_{r\theta} = 0$ по всей толщине стенки трубы, что соответствует результатам работы [5].

Теперь рассмотрим случай, когда труба изготовлена из transversально изотропного материала. Принимаем, что ось круговой симметрии совпадает с осью $\theta = 0$. Это приводит, в частности, к соотношению $G = H$ [6].



Фиг. 4

В соотношениях (1.6)+(1.8), если принять

$$f = \frac{E}{\sin \theta}, \quad \lambda = 1, \quad D = 0, \quad G = H, \quad E = \text{const}$$

первое уравнение (1.8) удовлетворится тождественно, а для значения ω получим

$$\omega = \frac{3}{\sin^3 \theta} \sqrt{2GE^2 \cos^2 \theta + L\psi'^2 \sin^6 \theta} \quad (3.11)$$

Подставляя это в соотношения (1.5) для $\tau_{\theta r}$, опуская индексы, находим

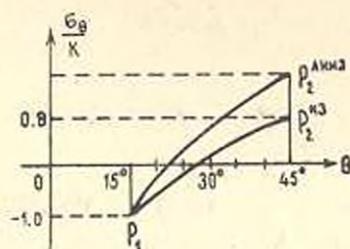
$$\tau = \frac{L\psi' \sin^3 \theta}{\sqrt{2GE^2 \cos^2 \theta + L\psi'^2 \sin^6 \theta}}, \quad \tau = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \theta} \quad (3.12)$$

Отсюда, определяя ψ' и подставляя в формулы нормальных напряжений (1.5), (1.7) и учитывая граничные условия на внутренней поверхности, будем иметь

$$\sigma_r = \sigma_0 + \sqrt{\frac{G}{2L}} \sqrt{L - \tau^2}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_0 + \sqrt{\frac{2G}{L}} \sqrt{L - \tau^2} \quad (3.13)$$

$$\sigma_0 = -p_1 + \sqrt{2G} \ln \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} + \sqrt{\frac{G}{2}} \ln \frac{\sqrt{L} + \sqrt{L - \tau^2}}{\sqrt{L} + \sqrt{L - q_1^2}} +$$

$$+ \sqrt{\frac{G}{2L}} (\sqrt{L - q_1^2} - \sqrt{L - \tau^2})$$



Фиг. 5

Условия на внешней поверхности определяют предельное состояние конической трубы

$$q_1 \sin^2 \alpha = q_2 \sin^2 \beta$$

$$p_1 - p_2 = \sqrt{2G} \ln \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \sqrt{\frac{G}{2}} \ln \frac{\sqrt{L} + \sqrt{L - q_2^2}}{\sqrt{L} + \sqrt{L - q_1^2}} +$$

$$+ \sqrt{\frac{G}{2L}} (\sqrt{L - q_1^2} - \sqrt{L - q_2^2}) \quad (3.14)$$

Из (3.12) для $\psi(\theta)$ находим

$$\psi(\theta) = \sqrt{\frac{G}{2L}} \frac{E}{q_1 \sin^2 \alpha} (\sqrt{L - q_1^2} - \sqrt{L - \tau^2}) + \text{const}$$

Если учесть значения $f(\theta)$ и $\psi(\theta)$, скорости перемещения будут

$$u = 0, \quad v = -\frac{3Er}{\sin \theta}$$

$$w = 3 \sqrt{\frac{G}{2L}} \frac{Er \sin \theta}{q_1 \sin^2 \alpha} (\sqrt{L - q_1^2} - \sqrt{L - \tau^2}) + \text{const}$$

Проведено численное исследование напряжения σ_1 в стенке трубы при следующих значениях параметров задачи $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $q_1 = 0,6k$, $p_1 = k$ для случая анизотропии, когда $G = 4k^2$, $L = k^2$ и для изотропного материала ($G = 2L = 2k^2$). Результаты исследования приведены в виде графиков (фиг. 5). Как видно из графиков, значение предельной нагрузки $p_1 - p_2$ для анизотропного тела увеличивается в 1,4 раза.

§ 4. Анизотропная коническая труба под совместным воздействием нормальных и продольных касательных сил

Рассмотрим предельное состояние длинной конической трубы из ортотропного материала, когда на внутренней и на внешней боковых поверхностях действуют, соответственно, нормальные давления и продольные касательные распределенные силы по образующим (фиг. 6)

$$\sigma_1 = -p_1, \quad \tau_{r\theta} = q_1 \quad \text{при } \theta = \alpha; \quad \sigma_1 = -p_2, \quad \tau_{r\theta} = q_2 \quad \text{при } \theta = \beta \quad (4.1)$$

Если принять в (1.5)–(1.8) $\bar{\nu} = 0$, $\lambda = D = 0$, второе уравнение (1.8) удовлетворится тождественно, а первое (опуская индексы при $\tau_{r\theta}$) примет вид

$$\tau' + \tau \operatorname{ctg} \theta + \frac{G - H}{\sqrt{N(G + H)}} \sqrt{N - \tau^2} = 0 \quad (4.2)$$

при граничном условии $\tau = q_1$ при $\theta = \alpha$.

Численное решение уравнения (4.2) получено для случая, когда

$$G = 1,5k^2; \quad H = 0,5k^2; \quad N = k^2; \quad \alpha = 15^\circ; \quad \beta = 45^\circ; \quad q_1 = 0,3k$$

и приведено в виде графика (фиг. 7).

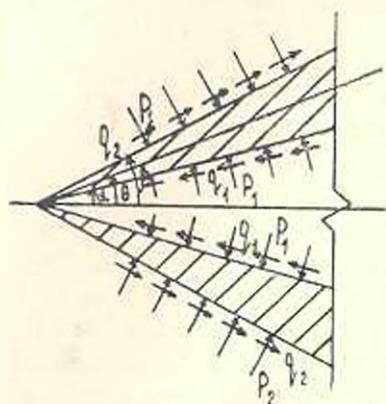
Для значения ω находим

$$\omega = \frac{\sqrt{N(G + H)} (f' - f \operatorname{ctg} \theta)}{\sqrt{N - \tau^2}}, \quad \nu = \operatorname{sign} (f' - f \operatorname{ctg} \theta) \quad (4.3)$$

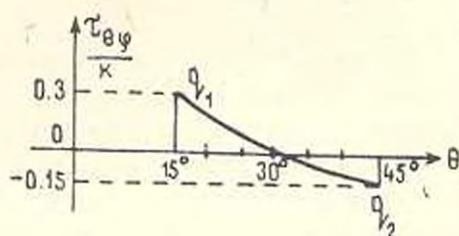
Из формул для нормальных напряжений (1.5) и (1.7) с учетом граничных условий при $\theta = \alpha$ и значения ω из (4.3) находим

$$\sigma_1 = \sigma_1 + \frac{G}{\sqrt{N(G + H)}} \sqrt{N - \tau^2}, \quad \sigma_2 = \sigma_2 + \sqrt{\frac{G + H}{N}} \sqrt{N - \tau^2}$$

$$\sigma_{\theta} = -p_1 - 3 \int_{\alpha}^{\theta} \tau d\theta + \sqrt{\frac{G+H}{N}} \int_{\alpha}^{\theta} \sqrt{N-\tau^2} \operatorname{ctg}\theta d\theta \quad (4.4)$$



Фиг. 6



Фиг. 7

Удовлетворяя граничным условиям при $\theta = \beta$, получим соотношение, определяющее предельное состояние ортотропной конической трубы

$$p_1 - p_2 = -3 \int_{\alpha}^{\beta} \tau d\theta + \sqrt{\frac{G+H}{N}} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{N-\tau^2} \operatorname{ctg}\theta d\theta$$

Сюда следует присоединить решение уравнения (4.2) при граничных условиях (4.1) (фиг. 7). Подставив (4.3) в формулу $\tau_{\theta\varphi}$ из (1.5), получим дифференциальное уравнение относительно $f(\theta)$

$$f'' + \left(\operatorname{ctg}\theta - \sqrt{\frac{G+H}{N}} \frac{\tau}{\sqrt{N-\tau^2}} \right) f' + \left(2 - \frac{1}{\sin^2\theta} + \sqrt{\frac{G+H}{N}} \frac{\tau \operatorname{ctg}\theta}{\sqrt{N-\tau^2}} \right) f = 0$$

откуда определяется

$$f(\theta) = C_1 \sin\theta + C_2 \sin^2\alpha \sin\theta \int_{\alpha}^{\theta} \frac{1}{\sin^2\theta} \exp\left(\sqrt{\frac{G+H}{N}} \int_{\alpha}^{\theta} \frac{\tau d\theta}{\sqrt{N-\tau^2}}\right) d\theta$$

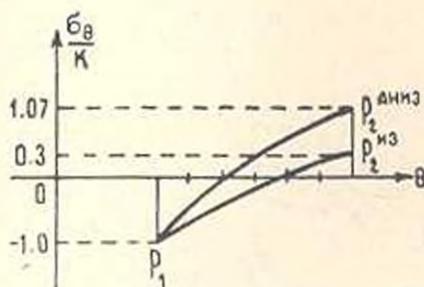
здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные интегрирования.

Для случая трансверсально изотропного материала, обладающего круговой симметрией относительно оси $\theta = 0$, имеем $G = H$. Тогда из уравнения (4.2) следует

$$\tau = q_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\theta} \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в (1.5) и (1.7) с учетом (4.3) при $G = H$ и используя граничное условие на внутренней поверхности из (4.1), получим

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_1 + \sqrt{\frac{G}{2N}} \sqrt{N - r^2}, \quad \sigma_\theta = \sigma_1 + \sqrt{\frac{2G}{N}} \sqrt{N - r^2} \\ \sigma_1 &= -p_1 + \sqrt{2G} \ln \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} + \sqrt{2G} \ln \frac{\sqrt{N} + \sqrt{N - r^2}}{\sqrt{N} + \sqrt{N - q_1^2}} - \\ &- 3q_1 \sin \alpha \ln \frac{\operatorname{tg} \theta / 2}{\operatorname{tg} \alpha / 2} + \sqrt{\frac{2G}{N}} (\sqrt{N - q_1^2} - \sqrt{N - r^2}) \end{aligned} \quad (4.6)$$



Фиг. 8

Удовлетворяя условиям на внешней поверхности $\theta = \beta$ в (4.5) и (4.6), приходим к соотношениям, определяющим предельное состояние transversально изотропной конической трубы

$$\begin{aligned} q_1 \sin \alpha &= q_2 \sin \beta \\ p_1 - p_2 &= \sqrt{2G} \ln \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \sqrt{2G} \ln \frac{\sqrt{N} + \sqrt{N - q_2^2}}{\sqrt{N} + \sqrt{N - q_1^2}} - \\ &- 3q_1 \sin \alpha \ln \frac{\operatorname{tg} \beta / 2}{\operatorname{tg} \alpha / 2} + \sqrt{\frac{2G}{N}} (\sqrt{N - q_1^2} - \sqrt{N - q_2^2}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для скоростей перемещений имеем

$$u = f' + f \operatorname{ctg} \theta, \quad v = -2f, \quad w = 0$$

В случае изотропного материала в формулах (4.7) следует подставить $G = 2N = 2k^2$, тогда будем иметь

$$\begin{aligned} q_1 \sin \alpha &= q_2 \sin \beta \\ p_1 - p_2 &= 2 \ln \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + 2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - q_2^2}}{1 + \sqrt{1 - q_1^2}} - 3q_1 \sin \alpha \ln \frac{\operatorname{tg} \beta / 2}{\operatorname{tg} \alpha / 2} - \\ &+ 2(\sqrt{1 - q_1^2} - \sqrt{1 - q_2^2}) \end{aligned}$$

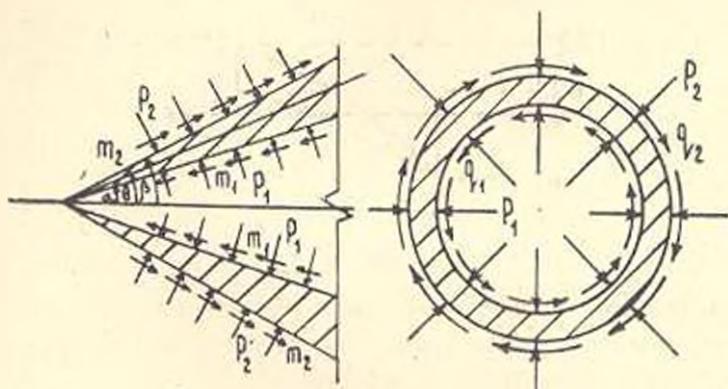
Эти формулы соответствуют предельному состоянию изотропной конической трубы под совместным воздействием нормальных давлений и продольных касательных сил, рассмотренному в работе [5].

Проведено численное исследование напряжения σ_1 в стенке трубы при значениях параметров предыдущей задачи. По этим результатам построены графики (фиг. 8), из которых видно, что для анизотропного тела значение предельной нагрузки $p_1 - p_2$ увеличивается в 1,6 раза.

§ 5. Ортотропная коническая труба под совместным воздействием нормальных давлений, продольных и кольцевых касательных сил

Рассмотрим случай, когда на внутренней и на внешней боковых поверхностях длинной ортотропной конической трубы действуют, соответственно, нормальные давления, продольные и кольцевые касательные распределенные силы (фиг. 9)

$$\sigma_{\theta} = -p_1, -p_2; \tau_{\theta r} = m_1, m_2; \tau_{\theta \varphi} = q_1, q_2 \quad \text{при } \theta = \alpha, \beta \quad (5.1)$$



Фиг. 9

В уравнениях (1.5)–(1.8) принимаем $\lambda = 1, D = 0$.

Из второго уравнения (1.8) и граничного условия при $\theta = \alpha$ находим

$$\sigma_{\theta} = q_1 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \theta} \quad (5.2)$$

а из первого уравнения, как было сделано в § 3, получим систему уравнений

$$\tau' = -\tau \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{T\Phi} \{ |2(G - F) - H| \varphi + |2(H - F) - G| \operatorname{ctg} \theta \} \quad (5.3)$$

$$\varphi' = -\varphi^2 - \varphi \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{\tau}{N} T\Phi$$

с краевыми условиями

$$\tau_{\theta} = m_1 \quad \text{при } \theta = \alpha; \quad \tau_{\theta} = m_2 \quad \text{при } \theta = \beta \quad (5.4)$$

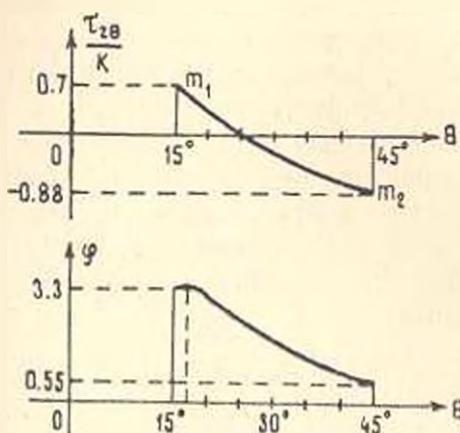
Численное решение задачи (5.3), (5.4) получено при следующих значениях параметров: $\alpha = 15^\circ; \beta = 45^\circ; q_1 = 0,6 k; m_1 = 0,7 k; m_2 = 0,88 k; L = 2k^2; N = k^2; F = 3k^2; G = 2,5 k^2; H = 1,5 k^2$.

Решение представлено в виде графика (фиг. 10).

Для определения предельного состояния имеем следующие соотношения:

$$q_1 \sin^2 \alpha = q_2 \sin^2 \beta$$

$$p_1 - p_2 = -3 \int_{\alpha}^{\beta} \tau d\theta + \int_{\alpha}^{\beta} [(2G+H)\varphi - (2H+G) \operatorname{ctg} \theta] \operatorname{ctg} \theta \frac{d\theta}{T\Phi}$$



Փիգ. 10

В качестве третьего соотношения к этим двум присоединяем решение задачи (5.3), (5.4) (фиг. 10).

Автор благодарит проф. М. А. Задояка за постановку задачи и за ценные советы при выполнении этой работы.

ՊԼԱՍՏԻԿՈՐԵՆ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ԿՈՆԱԿԱՆ ԽՈՂՈՎԱԿԻ ՍԱՀՄԱՆԱՑԻՆ ՎԻՃԱԿԸ

Ա. Գ. ՉԱԿՈՐՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Գիտարկված է պլաստիկորեն անխզտրոպ կոնական խողովակի սահմանային վիճակը տարրեր արտաքին ուժերի ազդեցության տակ: Ընդունված է, որ կոնական խողովակի նյութը ենթարկվում է Միզեսի-Հիլլի հոսունության պայմանին և նյութի անխզտրոպության գլխավոր առանցքները համընկնում են կոնական խողովակի զազաթում տեղադրված սկզբնականում գնդային կոորդինատների համակարգի առանցքների հետ: Ստացված է ընդհանուր լուծում առանցքասիմետրիկ հոսունության համար: Ծննելով այդ ընդհանուր լուծումից ուսումնասիրված է կոնական խողովակի սահմանային վիճակը ոլորման, համատեղ ոլորման ու ճնշման, համատեղ ճնշման ու երկայնական շոշափող ուժերի, համատեղ ճնշման, ոլորման և երկայնական շոշափող ուժերի ազդեցության տակ: Բերված են թվային օրինակներ:

THE LIMITING STATE OF A PLASTIC ANISOTROPIC CONICAL TUBE

A. G. HACOBIAN

S u m m a r y

The limiting stressed state of a plastic anisotropic conical tube under the effect of various external forces is considered. It is assumed that the material of the conical tube obeys the Mises-Hill flow criterion and the axes material anisotropy coincide with the spheric coordinate axes. A general solution for the case of axisymmetric flow is obtained. Proceeding from that solution the limited state of a conical tube are considered under the effect of torsion; compatible torsion and compression; compatible compression and longitudinal tangential forces; compatible compression, torsion and longitudinal tangential forces. Numerical examples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. Илев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Изд-во «Наука», 1966.
2. Саркисян М. С. К теории плоской деформации пластически анизотропных тел. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
3. Матченко Н. М., Толоконников О. Л. Некоторые частные решения уравнений осесимметричной задачи теории идеальной пластичности цилиндрически-анизотропных материалов. «Работы по механике сплошных сред». ТПН, 1974.
4. Геоджияев В. О., Саквич В. Н. Течение анизотропной массы в коническом канале. «Механика твердого деформируемого тела и родственные проблемы анализа». Московский институт химического машиностроения, М., 1978.
5. Забоян М. А. Пластическое течение конусообразных тел — ПММ, 1983, т. 47, вып. 1. Московский институт химического машиностроения, М.: 1978.
6. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956.

Институт механики
АН Армянской ССР

Получила в редакцию
17.V.1983

УДК 624.072.4

УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ.
 НАГРУЖЕННОГО РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ
 СЛЕДЯЩЕЙ СИЛОЙ

ГРИГОРЯН Н. Б.

1. Рассмотрим устойчивость трехслойного стержня прямоугольного поперечного сечения, нагруженного равномерно распределенной по всей длине следящей силой интенсивностью q .

Задача об устойчивости однородного стержня, шарнирно опертого по концам и нагруженного равномерно распределенной следящей силой, впервые была поставлена Пфлюгером [1]. С помощью метода Бубнова им было определено значение критической силы $q_{кр} = 18,96 EJ/L^2$, где EJ — жесткость стержня на изгиб, L —его длина.

Устойчивость однородного консольного стержня, нагруженного равномерно распределенной следящей силой, впервые исследована Лейпхольцом в 1962 году [2]. Лейпхольцом и Маданом [3] получено точное значение критической силы $q_{кр} = 40,05 EJ/L^2$.

Значения критических сил однородного стержня при пяти случаях закрепления концов и для пяти законов распределения следящей нагрузки приведены в работе [4].

2. В общем случае рассмотренный стержень является неконсервативной системой флаттерного типа. Устойчивость таких систем исследуется динамическим методом [5]. Используя теорию трехслойных стержней Григорюка—Чулкова [6], уравнение малых поперечных колебаний трехслойного стержня получено в [7]

$$X^{VI} - \left[\frac{1}{\theta k} - \frac{x^2}{\theta} (1-x) \right] X^{IV} - \left[\frac{x^2}{\theta k} (1-x) + \frac{\omega^2}{\theta} \right] X'' + \frac{\omega^2}{\theta k} X = 0 \quad (2.1)$$

Здесь $k = h^2 \beta L^2$ — безразмерный параметр, характеризующий сдвиговую жесткость заполнителя трехслойного стержня;

$x^2 = qL^2/D$ — безразмерная сжимающая сила;

$\omega^2 = \omega^2 L^4 \rho F/D$ — безразмерная частота колебаний;

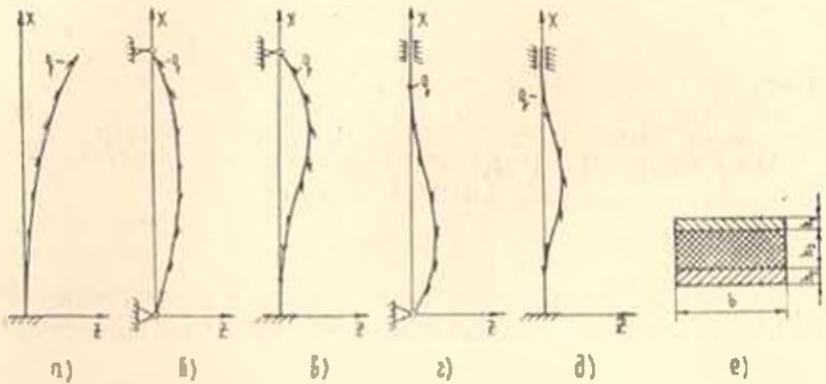
$X = \chi(x)/L$ — безразмерная функция перемещений;

θ — безразмерный параметр, характеризующий изгибную жесткость несущих слоев трехслойного стержня [6];

L, h, D — соответственно длина трехслойного стержня, высота трехслойного пакета и изгибная жесткость трехслойного стержня. Параметры β, ρ, χ представляют сдвиговую жесткость заполнителя, осредненную плотность материала трехслойного пакета и функцию перемещений [6].

3. Рассмотрим следующие варианты граничных условий:

I. Один конец трехслойного стержня жестко зашпемлен, а другой—свободен (фиг. 1а).



Фиг. 1.

Согласно [6] имеем

$$\begin{aligned} X' - X''' = X - kX'' = 0 \quad \text{при } x=0 \\ X'' = X^{IV} = X'' - \theta kX^V = 0 \quad \text{при } x=1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

II. Один конец трехслойного стержня жестко зашпемлен, а на свободном конце имеется абсолютно жесткая на сдвиг диафрагма (фиг. 1а).

В этом случае

$$\begin{aligned} X' - X''' = X - kX'' = 0 \quad \text{при } x=0 \\ X'' = X^V = X'' - \theta kX^{IV} = 0 \quad \text{при } x=1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

III. Оба конца трехслойного стержня шарнирно оперты и на нижнем конце имеется абсолютно жесткая на сдвиг диафрагма (фиг. 1б).

То есть

$$\begin{aligned} X - kX'' = X'' - \theta kX^{IV} = X''' = 0 \quad \text{при } x=0 \\ X = X'' = X^{IV} = 0 \quad \text{при } x=1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

IV. Оба конца трехслойного стержня шарнирно оперты и на обоих концах имеются абсолютно жесткие на сдвиг диафрагмы (фиг. 1б).

$$X - kX'' = X'' - \theta kX^{IV} = X''' = 0 \quad \text{при } x=0 \text{ и при } x=1 \quad (3.4)$$

V. Нижний конец трехслойного стержня жестко зашпемлен, а верхний конец шарнирно оперт (фиг. 1в).

$$\begin{aligned} X' - X''' = X - kX'' = 0 \quad \text{при } x=0 \\ X = X'' = X^{IV} = 0 \quad \text{при } x=1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

VI. Нижний конец трехслойного стержня жестко зашпемлен, а верхний конец шарнирно оперт, и имеется абсолютно жесткая на сдвиг диафрагма (фиг. 1в).

$$\begin{aligned}
 X - kX'' - X' = X''' = 0 \quad \text{при } x=0 \\
 X - kX'' = X'' - \theta kX^{IV} = X''' = 0 \quad \text{при } x=1
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

VII. Нижний конец трехслойного стержня шарнирно оперт, а верхний конец жестко зашпелен. На обоих концах имеются абсолютно жесткие на сдвиг диафрагмы (фиг. 1г).

$$\begin{aligned}
 X - kX'' = X'' - \theta kX^{IV} = X''' = 0 \quad \text{при } x=0 \\
 X' = X''' = X - kX'' = 0 \quad \text{при } x=1
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

VIII. Оба конца трехслойного стержня жестко зашпелены (фиг. 1д).

$$X' = X''' = X - kX'' = 0 \quad \text{при } x=0 \quad \text{и при } x=1
 \tag{3.8}$$

4. Трехслойный стержень с граничными условиями (3.1) и (3.2) является неконсервативной системой флаттерного типа. Устойчивость такого стержня исследована динамическим методом в работе [7].

При граничных условиях (3.3) — (3.8) трехслойный стержень представляет неконсервативную систему дивергентного типа. Устойчивость таких систем можно исследовать статическим методом. Уравнение устойчивости таких стержней получим, если в (2.1) подставить $\omega = 0$

$$X^{VI} - \left[\frac{1}{\theta k} - \frac{x^2}{\theta} (1-x) \right] X^{IV} - \frac{x^2(1-x)}{\theta k} X'' = 0
 \tag{4.1}$$

Решение этого дифференциального уравнения с переменными коэффициентами можно представить в виде бесконечного степенного ряда

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (1-x)^n
 \tag{4.2}$$

Подставляя ряд (4.2) и его производные в уравнение (4.1), получим рекуррентное соотношение для определения A_n

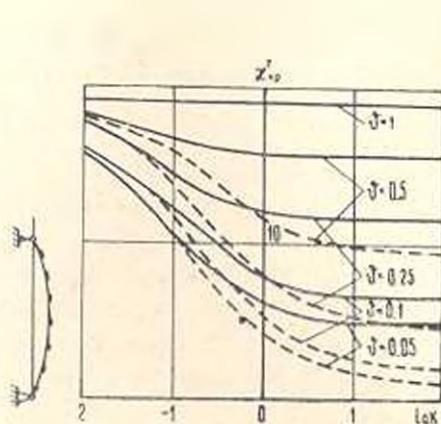
$$\begin{aligned}
 A_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\theta k} [& (n-2)(n-3)(n-4)(n-5)A_{n-2} - \\
 - kx^2(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)A_{n-3} + & x^2(n-5)(n-6)A_{n-5}]
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

С помощью этой формулы все постоянные A_n , начиная с A_0 , выразим через первые шесть постоянных A_0, A_1, \dots, A_5 и подставим в (4.2). Тогда в выражении X (4.2) останутся лишь шесть неизвестных постоянных A_0, A_1, \dots, A_5 . Подставляя полученное выражение X в граничные условия (3.3) — (3.8), получим системы из шести алгебраических линейных однородных уравнений относительно A_0, A_1, \dots, A_5 . Для существования нетривиального решения этих систем уравнений необходимо, чтобы их определители были равны нулю. Из этого условия получим детерминантное уравнение

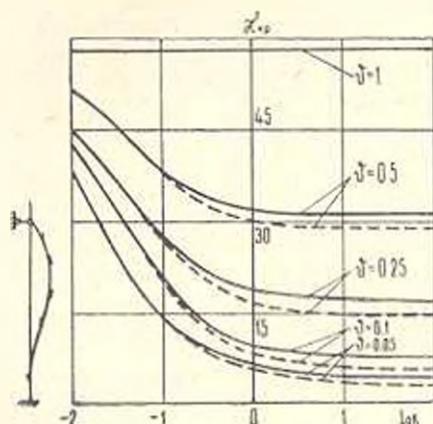
$$\Delta(x^2) = 0
 \tag{4.4}$$

Разработан алгоритм, который позволяет численно определить значение критической силы при различных значениях жесткостных параметров θ и k для всех граничных условий.

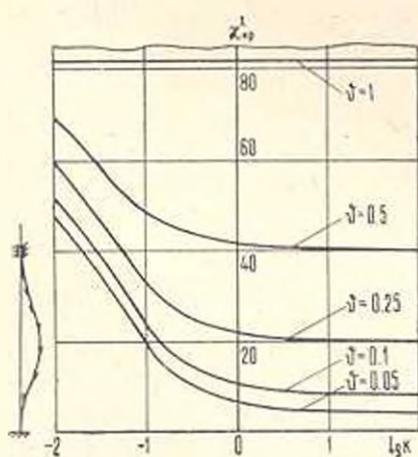
5. Проведены расчеты на ЭВМ и определены значения первых критических сил для последних шести вариантов граничных условий. На фиг. 2—5 представлены графики зависимостей величины критических сил от значений сдвиговой жесткости заполнителя для граничных условий III—VIII при различных значениях изгибной жесткости несущих слоев δ . На фиг. 2 и 3 штриховые линии соответствуют граничным условиям III и V, а сплошные линии—граничным условиям IV и VI.



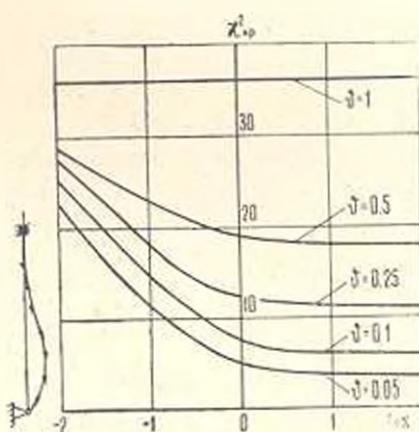
Фиг. 2. Граничные условия III и IV



Фиг. 3. Граничные условия V и VI



Фиг. 4. Граничные условия VII



Фиг. 5. Граничные условия VIII

При $\delta = 1$ величина критической силы не зависит от сдвиговой жесткости заполнителя k и полностью совпадает со значением критической силы однородного стержня. Когда жесткость заполнителя на сдвиг увеличивается, то во всех случаях закрепления концов трехслойного стержня значения критических сил возрастают и стремятся к величине критической силы соответствующего однородного стержня. Отметим также, что абсолютно жесткая на сдвиг диафрагма на обоих концах трехслойного стержня (граничные условия IV) имеет сильное стабили-

зирующее влияние лишь при больших k . Так, например, когда $\theta = 0,5$ и $k = 100$, критическая сила при граничных условиях IV получается на 63,8 % больше, чем при граничных условиях III. А при $\theta = 0,5$ и $k = 0,01$ разница составляет всего лишь 0,1 %.

У трехслойных конструкций, применяемых в практике, всегда $\theta \leq 0,1$. Причем, чем меньше θ , тем рациональнее построена эта конструкция, поскольку при этом обеспечивается легкость конструкции. Когда же $\theta \geq 0,25$, конструкция может трактоваться как двухслойная. Например, при $\theta = 0,25$ получим двухслойный стержень симметричной структуры, а при $\theta = 0,5$ — двухслойный стержень с отношением собственных изгибных жесткостей слоев как 1:3,72. Параметр k в случае двухслойных конструкций характеризует сдвиговую жесткость клея, соединяющего два слоя друг с другом.

**ՀԱՎԱՍԱՐԱԶՍՔ ԲԱՇԽՎԱԾ շԵՏՆՎՈՂ ՈՒՅՈՒՆ ԲԵՌՆԱՎՈՐՎԱԾ
ԵՒԱՇԵՐՏ ՉՈՂԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ**

Ն. Բ. ԳՐԻԳՐԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Գիտարկվում է եռաշերտ ձողի կայունությունը, որը բեռնավորված է ամբողջ երկարությամբ հավասարաչափ բաշխված տանգենցիալ հետևող սեղմող ուժով: Օգտագործված է Գրիգորյուկ-Չուլկովի եռաշերտ ձողերի տեսությունը: Քննարկվում են այնպիսի եզրային պայմաններ, որոնց դեպքում եռաշերտ ձողը հանդիսանում է դիվերգենտային ոչ կոնսերվատիվ համակարգ: Այդպիսի համակարգի կայունությունը ուսումնասիրվում է ստատիկ մեթոդով:

Գնահատված են զանազան տիպի եզրային պայմանների ազդեցությունը կրիտիկական ուժի մեծության վրա: Գիտարկված են կրող շերտերի ըստ ժաման ունեցած կոշտության և լցունի ըստ սահքի ունեցած կոշտության ազդեցությունները կրիտիկական ուժի մեծության վրա: Քննարկված է երկշերտ ձողերի դեպքը:

**STABILITY OF A SANDWICH ROD LOADED WITH UNIFORMLY
DISTRIBUTED FOLLOWER FORCE.**

N. B. GRIGORIAN

S u m m a r y

The paper deals with the problem of stability of a sandwich rod loaded with uniformly distributed follower force.

The influence of proper flexible rigidities of faces and shear stiffness of the core on the divergent load is investigated.

Different boundary conditions are treated. The article also deals with a two-layer rod.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pflüger A.* Stabilitätsprobleme der Elastostatik.—Berlin (Göttingen) Heidelberg, Springer-Verlag, 1950, s. 337.
2. *Leipholtz H.* Die Knicke last des einseitig Stabes mit gleichmässig verteilter tangentialer Längsbelastung. —ZAMP, 1962, 13, № 6, s. 581—589.
3. *Leipholtz H., Madan P.* On the solution of the stability problem of elastic rods subjected to uniformly distributed, tangential follower forces.—Ingenieur-Archiv, Springer-Verlag, 1975, 44, № 5, p. 347—357.
4. *Petersen C.* Einige weitere Lösungen nichtkonservativer Knickeprobleme.—Der Stahlbau, 1972, 41, № 7, s. 198—203.
5. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.—М.: Физматгиз, 1961. 340 с.
6. *Григорюк Э. И., Чулков П. П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек.—М.: Машиностроение, 1973. 172 с.
7. *Григорян Н. Б.* Устойчивость трехслойного стержня при следящей равномерно распределенной нагрузке.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1979, т. 32, № 6, с. 55—61.

Ленинаканский филиал Ереванского
политехнического института им. К. Маркса

Поступила в редакцию
24.11.1983

УДК 532.5

СООТНОШЕНИЯ НА РАЗРЫВАХ, ВОЗНИКАЮЩИХ НА КРОМКАХ ЛОПАТНЫХ СИСТЕМ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТУРБОМАШИНАХ

КЛИМОВИЧ В. И. ФЕДОРОВ А. В.

При течении жидкости в турбомашинных вблизи входа потока в лопаточный аппарат могут возникать большие градиенты скоростей, которые естественно моделировать в рамках осесимметричного приближения скачкообразными изменениями скоростей на поверхности, разделяющей лопаточные и безлопаточные области проточного тракта. Вопрос об условиях на кромках лопаток в осесимметричной постановке рассматривался в ряде работ, из которых отметим [1—7]. В [1] получены условия, связывающие скачки скорости на границе раздела Σ в случае несжимаемой жидкости. В работах [2, 4, 6] указанные выше условия для скачков скорости получены в более общем случае течения газа. Для учета реальных свойств течения вблизи лопаточных кромок в [2, 4, 6] было предложено выражение для скачка полного давления: в случае несжимаемой жидкости скачок энергии определяется кинетической энергией „потерянной“ скорости с учетом коэффициента κ смягчения на удар: $[E]_{\Sigma}^{-} = \kappa(|\omega|_{\Sigma}^{-})^2/2$. В [3, 7] с помощью вариационного принципа Гамильтона выведены соотношения, выражающие баланс импульса и энергии сжимаемой жидкости на Σ , а также произведен анализ структуры сил, действующих на жидкую частицу на Σ . При этом установлено, что в предположении об ортогональности силы, действующей на жидкую частицу на Σ , к поверхности лопатки разрыв энергии для несжимаемой жидкости равен $[E]_{\Sigma}^{-} = (|\omega|_{\Sigma}^{-})^2/2$. В [5] при том же предположении показано, что в случае течения газа имеются два решения для скачков газодинамических величин на Σ ; в случае малых отклонений свободного потока от касательной к лопатке плоскости с помощью второго начала термодинамики найдены границы применимости каждого из полученных решений. В [2, 4, 6, 7] представлены результаты расчетов осесимметричного течения несжимаемой жидкости с использованием соотношений для разрывов скорости и энергии.

В настоящей работе показано, что при определенных значениях параметров потока и геометрии лопаток имеет место «запирание» входного сечения в лопаточный аппарат; при этом компонента скорости на Σ , ортогональная кромке, со стороны области, занятой лопатками, достигает местной скорости звука. Установлена аналогия между рассматриваемой задачей и задачей об обтекании плоской решетки тонких пластин.

тин потоком газа, направление которого отличается от направления пластины [8]. Приведены расчеты коэффициента потерь полного давления и границ областей допустимых углов атаки на Σ в зависимости от числа Маха набегающего потока при различных значениях углов тангенциального наклона лопаток.

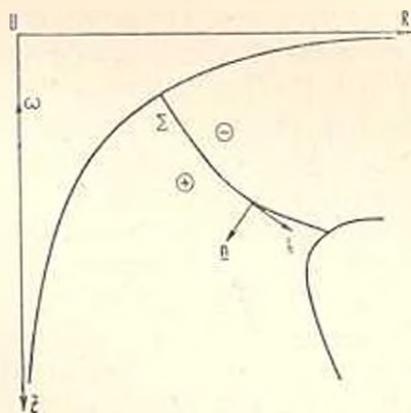
Рассмотрим установившееся течение идеального газа в турбомашине. Законы сохранения массы, импульса и полной энтальпии в относительном движении частицы газа на границе раздела Σ лопаточной и безлопаточной областей (фиг. 1) могут быть представлены в виде

$$[\tau r c_n]_{\Sigma} = 0 \quad (1)$$

$$[\tau r n + \tau r c_n c]_{\Sigma} = f \quad (2)$$

$$\left[\frac{1}{2} c^2 + \frac{R}{k-1} \frac{p}{\rho} - \omega r c_n \right]_{\Sigma} = 0 \quad (3)$$

Здесь $c = c_n n + c_t l + c_n i_z$ — вектор абсолютной скорости течения, n и l — нормаль и касательная к Σ , i_z — орт окружного направления, p — давление, ρ — плотность, $k = c_p/c_v$, ω — угловая скорость вращения лопаток, τ — коэффициент стеснения потока лопатками. Вектор f имеет смысл поверхностной силы, обусловленной импульсивным воздействием лопаток на частицу газа на Σ . Наличие f в (2) объясняется тем, что



Фиг. 1. Меридиональная проекция проточного тракта турбомашин

сила F воздействия лопаток на газ, равная $F = \nabla \chi dR c_n / dt$ для внутренних точек лопаточной области [8], имеет δ -образную особенность на Σ вследствие разрывного поведения момента окружной скорости $R c_n$ [1-7] ($\chi = \varphi - \Phi(R, z) = 0$ — уравнение лопатки, вектор $\nabla \chi$ направлен по нормали к лопатке). Условие непротекания газа через поверхность лопатки на Σ имеет вид

$$\omega_z \cdot \nabla \chi = 0 \quad (4)$$

где $\omega = c - Ri_+$, индекс (+) соответствует лопаточной области (фиг. 1). Если состояние газа со стороны (-) известно, а функции $\Phi(R, z)$ и $\tau(R, z)$ заданы, то система (1)–(4) состоит из шести скалярных уравнений относительно неизвестных c_+ , ρ_+ , ρ_- , f . Для замыкания этой системы необходимо сделать дополнительные, оправданные физические предположения относительно силы f . В [5] для случая бесконечно тонких лопаток ($\tau = 1$) в качестве такого предположения было принято, что сила f ортогональна поверхности лопатки

$$f = \tau(R, z) \nabla \chi \quad (5)$$

Соотношение (5) замыкает систему (1)–(4) относительно неизвестных c_+ , ρ_+ , ρ_- , λ . Проектурия (2) на направление $\nabla \chi \times n$, с учетом (1), (5) получим $[c_+]^* \cdot (\nabla \chi \times n) = 0$, или после преобразований

$$[c_+]^* + R \frac{\partial \Phi}{\partial t} [c_+]^* = 0 \quad (6)$$

Соотношение (6) справедливо при любых τ как в случае сжимаемой, так и несжимаемой жидкости. В дальнейшем рассматривается случай $\tau = 1$. Исключая из (1)–(5) величины λ , $[c_+]^*$, $[c_+]^*$, $[\rho]^*$, $[c_+]^*$, приходим к квадратному уравнению относительно скачка $[v]^*$ ($v = 1/\rho$)

$$A_2 ([v]^*)^2 + A_1 [v]^* + A_3 = 0 \quad (7)$$

$$A_1 = (k + 1) R^2 |\nabla \chi|^2$$

$$A_2 = 2v_- \left(R |\nabla \chi|^2 - m M_{n-}^{-2} + k R \frac{\partial \Phi}{\partial n} \varepsilon \right)$$

$$A_3 = \varepsilon v_-^2 \left[2R \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \varepsilon (k - 1) \right]$$

$$M_{n-}^2 = c_{n-}^2 / (k\rho_- v_-), \quad m = 1 + R^2 (\partial \Phi / \partial t)^2, \quad \varepsilon = -R c_{n-}^{-1} \omega_- \cdot \nabla \chi$$

Величина ε характеризует отклонение свободного потока (вектора ω_-) от касательной к поверхности лопатки плоскости; отметим, что произвольный поворот вектора ω_- в упомянутой плоскости не изменяет ε . Уравнение (7) имеет вещественные решения для $[v]^*$, если $D = A_1^2 - 4A_2 A_3 > 0$. Если геометрия лопаток задана, то при любом фиксированном ε имеем $D > 0$ для достаточно малых M_{n-} ; если же величина M_{n-} фиксирована и $M_{n-}^2 \neq m/R^2 |\nabla \chi|^2$, то неравенство $D > 0$ справедливо при достаточно малых значениях $|\varepsilon|$. Если увеличивать M_{n-} при $\varepsilon = \text{fixed}$, то, вообще говоря, при некотором критическом значении $M_{n-}^{\text{кр}}$ достигается равенство $D = 0$ и дальнейшее увеличение M_{n-} невозможно, поскольку решения (7) становятся комплексными. Аналогичное положение имеет место, если увеличивать $|\varepsilon|$ при $M_{n-} = \text{fixed}$. Выясним, какому режиму течения соответствует обращение в нуль величины D . С этой целью введем в рассмотрение три орто-

гональных единичных вектора на Σ : $b_1 = \nabla \chi / |\nabla \chi|$, $b_2 = n^{-1/2} (1 - i R \partial \Phi / \partial l)$, $b_3 = b_1 \times b_2$. Направление b_1 совпадает с нормалью к лопатке, вектор b_2 лежит в касательной к лопатке плоскости и ортогонален к кромке лопатки на Σ . Имеем $w_+ = w_2 b_2 + w_3 b_3$, поскольку $w_+ \cdot b_1 = 0$ (см. (4)). Отметим, что скорость $w_2 = w \cdot b_2$ в силу (6) непрерывна на Σ ($w_{2+} = w_{2-}$).

Рассмотрим сначала частный случай $w_2 = c_l + R w_+ \partial \Phi / \partial l = 0$. В этом случае можно провести аналогию между рассматриваемой задачей и задачей об обтекании плоской решетки тонких пластин потоком газа, направление которого отличается от направления пластины [8] (стр. 237). Действительно, спроектируем (2) на направление b_3 , совпадающее в данном частном случае ($w_2 = 0$) с направлением скорости w_+ :

$$[p]' n \cdot b_3 + [\rho] w_+ \cdot b_3 = 0 \quad (8)$$

Соотношения (1), (3), (8) совпадают по форме с уравнениями, описывающими обтекание решетки тонких пластин идеальным газом ([8], стр. 233, формулы (32.2) — (32.4)), если в (1), (3), (8) формально заменить параметры течения газа со стороны (-) и (+) параметрами потока соответственно до и после входа в решетку. Указанное совпадение не удивительно, так как обе системы равенств выражают законы сохранения массы, энергии и количества движения в проекции на направление b_3 .

Непосредственной проверкой можно убедиться, что при $w_2 = 0$ равенство $D = 0$ эквивалентно соотношению $M_{\infty}^2 = |w_+|^2 / k p_+ = 1$, то есть на входе в лопаточную область (сторона (+)) параметры газа становятся критическими. Равенство $M_{\infty} = 1$ в случае обтекания газом решетки тонких пластин [8], как известно, соответствует режиму замирания решетки. Приведенные соображения дают основание считать, что в рассматриваемом случае осесимметричного течения газа при $w_2 = 0$ соотношение $M_{\infty} = 1$ ($D = 0$) соответствует режиму замирания входного сечения в лопаточную область.

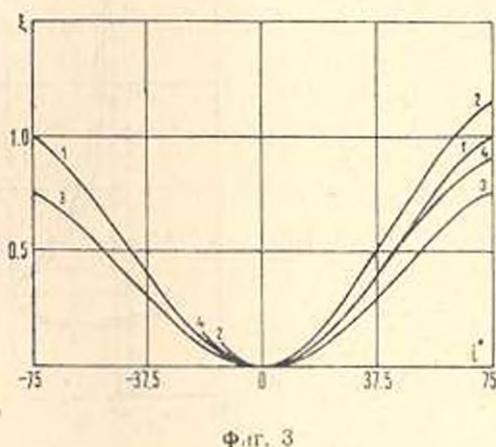
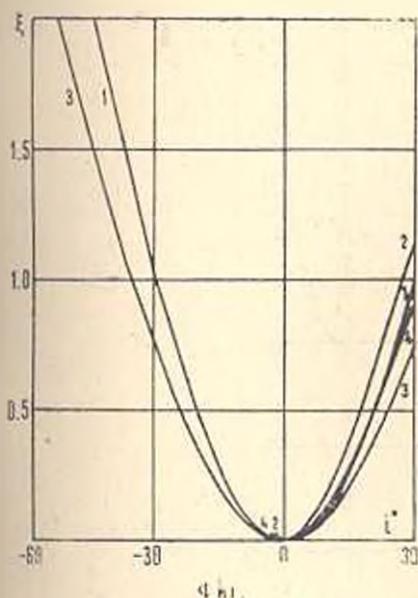
В общем случае ($w_2 \neq 0$) равенство $D = 0$, как можно показать с помощью (1) — (5), (7), эквивалентно следующему ($a_{\pm}^2 = k p_{\pm} v_{\pm}$):

$$M_{\infty}^2 = 1 + m^{-1} a^{-2} \left| c_{l+} + R \frac{\partial \Phi}{\partial l} w_+ \right|^2 \quad (9)$$

С учетом введенных выше обозначений равенство (9) принимает вид $M_{\infty}^2 = w_2^2 / a^2 = M_{\infty 1}^2 - M_{\infty 2}^2 = 1$, где $M_{\infty 1}^2 = w_1^2 / a^2$. Таким образом, в общем случае равенство $D = 0$ соответствует тому, что скорость $w_2 = w_+ \cdot b_2$ в направлении b_2 совпадает с местной скоростью звука a . Можно показать, что аналогичный результат справедлив для упоминавшейся выше задачи об обтекании решетки тонких пластин [8], если на рассматриваемое плоское течение наложить поток, имеющий постоянную и ортогональную плоскости решетки скорость (w_2);

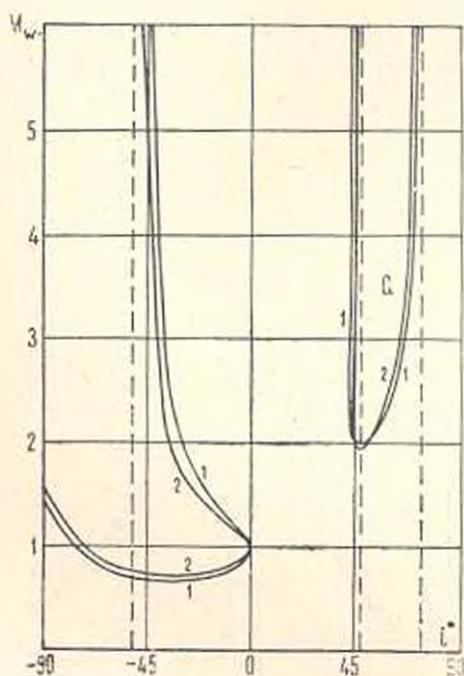
в этом случае равенство $D=0$ отвечает тому, что между пластинами компонента скорости, лежащая в плоскости решетки, достигает скорости звука (независимо от величины w_1).

На фиг. 2–3 представлены результаты расчетов коэффициента потерь полного давления $\zeta = (p_-^* - p_+^*) / (\rho_- w_-^2 / 2)$ в зависимости от угла атаки i для случая $k=1,4$, $\gamma_- = 0$ (линии тока свободного потока ортогональны кромкам, $\text{tg} \gamma = c_l / c_n$); при этом рассматривалось решение



системы (1)–(5), отвечающее условию $\zeta = 0$ при $i = 0$. Угол атаки i определяется соотношением $\text{ctg}(\beta - i) = -w_{u-} / c_{n-}$ и связан с введенным ранее параметром ε равенством $\varepsilon = \text{ctg}(\beta - i) - \text{ctg} \beta + \text{tg} \gamma \cdot \text{tg} \delta$, где $\text{tg} \delta = R \partial \Phi / \partial l$, δ — угол тангенциального наклона лопаток, $\text{ctg} \beta = -R \partial \Phi / \partial n$, β — угол наклона лопатки. Кривые на фиг. 2 соответствуют $\beta = 30^\circ$, фиг. 3 — $\beta = 75^\circ$. Кривые 1, 2 на фиг. 2, 3 получены при $\delta = 0$, кривые 3, 4 — при $\delta = 30^\circ$ при различных числах Маха M_{w-} ($M_{w-}^2 = w_-^2 / a_-^2$); кривые 1, 3 соответствуют значению $M_{w-} = 0,1$, кривые 2, 4 — $M_{w-} = 0,75$. Как видно из фиг. 2, 3, при увеличении угла δ и фиксированных M_{w-} , i , β коэффициент ζ уменьшается. Указанная закономерность может быть строго обоснована, например, при достаточно больших значениях $m = 1 + \text{tg}^2 \delta$, то есть при углах δ , близких к $\pi/2$. В этом случае на основании равенств (1)–(5) можно показать, что скачки газодинамических величин и, следовательно, коэффициент ζ стремятся к нулю при фиксированных M_{w-} , i , β , $\gamma = 0$ и $\delta \rightarrow \pi/2$. Как видно из фиг. 2, 3, с увеличением M_{w-} и фиксированных δ , β , i коэффициент потерь ζ увеличивается. На фиг. 4 для случая $\beta = 75^\circ$ в плоскости параметров M_{w-} , i представлены границы областей, в которых дискриминант D уравнения (7) неотрицателен ($D \geq 0$). Кривые 1 на фиг. 4 получены при $\delta = 0$, а кривые 2 — при $\delta = 30^\circ$. Области G

на фиг. 4 соответствуют неравенству $D < 0$. Пунктирными линиями показаны асимптоты границ рассматриваемых областей. Отметим, что кривые на фиг. 2-4 не изменяются при одновременной замене β на $\pi - \beta$, а l — на $(-l)$; а также при замене δ на $(-\delta)$.



Фиг. 4

В случае несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) предположение (5) совместно с соотношениями (1), (2), (4) в случае $\tau = 1$ приводит к формуле для местных потерь напора $[H]_x = (|\omega|_x^2)/2g$, которая аналогична формуле Борда-Карно для потерь напора при внезапном расширении канала. Отметим, что в случае несжимаемой жидкости при увеличении угла тангенциального наклона δ и фиксированных β , l , ω_x , $\gamma_x = 0$ коэффициент ζ уменьшается, как это непосредственно следует из формулы

$$\zeta = \frac{g[H]_x}{\frac{1}{2}\omega_x^2} = \frac{\tau^2}{m|1 + \text{ctg}^2(\beta + l)|}$$

являющейся точным следствием соотношений (1), (2), (4), (5).

В заключение отметим, что выражения для коэффициента потерь ζ , вычисляемые в соответствии с (1)-(5), в случае сжимаемой и несжимаемой жидкости получены в предположении $\tau = 1$, то есть для бесконечно тонких лопаток. Для учета телесности лопаток следует ввести в выражение для ζ коэффициент смягчения удара κ [8, 2], то есть считать, что $\zeta = \kappa[\rho^*]_x/(\rho\omega_x^2/2)$, где $[\rho^*]_x$ вычисляется на осно-

ванин (1) — (5). В случае несжимаемой жидкости коэффициент κ вводится в выражение для потерь напора аналогично. Значение κ задается на основании данных экспериментальных исследований.

ՏՈՒՐՐՈՄԲԵՆԱՆԵՐՈՒՄ ՀԵՂՈՒԿԻ ԱՌԱՆՅՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ՀՈՍՔԻ ԴԵՊՔՈՒՄ
ԹԵՎԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԵԶՐԵՐԻ ՎՐԱ ԱՌԱՋԱՑԱՑ
ԽՉՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՐԱՐՆԵՐԱԿՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Վ. Ի. ԿԼԻՄՈՎԻՉ, Ա. Վ. ՖԵՏՈՐՈՎ

Ա մ փ ո փ ո մ

Համիլտոնի վարիացիոն սկզբունքի օգնությամբ դուրս է բերված թեթև մատնելության հաշվառումով թևերի համակարգի եզրերի վրա հեղուկի էներգիայի և իմպուլսի բալանսը արտահայտող պայմանների համակարգեր: Բաժանման եզրի վրա զանգվածի պահպանման օրենքի լրացումով ստացված համակարգը հանդիսանում է փակ ոչսեղմելի և ոչ փակ սեղմելի հեղուկի (գազի) համար: Կատարված է ստացված կապակցությունների հետազոտություն:

Հաստատված է, որ կա երկու լուծում բաժանման եզրի վրա դադողինամիկ մեծությունների թռիչքի համար:

CONDITIONS ACROSS THE DISCONTINUITIES AT THE BOUNDARIES
OF BLADED ZONES WITHIN THE AXISYMMETRIC FLOW IN
TURBOMACHINES

V. I. KLIMOVICH, A. V. FEDOROV

S u m m a r y

With the aid of Hamilton's variational principle conditions are derived expressing the balance of impulse and energy of a fluid across the boundaries dividing free and bladed zones of the flow tract in the framework of the axisymmetric flow model. This scheme complemented with the mass conservation law across the boundary is closed for incompressible fluid and unclosed for the compressible one. For the latter case the lacking condition is provided by the hypothesis of orthogonality of the force acting upon the liquid particle to the surface of the blade. The relationships so obtained are examined in detail. It has been shown that there arise two solutions for the jumps of the hydrodynamical quantities across the boundary. For small values of declination of the free flow from a tangent to the blade, the domains of applicability of each solution are found with the aid of the second law of thermodynamics. For incompressible fluid, the hypothesis of absence of the tangential component of the force is brought to the conclusion that the losses of energy are equal to the kinetic energy of "lost" velocities.

ЛИТЕРАТУРА

1. Танский А. М. Решение осесимметричной задачи о вихревом течении жидкости в турбомашинных, имеющей разрывы на кромках лопастей. В сб. «Гидравлические машины», Харьков, ХПИ, 1971, вып. 5.
2. Сироткин Я. А., Степанов Г. Ю. Осесимметричное вихревое течение невязкой жидкости в турбомашинных. Аннотации докладов IV Всесоюзного съезда по теор. и прикл. механике, Киев, 1976.
3. Климович В. И., Лурье К. А., Федорова А. В. К вопросу об условиях на поверхностях раздела областей различных типов в проточной части турбомашин. Препринт ФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР, Ленинград, 1979, № 638.
4. Сироткин Я. А. Вариационно-разностный метод решения задачи осесимметричного вихревого течения в турбомашинных с неоднородными условиями склейки на кромках. Аннотации докладов V Всесоюзного съезда по теор. и прикл. механике. Алма-Ата, 1981.
5. Климович В. И., Федорова А. В. О граничных условиях на кромках лопастных систем турбомашин. Письма в Журнал технической физики, 1981, т. 7, вып. 19, с. 1188—1191.
6. Сироткин Я. А., Степанов Г. Ю. Установившееся осесимметричное вихревое течение невязкой жидкости в многоступенчатых турбомашинных. Изв. АН СССР, МЖГ, 1981, № 6, с. 3—15.
7. Lurie K. A., Fedorova A. V., Klimovich V. I. Conditions along the boundaries of bladed zones within the flow tracts of turbines. — Intern. Journ. for numerical methods in fluids, 1982, vol. 2, p. 299—311.
8. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962. 512 с.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР

Поступила в редакцию
23.VII.1981

УДК 539.43 : 622.011.4

К ОЦЕНКЕ УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ СТЕНОК СКВАЖИН

СМОЛЬСКИЙ В. М.

В настоящее время в связи с неуклонным ростом объема разработок полезных ископаемых на больших глубинах актуальной является задача обеспечения усталостной прочности протяженных необсаженных стенок скважин. В процессе строительства скважины ее стенки воспринимает импульсы гидростатического давления при спуско-подъемных операциях, что вызывает усталостный рост отходящих от ее поверхности трещин, образовавшихся при проходке скважины. Достижение этими трещинами критической длины приводит к скалыванию породы со стенок скважины и образованию каверн, что создает осложнения при бурении. В работе применена теория роста усталостных трещин сдвига для оценки долговечности ствола скважины. Получено дифференциальное уравнение начального контура вертикального профиля каверны и форма кривой усталости. Теоретически выведена линейная зависимость между логарифмом сколотого объема и числом циклов гидростатического нагружения. По результатам усталостных экспериментов определена постоянная кривой усталости для известняка и гранита.

Пусть в однородном изотропном упругом теле в виде полупространства имеется заполненный жидкостью вертикальный цилиндрический вырез большой глубины. Ось Oz цилиндрической системы координат направим вверх по оси выреза, начало координат O выберем на поверхности полупространства, радиальную координату обозначим через r . Будем считать, что на глубине $z = -H$ от стенки цилиндрической выемки под углом α к ней отходит плоская трещина, глубина которой l много меньше ее ширины b , сравнимой с радиусом цилиндра a (фиг. 1). С трещиной свяжем локальную систему координат (t, n) в плоскости, проходящей через ось цилиндра, и введем координату q вдоль оси t .

Согласно [1], для определения коэффициента интенсивности напряжений сдвига K_{II} у вершины трещины необходимо вычислить «комбинацию Кулона»

$$f(q) = \tau_{nt} - |\sigma_n| \operatorname{tg} \rho \quad (1)$$

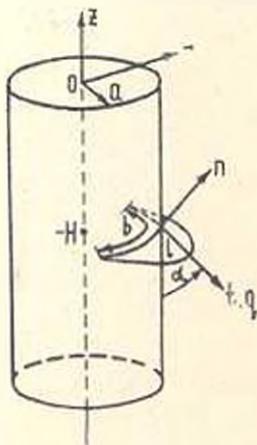
в плоскости трещины при ее отсутствии. Здесь ρ — угол сухого трения, а τ_{nt} , σ_n — касательное и нормальное напряжения в плоскости трещины, которые связаны с напряжениями в цилиндрических координатах известными соотношениями [2]:

$$\sigma_r = \sigma_r \cos^2 \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha + \tau_{rz} \sin 2\alpha \quad (2)$$

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_z) \sin 2\alpha - \tau_{rz} \cos 2\alpha$$

Здесь σ_r , σ_z , τ_{rz} — общепринятые обозначения напряжений в цилиндрических координатах.

Распределение напряжений в упругом весомом полупространстве вокруг цилиндрической выемки, заполненной жидкостью, получено С. Г. Лехницким [2]



Фиг. 1

$$\sigma_r = \tau_{rz} = \tau_{rz} = 0$$

$$\sigma_r = \frac{\nu\gamma}{1-\nu} z \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{a^2}{r^2} q_1 z \quad (3)$$

где γ , q_1 — удельный вес породы и жидкости соответственно, ν — коэффициент Пуассона породы. Перейдем в (3) к локальной координате q с помощью формул

$$r = a + q \sin \alpha, \quad z = -(H + q \cos \alpha) \quad (4)$$

и подставим полученные выражения в (2) и (1). Считая малыми параметрами величины q/a и a/H , после несложных преобразований получаем следующее выражение:

$$f(q) = a_1 + \tau_0 q$$

$$a_1 = - \frac{H}{\cos \alpha} [q_1 \cos \alpha \sin(\alpha + \rho) - \gamma \sin \alpha \cos(\alpha + \rho)] \quad (5)$$

$$\tau_0 = - \frac{H}{a \cos \alpha} \left[\frac{\nu\gamma}{1-\nu} - q_1 \right] \sin 2\alpha \sin(\alpha + \rho)$$

Итак, «комбинация Кулона» в плоскости трещины в ее отсутствии линейна по координате; выражение коэффициента интенсивности напряжений сдвига для этого случая получено в явном виде в [1]

$$K_{II} = - \frac{\sqrt{\pi} l (\sigma_1 + k)}{\sqrt{2} G_1(\alpha, \rho)} - \frac{3\tau_0 \sqrt{2\pi} l^{3/2}}{8G_3(\alpha, \rho)} \quad (6)$$

Здесь k — коэффициент сцепления, G_1 и G_3 — табулированные в [1] функции.

Согласно теории роста усталостных трещин сдвига, направление развития трещины определяется максимальным значением $|K_{II}|$ по параметру α . Поскольку $l \ll a$, оно определяется максимумом первого члена (6) или минимумом выражения (функция G_1 меняется мало)

$$\varphi(\alpha) = q_1 \cos \alpha \sin(\alpha + \rho) - \gamma \sin \alpha \cos(\alpha + \rho) \quad (7)$$

Производная выражения (7) в точке $\alpha = \pi/4 - \rho/2$ меняет знак с минуса на плюс. Таким образом, начальный угол распространения тре-

шины равен $\pi/4 - \rho/2$, а величина K_{II} зависит от коэффициента a_1 , который для такого значения угла равен

$$a_1 = \frac{H}{2 \cos \rho} (\gamma - q_1) (1 - \sin \rho) \quad (8)$$

Полученная формула позволяет теоретически обосновать тот экспериментальный факт, что на распространение трещины действительно влияет разность горного и гидростатического давлений.

Найдем тенденцию изменения угла распространения трещины. Для этого рассмотрим функцию

$$\varphi_1(\alpha) = \varphi(\alpha) + A \frac{q}{a} \left[\frac{\nu \gamma}{1 - \nu} - q_1 \right] \sin 2\alpha \sin(\alpha + \rho) \quad (9)$$

где отношение некоторых положительных постоянных первого и второго члена в (6) обозначено величиной A (значение ее несущественно). Дифференцируя выражение (9), получаем

$$\varphi_1'(\alpha) = (q_1 - \gamma) \cos(2\alpha + \rho) + A \frac{q}{a} \left[\frac{\nu \gamma}{1 - \nu} - q_1 \right] \{2 \cos 2\alpha \sin(\alpha + \rho) + \sin 2\alpha \cos(\alpha + \rho)\} \quad (10)$$

Для $\alpha = \pi/4 - \rho/2$ будет $\cos 2\alpha = \sin \rho$, $\sin 2\alpha = \cos \rho$ и поэтому второе слагаемое в (10) всегда положительно. Следовательно, с увеличением длины малой трещины угол ее наклона к скважине убывает. Тем не менее, с достаточной точностью для количественных оценок при малых длинах трещины можно считать, что $\alpha = \pi/4 - \rho/2$. Значения функций G_1 и G_2 для этих значений α и $0^\circ \leq \rho \leq 50^\circ$ приведены в табл. 1. Легко видеть, что эти функции мало меняются с ρ при таких значениях α и поэтому в дальнейших расчетах их можно считать постоянными.

Таблица 1

ρ	0°	10°	20°	30°	40°	50°
α	45°	40°	35°	30°	25°	20°
$G_1(a, \rho) \cdot 10^3$	502	503	505	509	507	505
$G_2(a, \rho) \cdot 10^3$	660	661	663	666	665	663

Теперь оценим усталостную долговечность для трещины сдвига. Работа пластических деформаций в этом случае сосредоточена в основном в плоскостях сдвига [3], поэтому уравнение роста трещины записывается в виде

$$\frac{dl}{dt} = \beta \frac{K_{II}}{K_{IIC}^2 - K_{II}^2} \frac{dK_{II}}{dt} \quad (11)$$

где K_{IIC} и β — постоянные породы. Приближенно заменим знаменатель дроби величиной K_{IIC}^2 подставим (6) в (11) и проинтегрируем его. В

результате получим зависимость числа импульсов N до выкола породы от амплитуды σ колебаний гидростатического давления

$$N = \frac{1}{C_1 a_2 X(s)} \left\{ \frac{1}{a_2} \ln \left| \frac{l_c}{l_0} \right| - \frac{1}{a_2} \ln \left| \frac{a_2 + b_2 l_c}{a_2 + b_2 l_0} \right| + \left[\frac{1}{a_2 + b_2 l_c} - \frac{1}{a_2 + b_2 l_0} \right] \right\} \quad (12)$$

где

$$a_2 = \frac{H}{2\sigma \cos \rho} \sigma (1 - \sin \rho) \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} G_1(a, \rho)}, \quad C_1 = \frac{K_{IIC}^2 T_0}{\beta}$$

$$b_2 = \frac{H}{\sigma \cos \rho} \sigma \sin 2\alpha \sin(\alpha + \rho) \frac{3\sqrt{2\pi}}{8G_2(a, \rho)}. \quad X(s) = \exp\left(-\frac{s^2}{4}\right) D_{-2}(-s)$$

T_0 — эффективный период действия колебаний давления, l_0 — начальный размер трещины, l_c — критический размер трещины, определяемый как наименьший корень уравнения $K_{II}(l) = K_{IIC}$, s — отношение среднего значения $(\gamma - q_1)H$ к σ , $D_p(x)$ — функция параболического цилиндра; подробный вывод формулы (12) приведен в [4].

В (12) первый член значительно превышает остальные, кроме того, для больших глубин величина s относительно велика и для функции параболического цилиндра $D_{-2}(-s)$ можно воспользоваться асимптотической формулой; это приводит к записи кривой усталости в следующей форме:

$$N \sigma^2 s = C = \text{const} \quad (13)$$

Из уравнения (12) также следует, что величина N с большой точностью пропорциональна $\ln l_c$, а следовательно, и $\ln v$, где v — объем разрушенной породы. Указанная пропорциональность наблюдается экспериментально для широкого круга пород [5].

Система уравнений (11), (10) при $\varphi = l$ и (6) определяет в параметрическом виде уравнение начального контура каверны при $l \ll a$. Устойчивый профиль каверны определяется взаимодействием ее разрушенной стенки с промывочной жидкостью.

Для экспериментального подтверждения зависимости (13) использованы [5] результаты усталостных испытаний образцов из известняка и гранита. Определение постоянной C и ее статистических характеристик проводилось по четырем вариантам исходных данных (по два на каждый материал), соответствующих началу разрушения и интенсивному обсыпанию стенок; данные сведены в верхние строки табл. 2. В табл. 3 приведены значения постоянной C , ее среднеквадратического отклонения E и коэффициента вариации F . Полученные значения статистических характеристик имеют удовлетворительный разброс. В нижних графах табл. 2 для каждой серии экспериментов приведены результаты расчета долговечности с полученным значением C по формуле (13). Расчет достаточно удачно предсказывает среднее значение долговечности, однако разброс долговечности в зависимости от разности горного и гидростатического давления предсказан неточно. Это связано, по-видимому, с неоднозначностью качественной оценки разрушения стенки: в экспериментах результаты имеют значительный

Таблица 2

Сравнение экспериментальной N_s и теоретической N_t долговечности модельных образцов стенок скважин n —номер серии испытаний, $[s] = [ss] = \text{кг см}^2$, $[N] = \text{цикл}$

Номер варианта	n	1	2	3	4	5	6	7	
1 известник начало разрушения	s	50	50	100	100	100	150	150	
	N_s	1625	1600	1550	1500	1450	1350	1300	
	N_t	10000	30000	6000	16000	30000	20000	30000	
	N_s	41760	42420	21890	22620	23400	16760	17400	
	n	8	9	10	11	12	13	14	
	s	150	150	150	250	250	250	250	
	N_s	1450	1450	1175	1250	1150	1050	1350	
	N_t	8000	17000	30000	8000	16400	30000	3000	
	N_s	15600	15600	19250	10860	11800	12930	10050	
	2 известник интенсивное обсыпание	n	1	2	3	4	5	6	7
s		100	150	200	200	250	250	250	
N_s		1500	1450	1450	1350	1250	1150	1350	
N_t		20000	10000	3000	10000	10000	20000	5000	
N_s		18390	12680	8511	10220	8826	9594	8172	
3 мрамор начало разрушения		n	1	2	3	4	5	6	
		s	50	100	100	150	150	200	
		N_s	2850	2750	2730	2650	2575	2600	
		N_t	30000	18000	30000	15000	30000	9000	
		N_s	58890	30520	30710	21110	21730	16140	
	n	7	8	9	10	11			
	s	200	200	250	250	250			
	N_s	2500	2420	2350	2350	2275			
	N_t	17000	30000	5000	16000	30000			
	N_s	16780	17340	13160	14250	14760			
4 мрамор интенсивное обсыпание	n	1	2	3	4	5			
	s	100	100	200	200	250			
	N_s	2600	2750	2600	2500	2350			
	N_t	12000	20000	10000	20000	15000			
	N_s	23480	23910	12640	13150	11190			

Таблица 3

Номер варианта	$C \cdot 10^{-10}$	$E \cdot 10^{-10}$	F
1	0.3393	0.2085	0.6144
2	0.2758	0.1538	0.5577
3	0.8392	0.4467	0.5323
4	0.6574	0.2744	0.4174

разброс даже при одинаковых исходных данных. Большие отклонения для малых амплитуд гидростатического нагружения объясняются неучетом предела усталости породы.

Таким образом, результаты усталостных испытаний модельных образцов стенок скважин удовлетворительно описываются соотношениями теории роста усталостных трещин сдвига.

ԱՆՏՔԻ ՊԱՏԵՐԻ ՀՈԳՆԱՄԱՏՅԻՆ ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ
ԳՆԱՀԱՏՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Վ. Մ. ՍՄՈԼՍԿԻ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքը նվիրված է Գ. Պ. Չերեպանովի կողմից զարգացված հոգնածային ճաքի աճման տեորիայունում ճաքի երկայնական սահքի դեպքի ընդհանրացմանը:

Ստացված է կշռելի առածգական մարմնում գլանային անցքից դուրս եկող ճաքի երկայնական սահքի հոգնածային աճի հավասարումը: Հավասարումը օգտագործվում է անցքի պատերի խոռոչների ուղղահայաց պրոֆիլի սկզբնական ձևի անայիզի և պատի շրջակայքում հոգնածային կորի անայի-տիկ տեսքի ստացման համար:

THE ESTIMATION OF FATIGUE DURABILITY OF THE
DRILL-HOLE WALLS

V. M. SMOLSKY

S u m m a r y

The equation of the fatigue growth of longitudinal shift cracks starting from the cylindrical hole in an elastic body possessing a certain weight is obtained. The equation is used to estimate the fatigue curve of the rock near the drill-hole wall and to prove the linear dependence between the logarithm of the split-off volume and the number of cycles of the hydro-static load. The statistical characteristics of the constant fatigue curve for limestone and granite are defined.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. Равновесие откоса с тектонической трещиной.—ПММ, 1976, т. 40, № 1, 136—151.
2. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
3. Роняев М. Усталость высокопрочных материалов.—Разрушение, 1976, т. 3, 473—527.
4. Смольский В. М. Оценка эквивалентных амплитуд напряжений в методах двумерной схематизации случайной нагрузки.—Изв. ВУЗов. Машиностроение, 1981, № 2, 13—16.
5. Тимофеев Н. С., Вузин Р. Б., Ярмидчук Р. С. Усталостная прочность стенок скважин. М.: Недра, 1972. 201 с.

Всесоюзный ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский институт
буровой техники Миннефтепрома

Поступила в редакцию
17.VI.1982

УДК 624.04 : 512.613.2

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

ТАНАНАՊԿՕ Օ. Ը

Наряду с традиционной процедурой МКЭ [1, 2, 3] и расчетах упругих систем широко применяются различные стержневые модели, построению которых посвящены работы А. Хренникова [4], С. Тецкана [5], А. Р. Ржаницына [6], А. П. Филина [7] и др. В настоящей статье рассматривается модель, названная «квазистержневой» и синтезирующая характерные свойства стержневых и конечноэлементных моделей.

1. Имея в виду, для определенности, задачу о плоском напряженном состоянии, запишем функционал потенциальной энергии деформации:

$$U = \iint \left\{ \frac{1}{2} [E^*(u_x^2 + v_y^2) + G(v_x + u_y)^2] + E^*v u_x v_y \right\} dx dy$$

где $E^* = E/(1-\nu^2)$.

Применяя правило вычисления двойного интеграла по частям, преобразуем последнее слагаемое:

$$E^*v \iint u_x v_y dx dy = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_2$$

где

$$I_1 = E^*v \int_s \{v_y \cos(n, x) - v_x \cos(n, y)\} ds + E^*v \iint u_y v_x dx dy$$

Формула для I_2 получается из формулы для I_1 подстановками $u \rightarrow v$, $x \rightarrow y$. Под s понимается контур области, а под n — внешняя нормаль к этому контуру.

Вводя в качестве дополнительной степени свободы угол поворота ω , заменим в выражении для I_1 множитель u_y на $v_x - 2\omega$. Соответственно в выражении для I_2 заменим v_x на $u_y + 2\omega$. Подынтегральный член, выражающий энергию сдвига, запишем в следующей форме:

$$\frac{1}{2} G(v_x + u_y)^2 = G(v_x - \omega)^2 + G(u_y + \omega)^2$$

Составим теперь функционал полной энергии системы при учете дополнительного условия, связывающего угол ω с линейными смещениями

$$\Phi = U - \iint (Xu + Yv) dx dy - \int_s (p_x u + p_y v) ds +$$

$$+ \iint \lambda \left(\omega - \frac{1}{2} v_{,x} + \frac{1}{2} u_{,y} \right) dx dy$$

Здесь X, Y — объемные, а p_x, p_y — контурные внешние нагрузки. Выполняя варьирование по ω , находим

$$\lambda = 2G(v_{,x} - u_{,y} - 2\omega) + E^*v(v_{,x} - u_{,y})$$

или, с учетом выражения для ω ,

$$\lambda = 2E^*v\omega$$

После подстановки найденного значения λ в выражение для Φ , получаем окончательно новый функционал

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Pi$$

где

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \iint |E^*u_{,x}^2 + E^*v(v_{,y}^2 - 4\omega v_{,x} + 2\omega^2) + 2G(v_{,y} - \omega)^2| dx dy \quad (1)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \iint |E^*v_{,y}^2 + E^*v(u_{,y}^2 + 4\omega u_{,y} + 2\omega^2) + 2G(u_{,y} + \omega)^2| dx dy \quad (2)$$

$$\Phi_3 = \frac{E^*}{2} \int_s |(v_{,y}u - u_{,y}v) \cos(n, x) + (u_{,x}v - v_{,x}u) \cos(n, y)| ds \quad (3)$$

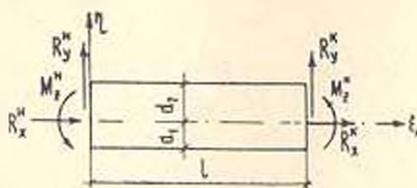
$$\Pi = - \iint (Xu + Yv) dx dy - \int_s (p_x u + p_y v) ds \quad (4)$$

Легко проверить, что варьирование Φ по ω приводит к обычной зависимости $\omega = (v_{,x} - u_{,y})/2$. С учетом этого равенства варьирование по u и v дает внутри области уравнения Ламе, а на контуре — обычные естественные граничные условия.

2. Для построения дискретной модели разобьем плоскую область на полосы двух направлений; точки пересечения осей полос назовем узлами расчетной схемы, а отрезок полосы между двумя соседними узлами будем рассматривать как одномерный двухузловой элемент («квазистержень»).

Изучим работу отдельного квазистержня, параллельного оси x . Пусть ξ, η — локальные оси этого квазистержня (фиг. 1). В этих осях примем следующую аппроксимацию линейных и угловых смещений:

$$u = u_n + \frac{u_k - u_n}{l} \xi; \quad v = v_n + \frac{v_k - v_n}{l} \xi; \quad \omega = \omega_n + \frac{\omega_k - \omega_n}{l} \xi$$



Фиг. 1

В этой записи l — длина квазистержня (расстояние между его узлами). Индексом „н“ помечены величины, относящиеся к начальному сечению квазистержня, а индексом „к“ — к концевому. В общем случае квазистержень может быть несимметричным относительно оси ξ , как показано на фиг. 1. Вычисляя интеграл (1) в пределах $0 \leq \xi \leq l$, $-d_1 \leq \eta \leq d_2$, получим для одного элемента, параллельного оси x ,

$$\Phi_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{E^* F}{l} (u_n - u_k)^2 + 2GF \left(\frac{v_k - v_n}{l} - \frac{w_n + w_k}{2} \right)^2 l - \frac{E^* F}{l} (v_n - v_k)^2 \right]$$

Здесь введены обозначения $F = (d_1 + d_2)h$, $G = G + E^* \nu$.

Дифференцируя Φ_{12} по всем линейным и угловым смещениям торцов, получаем матрицу жесткости квазистержня, параллельного оси x (табл. 1). Естественно, что ту же самую матрицу можно рассматривать и как матрицу жесткости квазистержня, параллельного оси y , записанную в его местных осях.

Для того, чтобы учесть входящее в функционал Φ слагаемое Φ_3 , введем в дополнение к квазистержням, параллельным осям x и y , еще и контурные квазистержни, соединяющие между собой последовательно все узлы, лежащие на границе области. Формула (3) преобразуется к виду

$$\Phi_3 = \frac{E^* h}{2} \int (v_{s,t} u - u_{s,t} v) ds$$

где в подынтегральное выражение входят производные от смещений по дуге граничного контура. Принимая в пределах каждого контурного квазистержня линейную аппроксимацию перемещений, получим для одного такого элемента толщиной h

$$\Phi_{3n} = \frac{E^* h}{4} [(v_n - v_n)(u_n + u_k) - (u_n - u_n)(v_n + v_k)]$$

ТАБЛИЦА 1

РЕАКЦИИ	П Е Р Е М Е Щ Е Н И Я					
	U_n	V_n	ω_n	U_k	V_k	ω_k
R_x^n	$\frac{E^* F}{l}$			$-\frac{E^* F}{l}$		
R_y^n		$\frac{E^* F}{l}$	$\bar{C}F$		$-\frac{E^* F}{l}$	$\bar{C}F$
M_y^n		$\bar{C}F$	$\frac{\bar{C}Fl}{2}$		$-\bar{C}F$	$\frac{\bar{C}Fl}{2}$
R_x^k	$-\frac{E^* F}{l}$			$\frac{E^* F}{l}$		
R_y^k		$-\frac{E^* F}{l}$	$-\bar{C}F$		$\frac{E^* F}{l}$	$-\bar{C}F$
M_y^k		$\bar{C}F$	$\frac{\bar{C}Fl}{2}$		$-\bar{C}F$	$\frac{\bar{C}Fl}{2}$

ТАБЛИЦА 2

РЕАКЦИИ	П Е Р Е М Е Щ Е Н И Я					
	U_n	V_n	ω_n	U_k	V_k	ω_k
R_x^n					$\frac{E^* h}{2}$	
R_y^n				$-\frac{E^* h}{2}$		
M_z^n						
R_x^k		$-\frac{E^* h}{2}$				
R_y^k	$\frac{E^* h}{2}$					
M_z^k						

после чего в результате дифференцирования по узловым смещениям строится матрица жесткости контурного квазистержня, записанная в глобальных осях (табл. 2).

Объемные силы могут быть произвольным образом распределены между квазистержнями двух направлений. Если, например, объемную силу X полностью относить к квазистержням, параллельным оси x , и считать ее в пределах каждого такого квазистержня заданной при помощи линейной функции $X_1 + X_2$, то столбец реакций квазистержня примет вид

$$r_x = \left\{ X_1 \frac{Fl}{2} + X_2 \frac{Fl}{6}; 0; 0; X_1 \frac{Fl}{2} + X_2 \frac{Fl}{3}; 0; 0 \right\}$$

Аналогичным образом столбец r_y грузовых реакций квазистержней, параллельных оси y , зависит от объемной силы Y . Кроме того, в узлах контурных квазистержней действуют реактивные силы

$$r_i = \{r_{i1} r_{i2}\}$$

$$r_{i1} = \left\{ \frac{p_{x1} h l_1}{3} + \frac{p_{x2} h l_2}{6}; \frac{p_{y1} h l_1}{3} + \frac{p_{y2} h l_2}{6}; 0 \right\}$$

$$r_{i2} = \left\{ \frac{p_{x1} h l_1}{6} + \frac{p_{x2} h l_2}{3}; \frac{p_{y1} h l_1}{6} + \frac{p_{y2} h l_2}{3}; 0 \right\}$$

где p_{x1} , p_{y1} и p_{x2} , p_{y2} — значения составляющих контурной нагрузки в начале и в конце квазистержня соответственно, l_i — его длина.

3. От обычной конечноэлементной модели рассматриваемая здесь квазистержневая модель отличается прежде всего тем, что ее топология полностью подобна топологии бездиагональной рамы. Элемент модели — квазистержень — имеет в каждом своем узле три степени свободы (как плоская рама с жесткими узлами), что облегчает сопряжение различным образом ориентированных фрагментов расчетной схемы пространственной тонкостенной конструкции, а также позволяет применять сетки с ячейками, сильно вытянутыми в одном направлении (применение таких ячеек может приводить к значительным погрешностям в «обычном» МКЭ).

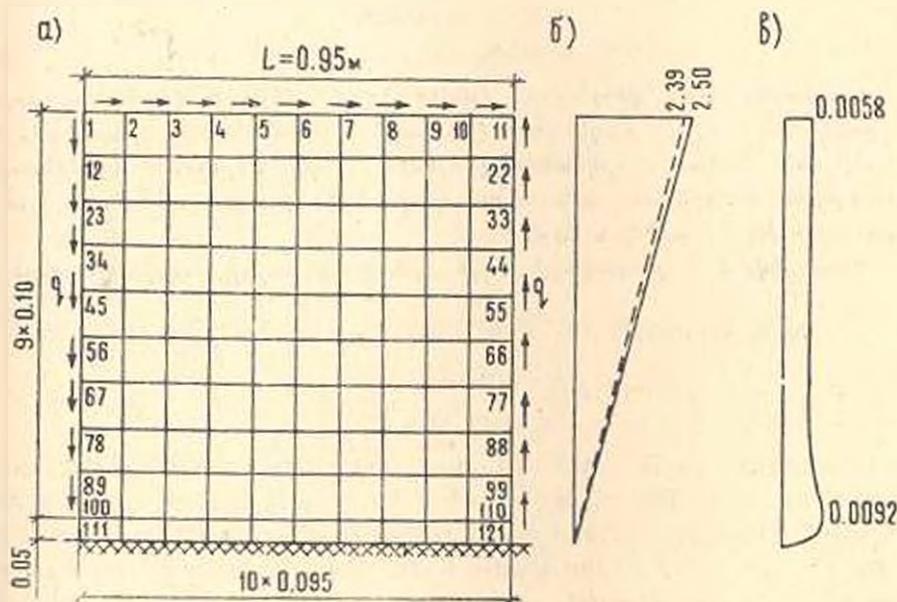
На примере решения задачи о простом сдвиге квадратной пластинки (фиг. 2а) рассмотрим способность предлагаемой модели имитировать сдвиговую деформацию в плоской области. Осями квазистержней пластинка разбита на 100 (10×10) ячеек, причем оси крайних (верхнего горизонтального и двух вертикальных) квазистержней совпадают с незакрепленными кромками пластины, вдоль которых приложена распределенная тангенциальная нагрузка интенсивностью $q = 10$ кПа. Коэффициент Пуассона материала пластинки принят равным $\nu = 0,25$, толщина пластинки — 1 м.

Для сопоставления точных и получаемых при машинном счете значений горизонтальных и вертикальных перемещений использованы безразмерные параметры

$$\bar{u} = Eu/qL, \quad \bar{v} = Ev/qL$$

В точном решении

$$\bar{u} = 2,5y/L, \quad \bar{v} \approx 0$$



Фиг. 2

На фиг. 2б приводится график изменения по высоте параметра \bar{u} в точном (сплошная линия) и приближенном (штриховая) решениях. Горизонтальные перемещения всех узлов, лежащих в одном уровне, практически совпадают. В расчете получены незначительные кососимметричные относительно оси y вертикальные перемещения. На фиг. 2в дается график изменения параметра \bar{v} , построенный по данным расчета для вертикали 11—121.

Касательные напряжения оказались с хорошей точностью (отклонение менее 1%) равными нагрузке q . Незначительные нормальные напряжения, являющиеся следствием действия в квазистержнях нормальных сил, не искажают общего, типично сдвигового, характера напряженного состояния.

Практически к тем же результатам привело решение этой задачи при использовании более грубой сетки (5×5). Этого и следовало ожидать, учитывая однородность полей напряжений и деформаций в точном решении.

В качестве других примеров можно привести расчет изгибаемой полосы с применением сильно вытянутых (при отношении длин сторон 1:5 и даже 1:10) ячеек сетки, расчеты балок-стенок при различных граничных условиях, а также расчет полосы с большим прямоугольным вырезом на растяжение. В последнем случае коэффициент концентрации напряжений в окрестности прямого (входящего) угла практически совпал с полученным для этой задачи по МКЭ [8].

Описанный способ расщепления двумерного энергетического функционала на сумму одномерных может быть обобщен на решение задач расчета пластин и оболочек.

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԷԼԵՄԵՆՏՆԵՐԻ ՄԵԹՈՂԻ ՍԻ ՎԱՐԻԱՆՏԻ ՄԱՍԻՆ

Օ. Դ. ՏԱՆԱՆԱՅԿՈ

Ա մ փ ո փ ու մ

Առաջարկվում է վերջավոր էլեմենտների մեթոդի վարիանտ, որտեղ հաշվարկային մոդելը բաղկացած է եզրային էլեմենտները լրացնող երկու ուղղությամբ համասեռ երկհանգույց էլեմենտներից: Բերվում է էլեմենտների կոշտության մատրիցան, որն օգտագործվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծման համար:

Դիտարկվում է քառակուսի սալի հասարակ սահքի հաշվարկի օրինակ:

ON A VARIANT OF THE FINITE ELEMENT METHOD

O. D. TANANAYKO

S u m m a r y

The article deals with a „quasi-rod model“ of two-dimensional elastic continuum. The model includes quasi-rods parallel with two axes of Cartesian coordinated and contour quasi-rods connecting joints lying on the boundary-line of the elastic body. Rigidity matrices of quasi-rod finite elements are received. A simple example of using the proposed model concludes the article.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. М.: Недра, 1974.
2. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974.
3. Ролли Л. А. Метод конечных элементов и приложения к упругим системам. М.: Стройиздат, 1977.
4. Hrennikoff A. Solution of problems of elasticity by the framework method.—J. of Appl. Mech., ASCE, 1941, v. 63.
5. Хренников А., Тецкан С. Расчет цилиндрических оболочек методом конечных элементов.—В кн.: Симпозиум IASS по проблемам взаимосвязи проектирования и возведения оболочек для производственных и общественных зданий с большими пролетами. Л.: Стройиздат, 1966.
6. Ржаницын А. Р. Представление сплошного изотропного упругого тела в виде шарнирно-стержневой системы. В сб.: Исследования по вопросам строительной механики и теории пластичности. М.: Госстройиздат, 1956.
7. Филин А. П. Расчет пространственных стержневых конструкций типа системы перекрестных связей и его применение к оболочкам при использовании электронных вычислительных машин.—Гр. Ленингр. ин-та инженеров жел.-дор. транспорта, 1962, вып. 190.
8. Клаф Р. У. Метод конечного элемента в решении плоской задачи теории упругости. В сб.: Расчет строительных конструкций с применением электронных машин. М.: Стройиздат, 1967.

Ленинградский институт инженеров
железнодорожного транспорта

Поступила в редакцию
20.VIII.1982