ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 6, 1983 Механика

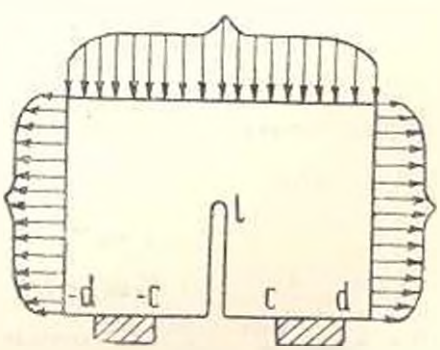
КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА, ОСЛАБЛЕННОГО РАЗРЕЗОМ

ЕНГИБАРЯН А. А., МКРТЧЯН А. М.

Рассматривается плоская контактная задача для упругого однородного прямоугольника, лежащего на двух жестких опорах. Прямоугольник ослаблен разрезом, выходящим на свою границу со стороны опор. К прямоугольнику приложены нормальные нагрузки, прижимающие его к опорам, а также растягивающие нагрузки, приложенные перпендикулярно к разрезу. Задача решается методом Фурье и при помощи преобразования парных и сингулярных интегральных уравнений сводится к квазивполне регулярным системам бесконечных алгебраических уравнений. Коэффициенты этих систем представлены в удобном для вычислений виде. В формулах для напряжений выделены особенности. Приведены числовые примеры.

Контактные и смешанные задачи для прямоугольника рассмотрены авторами [1—8] и др. Наиболее близкими по методу решения к рассматриваемой здесь задаче являются работы [7, 8].

1. Упругий прямоугольник, занимающий область $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant b$ (фиг. 1), ослаблен прямолинейным разрезом длины l и на участках $(-d < x < -c)$, $(c < x < d)$ лежит на двух жестких гладких опорах. По всей границе прямоугольника вне опор заданы напряжения. Предполагается, что по всему контуру касательные напряжения отсутствуют. В силу симметрии задача решается для правой половины рассматриваемой области при граничных условиях



Фиг. 1.

$$\sigma_y(x, b) = f(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos kx, \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$$

$$\sigma_x(\pi, y) = t(y) = \frac{t_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos \beta_k y \quad (0 < y < b)$$

$$\tau_{xy}(0, y) = \tau_{xy}(\pi, y) = 0, \quad (0 < y < b) \tag{1.1}$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = \tau_{xy}(x, b) = 0, \quad (0 < x < \pi)$$

$$\sigma_x(0, y) = 0, \quad (0 < y < l)$$
$$u(0, y) = 0, \quad (l \leqslant y \leqslant b) \tag{1.2}$$
$$\sigma_y(x, 0) = 0, \quad (0 < x < c), \quad (d < x < \pi) \tag{1.3а}$$
$$v(x, 0) = g(x), \quad (c \leqslant x \leqslant d) \tag{1.3б}$$

Вводится неизвестная функция $\sigma(x)$ — искомое контактное напряжение. Тогда условия (1.3а) и (1.3б) заменяются условием

$$\sigma_y(x, 0) = \begin{cases} \sigma(x) & (c < x < d) \\ 0 & (0 < x < c) \text{ и } (d < x < \pi) \end{cases} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad (0 < x < \pi) \tag{1.3}$$

Функцию напряжений, удовлетворяющую бигармоническому уравнению, представим в виде [1]

$$\Phi(x, y) = d_1 x^2 + d_2 y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(1)} \operatorname{ch} ky + B_k^{(1)} \operatorname{sh} ky + ky (C_k^{(1)} \operatorname{ch} ky + D_k^{(1)} \operatorname{sh} ky)] \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(2)} \operatorname{ch} \beta_k x + B_k^{(2)} \operatorname{sh} \beta_k x + \beta_k x (C_k^{(2)} \operatorname{ch} \beta_k x + D_k^{(2)} \operatorname{sh} \beta_k x)] \cos \beta_k y \tag{1.4}$$

$$\beta_k = \frac{k\pi}{b}$$

Удовлетворяя условиям (1.1), (1.3), используя известные связи функции напряжений с напряжениями и перемещениями, для определения коэффициентов разложения (1.4) получим

$$2d_2 = \frac{t_0}{2} = \frac{1}{b} \int_0^b t(y)\, dy, \qquad 2d_1 = \frac{a_0}{2} = \frac{f_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x)\, dx$$

$$k^2 \operatorname{sh}^2 kb\, A_k^{(1)} = (kb + \operatorname{sh} kb \operatorname{ch} kb)\, Y_k^{(1)} - (\operatorname{sh} kh + kh \operatorname{ch} kh)\, X_k^{(1)}$$
$$\beta_k^2 \operatorname{sh}^2 \beta_k \pi\, A_k^{(2)} = (\beta_k \pi + \operatorname{sh} \beta_k \pi \operatorname{ch} \beta_k \pi)\, Y_k^{(2)} - (\operatorname{sh} \beta_k \pi + \beta_k \pi \operatorname{ch} \beta_k \pi)\, X_k^{(2)}$$
$$k^2 B_k^{(1)} = -k^2 C_k^{(1)} = -Y_k^{(1)}, \qquad \beta_k^2 B_k^{(2)} = -\beta_k^2 C_k^{(2)} = -Y_k^{(2)} \tag{1.5}$$
$$k^2 \operatorname{sh} kb\, D_k^{(1)} = X_k^{(1)} - Y_k^{(1)} \operatorname{ch} kb$$
$$\beta_k^2 \operatorname{sh} \beta_k \pi\, D_k^{(2)} = X_k^{(2)} - Y_k^{(2)} \operatorname{ch} \beta_k \pi$$

При этом $X_k^{(1)}$, $Y_k^{(1)}$, $X_k^{(2)}$ определяются из бесконечных систем

$$X_p^{(1)} (1 + M_p^{(1)}) - Y_p^{(1)} N_p^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_{pk}^{(1)} [(-1)^{p+1} X_k^{(2)} + Y_k^{(2)}] + f_p$$
$$Y_p^{(1)} (1 + M_p^{(1)}) - X_p^{(1)} N_p^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk}^{(1)} [(-1)^p X_k^{(2)} - Y_k^{(2)}] - a_p \tag{1.6}$$
$$X_p^{(2)} (1 + M_p^{(2)}) - Y_p^{(2)} N_p^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk}^{(2)} [(-1)^{p+1} X_k^{(1)} + Y_k^{(1)}] + t_p$$

Здесь использованы обозначения

$$a_{pk}^{(1)} = \frac{4\beta_k p^2}{\pi (p^2 + \beta_k^2)^2}; \qquad b_{pk}^{(1)} = \frac{4(-1)^k k \beta_p^2}{b(k^2 + \beta_p^2)^2}$$

$$N_p^{(1)} = \frac{pb \operatorname{ch} pb + \operatorname{sh} pb}{\operatorname{sh}^2 pb}, \qquad N_p^{(2)} = \frac{\beta_p \pi \operatorname{ch} \beta_p \pi + \operatorname{sh} \beta_p \pi}{\operatorname{sh}^2 \beta_p \pi} \tag{1.7}$$

$$M_p^{(1)} = \frac{pb + \operatorname{sh} pb \exp(-pb)}{\operatorname{sh}^2 pb}, \qquad M_p^{(2)} = \frac{\beta_p \pi + \operatorname{sh} \beta_p \pi \exp(-\beta_p \pi)}{\operatorname{sh}^2 \beta_p \pi}$$

Условие (1.2) сводится к парному тригонометрическому уравнению

$$\sum_{k=1}^{\infty} [(1 + M_k^{(2)}) Y_k^{(2)} - N_k^{(2)} X_k^{(2)}] \cos \beta_k y = 2d_2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [X_k^{(1)} \varphi_k(y) - Y_k^{(1)} \varphi_k(b - y)] \qquad (0 < y < \alpha) \tag{1.8}$$

$$Eu_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} Y_k^{(2)} \cos \beta_k y = 0, \qquad (\alpha < y < \pi)$$

где

$$\varphi_k(y) = \frac{1}{\operatorname{sh} kb} \left| \operatorname{ch} ky - \frac{kb \operatorname{ch} k(b-y)}{\operatorname{sh} kb} - k(b-y) \operatorname{sh} ky \right| \tag{1.9}$$

Решение уравнений (1.8), следуя [3, 4], сводится к системе алгебраических уравнений для определения $Y_k^{(2)}$

$$Y_k^{(2)} - \sum_{p=1}^{\infty} [a_{pk}^{(2)} Y_p^{(2)} + b_{pk}^{(2)} X_p^{(2)} + C_{pk}^{(2)} X_p^{(1)} + C_{pk}^{(3)} Y_p^{(1)}] + 2d_2 z_k (\cos \gamma) \tag{1.10}$$

$$\frac{EU_0}{2} + 4d_2 \ln\left(\cos \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p^{-1} [X_p^{(2)} N_p^{(2)} - Y_p^{(2)} M_p^{(2)}] Z_p(\cos \gamma) +$$

$$+ \frac{2b}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} p^{-1} \{X_p^{(1)} [\overline{M}_1(\cos \gamma) - \overline{K}_1(\cos \gamma)] - Y_p^{(1)} [\overline{N}_1(\cos \gamma) - \overline{P}_1(\cos \gamma)]\} \tag{1.11}$$

Здесь

$$a_{pk}^{(2)} = -\frac{k}{2} M_p^{(2)} I_{pk}(\gamma), \qquad b_{pk}^{(2)} = \frac{k}{2} N_p^{(2)} I_{pk}(\gamma), \qquad C_{pk}^{(2)} = \frac{k}{2} K_{1k}^{(2)}(\gamma)$$

$$C_{pk}^{(3)} = -\frac{k}{2} k_{1k}^{(3)}(\gamma), \quad I_{pk}(\gamma) = \int_0^{\gamma} y_k(\cos\theta) \, y_p(\cos\theta) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \, d\theta \tag{1.12}$$

$$K_{1k}^{(2)}(\gamma) = \int_0^{\gamma} \overline{L}_1(d\theta) \, y_k(\cos\theta) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \, d\theta$$

$$K_{ik}^{(2)}(\gamma) = \int_0^\gamma \overline{H}_\xi(\cos\theta)\, y_k(\cos\theta)\, \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$\xi = p\frac{b}{\pi}; \quad \gamma = \frac{\pi}{b}\, l, \quad y_k(\cos\theta) = P_{k-1}(\cos\theta) + P_k(\cos\theta)$$

$$z_k(\cos\theta) = P_{k-1}(\cos\theta) - P_k(\cos\theta)$$

$P_k(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра, а $\overline{L}_\xi(\cos\theta)$, $\overline{H}_\xi(\cos\theta)$ и другие специальные функции исследованы в [3, 4]. Они имеют следующие интегральные представления:

$$\overline{L}_\xi(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta \frac{\varphi_\xi(x)\cos(x/2)\,dx}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}}$$

$$\overline{H}_\xi(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta \frac{\varphi_\xi(\pi - x)\cos(x/2)\,dx}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}}$$

$$\overline{M}_\xi(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta \frac{\psi_\xi(x)\sin(x/2)\,dx}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}}$$

$$\overline{K}_\xi(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta \frac{\operatorname{sh}\xi x\sin(x/2)\,dx}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}} \qquad (1.13)$$

$$\overline{N}_\xi(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta \frac{\psi_\xi(\pi - x)\sin(x/2)\,dx}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}}$$

$$\overline{P}_\xi(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta \frac{\sin\xi(\pi - x)\sin(x/2)\,dx}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}}$$

$$\psi_\xi(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}\xi\pi}\left[\operatorname{sh}\xi x + \frac{\xi\pi\operatorname{sh}\xi(\pi - x)}{\operatorname{sh}\xi\pi} - \xi(\pi - x)\operatorname{ch}\xi x\right]$$

Полученные бесконечные системы (1.6) и (1.11) аналогичны по структуре системам, исследованным в работах [3, 4], где, исходя из асимптотических поведений при больших ξ функций (1.13) и полиномов Лежандра, показана квазивполне регулярность совокупности бесконечных систем при свободных членах, стремящихся к нулю.

Вторая система (1.6) в качестве свободного члена содержит коэффициенты Фурье a_k пока еще неизвестной функции $\varphi(x)$.

Для определения $\varphi(x)$ удовлетворим условию (1.3 б).

$$v(x, 0) = g(x); \quad (c < x < d) \qquad (1.14)$$

Подставляя (1.5) и (1.6) в выражение $\varphi(x, 0)$, после преобразований получим следующее сингулярное уравнение:

$$\frac{2\sin x}{\pi}\int_c^d \frac{\varphi(y)\,dy}{\cos y-\cos x}=Eg'(x)+\theta'(x), \quad (c<x<d) \tag{1.15}$$

где

$$\theta(x)=-2\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k+Y_k^{(1)}\right)\frac{\cos kx}{k} \tag{1.16}$$

Решение уравнения (1.15) при помощи формул обращения [9] приводится к виду

$$\varphi(y)=\frac{\sin y}{\sqrt{(\cos y-\cos d)(\cos c-\cos y)}}\times$$

$$\times\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_c^d\frac{\sqrt{(\cos c-\cos t)(\cos t-\cos d)}}{\cos t-\cos y}\left[Eg'(t)+\theta'(t)\right]dt+A_0\right\} \tag{1.17}$$

Из (1.3) следует, что

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_c^d\varphi(x)\cos kx\,dx, \quad \frac{a_0}{2}=A_0=\frac{1}{\pi}\int_c^d\varphi(x)\,dx \tag{1.18}$$

Подставляя (1.17) в (1.18), с учетом (1.16) получим бесконечную систему для определения a_k

$$a_k=\sum_{p=1}^{\infty}\left(Y_p^{(1)}+a_p\right)A_{pk}+2A_0\Gamma_k+G_k \tag{1.19}$$

где

$$A_{pk}=\frac{2}{\pi^2}\int_\beta^\alpha\sqrt{(\alpha-t)(t-\beta)}\,\frac{\sin(p\arccos t)}{\sin(\arccos t)}\,J_k(t)\,dt$$

$$J_k(t)=\int_\beta^\alpha\frac{\left[\cos(k\arccos v)-\cos(k\arccos t)\right]dv}{\sqrt{(\alpha-v)(v-\beta)}\,(v-t)}$$

$$G_k=\frac{E}{\pi^2}\int_\beta^\alpha\frac{\sqrt{(\alpha-t)(t-\beta)}\,g'(\arccos t)\,J_k(t)\,dt}{\sin(\arccos t)} \tag{1.20}$$

$$\Gamma_k=\frac{1}{\pi}\int_\beta^\alpha\frac{\cos(k\arccos v)\,dv}{\sqrt{(\alpha-v)(v-\beta)}}, \quad \alpha=\cos c, \quad \beta=\cos d$$

Система (1.19) квазивполне регулярна, так как

$$\sum_{p=1}^{\infty} |A_{pk}|, \quad \Gamma_k, \quad G_k$$

при возрастании номера k стремятся к нулю, как $k^{-1/2}$. Следовательно, совокупность бесконечных систем квазивполне регулярна.

Коэффициенты бесконечных систем (1.6) вычисляются элементарно, а коэффициенты системы (1.10) представляют собой интегралы Ломеля [4] от специальных функций, причем эти функции вычисляются по рекуррентным соотношениям или из быстро сходящихся рядов.

Для вычисления интегралов, входящих в (1.19), удобно представить полиномы Чебышева $\cos(n \arccos x)$ и $\dfrac{\sin(n \arccos x)}{\sin(\arccos x)}$ в следующем виде [10]:

$$\cos(n \arccos x) = \cos\frac{n}{2}\pi F\left(-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) +$$

$$+ xn \sin\frac{n}{2}\pi F\left(-\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right) \tag{1.21}$$

и пользоваться значениями интегралов

$$\int_{\beta}^{\alpha} (x-\beta)^{\theta-1}(\alpha-x)^{\lambda-1}x^m\,dx = (\alpha-\beta)^{\theta+\lambda-1}B(\theta, \lambda)\beta^m \times$$

$$\times F\left(-m, \theta, \theta+\lambda, \frac{\alpha-\beta}{\beta}\right) \tag{1.22}$$

В нашем случае α, β, θ, λ — вещественные параметры

$$-1 < \alpha, \beta < 1; \quad \theta, \lambda = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Таким образом, вычисление A_{pk} и Γ_k приводится к вычислению конечных сумм от полиномов вида (1.22). Например,

$$\Gamma_{2k} = (-1)^k \sum_{m=0}^{k} \frac{(-k)_m (k)_m}{m!\,(1/2)_m}\beta^{2m} F\left(-2m, \frac{1}{2}, 1, \frac{\alpha-\beta}{\beta}\right) \tag{1.23}$$

Контактные напряжения представлены в виде выражений (1.17) с выделенными особенностями (1.17). Нормальное напряжение на линии $x=0$ вне разреза преобразуется к виду

$$\sigma_x(0, \eta) = \frac{\sqrt{2}\,R \sin\eta/2}{2\sqrt{\cos\eta_1 - \cos\eta}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\eta}{2}\Phi(\eta), \quad (\eta_1 < \eta < \pi) \tag{1.24}$$

где

$$R = 4d_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \{[N_p^{(2)} X_p^{(2)} - M_p^{(2)} Y_p^{(2)}] y_p (\cos \eta_1) +$$

$$+ X_p^{(1)} \overline{L}_p (\cos \eta_1) - Y_p^{(1)} \overline{H}_p (\cos \eta_1)\} \qquad (1.25)$$

$$\Phi(\eta_1) = \sum_{p=1}^{\infty} \int_{\eta_1}^{\pi} \{p [M_p^{(2)} Y_p^{(2)} - N_p^{(2)} X_p^{(2)}] z_p (\cos \theta) +$$

$$+ \xi [\overline{M}_p (\cos \theta) + \overline{K}_p (\cos \theta)] X_p^{(1)} - \xi [\overline{N}_p (\cos \theta) +$$

$$+ \overline{P}_p (\cos \theta)] Y_p^{(1)}\} \frac{\operatorname{ctg}(\theta/2)\, d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \eta_1}}$$

$$\eta_1 = \frac{\pi y}{b}$$

В качестве числового примера вычислен R—коэффициент при особенности у конца трещины для одного случая геометрических параметров рассматриваемой области, то есть

$$g(x) = 0, \quad b = \pi, \quad l = \frac{\pi}{2}, \quad c = \frac{\pi}{2}, \quad d = \frac{2\pi}{3}$$

и пяти случаев приложения нагрузки:

1. На прямоугольник действует нормальная сжимающая нагрузка постоянной интенсивности p_1 на участке $-a<x<a$.

2. На участках $-\pi<x<-b_1$ и $b_1<x<\pi$ действует нагрузка $\sigma_y = -p_2$.

3. На участках $-b_1<x<-a_1$ и $a_1<x<b_1$ действует нагрузка $\sigma_y = -p_3$.

4. Прямоугольник растягивается постоянной нагрузкой $\sigma_x = Q_1$, приложенной на участке $0 < y < l_1$.

5. На участке $l_1 < y < b$ действует нагрузка $\sigma_x = Q_2$.

Значение R для каждого случая в зависимости от длины участка приложения нагрузки приведено в табл. 1—5.

Случай одновременного действия прижимающих и растягивающих сил получается простым наложением. Соответствующим выбором интенсивностей и местом приложения нагрузок можно получить растягивающее или сжимающее напряжение у корня разреза.

Например, как видно из табл. 1, в случае прижимающей нагрузки $-p_1$ у корня разреза получаются растягивающие напряжения $R > 0$ при $\pi/8 \leqslant a \leqslant 5\pi/6$. При сжимающих нагрузках $Q_2 < 0$, действующих на боковой поверхности $|x| = \pi$, $R < 0$ (табл. 3). При одновременном их действии суммарный коэффициент R при любом $|Q_2| = |p_2|$ отрицателен. При различных p_2 и Q_2 возможно как растяжение, так и сжатие.

Когда $\quad a = \dfrac{2\pi}{3}, \quad l = \dfrac{2\pi}{3}, \quad$ $R > 0$ при $p_2 > 2{,}4\, Q_2$

$R = 0$ при $p_2 = 2{,}4\, Q_2$

$R < 0$ при $p_2 < 2{,}4\, Q_2$

Таблица 1

a	R/P_0	P_0
$\pi/8$	3,5105	$P_2/8$
$\pi/4$	3,0879	$P_2/4$
$\pi/2$	1,9770	$P_2/2$
$2\pi/3$	1,2039	$2P_2/3$
$5\pi/6$	0,4971	$5P_2/6$
π	−0,0356	P_2

Таблица 2

b_1	R/P_0	P_0
$\pi/8$	−0,5434	$7P_3/8$
$\pi/4$	−1,0783	$3P_3/4$
$\pi/2$	−2,0482	$P_3/2$
$2\pi/3$	−2,5146	$P_3/3$
$5\pi/6$	−2,7001	$P_3/6$

Таблица 3

l_1	R/Q_0	Q_0
$\pi/8$	3,6053	$Q_2/8$
$\pi/4$	3,5169	$Q_2/4$
$\pi/2$	3,1929	$Q_2/2$
$2\pi/3$	2,9097	$2Q_2/3$
$5\pi/6$	2,6192	$5Q_2/6$
π	2,3659	Q_2

Таблица 4

l_2	R/Q_0	Q_0
$\pi/8$	2,1888	$7Q_3/8$
$\pi/4$	1,9822	$3Q_3/4$
$\pi/2$	1,5384	$Q_3/2$
$2\pi/3$	1,2784	$Q_3/3$
$5\pi/6$	1,0990	$Q_3/6$

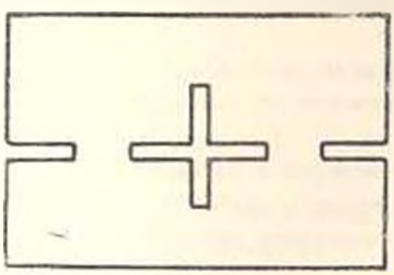
Таблица 5

a_1	b_1	R/P_0	P_0
$\pi/8$	$\pi/4$	2,6559	$P_4/8$
	$\pi/2$	1,4630	$3P_4/8$
	$2\pi/3$	0,6674	$13P_4/24$
	$5\pi/6$	−0,3500	$17P_4/24$
$\pi/4$	$\pi/2$	0,8657	$P_4/4$
	$2\pi/3$	0,0735	$5P_4/12$
	$5\pi/6$	−0,6179	$7P_4/12$
$\pi/2$	$2\pi/3$	−1,1154	$P_4/6$
	$5\pi/6$	−1,6677	$P_4/3$
$2\pi/3$	$5\pi/6$	−2,3317	$P_4/6$

В случае, когда сжимающие напряжения приложены по краям горизонтальной кромки. $R < 0$ (табл. 2). Складывая это значение R со значением R для случая растяжения по боковым краям (табл. 4), заметим, что когда $\pi/8 < l_2 < 5\pi/6$ и $p_1 = Q_3$,

$$R > 0 \text{ при } b_1 = \frac{\pi}{8}; \quad \frac{\pi}{4}$$

$$R < 0 \text{ при } b_1 = \frac{2\pi}{3}; \quad \frac{5\pi}{6}$$



Фиг. 2.

При различных p_3 и Q_3 нетрудно установить соответствующее соотношение p_3/Q_3, при котором $R = 0$.

При численных расчетах в бесконечных системах сохранено пятнадцать неизвестных.

Отметим, что при $g(x) = 0$ получаем решение задачи для прямоугольника, ослабленного внутренним крестообразным и двумя выходящими на кромки разрезами (фиг. 2).

По-видимому, такая задача рассматривается впервые.

При частных значениях геометрических параметров $c = 0$ и $c = 0$, $d = \pi$ получаются решения задач, ранее рассмотренных в работах [7, 8].

ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Ա. Ա. ԵՆԳԻԲԱՐՅԱՆ, Ա. Մ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է երկու կոշտ հիմքերի վրա դրված առաձգական ուղղանկյան համար հարթ կոնտակտային խնդիր։

Ուղղանկյունն ունի ներքին կողմի վրա կտրվածք և բեռնավորված է նորմալ ուժերով։

Զույգ և սինգուլյար հավասարումների օգտագործմամբ խնդիրը բերվում է գծային հանրահաշվական հավասարումների քվազիլիովին ռեգուլյար համակարգի։

Դիտարկված է թվային օրինակ։

CONTACT PROBLEM OF A RECTANGLE WEAKENED WITH SLIT

A. A. ENGIBARIAN, A. M. MKRTCHIAN

Summary

The plane contact problem for an elastic rectangle laying on two rigid supports is considered. The rectangle has a slit on the supporting edge. Given normal loads act on the rectangle.

By means of transformation of dual and singular equations the problem is reduced to quasi quite regular infinite systems of linear equations. Numerical example are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника.— ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
2. *Чобанян К. С., Гольфаян И. О.* Решение одной контактной задачи для упругого прямоугольника.— ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
3. *Баблоян А. А., Гулканян Н. О.* Об одной смешанной задаче для прямоугольника.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1969, т. 22, № 1.
4. *Баблоян А. А., Мкртчян А. М.* Смешанная задача для прямоугольника.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1972, т. 25, № 2.
5. *Бови О., Нил Д.* Растяжение прямоугольной пластинки с трещиной на кромке.— ПМ, 1965, т. 32, № 3.
6. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Об одном методе решения задач теории упругости для полосы, полуплоскости и плоскости, ослабленных периодической системой щелей.— Изв. ВНИИГ, 1975, т. 107.
7. *Баблоян А. А., Мкртчян А. М.* Равновесие прямоугольника, ослабленного крестообразными разрезами.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. 27, № 4.
8. *Енгибарян А. А., Мкртчян А. М.* Некоторые плоские смешанные задачи для прямоугольников с трещинами и со штампами.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1979, т. 32, № 4.
9. *Гахов Д. Ф.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.
10. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.

Институт механики АН Армянской ССР
Ереванский зооветеринарный институт

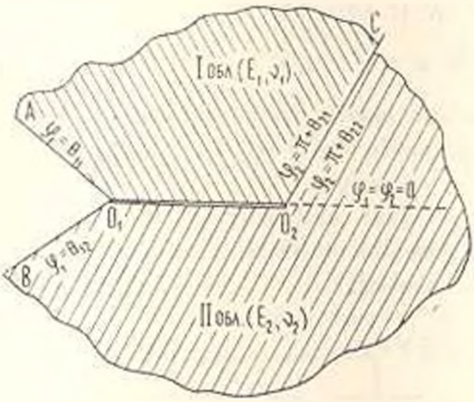
Поступила в редакцию
29.VI.1982

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVI, № 6, 1983 Механика

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО СОСТАВНОГО КЛИНА

ТАДЕВОСЯН Р. Г.

1°. В данной работе рассматривается плоская контактная задача теории упругости для двух усеченных клиньев из различных материалов, которые соединены так, что образуют бесконечный составной клин с двумя угловыми точками. Линия раздела материалов двухзвенная ломаная (фиг. 1). Аналогичные задачи для однородных областей, имеющих довольно сложную конфигурацию, другим методом были рассмотрены в работах Нуллера Б. М. [5—6].



Фиг. 1.

Пусть E_1, ν_1 — упругие постоянные материала в верхней части рассматриваемой области, а E_2, ν_2 — в нижней части.

Принимается, что по лучу O_2C материалы сцеплены друг с другом

$$\sigma_\varphi^{(1)} = \sigma_\varphi^{(2)}, \quad \tau_{r\varphi}^{(1)} = \tau_{r\varphi}^{(2)}$$
$$U^{(1)} = U^{(2)}, \quad V^{(1)} = V^{(2)} \tag{1.1}$$

Здесь индексы 1 и 2 соответственно относятся к верхней и нижней частям составного клина. На лучах O_1A и O_1B заданы внешние нагрузки в виде функций

$$\sigma_\varphi^{(k)} = f_{1k}, \quad \tau_{r\varphi}^{(k)} = g_{1k}, \quad (k = 1,\ 2) \tag{1.2}$$

Задача решается для двух случаев условий на отрезке прямой O_1O_2.

Задача 1. По O_1O_2 между материалами имеется трещина, берега которой нагружены по закону:

$$\sigma_\varphi^{(k)} = f_k, \quad \tau_{r\varphi}^{(k)} = g_k, \quad (k = 1,\ 2) \tag{1.3}$$

Задача 2. По отрезку O_1O_2 между различными материалами имеет место полное сцепление

$$\sigma_\varphi^{(1)} = \sigma_\varphi^{(2)}, \quad \tau_{r\varphi}^{(1)} = \tau_{r\varphi}^{(2)}, \quad U^{(1)} = U^{(2)}, \quad V^{(1)} = V^{(2)} \tag{1.4}$$

Как известно [1], решение плоской задачи теории упругости сводится к определению функции напряжений Эри из уравнения

$$\nabla\nabla F = 0 \tag{1.5}$$

при условиях (1.1)—(1.4).

Введем две системы полярных координат (r_1, φ_1) и (r_2, φ_2) с центрами соответственно в точках O_1 и O_2.

Решение поставленной задачи ищем в виде суммы интегралов Меллина [2]

$$F = \sum_{n=1}^{2} F_n(r_n, \bar{\varphi}_n) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{2} \int_{L_n} \Phi_n(s, \bar{\varphi}_n) r_n^{1-s} ds \tag{1.6}$$

Здесь $F_n(r_n, \varphi_n)$ — регулярные внутри углов O_n бигармонические функции, удовлетворяющие дополнительным условиям на отрезке O_1O_2 и содержащие четыре произвольные функции, выбором которых можно удовлетворять любым граничным условиям на сторонах угла O_n $(n = 1, 2)$. L_n — прямые, параллельные мнимой оси $s = c_n + iy$ $(-\infty < y < +\infty)$; $\varepsilon - 1 < c_n < 0$, $\varepsilon < 1$, $\bar{\varphi}_1 = \varphi_1$, $\bar{\varphi}_2 = \varphi_2 - \pi$.

В (1.6) функции Φ_n удовлетворяют следующему уравнению:

$$\Phi_n^{IV} + 2(s^2 + 1)\Phi_n^{II} + (s^2 - 1)^2 \Phi_n = 0 \tag{1.7}$$

Каждую из функций Φ_n определим следующим образом:

$$\Phi_n(s, \bar{\varphi}_n) = \begin{cases} \Phi_{n1}(s, \bar{\varphi}_n) & \text{в обл. 1} \\ \Phi_{n2}(s, \bar{\varphi}_n) & \text{в обл. 2} \end{cases} \tag{1.8}$$

Поскольку функции $F_n(r_n, \varphi_n)$ удовлетворяют условию (1.5), функции $\Phi_{nk}(s, \bar{\varphi}_n)$ должны удовлетворять уравнению (1.7) и поэтому они должны иметь вид $(n, k = 1, 2)$

$$\Phi_{nk}(s, \bar{\varphi}_n) = A_{nk}\cos(s-1)\bar{\varphi}_n + B_{nk}\sin(s-1)\bar{\varphi}_n +$$

$$+ C_{nk}\cos(s+1)\bar{\varphi}_n + D_{nk}\sin(s+1)\bar{\varphi}_n \tag{1.9}$$

Из (фиг. 1) следует, что углы φ_n изменяются в пределах:

при $k = 1$ $\quad 0 < \varphi_1 \leqslant \theta_{11}, \ \theta_{21} \leqslant \varphi_2 - \pi < 0$ $\quad$ (верхний материал)

при $k = 2$ $\quad \theta_{12} \leqslant \varphi_1 < 0, \ 0 < \varphi_2 - \pi \leqslant \theta_{22}$ $\quad$ (нижний материал)

При этом имеют место следующие неравенства:

$$\theta_{11} - \theta_{21} > \pi, \ \theta_{22} - \theta_{12} \geqslant \pi, \ \theta_{11} - \theta_{12} \leqslant 2\pi, \ \theta_{22} - \theta_{21} = 2\pi \tag{1.10}$$

Известно [1], что напряжения $\sigma_r^{(n)}$, $\sigma_\varphi^{(n)}$, $\tau_{r\varphi}^{(n)}$, отнесенные к полярной системе (r_n, φ_n), выражаются через функцию F формулами

$$\sigma_r^{(n)}(r_n, \overline{\varphi}_n) = \frac{1}{r_n}\frac{\partial F}{\partial r_n} + \frac{1}{r_n^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_n^2}, \qquad \sigma_\varphi^{(n)}(r_n, \overline{\varphi}_n) = \frac{\partial^2 F}{\partial r_n^2}$$

$$\tau_{r\varphi}^{(n)}(r_n, \overline{\varphi}_n) = -\frac{\partial}{\partial r_n}\left(\frac{1}{r_n}\frac{\partial F}{\partial \varphi_n}\right) \tag{1.11}$$

Потребуем, чтобы каждая из функций $F_n(r_n, \overline{\varphi}_n)$ удовлетворяла дополнительным условиям на отрезке O_1O_2.

2°. *Задача* 1. Сначала рассмотрим первую задачу, то есть случай, когда на отрезке O_1O_2 имеется трещина, берега которой нагружены по закону (1.3).

Выбирая функцию Эри в виде (1.6)—(1.9) и удовлетворяя условиям (1.1), (1.2) и (1.3), для определения неизвестных функций $A_{nk}(s)$, ..., $D_{nk}(s)$, входящих в (1.9), после ряда преобразований получим следующие соотношения:

$$A_{1k} + C_{1k} = a^s s^{-1}\overline{f}_k(s), \qquad A_{2k} + C_{2k} = 0$$

$$(s-1)B_{1k} + (s+1)D_{1k} = a^s s^{-1}\overline{g}_k(s), \quad (s-1)B_{2k} + (s+1)D_{2k} = 0$$

$$C_{1k}\alpha_{1k} - D_{1k}\beta_{1k}^{-} = a^s s^{-1}[X_{1k} - \overline{f}_k\cos(s-1)\theta_{1k} - \overline{g}_k\sin(s-1)\theta_{1k}]$$

$$-C_{1k}\beta_{1k}^{-} - D_{1k}\alpha_{1k} = a^s s^{-1}[Y_{1k} + \overline{f}_k\sin(s-1)\theta_{1k} - \overline{g}_k\cos(s-1)\theta_{1k}]$$

$$C_{2k}\alpha_{2k}^{+} - D_{2k}\beta_{2k}^{-} - (C_{2m}\alpha_{2m}^{+} - D_{2m}\beta_{2m}^{-}) = (-1)^m a^s s^{-1}X_{21} \tag{2.1}$$

$$-(C_{2k}\beta_{2k}^{+} + D_{2k}\alpha_{2k}^{-}) + (C_{2m}\beta_{2m}^{+} + D_{2m}\alpha_{2m}^{-}) = (-1)^m a^s s^{-1}Y_{21}$$

$$E_2[E_m(C_{2k}\tilde{\alpha}_{2k}^{-} - D_{2k}\overline{\beta}_{2k}^{-}) - E_k(C_{2m}\tilde{\alpha}_{2m}^{-} - D_{2m}\tilde{\beta}_{2m}^{-})] = (-1)^m a^s E_1E_2 s^{-1}X_{22}$$

$$-E_2[E_m(C_{2k}\tilde{\beta}_{2k}^{+} + D_{2k}\tilde{\alpha}_{2k}^{-}) - E_k(C_{2m}\overline{\beta}_{2m}^{+} + D_{2m}\hat{\alpha}_{2m}^{-})] = (-1)^m a^s E_1E_2 s^{-1}Y_{22}$$

Из соотношений (2.1) старые неизвестные $C_{nk}(s)$ и $D_{nk}(s)$ выразим через новые $X_{nk}(s)$ и $Y_{nk}(s)$:

$$\xi C_{1k}\Delta_1^{(k)} = a^s[X_{1k}\alpha_{1k}^{-} - Y_{1k}\beta_{1k}^{-} - (\overline{f}_k S_{1k}^{-} + \overline{g}_k C_{1k}^{-})]$$

$$\xi D_{1k}\Delta_1^{(k)} = a^s[-X_{1k}\beta_{1k}^{+} - Y_{1k}\alpha_{1k}^{+} - (\overline{f}_k C_{1k}^{-} - \overline{g}_k S_{1k}^{-})]$$

$$\xi C_{2k}\Delta_2 = a^s[X_{21}M_{2k}^{-} + Y_{21}N_{2k}^{-} + X_{22}Q_{2k}^{-} + Y_{22}P_{2k}^{-}]$$

$$\xi D_{2k}\Delta_2 = a^s[X_{21}N_{2k}^{+} + Y_{21}M_{2k}^{+} + X_{22}P_{2k}^{+} + Y_{22}Q_{2k}^{+}] \tag{2.2}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$E_m M_{2k}^{\pm}(\xi) = \pm(-1)^m(E_m\tilde{\alpha}_{2k}^{\pm}\delta_m^{\mp} - E_m\tilde{\beta}_{2k}^{\pm}C_{2m}^{\mp} - E_k\alpha_{2k}^{\mp}\gamma_m)$$

$$E_m N_{2k}^{\pm}(\xi) = (-1)^m(E_m\tilde{\beta}_{2k}^{\pm}\delta_m^{\pm} + E_m\alpha_{2k}^{\pm}C_{2m}^{\pm} - E_k\beta_{2k}^{\pm}\gamma_m)$$

$$E_2 E_k Q_{2k}^{\pm}(\xi) = -(-1)^m [E_k^2 (\alpha_{2k}^{\pm} \delta_m \mp \beta_{2k}^{\pm} C_{2m}^{\mp}) - E_2 E_m \tilde{\alpha}_{2k}^{\pm} \tilde{\Delta}_m]$$

$$E_2 E_k P_{2k}(\xi) = \pm(-1)^m [E_k^2 (\beta_{2k}^{\pm} \delta_m - \alpha_{2k}^{\pm} C_{2m}) - E_2 E_m \tilde{\beta}_{2k} \tilde{\Delta}_m]$$

$$S_{1k}^{\pm}(\xi, \theta_{1k}) = 2(\sin^2 \xi\theta_{1k} \mp \xi \sin^2 \theta_{1k})$$

$$\tilde{\alpha}_{nk}^{\pm}(\xi, \theta_{nk}) = (1+\nu_k)\alpha_{nk}^{\pm} + 4\cos(\xi+1)\theta_{nk}$$

$$\tilde{\beta}_{nk}^{\pm}(\xi, \theta_{nk}) = (1+\nu_k)\beta_{nk}^{\pm} - 4\sin(\xi+1)\theta_{nk}$$

$$\alpha_{nk}^{\pm}(\xi, \theta_{nk}) = (1\mp\xi)[\cos(\xi-1)\theta_{nk} - \cos(\xi+1)\theta_{nk}]$$

$$\beta_{nk}^{\pm}(\xi, \theta_{nk}) = (1\pm\xi)\sin(\xi+1)\theta_{nk} + (1\mp\xi)\sin(\xi-1)\theta_{nk}$$

$$C_{nk}^{\pm}(\xi, \theta_{nk}) = (-1)^n (\sin 2\xi\theta_{nk} \pm \xi \sin 2\theta_{nk})$$

$$4\tilde{\Delta}_k(\xi, \theta_{2k}) = \Delta_1(\xi, \theta_{2k})$$

$$\gamma_k(\xi, \theta_{2k}) = (1+\nu_k)^2 \tilde{\Delta}_k - 4(1+\nu_k)\sin^2 \xi\theta_{2k} + 4$$

$$\delta_k^{\pm}(\xi, \theta_{2k}) = (1+\nu_k)\tilde{\Delta}_k - 2(\sin^2 \xi\theta_{2k} \pm \xi \sin^2 \theta_{2k})$$

$$\delta = (1+\nu_1)/E_1 - (1+\nu_2)/E_2, \quad \delta_k = 4/\delta E_k, \quad (k+m=3;\ k,\ n=1,\ 2) \tag{2.3}$$

$$\Delta_1^{(k)}(\xi, \theta_{1k}) = 4(\sin^2 \xi\theta_{1k} - \xi^2 \sin^2 \theta_{1k})$$

$$\Delta_2(\xi, \theta_{2k}) = 4\{[E_2(1+\nu_1) - E_1(1+\nu_2)][\delta\tilde{\Delta}_1\tilde{\Delta}_2 +$$
$$+ 4(\tilde{\Delta}_1 \sin^2 \xi\theta_{22}/E_1 - \tilde{\Delta}_2 \sin^2 \xi\theta_{21}/E_2)] + 4(E_1\tilde{\Delta}_1/E_2 + E_2\tilde{\Delta}_2/E_1) -$$
$$- 8(\cos 2\pi\xi \sin \xi\theta_{21} \sin \xi\theta_{22} - \xi^2 \sin^2 \theta_{21})\}, \quad (k=1,\ 2) \tag{2.4}$$

$$\bar{f}_k(\xi) = a^{-\xi}\int_0^\infty f_k(r_1) r_1^{\xi} dr_1, \qquad \bar{g}_k(\xi) = a^{-\xi}\int_0^\infty g_k(r_1) r_1^{\xi} dr_1$$

$$F_{1k}(\xi) = a^{-\xi}\int_0^\infty f_{1k}(r_1) r_1^{\xi} dr_1, \quad G_{1k}(\xi) = a^{-\xi}\int_0^\infty g_{1k}(r_1) r_1^{\xi} dr_1 \tag{2.5}$$

Неизвестные функции $X_{nk}(s)$, $Y_{nk}(s)$, входящие в (2.1) и (2.2), будем определять из следующей системы сингулярных интегральных уравнений:

$$X_{nk}(s) = \int_{L_p} [X_{pk}(\xi) K_{pk}^{(1)} + X_{pm}(\xi) K_{pk}^{(2)} + Y_{pk}(\xi) K_{pk}^{(3)} + Y_{pm}(\xi) K_{pk}^{(4)}] d\xi =$$
$$= F_{nk}(s)$$

$$Y_{nk}(s) - \int_{L_p} [X_{pk}(\xi) K^{(5)}_{pk} + X_{pm}(\xi) K^{(6)}_{pk} + Y_{pk}(\xi) K^{(7)}_{pk} + Y_{pm}(\xi) K^{(8)}_{pk}]\, d\xi =$$

$$= G_{nk}(s) \tag{2.6}$$

$$(n,\ k = 1,\ 2;\ n + p = 3;\ k + m = 3)$$

Здесь ядра уравнений имеют вид

$$K^{(q)}_{pk}(s,\ \xi) = \frac{B(s+1,\ \xi - s)}{2\pi i \Delta_n(\xi,\ \theta_{pk})} k^{(q)}_{pk}(s,\ \xi), \quad (q = 1 \div 8)$$

$B(s,\ \xi)$ — эйлеров интеграл первого рода,

$$\beta_{nk} = \pi - |\theta_{nk}|, \quad \varepsilon_{nk} = (-1)^{n+k+1}\beta_{nk} = \theta_{nk} - (-1)^{n+k}\pi$$

а функции $k^{(q)}_{pk}(s,\ \xi)$ определяются формулами

$$k^{(1)}_{2k} = \alpha^{+}_{1k} M^{-}_{2k} - \beta^{-}_{1k} N^{+}_{2k}, \quad k^{(2)}_{2k} = \alpha^{+}_{1k} Q_{2k} - \beta^{-}_{1k} P^{+}_{2k}$$

$$k^{(3)}_{2k} = \alpha^{+}_{1k} N^{-}_{2k} - \beta^{-}_{1k} M^{+}_{2k}, \quad k^{(4)}_{2k} = \alpha^{+}_{1k} P^{-}_{2k} - \beta^{-}_{1k} Q_{2k}$$

$$k^{(i)}_{11} = (-1)^{i+1}[\alpha^{+}_{21} Z^{-}_{i}(\xi,\ 1) - \beta^{-}_{21} H^{-}_{i}(\xi,\ 1)]$$

$$k^{(i+2)}_{11} = (-1)^{i+1}[\alpha^{-}_{21} H^{-}_{i}(\xi,\ 1) - \beta^{-}_{21} Z^{+}_{i}(\xi,\ 1)]$$

$$k^{(j+4)}_{2k} = \frac{1}{s-1}\frac{\partial}{\partial \varphi_1} k^{(j)}_{2k}, \qquad k^{(j+4)}_{11} = \frac{1}{s-1}\frac{\partial}{\partial \varphi_1} k^{(j)}_{11}$$

$$k^{(i)}_{12} = (-1)^{i+1}[\alpha^{+}_{21} Z^{-}_{i}(\xi,\ E_2(1+\nu_i)/E_i) - \beta^{-}_{21} H^{+}_{i}(\xi,\ E_2(1+\nu_i)/E_i) +$$

$$+ 4Z^{-}_{i}(\xi,\ E_2/E_i)\cos(s+1)\varepsilon_{21} + 4H^{+}_{i}(\xi,\ E_2/E_i)\sin(s+1)\varepsilon_{21}] \tag{2.7}$$

$$k^{(i+2)}_{12} = (-1)^{i+1}[\alpha^{-}_{21} H^{-}_{i}(\xi,\ E_2(1+\nu_i)/E_i) + \beta^{-}_{21} Z^{+}_{i}(\xi,\ E_2(1+\nu_i)/E_i) +$$

$$+ 4H^{-}_{i}(\xi,\ E_2/E_i)\cos(s+1)\varepsilon_{21} - 4Z^{+}_{i}(\xi,\ E_2/E_i)\sin(s+1)\varepsilon_{21}]$$

$$k^{(i+4)}_{12} = (-1)^{i+1}[\beta^{+}_{21} Z^{-}_{i}(\xi,\ E_2(1+\nu_i)/E_i) + \alpha^{-}_{21} H^{+}_{i}(\xi,\ E_2(1+\nu_i)/E_i) -$$

$$- 4Z^{-}_{i}(\xi,\ E_2/E_i)\sin(s+1)\varepsilon_{21} + 4H^{+}_{i}(\xi,\ E_2/E_i)\cos(s+1)\varepsilon_{21}]$$

$$k^{(i+6)}_{12} = (-1)^{i+1}[\beta^{-}_{21} H^{-}_{i}(\xi,\ E_2(1+\nu_i)/E_i) - \alpha^{-}_{21} Z^{+}_{i}(\xi,\ E_2(1+\nu_i)/E_i) -$$

$$- 4H^{-}_{i}(\xi,\ E_2/E_i)\sin(s+1)\varepsilon_{21} - 4Z^{+}_{i}(\xi,\ E_2/E_i)\cos(s+1)\varepsilon_{21}]$$

$$Z^{\pm}_{k}(\xi,\ U) = U\alpha^{\pm}_{1k}(\xi,\ \theta_{1k}), \ H^{\pm}_{k}(\xi,\ U) = U\beta^{\pm}_{1k}(\xi,\ \theta_{1k}), \ (j = 1 \div 4;\ i,\ k = 1,\ 2)$$

где U — скалярная величина.

Свободные члены системы (2.6) выражаются через внешние нагрузки следующим образом:

$$F_{2k}(s) = -\int_{L_1} [F_{2k}^{(1)}\overline{f}_1(\xi) + F_{2k}^{(2)}\overline{f}_2(\xi) + F_{2k}^{(3)}\overline{g}_1(\xi) + F_{2k}^{(4)}\overline{g}_2(\xi)]\, d\xi$$

$$G_{2k}(s) = -\int_{L_1} [F_{2k}^{(5)}\overline{f}_1(\xi) + F_{2k}^{(6)}\overline{f}_2(\xi) + F_{2k}^{(7)}\overline{g}_1(\xi) + F_{2k}^{(8)}\overline{g}_2(\xi)]\, d\xi \qquad (2.8)$$

$$(k = 1, 2)$$

а F_{1k} и G_{1k} выражаются по формулам (2.5).

Здесь

$$F_{2k}^{(q)}(s, \xi) = \frac{B(s+1, \xi - s)}{2\pi i \Delta_1^{(k)}(1, \theta_{1k})} f_{2k}^{(q)}(s, \xi), \quad (q = 1 \div 8)$$

где

$$f_{21}^{(j)} = (-1)^{j-1}[\cos(s-1)\varepsilon_{21} - \alpha_{21}^{-}\overline{H}_i^{-}(\xi, 1) + \beta_{21}^{-}\overline{Z}_i^{+}(\xi, 1)]$$

$$f_{21}^{(j+2)} = (-1)^{j-1}[\sin(s-1)\varepsilon_{21} - \alpha_{21}^{-}\overline{Z}_i^{-}(\xi, 1) - \beta_{21}^{-}\overline{H}_i^{+}(\xi, 1)]$$

$$f_{21}^{(j+4)} = \frac{1}{s-1}\frac{\partial}{\partial\varphi_0} f_{21}^{(j)}, \quad (j = 1 \div 4)$$

$$f_{22}^{(j)} = (-1)^j[-E_2(1+\nu_j)/E_i\cos(s-1)\varepsilon_{21} + \alpha_{21}^{-}\overline{H}_i^{-}(\xi, E_2(1+\nu_j)/E_i) -$$

$$-\beta_{21}^{-}\overline{Z}_i^{+}(\xi, E_2(1+\nu_j)/E_i) + 4\overline{H}_i^{-}(\xi, E_2/E_i)\cos(s+1)\varepsilon_{21} +$$

$$+ 4\overline{Z}_i^{+}(\xi, E_2/E_i)\sin(s+1)\varepsilon_{21}]$$

$$f_{22}^{(j+2)} = (-1)^j[-E_2(1+\nu_j)/E_i\sin(s-1)\varepsilon_{21} + \alpha_{21}^{+}\overline{Z}_i^{-}(\xi, E_2(1+\nu_j)/E_i) +$$

$$+\beta_{21}\overline{H}_i^{-}(\xi, E_2(1+\nu_j)/E_i) + 4\overline{Z}_i^{-}(\xi, E_2/E_i)\cos(s+1)\varepsilon_{21} -$$

$$- 4\overline{H}_i^{-}(\xi, E_2/E_i)\sin(s+1)\varepsilon_{21}]$$

$$f_{22}^{(j+4)} = (-1)^{j+1}[E_2(1+\nu_j)/E_i\sin(s-1)\varepsilon_{21} - \beta_{21}^{-}\overline{H}_i^{-}(\xi, E_2(1+\nu_j)/E_i) -$$

$$-\alpha_{21}^{-}\overline{Z}_i^{-}(\xi, E_2(1+\nu_j)/E_i) + 4\overline{H}_i^{-}(\xi, E_2/E_i)\sin(s+1)\varepsilon_{21} +$$

$$+ 4\overline{Z}_i^{-}(\xi, E_2/E_i)\cos(s+1)\varepsilon_{21}]$$

$$f_{22}^{(j+6)} = (-1)^{j-1}[-E_2(1+\nu_j)/E_i\cos(s-1)\varepsilon_{21} -$$

$$-\beta_{21}^{-}\overline{Z}_i^{-}(\xi, E_2(1+\nu_j)/E_i) + \alpha_{21}^{+}\overline{H}_i^{-}(\xi, E_2(1+\nu_j)/E_i) +$$

$$+ 4\overline{H}_i^{+}(\xi, E_2/E_i)\cos(s+1)\varepsilon_{21} + 4\overline{Z}_i^{-}(\xi, E_2/E_i)\sin(s+1)\varepsilon_{21}]$$

$$\overline{Z}_k^{\pm}(\xi, U) = U S_{1k}^{\pm}(\xi, \theta_{1k}), \quad \overline{H}_k^{\pm}(\xi, U) = U C_{1k}^{\pm}(\xi, \theta_{1k}) \qquad (2.9)$$

$(i = 1, 2;\ j = 1 \div 4,\ U$ — скалярная величина).

В (2.7) и (2.9) α_{nk}, β_{nk} зависят от s и ξ_{nk}, а остальные функции — от ξ и θ_{nk}.

После решения уравнений (2.6) нормальное напряжение σ_r на отрезке O_1O_2 ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $r_1 + r_2 = a$) и напряжения σ_{rr}, σ_θ и $\tau_{r\theta}$ на луче O_2C в силу (1.8), (1.11) и (2.1) будут определяться соответственно по формулам

$$a\sigma_r^{(k)} = -f_k(r_1) - \frac{2}{\pi i}\int_{L_1}\left(\frac{a}{r_1}\right)^{\xi-1}[X_{1k}\alpha_{1k} - Y_{1k}\beta_{1k} - \bar{f}_k S_{1k} - \bar{g}_k C_k][\Delta_1^{(k)}]^{-1}d\xi -$$

$$-\frac{2}{\pi i}\int_{L_1}\left(\frac{a}{r_2}\right)^{\xi-1}[X_{21}M_{2k} + Y_{21}N_{2k} + X_{22}Q_{2k} + Y_{22}P_{2k}]\Delta_2^{-1}d\xi$$

$$a\sigma_r = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\left(\frac{a}{r_1}\right)^{\xi-1}[X_{11}(A\alpha_{11} - B\beta_{11}) - Y_{11}(A\beta_{11} + B\alpha_{11}) -$$

$$-\bar{f}_1(AS_{11} + BC_{11} - \Delta_1^{(1)}A^{-}) - \bar{g}_1(AC_{11} - BS_{11} - \Delta_1^{(1)}B^{-})][\Delta_1^{(1)}]^{-1}d\xi +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}[X_{21}(\alpha_{21}M_{21} - \beta_{21}N_{21}) + Y_{21}(\alpha_{21}N_{21} - \beta_{21}M_{21}) +$$

$$+X_{22}(\alpha_{21}Q_{21} - \beta_{21}P_{21}) + Y_{22}(\alpha_{21}P_{21} - \beta_{21}Q_{21})]\Delta_2^{-1}d\xi$$

$$(k = 1, 2) \tag{2.10}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A^{\pm}(\xi, \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2) = (\xi \pm 1)\cos[(\xi \pm 1)\bar{\varphi}_1 - 2(\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1)] - (1 \pm 1)\cos(\xi \pm 1)\bar{\varphi}_1$$

$$B^{\pm}(\xi, \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2) = (\xi \pm 1)\sin[(\xi \pm 1)\bar{\varphi}_1 - 2(\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1)] - (1 \pm 1)\sin(\xi \pm 1)\bar{\varphi}_1$$

$$A(\xi) = A^{+} - A^{-}, \quad B(\xi) = [(\xi - 1)B^{+} - (\xi + 1)B^{-}]/(\xi - 1)$$

$$r_p\sin\bar{\varphi}_p + r_n\sin\bar{\varphi}_n = 0, \quad \bar{\varphi}_p = \operatorname{arctg}\left(\frac{r_n\sin\bar{\varphi}_n}{r_n\cos\bar{\varphi}_n - 1}\right), \quad (n + p = 3) \tag{2.11}$$

Функции α_{21} и β_{21} зависят от координат точки, где вычисляются напряжения, а остальные функции — от геометрических параметров материалов. Аналогичным образом можно получить формулы для остальных напряжений.

Интегралы, входящие в (2.10), легко вычисляются по теории вычетов. Например, если на границе тела вдали от вершины O_1 действуют сосредоточенные силы или моменты, то, как следует из (2.6) и (2.10), нормальное напряжение σ_r на отрезке O_1O_2 и напряжения на луче O_2C будут выражаться в виде суммы четырех степенных рядов типа

$$a\sum_{n=1}^{2}\sum_{(\mathrm{Re}\,\xi_{nk} < 0)}\left[d_n^{(k)}\left(\frac{a}{r_n}\right)^{\xi_{nk}+1} + C_n^{(k)}\left(\frac{a}{r_n}\right)^{-k+1}\right], \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.12}$$

где ξ_{nk} — корни целых функций $\Delta_1^{(k)}$ и Δ_2 и $a/r_1 > 1$, $a/r_2 > 1$. Если $a/r_1 < 1$ и $a/r_2 < 1$, то в выражении (2.12) для контактных напряжений будет отсутствовать второе слагаемое, а первая сумма будет справедлива при $\operatorname{Re} \xi_{nk} > 0$.

Коэффициенты $C_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$, $d_n^{(1)}$ и $d_n^{(2)}$ определяются из соотношения (2.10).

Если из системы (2.6) исключить неизвестные X_{pk}, X_{pm}, Y_{pk}, Y_{pm}, то в результате для определения функций X_{nk}, X_{nm}, Y_{nk}, Y_{nm} получим две независимые системы регулярных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Такие системы интегральных уравнений были получены в работах [2—4]. Здесь эти уравнения выводятся аналогичным способом, поэтому в работе они не приводятся.

Систему (2.6) можно привести также к решению бесконечных систем алгебраических уравнений. Действительно, если представить неизвестные функции в виде

$$X_{nk}(\xi) = \Gamma(1+\xi) \sum_{q=0}^{\infty} X_{nk}^{(q)} \overline{H}_q(\xi), \quad Y_{nk}(\xi) = \Gamma(1+\xi) \sum_{q=0}^{\infty} Y_{nk}^{(q)} \overline{H}_q(\xi) \tag{2.13}$$

$$(n,\ k = 1,\ 2)$$

то для определения коэффициентов разложения (2.13) получим

$$\begin{aligned} X_{nk}^{(l)} + \sum_{q=0}^{\infty} \left[A_{pk,1}^{(q,l)} X_{p1}^{(q)} + A_{pk,2}^{(q,l)} X_{p2}^{(q)} + A_{pk,3}^{(q,l)} Y_{p1}^{(q)} + A_{pk,4}^{(q,l)} Y_{p2}^{(q)}\right] = F_{nk,l} \\ Y_{nk}^{(l)} = \sum_{q=0}^{\infty} \left[A_{pk,5}^{(q,l)} X_{p1}^{(q)} + A_{pk,6}^{(q,l)} X_{p2}^{(q)} + A_{pk,7}^{(q,l)} Y_{p1}^{(q)} + A_{pk,8}^{(q,l)} Y_{p2}^{(q)}\right] = G_{nk,l} \end{aligned} \tag{2.14}$$

где $\Gamma(\xi)$ — гамма-функция, $\overline{H}_q(\xi)$ — многочлены Эрмита,

$$A_{pk,i}^{(q,l)} = (-1)^{l-1} \int\limits_{L_n} \int\limits_{L_p} \frac{k_{pk}^{(i)}(s,\xi)}{2\pi\Delta_p(\xi,s)} \overline{H}_l(s) \overline{H}_q(\xi) \Gamma(\xi - s) \exp((s-c)^2)\, ds\, d\xi$$

$$F_{nk,l} = (-1)^{l-1} i \int\limits_{L_n} F_{nk}(s) \overline{H}_l(s) \exp((s-c)^2) \Gamma^{-1}(s+1)\, ds$$

$$G_{nk,l} = (-1)^{l-1} i \int\limits_{L_n} G_{nk}(s) \overline{H}_l(s) \exp((s-c)^2) \Gamma^{-1}(s+1)\, ds$$

$$(l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ n,\ k = 1,\ 2;\ n+p = k+m = 3)$$

Отметим, что бесконечные системы (2.14) могут быть и нерегулярными. Однако, как это было указано для системы (2.6), здесь также путем исключения неизвестных коэффициентов $X_{pk}^{(q)}$, $X_{pm}^{(q)}$, $Y_{pk}^{(q)}$, $Y_{pm}^{(q)}$ для определения остальных неизвестных $X_{nk}^{(q)}$, $X_{nm}^{(q)}$, $Y_{nk}^{(q)}$, $Y_{nm}^{(q)}$ получаются две независимые регулярные системы алгебраических уравнений. Ввиду громоздкости они здесь не приводятся. Приведенные в конце работы численные результаты были получены на основе упомянутых регулярных систем.

Аналогичным способом рассмотрена также плоская задача для составного клина (фиг. 1), когда материалы сцеплены как по лучу O_1C, так и по отрезку O_1O_2. Задача сводится к решению систем интегральных уравнений (2.6) с другими ядрами, вид которых здесь не приводится.

3. В качестве численного примера рассмотрим первую задачу при

$$\theta_{11}=-\theta_{12}=-\theta_{21}=\pi/2,\ \theta_{22}=5\pi/2,\ E_1/E_2=2,\ \nu_1=0{,}3,\ \nu_2=0{,}25,\ O_1O_2=1$$

Составная полуплоскость деформируется под действием или сосредоточенной силы $P=-1$, приложенной на границе полуплоскости на расстоянии «a» от берегов трещины, или двух противоположных сил $Q=-1$, приложенных на берегах трещины на расстоянии «b» от границы полуплоскости. Для каждого случая при различных отношениях c/a (b/a) вычислены значения коэффициентов напряжений, входящих в ряды типа (2.12). В табл. 1 приведены значения отличных от 0 и -1 корней ξ_{nk} $(n,k=1,2)$ целых функций $\Delta_1^{(1)}$ и Δ_2.

На основе вычислений видим, что при малых значениях r_2

$$\sigma_\theta(O_2C)=1/r_2\,\mathrm{Re}[(-0{,}00217+0{,}000262\,i)\,r_2^{-\lambda}]+\ldots$$

$$\tau_{r\theta}(O_2C)=1/r_2\,\mathrm{Re}[(0{,}00277-0{,}000115\,i)\,r_2^{-\lambda}]+\ldots$$

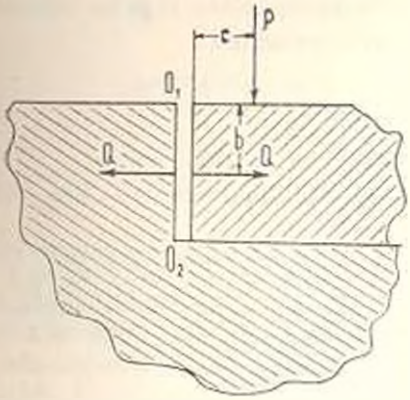
$$\sigma_r^{(1)}(O_2C)=1/r_2\,\mathrm{Re}[(-0{,}00587+0{,}000702\,i)\,r_2^{-\lambda}]+\ldots$$

$$\sigma_r^{(2)}(O_2C)=1/r_2\,\mathrm{Re}[(-0{,}00609-0{,}0000472\,i)\,r_2^{-\lambda}]+\ldots$$

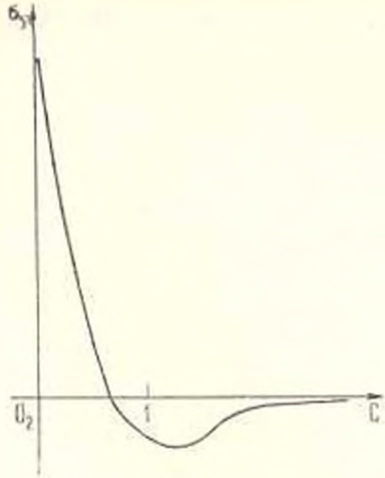
Таблица 1

	Δ_1	Δ_2
1	$-2{,}7396+1{,}1180\,i$	$-0{,}4623+0{,}0819\,i$
2	$-4{,}8083+1{,}4639\,i$	$-1{,}9881+0{,}0838\,i$
3	$-6{,}8452+1{,}6619\,i$	$-2{,}6432+0{,}1990\,i$
4	$-8{,}8690+1{,}8424\,i$	$-3{,}3220+0{,}1995\,i$
5	$-10{,}8858+1{,}9702\,i$	$-4{,}6512+0{,}2815\,i$
6	$-12{,}8983+2{,}0766\,i$	$-5{,}3213+0{,}3117\,i$
7	$-14{,}9083+2{,}1673\,i$	$-6{,}6542+0{,}3617\,i$
8	$-16{,}9161+2{,}2568\,i$	$-7{,}3224+0{,}3836\,i$

На фиг. 3 приведен график распределения контактного напряжения σ_θ на луче O_1C. Следует отметить, что контактные напряжения у краевой точки O_1 бесконечно велики и из-за слабой сходимости рядов (2.12) определяются недостаточно точно. Известно, что в непосредственной близости



Фиг. 2.



Фиг. 3.

от этой точки напряжения бесконечное число раз меняют свой знак. На это явление впервые обратил внимание В. М. Абрамов [7].

ԱՆՎԵՐՋ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՍԵՊԻ ՀԱՄԱՐ ՀԱՐԹ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Ռ. Գ. ԹԱԴԵՎՈՍՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է տարբեր նյութերից երկու հատած սեպերի համար առաձգականության տեսության հարթ կոնտակտային խնդիր, որոնք միացված են այնպես, որ կազմում են երկու անկյունային կետերով անվերջ բաղադրյալ սեպ։ Նյութերի բաժանման գիծը երկօղականի բեկյալ է։ Բեկյալի անվերջ օղակով նյութերը լրիվ ամրացված են։ Բեկյալի վերջավոր օղակի վրա տրված են լարումները կամ բավարարվում են լրիվ կոնտակտի պայմանները։ Բաղադրյալ սեպի մնացած եզրերի վրա տրված են լարումները։ Խնդիրը լուծված է Մելլինի ձևափոխության կիրառմամբ ընդհանրացված սուպերպոզիցիայի մեթոդով։ Խնդիրը բերվել է կվազիլիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի։ Դիտարկված են թվային օրինակներ։

A PLANE PROBLEM FOR AN INFINITE COMPOSED WEDGE

R. G. TADEVOSIAN

S u m m a r y

The plane contact problem of the theory of elasticity for an infinite composed wedge, constructed of two topped wedges of different materials is given here (fig. 1). On the ray O_2C the materials are completely coupled. On the segment O_1O_2 either the stresses or the conditions of complete contact are given. The stresses are given on the boundary. The problem is reduced to quasicomplete regular infinite algebraic equations. Numerical examples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С. П., Гудьер Д. Т.* Теория упругости. М.: Наука, 1979.
2. *Баблоян А. А.* Плоская контактная задача для двух усеченных клиньев. — Докл. АН АрмССР, 1977, т. 65, № 5.
3. *Баблоян А. А., Гулканян Н. О.* Плоская задача теории упругости для области, составленной из двух усеченных клиньев.— Докл. АН Арм.ССР, 1976, т. 62, № 3.
4. *Баблоян А. А., Гулканян Н. О.* Плоская задача для соединения из трех полуполос из различных материалов. — Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1981, т. 34, № 2.
5. *Нуллер Б. М.* О новых обобщениях метода кусочно-однородных решений.— Изв. ВНИИГ, 1978, т. 124.
6. *Нуллер Б. М.* Некоторые контактные задачи для упругого бесконечного клина. — ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
7. *Абрамов В. М.* Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения.— ДАН СССР, 1937, т. 17, № 4, с. 173—175.

Республиканский вычислительный центр
МСХ Армянской ССР

Поступила в редакцию
19. XI. 1982

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 6, 1983 Механика

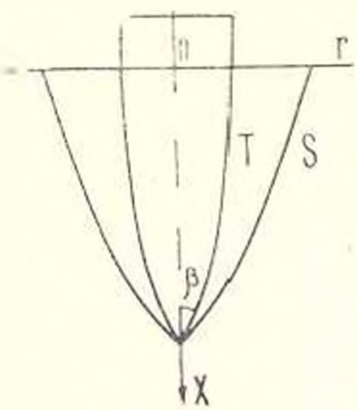
ПРОНИКАНИЕ ТОНКОГО ТЕЛА В УПРУГИЕ АНИЗОТРОПНЫЕ СРЕДЫ

БАГДОЕВ А. Г., ВАНЦЯН А. А.

Рассматривается задача проникания тонкого твердого тела вращения в первоначально упругие анизотропные среды. Проникание тел в грунты рассмотрено в [1]. Проникание в пластическую среду для малых скоростей рассматривалось в [2]. Проникание тонких тел в жидкость исследовано в [3—5]. В [6] проводится исследование обтекания тонкого тела пластической средой. В [7] рассматривалось проникание тонкого твердого тела в композиционные материалы. Решение чисто упругой задачи приведено в [8, 9]. Проникание в упругую среду с образованием пластической области исследовано в [10—12]. Пробивание пластинки рассмотрено в [13].

Метод, развитый в настоящей статье, состоит в изучении фронта разрушения S, который исходит из вершины тела, упругой области вне S и области разрушения позади S (фиг. 1). Предполагается, что разрушение позади S происходит вдоль площадок скольжения, и следует пользоваться уравнениями идеально-пластического течения.

Рассматриваются случаи, когда среда является ортотропной или трансверсально изотропной. Для тонких тел вращения задачу можно считать квазистатической [12], осесимметричной и одномерной, то есть можно считать, что имеет место гипотеза плоских сечений [10, 11].



Фиг. 1.

Ось X направим по нормали к свободной поверхности среды, занимающей нижнее полупространство, а через r обозначим радиальную координату. Уравнение поверхности проникающего тела берется в виде $r = r_k(x, t)$, где r_k мало, t есть время с начала проникания, причем при $t = 0$ $r_k = 0$. Уравнение поверхности разрушения берется в виде $r = r_k \xi_0$, где $\xi_0 > 1$ [10], но $\xi_0 r_k$ мало, тогда можно для решения вблизи S пользоваться формулами, соответствующими переходу к большим значениям r/r_k, что соответствует линейной асимптотике.

В области течения, то есть при $r < r_k \xi_0$, тензор скоростей деформаций и тензор напряжений связаны зависимостями [14]

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= a\,[F(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}) + G(\sigma_{rr}-\sigma_{xx})] \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= a\,[F(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{rr}) + H(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{xx})] \\
\varepsilon_{xx} &= a\,[G(\sigma_{xx}-\sigma_{rr}) + H(\sigma_{xx}-\sigma_{\theta\theta})]
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Условие текучести Мизеса запишется в виде

$$
F(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})^2 + G(\sigma_{rr}-\sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{xx})^2 = 1 \tag{1.2}
$$

В (1.1) и (1.2) F, G, H даются формулами

$$
\begin{gathered}
2F = \frac{1}{\tau^2_{\theta\theta}} + \frac{1}{\tau^2_{rr}} - \frac{1}{\tau^2_{xx}}, \quad 2G = \frac{1}{\tau^2_{xx}} + \frac{1}{\tau^2_{rr}} - \frac{1}{\tau^2_{\theta\theta}} \\
2H = \frac{1}{\tau^2_{xx}} + \frac{1}{\tau^2_{\theta\theta}} - \frac{1}{\tau^2_{rr}}
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

где τ_{xx}, τ_{rr}, $\tau_{\theta\theta}$ — пределы текучести в соответствующих направлениях, величина a в формулах (1.1) подлежит определению.

С учетом тонкости проникающего тела можно записать $|\varepsilon_{xx}| \ll |\varepsilon_{rr}|$, $|\varepsilon_{xr}| \ll |\varepsilon_{rr}|$. Уравнение несжимаемости в основном порядке запишется в виде

$$
\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0
$$

где v_r есть скорость частиц.

Решение этого уравнения в области $r \leqslant r_k \xi_0$ согласно граничному условию $r = r_k$, $v_r = \partial r_k / \partial t$ имеет вид [7, 12]

$$
v_r = \frac{r_k}{r} \frac{\partial r_k}{\partial t}
$$

В упругой области, то есть для $r > r_k \xi_0$, связь между компонентами напряжений и деформаций можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= a_{11}\varepsilon_{rr} + a_{12}\varepsilon_{\theta\theta}, & \sigma_{\theta r} &= a_{44}\varepsilon_{\theta r} \\
\sigma_{\theta\theta} &= a_{12}\varepsilon_{rr} + a_{22}\varepsilon_{\theta\theta}, & \sigma_{xr} &= a_{55}\varepsilon_{xr} \\
\sigma_{xx} &= a_{13}\varepsilon_{rr} + a_{23}\varepsilon_{\theta\theta}, & \sigma_{\theta x} &= a_{66}\varepsilon_{\theta x}
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

где в цилиндрических координатах

$$
\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \tag{1.5}
$$

a_{ij} — упругие постоянные.

Из-за тонкости проникающего тела уравнение равновесия примет вид

$$
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \tag{1.6}
$$

Условие на поверхности раздела упругой и идеально-пластической областей без учета диссипации энергии на S можно записать в форме сохранения массы, импульса и энергии, причем в силу малости радиальных скоростей второе условие заменяется условием равенства напряжений на площадке с нормалью n к поверхности S, направление которой в силу тонкости S можно заменить на ось r и получить

$$u_{r_1} = u_{r_2}, \quad \sigma_{r_1} = \sigma_{r_2}, \quad v_{r_1} = v_{r_2}$$

где индекс 1 показывает величины впереди фронта, а индекс 2 — позади фронта.

С учетом диссипации энергии на фронте $r = r_k \xi_0$ можно вместо условия непрерывности скоростей на фронте выбрать уравнение ударной адиабаты [16]:

$$e_1 - e_2 = -(v_{r_1} - v_{r_2}) \frac{\sigma_{rr_1} - \sigma_{rr_2}}{2\xi_0 \rho_1 \dfrac{dr_k}{dt}} \tag{1.7}$$

где ρ_1 — плотность среды впереди S, $e_{1,2}$ — внутренняя энергия впереди и позади фронта [15]:

$$e_1 = e_0(T_1) + 2\mu \frac{f^2(x, t)}{r_k^2 \xi_0^4}, \quad e_2 = e_0(T_2) + \varepsilon_* + \frac{\sigma_s^2}{2\mu} \tag{1.8}$$

$T_{1,2}$ — температура, ε_* — энергия разрушения, c_v — теплоемкость, а последние слагаемые соответствуют внутренней энергии упругой области и внутренней энергии пластической области в начале ее образования или ее значению на поверхности разрушения S соответственно. $f(x, t)$ определяется из условий на поверхности S.

В силу малости ε_{rr} из (1.1) можно получить

$$\sigma_{xx} - \sigma_{\theta\theta} = -\frac{G}{H}(\sigma_{xx} - \sigma_{rr})$$

а из второго уравнения (1.1) следует

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \alpha[F(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) + G(\sigma_{xx} - \sigma_{rr})]$$

Вводя девиаторы напряжения, из (1.1) можно получить

$$\sigma'_{xx} + \sigma'_{rr} + \sigma'_{\theta\theta} = 0$$

$$\sigma'_{xx} = \sigma'_{\theta\theta} + \frac{G}{H}(\sigma'_{rr} - \sigma'_{xx}) \tag{1.9}$$

$$\frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{\alpha} = F(\sigma'_{\theta\theta} - \sigma'_{rr}) - G(\sigma'_{xx} - \sigma'_{rr})$$

Вводя обозначения

$$\sigma'_{rr} = \frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{\alpha} \sigma_{rr}, \quad \sigma'_{\theta\theta} = \frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{\alpha} \sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma'_{xx} = \frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{\alpha} \sigma_{xx} \tag{1.10}$$

условие текучести Мизеса можно записать в следующем виде:

$$F(\bar{\sigma}_{rr}-\bar{\sigma}_{\theta\theta})^2+G(\bar{\sigma}_{zz}-\bar{\sigma}_{rr})^2+H(\bar{\sigma}_{\theta\theta}-\bar{\sigma}_{zz})^2=\frac{a}{\varepsilon^2_{\theta\theta}} \tag{1.11}$$

Из (1.9) и (1.10) получим

$$\bar{\sigma}_{zz}=\frac{H-G}{\alpha},\quad \bar{\sigma}_{rr}=\frac{2H+G}{-\alpha},\quad \bar{\sigma}_{\theta\theta}=\frac{2G+H}{\alpha} \tag{1.12}$$

где

$$\alpha=3(GF+GH+FH)$$

Из (1.11) и (1.12) для определения a найдем

$$\frac{\varepsilon^2_{\theta\theta}}{a^2}=\frac{\alpha}{3(G+H)} \tag{1.13}$$

Подставляя значения σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ из (1.4) в уравнение равновесия (1.6), с учетом (1.5) в упругой области получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{a_{22}}{a_{11}}\frac{u_r}{r^2}=0 \tag{1.14}$$

решение которого ищем в виде

$$u_r=Ar^n \tag{1.15}$$

Из (1.14) и (1.15) для определения показателя n получим

$$n=-\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}$$

Выбор знака определен условием равенства решения нулю при $r=\infty$. Подставляя (1.15) в (1.5), а затем в (1.4), получим

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}&=a_{11}nAr^{n-1}+a_{12}Ar^{n-1}\\ \sigma_{\theta\theta}&=a_{12}nAr^{n-1}+a_{22}Ar^{n-1}\\ \sigma_{zz}&=a_{13}nAr^{n-1}+a_{23}Ar^{n-1}\end{aligned} \tag{1.16}$$

Отсюда для σ_{rr} на фронте $r=r_k\xi_0$ можно получить

$$\sigma_{rr}=(a_{11}n+a_{12})Ar_k^{n-1}\xi_0^{n-1} \tag{1.17}$$

Для пластической области с учетом (1.6) и (1.10) имеем

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{a}\frac{(\bar{\sigma}_{rr}-\bar{\sigma}_{\theta\theta})}{r}=0$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\sigma_{rr}=-\frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{a}(\bar{\sigma}_{rr}-\bar{\sigma}_{\theta\theta})\ln\frac{r}{r_k\xi_0}+\bar{\sigma}_{rr} \tag{1.18}$$

где $\bar{\sigma}_{rr}$ — значение напряжения на фронте $r=r_k\xi_0$.

Подставляя упругое решение (1.16) в условие текучести Мизеса (1.2), с учетом непрерывности радиальных напряжений при $r = r_k\xi_0$ получим

$$F(a_{11}n - a_{12}n + a_{12} - a_{22})^2 + G(a_{11}n - a_{13}n + a_{12} - a_{23})^2 +$$

$$+ H(a_{12}n - a_{13}n + a_{22} - a_{23})^2 = \frac{1}{A^2 r_k^{2(n-1)}\xi_0^{2(n-1)}} = B \qquad (1.19)$$

Из (1.17), (1.18), (1.19) при $r = r_k$ для σ_{rr} получим

$$\sigma_{rr} = \frac{\tau_{\theta\theta}}{a}(\bar{\sigma}_{rr} - \bar{\sigma}_{\theta\theta})\ln\xi_0 + (a_{11}n + a_{12})B^{-1/2} \qquad (1.20)$$

Из условия непрерывности скоростей на фронте $r = r_k\xi_0$ определяем значение A

$$A = \frac{1}{\xi_0^{n+1}}\frac{r_k^{1-n}}{1-n}$$

Для определения ξ_0 имеем из (1.19)

$$\xi_0^4 = \frac{B}{(1-n)^2}$$

Рассмотрим случай, когда учитывается диссипация энергии на фронте $r = r_k\xi_0$. Для скоростей из упругой и пластической областей при $r = r_k\xi_0$ имеем соответственно

$$v_{r_1} = \frac{\partial A}{\partial t} r_k^n \xi_0^n, \qquad v_{r_2} = \frac{1}{\xi_0}\frac{\partial r_k}{\partial t} \qquad (1.21)$$

Вводя в (1.7) обозначение $e_1 - e_2 = \varepsilon_s + c_v\Delta T$, где ΔT — скачок температур на фронте, и используя (1.21), можно получить уравнение

$$\varepsilon_s + c_v\Delta T = -\left(\frac{1}{\xi_0}\frac{\partial r_k}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial t} r_k^n \xi_0^n\right)\frac{(a_{11}n + a_{12})A r_k^{n-1}\xi_0^{n-1}}{\xi_0\rho_1\frac{\partial r_k}{\partial t}} \qquad (1.22)$$

решение которого ищем в виде

$$A = C r_k^{1-n}\xi_0^{-(1+n)} \qquad (1.23)$$

С использованием (1.19) и (1.23) получим

$$C = \frac{1}{1-n} + \frac{(\varepsilon_s + c_v\Delta T)\xi_0^2\rho_1 B^{1/2}}{(a_{11}n + a_{12})(1-n)} \qquad (1.24)$$

$$\frac{1}{\xi_0^2} = (1-n)B^{-1/2} - \frac{(\varepsilon_s + c_v\Delta T)\rho_1 B^{1/2}}{a_{11}n + a_{12}} \qquad (1.25)$$

Для изотропной среды

$$B = \frac{12\mu^2}{\sigma_s^2}, \quad n = -1, \qquad \xi_0^2 = \frac{\mu\sqrt{3}}{\sigma_s}\,\frac{1}{1 + (\varepsilon_s + c_v\Delta T)\rho_1\frac{3\mu}{\sigma_s^2}} \qquad (1.26)$$

Можно определить τ_s из эксперимента, а диссипацию энергии найти по формуле (1.26).

В дальнейшем, для простоты берем условие непрерывности скоростей на фронте, что соответствует отбрасыванию в (1.24) слагаемого, содержащего диссипацию энергии.

Подставляя в (1.20) вместо $\bar{\sigma}_{rr}$ и $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ их выражения из (1.12), для σ_{rr} при $r = r_k$ получим

$$\sigma_{rr} = -\sqrt{\frac{3(H+G)}{\alpha}}\ln \varepsilon_0 + (a_{11}n + a_{12})^{-1/2} \qquad (1.27)$$

Для трансверсально-изотропной среды с плоскостью изотропии $r\theta$ имеем

$$a_{11} = a_{22} = \lambda + 2\mu, \quad n = -1, \quad a_{12} = \lambda, \quad a_{13} = a_{23}, \quad a_{44} = \mu, \quad a_{55} = a_{66}$$

где λ, μ — коэффициенты Ламе.

Из (1.19) для B следует выражение

$$B = 4\mu^2(5F + H)$$

а для σ_{rr} из (1.27) получим

$$\sigma_{rr} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{F+H}{F^2+2FH}}\ln[\mu^2(5F+H)] - \frac{1}{\sqrt{5F+H}}$$

Согласно формулам (1.3) и с учетом того, что для трансверсально-изотропной среды $\tau_{s\theta} = \tau_{sr}$, для σ_{rr} получим выражение

$$\sigma_{rr} = -\frac{1}{2}\frac{\tau_{sr}^2}{\sqrt{4\tau_{sx}^2 - \tau_{sr}^2}}\ln\left[\mu^2\left(\frac{2}{\tau_{sx}^2} + \frac{1}{\tau_{sr}^2}\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{2/\tau_{sr}^2 + 1/\tau_{sx}^2}} \qquad (1.28)$$

Для изотропной среды $\tau_{sx} = \tau_{sr} = \tau_{s\theta}$ и из формулы (1.28) получим формулу для σ_{rr}

$$\sigma_{rr} = -\frac{\tau_s}{\sqrt{3}}\left(1 + \ln\frac{\mu\sqrt{3}}{\tau_s}\right)$$

которая совпадает с выражением для σ_{rr}, полученным в [12] для изотропной среды.

Как видно из (1.27), (1.28), наличие сильно выраженной анизотропии, выражающейся в значительном отличии τ_{sx}/τ_{sr} от единицы, существенно влияет на значение σ_{rr}.

Сила сопротивления, как и в случае изотропной среды, дается формулой

$$P = 2\pi\int_0^{f(t)} r_k\left(\frac{\partial r_k}{\partial x} - k_1\right)\sigma_{rr}\,dx$$

где k_1 — коэффициент трения между средой и телом, $f(t)$ — глубина проникания.

Для тела в форме конуса, переходящего в цилиндр, в [12] проведено вычисление интеграла для P, дается решение уравнения движения тела $mf'' = -P$, где m — масса тела, и определены формулы для максимальной глубины проникания, которые годятся для анизотропной среды, только вместо $-\tau_s(1 + \ln \mu a/\tau_s)$ следует подставить (1.27) или (1.28).

ԲԱՐԱԿ ՄԱՐՄՆԻ ՆԵՐԹԱՓԱՆՑՈՒՄԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՄԻՋԱՎԱՅՐ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Ա. Ա. ՎԱՆՑՅԱՆ

Ամփոփում

Տրվում է նախապես առաձգական անիզոտրոպ միջավայր բարակ մարմնի ներթափանցման խնդրի լուծումը։ Ներմուծված է մակերևույթ, որը բաժանում է առաձգական անիզոտրոպ միջավայրը անիզոտրոպ հոսունության միջավայրից։ Ստացված են լարման բանաձևեր։

THE PENETRATION OF A THIN BODY IN AN ELASTIC ANISOTROPIC MEDIA

A. G. BAGDOEV, A. A. VANTSIAN

Summary

The solution of the problem of penetration of a thin body in an initially elastic anisotropic medium is given. The surface which separates the elastic region from the region of anisotropic flow is introduced. The formulae for stresses on the body are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рахматулин Х. А., Сагомонян А. Я., Алексеев Н. А.* Вопросы динамики грунтов. М.: МГУ, 1964.
2. *Ишлинский А. Ю.* Осесимметричная задача пластичности и проба Бринелля.— ПММ, 1944, т. 8, вып. 3.
3. *Григорян С. С.* Некоторые вопросы газодинамики тонких тел. Кандидатская диссертация, МГУ, 1956.
4. *Сагомонян А. Я.* Проникание. М.: МГУ, 1977.
5. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды. Ереван: Изд. АН Арм.ССР, 1961.
6. *Флитман Л. М.* О пограничном слое в некоторых задачах динамики пластической среды. Препринт, № 150, М.: 1980.
7. *Багдоев А. Г., Минасян Б. Ц.* Исследование проникания тонкого твердого тела в металлы.— Изв. АН Арм.ССР, сер. техн. наук, 1979, т. 32, № 3.
8. *Багдоев А. Г.* Проникание тонкого тела вращения в упругую среду.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1977, т. 30, № 5.

9. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н., Саркисян Г. А.* Решение некоторых нестационарных задач взаимодействия тел с упругими преградами.— Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 3.

10. *Сагомонян А. Я.* Пробивание плиты тонким твердым снарядом. ВМУ, Математика, механика, 1975, № 5.

11. *Backman M. E., Goldsmith W.* The mechanics of penetration of projectiles into targets.— International Journal of Engineering Science, 1978, vol. 16, No. 11.

12. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Проникание тонких тел в упругие среды.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1981, т. 34, № 1.

13. *Wilkins M. L.* Mechanics of penetration and perforation.— International Journal of Engineering Science, 1978, vol. 16, No. 11.

14. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956.

15. *Мастеров В. А., Берковский В. С.* Теория пластической деформации и обработки металлов давлением. М.: Металлургия, 1974.

16. *Григорян С. С.* Некоторые вопросы математической теории деформации горных пород.— ПММ, 1967, т. 31, № 4.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
29. X. 1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 6, 1983 Механика

МАКСИМИЗАЦИЯ ЖЕСТКОСТИ НА КРУЧЕНИЕ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

БАНИЧУК Н. В., ЛАРИЧЕВ А. Д.

Исследуется задача оптимизации скручиваемого стержня из композитного материала. В качестве максимизируемого функционала принимается жесткость на кручение. Материал стержня предполагается армированным жесткими включениями. Используется расчетная схема деформирования материалов, базирующаяся на представлениях о микроструктурных особенностях и эффективных модулях. В этой схеме эффективные модули композита связаны с характеристиками армирующего материала и матрицы, коэффициентом концентрации включений. Между эффективным модулем сдвига G и коэффициентом концентрации ϑ имеет место линейная зависимость. В рассматриваемой ниже задаче оптимизации ϑ играет роль «управляющей» функции и разыскивается из условия максимизации функционала жесткости. Для отыскания оптимальных распределений ϑ используется итерационный алгоритм, основанный на малых вариациях управляющей функции и решения «прямых» вариационных задач. Приводятся результаты расчетов. Дается анализ найденных оптимальных решений. Оценивается выигрыш, получаемый при оптимизации.

1. Рассмотрим кручение упругого цилиндрического стержня. Стержень расположен параллельно оси z в прямоугольной системе координат xyz и закручивается относительно этой оси моментами M, приложенными к его концам. Сечение стержня плоскостью xy обозначим через D, а границу области D — через Γ. Предполагается, что стержень является неоднородным, однако, характеристики материала и, в частности, модуль сдвига G не меняются в направлении оси z, а зависят только от координат xy. Введем функцию напряжений $\varphi(x, y)$, которая связана с компонентами тензора напряжений τ_{xz}, τ_{yz} соотношениями $\tau_{xz} = \theta\varphi_y$, $\tau_{yz} = -\theta\varphi_x$, где θ — угол закручивания, приходящийся на единицу длины стержня. Функция напряжения $\varphi = \varphi(x, y)$ может быть найдена как решение вариационной задачи минимизации интеграла

$$J = \iint\limits_D \left[\frac{1}{G}\left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2\right) - 4\varphi\right] dxdy \tag{1.1}$$

при граничном условии

$$(\varphi)_\Gamma = 0 \tag{1.2}$$

Прежде чем формулировать задачу оптимизации, опишем свойства материала стержня и приведем соотношения, связывающие величину модуля сдвига со структурными параметрами. Среда предполагается композитной, состоящей из связующего материала и арматуры в виде отрезков круговых цилиндрических волокон равной длины. Предположим, что отрезки волокон хаотически распределены в пространстве и что их радиусы много меньше их длин, то есть $r \ll h$. Будем считать, что связующая среда деформируется упруго и обозначим ее модуль сдвига через G_m. Кроме того, считается, что число отрезков волокон в рассматриваемом объеме достаточно велико и в каждом волокне реализуется упругое одноосное напряженное состояние. Это позволяет рассматривать композит как макроскопически однородную изотропную среду. При этом эффективный модуль сдвига среды G связан с коэффициентом объемного содержания арматуры v (коэффициентом концентрации) линейной зависимостью [1]

$$G = Av + B, \quad A = \frac{E_a}{15} - G_m, \quad B = G_m \tag{1.3}$$

где E_a — модуль Юнга арматуры. При варьировании распределения v изменяется величина жесткости стержня на кручение K, определяемая в силу (1.1)—(1.3) и формулы

$$K = 2 \iint_D \varphi\, dx dy \tag{1.4}$$

В рассматриваемой ниже задаче оптимизации в качестве оптимизируемого функционала примем жесткость на кручение K. Роль искомой управляющей функции будет играть v, определяемая из условия максимума функционала качества (1.4) при дополнительных ограничениях

$$0 < v_{min} \leqslant v \leqslant v_{max} \leqslant 1 \tag{1.5}$$

$$\iint_D v\, dx dy = V \tag{1.6}$$

где v_{min}, v_{max} — заданное минимальное и максимальное допустимые значения концентрации включений, а V — заданное количество арматуры, причем $v_{min} \operatorname{mes} D \leqslant V \leqslant v_{max} \operatorname{mes} D$.

Нетрудно показать [2], что для функции φ, доставляющей минимум функционала (1.1), при граничном условии (1.2) справедливо равенство $K = -J$. Таким образом, исходная задача максимизации жесткости на кручение может быть приведена к виду

$$K_0 = \max_v K = -\min_v \min_\varphi J \tag{1.7}$$

Внутренний минимум по φ в (1.7) вычисляется при фиксированном распределении $v(x, y)$ и граничном условии (1.2). Внешний минимум по v разыскивается при ограничениях типа неравенств (1.5) и изопериметрическом условии (1.6).

Необходимое условие оптимальности показывает, что в рассматриваемой задаче для оптимального решения могут реализоваться как предельные значения управляющей функции $v = v_{min}$ $(G = G_{min})$, $v = v_{max}$ $(G = G_{max})$, так и промежуточные значения, определяемые формулой $v = (\lambda\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} - B)/A$, то есть

$$v = \begin{cases} v_{min}, & (x, y) \in D_- \\ (\lambda\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} - B)/A, & (x, y) \in D_0 \\ v_{max}, & (x, y) \in D_+ \end{cases} \tag{1.8}$$

где λ — множитель Лагранжа, отвечающий изопериметрическому условию (1.6). D_-, D_+, D_0 — части области D, в которых соответственно реализуются минимальное, максимальное и промежуточные значения концентрации v.

Выполнимость условия экстремума Вейерштрасса в случае $B = 0$ доказана в [3]. В случае $B \neq 0$ проверка выполнимости этого условия осуществляется при помощи выкладок, полностью аналогичных, приведенным в [3].

Решение одномерной задачи оптимизации для стержня круглого сечения получено в [4]. Отметим, что для круглого стержня концентрация армирующих включений $v(x, y)$ принимает только предельные значения $v = v_{min}$ и $v = v_{max}$, а зона D_0 промежуточных значений концентрации $v_{min} < v < v_{max}$ отсутствует.

2. Исходная задача решалась численно с использованием алгоритма последовательной оптимизации [2]. Применительно к отысканию оптимальных распределений армирующего материала, алгоритм состоит в решении «прямых» задач (1.1), (1.2) при заданных функциях $G(x, y)$ и последующем определении по методу проектирования градиентов новых реализаций $v(x, y)$, приводящих к увеличению функционала K.

Решение «прямых» задач проводилось на основе метода локальных вариаций с оптимальным шагом варьирования. Применялась треугольная схема разбивки области D (фиг. 1) и выпуклая конечно-разностная аппроксимация вариационной задачи (1.1), (1.2) с одним обращением к вычислению подынтегральной функции [5]. Выражение для оптимального шага варьирования $\delta\varphi_{ij}$ функции напряжения имеет вид

$$\delta\varphi_{ij} = (4 + C_1\varphi_{i,\,j-1} + C_2\varphi_{i,\,j+1} + C_3\varphi_{i-1,\,j} + C_4\varphi_{i+1,\,j})/(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) - \varphi_{ij}$$

$$C_1 = (1/G_{i,\,2j} + 1/G_{i+1,\,2j-1})/\Delta y^2, \quad C_2 = (1/G_{i,\,2j+2} + 1/G_{i+1,\,2j+1})/\Delta y^2 \tag{2.1}$$

$$C_3 = (1/G_{i,\,2j} + 1/G_{i,\,2j+1})/\Delta x^2, \quad C_4 = (1/G_{i+1,\,2j+1} + 1/G_{i+1,\,2j})/\Delta x^2$$

где Δx, Δy — размеры ячейки по оси x и оси y.

Для учета ограничений (1.5), накладываемых на функцию $v(x, y)$, вводилась вспомогательная управляющая переменная $\chi(x, y)$ соотношением

$$v = \alpha + \beta \sin \chi \qquad (2.2)$$

$$\alpha = (v_{max} + v_{min})/2, \quad \beta = (v_{max} - v_{min})/2$$

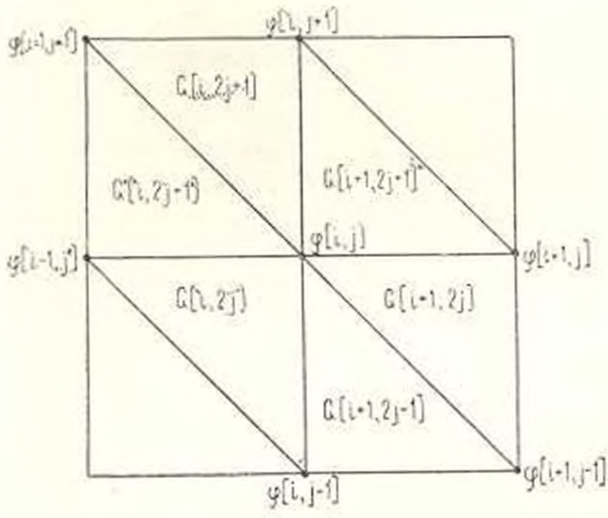
Введенная согласно (2.2) новая управляющая $\chi(x, y)$ удовлетворяет неравенствам (1.5) для любых значений $(x, y) \in D$. Единственное ограничение, накладываемое на функцию χ и ее вариацию $\delta\chi$, обусловлено изопериметрическим равенством (1.6). Для того, чтобы вариации управляющей функции не нарушали изопериметрического условия, требуется удовлетворение равенства

$$\iint\limits_{D} \cos \chi \delta\chi \, dxdy = 0 \qquad (2.3)$$

С учетом (2.3) улучшающую вариацию управляющей функции определим по методу проектирования градиентов

$$\delta\chi = \tau \cos \chi \left(f - \iint\limits_{D} f \cos^2 \chi \, dxdy \Big/ \iint\limits_{D} \cos^2 \chi \, dxdy \right) \qquad (2.4)$$

где $f = (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)/G^2(x, y)$, $1 \gg \tau > 0$ — шаг по градиенту.

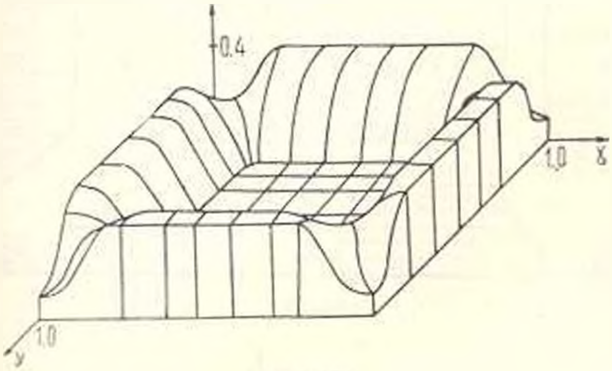


Фиг. 1

Нетрудно убедиться в том, что вариация (2.4) обеспечивает увеличение оптимизируемого функционала K и удовлетворяет условию (2.3).

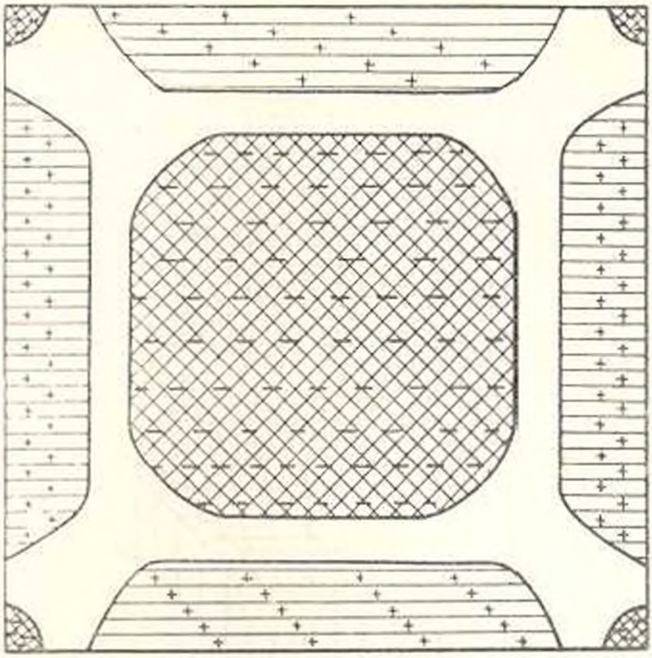
Последоавтельное решение «прямых» задач (1.1), (1.2) с применением формулы (2.1) для оптимальной величины шага варьирования и вычисление новых приближений для управляющей функции $\chi^{k+1} = \chi^k + \delta\chi^k$ ($v^{k+1} = v^k + \delta v^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$) по формулам (2.4), (2.2) продолжается до тех пор, пока невязка в выполнении необходимых условий оптимальности не будет достаточно мала. Алгоритм последовательной оптимизации реализован в виде программы для ЭВМ и с ее использованием выполнены расчеты оптимальных распределений армирующих включений для стержней различных поперечных сечений.

При проведении расчетов использовались новые переменные: $x' = x/a$, $y' = y/a$, $G' = G/G_m$, $\varphi' = \varphi/a^2G_m$, где a — характерный размер области D. Основные параметры задачи принимались равными: $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,15$; $V/(\mathrm{mes}\,D) = 0,25$. Величина $E_a/15\,G_m$, характеризующая свойства композита, полагалась равной 8, что соответствует эпоксидной смоле, армированной углеродными волокнами. Полученные в результате расчетов распределения концентраций армирующих включений представлены на фиг. 2—5.

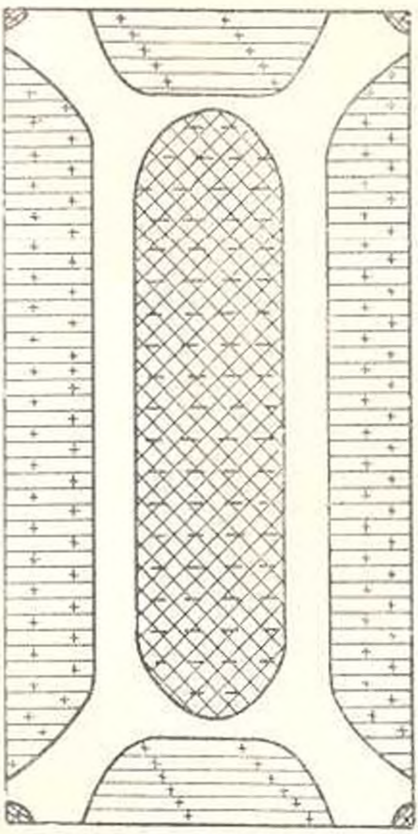


Фиг. 2

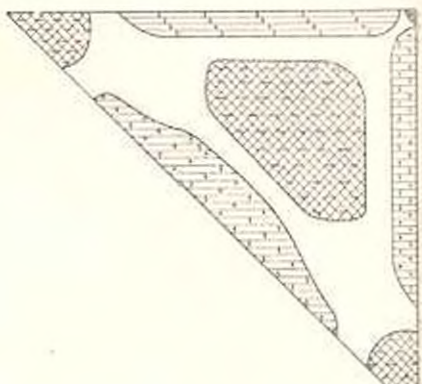
На фиг. 2 показано распределение $v(x, y)$ для стержня квадратного поперечного сечения. Найденное распределение $v(x, y)$ показывает, что основная масса армирующего материала концентрируется у краев квадрата. В этих областях концентрация армирующего материала достигает максимума, то есть $v = v_{max}$. В углах сечения и в центре, как следует из расчетов, использование армирующего материала менее эффективно и здесь концентрация включений минимальна, $v = v_{min}$. Между областями $v = v_{max}$ и $v = v_{min}$ находятся переходные зоны. На фиг. 3 показано в плане то же распределение концентрации включений. Здесь и далее квадратной штриховкой будем обозначать области, где концентрация включений достигает минимума. В областях со штриховкой прямыми линиями концентрация армирующего материала максимальна. Области без штриховки являются областями переходных зон. Показанное на фиг. 4 распределение концентрации отвечает случаю прямоугольного поперечного сечения. Основные характерные особенности для прямоугольного сечения остаются такими же, как и для квадратного, но происходит перерастяжение по координате с большим линейным размером. На фиг. 5 представлено оптимальное распределение концентрации включений для скручиваемого стержня с сечением в форме прямоугольного треугольника. Найденное решение показывает, что основная масса включений концентрируется в областях, примыкающих к сторонам треугольника, где концентрация достигает максимума. Расположение материала включений в углах и в центре не эффективно и



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

здесь концентрация минимальна. Следует отметить, что в рассмотренных выше примерах области минимальных значений концентрации включений, расположенные в центре, близки по форме к поперечному сечению. В приведенных примерах выигрыш за счет оптимизации по сравнению с равномерно армированными сечениями превышал 20%.

Рассмотренные задачи для скручиваемого стержня из хаотически армируемого композита ставились как задачи оптимизации крутильной жесткости при заданном объеме армирующих включений. Очевидно, что минимизация веса стержней при ограничениях на крутильную жесткость может быть рассмотрена аналогично, но в этом нет необходимости, так как эти задачи являются двойственными по отношению друг к другу. Поэтому, как показано в [2], найденное выше решение простым преобразованием переменных приводится к решению задачи минимизации веса стержня при заданной крутильной жесткости. Таким образом, в работе исследованы задачи об оптимальной неоднородности скручиваемых стержней и выявлены некоторые закономерности и особенности распределения армирующих включений и, как следствие, эффективных модулей. Следовательно, изменяя распределение включений (волокон) и тем самым варьируя эффективные модули, можно максимизировать жесткость на кручение при ограничениях на вес или снижать вес при заданной крутильной жесткости. Полученные решения указывают на значительные возможности улучшения жесткостных характеристик за счет создания оптимальных неоднородностей. Особенно важно то, что такой метод оптимизации позволяет улучшить механические характеристики, сохраняя неизменной форму конструкции. Если на практике применение полученных оптимальных решений оказывается затруднительным, то могут быть построены более простые, с точки зрения реализации, квазиоптимальные распределения, в частности, кусочно-постоянные, но по функционалу близкие к оптимальному.

ԿՈՄՊՈԶԻՏ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ՈԼՈՐՎՈՂ ՁՈՂԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ԿՈՇՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՔՍԻՄԱԼԱՑՈՒՄԸ

Ն. Վ. ԲԱՆԻՉՈՒԿ, Ս. Դ. [illegible]

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հետազոտվում է կոմպոզիտ նյութից ոլորվող ձողի օպտիմալացման խնդիր։ Որպես մաքսիմալացման ֆունկցիոնալ ընդունվում է ոլորման կոշտությունը։ Ձողի նյութը ենթադրվում է կոշտ ներդրակներով ամրանավորված։ Սահքի էֆեկտիվ G մոդուլի և ներդրակի կոնցենտրացիայի ν գործակցի միջև տեղի ունի գծային կախվածություն։ Դիտարկվող խնդրում ν-ի օպտիմալացումը խաղում է «կառավարող» ֆունկցիայի դեր և փնտրվում է կոշտության ֆունկցիոնալի մաքսիմալության պայմանից։ ν-ի օպտիմալ բաշխման փնտրման համար օգտագործվում է իտերացիոն ալգորիթմ։ Բերված է հաշվման արդյունքներ։ Տրվում է գտած օպտիմալ լուծման անալիզը։ Գնահատվում է օպտիմալացման հաշվից ստացված շահումը։

MAXIMIZATION OF TORSIONAL RIGIDITY OF ELASTIC BARS MADE OF COMPOSITE MATERIALS

N. V. BANICHUK, A. D. LARICHEV

S u m m a r y

The problem of optimization of torsional rigidity of bars made o composite materials is investigated. Torsional rigidity is considered a the functional to be maximizated. The material of bars is supposed t be reinforced by rigid inclusions. The relation between modulus of ela sticity in shear G and inclusion concentration v is linear. In the consi dered problem, v acts as a control function and is defined from th optimal condition of torsional rigidity. To determine the optimal di stributions of v the iteration algorithm is used. Numerical results ar available. The optimal solutions are analysed and edvantages ob tained by means of optimization are evaluated.

ЛИТЕРАТУРА

1. [illegible] *Б. Д.* Оптимальное проектирование упругих анизотропных неоднородных те Третий национальный конгресс по теоретической и прикладной механике. Бол рия, Варна: 1977. с. 275—280
2. *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980, 256 с.
3. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Нау 1975. 480 с.
4. *Klosowicz B.* Sur la nonhomogeneite optimal d'une barre tordue.—Bull. Aca polon. sci. ser. sci. techn. 1970, vol. 16, No. 8, p. 611—615.
5. *Баничук Н. В., Картвелишвили В. М., Черноусько Ф. Л.* О разностно-квадратурн аппроксимациях выпуклых интегральных функционалов.— ДАН СССР, 197 т. 231, № 2, с. 269—272.

Институт проблем механики АН СССР
Центральный научно-исследовательский
институт строительных конструкций
им. Кучеренко Госстроя СССР

Поступила в редакци
12. X. 198

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 6, 1983 Механика

КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКИ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

МКРТЧЯН П. А.

В работе на основе трехмерных уравнений магнитоупругости при условии справедливости гипотезы Кирхгофа дается решение задачи магнитоупругих колебаний бесконечной пластинки в поперечном магнитном поле. Определены значения векторов индуцированных электромагнитных полей и получены характеристические уравнения, определяющие частоты магнитоупругих колебаний пластинки. Задача решается также на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел. Приводится сравнительный анализ о точности приближения гипотезы магнитоупругости тонких тел для данной задачи.

1. Пусть бесконечная изотропная пластинка постоянной толщины $2h$, изготовленная из материала с конечной электропроводностью σ, находится в поперечном стационарном магнитном поле с заданным вектором напряженности $\vec{H}_0$ $(0, 0, H_0)$. Магнитные и диэлектрические проницаемости материала пластинки и среды, окружающей пластинку, считаются равными единице. Прямоугольная система координат (x_1, x_2, x_3) выбрана так, что координатная плоскость (x_1x_2) совпадает со срединной плоскостью пластинки. В отношении тонкой пластинки принимается гипотеза недеформируемых нормалей.

В силу принятых предположений для рассматриваемой задачи после некоторых преобразований получим следующие линеаризованные исходные уравнения [1, 2].

Во внутренней области ($|x_3| \leqslant h$):

уравнения электродинамики

$$\operatorname{rot}\vec{h} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left[\vec{e} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\times\vec{H}_0\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{e}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\vec{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{h} = 0 \tag{1.1}$$

уравнения движения пластинки

$$\Delta\theta - \frac{\sigma H_0^2}{\rho c_0^2 c^2}\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{\sigma H_0}{2\rho h c_0^2 c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-h}^{h} h_3 dx_3$$

$$\frac{1-\nu}{2}\Delta Z-\frac{\sigma H_0^2}{\rho c_0^2c^2}\frac{\partial Z}{\partial t}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}=\frac{\sigma H_0}{2\rho h c_0^2 c}\int_{-h}^{h}\left(\frac{\partial e_1}{\partial x_1}+\frac{\partial e_2}{\partial x_2}\right)dx_3 \qquad (1.2)$$

$$D\Delta^2 w+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\sigma H_0}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-h}^{h}x_3 h_3\,dx_3=\frac{2\sigma h^3 H_0^2}{3c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Delta w$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала пластинки, c — скорость света, c_0 — скорость звука в материале пластинки, $\vec{h}\,(h_1, h_2, h_3)$ и $\vec{e}\,(e_1, e_2, e_3)$ — соответственно векторы напряженности индуцированного магнитного и электрического полей для внутренней области, $\vec{u}\,(u_1, u_2, u_3)$ — вектор перемещения произвольной точки пластинки, $u\,(x_1, x_2, t)$, $v\,(x_1, x_2, t)$, $w\,(x_1, x_2, t)$ — тангенциальные и нормальное перемещения точек срединной поверхности пластинки,

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial v}{\partial x_2}, \qquad Z=\frac{\partial v}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x_2}$$

$$c_0^2=\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}, \qquad D=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \qquad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Во внешней области ($|x_3| > h$):
уравнения электродинамики для вакуума

$$\operatorname{rot}\vec{h}^{(e)}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{e}^{(e)}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\vec{e}^{(e)}=0$$

$$\operatorname{rot}\vec{e}^{(e)}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}^{(e)}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\vec{h}^{(e)}=0 \qquad (1.3)$$

В (1.3) индекс $e=1$ относится к области $x_3 > h$, а $e=2$ — к области $x_3 < -h$.

Решения уравнений (1.1) и (1.3) должны удовлетворять следующим линеаризованным поверхностным условиям на раздел двух сред [1]:

$$\vec{h}=\vec{h}^{(e)}, \quad e_1=e_1^{(e)}, \quad e_2=e_2^{(e)} \quad \text{при } x_3=\pm h \qquad (1.4)$$

Таким образом, трехмерная задача магнитоупругих колебаний тонкой пластинки в поперечном магнитном поле на основе гипотезы недеформируемых нормалей свелась к совместному интегрированию системы уравнений (1.1)—(1.3), решения которых должны удовлетворять поверхностным условиям (1.4) и следующим условиям затухания возбужденного электромагнитного поля на бесконечности

$$\vec{h}^{(e)}\to 0, \quad e_1^{(e)}\to 0, \quad e_2^{(e)}\to 0 \quad \text{при } |x_3|\to\infty \qquad (1.5)$$

Решения уравнений (1.1)—(1.3) представим в виде

$$w = w_0 \exp[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)], \quad u = u_0 \exp[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)]$$
$$v = v_0 \exp[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)], \quad Q = Q_0(x_3) \exp[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)] \tag{1.6}$$

Здесь под Q понимается любая искомая компонента возбужденного электромагнитного поля, ω — частота колебаний, $k_1 = \pi/\lambda_1$, $k_2 = \pi/\lambda_2$ — волновые числа, λ_1 и λ_2 — длины полуволн соответственно по направлениям осей ox_1 и ox_2.

Подставляя (1.6) в уравнения (1.1)—(1.3), после некоторых преобразований получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения для определения неизвестных коэффициентов $Q_0(x_3)$ компонент возбужденного магнитного поля:

$$\frac{d^2 h_{01}}{dx_3^2} - \nu_1^2 h_{01} = \frac{4\pi\sigma H_0 \omega k_1 w_0}{c^2}, \quad \frac{d^2 h_{02}}{dx_3^2} - \nu_1^2 h_{02} = \frac{4\pi\sigma H_0 \omega k_2 w_0}{c^2}$$

$$\frac{d^2 h_{03}}{dx_3^2} - \nu_1^2 h_{03} = \frac{4\pi\sigma H_0 \omega}{c^2} [k_1 u_0 + k_2 v_0 + i(k_1^2 + k_2^2) w_0 x_3] \tag{1.7}$$

$$\frac{d^2 \vec{h}_0^{(e)}}{dx_3^2} - \nu_{01}^2 \vec{h}_0^{(e)} = 0, \quad \nu_{01}^2 = k_1^2 + k_2^2 - \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \nu_1^2 = \nu_{01}^2 + \frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2}$$

Коэффициенты возбужденного электрического поля определяются через коэффициенты возбужденного магнитного поля формулами

$$e_{01} = -\frac{c}{i\omega\nu_2}\left[ik_2 h_{03} + \frac{dh_{02}}{dx_3} + \frac{4\pi\sigma i\omega H_0}{c^2}(v_0 + ik_2 w_0 x_3)\right]$$

$$e_{02} = \frac{c}{i\omega\nu_2}\left[-ik_1 h_{03} + \frac{dh_{01}}{dx_3} + \frac{4\pi\sigma i\omega H_0}{c^2}(u_0 + ik_1 w_0 x_3)\right]$$

$$e_{03} = \frac{c}{\omega\nu_2}(-k_1 h_{02} + k_2 h_{01}), \quad e_{01}^{(e)} = -\frac{c}{i\omega}\left[ik_2 h_{03}^{(e)} + \frac{dh_{02}^{(e)}}{dx_3}\right] \tag{1.8}$$

$$e_{02}^{(e)} = \frac{c}{i\omega}\left[ik_1 h_{03}^{(e)} + \frac{dh_{01}^{(e)}}{dx_3}\right], \quad e_{03}^{(e)} = \frac{c}{\omega}[-k_1 h_{02}^{(e)} + k_2 h_{01}^{(e)}], \quad \nu_2 = 1 + \frac{4\pi\sigma}{i\omega}$$

Найдя общее решение уравнения (1.7), удовлетворяя граничным условиям (1.4) и условиям затухания возмущений на бесконечности (1.5), определим указанные неизвестные функции и, следовательно, индуцированное электромагнитное поле во внутренней и внешней областях:

$$h_1 = \gamma_1(x_3) u - \gamma_3(x_3) \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} - \gamma_2(x_3) \frac{\partial w}{\partial x_1}$$

$$h_2 = \gamma_1(x_3) v + \gamma_3(x_3) \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} - \gamma_2(x_3) \frac{\partial w}{\partial x_2}$$

$$h_3 = -\gamma_1(x_3)\theta + \gamma_2(x_3)\Delta w$$

$$e_1 = \frac{c}{j\omega\nu_2}\Big[\gamma_2(x_3)\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta w + \gamma_2'(x_3)\frac{\partial w}{\partial x_2} - \gamma_1(x_3)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} -$$

$$- \gamma_3'(x_3)\frac{\partial Z}{\partial x_1} - \gamma_1'(x_3)\, v - \frac{4\pi\sigma j\omega H_0}{c^2}\left(v - x_3\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)\Big]$$

$$e_2 = -\frac{c}{j\omega\nu_2}\Big[\gamma_2(x_3)\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta w + \gamma_2'(x_3)\frac{\partial w}{\partial x_1} - \gamma_1(x_3)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} +$$

$$+ \gamma_3'(x_3)\frac{\partial Z}{\partial x_2} - \gamma_1'(x_3)\, u - \frac{4\pi\sigma j\omega H_0}{c^2}\left(u - x_3\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)\Big]$$

$$e_3 = \frac{c}{j\omega\nu_2}\left[\gamma_1'(x_3)\, Z + \gamma_3(x_3)\,\Delta Z\right]$$

$$h_1^{(1)} = \Big[\gamma_1'(h)\, u - \gamma_3(h)\frac{\partial Z}{\partial x_2} - \gamma_2'(h)\frac{\partial w}{\partial x_1}\Big]\exp\left[-\nu_{01}(x_3 - h)\right]$$

$$h_2^{(1)} = \Big[\gamma_1'(h)\, v + \gamma_3(h)\frac{\partial Z}{\partial x_1} - \gamma_2'(h)\frac{\partial w}{\partial x_2}\Big]\exp\left[-\nu_{01}(x_3 - h)\right]$$

$$h_3^{(1)} = -\left[\gamma_1(h)\,\vartheta - \gamma_2(h)\,\Delta w\right]\exp\left[-\nu_{01}(x_3 - h)\right] \qquad (1.9)$$

$$e_1^{(1)} = \frac{c}{j\omega}\Big[\gamma_2(h)\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta w - \nu_{01}\gamma_2'(h)\frac{\partial w}{\partial x_2} - \gamma_1(h)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} +$$

$$+ \nu_{01}\gamma_1'(h)\, v + \nu_{01}\gamma_3(h)\frac{\partial Z}{\partial x_1}\Big]\exp\left[-\nu_{01}(x_3 - h)\right]$$

$$e_2^{(1)} = -\frac{c}{j\omega}\Big[\gamma_2(h)\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta w - \gamma_2'(h)\frac{\partial w}{\partial x_1} - \gamma_1(h)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} +$$

$$+ \nu_{01}\gamma_1'(h)\, u - \nu_{01}\gamma_3(h)\frac{\partial Z}{\partial x_2}\Big]\exp\left[-\nu_{01}(x_3 - h)\right]$$

$$e_3^{(1)} = \frac{c}{j\omega}\left[\gamma_1'(h)\, Z + \gamma_3(h)\,\Delta Z\right]\exp\left[-\nu_{01}(x_3 - h)\right]$$

$$h_1^{(2)} = -\Big[\gamma_1'(h)\, u + \gamma_3(h)\frac{\partial Z}{\partial x_2} + \gamma_2'(h)\frac{\partial w}{\partial x_1}\Big]\exp\left[\nu_{01}(x_3 + h)\right]$$

$$h_2^{(2)} = -\Big[\gamma_1'(h)\, v - \gamma_3(h)\frac{\partial Z}{\partial x_1} + \gamma_2'(h)\frac{\partial w}{\partial x_2}\Big]\exp\left[\nu_{01}(x_3 + h)\right]$$

$$h_3^{(2)} = -\left[\gamma_1(h)\,\vartheta + \gamma_2(h)\,\Delta w\right]\exp\left[\nu_{01}(x_3 + h)\right]$$

$$e_1^{(2)} = -\frac{c}{j\omega}\Big[\gamma_2(h)\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta w - \nu_{01}\gamma_2'(h)\frac{\partial w}{\partial x_2} + \gamma_1(h)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} -$$

$$- \nu_{01}\gamma_1'(h)\, v + \nu_{01}\gamma_3(h)\frac{\partial Z}{\partial x_1}\Big]\exp\left[\nu_{01}(x_3 + h)\right]$$

$$e_1^{(2)} = \frac{c}{i\omega}\left[\gamma_2(h)\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta w - \nu_{01}\gamma_2'(h)\frac{\partial w}{\partial x_1} + \gamma_1(h)\frac{\partial h}{\partial x_1} - \right.$$
$$\left. - \nu_{01}\gamma_1'(h)\,u - \nu_{01}\gamma_3(h)\frac{\partial Z}{\partial x_1}\right]\exp\left[\nu_{01}(x_3+h)\right]$$

$$e_3^{(2)} = -\frac{c}{i\omega}\left[\gamma_1(h) - \gamma_2(h)\,\Delta Z\right]\exp\left[\nu_{01}(x_3+h)\right]$$

Здесь штрих означает производную по переменной x_3

$$\gamma_1(x_3) = \frac{4\pi\sigma i\omega H_0}{\nu_1^2 c^2}\left(1 - \frac{\nu_{01}\operatorname{ch}\nu_1 x_3}{\Delta_1}\right), \quad \Delta_1 = \nu_{01}\operatorname{ch}\nu_1 h + \nu_1\operatorname{sh}\nu_1 h$$

$$\gamma_2(x_3) = \frac{4\pi\sigma i\omega H_0}{\nu_1^3 c^2}\left[x_3 - \frac{(1+\nu_{01}h)\operatorname{sh}\nu_1 x_3}{\Delta_2}\right], \quad \Delta_2 = \nu_1\operatorname{ch}\nu_1 h + \nu_{01}\operatorname{sh}\nu_1 h$$

$$\gamma_3(x_3) = -\frac{(4\pi\sigma)^2 H_0}{\nu_1 c^2}\,\frac{\operatorname{sh}\nu_1 h\operatorname{sh}\nu_1 x_3}{\Delta_1\Delta_3}, \quad \Delta_3 = \nu_1\operatorname{ch}\nu_1 h + \nu_{01}\nu_2\operatorname{sh}\nu_1 h$$

Подставляя (1.6) и (1.9) в уравнения (1.2) и выполняя соответствующее интегрирование, найдем характеристические уравнения, определяющие частоты колебаний. Характеристические уравнения, описывающие распространение быстрых и медленных магнитоупругих волн в плоскости пластинки, получаются из первых двух уравнений системы (1.2) и соответственно имеют вид

$$k_1^2 + k_2^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2} + i\omega\frac{\sigma H_0^2}{\rho c_t^2 c^2}\left[1 - \frac{4\pi\sigma i\omega}{\nu_1^2 c^2}\left(1 - \frac{\nu_{01}\operatorname{sh}\nu_1 h}{\nu_1 h\Delta_1}\right)\right] = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{1-\nu}{2}(k_1^2 + k_2^2) - \frac{\omega^2}{c_0^2} + i\omega\frac{\sigma H_0^2}{\rho c_0^2 c^2}\left\{1 + \frac{1-\nu_2}{\nu_2}\left[1 - \frac{\nu_{01}\operatorname{sh}\nu_1 h}{\nu_1 h\Delta_1} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{(1-\nu_2)(k_1^2 + k_2^2)\operatorname{sh}^2\nu_1 h}{\nu_1 h\Delta_1\Delta_2}\right]\right\} = 0 \quad (1.11)$$

Характеристическое уравнение, определяющее частоты поперечных колебаний пластинки, получается из третьего уравнения (1.2) и имеет вид

$$\Omega_0^2 - \omega^2 - \frac{2\sigma h^3 H_0^2 i\omega\Omega_0}{3c^2\sqrt{2D\rho h}}\left\{1 - \frac{4\pi\sigma i\omega}{\nu_1^2 c^2}\left[1 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{3(1+\nu_{01}h)(\nu_1 h\operatorname{ch}\nu_1 h - \operatorname{sh}\nu_1 h)}{\nu_1^2 h^3\Delta_2}\right]\right\} = 0 \quad (1.12)$$

где $\Omega_0 = (k_1^2 + k_2^2)\sqrt{D/2\rho h}$ — частота собственных колебаний пластинки в вакууме при отсутствии магнитного поля.

Уравнения (1.10)—(1.12) являются трансцендентными, нахождение их корней связано со значительными трудностями. Исследование корней уравнений (1.10)—(1.12) существенно упрощается, если предположить [1], что

$$|\nu_1^2 h^2| \ll 1 \quad (1.13)$$

Используя условие (1.13), из (1.9) для компонент возбужденного электромагнитного поля в области $|x_3| \leqslant h$ получим следующие упрощенные выражения:

$$h_1 = \frac{4\pi\sigma H_0}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{x_3}{\delta_1}\left(\frac{h}{\delta_2}\frac{\partial\chi}{\partial x_2} - \nu_{01}u\right) + \left(\frac{x_3^2 - h^2}{2} + \frac{\nu_{01}h^3}{3\delta_2}\right)\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]$$

$$h_2 = -\frac{4\pi\sigma H_0}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{x_3}{\delta_1}\left(\frac{h}{\delta_2}\frac{\partial\chi}{\partial x_1} + \nu_{01}v\right) - \left(\frac{x_3^2 - h^2}{2} + \frac{\nu_{01}h^3}{3\delta_2}\right)\frac{\partial w}{\partial x_2}\right]$$

$$h_3 = -\frac{4\pi\sigma h H_0}{\delta_1 c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\theta + \frac{\delta_1 x_3}{\delta_2 h}\left[\frac{x_3^2 - h^2}{2}\left(1 + \frac{\nu_{01}h}{3}\right) - \frac{x_3^2}{3}\right]\Delta w\right\}$$

$$e_1 = -\frac{4\pi\sigma H_0}{\nu_2 c}\left\{\frac{x_3}{\delta_2}\left[\frac{x_3^2 - h^2}{2}\left(1 + \frac{\nu_{01}h}{3}\right) - \frac{x_3^2}{3}\right]\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta w + \right.$$

$$\left. + \frac{h}{\delta_1}\left[\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + \nu_1^2 v - \frac{1}{\delta_3}\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right]\right\} \tag{1.14}$$

$$e_2 = \frac{4\pi\sigma H_0}{\nu_2 c}\left\{\frac{x_3}{\delta_2}\left[\frac{x_3^2 - h^2}{2}\left(1 + \frac{\nu_{01}h}{3}\right) - \frac{x_3^2}{3}\right]\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta w + \right.$$

$$\left. + \frac{h}{\delta_1}\left[\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \nu_1^2 u + \frac{1}{\delta_3}\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right]\right\}$$

$$e_3 = -\frac{4\pi\sigma H_0}{\delta_1\nu_2 c}x_3\left(\nu_{01}\chi + \frac{h}{\delta_3}\Delta\chi\right)$$

где

$$\delta_1 = \nu_{01} + \nu_1^2 h, \quad \delta_2 = 1 + \nu_{01}h, \quad \delta_3 = \frac{i\omega(1 + \nu_{01}\nu_2 h)}{4\pi\sigma}$$

Уравнения, определяющие частоты колебаний в плоскости пластинки (1.10) и (1.11), соответствующей условию (1.13), соответственно принимают вид

$$k_1^2 + k_2^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2} + i\omega\frac{\sigma H_0^2}{\rho c_0^2 c^2}\left[1 - \frac{4\pi\sigma i\omega h}{c^2(\nu_{01} + \nu_1^2 h)}\right] = 0 \tag{1.15}$$

$$\frac{1-\nu}{2}(k_1^2 + k_2^2) - \frac{\omega^2}{c_0^2} + i\omega\frac{\sigma H_0^2}{\rho c_0^2 c^2}\left[1 - \frac{4\pi\sigma\nu_{01}h}{i\omega(1 + \nu_2\nu_{01}h)}\right] = 0 \tag{1.16}$$

Последний член в уравнении (1.15) учитывает влияние поперечного магнитного поля на скорость распространения быстрых магнитоупругих волн в плоскости пластинки. Этот член, как и следовало ожидать, полностью совпадает с соответствующим членом характеристического уравнения поперечных колебаний пластинки в продольном магнитном поле [3], учитывающим влияние продольного магнитного поля.

Принимая условие (1.13), из (1.12) получим квадратное уравнение относительно частоты поперечных колебаний пластинки

$$\omega^2 - \Omega_0^2 = 2\alpha\Omega_0 i\omega, \qquad \left(\alpha = \frac{\sigma h^2 H_0^2}{3c^2 \sqrt{2D\rho h}}\right) \tag{1.17}$$

Параметр α характеризует отношение силы электромагнитного происхождения к силе упругого сопротивления.

Рассматривая (1.17), замечаем, что характер движения пластинки в магнитном поле существенно зависит от величины параметра α.

Если $\alpha \leqslant 1$ (в этом случае преобладающими являются упругие силы), то

$$\operatorname{Re}\omega = \pm \Omega_0\sqrt{1-\alpha^2}, \quad \operatorname{Im}\omega = \Omega_0\alpha \tag{1.18}$$

Из (1.18) следует, что в этом случае магнитное поле приводит к уменьшению частоты поперечных колебаний. Кроме того, имеется также затухание начальных возмущений по экспоненциальному закону с коэффициентом затухания $\Omega_0\alpha$.

Если же $\alpha > 1$ (преобладают силы электромагнитного происхождения), то

$$\operatorname{Re}\omega = 0, \quad \operatorname{Im}\omega = \Omega_0(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}) > 0 \tag{1.19}$$

В этом случае начальные возмущения затухают по экспоненциальному закону, не проходя через положение равновесия.

2. Рассмотрим задачу магнитоупругих колебаний пластинки в поперечном магнитном поле на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел. Эти гипотезы аналитически представляются следующим образом [1]

$$u_1 = u - x_3\frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2 = v - x_3\frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad u_3 = w(x_1, x_2, t) \tag{2.1}$$

$$e_1 = \varphi(x_1, x_2, t), \quad e_2 = \psi(x_1, x_2, t), \quad h_3 = f(x_1, x_2, t)$$

Здесь φ, ψ — искомые тангенциальные компоненты индуцированного в пластинке электрического поля, f — искомая нормальная компонента индуцированного в пластинке магнитного поля.

Предположим, что в пластинке можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости. Тогда уравнения, определяющие искомые компоненты возбужденного электромагнитного поля φ, ψ, f и перемещения u, v, w, после некоторых преобразований записываются следующим образом [1]:

$$\begin{gathered}
\Delta\theta - \frac{\sigma H_0^2}{\rho c_0^2 c^2}\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{\sigma H_0}{\rho c_0^2 c^2}\frac{\partial f}{\partial t} \\
\frac{1-\nu}{2}\Delta\chi - \frac{\sigma H_0^2}{\rho c_0^2 c^2}\frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = \frac{\sigma H_0}{\rho c_0^2 c}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) \\
D\Delta^2 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2\sigma h^3 H_0^2}{3c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Delta w = 0 \\
\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} = 0
\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$
\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{4\pi\sigma}{c}\left(\psi - \frac{H_0}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{h_1^+ - h_1^-}{2h}
$$

$$
\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{4\pi\sigma}{c}\left(\varphi + \frac{H_0}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right) = \frac{h_2^+ - h_2^-}{2h}
$$

где индексы плюс и минус означают значения соответствующих величин при $x_3 = h$ и $x_3 = -h$.

Формулы, определяющие компоненты h_1, h_2 и e_3 возбужденного электромагнитного поля, имеют вид [1]

$$
h_1 = \frac{h_1^+ + h_1^-}{2} + x_3\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{4\pi\sigma}{c}\left(\psi - \frac{H_0}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right] + \frac{2\pi\sigma H_0}{c^2}(x_3^2 - h^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t}
$$

$$
h_2 = \frac{h_2^+ + h_2^-}{2} + x_3\left[\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{4\pi\sigma}{c}\left(\varphi + \frac{H_0}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right] + \frac{2\pi\sigma H_0}{c^2}(x_3^2 - h^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial t}
$$

$$
e_3 = \frac{c}{4\pi\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2^+ + h_2^-}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1^+ + h_1^-}{2}\right)\right] - x_3\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{H_0}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right) \tag{2.3}
$$

Исходные разрешающие уравнения рассматриваемой здесь задачи (2.2) содержат неизвестные величины h_1^+, h_1^-, h_2^+, h_2^-, поэтому они должны быть рассмотрены совместно с уравнениями электродинамики (1.3) в области $|x_3| \geq h$ (в окружающей пластинку среде). Граничные условия (1.4) в рассматриваемом случае записываются в виде

$$
\left.\begin{aligned}
&e_1^{(1)} = \varphi, \quad e_2^{(1)} = \psi, \quad h_3^{(1)} = f \\
&h_1^{(1)} = h_1^+, \quad h_2^{(1)} = h_2^+
\end{aligned}\right\} \quad \text{при } x_3 = h
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&e_1^{(2)} = \varphi, \quad e_2^{(2)} = \psi, \quad h_3^{(2)} = f \\
&h_1^{(2)} = h_1^-, \quad h_2^{(2)} = h_2^-
\end{aligned}\right\} \quad \text{при } x_3 = -h \tag{2.4}
$$

Решение задачи ищется в виде

$$
Q = Q_0 \exp\left[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)\right] \tag{2.5}
$$

для искомых величин u, v, w, φ, ψ, f и

$$
Q = Q_0^{(n)}(x_3) \exp\left[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)\right] \tag{2.6}
$$

для остальных неизвестных величин.

Рассматривая систему (2.2), замечаем, что индуцированное электромагнитное поле не входит в уравнение поперечных колебаний пластинки (третье уравнение системы (2.2)). Из этого уравнения в силу (2.5) для определения частоты поперечных колебаний пластинки получим уравнение, полностью совпадающее с уравнением (1.17).

Следовательно, в данной задаче погрешность гипотез магнитоупругости тонких тел при определении частоты поперечных колебаний характеризуются пренебрежением величиной $|\nu_1^2 h^2|$ по сравнению с единицей.

Подставляя (2.5) и (2.6) в уравнения (1.3) и (2.2), удовлетворяя условиям (1.5), (2.4), с учетом (2.3) получим индуцированное электромагнитное поле во всем пространстве.

$$h_1 = -\frac{x_3}{\nu_{01} h}\left[A\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta\theta - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(A\frac{\partial\theta}{\partial x_1} - B\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right)\right] + $$
$$+ \frac{2\pi\sigma H_0}{c^2}(x_3^2 - h^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t}$$

$$h_2 = -\frac{x_3}{\nu_{01} h}\left[A\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta\theta - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(A\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + B\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right)\right] + $$
$$+ \frac{2\pi\sigma H_0}{c^2}(x_3^2 - h^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial t}$$

$$h_3 = A\Delta\theta, \quad e_1 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(A\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + B\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right)$$

$$e_2 = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(A\frac{\partial\theta}{\partial x_1} - B\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right), \quad e_3 = -x_3\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(B\Delta\chi + H_0\chi)$$

$$h_1^{(e)} = \frac{1}{\nu_{01}}\left[A\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta\theta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(A\frac{\partial\theta}{\partial x_1} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - B\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right)\right]\begin{cases} -\exp[-\nu_{01}(x_3 - h)] & \text{при } x_3 > h \\ \exp[\nu_{01}(x_3 + h)] & \text{при } x_3 < -h \end{cases} \qquad (2.7)$$

$$h_2^{(e)} = \frac{1}{\nu_{01}}\left[A\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta\theta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(A\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + B\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right)\right]\begin{cases} -\exp[-\nu_{01}(x_3 - h)] & \text{при } x_3 > h \\ \exp[\nu_{01}(x_3 + h)] & \text{при } x_3 < -h \end{cases}$$

$$h_3^{(e)} = A\Delta\theta\begin{cases} \exp[-\nu_{01}(x_3 - h)] & \text{при } x_3 > h \\ \exp[\nu_{01}(x_3 + h)] & \text{при } x_3 < -h \end{cases}$$

$$e_1^{(e)} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(A\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + B\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right)\begin{cases} \exp[-\nu_{01}(x_3 - h)] & \text{при } x_3 > h \\ \exp[\nu_{01}(x_3 + h)] & \text{при } x_3 < -h \end{cases}$$

$$e_2^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(A\frac{\partial\theta}{\partial x_1} - B\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right)\begin{cases} \exp[-\nu_{01}(x_3 - h)] & \text{при } x_3 > h \\ \exp[\nu_{01}(x_3 + h)] & \text{при } x_3 < -h \end{cases}$$

$$e_3^{(e)} = \frac{B}{\nu_{01}}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\chi\begin{cases} \exp[-\nu_{01}(x_3 - h)] & \text{при } x_3 > h \\ -\exp[\nu_{01}(x_3 + h)] & \text{при } x_3 < -h \end{cases}$$

где введены обозначения

$$A = \frac{4\pi\sigma i\omega h H_0}{k_1^2 + k_2^2}\{4\pi\sigma i\omega h + c^2[\nu_{01} + (k_1^2 + k_2^2)h]\}^{-1}$$

$$B = \frac{4\pi\sigma\nu_{01} h H_0}{k_1^2 + k_2^2}(4\pi\sigma\nu_{01} h + i\omega)^{-1}$$

Используя (2.5) и (2.7), из первых уравнений системы (2.2) для определения частоты колебаний в плоскости пластинки получим следующие характеристические уравнения:

$$k_1^2 + k_2^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2} + i\omega \frac{\sigma H_0^2}{\rho c_2^2 c^2} \left[1 - \frac{4\pi\sigma i\omega h}{c^2[\nu_{01} + (k_1^2 + k_2^2)\, h] + 4\pi\sigma i\omega h}\right] = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{1-\nu}{2}(k_1^2 + k_2^2) - \frac{\omega^2}{c_0^2} + i\omega \frac{\sigma H_0^2}{\rho c_0^2 c^2}\left(1 - \frac{4\pi\sigma\nu_{01} h}{i\omega + 4\pi\sigma\nu_{01} h}\right) = 0 \quad (2.9)$$

Сравнивая характеристические уравнения (2.8) и (2.9) соответственно с характеристическими уравнениями (1.15) и (1.16), полученными без использования гипотез магнитоупругости тонких тел, замечаем, что они совпадают, если в уравнениях (1.15) и (1.16) пренебречь влиянием токов смещения в пластинке. Пренебрежение токов смещения по сравнению с токами проводимости равносильно условию $\mathrm{Re}\,(4\pi\sigma/i\omega) \gg 1$, которое выполняется в хороших проводниках для всех частот, применяемых в технике [4, 5].

Если разложить точное решение в ряд по степеням $\nu_1 x_3$ и в первом приближении пренебречь в этом разложении членом $|\nu_1^2 h^2|$ по сравнению с единицей, то с точки зрения характеристических уравнений результаты, полученные на основе гипотез магнитоупругости тонких тел, совпадают с первым приближением к точному решению.

Отметим, что указанная точность сохраняется и в задачах колебания пластинки в поперечном магнитном поле с заданными начальными условиями [2].

ԷԼԵԿՏՐԱՀԱՂՈՐԴԻՉ ՍԱԼԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ

Գ. Հ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքի մագնիսաառաձգականության եռաչափ հավասարումների հիման վրա ուսումնասիրվում է անվերջ սալի մագնիսաառաձգական տատանումների խնդիրը լայնական մագնիսական դաշտում։ Համատեղ լուծելով սալի մագնիսաառաձգականության հավասարումները նրան շրջապատող միջավայրի էլեկտրոդինամիկայի հավասարումների հետ, որոշվում են ինդուկցված էլեկտրամագնիսական դաշտի բաղադրիչները և բերվում են բնութագրիչ հավասարումներ հաճախականությունների որոշման համար։ Ստացված արդյունքները համեմատվում են այն արդյունքների հետ, որոնք ստացվում են նույն խնդիրը բարակ մարմինների մագնիսաառաձգականության հիպոթեզի օգնությամբ լուծելիս և գնահատվում է նշված հիպոթեզի ճշտության դիտարկվող խնդրի համար։

VIBRATION OF ELECTROCONDUCTIVE PLATES IN A TRANSVERSAL MAGNETIC FIELD

P. A. MKRTCHIAN

S u m m a r y

In the paper on the basis of three-dimensional equations of magnetoelasticity the solution of magnetoelastic vibration of an infinite length plate is given in the case of a transversal magnetic field. The values of induced electromagnetic field vectors are determined and dispersion equations concerning plate magnetoelastic vibration frequencies are obtained. The problem has been also solved on the basis of magnetoelasticity hypothesis of thin bodies. For the given problem a comparative analysis is adduced conserning the approximation accuracy of magnetoelasticity hypothesis of thin bodies.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977.
2. *Багдасарян Г. Е., Мкртчян П. А.* О колебаниях проводящих пластин в поперечном магнитном поле. Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. 28, № 1.
3. *Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки в магнитном поле. Изв. АН Амр.ССР, Механика, 1967, т. 20, № 5.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957.
5. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества, М.: Наука, 1976.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию 26. III. 1982

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 6, 1983 Механика

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ТЕОРИИ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

РОГАЧЕВА Н. Н.

В работе [1] получены уточненные уравнения пьезокерамических оболочек, предварительно поляризованных в направлении нормали к срединной поверхности. Здесь тем же приближенным методом [2] из трехмерных граничных условий выведены двумерные граничные условия пьезокерамических оболочек для различных случаев закрепления электродированных и неэлектродированных краев.

1. Будем рассматривать такие оболочки, у которых лицевые поверхности либо полностью покрыты электродами, на которых известно значение электрического потенциала, либо оболочки, лицевые поверхности которых не имеют электродов. Полная система уравнений в [1] разбита на две группы уравнений. В первую группу вошли уравнения, совпадающие после исключения электрических величин с точностью до постоянных коэффициентов с системой уравнений неэлектрических оболочек. В [1] в трехмерные уравнения был введен несимметричный тензор напряжений. Если, кроме того, вместо вектора электрической индукции D^* и вектора напряженности электрического поля E^* ввести новые величины по формулам (эти величины удобны при получении граничных условий)

$$D_i = a_j D_i^*, \quad D_3 = a_1 a_2 D_3^*, \quad E_i = a_i E_i^*, \quad E_3 = a_1 a_2 E_3^* \tag{1.1}$$

то уравнения первой группы примут вид, отличающийся от [1] малыми членами

$$T_i = \frac{2h}{s_{11}^E (1-\nu^2)} (\varepsilon_i + \nu \varepsilon_j) - \frac{2h d_{31}}{s_{11}^E (1-\nu)} E_3^{(0)} - \left\{ \frac{h s_{13}^E}{s_{11}^E (1-\nu)} (q_3^+ - q_3^-) \right\}$$

$$S_{ij} = \frac{2h}{s_{66}^E} \omega, \quad H_{ij} = \frac{4h^3}{3 s_{66}^E} \left(\tau - \frac{\omega}{2R_j} \right) \tag{1.2}$$

$$G_i = - \frac{2h^3}{3 s_{11}^E (1-\nu^2)} (\varkappa_i + \nu \varkappa_j) + \frac{2h^3 d_{31}}{3 s_{11}^E (1-\nu)} E_3^{(1)} +$$

$$+ \left\{ \frac{2h^3}{3 s_{66}^E (1-\nu^2)} \left[\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_j} \right) \varepsilon_i - \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E (1-\nu)} \left(\frac{1}{R_i} + \frac{\nu}{R_j} \right) (\varepsilon_i + \varepsilon_j) - \right. \right.$$

$$- \left(d_{33} - \frac{2 s_{13}^E d_{31}}{s_{11}^E (1-\nu)} \right) \left(\frac{1}{R_i} + \frac{\nu}{R_j} \right) E_3^{(0)} - \frac{d_{31} (1+\nu)}{R_k} E_3^{(0)} +$$

$$\left. \left. + \frac{s_{13}^E (1+\nu)}{2h} (q_3^+ + q_3^-) \right] \right\}$$

Уравнения второй группы служат для определения электрических величин. Выпишем их

$$\varphi^{(1)} = -E_3^{(0)}, \qquad \varphi^{(2)} = -\frac{1}{2}E_3^{(1)} + \frac{\varphi^{(1)}}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$E_i^{(1)} = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \alpha_i}, \qquad E_i^{(2)} = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \alpha_i}$$

$$E_3^{(1)} = -\frac{3d_{31}}{2h^3\varepsilon_{33}^T}(G_1 + G_2) - \left\{\frac{1}{2h}\frac{d_{31}}{\varepsilon_{33}^T}\left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2}\right) + \frac{d_{33}}{2h\varepsilon_{33}^T}(q_3^+ + q_3^-)\right\}$$

$$D_i^{(0)} = \varepsilon_{11}^T E_i^{(0)} - \frac{d_{15}}{4h}[3N_i + h(q_i^+ - q_i^-)] \tag{1.3}$$

$$D_i^{(1)} = \varepsilon_{11}^T E_i^{(1)} + \frac{d_{15}}{2h}(q_i^+ + q_i^-) + \left\{\varepsilon_{11}^T\left(\frac{1}{R_j} - \frac{1}{R_i}\right)E_i^{(0)} + \frac{d_{15}}{2R_j}(q_i^+ - q_i^-)\right\}$$

$$D_i^{(2)} = \varepsilon_{11}^T E_i^{(2)} + \frac{3d_{15}}{4h^3}[N_i + h(q_i^+ - q_i^-)] - \left\{\frac{d_{15}}{2hR_i}(q_i^+ + q_i^-)\right\}$$

$$D_3^{(1)} = -\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}A_2D_1^{(0)} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}A_1D_2^{(0)}\right)$$

Все используемые обозначения, кроме введенных формулой (1.1), взяты из [1].

Как и в [1], взята триортогональная система координат α_1, α_2, γ, где α_1, α_2-линии совпадают с линиями кривизны срединной поверхности оболочки, а γ-линии им ортогональны.

Каждая из искомых величин представлена в виде полинома по степеням γ, например,

$$E_3 = E_3^{(0)} + \gamma E_3^{(1)}$$

Остальные уравнения второй группы выпишем раздельно для случаев электродированных и неэлектродированных лицевых поверхностей.

Если лицевые поверхности полностью покрыты электродами, на которых известно значение электрического потенциала, то условия на лицевых поверхностях записываются следующим образом:

$$\varphi|_{\gamma=\pm h} = \pm V \tag{1.4}$$

и остальные уравнения второй группы принимают следующий вид:

$$E_3^{(0)} = -\frac{V}{h}, \qquad \varphi^{(1)} = \frac{V}{h}, \qquad \varphi^{(0)} = -h^2\varphi^{(2)}$$

$$E_i^{(1)} = 0, \quad D_3^{(0)} = \varepsilon_{33}^T E_3^{(0)} + \frac{d_{31}}{2h}(T_1 + T_2) + \left\{\frac{d_{33}}{2}(q_3^+ - q_3^-)\right\} \tag{1.5}$$

$$(i+1)D_3^{(i+1)} = -\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}A_2D_1^{(i)} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}A_1D_2^{(i)}\right) \quad (i = 1, 2)$$

На неэлектродированных лицевых поверхностях должно выполняться следующее условие:

$$D_3|_{\gamma=\pm h} = 0 \tag{1.6}$$

и уравнения (1.3) надо дополнить следующими формулами:

$$E_3^{(0)} = -\frac{d_{31}}{2hs_{33}^T}(T_1+T_2) - \frac{d_{33}}{2s_{33}^T}(q_3^+ - q_3^-)$$

$$E_i^{(0)} = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial\alpha_i}, \quad D_3^{(0)} = -h^2D_3^{(2)} \tag{1.7}$$

$$D_3^{(1)} = -h^2D_3^{(3)}, \quad D_3^{(3)} = -\frac{1}{2A_1A_2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2D_1^{(2)} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1D_2^{(2)}\right)$$

Последнее уравнение из (1.3) можно с помощью формул (1.3), (1.7) записать таким образом:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)\left(\psi^{(0)} + \frac{h^2}{3}\psi^{(2)}\right) +$$

$$+ \frac{d_{15}}{2hs_{11}^T}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2N_1 + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1N_2\right) = 0 \tag{1.8}$$

Для оболочек с электродированными лицевыми поверхностями, на которых заданы условия (1.4), первая группа уравнений представляет замкнутую систему уравнений относительно механических величин. После того как найдены механические величины, электрические величины определяются прямыми действиями по формулам второй группы (1.3), (1.5). Для оболочки с лицевыми поверхностями, не покрытыми электродами, уравнения второй группы содержат дифференциальное уравнение (1.8) относительно электрического потенциала $\psi^{(0)}$, и вопрос о возможности раздельного определения механических и электрических величин должен решаться в зависимости от вида условий на краях оболочки.

2. Полное электроупругое состояние пьезокерамической оболочки так же, как в теории неэлектрических оболочек [2], будем представлять в виде суммы внутреннего электроупругого состояния, описываемого двумерными уравнениями [1], и погранслоя — существенно трехмерного электроупругого состояния, локализованного вблизи края.

На краю оболочки внутреннее электроупругое состояние и погранслой связаны граничными условиями. Чтобы получить двумерные граничные условия, надо исследовать взаимодействие внутреннего электроупругого состояния с погранслоем подобно тому, как это сделано в [2].

При выводе граничных условий будем допускать погрешность порядка ε, где

$$\varepsilon = O(\eta^{2-2t}) \tag{2.1}$$

здесь η — отношение полутолщины оболочки h к характерному размеру

R, t — показатель изменяемости внутреннего электроупругого состояния. С такой же погрешностью получены уравнения пьезокерамических оболочек в [1].

Будем считать, что рассматриваемый край оболочки совпадает с линией $\alpha_1 = \alpha_{10}$ и выполним обычную для асимптотического метода замену переменных

$$\alpha_1 - \alpha_{10} = R\eta\xi_1, \quad \alpha_2 = R\eta^{t}\xi_2, \quad \gamma = R\eta\zeta \tag{2.2}$$

Это преобразование означает, что отыскивается электроупругое состояние, которое имеет одинаково большую изменяемость по переменным α_1 и γ и гораздо меньшую изменяемость по переменной α_2.

Следуя [2], выполним расчленение уравнений погранслоя на уравнения плоского и антиплоского погранслоев. В исходном приближении уравнения плоского погранслоя представляют уравнения плоской задачи электроупругости, а уравнения антиплоского погранслоя с точностью до коэффициентов совпадают с уравнениями антиплоской задачи теории упругости.

Для искомых величин плоского и антиплоского погранслоев примем следующую асимптотику (ее справедливость подтверждается тем фактом, что в исходном приближении эта асимптотика приводит к непротиворечивым системам уравнений):

$$(S_{21}^k,\ S_{12}^k,\ S_{23}^k,\ v_2^k/h,\ D_2^k) = \eta^{r}(S_{21*}^k,\ S_{12*}^k,\ S_{23*}^k,\ V_{2*}^k,\ D_{2*}^k) \tag{2.3}$$

$$(S_{11}^k,\ S_{22}^k,\ S_{33}^k,\ S_{13}^k,\ v_1^k/h,\ v_3^k/h,\ \varphi^k/h,\ E_1^k,\ E_3^k,\ D_1^k,\ D_3^k) =$$
$$= \eta^{1-t-r}(S_{11*}^k,\ S_{22*}^k,\ S_{33*}^k,\ V_{1*}^k,\ V_{3*}^k,\ \varphi_*^k,\ E_{1*}^k,\ E_{3*}^k,\ D_{1*}^k,\ D_{3*}^k)$$
$$E_2^k = \eta^{2-2t-r}E_{2*}^k \tag{2.4}$$

Степени η подобраны таким образом, чтобы величины со звездочками были одного порядка.

Верхний индекс k следует заменить индексом a, если искомая величина принадлежит антиплоскому погранслою, и индексом b, если величина относится к плоскому погранслою. Для антиплоской задачи следует положить

$$r = 0 \tag{2.5}$$

а для плоской

$$r = 1 - t \tag{2.6}$$

Выполнив в трехмерных уравнениях пьезоупругости замену переменных (2.2) и приняв во внимание асимптотику (2.3)—(2.6), разобьем полученную систему на две подсистемы. В одной из подсистем главными являются величины антиплоского погранслоя (2.3), (2.5) в другой подсистеме главными являются величины плоского погранслоя (2.4), (2.6).

Выпишем в исходном приближении уравнения антиплоского и плоского погранслоев

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial S^{a}_{21*}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial S^{a}_{23*}}{\partial\zeta}=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial V^{a}_{2*}}{\partial\xi_1}=s^{E}_{66}S^{a}_{21*}=s^{E}_{66}\,S^{a}_{12*}\qquad(2.7)$$

$$\frac{\partial V^{a}_{2*}}{\partial\zeta}=s^{E}_{44}S^{a}_{23*},\qquad D^{a}_{2*}=d_{15}S^{a}_{23*}$$

$$S^{a}_{23*}\big|_{\zeta=\pm1}=0\qquad(2.8)$$

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial S^{b}_{11*}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial S^{b}_{13*}}{\partial\zeta}=0,\quad\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial S^{b}_{31*}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial S^{b}_{33*}}{\partial\zeta}=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial V^{b}_{1*}}{\partial\xi_1}=s^{E}_{11}S^{b}_{11*}+s^{E}_{12}S^{b}_{22*}+s^{E}_{13}S^{b}_{33*}+d_{31}E^{b}_{3*}$$

$$s^{E}_{12}S^{b}_{11*}+s^{E}_{11}S^{b}_{22*}+s^{E}_{13}S^{b}_{33*}+d_{31}E^{b}_{3*}=0$$

$$\frac{\partial V^{b}_{3*}}{\partial\zeta}-s^{E}_{13}S^{b}_{11*}-s^{E}_{13}S^{b}_{22*}-s^{E}_{33}S^{b}_{33*}-d_{33}E^{b}_{3*}=0$$

$$\frac{\partial V^{b}_{1*}}{\partial\zeta}+\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial V^{b}_{3*}}{\partial\xi_1}-s^{E}_{44}S^{b}_{13*}-d_{15}E^{b}_{1*}=0$$

$$D^{b}_{1*}-\varepsilon^{T}_{11}E^{b}_{1*}-d_{15}S^{b}_{13*}=0\qquad(2.9)$$

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial D^{b}_{1*}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial D^{b}_{3*}}{\partial\zeta}=0$$

$$D^{b}_{3*}=\varepsilon^{T}_{33}E^{b}_{3*}+d_{31}(S^{b}_{11*}+S^{b}_{22*})+d_{33}S^{b}_{33*}$$

$$E^{b}_{1*}=-\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial\psi^{b}_{*}}{\partial\xi_1},\qquad E^{b}_{3*}=-\frac{\partial\psi^{b}_{*}}{\partial\zeta}$$

$$A_{10}=A_{1}\big|_{\xi_1=0}$$

$$S^{b}_{33*}\big|_{\zeta=\pm1}=0,\quad S^{b}_{13*}\big|_{\zeta=\pm1}=0\qquad(2.10)$$

$$\psi^{b}_{*}\big|_{\zeta=\pm1}=0\qquad(2.11)$$

$$D^{b}_{3*}\big|_{\zeta=\pm1}=0\qquad(2.12)$$

Так как механическая и электрическая нагрузки учитываются при интегрировании уравнений внутреннего электроупругого состояния, то для погранслоя взяты нулевые условия на поверхностях $\zeta=1$ и $\zeta=-1$ (2.8), (2.10)—(2.12).

3. Рассмотрим свободный край $\alpha_1=\alpha_{10}$ оболочки с электродированными лицевыми поверхностями и неэлектродированной поверхностью края.

Трехмерные граничные условия в рассматриваемом случае имеют следующий вид:

$$\sigma_{11}=0,\quad\sigma_{21}=0,\quad\sigma_{31}=0,\quad D_1=0\qquad(3.1)$$

Число p определяется из решения II вспомогательной задачи по формуле

$$p = \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^{0} S^b_{22*} A_{10} \xi_1 A_{10} d\xi_1 + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \zeta^2 S^b_{1*}\big|_{\xi_1=0} d\zeta$$

Граничные условия на свободном электродированном крае $\xi_1 = 0$ имеют следующий вид:

$$T_1 = 0, \quad S_1 - n_1 \frac{h d_{31}}{2\varepsilon^T_{33}} \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2} = 0$$

$$N_1 - \frac{h}{R_2} \frac{n_1 d_{31}}{2\varepsilon^T_{33}} T_2 - \frac{1}{A_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} = 0$$

$$G_1 + 3l \frac{h}{A_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} = 0, \qquad \psi^{(0)} - \frac{d_{31}}{4h\varepsilon^T_{33}} \left(G_2 - 3l \frac{h}{A_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \right) = V$$

Для вычисления n_1 надо решить вспомогательную плоскую задачу со следующими торцевыми условиями:

$$S^b_{11*} = 0, \quad S^b_{12*} = 0, \quad \psi^b_* + \zeta = 0$$

а затем вычислить n_1 по формуле:

$$n_1 = \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^{0} S^b_{22*} A_{10} d\xi_1$$

Последние граничные условия получены с точностью до величин порядка η^1. Это связано с тем, что в граничном условии для перерезывающего усилия второй член, учитывающий влияние погранслоя, $O(\eta^l)$ по сравнению с главным первым членом. Вычислив константу n_1 с точностью до величин $O(\eta^{1-l})$, получим граничные условия с точностью до величин $O(\eta^1)$.

Итак, получены граничные условия для оболочек с предварительной поляризацией в направлении нормали к срединной поверхности. Для оболочек с электродированными лицевыми поверхностями они оказались аналогом граничных условий неэлектрических оболочек.

Полная система уравнений, описывающая оболочки, неимеющие электродов на лицевых поверхностях, десятого порядка. В соответствии с этим на каждом крае оболочки получено пять граничных условий — четыре механических и одно, связывающее электрический потенциал с моментами и усилиями. Если все края такой оболочки неэлектродированы, то механическую и электрическую задачи можно решать раздельно. Если же хоть один край оболочки электродирован, задача не допускает расчленения на механическую и электрическую задачи.

ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐ ՊՅԵԶՈԿԵՐԱՄԻԿ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Ն. Ն. ՌՈԳԱՉԵՎԱ

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում մոտավոր մեթոդով ստացված են միջին մակերևույթի նորմալի ուղղությամբ բևեռացված պյեզոկերամիկ թաղանթների տեսության ճշգրտված եզրային պայմաններ։ Որպես ելակետային հավասարումներ վերցված են պյեզոառաձգականության եռաչափ հավասարումները։ Պյեզոկերամիկական թաղանթի լրիվ էլեկտրաառաձգական վիճակը դիտարկվում է որպես ներքին էլեկտրաառաձգական վիճակի և սահմանային շերտի գումար։ Նրանց փոխներգործության հաշվառումով եզրի վրա ստացված են երկչափ եզրային պայմաններ։

BOUNDARY CONDITION IN PIEZOCERAMIC SHELL THEORY

N. N. ROGACHEVA

Summary

In this paper an approximate method is used to obtain refined boundary conditions of the theory of piezoceramic shell, polarized in normal direction. Three-dimensional equations of piezoelasticity are taken as initial. The complete electroelastic state of a piezoelastic shell is considered as a sum of the entire electroelastic state and the boundary layer. Taking into account their interaction at the edge, two-dimensional boundary conditions are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рогачева Н. Н.* Уточненная теория пьезокерамических оболочек.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1981, т. 34, № 1.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976.
3. *Улитко А. Ф.* К теории колебаний пьезокерамических тел. В кн. «Тепловые напряжения в элементах конструкций». 15. К.: Наукова думка, 1975.

Институт проблем механики АН СССР

Поступила в редакцию 10. II. 1982

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 6, 1983 Механика

УДК 539.3

КОНТАКТНЫЕ И СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ И СОСТАВНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

Б. Л. АБРАМЯН

Показываются решения некоторых смешанных и контактных пространственных задач теории упругости, которые были исследованы в Институте механики АН Арм.ССР применением методов различных интегральных преобразований для полного и неполного промежутков и представлением искомых величин в рассмотренных задачах в виде сумм нескольких разложений по ортогональным функциям.

Приводятся решения осесимметричных задач: для весомого цилиндра конечной длины (Н. Х. Арутюнян и Б. Л. Абрамян); для упругого полупространства с вертикальным цилиндрическим отверстием при смешанных граничных условиях на поверхности отверстия (Н. Х. Арутюнян и Б. Л. Абрамян); о контакте двух пространственных слоев из различных материалов, имеющих одинаковые цилиндрические отверстия (В. С. Макарян); для весомого сплошного конуса конечной длины, закрепленного по сферической поверхности (Н. Х. Арутюнян и Б. Л. Абрамян), а также несимметричной задачи о контакте жесткого цилиндра с круглым плоским основанием с упругим полупространством (Б. Л. Абрамян).

53 с., илл. 3, библиогр. 90 назв.

Полный текст статьи депонирован в ВИНИТИ за № 2544-81 Деп. 28 мая 1981 г.

Поступила в редакцию 12. II. 1980

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 6, 1983 Механика

УДК 539.3:534.1

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН МЕТОДОМ ЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ

А. Т. МАНАНДЯН

Рассматривается задача устойчивости прямоугольных пластин со смешанными граничными условиями методом локальных вариаций. Метод прост по логике, легко учитывает ограничения (вытекающие из граничных условий), которые представляют трудности при использовании ряда других методов, и не требует большой памяти ЭВМ.

В виде графиков приведены полученные значения критических нагрузок при различных отношениях сторон и разных типах граничных условий.

Численные результаты, полученные по примененному методу, отличаются от точных не более 3—5%.

9 с., илл. 2, библиогр. 3 назв.

Полный текст статьи депонирован в ВИНИТИ за № 3144-83 Деп. 8/VI-83 г.

Поступила в редакцию 10. III. 1981