ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1984

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVII, № 2, 1984 Механика

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ПО УСТОЙЧИВОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

БАГДОЕВ А. Г., МОВСИСЯН А. А.

1. В [1] с помощью осредненного лагранжиана выведены уравнения модуляций. В [1, 2] получены условия устойчивости распространения нелинейных квазимонохроматических волн в адиабатическом приближении. В задачах устойчивости и дифракции существенен учет производных от амплитуды. В [3] получены как уравнения модуляций, так и условия устойчивости распространения волн с учетом вторых производных от амплитуды. В частности, если в адиабатическом приближении условие устойчивости записывается в виде

$$Y\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0>0, \quad Y=\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}k_ik_j, \quad k_i=\frac{\partial F}{\partial x_i} \tag{1.1}$$

где ω_0 и ω — соответственно линейная и нелинейная частоты, a — амплитуда, α_i — волновые числа $\theta=\alpha_i x_i-\omega t$, под $(\partial\omega/\partial a^2)_0$ понимается $(\partial\omega/\partial a^2)_{a=a_0}$, $F(x_i, t)=0$ — уравнение характеристик, то уже с учетом вторых производных от a условие устойчивости записывается в виде

$$4a_0^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 Y+Y^2>0 \tag{1.2}$$

Здесь a_0 — амплитуда невозмущенной волны. Как видно, (1.2) расширяет области устойчивости по сравнению с (1.1).

Условие (1.2) выведено в [3] для тех сред, для которых осредненный по фазе лагранжиан содержит слагаемое со вторыми и четвертыми степенями амплитуды. Для осредненного лагранжиана, содержащего нечетные степени, а также для диссипативных сред применяемый здесь метод не проходит. При получении (1.1) предполагается непрерывность волновых чисел α_i и k_i.

В дальнейшем на отдельных примерах будут показаны значения этих расширений.

2. Рассмотрим нелинейно-упругую цилиндрическую оболочку, материал которой подчиняется закону [4]*

* Во всех рассмотренных примерах будем считать, что материал подчиняется этому закону.

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1-2\nu}\varepsilon_0\delta_{ij} + 2G(1+\gamma_1\gamma_0^2)(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_0\delta_{ij}) \tag{2.1}$$

Принимая гипотезу недеформируемых нормалей, лагранжиан запишем в виде

$$L = U - T, \quad T = \frac{\rho h}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right\} \tag{2.2}$$

Здесь ρ, h — плотность материала и толщина оболочки, u, v, w — перемещения. Выражение внутренней энергии согласно [4] будет

$$U = \int_{-h/2}^{h/2}\left[\frac{3E}{2(1-2\nu)}\varepsilon_0^2 + \frac{3}{4}G\left(\gamma_0^2 + \frac{\gamma_1}{2}\gamma_0^4\right)\right]dx_3 \tag{2.3}$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{(1-2\nu)(\varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2})}{3(1-\nu)}$$

$$\gamma_0^2 = \frac{8}{9}\left[\frac{1-\nu+\nu^2}{(1-\nu)^2}(\varepsilon_{x_1}^2 + \varepsilon_{x_2}^2) + \frac{4\nu-1-\nu^2}{(1-\nu)^2}\varepsilon_{x_1}\varepsilon_{x_2} + \frac{3}{4}\varepsilon_{x_1x_2}^2\right] \tag{2.4}$$

Для компонент деформаций с учетом нелинейных членов от прогиба имеем

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 - x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \\
\varepsilon_{x_2} &= \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{w}{R} - x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \\
\varepsilon_{x_1x_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_2} - 2x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

При записи (2.5) принято, что нормаль к начальной волне направлена по образующей оболочки x_1, поэтому нелинейный член, содержащий производную по x_2, отбрасывается.

Полагая перемещения в виде

$$\begin{aligned}
u &= u_0 + b\sin\tau + b_1\sin 2\tau \\
v &= v_0 + c\sin\tau + c_1\sin 2\tau \\
w &= w_0 + a\cos\tau + a_1\cos 2\tau
\end{aligned} \tag{2.6}$$

можно вычислить осредненный лагранжиан

$$\bar{L} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L\,d\tau$$

Выбор решений в виде (2.6), являющихся разложениями Стокса [1], соответствует характеру связей (2.5) и проверяется непосредственной подстановкой в уравнения тонких оболочек [5]. Следует учесть при этом, что получаемые из вариационного принципа соотношения дают порядки $u_0 \sim v_0 \sim b_1 \sim c_1 \sim w_0 - a_1 \sim a^2$ для амплитуд, $b \sim c \sim a$ для оболочек и $b = c = 0$ для пластин.

Варьируя $\overline{L}$ по амплитудам, получаем систему уравнений относительно амплитуд и ω. Выражая все амплитуды через a, получаем нелинейное дисперсионное соотношение (изгибное)

$$\omega = \omega_0 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 \tag{2.7}$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{G}{\rho}\left[\frac{h^2 k^4}{6(1-\nu)} + 2\frac{1+\nu}{R^2}\frac{\alpha_1^4}{k^4}\right], \quad k^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$$

Для произвольной задачи выражение (2.7) не имеет места, поскольку ω будет определяться как некоторый функционал от a, получаемый в результате решения системы вариационных уравнений.

Рассмотрим две сравнительно простые задачи.

а) В типично дифракционной задаче —

$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial x_1}\right| \ll \left|\frac{\partial u_0}{\partial x_2}\right|, \quad \frac{\partial v_0}{\partial x_2} = -\frac{\nu}{4}a^2\alpha_1 - \frac{w_0}{R^2} \tag{2.8}$$

и

$$\rho\omega_0\frac{1-\nu}{G}\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 = \frac{1-\nu^2}{4}\alpha_1^4 + C$$

$$C = \frac{\gamma_2\gamma_1}{180}h^4\alpha_1^6 + \frac{2\gamma_2}{9R^4}(1+\nu)^3(2-\nu) +$$

$$+\frac{\gamma_2 h^2\alpha_1^4}{18R^2}\frac{2-5\nu+3\nu^2+6\nu^3-7\nu^4-\nu^5+2\nu^6}{(1-\nu)^3} \tag{2.9}$$

$$\gamma_1 = \frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^4}$$

б) В одномерной по x_1 задаче —

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_1} + \frac{\nu}{R}w_0 = -\frac{1}{4}a^2\alpha_1^2 - \frac{\rho}{G}(1-\nu)\left(\frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha_1}\right)^2\frac{\partial u_0}{\partial x_1}$$

$$\frac{h^2}{3}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x_1^4} + \frac{\nu}{R}\frac{\partial u_0}{\partial x_1} = \rho h\left(\frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha_1}\right)^2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2}$$

и для $(\partial\omega/\partial a^2)_0$ получаем

$$\frac{\rho(1-\nu)}{G}\omega_0\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 = -\frac{\alpha_1^4}{8}\left(\frac{h^2\alpha_1^4}{12} + \frac{1-\nu}{R^2}\right) + \frac{4(1-\nu)}{Ga^2}\left(\frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha_1}\right)^2\frac{\partial u_0}{\partial x_1}\alpha_1^2 + C \tag{2.10}$$

Для несжимаемого материала ($\nu = 0,5$)

$$C = \gamma_2\left(\frac{h^4\alpha_1^8}{40} + \frac{9}{8R^4} + \frac{h^2\alpha_1^4}{4R^2}\right) \tag{2.11}$$

В общем случае получается для u_0 дифференциальное уравнение четвертого порядка, и уравнение модуляций следует получить непосредственно из лагранжиана, не считая $(\partial\omega/\partial a^2)_0$ заданным числом. Пренебрегая предпоследним членом (2.10) (так как C велико), можно видеть, что имеет место обычный подход, при котором $(\partial\omega/\partial a^2)_0$ задано.

Для пластин, пренебрегая динамическим членом, можно получить

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_1} = -\frac{1}{4}a^2\alpha_1^2 \tag{2.12}$$

Таким образом, для пластин как в дифракционной, так и в одномерной задаче имеют место обычные уравнения модуляций.

Так как ω_0 зависит от α_1^2, то можно использовать условие поперечной устойчивости (1.1) ($k_1 = 0$)

$$\left(h^2\alpha_1^4 - 12\frac{1+\nu}{R^2}\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 > 0 \tag{2.13}$$

Для $\gamma_2 < 0$ (металлы), $(\partial\omega/\partial a^2)_0 < 0$ и получается

$$h^2\alpha_1^2 < 12\frac{1+\nu}{R^2\alpha_1^2} \tag{2.14}$$

Отсюда видно, что для пластин имеется неустойчивость, а для не очень пологих оболочек — поперечная устойчивость.

3. Пусть бесконечная пластина находится на жидкости (полубесконечное пространство). Одномерное уравнение движения пластинки имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \Gamma\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^3\right] + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Z = 0 \tag{3.1}$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \Gamma = \frac{Eh^3\nu_1\gamma_2}{135(1-\nu^2)}$$

а Z — давление жидкости на пластину, которое определяется формулой

$$Z = \rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \rho_0 g w + \frac{1}{2}\rho_0(\nabla\varphi)^2 \tag{3.2}$$

Здесь ρ_0 — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения, и так как жидкость предполагается идеальной и несжимаемой, то потенциал удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{3.3}$$

Кроме этих уравнений, должны добавить условие безотрывного контакта между пластиной и жидкостью

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \quad \text{при } w = x_3 \tag{3.4}$$

Уравнение пластины записано в переменных Лагранжа, но так как геометрическая нелинейность отсутствует, то можно их отождествлять с переменными Эйлера.

Будем искать решение (3.1)—(3.3) в виде

$$\varphi = \varphi_0 t + b\exp(kx_3)\sin\tau + b_1\exp(2kx_3)\sin 2\tau \tag{3.5}$$

$$w = a\cos\tau + a_1\cos 2\tau, \quad \tau = kx_1 - \omega t$$

где амплитуды постоянные, что соответствует адиабатическому приближению.

Соотношения (3.5) выбраны по тому же типу, что и решение для волн на воде [1]. Для рассмотренной более общей задачи потребовался еще учет второй гармоники в потенциале.

Подставляя (3.5) в (3.1)—(3.4), относительно $a, \ldots, b_1$ получаем систему уравнений, решение которой имеет вид

$$a_1 = \lambda a^2, \qquad b = \frac{\omega}{k}a - \frac{3}{2}\omega_0\lambda a^3 + \frac{\omega_0 k}{8}a^3$$

$$b_1 = a\frac{\omega_0}{k} - \frac{\omega_0}{2}a^2$$

$$\omega = \omega_0 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 \tag{3.6}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k(Dk^4 + \rho_0 g)}{\rho_0 + \rho hk}$$

$$\omega_0\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 = \frac{\rho_0 k\left[\omega_0^2\left(\lambda + \frac{1}{2}k\right) + \frac{G\gamma_1\gamma_2 h^3}{90\rho_0(1-\nu)}k^6\right]}{2(\rho_0 + \rho hk)}$$

$$\lambda = \frac{1}{4}\,\frac{2\rho_0\omega_0^2 k}{2(2\rho hk + \rho_0)\omega_0^2 - \rho_0 gk - 16k^5}$$

В частности, при отсутствии пластины ($D = \rho = 0$) получаем результат Уизема [1], а при отсутствии жидкости — результат работы [3], в котором нужно только отбросить влияние геометрической нелинейности.

Анализ полученных формул показывает, что при преобладающем влиянии жидкости $(\partial\omega/\partial a^2) > 0$, то есть имеется поперечная устойчивость, а при преобладании пластины $(\partial\omega/\partial a^2) < 0$, то есть — неустойчивость.

Для выяснения вопроса продольной устойчивости вычислим $d^2\omega_0/dk^2$, которая имеет вид

$$
\begin{gathered}
\omega_0\omega_0'' = \frac{D_1 + D_2 - D_3}{4(\rho_0 + \rho hk)(Dk^5 + \rho_0 gk)} \\
D_1 = Dk^3(8\rho^2h^2k^2 + 20\rho\rho_0 hk + 15\rho_0^2) \\
D_2 = 6Dk^3 g\rho_0 (4\rho^2h^2k^2 + 8\rho\rho_0 hk + 5\rho_0^2) \\
D_3 = \rho_0^3 g^2 (\rho_0 + 4\rho hk)
\end{gathered}
\tag{3.7}
$$

В [5] получено для рассматриваемой задачи $(\partial\omega/\partial a^2)_0$ в предположении, что в выражении φ (3.5) второе слагаемое отсутствует, как и в [1]. Однако, как показывает настоящее исследование, такое приближение при наличии пластинки приводит к неточным результатам.

Отсюда видно, что для тонких металлических пластин имеет место $\omega_0'' > 0$, и согласно (1.1) условия продольной и поперечной устойчивости совпадают.

Примечательно, что те же соотношения получаются при варьировании по $a, \dots, b_1$ осредненного по t суммарного лагранжиана (жидкость плюс пластина)

$$
L = -\rho_0 \int_{-\infty}^{0} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_3}^2) + g_0 x_3 \right| dx_3 +
$$

$$
+ \frac{1}{2}\rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 - \frac{Gh^3}{12(1-\nu)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 - \frac{G\gamma_2\nu_2 h^5}{270(1-\nu)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^4
$$

Тем самым, обосновывается возможность написания единого лагранжиана для сред, состоящих из жидкости и упругой пластины.

4. Рассмотрим теперь трехслойную симметрично собранную пластинку с легким заполнителем [6]. Если обозначить через u, v тангенциальные перемещения несущих слоев, а через w прогиб пластинки, то уравнения изгибного движения такой пластинки, материалы слоев которой подчиняются закону (2.1), запишутся в виде системы относительно этих перемещений. Систему эту можно свести к одному уравнению относительно w

$$
\begin{gathered}
D\nabla^4\left(1 - \frac{BH}{G_0}\nabla^2\right)w + B\left(H + \frac{h}{2}\right)^2\nabla^4 w + \\
+ \frac{2}{3}B\left(H + \frac{h}{2}\right)\gamma_0 H\left(1 + \frac{h}{2H}\right)^3 \frac{\partial^3}{\partial x_1^3}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^3 + \\
+ \frac{4Dh^2}{45}\gamma_2\nu_1\left(1 - \frac{Bh}{G_0}\nabla^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^3 - \\
- (\rho_0 H + \rho h)\left(1 - \frac{BH}{G_0}\nabla^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

Здесь $B = \dfrac{2Gh}{1-\nu}$, $D = \dfrac{Gh^3}{b(1-\nu)}$, h, $2H$ — толщины, ρ, ρ_0 — плотности, G, ν, G_0 — упругие коэффициенты, γ_2, γ_0 — коэффициенты, характеризующие нелинейности соответственно для несущих слоев и для заполнителя. Как и в п. 2, принято, что нормаль к начальной волне направлена по оси оболочки, поэтому оставлен только нелинейный член от производных по x_1.

Если искать решение (4.2) в виде

$$w = a \sin \tau \tag{4.2}$$

то получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega = \omega_0 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 \tag{4.3}$$

$$\omega_0^2(\rho_0 H + \rho h)\left(1 + \frac{BH}{G_0}k^2\right) = Dk^4\left(1 + \frac{BH}{G_0}k^2\right) + B\left(H + \frac{h}{2}\right)^2 k^2$$

$$2\omega_0\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 (\rho_0 H + \rho h)\left(1 + \frac{BH}{G_0}k^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}BH^2\left(1 + \frac{h}{2H}\right)^4_0 \gamma_0 \alpha_1^6 + \frac{D}{15}h^2\gamma_2\nu_1\left(1 + \frac{BH}{G_0}k^2\right)\alpha_1^8$$

$$k^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$$

Как показано в [5], в качестве решения для однослойной пластины при наличии только физической нелинейности достаточно брать основную гармонику (4.2). При этом все условия удовлетворяются.

Отсюда видно, что если в трехслойной пластинке заполнитель также металлический ($\gamma_2 < 0$, $\gamma_0 < 0$), то она ведет себя как однослойная, то есть имеется неустойчивость распространения волн. Если же заполнитель типа резины ($\gamma_0 > 0$), то можно выбрать параметры системы таким образом

$$\gamma_0 > \frac{h^4|\gamma_2|\alpha_1^2\nu_1}{180H}\left(1 + \frac{2GHh}{G_0(1-\nu)}\alpha_1^2\right) \tag{4.4}$$

чтобы имела место устойчивость распространения волн.

5. Если брать уравнение движения вращающегося круглого вала с угловой скоростью Ω согласно [7] и предполагать, что материал подчиняется закону (2.1), то будем иметь

$$EI\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \gamma\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)^3\right] - mr^2\left[\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial t^2} + 2\Omega\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^2 \partial t}\right] + m\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0$$

$$EI\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \gamma\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right)^3\right] - mr^2\left[\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial t^2} - 2\Omega\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2 \partial t}\right] + m\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = 0 \tag{5.1}$$

Здесь w_1, w_2 — прогибы в взаимно-перпендикулярных плоскостях, m — масса единичной длины, r — радиус вала

$$I = \frac{\pi r^4}{4}, \qquad \gamma = \gamma_2 \frac{16 r^2}{81} \tag{5.2}$$

Решение (5.1) ищется в виде

$$w_1 = a \cos \tau, \quad w_2 = b \sin \tau \tag{5.3}$$

При выборе (5.3) соображения такие же, как и в предыдущих пунктах. Получается следующее дисперсионное уравнение:

$$a \left| EI\alpha^4 \left(1 + \frac{3}{4} \gamma a^2 \alpha^4\right) - m\omega^2 (1 + r^2\alpha^2) \right| - b \cdot 2\Omega m r^2 \alpha^2 \omega = 0$$

$$b \left| EI\alpha^4 \left(1 + \frac{3}{4} \gamma a^2 \alpha^4\right) - m\omega^2 (1 + r^2\alpha^2) \right| - a \cdot 2\Omega m r^2 \alpha^2 \omega = 0$$

Отсюда следует, что $a = b$ и

$$\omega = \omega_0 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 \tag{5.4}$$

где

$$\omega_0 = \frac{-2\Omega m r^2 \alpha^2 + \sqrt{4m^2\Omega^2 r^4 \alpha^4 + 4EIm\alpha^4 (1 + r^2\alpha^2)}}{2m(1 + r^2\alpha^2)}$$

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 = \frac{3\gamma EI\alpha^4}{8} \frac{1}{\sqrt{m^2\Omega^2 r^4 + EIm(1 + r^2\alpha^2)}}$$

Как видно из (3.4), $(\partial\omega/\partial a^2)_0 < 0$ и $d^2\omega_0/dk^2 > 0$ для длинноволновых приближений ($r\alpha \ll 1$)

$$\omega_0 = \Omega r^2 \alpha^2 (E_1 - 1), \quad E_1 = \sqrt{1 - \frac{EI}{\Omega^2 m r^4}} \tag{5.5}$$

Таким образом, имеется продольная неустойчивость в адиабатическом приближении. Однако, если учесть (1.2), можно получить устойчивость для амплитуд

$$a^2 < - \frac{\Omega r^2 (E_1 - 1)}{2\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0} k^2$$

Приближенно $\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 = \frac{3\gamma EI\alpha^4}{8m\Omega r^2 E_1}$ и для амплитуды получим

$$a^2 < - \frac{4\Omega^2 r^4 (E_1 - 1) m E_1}{3\gamma EI\alpha^4} k^2 \tag{5.6}$$

Как видно из (5.6), для не слишком массивных валов и больших угловых скоростей допустимые амплитуды, при которых имеется устойчивость, невелики.

ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Ամփոփում

Հետևյալ չորս խնդիրների համար ստացված են դիսպերսիոն հավասարումներ և քվազիմոնոխրոմատիկ ալիքների տարածման համար կայունության և անկայունության պայմանները։

1. Շրջանային գլանային թաղանթի,

2. Հեղուկ կիսատարածության վրա առաձգական սալի,

3. Եռաշերտ սալի,

4. Հաստատուն արագությամբ պտտվող լիսեռի։

Բոլոր դեպքերում էլ ընդունվում է նյութի ոչ-գծային առաձգականություն, իսկ առաջին խնդրում հաշվի են առնվում նաև մեծ տեղափոխությունները։

SOME PROBLEMS OF STABILITY OF PROPAGATION OF NONLINEAR WAVES

A. G. BAGDOEV, L. A. MOVSISIAN

Summary

The problems of stability of propagation of modulation of waves in cylindrical shells, in a plate on fluid, a sandwich plate and along a rotating shaft made from nonlinear elastic material are investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
2. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
3. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Уравнение модуляции в нелинейных диспергирующих средах и их применение к волнам в тонких телах.— Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1980, т. 33, № 3.
4. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: ИЛ, 1961.
5. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Некоторые вопросы распространения квазимонохроматических нелинейных волн в пластинах и оболочках.— Тр. XII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Изд. ЕГУ, 1980, т. 1.
6. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформированных систем. М.: Наука, 1967.
7. *Диментберг Ф. М.* Изгибные колебания вращающихся валов. М.: Изд. АН СССР 1959.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
19. IV. 1982

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVII, № 2, 1984 Механика

НЕКОТОРЫЕ СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ НЕОДНОРОДНО-СТАРЕЮЩИХ СРЕД

АЛЕКСАНДРОВ В. М., КОВАЛЕНКО Е. В., МАНЖИРОВ А. В

В настоящей работе даются решения некоторых плоских (случай плоской деформации) смешанных задач теории ползучести неоднородно-стареющих сред. Процессы неоднородного старения связаны с технологией возведения и изготовления реальных конструкций. Такие процессы происходят при последовательном возведении объектов из стареющих материалов (бетон, древесина, полимеры, композиты) — случай естественного старения, а также при действии на эти объекты облучения, температуры и т. д. — искусственное старение.

Рассмотрены контактные задачи для многослойных неоднородно-стареющих вязкоупругих оснований в предположении, что верхний слой — тонкий[1] неоднородно-стареющий, а нижний, толщины H, — однородно-стареющий, жестко или шарнирно защемленный по основанию.

Смешанные задачи приведены к интегральному уравнению второго рода относительно контактных напряжений, содержащему операторы Фредгольма и Вольтерра. Получены разложения для основных характеристик явления. Изучены случаи искусственного и естественного старения многослойного пакета. Приведены числовые расчеты характерных величин

1. Рассмотрим контактные задачи о вдавливании без трения силой P, эксцентриситет приложения которой относительно центра линии контакта равен e, жесткого штампа в поверхность неоднородно-стареющего вязкоупругого тонкого слоя: 1) лежащего без трения на поверхности однородно-стареющего слоя толщины H; 2) сцепленного с поверхностью неоднородно-стареющего вязкоупругого стержневого основания ($-l \leqslant x_2 \leqslant 0$), которое в свою очередь подстилается однородно-стареющим слоем толщины H (фиг. 1). При этом нижний слой (2) покоится на недеформируемом основании, а вне штампа поверхность верхнего слоя (1) не нагружена. Кроме того, в силу условия контакта при $x_2 = h$ под штампом

$$u_2^1 = -[\delta(t) + \alpha(t)x_1 - g(x_1)] \quad (|x_1| \leqslant a) \tag{1.1}$$

где $\delta(t) + \alpha(t)x_1$ — жесткое перемещение штампа под действием силы P и момента $M = Pe$, $g(x_1)$ — форма основания штампа.

Исследуем вспомогательные задачи о равновесии тонкого неоднородно-стареющего слоя ($|x_1| < \infty$, $0 \leqslant x_2 \leqslant h$) при краевых условиях

[1] Слой будем считать тонким, если длина участка его активного загружения велика по сравнению с толщиной слоя.

$$1')\quad x_2 = h:\qquad \sigma^1_{12} = 0,\ \sigma^1_{22} = -q^*(x_1, t) \tag{1.2}$$

$$x_2 = 0:\qquad \sigma^1_{12} = 0,\ u^1_2 = B\sigma^2_{22}$$

$$2')\quad x_2 = h:\qquad \sigma^1_{12} = 0,\ \sigma^1_{22} = -q^*(x_1, t) \tag{1.3}$$

$$x_2 = 0:\qquad u^1_1 = 0,\ u^1_2 = B\sigma^2_{22}$$

где B — некоторый линейный оператор, вид которого будет указан ниже.

Приближенные решения краевых задач (1.2), (1.3) запишутся в виде (их можно получить на основе [1, 2])

$$1')\quad \sigma^1_{11} = 0,\ \sigma^1_{12} = 0,\ \sigma^1_{22} = -q^*(x_1, t)$$

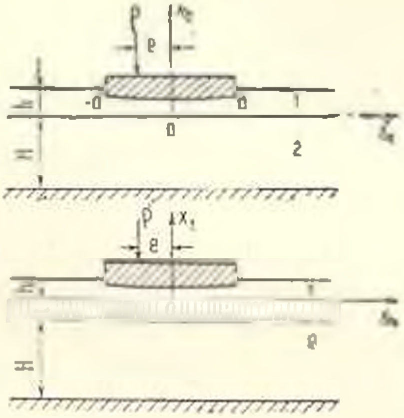
$$\varepsilon^1_{22} = -\frac{1-\nu_1^2}{E_1}(I - L_1)\,q^*(x_1, t) \tag{1.4}$$

$$2')\quad \sigma^1_{11} = -\nu_1(1-\nu_1)^{-1}q^*(x_1, t)$$

$$\sigma^1_{22} = -q^*(x_1, t) \tag{1.5}$$

$$\sigma^1_{12} = -\nu_1(1-\nu_1)^{-1}(h - x_0)\,[q^*(x_1, t)]_{x_1}$$

$$\varepsilon^1_{22} = -\frac{1-\nu_1-2\nu_1^2}{(1-\nu_1)E_1}(I - L_1)\,q^*(x_1, t)$$



Фиг. 1.

$$L_1\varphi(x, t) = \int_{\tau_0}^{t} \varphi(x, \tau)\,K_1(t + \varkappa(x_2),\ \tau + \varkappa(x_2))\,d\tau$$

$$K_1(t, \tau) = E_1\frac{\partial}{\partial\tau}C_1(t, \tau)$$

где I — тождественный оператор, E_1 — модуль упруго-мгновенной деформации, $K_1(t, \tau)$ — ядро ползучести, $C_1(t, \tau)$ — мера ползучести при простом растяжении, $\varkappa(x_2)$ — функция неоднородного старения, ν_1 = consl — коэффициент Пуассона.

Удовлетворяя с помощью (1.4), (1.5) четвертым краевым условиям (1.2) и (1.3), будем иметь при $x_2 = h$

$$1')\quad u^1_2 = -\frac{1-\nu_1^2}{E_1}h\left\{q^*(x_1, t) - \int_{\tau_0}^{t} q^*(x_1, \tau)\frac{1}{h}\int_0^h K_1[t + \varkappa(x_2),\ \tau + \varkappa(x_2)]\,dx_2\,d\tau\right\} - Bq^*(x_1, t) \tag{1.6}$$

$$2')\quad u^1_2 = -\frac{1-\nu_1-2\nu_1^2}{(1-\nu_1)E_1}h\left\{q^*(x_1, t) - \int_{\tau_0}^{t} q^*(x_1, \tau)\frac{1}{h}\int_0^h K_1[t + \varkappa(x_2),\ \tau + \varkappa(x_2)]\,dx_2\,d\tau\right\} - Bq^*(x_1, t) \tag{1.7}$$

Для однородно-стареющего слоя (2) в случае плоской деформации с помощью принципа соответствия в линейной теории ползучести стареющих сред [3] и результатов монографии [4] при 1′) $x_2 = 0$ и 2′) $x_2 = -l$ имеем

$$u_2^2 = \frac{1}{\pi\theta_2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{22}^2\Big|_{\substack{x_2=0\\ x_2=-l}} k\left(\frac{\xi - x_1}{H}\right)\left[1 - \int_{\tau_1}^{t} K_2(t-\tau_1, \tau-\tau_1)\right] d\tau d\xi\right\} \tag{1.8}$$

$$k(z) = \int_0^{\infty} N(\xi) \cos \xi z d\xi$$

$$1')\ \theta_2 = E_2[2(1-\nu_2^2)]^{-1}, \quad 2')\ \theta_2 = 2E_2(1-\nu_2)[(1+\nu_2)(3-4\nu_2)]^{-1}$$

где τ_1 — момент изготовления элементов нижнего слоя.

Известно [4], что:

1. Функция $N(\xi)$ — непрерывна, вещественна и четна на действительной оси;

2. $$N(\xi) > 0 \quad (|\xi| < \infty) \tag{1.9}$$

3. $$N(\xi)\xi = A_1\xi + O(\xi^3)\ (\xi \to 0), \quad N(\xi)\xi = 1 + O(\exp(-A_2\xi))\ (\xi \to \infty)$$

$$A_1,\ A_2 = \mathrm{const}$$

Учитывая в задаче 2), что по толщине стержневого слоя ($u_2^c = 0$) σ_{22}^1 не изменяется по x_2, найдем при $x_2 = 0$

$$u_2^2 = \frac{1 - \sigma - 2\sigma^2}{1 - \sigma}(I - L^c)\, l\, \frac{\sigma_{22}^1}{E^c} +$$

$$+ \frac{1}{\pi\theta_2}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{22}^1 k\left(\frac{\xi - x_1}{H}\right)\left[1 - \int_{\tau_1}^{t} K_2(t-\tau_1, \tau-\tau_1)\right] d\tau d\xi \tag{1.10}$$

где величины и операторы имеют вид (1.5) с индексом, соответствующим стержневому основанию, а σ — коэффициент Пуассона этого основания.

Подставляя в соотношения (1.6), (1.7) при $|x_1| \leqslant a$ функции $q^*(x_1, t) = q(x_1, t)$, u_2^1 в форме (1.1) и полагая в них согласно (1.8), (1.10)

$$1')\quad B(\ldots) = \frac{1}{\pi\theta_2}\int_{-\infty}^{\infty} (\ldots)\, k\left(\frac{\xi - x_1}{H}\right)\left[1 - \int_{\tau_1}^{t} K_2(t-\tau_1, \tau-\tau_1)\right] d\tau d\xi$$

$$2')\quad B(\ldots) = \frac{1 - \sigma - 2\sigma^2}{1 - \sigma}(I - L^c)(\ldots)\, l\, \frac{1}{E^c} +$$

$$+ \frac{1}{\pi\theta_2}\int_{-\infty}^{\infty} (\ldots)\, k\left(\frac{\xi - x_1}{H}\right)\left[1 - \int_{\tau_1}^{t} K_2(t-\tau_1, \tau-\tau_1)\right] d\tau d\xi$$

получим интегральные уравнения для определения неизвестных под штампом контактных давлений

1°)
$$\frac{h}{2\theta_1}\left\{q(x_1,\ t)-\frac{1}{h}\int\limits_{\tau_0}^{t} q(x_1,\ \tau)\int\limits_{0}^{h} K_1[t+\varkappa(x_2),\ \tau+\varkappa(x_2)]\,dx_2d\tau\right\}+$$
$$+\frac{1}{\pi\theta_2}\int\limits_{-a}^{a} q(\xi,\ \tau)\,k\left(\frac{\xi-x_1}{H}\right)\left[1-\int\limits_{\tau_0}^{t} K_2(t-\tau_1,\ \tau-\tau_1)\right]d\tau d\xi= \qquad (1.11)$$
$$=\delta(t)+\alpha(t)\,x_1-g(x_1)\left(|x_1|\leqslant a,\ \ \tau_0\leqslant t\leqslant T<\infty,\ \ \theta_1=\frac{E_1}{2(1-\nu_1^2)}\right)$$

2°)
$$\frac{h}{2\theta_1}\left\{q(x_1,\ t)-\frac{1}{h}\int\limits_{\tau_0}^{t} q(x_1,\ \tau)\int\limits_{0}^{h} K_1[t+\varkappa(x_2),\ \tau+\varkappa(x_2)]\,dx_2d\tau\right\}+$$
$$+\frac{l}{2\theta^c}\left\{q(x_1,\ t)-\frac{1}{l}\int\limits_{\tau_0}^{t} q(x_1,\ \tau)\int\limits_{-l}^{0} K^c[t+\varkappa^c(x_2),\ \tau+\varkappa^c(x_2)]\,dx_2d\tau\right\}+$$
$$+\frac{1}{\pi\theta_2}\int\limits_{-a}^{a} q(\xi,\ \tau)\,k\left(\frac{\xi-x_1}{H}\right)\left[1-\int\limits_{\tau_0}^{t} K_2(t-\tau_1,\ \tau-\tau_1)\right]d\tau d\xi= \qquad (1.12)$$
$$=\delta(t)+\alpha(t)\,x_1-g(x_1)\qquad \Bigg(|x_1|\leqslant a,\ \tau_0\leqslant t\leqslant T<\infty,$$
$$\theta_1=\frac{E_1(1-\nu_1)}{2(1-\nu_1-2\nu_1^2)},\qquad \theta^c=\frac{E^c(1-\sigma)}{2(1-\sigma-2\sigma^2)}\Bigg)$$

К уравнениям (1.11), (1.12) необходимо еще добавить условия статики

$$P=\int\limits_{-a}^{a} q(x_1,\ t)\,dx_1,\qquad M=Pe=\int\limits_{-a}^{a} x_1q(x_1,\ t)\,dx_1 \qquad (1.13)$$

выражающие условия равновесия штампа на основании.

Поскольку решения уравнений (1.11), (1.12) математически эквивалентны, то в дальнейшем приведем исследование только интегрального уравнения (1.11). Кроме того, будем рассматривать только четный вариант ($\alpha(t)\equiv 0$, $g(x_1)$ — четная функция поставленной задачи), имея в виду, что для нечетного случая все может быть проделано аналогично.

С учетом обозначений

$$\xi^*=\xi a^{-1},\ \ x^*=x_1a^{-1},\ \ t^*=t\tau_0^{-1},\ \ T^*=T\tau_0^{-1},\ \ c=0{,}5\pi ha^{-1}\theta_2\theta_1^{-1}$$
$$\varkappa^*(x_2)=\varkappa(x_2)\tau_0^{-1},\quad q^*(x^*,\ t^*)=\theta_2^{-1}q(x_1,\ t),\ \ g^*(x^*)=a^{-1}g(x_1)$$
$$E_jC_j(t,\ \tau)=C_j^*(t^*,\ \tau^*),\ \ K_j^*(t^*,\ \tau^*)=\frac{\partial}{\partial\tau^*}C_j^*(t^*,\ \tau^*)\quad (j=1,\ 2)$$
$$\lambda=Ha^{-1},\ \ \delta^*(t^*)=a^{-1}\delta(t),\ \ P^*=(a\theta_2)^{-1}P,\ \ \tau_1^*=\tau_1\tau_0^{-1}$$

(звездочку далее опустим), получим

$$c\left[q(x,t)-\int_1^t q(x,\tau)\,\overline{K}_1(t,\tau)\,d\tau\right]+\int_{-1}^{1} q(\xi,t)\,k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi-$$

$$-\int_1^t K_2(t-\tau_1,\ \tau-\tau_1)\int_{-1}^{1} q(\xi,\tau)\,k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi\,d\tau=\pi\left[\delta(t)-g(x)\right] \tag{1.14}$$

$$(|x|\leqslant 1,\ 1\leqslant t\leqslant T<\infty)$$

$$\overline{K}_1(t,\tau)=\frac{1}{h}\int_0^h K_1\left[t+\varkappa(x_2),\ \tau+\varkappa(x_2)\right]dx,$$

$$P=\int_{-1}^{1} q(x,t)\,dx \tag{1.15}$$

Заметим, что при $t=1$ уравнение (1.14) и условие (1.15) принимают известный [5] вид

$$cq(x,1)+\int_{-1}^{1} q(\xi,1)\,k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\pi\left[\delta(1)-g(x)\right]\quad(|x|\leqslant 1) \tag{1.16}$$

$$P=\int_{-1}^{1} q(x,t)\,dx$$

В силу соотношений (1.9) и результатов работы [5] можно утверждать:

1. Оператор

$$Rq=\int_{-1}^{1} q(\xi)\,k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi \tag{1.17}$$

является самосопряженным, вполне непрерывным и положительно определенным оператором, действующим из $L_2(-1,\ 1)$ в $L_2(-1,\ 1)$;

2. Характеристические числа β_i оператора (1.17) вещественны, положительны и $\beta_1\leqslant\beta_2\leqslant\ldots\leqslant\beta_i\leqslant\ldots,\ \beta_i\sim i(\ln i)^{-1}$;

3. Если функция $g(x)\in L_2(-1,\ 1)$, то решение интегрального уравнения (1.16) в пространстве $L_2(-1,\ 1)$ существует и единственно при любых значениях параметров $c,\ \lambda\in(0,\ \infty)$.

4. Перейдем теперь к построению решения уравнения (1.14) при условии (1.15). В соответствии с алгоритмом, изложенным в [6, 7], наряду с (1.14) рассмотрим эквивалентное ему интегральное уравнение

$$c\left|q(x,t)-q(x,1)-\int_1^t q(x,\tau)\overline{K}_1(t,\tau)\,d\tau\right|+$$

$$+\left\{\int_{-1}^{1}[q(\xi,t)-q(\xi,1)]k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)-\int_1^t K_2(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\times\right. \tag{2.1}$$

$$\left.\times\int_{-1}^{1}q(\xi,\tau)\,k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi d\tau\right\}=\pi[\delta(t)-\delta(1)]\,(|x|\leqslant 1,\ 1\leqslant t\leqslant T<\infty)$$

и будем искать его решение в форме

$$q(x,t)=q_0(x)+\sum_{i=1}^{\infty}z_i(t)\,q_i(x) \tag{2.2}$$

$$\delta(t)=\delta y(t)+\delta_0+\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i y_i(t) \tag{2.3}$$

где δ, δ_i $(i=0,1,2\ldots)$ — постоянные.

Подставляя (2.2), (2.3) в уравнение (2.1), получим

$$cq_0(x)\int_1^t\overline{K}_1(t,\tau)\,d\tau+\int_1^t K_2(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}q_0(\xi)\,k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi d\tau=\pi\delta[y(1)-y(t)] \tag{2.4}$$

$$\int_1^t z_i(\tau)\left[K_2(t-\tau_1,\tau-\tau_1)+\varkappa_i c\overline{K}_1(t,\tau)\right]d\tau=$$

$$=(1+\varkappa_i c)\left[z_i(t)-z_i(1)\right] \tag{2.5}$$

$$y_i(t)-y_i(1)=z_i(t)-z_i(1)-\int_1^t z_i(\tau)\,K_2(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\,d\tau \tag{2.6}$$

$$\varkappa_i Rq_i=q_i+\pi\varkappa_i\delta_i \tag{2.7}$$

$$|x|\leqslant 1,\ 1\leqslant t\leqslant T<\infty,\ i\geqslant 1$$

Напомним, что с учетом [3]

$$C_2(t,\tau)=\varphi_2(\tau)f(t-\tau)$$

$$\overline{C}_1(t,\tau)=\frac{1}{h}f(t-\tau)\int_0^h\varphi_1(\tau+\varkappa(x_2))\,dx_2=\overline{\varphi}_1(\tau)f(t-\tau)$$

откуда перепишем (2.4) в форме

$$cq_0(x)\overline{C}_1(t, 1) + C_2(t-\tau_1, 1-\tau_1)\int_{-1}^{1} q_0(\xi)\, k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi =$$

$$= \pi\delta[y(t) - y(1)] \tag{2.8}$$

Полагая в (2.8)

$$y(t) = \overline{C}_1(t, 1),\ y(1) = 0,\ F = \varphi_2(1-\tau_1)\overline{\varphi}_1^{-1}(1) \tag{2.9}$$

найдем $q_0(x)$ из следующего интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$cq_0(x) + F\int_{-1}^{1} q_0(\xi)\, k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi\delta\ (|x| \leqslant 1) \tag{2.10}$$

метод решения которого детально изложен в [5].

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма (2.7) и будем искать его решение в виде ряда Фурье по ортонормированной на отрезке $[-1, 1]$ системе полиномов Лежандра, составляющей базис [8] в $L_2(-1, 1)$

$$q_i(x) = \pi\sqrt{2}\,\alpha_i\delta\sum_{j=0}^{\infty} a_j^i P_{2j}^*(x), \qquad P_j^*(x) = \sqrt{\frac{1+2j}{2}}\,P_j(x) \tag{2.11}$$

Разлагая ядро (2.10) в двойной ряд по указанной системе многочленов

$$k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} r_{mn}(\lambda)\, P_{2m}^*(\xi)\, P_{2n}^*(x) \tag{2.12}$$

и подставляя (2.11), (2.12) в (2.7) с учетом ортогональности полиномов Лежандра, получим (δ_{jn} — символ Кронекера)

$$\alpha_i\sum_{j=0}^{\infty} r_{nj}(\lambda)\, a_j^i = a_n^i + \delta_{0n} \quad (i \geqslant 1,\ n = 0, 1, 2\ldots) \tag{2.13}$$

Согласно неравенству

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} r_{mn}^2(\lambda) = A < \infty,\ A = \text{const}$$

вытекающему из (1.9), (1.17), можно утверждать, что оператор, стоящий в левой части (2.13), действует из полного пространства квадратично суммируемых последовательностей l_2 в l_2 при любых значениях $\lambda \in (0, \infty)$ и является там вполне непрерывным; а тогда, если основной определитель системы (2.13) Δ отличен от нуля, то к ней применима теорема Гильберта [8] о ее разрешимости.

Легко показать, что в силу $P = \text{const}$

$$a_0^i = 0\ (i \geqslant 1),\ \ P = \int_{-1}^{1} q_0(x)\, dx \tag{2.14}$$

Это условие служит для определения неизвестных величин α_i. Действительно, из системы (2.13) имеем $a_0^i = \Delta_1 \Delta^{-1}$, где Δ_1 — вспомогательный определитель, получающийся из основного заменой в нем первого столбца элементами $\{1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$. Определитель Δ_1 — симметричный, поэтому корни его $\alpha = \alpha_i$ $(i \geqslant 1)$ вещественны. Подставляя α_i в систему (2.13), найдем a_j^i $(j = 1, 2\ldots)$ и, таким образом, построим последовательность функций $\{q_i(x)(\pi\sqrt{2}\,\alpha_i\delta_i)^{-1}\}$.

Удовлетворим теперь выбором счетного множества постоянных δ_i и $z_i(1)$ $(i \geqslant 1)$ интегральному уравнению (2.18). Предполагая, что $g(x) \in L_2(-1, 1)$, представим ее в виде

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n P_{2n}^*(x), \quad \{g_n\} \in l_2 \tag{2.15}$$

Подставляя (2.12), (2.15) в (1.16), получим

$$cX_j + \sum_{n=0}^{\infty} r_{jn} X_n = \pi[\sqrt{2}\,\delta(1)\delta_{0j} - g_j] \quad (j = 0, 1\ldots) \tag{2.16}$$

$$X_j = \int_{-1}^{1} q(x, 1)\, P_{2j}^*(x)\, dx \tag{2.17}$$

Решив бесконечную алгебраическую систему (2.16), из соотношения (2.17) с учетом формулы

$$q(x, 1) = q_0(x) + \pi\sqrt{2} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \delta_i z_i(1) \sum_{j=0}^{\infty} a_j^i P_{2j}^*(x)$$

будем иметь

$$Dz(1) = b, \quad b \in l_2 \tag{2.18}$$

$$D = \pi\sqrt{2}\,\|\alpha_i \delta_i a_j^i\|, \qquad b = \left\{X_j - \int_{-1}^{1} q_0(x)\, P_{2j}^*(x)\, dx\right\}, \quad z(1) = \{z_i(1)\}$$

$$(i = 1, 2, \ldots;\ j = 0, 1, 2, \ldots)$$

Остановимся подробнее на решении системы (2.18). Во-первых, принимая во внимание результаты работы [9], можно утверждать, что $\beta_{2i} < \alpha_i < \beta_{2i+2}$ $(i \geqslant 1)$. Во-вторых, полагая $\delta_i = \alpha_i^{-3/2}$ (будет обосновано ниже), в силу (2.13)

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} [\alpha_i \delta_i a_j^i]^2 < \infty$$

то есть оператор D является вполне непрерывным из l_2 в l_2.

Элемент $z(1) \in M$ (множество равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных в l_2 последовательностей) назовем квазирешением [10—12] уравнения (2.18) на M, если

$$\inf \{ \| Dz(1) - b \|_{l_2} : z(1) \in M \}$$

Наряду с (2.18) введем урезанную систему

$$D^* z^*(1) = b^* \tag{2.19}$$

$$D^* = \| \sqrt{2} \| \alpha_i \delta_i a_j^i \|, \quad b^* = \left\{ X_j - \int_{-1}^{1} q_0(x) F_{2j}^*(x)\, dx \right\}, \quad z^*(1) = \{ z_i(1) \}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Доказано [11, 12], что если оператор D^{-1} (не обязательно ограниченный) существует, то квазирешение уравнения (2.18) на компакте M также существует, единственно и непрерывно зависит от правой части b. Кроме того,

$$\lim_{n \to \infty} \| z(1) - z^*(1) \|_{l_2} = 0$$

а $z^*(1)$ и (2.19) может быть найдено, например, методом работы [10].

Заметим, что в системе (2.16) $\delta(1)$ можно считать независимым от δ_i $(i \geqslant 1)$, ибо

$$\delta(1) = \delta_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i y_i(1)$$

и определяется в ходе решения задачи через значение вдавливающей силы P. Связь между величинами P и δ находится из соотношений (2.10), (2.14).

Зная $z_i(1)$, можем найти $z_i(t)$ из интегрального уравнения Вольтерра второго рода (2.5). В случае, когда $f(t-\tau) = 1 - \exp(-\gamma(t-\tau))$, $z_i(t)$ запишем в форме

$$z_i(t) = z_i(1) \left[1 + \int_{1}^{t} R_i(t, \tau)\, d\tau \right] \tag{2.20}$$

где $R_i(t, \tau)$ — резольвента ядра Н. Х. Арутюняна

$$H_i(t, \tau) = \frac{1}{1 + c\alpha_i} \frac{\partial}{\partial \tau} \{ [\varphi_2(\tau - \tau_1) + c\alpha_i \bar{\varphi}_1(\tau)] (1 - \exp(-\gamma(t - \tau))) \}$$

вид которой приведен в [3].

Наконец, используя соотношение (2.6), построим последовательность функций $\{y_i(t)\}$

$$y_i(t) = z_i(t) + z_i(1)\, C_2(t - \tau_1, 1 - \tau_1) +$$

$$+ \int_{1}^{t} z_i(\tau)\, C_2(t - \tau_1, \tau - \tau_1)\, d\tau, \quad y_i(1) = z_i(1) \tag{2.21}$$

а вместе с тем и решение поставленной задачи $q(x, t)$ и $\delta(t)$.

Для окончательного обоснования построенного решения следует доказать сходимость рядов (2.2), (2.3), а также линейную независимость системы функций $\{y_i(t)\}$. Последнее условие должно проверяться непосредственно, используя формулы (2.20), (2.21). Отметим только, что в рассматриваемом нами случае оно выполняется.

Теорема. Ряд (3.2) сходится в $L_2(-1, 1)$ равномерно по t на сегменте $[1, T]$ и определяет обобщенное решение уравнения (2.1).

Действительно, оценим остаток ряда

$$S = \left\| \sum_{n=j}^{\infty} z_n(t) q_n(x) \right\|_{L_2(-1,1)} \leqslant \sum_{m,n=j}^{\infty} z_n(t) z_m(t) (q_m, q_n)_{L_2(-1,1)}$$

Поскольку

$$(q_i, q_j)_{L_2(-1,1)} = \frac{2\pi^2}{\sqrt{\alpha_i \alpha_j}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^i a_n^j \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\pi^2}{\sqrt{\alpha_i \alpha_j}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (a_n^i)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^j)^2 \right]^{1/2} \leqslant \frac{2\pi^2}{\sqrt{\alpha_i \alpha_j}} A_3$$

$$A_3 = \text{const}; \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

то

$$S \leqslant 2\pi^2 A_3 \sum_{n=j}^{\infty} |\alpha_n^{-1/2} z_n(t)| \sum_{m=j}^{\infty} |\alpha_m^{-1/2} z_m(t)| < \varepsilon \quad (j \to \infty) \tag{2.22}$$

где ε — сколь угодно малое число. Здесь использовано замечание о поведении α_i при $i \to \infty$ и факт ограниченности $z_i(t)[z_i(1)]^{-1}$.

Если выполнено неравенство (2.22), то ряд (2.2) сходится в $L_2(-1, 1)$ равномерно по $t \in [1, T]$ и согласно [13] определяет обобщенное решение уравнения (2.1).

Равномерная сходимость ряда (2.3) следует из поведения δ_i при $i \to \infty$ и формул (2.6) и (2.20).

3. Пусть теперь

$$\varphi_1[\tau + \varkappa(x_2)] = C_0 + C_1 \exp(-\beta[\tau + \varkappa(x_2)]);$$

тогда

$$\bar{\varphi}_1(\tau) = C_0 + C_1 \mu \exp(-\beta\tau), \qquad \mu = \frac{1}{h} \int_0^h \exp(-\beta\varkappa(x_2))\, dx_2$$

Допустим $\varkappa(x_2) > 0$, то есть возраст верхнего слоя растет по высоте, что происходит, если слой подвержен влиянию внешних воздействий: облучение, температура и т. д. В этом случае $0 < \mu < 1$. Если $\varkappa(x_2) \leqslant 0$, то есть возраст слоя уменьшается по высоте, что соответствует процессу возведения верхнего слоя на нижнем, то $1 \leqslant \mu < \exp(\beta)$. Таким образом, изменяя параметр μ в указанных пределах, можно построить решение поставленной задачи для любых функций $\varkappa(x_2)$.

В качестве иллюстрации предложенного алгоритма приведем решение поставленной задачи в случае: $g(x) = 0$ — штамп имеет плоское основание: $e = \alpha(t) = 0$; $P = 1$; $\lambda = 6$; $c = 0,5$; $C_0 = 0,5522$; $C_1 = 4$; $\varphi_1(\tau) = \varphi_2(\tau)$; $\tau_1 = 0$;

$$N(\xi) = \frac{\operatorname{ch} 2\xi - 1}{\xi(\operatorname{sh} 2\xi + 2\xi)} \tag{3.1}$$

Задание $N(\xi)$ в виде (3.1) соответствует случаю, когда нижний слой лежит без трения на жестком основании.

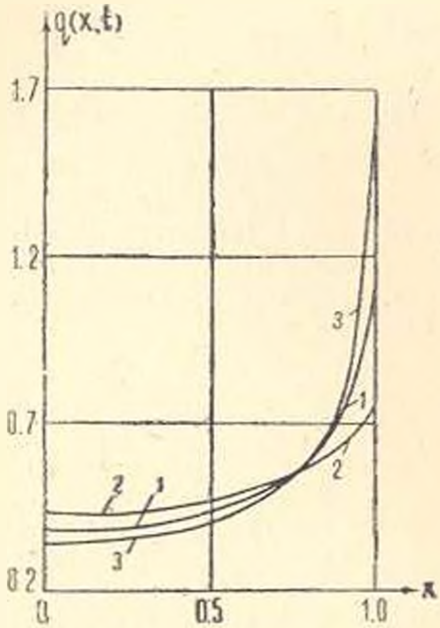
1) Случай естественного старения: $1 \leq \mu \leq \exp(\beta)$;

$$\beta = 2{,}325;\ \gamma = 4{,}5;\ \tau_0 = 75 \text{ сут}$$

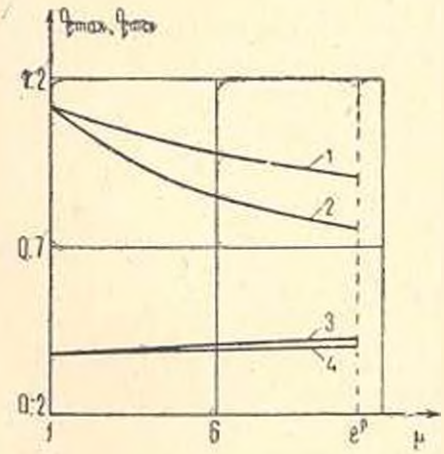
2) Случай искусственного старения: $0 < \mu < 1$;

$$\beta = 0{,}31;\ \gamma = 0{,}6;\ \tau_0 = 10 \text{ сут}$$

На фиг. 2 приведены графики распределения контактных давлений в зависимости от x, t и параметра неоднородного старения μ: $t = 1$ (кривая 1) — для любых значений μ (упругое решение); $t = 2$, $\mu = 10$ (кривая 2) — естественное старение; $t = 11$, $\mu = 0,1$ (кривая 3) — искусственное старение.



Фиг. 2.



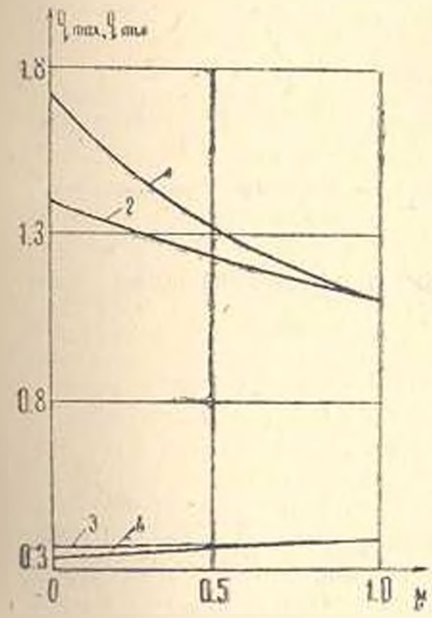
Фиг. 3.

На фиг. 3 изображены зависимости между $q_{\max}(t, \mu) = q(1, t, \mu)$, $q_{\min}(t, \mu) = q(0, t, \mu)$ и μ при различных фиксированных значениях t для случая 1) ($q_{\max}(1{,}05, \mu)$ — (1), $q_{\max}(2, \mu)$ — (2), $q_{\min}(2, \mu)$ — (3),

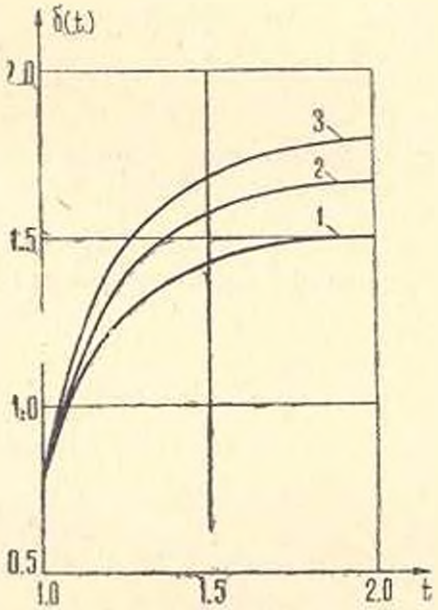
$q_{min}(1{,}05,\ \mu)$ — (4)). Можно заметить, что с ростом параметра μ максимальные контактные давления уменьшаются, а минимальные увеличиваются.

Для варианта искусственного старения — фиг. 4 ($q_{max}(1{,}1,\ \mu)$ — (1), $q_{max}(1{,}5,\ \mu)$ — (2), $q_{min}(1{,}5,\ \mu)$ — (3), $q_{min}(1{,}1,\ \mu)$ — (4)) с уменьшением параметра неоднородного старения μ от 1 до 0 максимальные нормальные контактные напряжения будут расти, а минимальные уменьшаться.

Зависимости $\delta(t)$ при фиксированных значениях μ для двух исследуемых случаев приведены на: 1) фиг. 5 ($\mu = 1$ — (1), $\mu = 6$ — (2), $\mu = 10$ — (3)); 2) фиг. 6 ($\mu = 1$ — (1), $\mu = 0{,}5$ — (2), $\mu = 0{,}05$ — (3)). Видно, что с ростом времени t функция $\delta(t)$ возрастает и стремится к предельному значению, которое тем больше, чем больше параметр μ.



Фиг. 4.

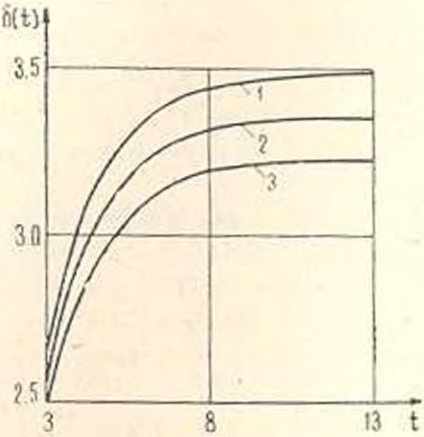


Фиг. 5.

Замечание. Исследуем предельные случаи изменения параметра неоднородного старения μ. Пусть $\mu = 1$. Тогда, если слои изготовлены из одного материала и $\tau_1 = 0$, а сила, действующая на штамп с плоским основанием от времени не зависит, получим, что распределение давлений под штампом будет таким же, как в аналогичной упругой задаче, то есть ползучесть в этом случае не оказывает влияния на распределение контактных напряжений.

Пусть $\mu = 0$. Тогда верхний слой будет работать по типу основания, модель которого подчиняется закону линейной наследственности Вольтерра [14].

Кроме того, как нетрудно заметить, изменяя другие физико-механические параметры основания, из решения (2.2), (2.3) поставленной задачи можно получить решения аналогичных задач теории упругости и линейной наследственной ползучести.



Фиг. 6.

Вариант $\mu = \exp(\beta)$ соответствует случаю кусочно-однородного старения рассматриваемого основания.

Авторы благодарны Н. Х. Арутюняну за внимание к работе.

ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԾԵՐԱՑՈՂ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇ ԽԱՌԸ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Վ. Մ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎ, Ե. Վ. ԿՈՎԱԼԵՆԿՈ, Ա. Վ. ՄԱՆԺԻՐՈՎ

Ամփոփում

Տրված են անհամասեռ ծերացող սողքի տեսության որոշ հարթ խնդիրների լուծումներ։ Դիտարկված են անհամասեռ ծերացող առաձգամածուցիկ բազմաշերտ հիմքի համար կոնտակտային խնդիրներ այն ենթադրությամբ, որ վերին շերտի հաստությունը բավականաչափ փոքր է կոնտակտի մասի երկարությունից։ Խառը խնդիրները բերված են կոնտակտային լարումների նկատմամբ Ֆրեդհոլմի և Վոլտերայի օպերատորներ պարունակող երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման։ Ստացված են երևույթի հիմնական բնութագրիչների համար վերլուծություններ, որոնք ճիշտ են ժամանակի փոփոխության ամբողջ միջակայքում։ Ուսումնասիրված են բազմաշերտ փաթեթի արհեստական և բնական ծերացման դեպքեր։ Բերված են բնութագրիչ մեծությունների թվային հաշվարկներ։

SOME MIXED PROBLEMS OF THE INHOMOGENEOUSLY-AGING MEDIA CREEP THEORY

V. M. ALEXANDROV, E. V. KOVALENKO, A. V. MANZHIROV

S u m m a r y

Some plane problems of the inhomogeneously-aging media creep theory are solved. Contact problems for multilayer inhomogeneously-aging viscoelastic bases are considered. An integral equation of special type containing Fredholm's and Volterra's operators is investigated. Various cases of aging of bases are studied. Numerical results on a concrete basis are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел.— Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 3.
2. *Сумбатян М. А.* Плоская задача для тонкого слоя в условиях установившейся нелинейной ползучести.— Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1980, т. 33, № 1.
3. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л.: Гостехиздат, 1952.
4. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
5. *Коваленко Е. В.* Об эффективном методе решения контактных задач для линейно-деформируемого основания с тонким усиливающим покрытием.— Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1979, т. 32, № 2.
6. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Об одном классе интегральных уравнений смешанных задач механики сплошных сред.— Докл. АН СССР, 1980, т. 252, № 2.
7. *Коваленко Е. В.* О приближенном решении одного типа интегральных уравнений теории упругости и математической физики.— Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1981, т. 34, № 5.
8. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
9. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.
10. *Домбровская И. Н., Иванов В. К.* К теории некоторых линейных уравнений в абстрактных пространствах.— Сиб. матем. журн., 1965, т. 6, № 3.
11. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
12. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
13. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
14. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила в редакцию
15. II. 1982

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVII, № 2, 1984 Механика

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТОКОНЕСУЩЕЙ ПЛАСТИНКИ-ПОЛОСЫ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

КАЗАРЯН К. Б

В статической постановке рассмотрена задача устойчивости токонесущей пластинки-полосы во внешнем магнитном поле. Торцы пластинки неподвижны относительно вертикальных и горизонтальных перемещений. Аналогичные задачи в случае, когда один из торцов пластинки свободен в тангенциальном направлении, рассмотрены в работах [1, 2]. В настоящей работе задача устойчивости пластинки-полосы приведена к рассмотрению самосопряженной краевой задачи на собственные значения. С помощью вспомогательной краевой задачи, разрешаемой в элементарных функциях, найдена нижняя граница критической комбинации магнитного поля и электрического тока, при которой пластинка теряет устойчивость.

§ 1. Пусть пластинка-полоса толщины $2h$, ширины l отнесена к декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3). Срединная плоскость совпадает с координатной плоскостью (x_1, x_2). Пластинка занимает область: $-l/2 \leqslant x_1 \leqslant l/2$, $-\infty < x_2 < \infty$, $-h \leqslant x_3 \leqslant h$. По пластинке по направлению оси x_2 течет равномерно распределенный по толщине электрический ток плотностью j_0. Пластинка находится во внешнем магнитном поле, вектор напряженности которого $\overline{H}_0$ перпендикулярен к срединной поверхности пластинки. Торцы пластинки $x = \pm l/2$ не получают горизонтальных и вертикальных перемещений.

Принимается, что электрический ток является несильным, что позволяет пренебречь собственным магнитным полем тока пластинки, а также не учитывать джоулево тепло.

При решении ограничимся статической постановкой в случае, когда деформации не зависят от координаты x_2.

Взаимодействие внешнего магнитного поля с электрическим током приводит к возникновению объемной силы Ампера, действующей в срединной поверхности пластинки по направлению оси x_1 (магнитное поле $\overline{H}_0$ антипараллельно оси x_3).

$$\overline{F} = F_0 \cdot \overline{i}_{x_1},\qquad F_0 = \frac{1}{c} j_0 H_0 \tag{1.1}$$

($\overline{i}_{x_1}$ — единичный орт по направлению оси x_1).

В пластинке, торцы $x = \pm l/2$ которой неподвижны, возникнут следующие начальные напряжения:

$$\sigma_{11} = -\frac{1}{c}(j_0 H_0) x_1 \tag{1.2}$$

Как видно из формулы для σ_{11}, в пластинке при $x_1 > 0$ действуют сжимающие напряжения, а при $x_1 < 0$ — растягивающие напряжения. Отметим, что в случае пластинки, один из торцов которой свободен в тангенциальном направлении, возникают сжимающие или растягивающие напряжения в зависимости от направления магнитного поля [1, 5]. В рассматриваемой здесь пластинке изменение направления магнитного поля (тока) на противоположное приводит к изменению знака в формуле (1.2), то есть к изменению зон растягивающих и сжимающих напряжений.

Введем безразмерные параметры

$$x = \frac{2x_1}{l}; \qquad u = \frac{2w}{l}$$

(w — нормальное перемещение точек срединной плоскости пластинки).

Тогда уравнение устойчивости пластинки-полосы примет вид

$$u^{IV} + \lambda (xu')' = 0 \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \tag{1.3}$$

В (1.3) $\lambda = j_0 H_0 h l^3/4cD$; $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$, а штрих означает дифференцирование по x.

Примем также, что пластинка шарнирно-оперта по краям $x = \pm 1$

$$u(\pm 1) = u''(\pm 1) = 0 \tag{1.4}$$

Отметим, что к краевой задаче (1.3), (1.4) приводится также задача устойчивости вертикально расположенного весомого стержня, торцы которого шарнирно-оперты и неподвижны относительно вертикальных и горизонтальных перемещений.

Краевая задача (1.3), (1.4) является самосопряженной.

Для определения верхней границы наименьшего положительного собственного числа, соответствующего критической комбинации электрического тока пластинки и внешнего магнитного поля, используем принцип Релея [7].

Согласно этому принципу

$$\lambda_1 \leqslant \int_{-1}^{1} (u'')^2 dx \Big/ \int_{-1}^{1} x (u')^2 dx \tag{1.5}$$

где функции u такие, что удовлетворяют граничным условиям (1.4) и для которых знаменатель соотношения (1.5) положителен.

Функция $u = \sin \pi x + 4 \cos (\pi x/2)$ удовлетворяет этим условиям. Подставляя ее в (1.5), получим

$$\lambda_1 \leqslant 9\pi^4/80 \tag{1.6}$$

Для определения нижней границы λ_1 рассмотрим следующую вспомогательную краевую задачу:

$$
\begin{cases}
v_1^{IV} + \mu v_1'' = 0 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\
v_2^{IV} - \mu v_2'' = 0 & -1 \leqslant x \leqslant 0
\end{cases}
$$

$$v_1(0) = v_2(0); \quad v_1'(0) = v_2'(0); \quad v_1''(0) = v_2''(0)$$

$$v_1'''(0) + \mu v_1'(0) = v_2'''(0) - \mu v_2'(0) \tag{1.7}$$

$$v_1(1) = v_1''(1) = 0; \quad v_2(-1) = v_2''(-1) = 0$$

Положительные собственные числа и соответствующие им собственные функции этой задачи имеют вид

$$\mu_n = (\pi n)^2$$

$$\varphi_n = \begin{cases} 2\sin \pi n x - \pi n (x-1) & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \pi n (x+1) & -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

$n = 1;\ 2;\ 3;\ldots$

Задача (1.7) эквивалентна задаче устойчивости стержня, концы которого неподвижны и шарнирно-оперты, нагруженного в середине сосредоточенной неследящей силой [3].

Укажем несколько свойств функций φ_n

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\, \varphi_n'(x)\, \varphi_k'(x)\, dx = 0; \quad n \neq k$$

$$\mu_n = \int_{-1}^{1} (\varphi_n'')^2\, dx \Bigg/ \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\, (\varphi_n')^2\, dx \tag{1.9}$$

$$0 < \int_{-1}^{1} x (\varphi_n')^2\, dx < \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\, (\varphi_n')^2\, dx$$

Используя соотношения (1.9), на основе теоремы сдвига, доказанной в работе [4], можно показать, что

$$\lambda_n \geqslant \mu_n \tag{1.10}$$

Из (1.10) следует, что

$$\lambda_1 \geqslant \pi^2 \tag{1.11}$$

Таким образом, из (1.6) и (1.11) имеем

$$\pi^2 \leqslant \lambda_1 \leqslant \frac{9\pi^4}{80}$$

Среднее значение $\lambda_* \approx 10{,}41$ и, следовательно, ошибка не более 5,2%.

§ 2. Окончательно, для критической комбинации $j_{кр} = j_0 H_0/c$ имеем следующую формулу:

$$f_{кр} \approx 41{,}64 \frac{D}{hl^3} \tag{2.1}$$

Отметим, что для консольной токонесущей пластинки $f_{кр} = 3{,}91\, D/hl^3$ [1—2], а для пластинки, жестко защемленной по двум краям относительно прогиба w и свободной по одному краю в тангенциальном направлении, $f_{кр} = 37{,}31\ D/hl^3$ [2].

Рассмотрим численный пример.

По алюминиевой пластинке толщины $2h = 0{,}02$ см течет электрический ток плотностью $j_0 = 2{,}1$ кА/см^2. Температура нагрева этой пластинки, обусловленная джоулевым теплом, не превышает 200° С [5—6]. Тогда, если ширина пластинки $l = 7$ см; $l = 10$ см, то критическая напряженность внешнего магнитного поля, при которой пластинка теряет устойчивость, равна, соответственно, $H_* = 2{,}8\cdot 10^4$ э; $H_* = 0{,}96\cdot 10^4$ э.

ԱՐՏԱՔԻՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ՀՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ՍԱԼ-ՇԵՐՏԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Կ. Բ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ստատիկ դրվածքով դիտարկված է արտաքին մագնիսական դաշտում գտնվող հոսանքատար սալի կայունության խնդիրը։ Սալը ամրացված է անշարժ հոդակապերով։

Կայունության խնդրի լուծումը բերված է սեփական արժեքների ինքնահամալուծ եզրային խնդրի ուսումնասիրությանը։ Բավարար ճշտությամբ գտնված են մագնիսական դաշտի և էլեկտրական հոսանքի կրիտիկական կոմբինացիայի վերին և ստորին սահմանները։ Ներկայացված են թվային օրինակներ։

ON SOME STABILITY PROBLEM FOR CURRENT-CARRYING PLATE-STRIP IN AN EXTERNAL MAGNETIC FIELD

K. B. KAZARIAN

S u m m a r y

By means of a statical approach the strability problem is considered for the current-carrying plate in an external magnetic field. The plate edges are simply supported and are fixed in normal and tangential directions. The stability problem is reduced to the investigation of self-

adjoint eigenvalue boundary problem. With sufficient accuracy the lower and upper bounds for the critical combination of magnetic field and electrical current are obtained. Numerical examples are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
2. *Лазарев А. Д.* О решениях задач теории колебаний и устойчивости токонесущей пластины.— Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1981, т. 34, № 4.
3. *Феодосьев В. И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1973. 400 с.
4. *Пиюэли.* Определение нижней границы собственных значений в одномерных задачах путем сдвига в весовой функции.— ПМ, Тр. американского общества инженеров-механиков. русский перевод, 1970, т. 37, серия Е, № 2.
5. *Овакимян Р. Н., Косахян Ю. И., Мартиросян Р. М.* Экспериментальное исследование устойчивости токонесущей пластинки в магнитном поле.— Изв. АН Арм.ССР. Механика, 1974, т. 27, № 6.
6. *Белубекян М. В., Казарян К. Б.* К задаче термоупругой устойчивости токонесущих пластин.— ПМ, 1975, т. 11, № 12.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 238 с.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила в редакцию
13. VII. 1982

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVII, № 2, 1984 Механика

ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ НАГРУЗКЕ И НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ТОКОНЕСУЩЕЙ ТОРОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ

ОВАКИМЯН Р. Н.

Как известно [1], установки системы «Токамак» предназначаются для управляемого термоядерного синтеза. Основой их конструкции является тороидальная камера с сильным магнитным полем, выполняющим роль своеобразной «магнитной ловушки» для плазменного пучка. На «Токамаках» первого поколения, в основном, проводились исследования физики плазмы, а также изучались вопросы стабилизации и удержания плазменного пучка от соприкосновения со стенками тора. Последняя проблема, в принципе, была решена с помощью наложения различных магнитных полей, наиболее значительным из которых оказалось тороидальное поле H_t, параллельное плазменному пучку в торе. Такого вида поле создается катушкой с током, навитой в меридиональном направлении на тороидальную оболочку. Для увеличения силы тока J в катушке, а следовательно, и создаваемой напряженности магнитного поля H_t в дальнейшем предполагается изготовление обмотки катушки из сверхпроводящего материала, как в «Токамаке-7» [2].

В настоящее время, когда начато строительство демонстрационной установки «Токамак», важное значение приобретает инженерная часть дела, включая прочностные расчеты тороидальной оболочки, находящейся под воздействием сверхвысоких температур излучения плазмы, а также электромагнитной нагрузки, возникающей в обмотке тора.

В данной работе делается попытка определения лишь электромагнитных усилий, являющихся следствием взаимодействия тока катушки с собственным магнитным полем, характера их распределения по круговому контуру сечения тороидальной оболочки. Помимо этого, в приближенном виде по безмоментной теории [3] рассчитывается напряженно-деформированное состояние оболочки под действием электромагнитных усилий.

1. Пусть катушка, через которую пропускается постоянный ток силы $J = \text{const}$, наматывается на тороидальную оболочку в меридиональном направлении. Катушка покрывается такой же формы тороидальной оболочкой вращения большого радиуса a и малого радиуса R. Через образуемый коаксиальный зазор для охлаждения обмотки катушки может пропускаться вода, а в случае применения сверхпроводников — криогенная жидкость.

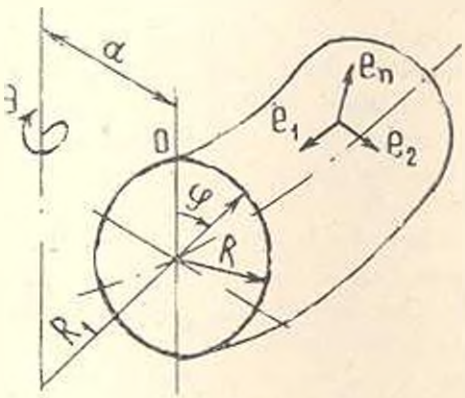
Согласно [3] элемент срединной поверхности оболочки характеризуется единичными орт-векторами e_1, e_2 e_n, с радиусами кривизны тороидальной оболочки вращения (фиг. 1)

$$R_1 = \frac{a}{\sin\varphi} + R = a\,\frac{1+\alpha\sin\varphi}{\sin\varphi}, \quad R_2 = R \tag{1.1}$$

где постоянная $\alpha = R/a$ характеризует геометрическую форму тора, причем $0 < \alpha < 1$. Ввиду замкнутости тороидальной оболочки по малому радиусу R и большому радиусу a, переменные φ и θ изменяются от 0 до 2π.

Определим электромагнитную нагрузку, действующую на элемент срединной поверхности тороидальной (наружной) оболочки.

Пусть полное число витков катушки, наматываемых на тор, равно N. Тогда, при равномерной намотке на единицу длины дуги окружности в широтном направлении θ приходится число витков



Фиг. 1.

$$n = \frac{N}{2\pi a\,(1+\alpha\sin\varphi)} \tag{1.2}$$

которое является функцией от $\sin\varphi$. В частном случае, когда провода плотно наматываются на тор так, что на внутренней окружности радиуса $a - R$ при толщине провода δ имеет место соотношение $N\delta = 2\pi(a - R)$, согласно (1.2) можно написать

$$n = \frac{1}{\delta}\,\frac{1-\alpha}{1+\alpha\sin\varphi} \tag{1.3}$$

Для сведения к минимуму выхода магнитного поля за пределы тора, а следовательно, и катушки последнюю необходимо наматывать на тор возможно малым шагом, придерживаясь меридионального направления. Разумеется, полного исключения широтного направления тока достичь невозможно. Даже в предельном случае цилиндрической оболочки ($\alpha \to 0$) подобные токи возникают хотя бы из-за шага винта обмотки.

Таким образом, при выполнении условий намотки катушки весь ток силы J приближенно считается меридиональным. Помимо этого, при малом сечении провода толщины δ по сравнению с сечением оболочки радиуса R этот ток, согласно [4], приближенно можно принять поверхностным, плотность которого с учетом (1.3) равна

$$i = nJe_2 = \frac{J}{\delta}\,\frac{1-\alpha}{1+\alpha\sin\varphi}\,e_2 \tag{1.4}$$

Интересная работа по определению магнитного поля токов, текущих по поверхности тороидальной оболочки, была выполнена Н. И. Донниковым [5], где для случая меридиональных токов выведено соотношение

$$H = -H_\theta e_1 = -i(a)\,\frac{a}{r}\,e_1 \tag{1.5}$$

записанное здесь в системе единиц СИ. В выражении (1.5) r — расстояние от оси вращения до точек в области, охватываемой тороидальной оболочкой вращения, $i\,(a)$ — поверхностная плотность тока при $r = a$.

Приняв для поверхности оболочки $r = r_s = a\,(1 + \alpha \sin\varphi)$ и, согласно (1.4), поверхностную плотность тока $i(a) = J(1-\alpha)/\delta$, получим из выражения (1.5) напряженность магнитного поля на поверхности тора

$$H_s = -\frac{J}{\delta}\,\frac{1-\alpha}{1+\alpha\sin\varphi}\,e_s \tag{1.6}$$

Силовые линии этого поля имеют лишь окружное (тороидальное) направление.

Электромагнитная сила, действующая на токонесущую поверхность оболочки в магнитном поле, в случае поверхностных токов определяется соотношением

$$p = i \times B_s \tag{1.7}$$

где в системе СИ магнитная индукция на поверхности тора $B_s = \mu\mu_0 H_s$, μ — относительная магнитная проницаемость среды, $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ H/A^2$ — магнитная проницаемость вакуума.

Подставляя в формулу (1.7) выражения плотности тока i (1.4) и магнитной напряженности H_s (1.6), получим электромагнитное давление на токонесущую поверхность тороидальной оболочки

$$p = \mu\mu_0\left(\frac{J}{\delta}\right)^2 \frac{(1-\alpha)^2}{(1+\alpha\sin\varphi)^2}\,e_n = p_0\,\frac{(1-\alpha)^2}{(1+\alpha\sin\varphi)^2}\,e_n \tag{1.8}$$

действующее только в направлении нормали e_n к поверхности оболочки. Для сокращения записи принято обозначение постоянной величины $p_0 = \mu\mu_0\,(J/\delta)^2$.

Из формулы (1.8) следует непрерывность распределения электромагнитного давления по всей поверхности оболочки, что является естественно приближением, так как в действующих системах «Токамак», конечно, имеются бестоковые участки. Однако, учитывая, что нашей основной задачей является исследование качественной картины вида нагрузки, а также возникающего напряженно-деформированного состояния тороидальной оболочки, то электромагнитное давление (1.8) можно считать «размазанным» по поверхности оболочки, как это принято в большинстве подобных работ, например, в [5].

Максимальная величина давления $p_{max} = p_0$, согласно (1.8), приходится на окружность внутреннего радиуса $a - R$, где $\sin\varphi = -1$ ($\varphi = -\pi/2$); минимальное давление $p_{min} = p_0((1-\alpha)/(1+\alpha))^2$ — на окружность радиуса $a + R$, где $\sin\varphi = 1$ ($\varphi = \pi/2$). В зависимости от величины коэффициента α давление в указанных местах может различаться в несколько раз; с уменьшением α это различие уменьшается и в пределе, когда $\alpha \to 0$ ($a \to \infty$), давление стремится к постоянной величине $p \to p_0$.

Отметим симметричность нагружения (1.8) верхней и нижней частей кругового сечения контура радиуса R.

2. Количество работ в области тороидальных оболочек сравнительно невелико [6]. Это объясняется математическими трудностями, возникающими при решении соответствующих дифференциальных уравнений даже в простейших случаях нагружения. Во многих случаях эти трудности преодолеваются лишь с помощью ЭВМ. Однако, как показано в [3], для оценки напряженно-деформированного состояния оболочек, не в ущерб физической сущности задачи, можно использовать упрощенные уравнения так называемой безмоментной теории оболочек.

Согласно этой теории, широко применяемой в практических расчетах, в элементе тороидальной оболочки вращения, нагруженной симметричной силой p (1.8), не зависящей от угла θ, касательные усилия $S = 0$, вследствие чего отсутствует относительный сдвиг кромок элемента ($\omega = 0$). Поэтому дифференциальные уравнения равновесия в усилиях упрощаются и принимают следующий вид [3] при наличии, как в нашем случае, лишь нормальной нагрузки p_z (1.8):

$$\frac{1}{A_1 A_2}\left(\frac{dA_2 T_\varphi}{d\varphi} - T_\theta \frac{dA_2}{d\varphi}\right) = 0$$

$$\frac{T_\theta}{R_1} + \frac{T_\varphi}{R_2} = p_z \tag{2.1}$$

В системе уравнений (2.1) A_1, A_2 — параметры Ляме, причем для тороидальной оболочки вращения по (1.1) $A_1 = R_1 \sin\varphi = a(1 + \alpha\sin\varphi)$, $A_2 = R_2 = R$; T_θ, T_φ — нормальные усилия в элементе оболочки вдоль e_1 и e_2 соответственно, $p_z = p_0 \dfrac{(1-\alpha)^2}{(1+\alpha\sin\varphi)^2}$.

Из системы (2.1) получим линейное дифференциальное уравнение относительно усилия T_φ:

$$\frac{dT_\varphi}{d\varphi} + T_\varphi \frac{1 + 2\alpha\sin\varphi}{1 + \alpha\sin\varphi}\operatorname{ctg}\varphi = p_0 R \frac{(1-\alpha)^2}{(1+\alpha\sin\varphi)^2}\operatorname{ctg}\varphi \tag{2.2}$$

решение которого в общем случае будет

$$T_\varphi = p_0 R \frac{(1-\alpha)^2}{1+\alpha\sin\varphi} \frac{\ln(1+\alpha\sin\varphi) + C}{\alpha\sin\varphi}$$

где C — произвольная постоянная. Для ее определения используем условие конечных значений T_φ по всему круговому сечению тора радиуса R. При $\sin\varphi \to 0$ первое слагаемое в числителе выражения T_φ является конечной величиной, так как $\lim\limits_{\sin\varphi \to 0} \dfrac{\ln(1+\alpha\sin\varphi)}{\alpha\sin\varphi} = \ln e = 1$; второе же слагаемое стремится к бесконечности, ввиду чего следует принять $C = 0$. Таким образом, окончательно имеем

$$T_\varphi = p_0 R (1-\alpha)^2 \frac{\ln(1+\alpha\sin\varphi)}{\alpha\sin\varphi(1+\alpha\sin\varphi)} \tag{2.3}$$

Используя (2.3) во втором уравнении системы (2.1), получим

$$T_\theta = -p_0 R \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha \sin\varphi}\left[\frac{\ln(1+\alpha\sin\varphi)}{\alpha\sin\varphi} - \frac{1}{1+\alpha\sin\varphi}\right] \tag{2.4}$$

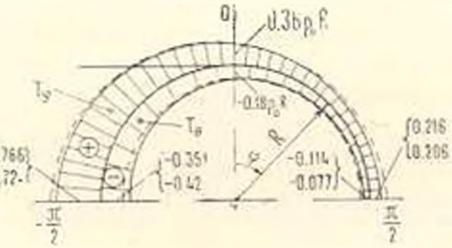
которое также является конечной величиной и при $\sin\varphi \to 0$, в чем легко убедиться, раскрыв соответствующую неопределенность, в результате чего придем к выражению $T_\theta|_{\sin\varphi\to 0} = -p_0 R(1-\alpha)^2/2$. Здесь следует отметить, что усилие T_θ является сжимающим по всему контуру сечения тора, что оказалось возможным при внутреннем давлении типа (1.8).

В существующих установках „Токамак" коэффициент $\alpha < 0{,}4$. Это обстоятельство позволяет упростить формулы усилий T_φ (2.3), T_θ (2.4) в рамках принятой в теории оболочек погрешности $\sim 5\%$. Поэтому, ограничившись в указанных формулах лишь двумя членами разложения в ряд функции $\ln(1+\alpha\sin\varphi) = \alpha\sin\varphi - \frac{\alpha^2\sin^2\varphi}{2} + \frac{\alpha^3\sin^3\varphi}{3} - \ldots$, получим упрощенные выражения усилий

$$T_\varphi = p_0 R\frac{(1-\alpha)^2}{2}\frac{2-\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\sin\varphi}, \qquad T_\theta = -p_0 R\frac{(1-\alpha)^2}{2}\frac{1-\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\sin\varphi} \tag{2.5}$$

удобные для инженерных расчетов.

На фиг. 2 приведены значения усилий T_φ, T_θ, вычисленные при коэффициенте $\alpha = 0{,}4$ по формулам (2.3), (2.4) (показано пунктирной линией) и приближенным формулам (2.5). Ввиду симметричности нагружения показана лишь верхняя часть тора, то есть область $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.



Фиг. 2.

Для сравнения с (2.5) выпишем формулы усилий

$$T_\varphi = \frac{p_0 R}{2}\frac{2+\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\sin\varphi}$$
$$T_\theta = \frac{p_0 R}{2} = \text{const} \tag{2.6}$$

полученные В. И. Феодосьевым [7] по безмоментной теории в случае нагружения тороидальной оболочки постоянным внутренним давлением $p_\alpha = p_0 = \text{const}$. Из формул (2.5), независимо от величины α, следует, что усилие T_φ всегда является растягивающим, а T_θ — сжимающим, в то время как в случае постоянной нагрузки (2.6) оба усилия — растягивающие, что оказалось в полном соответствии с видом начальной нагрузки p_α.

Действительно, если написать нагрузку $p_\alpha = p_0\frac{(1-\alpha_1)^2}{(1+\alpha_1\sin\varphi)^2}$, где вместо коэффициента α в (1.8) принята другая постоянная α_1, и решить с такой правой частью дифференциальное уравнение (2.2), то получим окружное усилие

$$T_\varphi = p_0 R \frac{(1-\alpha_1)^2}{1+\alpha\sin\varphi}\left[\frac{1-\alpha/\alpha_1}{1+\alpha_1\sin\varphi} + \alpha\,\frac{\ln(1+\alpha_1\sin\varphi)}{\alpha_1^2\sin\varphi}\right] \qquad (2.7)$$

принимающее конечные значения по всему контуру сечения тора. При $\alpha_1 = \alpha$ значение T_φ совпадает с (2.3). В приближенном виде

$$T_\varphi = p_0 R \frac{(1-\alpha_1)^2}{2}\,\frac{2+\alpha\sin\varphi-\alpha\alpha_1\sin^2\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)(1+\alpha_1\sin\varphi)} \qquad (2.8)$$

что также совпадает с T_φ по (2.5) при $\alpha_1 = \alpha$. Подставив (2.8) во второе уравнение системы (2.1), получим

$$T_\theta = p_0 R \frac{(1-\alpha_1)^2}{2}\,\frac{1-2\alpha_1/\alpha+\alpha_1^2\sin^2\varphi}{(1+\alpha_1\sin\varphi)^2} \qquad (2.9)$$

идентичное с T_θ по (2.5) при $\alpha_1 = \alpha$.

При $\alpha_1 = 0$, что соответствует постоянному внутреннему давлению $p_n = p_0 = \mathrm{const}$, из (2.8), (2.9) получим формулы В. И. Феодосьева (2.6).

Таким образом, приведенные формулы усилий (2.5) и (2.6) лишний раз подтверждают роль начального вида нагрузки в тороидальной оболочке вращения.

3. Перейдем к определению деформаций. Здесь следует сказать, что приемы приближенного решения, куда входит и безмоментная теория, для определения перемещений в тороидальной оболочке неприменимы, по крайней мере, в окрестности точек $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ [3], где происходит изменение знака радиуса кривизны R_1 (1). В этих точках, в частности, нормальное перемещение $w \to \infty$, что лишено физического смысла.

Поэтому ограничимся рассмотрением лишь линейных деформаций, принимающих конечное значение соответственно усилиям T_φ, T_θ (ввиду симметричности нагрузки p (1.8) относительно оси вращения тора деформация сдвига $\omega = 0$). Выпишем эти соотношения для нашего случая нагружения [3]

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{\alpha\cos\varphi}{1-\alpha\sin\varphi}\,\frac{v}{R} + \frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\sin\varphi}\,\frac{w}{R} = \frac{1-\nu^2}{Eh}(T_\theta-\nu T_\varphi) \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{dv}{Rd\varphi} + \frac{w}{R} = \frac{1-\nu^2}{Eh}(T_\varphi-\nu T_\theta) \end{aligned} \qquad (3.1)$$

где ε_θ — деформация вдоль e_θ, ε_φ и v — деформация и перемещение вдоль e_φ, h — толщина стенки тороидальной оболочки вращения, изготовленной из изотропного материала с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν.

После подстановки упрощенных выражений усилий T_φ, T_θ (2.5) в соотношения (3.1), получим линейные деформации

$$\varepsilon_\varphi = p_0 R \frac{(1-\nu^2)(1-\alpha)^2}{2Eh} \frac{2+\nu-(1+\nu)\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\sin\varphi}$$

$$\varepsilon_\theta = -p_0 R \frac{(1-\nu^2)(1-\alpha)^2}{2Eh} \frac{1+2\nu-(1+\nu)\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\sin\varphi} \qquad (3.2)$$

где числители и знаменатель выражений (3.2) всегда являются положительными величинами. Отсюда следует, что при нагрузке типа p (1.8), имеющей электромагнитное происхождение, в любой точке кругового сечения тора, в той или иной мере, всегда возникает удлинение ε_φ в окружном (меридиональном) направлении и сжатие ε_θ в тороидальном направлении. Максимальные деформации получаются в точке $\varphi = -\pi/2$ ($\sin\varphi = -1$), наиболее близкой к оси вращения тора, где $\varepsilon_\varphi = p_0 R \frac{(1-\nu^2)(1-\alpha)}{2Eh} \times$ $\times [2+\nu+(1+\nu)\alpha]$, а $\varepsilon_\theta = -p_0 R \frac{(1-\nu^2)(1-\alpha)}{2Eh} [1+2\nu+(1+\nu)\alpha]$; наименьшие деформации будут в наиболее удаленной от оси точке $\varphi = \pi/2$ ($\sin\varphi = 1$).

4. В заключение определим значения усилий (напряжений), возникающих под действием пондеромоторных сил в установках со сверхпроводящей обмоткой «Токамак-7».

Согласно физико-техническим характеристикам «Т-7», неполный перечень которых приведен в [2], большой радиус тора $a = 1{,}22$ м, средний радиус обмотки, который в нашем случае принимается за малый радиус оболочки, $R = 0{,}5$ м, так что коэффициент $\alpha = 0{,}5/1{,}22 = 0{,}41$. В „Т-7" силе тока $I = 4{,}8$ кА соответствует максимальная индукция магнитного поля на обмотке $B_k = 4$ тл, что, по-видимому, имеет место в наиболее напряженной точке тора $\varphi = -\pi/2$. Используя эти данные в соотношениях (1.6), (1.8) при $\mu = 1$, получим максимальное электромагнитное давление в точке $\varphi = -\pi/2$ $p_{max} = p_0 = 124{,}2 \cdot 10^5$ Н/м² (123 атм) и минимальное — в точке $\varphi = \pi/2$ $p_{min} = 21{,}2 \cdot 10^5$ Н/м² (21 атм), что почти в 6 раз меньше p_{max}. По этим данным можно судить о значительности величин электромагнитного давления, их большого перепада по длине полуокружности тора, что требует особого внимания при прочностных расчетах некоторых конструкционных узлов тороидальной камеры в системах „Токамак".

По закону распределения внешней нагрузки p (1.8) фактически изменяются внутренние усилия T_1, T_θ. В рассматриваемом случае наибольшие усилия, согласно (2.5), будут в точке $\varphi = -\pi/2$, где $T_1 = 44{,}1 \cdot 10^5$ Н/м, а $T_\theta = -25{,}8 \cdot 10^5$ Н/м. В этом наиболее напряженном месте тороидальной оболочки, даже приняв (из-за отсутствия достоверных данных) относительно большую толщину стенки $h = 1$ см ($h/R = 1/50$), получим меридиональное напряжение $\sigma_\varphi = T_1/h$, равным $\sigma_{\varphi max} = 44{,}1 \cdot 10^7$ Н/м² или 4 500 кГ/см²), и окружное напряжение $\sigma_{\theta max} =$ $= -25{,}8 \cdot 10^7$ Н/м² (или $-2\,630$ кГ/см²). Учитывая, что предел прочности закаленной стали марки 30 или 45 $\sigma_{вр} \approx 11\,000$ кГ/см², можно сделать заключение об огромных величинах механических напряжений, возникающих в отдельных узлах „Токамак".

Автор благодарен М. В. Белубекяну, Л. А. Агаловяну и Л. А. Мовсисяну за полезное обсуждение некоторых вопросов в данной работе.

ՀՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ՏՈՐՈՒԴԱԼ ԹԱՂԱՆԹԻ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԲԵՌԻ ԵՎ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻՈՆ ՎԻՃԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ռ. Ն. ՀՈՎԱԿԻՄՅԱՆ

Ամփոփում

Տորոիդալ թաղանթի համար որոշվում են էլեկտրամագնիսական ճիգերը, որոնք հանդիսանում են կոճով անցնող հոսանքի և սեփական մագնիսական դաշտի փոխազդեցության արդյունք։

Թաղանթների անմոմենտ տեսության հիման վրա ուսումնասիրված է հոսանքատար տորոիդալ թաղանթի լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակը։ Վերջինս հանդիսանում է «Տոկամակ» սարքվածքի հիմնական հանգույցը։

Բերված են առաջացող ճիգերի թվային արժեքները։

ABOUT AN ELECTROMAGNETIC LOAD AND THE STRESS-STRAIN STATE OF A CURRENT-CARRYING TOROIDAL SHELL

R. N. OVAKIMIAN

Summary

The external electromagnetic load is determined. On the basis of membrane theory the expressions of strengths and deformations in current-carrying toroidal shell are obtained, which are applied in the "Tocamac" system.

ЛИТЕРАТУРА

1. Атомная наука и техника в СССР. М.: Атомиздат, 1977.
2. *Иванов Д. П.* «Т-7» — первый токамак со сверхпроводящими обмотками. Природа, 1978, 12.
3. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромиздат, 1962.
4. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М.: Гостехиздат, 1957.
5. *Дойников Н. И.* Определение магнитного поля токов, текущих по поверхности тора. ЖТФ, 1964, т. 34, вып. 10.
6. *Булгаков В. Н.* Статика тороидальных оболочек. Киев: Изд. АН УССР, 1962.
7. *Феодосьев В. И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1973.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
25. VI. 1982

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVII, № 2, 1984 Механика

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИ-НЕОДНОРОДНЫХ КОНИЧЕСКИХ ТРУБ

ГРИГОРЯН А. А., ЗАДОЯН М. А.

Вопросы плоской деформации и кручение пластически-неоднородных тел изучены достаточно подробно, между тем, осесимметричное и пространственное течения рассматривались лишь в немногочисленных работах [1]. Пространственная задача неоднородного пластического тела исследована в статье [2], где материал принимается идеально-пластическим, подчиняющимся условию пластичности Треска. В работах [3—6] изучены различные задачи о неоднородном упруго-пластическом полом шаре под воздействием внутреннего давления, когда характеристики материала меняются по радиальному направлению. В статье [7] рассмотрен трансверсально-изотропный шар, предел текучести которого также является функцией от радиуса. В работах [8—10] исследованы осесимметричные задачи для пластически-неоднородных цилиндрических труб и дисков.

Рассмотренные осесимметричные задачи относятся, главным образом, к шарам, цилиндрам и дискам. В настоящей работе рассматриваются осесимметричные задачи предельного состояния длинных конических труб из несжимаемых пластически-неоднородных материалов, подчиняющихся условию пластичности Губера—Мизеса.

§ 1. *Основные уравнения.* Общие соотношения теории течения идеально жестко-пластического неоднородного тела в случае осевой симметрии в сферических координатах в обычных обозначениях имеют следующий вид:

дифференциальные уравнения равновесия —

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}(2\sigma_r-\sigma_\theta-\sigma_\varphi+\tau_{r\theta}\operatorname{ctg}\theta)=0$$

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r}[(\sigma_\theta-\sigma_\varphi)\operatorname{ctg}\theta+3\tau_{r\theta}]=0 \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}(2\tau_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta+3\tau_{r\varphi})=0$$

соотношения между компонентами скоростей деформации, напряжений и скоростей перемещений —

$$
\varepsilon_{ij} = \Lambda(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma), \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}
$$

$$
\varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} + \frac{v}{r}\operatorname{ctg}\theta, \quad 2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{1.2}
$$

$$
2\gamma_{r\varphi} = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}, \quad 2\gamma_{\theta\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{w}{r}\operatorname{ctg}\theta
$$

условие пластичности Губера—Мизеса

$$
(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + 6(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{r\varphi}^2 + \tau_{\theta\varphi}^2) = 6K^2(r, \theta) \tag{1.3}
$$

Здесь $K(r, \theta)$ — определенная из эксперимента функция, характеризующая неоднородность пластических свойств материала. Такие неоднородные свойства вызываются, например, нейтронным облучением, температурным градиентом и т. д. [1]. В дальнейшем принимаем

$$
K(r, \theta) = r^\nu k(\theta) \tag{1.4}
$$

где $k(\theta)$ — известная функция, а ν — постоянная, характеризующая материал.

Компоненты скоростей перемещений, удовлетворяющие условию несжимаемости

$$
\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi = 0
$$

зададим в виде

$$
\begin{gathered}
u = r^\lambda [f'(\theta) + f(\theta)\operatorname{ctg}\theta], \quad v = -(\lambda + 2) r^\lambda f(\theta) \\
w = (\lambda + 2) r^\lambda \psi(\theta)\sin\theta, \quad \lambda = \mathrm{const}
\end{gathered} \tag{1.5}
$$

где $f(\theta)$ и $\psi(\theta)$ — произвольные функции от θ. Тогда компоненты напряжения можно представить в виде

$$
\sigma_r = \sigma_0 + 2r^\nu \frac{k(\theta)}{\Omega(\theta)} [(2\lambda + 1) f' + (\lambda - 1) f \operatorname{ctg}\theta]
$$

$$
\sigma_\varphi = \sigma_0 + 2(\lambda + 2) r^\nu \frac{k(\theta)}{\Omega(\theta)} [f' - f\operatorname{ctg}\theta]
$$

$$
\tau_{r\theta} = r^\nu \frac{k(\theta)}{\Omega(\theta)} [f'' + (f\operatorname{ctg}\theta)' + (\lambda + 2)(1 - \lambda) f] \tag{1.6}
$$

$$
\tau_{\theta\varphi} = (\lambda + 2) r^\nu \frac{k(\theta)}{\Omega(\theta)} \psi' \sin\theta, \quad \tau_{r\varphi} = (\lambda + 2)(\lambda - 1) r^\nu \frac{k(\theta)}{\Omega(\theta)} \psi \sin\theta
$$

$$
\Omega(\theta) = \sqrt{Q}
$$

$$
\begin{gathered}
Q = 4\lambda^2 (f' + f\operatorname{ctg}\theta)^2 + 4\lambda (f' + f\operatorname{ctg}\theta)[f\operatorname{ctg}\theta - (\lambda + 1) f']^2 + \\
+ 4[f\operatorname{ctg}\theta - (\lambda + 1) f']^2 + [f'' + (f\operatorname{ctg}\theta)' + (\lambda + 2)(1 - \lambda) f]^2 + \\
+ (\lambda + 2)^2 \sin^2\theta [\psi'^2 + (\lambda - 1)^2 \psi^2]
\end{gathered}
$$

Подставляя (1.6) в дифференциальные уравнения равновесия (1.1), приходим к выражению для σ_θ *

$$\sigma_\theta = H + M\varphi(r) - (\nu+3) r^\nu \int_\alpha^\theta \frac{k}{\Omega}[f'' + (f\operatorname{ctg}\theta)' + (2+\lambda)(1-\lambda)f]\,d\theta +$$

$$+ 2(\lambda+2) r^\nu \int_\alpha^\theta \frac{k}{\Omega}(f' - f\operatorname{ctg}\theta)\operatorname{ctg}\theta\,d\theta \tag{1.7}$$

где

$$\varphi(r) = \begin{cases} \ln r & \text{при} \quad \nu = 0 \\ \frac{1}{\nu} r^\nu & \text{при} \quad \nu \neq 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

и к системе двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\left\{\frac{k}{\Omega}[f'' + (f\operatorname{ctg}\theta)' + (2+\lambda)(1-\lambda)f]\sin\theta\right\}\right)' +$$

$$+ 6\lambda\left[\frac{k}{\Omega}\frac{(f\sin\theta)'}{\sin\theta}\right]' + 2\nu\left\{\frac{k}{\Omega}[(2\lambda+1)f' + (\lambda-1)f\operatorname{ctg}\theta]\right\}' +$$

$$+ 2(\lambda+2)\nu\frac{k}{\Omega}(f' - f\operatorname{ctg}\theta)\operatorname{ctg}\theta -$$

$$- \nu(\nu+3)\frac{k}{\Omega}[f'' + (f\operatorname{ctg}\theta)' + (2+\lambda)(1-\lambda)f] = 0 \tag{1.9}$$

$$\left(\frac{k\psi'\sin^3\theta}{\Omega}\right)' + (\gamma+3)(\lambda-1)\frac{k\psi\sin^3\theta}{\Omega} = 0$$

Условия на конических поверхностях $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$ определяют граничные условия для системы уравнений (1.9). В случае, когда материал неоднороден только по толщине трубы, то есть $\nu = 0$, будем иметь следующие выражения для напряжений:

$$\sigma_r = \sigma_\theta + \frac{2k}{\Omega}[(2\lambda+1)f' + (\lambda-1)f\operatorname{ctg}\theta]$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta + 2(\lambda+2)\frac{k}{\Omega}(f' - f\operatorname{ctg}\theta)$$

$$\sigma_\theta = H + M\ln r - 3\int_\alpha^\theta \frac{k}{\Omega}[f'' + (f\operatorname{ctg}\theta)' + (2+\lambda)(1-\lambda)f]\,d\theta +$$

$$+ 2(\lambda+2)\int_\alpha^\theta \frac{k}{\Omega}(f' - f\operatorname{ctg}\theta)\operatorname{ctg}\theta\,d\theta \tag{1.10}$$

---

* Здесь и в дальнейшем заглавные буквы латинского алфавита означают произвольные постоянные.

$$\tau_{r\theta} = \frac{k}{\Omega}\left[f'' + (f\operatorname{ctg}\theta)' + (2+\lambda)(1-\lambda) f\right]$$

$$\tau_{\theta\varphi} = (\lambda+2)\frac{k}{\Omega}\psi'\sin\theta, \qquad \tau_{r\varphi} = (\lambda+2)(1-\lambda)\frac{k}{\Omega}\psi\sin\theta$$

и систему уравнений —

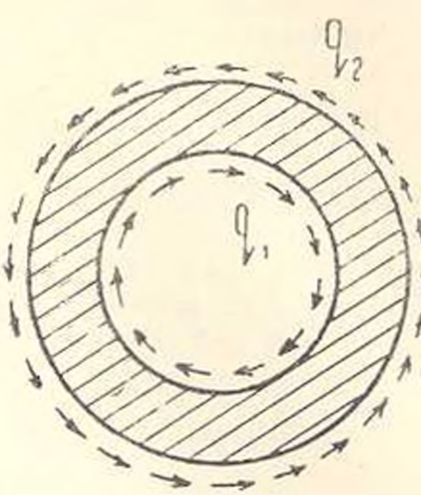
$$\left\{\frac{k}{\Omega}\left[f'' + (f\operatorname{ctg}\theta)' + (2+\lambda)(1-\lambda) f\right]\sin\theta\right\}' + 6\lambda\frac{k}{\Omega}(f\sin\theta)' + M\sin\theta = 0 \qquad (1.11)$$

$$\left(\frac{k}{\Omega}\psi'\sin^3\theta\right)' + 3(\lambda-1)\frac{k\psi\sin^2\theta}{\Omega} = 0$$

Рассмотрим некоторые предельные состояния поперечно-неоднородных конических труб.

§ 2. *Предельное состояние пластически-неоднородной по толщине конической трубы под воздействием внутренних и внешних кольцевых касательных сил (фиг. 1).* Принимаем, что на внутренней и внешней конических поверхностях действуют, соответственно, касательные нагрузки

$$\tau_{\theta\varphi} = q_1 \text{ при } \theta = \alpha$$
$$\tau_{\theta\varphi} = q_2 \text{ при } \theta = \beta \qquad (2.1)$$



Фиг. 1.

Если принять в соотношениях (1.10–1.11) $f = 0$, $H = M = 0$, первое уравнение (1.10) превратится в тождество, а из второго следует уравнение

$$\left[\frac{k\psi'\sin^2\theta}{\sqrt{\psi'^2 + (\lambda-1)^2\psi^2}}\right]' + 3(\lambda-1)\frac{k\psi\sin^2\theta}{\sqrt{\psi'^2 + (\lambda-1)^2\psi^2}} = 0 \qquad (2.2)$$

на основании которого определяются отличные от нуля компоненты напряжения $\tau_{\theta\varphi}$ и $\tau_{r\varphi}$.

Вводя обозначения

$$\tau_{\theta\varphi} = k(\theta)\,\tau(\theta), \quad \tau(\theta) = \frac{\psi'}{\sqrt{\psi'^2 + (\lambda-1)^2\psi^2}} \qquad (2.3)$$

из (2.2) приходим к уравнению

$$\tau' + \chi\tau + 3\mu\sqrt{1-\tau^2} = 0 \qquad (2.4)$$

где

$$\lambda = \frac{k'(\theta)}{k(\theta)} + 2\operatorname{ctg}\theta, \quad \mu = \operatorname{sign}(q_1 - q_2) \tag{2.5}$$

Рассмотрим случай неоднородности, когда

$$k(\theta) = k_1 \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta} \exp(\gamma(\theta - \alpha)) \tag{2.6}$$

Тогда из (2.4) следует

$$\int\limits_{\tau}^{q_1/k_1} \frac{dx}{\gamma x + 3\mu\sqrt{1 - x^2}} = \theta - \alpha \tag{2.7}$$

После интегрирования получаем неявное соотношение для τ

$$\arcsin\frac{q_1}{k_1} - \arcsin\tau + \frac{\mu\gamma}{3}\ln\frac{\gamma\dfrac{q_1}{k_1} + 3\mu\sqrt{1 - \dfrac{q_1^2}{k_1^2}}}{\gamma\tau + 3\mu\sqrt{1-\tau^2}} = \mu\frac{9+\gamma^2}{3}(\theta - \alpha) \tag{2.8}$$

В предельном состоянии трубы отсюда следует зависимость между q_1 и q_2,

$$\arcsin\frac{q_1}{k_1} - \arcsin\frac{q_2}{k_2} + \frac{\mu\gamma}{3}\ln\frac{\gamma\dfrac{q_1}{k_1} + 3\mu\sqrt{1 - \dfrac{q_1^2}{k_1^2}}}{\gamma\dfrac{q_2}{k_2} + 3\mu\sqrt{1 - \dfrac{q_2^2}{k_2^2}}} = \mu\frac{9+\gamma^2}{3}(\beta - \alpha) \tag{2.9}$$

где

$$k_2 = k_1\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}\exp(\gamma(\beta - \alpha))$$

Для более простого случая неоднородности, когда $\gamma = 0$, из (2.8) имеем

$$\arcsin\frac{q_1}{k_1} - \arcsin\tau = 3\mu(\theta - \alpha) \tag{2.10}$$

В предельном состоянии имеем соотношение

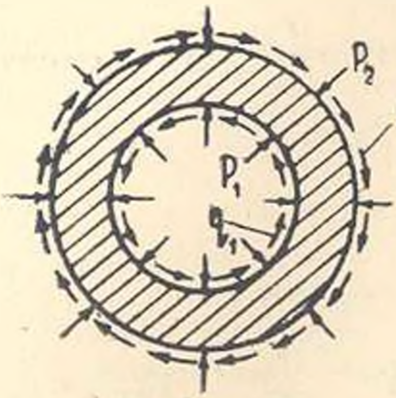
$$\arcsin\frac{q_1}{k_1} - \arcsin\frac{q_2}{k_2} = 3\mu(\beta - \alpha) \tag{2.11}$$

Для определения единственной отличной от нуля скорости перемещения w по формуле (1.6) функцию ψ находим из (2.3)

$$\psi = D\exp\left\{(\lambda - 1)\int\limits_{\alpha}^{\theta}\frac{\tau\, d\theta}{\sqrt{1-\tau^2}}\right\} \tag{2.12}$$

В общем случае для $k(\theta)$ уравнение (2.4) следует интегрировать численным способом.

§ 3. *Предельное состояние пластически-неоднородной конической трубы под совместным воздействием внешних нормальных и кольцевых касательных сил (фиг. 2).* Положим, что пластически-неоднородная по толщине коническая труба под воздействием внешних сил



Фиг. 2.

$$\sigma_\theta = -P_1, \quad \tau_{\theta\varphi} = q_1 \quad \text{при } \theta = \alpha$$
$$\sigma_\theta = -P_2, \quad \tau_{\theta\varphi} = q_2 \quad \text{при } \theta = \beta \tag{3.1}$$

находится в предельном напряженном состоянии.

Принимая в (1.10)—(1.11) $f = E/\sin\theta$, $i = 1$, $M = 0$, удовлетворим первому уравнению (1.11), а из второго, опуская индексы при $\tau_{\theta\varphi}$, получаем

$$\tau = q_1 \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}$$
$$\tau = \frac{k\psi' \sin^3\theta}{\sqrt{4E^2\cos^2\theta + \psi'^2 \sin^6\theta}} \tag{3.2}$$

Отсюда, определяя

$$\psi' = \frac{2E\cos\theta}{\sin^3\theta} \frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \tag{3.3}$$

и подставляя в формулы нормальных напряжений (1.10), с учетом граничных условий (3.1) получаем

$$\sigma_r = \sigma_\theta - \mu\sqrt{k^2 - \tau^2}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta - 2\mu\sqrt{k^2-\tau^2}$$
$$\sigma_\theta = -P_1 + 2\mu \int_\alpha^\theta \sqrt{k^2-\tau^2}\,\mathrm{ctg}\,\theta\, d\theta, \quad \mu = \mathrm{sign}\,(P_1 - P_2) \tag{3.4}$$

Условия на внешней поверхности трубы $\theta = \beta$ дают соотношения между внешними силами в предельном состоянии конической трубы

$$P_1 - P_2 = 2\mu \int_\alpha^\beta \sqrt{k^2-\tau^2}\,\mathrm{ctg}\,\theta\, d\theta$$
$$q_1 \sin^2\alpha = q_2 \sin^2\beta \tag{3.5}$$

В частном случае, когда $q_1 = q_2 = 0$, из (3.4) имеем

$$\sigma_r = \sigma_\theta - \mu k, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta - 2\mu k$$
$$\sigma_\theta = -P_1 + 2\mu \int_\alpha^\theta k\,\mathrm{ctg}\,\theta\, d\theta \tag{3.6}$$

Предельное состояние в этом случае определяется соотношением

$$P_1 - P_2 = 2\mu \int_{\alpha}^{\beta} k \operatorname{ctg} \theta d\theta \tag{3.7}$$

Для однородного материала из (3.6)—(3.7) при $k = \text{const}$ получаются соответствующие формулы Д. Д. Ивлева [11].

Интегрируя (3.3), находим

$$\psi = 2E \int_{\alpha}^{\theta} \frac{\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} d\theta + N \tag{3.8}$$

Для скоростей перемещений получаем

$$u = 0, \quad v = -\frac{3Er}{\sin\theta}, \quad w = 6Er\sin\theta \left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{\tau\cos\theta d\theta}{\sqrt{k^2 - \tau^2}\sin^3\theta} + G \right] \tag{3.9}$$

Переходя к пределу $\theta \to 0$, $r \to \infty$ при постоянном $\rho = r\sin\theta$, из формул (3.4) и (3.5) получим соответствующие формулы для неоднородной по толщине цилиндрической трубы, находящейся под воздействием внешних сил

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= -P_1, \quad \tau_{\rho z} = q_1 \text{ при } \rho = a \\ \sigma_\rho &= -P_2, \quad \tau_{\rho z} = q_2 \text{ при } \rho = b \end{aligned} \tag{3.10}$$

Здесь a и b, соответственно,— внутренний и внешний радиусы цилиндрической трубы

$$\begin{aligned} &\sigma_z = \sigma_\rho - \mu\sqrt{k^2(\rho) - \tau^2(\rho)}, \quad \sigma_\theta = \sigma_\rho - 2\mu\sqrt{k^2(\rho) - \tau^2(\rho)} \\ &\sigma_\rho = -P_1 + 2\mu\int_a^{\rho} \sqrt{k^2(\rho) - \tau^2(\rho)} \frac{d\rho}{\rho}, \qquad \tau_{\rho z} = \tau = q_1 \frac{a^2}{\rho^2} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Предельное напряженное состояние определяется соотношениями

$$P_1 - P_2 = 2\mu \int_a^b \sqrt{k^2(\rho) - \tau^2(\rho)} \frac{d\rho}{\rho}, \quad q_1 a^2 = q_2 b^2 \tag{3.12}$$

Формулы (3.11) при $k(\rho) = \text{const}$ переходят в формулы А. Надаи [12] для напряженного состояния около круговой полости в бесконечной плоскости.

§ 4. *Предельное состояние пластически-неоднородной по толщине конической трубы при совместном воздействии внешних нормальных и продольных касательных сил (фиг. 3).* Пусть коническая труба под воздействием внешних сил

$$\sigma_\theta = -P_1,\ \tau_{r\theta} = q_1 \text{ при } \theta = \alpha$$
$$\sigma_\theta = -P_2,\ \tau_{r\theta} = q_2 \text{ при } \theta = \beta \tag{4.1}$$

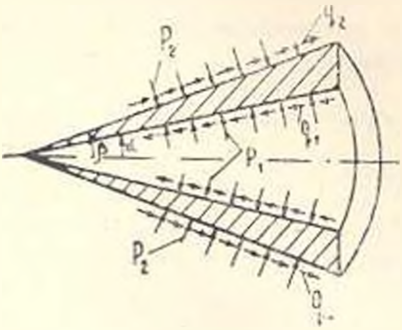
находится в предельном состоянии. В этом случае, принимая в (1.10) — (1.11) $\psi = 0$, $\lambda = M = 0$ и опуская индексы при $\tau_{r\theta}$, получаем

$$\tau = q_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}, \quad \Omega = \frac{2\mu(f' - f\operatorname{ctg}\theta)k}{\sqrt{k^2-\tau^2}}, \quad \mu = \operatorname{sign}(P_1 - P_2) \tag{4.2}$$

Подставляя эти выражения в формулы (1.10) и учитывая условия на поверхности $\theta = \alpha$, будем иметь

$$\sigma_r = \sigma_\theta + \mu\sqrt{k^2-\tau^2}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta + 2\mu\sqrt{k^2-\tau^2}$$
$$\sigma_\theta = -P_1 - 3q_1\sin\alpha\ln\frac{\operatorname{tg}\theta/2}{\operatorname{tg}\alpha/2} + 2\mu\int_\alpha^\theta \sqrt{k^2-\tau^2}\operatorname{ctg}\theta\, d\theta \tag{4.3}$$

Используя условия на внешней поверхности трубы, находим



Фиг. 3.

$$P_1 - P_2 = 2\mu\int_\alpha^\beta \sqrt{k^2-\tau^2}\operatorname{ctg}\theta\, d\theta - 3q_1\sin\alpha\ln\frac{\operatorname{tg}\beta/2}{\operatorname{tg}\alpha/2} \tag{4.4}$$
$$q_1\sin\alpha = q_2\sin\beta$$

Соотношения (4.4) определяют предельное состояние конической трубы.

Сопоставляя выражения $\tau_{r\theta}$ из (1.10) и (4.2), приходим к дифференциальному уравнению

$$f'' + \left(\operatorname{ctg}\theta - \frac{2\mu\tau}{\sqrt{k^2-\tau^2}}\right)f' + \left(2 - \frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{2\mu\tau}{\sqrt{k^2-\tau^2}}\operatorname{ctg}\theta\right)f = 0$$

решение которого будет

$$f = A\sin\theta + B\sin\theta\int_\alpha^\theta \frac{\sin^2\alpha}{\sin^3\theta}\exp\left(2\mu\int_\alpha^\theta \frac{\tau\, d\theta}{\sqrt{k^2-\tau^2}}\right)d\theta$$

Исходя из выражений (4.2)—(4.4), можно получить соответствующие формулы для цилиндрической трубы, находящейся под внешними воздействиями:

$$\sigma_\rho = -P_1,\ \tau_{\rho z} = q_1 \text{ при } \rho = a$$
$$\sigma_\rho = -P_2,\ \tau_{\rho z} = q_2 \text{ при } \rho = b$$

Так, переходя к цилиндрическим координатам, фиксируя $\rho = r\sin\theta$, при $\theta \to 0$, $r \to \infty$ из (4.2)—(4.4) получим

$$\sigma_\rho = -P_1 + 2\mu \int_a^\rho \sqrt{k^2 - \tau^2}\, \frac{d\rho}{\rho}, \quad \tau_{\rho z} = \tau = q_1 \frac{a}{\rho}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\rho + 2\mu \sqrt{k^2 - \tau^2}$$

$$P_1 - P_2 = 2\mu \int_a^b \sqrt{k^2 - \tau^2}\, \frac{d\rho}{\rho}, \quad q_1 a = q_2 b$$

Эти формулы в цилиндрических координатах определяют предельное состояние неоднородной по толщине цилиндрической трубы при совместном воздействии внешних нормальных и продольных касательных сил.

ՊԼԱՍՏԻԿՈՐԵՆ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԿՈՆԱԿԱՆ ԽՈՂՈՎԱԿՆԵՐԻ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԸ

Ա. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հետազոտվում է պլաստիկորեն անհամասեռ կոշտ պլաստիկ կոնական խողովակների սահմանային վիճակը արտաքին տարբեր բեռների դեպքում։ Խողովակի նյութը անսեղմելի է և բավարարում է Հյուբեր-Միզեսի պայմանով պլաստիկության հոսունության տեսության հավասարումներին։

Լարումները և տեղափոխությունների արագությունները արտահայտելով (1.6) տեսքով՝ բավարարվում են պլաստիկության և անսեղմելիության պայմանները։ $f(\theta)$ և $\varphi(\theta)$ ֆունկցիաների նկատմամբ ստացվել են ոչ-գծային ֆունկցիոնալ հավասարումների սիստեմ։

Դիտարկված են երեք խնդիրներ.

1. Կոնական խողովակի սահմանային վիճակը արտաքին և ներքին օղակային լարումների ազդեցության տակ։ 2. Կոնական խողովակի սահմանային վիճակը արտաքին և ներքին օղակային շոշափող և նորմալ բեռների ազդեցության տակ։ 3. Կոնական խողովակի սահմանային վիճակը արտաքին և ներքին ընդլայնական շոշափող և նորմալ բեռների ներքո։

Ստացված են բեռների միջև կապեր, որոնց դեպքում կոնական խողովակը գտնվում է սահմանային վիճակում.

THE LIMIT STATE OF PLASTIC INHOMOGENEOUS CONIC TUBES

A. A. GRIGORIAN, M. A. ZADOYAN

S u m m a r y

The limit state of plastic inhomogeneous conic tubes is investigated. The material of the tube is incompressible and satisfies the

equations of the theory of plastic yielding with the Huber-Mizes condition.

Strain and displacement velosities expressed through two unknown functions satisfy the plastic and incompressible conditions. From equilibrium equations for the unknown functions the system of non-linear differential equations is obtained.

The problems of limit state of plastic inhomogeneous, in thickness, conic tubes under: 1) internal and external ring-shaped shearing forces, 2) external normal and shearing ring-shaped forces, 3) external normal and longitudinal shearing forces are observed.

The relations between loads are obtained under which the conic tube is in a limited state.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В.* Теория пластичности неоднородных тел (пер. с англ.). М.: Изд-во Мир, 1964.
2. *Ивлев Д. Д.* Some remarks on the theory of non-homogeneous plastic media (Space problem). — Arch. Mech. Stos. 1961, 13, No. 2
3. *Olszak W., Urbanowski W.* Non-homogeneous thik-walled elastic-plastic spherical shell subjected to internal and external pressures. — Rozpr. inz. 1956, 4, No. 1.
4. *Rogozinski M.* Some problems of thermoplasticity of a spherical shell. — Proc IUTAM, symposium: Сб. статей. Warsaw: 1958.
5. *Ильюшин А. А., Огибалов П. М.* О прочности оболочки толстостенного цилиндра и полого шара, подвергнутых облучению. Инж. ж., 1960, 28.
6. *Дорофеева В. М., Курчанова М. В.* Напряжения в многослойном неоднородном упруго-пластическом шаре.— Прикладные проблемы прочности и пластичности: Горький: 1978, № 8.
7. *Seth B. R.* Non-homogeneous yield condition. — Proc. IUTAM, symposium: Сб. статей. Warsaw: 1958.
8. *Гордон В. А.* Несущая способность неоднородной оболочки.— Работы по механике сплошных сред: Сб. статей. Тула: 1975.
9. *Gurushankar G. V.* A note on the yielding of on accelerating non-homogeneous disc of varying thicness and density with radial loading. — J. Strain. Anal., 1978, 13, No. 1.
10. *Сенашов С. И.* Точные пространственные решения уравнений, описывающих пластическое течение анизотропных и неоднородных сред. «Динамика сплошной среды». Новосибирск: № 43, 1979.
11. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Изд-во Наука, 1966.
12. *Nadai A.* Zeits f. Phys. 1924, v. 30.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
18. VI. 1982

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVII, № 2, 1984 Механика

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

ПОТАПОВ В. Д.

Исследование устойчивости сжатых оболочек, материал которых обладает вязкоупругими свойствами, обычно проводится в квазистатической постановке, когда силы инерции, появляющиеся в процессе деформирования конструкции во времени, считаются малыми по сравнению с другими внешними нагрузками и в системе разрешающих уравнений теории оболочек опускаются. Такое допущение можно считать оправданным в том случае, когда движение оболочки происходит при малых ускорениях перемещений точек ее срединной поверхности. Если же внешние нагрузки настолько велики, что по истечении конечного промежутка времени (при квазистатической постановке задачи) наступает «хлопок» оболочки, то в момент «хлопка» и в моменты времени, непосредственно предшествующие ему и следующие за ним, наблюдается резкое изменение ускорений движения конструкции, а в такой ситуации пренебрежение силами инерции недопустимо. С этой точки зрения более правильное представление о поведении оболочки на всем интервале ее нагружения может быть получено только на основе рассмотрения задачи в динамической постановке.

Задача выпучивания сжатых круговых оболочек с учетом сил инерции решалась в работе Браунса Я. А. и Тетерса Г. А. [1]. Ими было показано, что учет инерционных членов дает решение с затухающими колебаниями непосредственно после приложения нагрузки и после «хлопка» около кривой квазистатического деформирования. Некоторые аспекты устойчивости оболочек при конечных прогибах в динамической постановке задачи рассмотрены в статьях [2, 3]. Качественному анализу деформирования нелинейных систем на примере фермы Мизеса посвящена работа [4]. Отмечается, что с позиций теории устойчивости движения вязкоупругая ферма Мизеса всегда является асимптотически устойчивой по Ляпунову. Авторами предложен критерий, в соответствии с которым конструкция устойчива на некотором отрезке времени, если ускорение движения сосредоточенной массы остается ограниченным при стремлении этой массы к нулю.

Ниже исследуется поведение оболочек на примере пологой удлиненной цилиндрической панели, материал которой обладает ограниченной вязкостью.

Рассмотрим оболочку, выполненную из изотропного материала с постоянным во времени коэффициентом Пуассона μ. Оболочка имеет массу, величину которой, приходящуюся на единицу площади срединной поверхности, примем равной m. Тогда уравнение движения для оболочки имеет вид

$$D\Gamma w^{IV} + Pw'' + \frac{P}{R} = q - m\ddot{w} \qquad (1.1)$$

где

$$\Gamma w = w(t) - \int_0^t \mathrm{T}(t-\tau)\, w(\tau)\, d\tau, \quad E(t) = E = \mathrm{const}$$

$\mathrm{T}(t-\tau)$ — ядро релаксации, $0 < \int_0^\infty \mathrm{T}(\theta)\, d\theta = G < 1$

$$P = -\frac{Eh}{(1-\mu^2)\, l}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\int_0^l w'^2 dx - \int_0^l \frac{w}{R}\, dx\right).$$

Остальные обозначения общепринятые.

В начале остановимся на оценке влияния динамических добавок на деформирование оболочек, находящихся под действием малой поперечной нагрузки.

При квазистатической постановке задачи прогибы оболочки в условиях ограниченной ползучести стабилизируются во времени, асимптотически приближаясь к значениям, определяемым так же, как в упругой оболочке, модуль упругости которой равен длительному модулю.

Рассмотрим возмущенное движение оболочки, которое вызвано возмущениями начальных условий $\delta w(0, x)$, $\delta \dot{w}(0, x)$. Считая начальные возмущения и возмущения в текущий момент времени малыми, линеаризуем уравнение возмущенного движения (1.1) относительно возмущений

$$D\Gamma\delta w^{IV} + P\delta w'' + \delta P\, w'' + \frac{\delta P}{R} = -m\delta\ddot{w} \qquad (1.2)$$

Примем

$$\delta w(t, x) = \delta f_1(t) \sin\frac{\pi}{l} x, \quad w(t, x) = f_1(t) \sin\frac{\pi}{l} x$$

Из уравнения (1.2) с помощью метода Бубнова—Галеркина получим

$$\Gamma\delta f_1 - 3\left[P_0\delta f_1 + \left(f_1 - \frac{4kh}{\pi^4}\right)\delta P_0\right] = -\frac{ml^4}{\pi^4 D}\delta\ddot{f}_1 \qquad (1.3)$$

где

$$P_0 = \Gamma\left(\frac{8k}{\pi^3}\frac{f_1}{h} - \frac{f_1^2}{h^2}\right), \quad \delta P_0 = \Gamma\left(\frac{8k}{\pi^3} - 2\frac{f_1}{h}\right)\frac{\delta f_1}{h}, \quad k = \frac{l^2}{Rh}$$

Для исследования поведения возмущений δf_1 при достаточно больших значениях времени t перенесем начало его отсчета в $-\infty$. Тогда очевидно

$$f_1 = \mathrm{const}, \quad P_0 = \left(\frac{8k}{\pi^3}\frac{f_1}{h} - \frac{f_1^2}{h^2}\right)(1-G) = \mathrm{const}$$

Запишем уравнение (1.3) следующим образом:

$$\left[1+6\left(\frac{f_1}{h}-\frac{4k}{\pi^2}\right)^2\right]\left[\delta f_1(t)-\int\limits_{-\infty}^{t}\Gamma(t-\tau)\,\delta f_1(\tau)\,d\tau\right]-$$

$$-3P_0\delta f_1(t)=-\frac{ml^4}{\pi^4 D}\ddot{\delta f_1}(t) \qquad (1.4)$$

Его решение ищем в виде

$$\delta f_1(t)=c\exp(\lambda t) \qquad (1.5)$$

После подстановки выражения (1.5) в уравнение (1.4) имеем

$$A\left[1-\int\limits_0^{\infty}\Gamma(\theta)\exp(-\lambda\theta)\,d\theta\right]-3P_0=-\frac{ml^4}{\pi^4 D}\lambda^2 \qquad (1.6)$$

причем

$$A=1+6\left(\frac{f_1}{h}-\frac{4k}{\pi^2}\right)^2$$

Возьмем ядро $\Gamma(\theta)$ в виде

$$\Gamma(\theta)=\gamma K\exp(-\gamma(1+K)\theta)$$

Из уравнения (1.6) следует кубическое уравнение относительно λ

$$\lambda^3+\gamma(1+K)\lambda^2+\frac{\pi^4 D}{ml^4}(A-3P_0)\lambda+\gamma\frac{\pi^4 D}{ml^4}[A-3P_0(1+K)]=0 \qquad (1.7)$$

Используя критерий Раусса-Гурвица, приведем условия отрицательности вещественных частей корней уравнения (1.7)

$$A>0,\quad A-3(1+K)P_0>0 \qquad (1.8)$$

При малых f_1 величина $P_0>0$ и, следовательно, при выполнении второго условия первое выполняется и подавно. Итак, окончательно имеем, что невозмущенное движение асимптотически устойчиво по Ляпунову по отношению к возмущению начальных условий, если справедливо неравенство (1.8), которое может быть представлено в виде

$$1+3\left(3\frac{f_1^2}{h^2}-\frac{24k}{\pi^2}\frac{f_1}{h}+\frac{32k^2}{\pi^4}\right)>0 \qquad (1.9)$$

В этом случае корнями уравнения (1.7) будут: один — отрицательный, два других — комплексно сопряженные.

По мере увеличения f_1 неравенство (1.9) сменится равенством, которое соответствует предельной точке q_* на кривой $q\sim f_1$ упругой оболочки с длительным модулем упругости ее материала. В этом случае один из корней λ становится нулевым и указанное равенство непосредственно вытекает из уравнения (1.7), если в нем положить $\lambda=0$.

Таким образом, при $q < q_*$ оболочка асимптотически устойчива по отношению к симметричным возмущениям начальных условий

$$\delta w(0,\ x) = \delta f_1(0) \sin \frac{\pi}{l} x, \quad \delta \dot{w}(0,\ x) = \delta \dot{f}_1(0) \sin \frac{\pi}{l} x$$

Далее рассмотрим возмущенное движение оболочки при несимметричных возмущениях начальных условий

$$\delta w(0,\ x) = \delta f_2(0) \sin \frac{2\pi}{l} x, \quad \delta \dot{w}(0,\ x) = \delta \dot{f}_2(0) \sin \frac{2\pi}{l} x.$$

Предполагая возмущения $\delta w\ (t,\ x)$ малыми, воспользуемся линеаризованными уравнениями возмущенного движения (1.2), из которых при

$$\delta w\ (t,\ x) = \delta f_2(t) \sin \frac{2\pi}{l} x$$

следует

$$\Gamma \delta f_2 - \frac{3}{4} P_0 \delta f_2 = - \frac{m l^4}{16 \pi^4 D} \delta \ddot{f}_2 \qquad (1.10)$$

Решение уравнения (1.10) вновь ищем в виде (1.5). После подстановки выражения (1.5) в уравнение (1.10) получим

$$\left[1 - \int_0^\infty \Gamma(\theta) \exp(-\lambda\theta)\, d\theta \right] - \frac{3}{4} (1 - G) \left(\frac{8k}{\pi^2} - \frac{f_1}{h} \right) \frac{f_1}{h} = - \frac{m l^4}{16 \pi^4 D} \lambda^2$$

(1.11)

В случае экспоненциального ядра отсюда имеем

$$\lambda^3 + \gamma (1 + K) \lambda^2 + \frac{16 \pi^4 D}{m l^4} \left(1 - \frac{3}{4} P_0^* \right) \lambda +$$
$$+ \gamma \frac{16 \pi^4 D}{m l^4} \left[1 - \frac{3}{4} (1 + K) P_0^* \right] = 0$$

где

$$P_0^* = \frac{1}{1 + K} \left(\frac{8k}{\pi^2} - \frac{f_1}{h} \right) \frac{f_1}{h}$$

Критерий Раусса-Гурвица приводит к неравенству

$$\frac{3}{4} (1 + K) P_0^* < 1 \qquad (1.12)$$

Нагрузку q, при которой неравенство (1.12) превращается в равенство, обозначим через q_{**}. Следовательно, невозмущенное движение оболочки асимптотически устойчиво по Ляпунову по отношению к несимметричным возмущениям начальных условий, если интенсивность нагрузки q меньше q_{**}.

Нагрузке q_1 отвечает нулевое значение одного из корней λ. Условие, из которого она определяется, может быть получено из уравнения (1.11), если положить в нем λ равным нулю.

Значения нагрузок q_* и q_1 аналогично могут быть найдены в общем случае ядра релаксации $\Gamma(t-\tau)$, для чего достаточно в уравнениях (1.7) и (1.11) положить $\lambda = 0$.

Итак, если $q_* > q_1$, то симметричное (невозмущенное) движение оболочки асимптотически устойчиво по Ляпунову по отношению к симметричным возмущениям начальных условий при $q < q_1$. Этот вывод согласуется с выводом, сделанным на основании квазистатической постановки задачи.

Если же $q_* > q > q_1$, то оболочка неустойчива по Ляпунову по отношению к несимметричным возмущениям начальных условий.

К аналогичным выводам можно придти, используя в качестве функции $w(t, x)$ конечную сумму

$$w(t, x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t) \sin \frac{j\pi}{l} x \tag{1.13}$$

Применяя метод Бубнова—Галеркина, из уравнения (1.1) в этом случае получим

$$\frac{ml^4}{j^4\pi^4 D}\ddot{f}_j + \Gamma f_j - 3P_0\left[\frac{f_j}{j^2} - \frac{2kh}{j^3\pi^3}(1-\cos j\pi)\right] = \frac{24(1-\cos j\pi)}{j^5\pi^5} hq^* \tag{1.14}$$

где

$$P_0 = \Gamma \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{4k}{\pi^3}\frac{f_j}{jh}(1-\cos j\pi) - j^2\frac{f_j^2}{h^2}\right]$$

Удерживая в сумме (1.13) только нечетные слагаемые, найдем решение, соответствующее симметричному деформированию панели, на основании которого можно судить об устойчивости невозмущенного движения по отношению к симметричным возмущениям. Рассматривая в выражении (1.13) четные и нечетные слагаемые, можно оценить влияние аналогичных несимметричных возмущений на устойчивость движения оболочки.

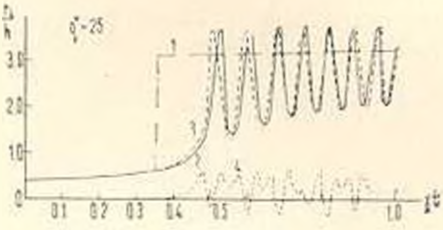
На фиг. 1. 2 представлены результаты решения системы уравнений (1.14) при удержании в разложении (1.13) одного члена (кривые 2) для панели со следующими характеристиками: $K = 1$; $k = 12$; $\gamma = \frac{ml^4}{\pi^4 D} = 0.001$. В качестве начальных условий здесь и в дальнейшем приняты условия, соответствующие квазистатической постановке задачи.

Для сравнения на тех же рисунках показаны графики изменения f_1 при квазистатической постановке (кривая 1), полученные из уравнения (1.1) при $m = 0$.

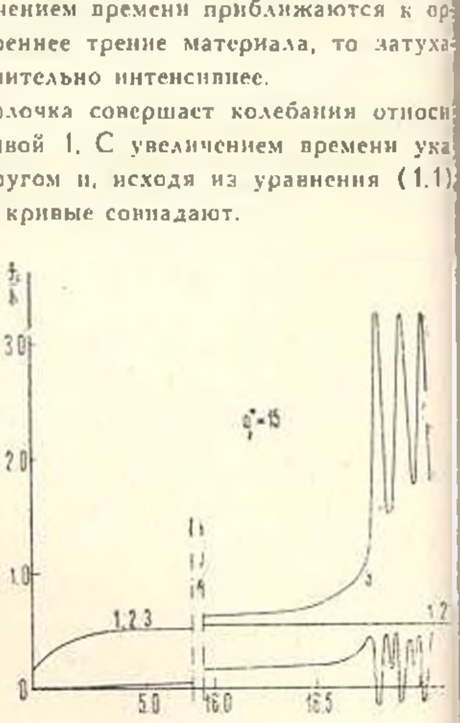
Как видно, неучет сил инерции приводит к существенному искажению действительной траектории движения оболочки. Указанная траектория является непрерывной при любой нагрузке и времени t, а при квазистатической постановке (если $q > q_1$) она терпит разрыв в момент «хлопка».

Из приведенных графиков следует, что на начальном этапе движени панели отличий в значениях функции $f_1(t)$, найденных при квазистатиче ской и динамической постановках, практически нет. Однако, по мере при ближения к моменту t_* (момент «хлопка») эти функции удаляются одн от другой. При $t > t_*$ движение оболочки носит затухающий характе Ординаты кривой 2 (фиг. 1) с увеличением времени приближаются к ор динатам кривой 1. Если учесть внутреннее трение материала, то затуха ние колебаний будет происходить значительно интенсивнее.

Заметим, что после «хлопка» оболочка совершает колебания относи тельно кривой, не совпадающей с кривой 1. С увеличением времени ука занные кривые сближаются друг с другом и, исходя из уравнения (1.1) нетрудно показать, что при $t \to \infty$ эти кривые совпадают.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Кривые 3, 4 на фиг. 1, 2 соответствуют решению системы уравнени (1.14) при сохранении в разложении (1.13) двух первых членов (кривая соответствует функции $f_1(t)$, а кривая 4 — функции $f_2(t)$). Несимметри ная составляющая прогиба вызвана несимметричным возмущением на грузки

$$\delta q_2^* \sin \frac{\pi}{l} x$$

($\delta q_2^* = 0{,}025$ при $q^* = 25$ и $\delta q_2^* = 0{,}133334$ при $q^* = 15$).

Помимо представленных было получено большое число решений систе мы уравнений (1.14) при различных возмущениях начальных условий, а также постоянно действующих возмущениях (начальное искривление ср динной поверхности, возмущение нагрузки и т. п.), которые свидетел ствуют о том, что невозмущенное движение оболочки устойчиво по отно шению к малым симметричным и несимметричным возмущениям не тольк при $q < q_3$ или $q < q_1$, но и при нагрузках, больших q_3. Этот вывод мож но объяснить следующим образом.

С помощью процедуры Бубнова—Галеркина уравнение (1.1) сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений. При некоторых ограничениях, накладываемых на ядро интегрального оператора, можно показать, что решение системы непрерывно зависит от начальных условий и правой части. Итак, на любом сколь угодно большом конечном промежутке времени разница между траекториями невозмущенного и возмущенного движения оболочки за счет соответствующего выбора, например, начальных условий, может быть сделана как угодно малой. С увеличением времени колебания оболочки затухают и $f_1(t) \to \text{const}$. Перенося начало отсчета времени в $-\infty$ и считая $f_1(t) = \text{const}$, легко показать, используя критерий Раусса-Гурвица, что невозмущенное движение оболочки асимптотически устойчиво по Ляпунову по отношению к симметричным возмущениям начальных условий, если $q < q_{max}$, причем q_{max} равна верхней предельной нагрузке для упругой оболочки с модулем упругости, равным E, и несимметричным возмущениям начальных условий, если $q_{max} > q > q_*$ и $q_1 > q$.

Таким образом, из динамической постановки задачи следует, что невозмущенное движение оболочки неустойчиво только по отношению к несимметричным возмущениям начальных условий и только при $q_* > q > q_1$. Полученные результаты существенно отличаются от тех, которые следуют из квазистатической постановки задачи. Вместе с тем они не умаляют их важности. Дело в том, что при значениях времени t, близких к t_*, наблюдается резкое изменение в движении оболочки, которое заключается в изменении ее конфигурации — оболочка из выпуклой превращается в вогнутую. Такое изменение в реальных оболочках происходит в течение долей секунды и не случайно поэтому получило название «хлопка». Для правильной оценки работы сжатых вязкоупругих оболочек необходима фиксация времени «хлопка». Принимая во внимание тот факт, что масса реальных оболочек мала, а также то, что траектория движения таких оболочек с момента нагружения до момента «хлопка» мало отличается от траектории движения оболочки без массы (при отсутствии инерционных сил), естественно принять в качестве критического времени время t_*, которое определяется при квазистатической постановке задачи, как время «хлопка».

Обсуждаемые выводы относятся к случаю, когда симметричная и несимметричная составляющие прогиба оболочки описывались соответственно одним слагаемым. Использование большего числа членов в разложении прогиба (1.13) приводит к изменению количественных характеристик движения, но окончательные выводы относительно устойчивости оболочки остаются справедливыми и в этом случае.

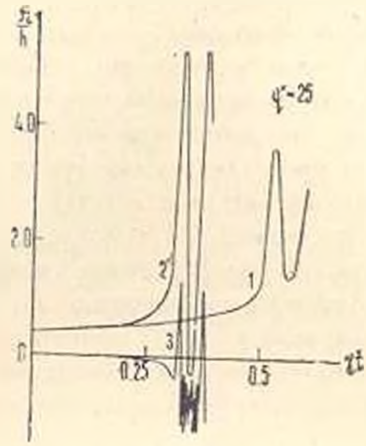
Для сравнения на фиг. 3 показаны графики изменения $f_1^*(t)$ (кривая 1) и $f_1(t)$, $f_3(t)$ (кривые 2, 3), соответствующие выражениям

$$w(t, x) = f_1^*(t) \sin \frac{\pi}{l} x$$

и

$$w(t, x) = f_1(t) \sin \frac{\pi}{l} x + f_3(t) \sin \frac{3\pi}{l} x$$

Геометрические параметры оболочки и ее материала приняты теми же, что и ранее.



Фиг. 3.

Из фиг. 3 видно, что учет большего числа членов в разложении функции $w(t, x)$ приводит иногда к значительному различию в траектории движения панели, на что обращалось внимание в работе [5] при решении задачи в квазистатической постановке.

ԱՌԱՁԳԱՄԱԾՈՒՑԻԿ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Վ. Դ. ՊՈՏԱՊՈՎ

Ամփոփում

Հավասարաչափ բաշխված ընդլայնական բեռների ազդեցության տակ գտնվող երկարացված գլանային թեքավուն պահերի օրինակով հետազոտված է թաղանթների կայունությունը, որոնց նյութը օժտված է սահմանափակ սողքի հատկությամբ։ Դիտարկվում է սկզբնական պայմանների սիմետրիկ և անտիսիմետրիկ գրգռումների և մշտական գործող գրգռումների նկատմամբ պանելի չգրգռված շարժման կայունությունը։ Բերվում է կվազիստատիկ և դինամիկ դրվածքների դեպքում խնդրի լուծման արդյունքների համեմատում։

ON STABILITY OF VISCOELASTIC SHELLS

V. D. POTAPOV

Summary

The paper deals with the stability of shells from material with property of bounded creep in the particular case of sloping lengthened cylindrical panal effected by uniformly distributed lateral loading. The stability of undisturbed motion of the panel with respect to symmetric and antisymmetric perturbations of initial conditions and to constantly acting perturbations is studied. The comparison of the results for quasi-static and dynamic formulation of the problem is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Браунс Я. А., Тетерс Г. А.* Деформирование вязкоупругих тонкостенных оболочек в закритической стадии.— Механика полимеров, 1976, № 1.
2. *Huang N. C., Nachbar W.* Dynamic snap-through of imperfect viscoelastic shallow arches. —Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1968, v. 35, No. 2.
3. *Колтунов М. А., Каримов А. И., Маллянов Т.* Об одном методе решения задачи динамической устойчивости тонкостенных вязкоупругих конструкций.— Механика композитных материалов, 1980, № 5.
4. *Ворович И. И., Минакова Н. И., Шепелева В. Г.* Некоторые вопросы устойчивости вязкоупругих и вязкопластических систем на примере фермы Мизеса.— Изв. АН СССР, МТТ, 1979, № 4.
5. *Потапов В. Д.* Об устойчивости вязкоупругих оболочек при длительном нагружении.— ПМ, 1980, т. 16, № 5.

Московский институт инженеров
железнодорожного транспорта

Поступила в редакцию
8. II. 1982