

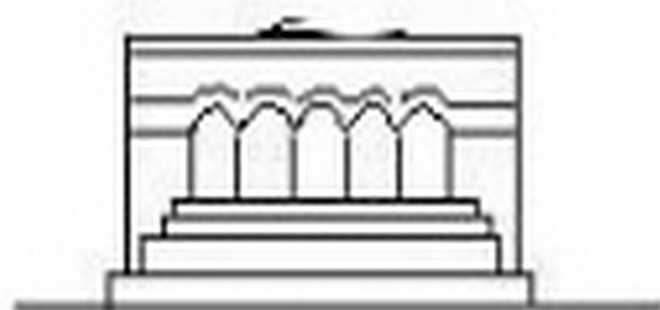
ՄԵԽԱՆԻԿԱ



МЕХАНИКА



MECHANICS



1983

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В МИКРОПОЛЯРНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

БАГДОВЕ А. Г., ПЕТРОСЯՆ Ա. Գ.

Уравнения двумерных, нестационарных коротких волн^{*} для газовой динамики были получены в работе [1]. Учет вязкости для классических (симметричных) жидкостей был сделан в [2]. Исследованию волновых фронтов в линейной постановке для широкого круга сред посвящены работы [3, 4]. Распространение волн в электропроводящей жидкости в магнитном поле для классических жидкостей рассмотрено в [5]. Построению общего вида уравнения коротких волн для теплопроводящей жидкости с несимметричным тензором напряжений посвящены работы [6, 7].

Как показано в [6, 7], в несимметричных жидкостях в уравнениях, описывающих окрестность волны, члены, соответствующие вращательной и моментным вязкостям, выпадают из окончательных уравнений.

Представляет интерес обобщение полученных ранее результатов на более сложные среды, а именно, электропроводящую жидкость в магнитном поле с несимметричным тензором напряжений и содержащей газы пузырьки, с целью выяснения роли моментных эффектов и газовых пузырьков на форму упрощенных нелинейных уравнений, списывающих окрестность волн в слабодиссипативных диспергирующих средах.

Примером рассматриваемой среды является электропроводящая жидкость, образующаяся, например, при электрическом разряде в жидкости, содержащей пузырьки газа и являющейся микрополярной.

В настоящей работе дается построение общего вида уравнений коротких волн, описывающих изменения параметров произвольной нелинейной слабо диссипативной среды в окрестности волн малой интенсивности для электропроводящей жидкости, содержащей пузырьки газа, с несимметричным тензором напряжений (моментная теория) в магнитном поле. Получены уравнения медленно меняющихся амплитуд и фаз квазимонохроматических волн. Дается упрощение уравнений модуляций для типично дифракционной задачи, в которой определяющими являются производные вдоль волны. Исследуются решения полученных уравнений на устойчивость. Решена задача об узких пучках.

1. Уравнения коротких волн для задачи магнитной газодинамики несимметричных жидкостей. Уравнения несимметричной магнитной гидродинамики в отсутствие внешних сил и моментов имеют вид [8, 9]

* Термин «короткие волны» был введен в работе [1] для выделения областей в окрестности волн, где параметры движения резко изменяются.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\right) \vec{v} + \nabla \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\right) \vec{v} - \mu_r (\vec{H} \cdot \nabla) \vec{H} = - \nabla \left(p + \frac{\rho H^2}{2}\right) + \\ + (\mu_0 + \mu - \mu_r) \nabla \nabla \cdot \vec{v} + (\mu + \mu_r) \nabla^2 \vec{v} + 2 \mu_r \nabla \times \vec{\omega} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \rho I \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\right) \vec{\omega} = (c_s + c_d - c_n) \nabla \nabla \cdot \vec{\omega} + (c_d + c_n) \nabla^2 \vec{\omega} + \\ + 2 \mu_r (\nabla \times \vec{v} - 2 \vec{\omega}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\right) \vec{H} - (\vec{H} \cdot \nabla) \vec{v} + \vec{H} (\nabla \cdot \vec{v}) = \gamma_H \nabla^2 \vec{H} \quad (1.4)$$

Здесь ρ — массовая плотность; p — давление; I — скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы; $\vec{v}$ — вектор скорости точки; $\vec{\omega}$ — вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума; ∇ — пространственный градиент; μ_0 — объемная вязкость; μ — динамическая ньютоновская вязкость; μ_r — динамическая прациательная вязкость; c_s , c_d , c_n — динамические моментные вязкости; $\vec{H}$ — вектор напряженности магнитного поля; μ_r — магнитная постоянная; $\gamma_H = 1/\beta \mu$ — коэффициент магнитной вязкости; β — электропроводность среды.

Ниже рассматривается гомогенная электропроводящая жидкость, представляющая собой простейшую модель жидкости с пузырьками газа, в которой пренебрегают всеми эффектами, связанными с пузырьковой структурой газо-содержания, за исключением сжимаемости [10].

Обозначим величины, относящиеся к газовой фазе, индексом g , а жидкости — индексом l ; например, ρ_g и ρ_l означают плотности жидкости и газа соответственно. Определим β как объем газа в единице объема смеси, тогда для плотности газа имеем [10]

$$\rho = \rho_l (1 - \beta) + \rho_g \beta \quad (1.5)$$

Если допустить, что газ и жидкость движутся с одинаковой скоростью, то массу газа в единице массы смеси можно считать постоянной [10]

$$\rho_g \beta / \rho_l (1 - \beta) = \text{const} \quad (1.6)$$

В континуальной теории вкладом газа в массовую плотность обычно пренебрегают, тогда взамен (1.5) запишем [10]

$$\rho = \rho_l (1 - \beta) \quad (1.7)$$

Учитывая, что при постоянной температуре T (изотермический процесс) давление в газе p_g пропорционально ρ_g , равенство (1.6) можно получить в виде [10]

$$p_g \beta / (1 - \beta) = \text{const} \quad (1.8)$$

Пользуясь условием непрерывности напряжений на границе пузырька, в том числе и вязких напряжений, и предполагая отсутствие фазовых превращений на границе раздела жидкость-пар, можно получить для давления в жидкости на стенке пузырька следующее выражение [10]:

$$p_s - p = p_f R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} p_f \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} \quad (1.9)$$

где R — радиус пузырька. Заметим, что уравнение (1.9) сохраняет свой вид и в случае несимметричных жидкостей.

Здесь допускается, что соотношение (1.9) между p и p_s существует и в смеси.

Уравнение состояния совершенного изотермического газа для пузырька имеет вид

$$p_g R^3 = \text{const} \quad (1.10)$$

Для решения задачи имеем систему уравнений (1.1) — (1.4), (1.7) — (1.9).

Получим условия совместности (обобщенные) на волнах.

Условия совместности получаются следующей заменой [11] в уравнениях (1.1) — (1.4):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\partial, \quad \nabla \rightarrow n\partial, \quad \lambda = -\frac{\partial F}{\partial t}, \quad n = \nabla F \quad (1.11)$$

Здесь $\partial = \frac{\partial}{\partial F}$ — производная по нормали к волне; λ — нормальная скорость

волны; n — единичный вектор нормали к волне; $F = F(x, y, z, t) = 0$ — уравнение поверхности волны. Как показано в [6], при определении слагаемых, соответствующих малым диссипативным членам, следует оставлять только производные по нормали к волне. Предположено, что производные по касательной намного меньше производных по нормали.

Обычно соотношение (1.11) используется для гиперболических уравнений [11], однако, как показано в [6, 7, 12], их можно использовать при записи обобщенных условий совместности, в результате применения которых диссипативные члены формально включаются в формулу для нормальной скорости волны.

Из (1.1) — (1.4), (1.7) — (1.9) имеем

$$c_s \partial - \partial V_s = 0 \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} -\rho c_s \partial^2 v = & -n^2 p + (\mu_0 + \mu - \mu_s) n^2 [\partial(n \cdot v)] + \\ & + (\mu - \mu_s) \partial^2 v + 2\mu_s n^2 \times v + \mu_s (H \cdot n) \partial H - \mu_s n^2 \frac{\dot{H}^2}{2} \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$-\rho/c_n \partial_{nn} = (c_s + c_d + c_a) n^2 [\partial(n \cdot v)] + (c_d + c_a) \partial^2 v + 2\mu_s n^2 \times v - 4\mu_{sw} \quad (1.14)$$

$$-c_n \partial \vec{H} - H_n \partial \vec{v} + \vec{H} \partial V_n = \mu_f \partial^2 \vec{H} \quad (1.15)$$

$$\partial p_f = -\frac{p_f}{\beta} \frac{\partial \beta}{1-\beta}, \quad \partial \varphi = -\mu_f \partial \beta \quad (1.16), (1.17)$$

$$\partial R = -\frac{R}{3p_f} \partial p_f, \quad \partial p_f - \partial p = \mu_f R c_n^2 \partial^2 R - \frac{4\mu_f}{R} c_n^2 R \quad (1.18), (1.19)$$

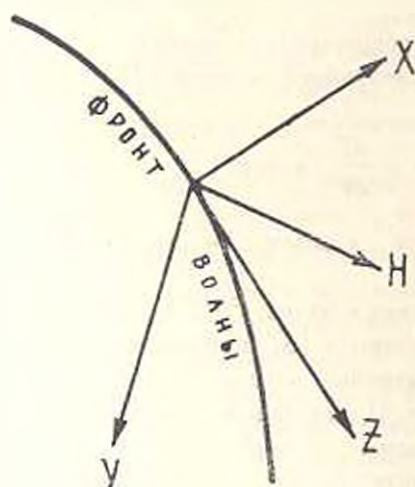
где c_n — нормальная скорость волны относительно частицы, V_n — проекция скорости частицы на нормаль к волне.

Отметим, что $\frac{d^2 R}{dt^2} = c_n^2 \partial^2 R$.

Уравнения (1.16), (1.18) и (1.19) получены после взятия производной от (1.8), (1.9) и (1.10), при этом в (1.19) отброшены малые высшего порядка.

Выберем ось x по нормали к волне, а y и z — по касательной к ней, причем начальное магнитное поле $\vec{H}$ находится в плоскости x, y (фиг. 1).

Запишем уравнения (1.2)–(1.15) в проекциях



Фиг. 1.

$$c_n \partial \omega - \partial V_x = 0 \quad (1.20)$$

$$-\mu c_n \partial V_x = -\partial p +$$

$$+ (\mu_0 + 2\mu) \partial^2 V_x - \mu_f H_y \partial H_y \quad (1.21)$$

$$-\mu c_n \partial V_y = (\mu + \mu_f) \partial^2 V_y -$$

$$- 2\mu_f \partial \omega_x + \mu_f H_x \partial H_x \quad (1.22)$$

$$-\mu_f c_n \partial \omega_x = (c_d + c_n) \partial^2 \omega_x +$$

$$+ 2\mu_f \partial V_y - 4\mu_f \omega_x \quad (1.23)$$

$$-c_n \partial H_x = \mu_f \partial^2 H_x - c_n \partial H_y - H_x \partial V_y +$$

$$+ H_y \partial V_x = \mu_f \partial^2 H_y \quad (1.24), (1.25)$$

Для рассматриваемых здесь быстрых и медленных магнитозвуковых волн $\partial V_x = \partial H_x = 0$.

Заметим, что уравнению (1.24) удовлетворяет решение $\partial H_x = 0$, тогда взамен (1.24) будем иметь

$$\partial H_x = 0$$

Из уравнений (1.16) и (1.17) получим

$$\partial p_f = a^2 \partial \varphi, \quad a^2 = \frac{\mu_f}{\rho_f} \frac{1}{(1-\beta)\beta} \quad (1.26)$$

где a — скорость звука в жидкости с пузырьками.

Из этого выражения следует вывод о том, что скорость звука в жидкости с пузырьками газа намного меньше скорости звука в чистом газе.

если величина β не очень близка к единице или нулю (при $\beta = 0.5$ имеем минимальное значение для скорости звука в смеси).

Из соотношения (1.18), считая $R/\beta p_g$ медленно меняющимся, вычисляя приближенные значения $\delta^2 R$ и $\delta^3 R$ и подставляя в (1.19), получим

$$\delta p = \delta p_g + \frac{R^2}{2\beta p_g} c_n^2 \delta^3 p_g - \frac{4\mu}{2\beta p_g} c_n \delta^2 p_g \quad (1.27)$$

Из (1.26), вычисляя приближенные значения $\delta^2 p_g$ и $\delta^3 p_g$ и подставляя в (1.27), получим

$$\delta p = a^2 \delta p - \frac{4\mu}{3\beta p_g} c_n a^2 \delta^3 p + \frac{2R^2 c_n^2}{3\beta p_g} a^2 \delta^3 p \quad (1.28)$$

Подставляя из (1.20) значение δV_x и из уравнения (1.28) значение δp в уравнения (1.21) и (1.25), получим

$$\begin{aligned} -c_n^2 \delta \rho = -a^2 \delta \rho + \frac{4\mu}{3\beta p_g} c_n a^2 \delta^3 \rho - \frac{2R^2 c_n^2}{3\beta p_g} a^2 \delta^3 \rho + \\ + (\mu_0 + 2\mu) \frac{c_n}{\rho} \delta \rho - \mu_s H_g \delta H_g \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$-c_n \delta H_g - H_g \delta H_g + H_g \frac{c_n}{\rho} \delta \rho = \gamma_H \delta^2 H_g \quad (1.30)$$

Отбросив в уравнениях (1.22), (1.23), (1.29) и (1.30) малые члены (в том числе вязкостные члены), получим

$$\begin{aligned} c^2 \delta p = a^2 \delta \rho + \mu_s H_g \delta H_g, \quad -c \delta V_g - \mu_s H_g \delta H_g \\ - c \delta H_g - H_g \delta V_g + H_g \frac{c}{\rho} \delta \rho = 0 \quad (c_n = c) \end{aligned} \quad (1.31)$$

Из этих уравнений в линейном приближении находим для c известную формулу [11]

$$c^4 - c^2 \left[a^2 + \frac{\mu_s}{\rho} (H_g^2 + H_q^2) \right] + \frac{\mu_s a^2}{\rho} H_g^2 = 0$$

В уравнении (1.23) можно считать члены, содержащие I и $(c_0 + c_1)$ малыми и получить $\omega_i \approx \frac{1}{2} \delta V_g$; затем подставляя в вышеуказанное уравнение, получим

$$\omega_i = \frac{1}{2} \delta V_g + \frac{\mu c_0}{8\mu_s} \delta^2 V_g + \frac{c_0 + c_1}{8\mu_s} \delta^3 V_g$$

Полученное значение ω_i подставим в уравнение (1.22), при этом получим

$$-\mu c_n \delta V_g = \mu \delta^2 V_g - \frac{\mu c_0}{4} \delta^3 V_g - \frac{c_0 + c_1}{4} \delta^4 V_g + \mu_s H_g \delta H_g \quad (1.32)$$

Для решения задачи имеем уравнения (1.29), (1.30) и (1.32).

Из первого и второго уравнений системы (1.31) находим

$$\delta V_y = - \frac{c^2 - a^2}{2c} \frac{H_x}{H_y} \delta \varphi \quad (1.33)$$

Полученное значение δV_y подставим в малые члены уравнения (1.32), тогда получим

$$\begin{aligned} -\rho c_n \delta V_y = & - \frac{\mu (c^2 - a^2)}{2c} \frac{H_x}{H_y} \delta^2 \varphi + \frac{l(c^2 - a^2)}{4} \delta^2 \varphi \frac{H_x}{H_y} + \\ & + \frac{(c_n + c_d)(c^2 - a^2)}{42c} \frac{H_x}{H_y} \delta^4 \varphi + \mu_r H_x \delta H_y \end{aligned} \quad (1.34)$$

Здесь в малых членах c_n заменено на c .

Подставляя из первого уравнения системы (1.31) значение δH_x в малые члены (1.30), будем иметь

$$-c_n \delta H_y - H_x \delta V_y + H_y \frac{c_n}{2} \delta \varphi = \frac{\nu_H (c^2 - a^2)}{\mu_r H_y} \delta^2 \varphi \quad (1.35)$$

Из уравнений (1.29), исключая δV_x и δH_x при помощи уравнений (1.31) и (1.35), получим

$$\begin{aligned} c_n^2 - c^2 \left[a^2 + \frac{\nu_r}{2} (H_x^2 + H_y^2) \right] + a^2 \frac{\nu_r}{2} H_x^2 - \left[\frac{4\nu}{3p_2} c a^2 + \right. \\ \left. + (\nu_0 + 2\nu) \frac{c}{2} \right] \left(c^2 - \frac{\nu_r}{2} H_x^2 \right) + \frac{\mu_r (c^2 - a^2)}{2^2 c} H_x^2 + \nu_H c (c^2 - a^2) \Big\} \frac{\delta^2 \varphi}{2} - \\ - \left[\frac{\gamma R^2 c^3 a^2}{3 p_2} \left(c^2 - \frac{\nu_r}{2} H_x^2 \right) + \frac{\mu_r l (c^2 - a^2)}{4 p_2} H_x^2 \right] \frac{\delta^2 \varphi}{2} - \\ - \frac{\mu_r (c_n + c_d)(c^2 - a^2)}{4 p^2 c} H_x \frac{\delta^4 \varphi}{2} = 0 \end{aligned} \quad (1.36)$$

При получении (1.36) в малых членах c_n заменено на c .

В нелинейной диссипативной задаче можно записать

$$c_n = c + \gamma V_x + D' \frac{\delta^2 V_x}{\delta V_x} + E' \frac{\delta^3 V_x}{\delta V_x} + G' \frac{\delta^4 V_x}{\delta V_x} \quad (1.37)$$

Нетрудно показать, что [5]

$$\gamma + 1 = -x^0 \frac{c^2 - a_1^2}{a_{1,0}^2 + a_1^2 - 2c^2} + \frac{3}{2} \frac{a_{1,0}^2 - c^2}{a_{1,0}^2 + a_1^2 - 2c^2} \quad (1.38)$$

где

$$a_1^2 = \frac{\mu_r}{\rho_0} (H_{1,0}^2 + H_{y0}^2), \quad x^0 = \left| \frac{\partial (\gamma a_0)}{a_0 \partial \varphi} \right|_{\varphi=0, \gamma=a_{1,0}}$$

Из (1.6), (1.7), (1.9), (1.10) и (1.27), полагая $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$ и т. д., получим $x^0 = 1/\rho_0$.

Здесь $H_x = H_{x0} + H_x$, $H_y = H_{y0} + H_y$, причем H_{x0} , H_{y0} , γ_0 , a_0 — значения функций невозмущенной среды.

Из соотношения (1.37), подставляя значение c_0 в равенство (1.36), находим для D' , E' , G' следующие выражения:

$$D' = -M \left\{ \left[\frac{4\gamma}{3\rho_e} c a^2 + (\gamma_0 + 2\mu) \frac{c}{\rho} \right] \left(c^2 - \frac{\rho_e}{\rho} H_x^2 \right) + \frac{\mu \rho_e (c^2 - a^2)}{\rho^2 c} H_x^2 + \right.$$

$$\left. + \gamma_H c (c^2 - a^2) \right\}, \quad E' = M \left[\frac{\rho_f R^2 c^2 a^2}{3\rho_e} \left(c^2 - \frac{\rho_e}{\rho} H_x^2 \right) + \frac{\mu R (c^2 - a^2)}{4\rho} H_x^2 \right] \quad (1.39)$$

$$G' = M \frac{\rho_e (c_a + c_d) (c^2 - a^2)}{4\gamma^2 c} H_x^2, \quad M = \frac{1}{2c [2c^2 - (a^2 + a_1^2)]} \quad (1.41)$$

Уравнения коротких волн несимметричных электропроводящих жидкостей запишутся в виде [6, 7]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \tau} - \frac{1}{2} L(u) - \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \ln \Phi}{\partial t} = - \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\Gamma u \frac{\partial u}{\partial \tau} + D \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \right. \\ \left. + E \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} + G \frac{\partial^4 u}{\partial \tau^4} \right] \\ L = \frac{\Delta_{11}}{\gamma_k \Delta_{1k}} \left[\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \right] \quad (1.42)$$

Здесь $dx = H_1 dx_1$; $H_1 = c + V_n$ — нормальная скорость волны линейной задачи; x_1, x_2, x_3 — компоненты волнового вектора в системе координат x, y, z ; $\Delta(x_1, x_2, x_3) = 0$ — дисперсионное соотношение в линейной задаче; Φ — амплитуда u для лучевого решения; $u = V$, ($\Gamma = \gamma + 1$);

$$\gamma = \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad D = \frac{D'}{H_1}, \quad E = \frac{E'}{H_1^2}, \quad G = \frac{G'}{H_1^3}$$

Для определения коэффициентов при производных от u по y и z следует использовать соотношения [5]

$$\alpha_1 V_{x0} + \alpha_2 V_{y0} + \alpha_3 V_{z0} + c \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} = 1$$

$$c^4 - c^2 (a_{x0}^2 + a_{y0}^2) + \alpha_{x0}^2 \frac{(H_{x0} x_1 + H_{y0} x_2)^2}{\rho (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} = 0$$

где $\vec{V}_0 = \vec{V}_0(V_{x0}, V_{y0}, V_{z0})$ — вектор скорости частиц в невозмущенном движении.

В случае подвижной системы координат, связанной с волной, $\alpha_1 \approx 0$, $\alpha_2 \approx 0$. Тогда скорость волны будет [6]

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}} \approx \frac{1}{\alpha_3}, \quad \text{а} \quad \frac{\Delta x_2}{\gamma_k \Delta_{1k}} \approx \frac{1}{\alpha_1} \quad (1.43), (1.44)$$

Учитывая малость α_2 , α_1 вблизи оси x_1 при $H_{x0} \approx 0$, можно получить

$$\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_1^2} = \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} = -\frac{c^2}{2c^2 - \alpha_{10}' - \alpha_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = 0 \quad (1.45)$$

2. Уравнение для медленно меняющихся амплитуд и фаз квазимонохроматических волн. Для простоты рассмотрим однородную среду и плоскую волну, для которых лучевое решение $\Phi = \text{const}$.

Ищем решение уравнения (1.42) в виде волн

$$u = U_0 + \frac{1}{2} (U_1 \exp(i\theta - \nu \alpha^2 t) + \bar{U}_1 \exp(-i\theta - \nu \alpha^2 t) + U_2 \exp(2i\theta - 2\nu \alpha^2 t) + \bar{U}_2 \exp(-2i\theta - 2\nu \alpha^2 t)) \quad (2.1)$$

где $\theta = \alpha z - \omega t$; $\alpha = \alpha_1 \omega_0 H_1$; ω_0 — частота в неподвижной системе координат; ν — коэффициент затухания; U_0, U_1, U_2 — медленно меняющиеся амплитуды; $\bar{U}_1, \bar{U}_2$ — комплексно сопряженные функции.

Подставляя значение u из (2.1) в уравнение (1.42) и приравнивая слагаемые при $e^0, e^{i\theta}, e^{2i\theta}$, получим

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial t \partial z} - \frac{1}{2} L(U_0) = -\frac{1}{H_1} \left[\Gamma \frac{\partial}{\partial z} \left(U_0 \frac{\partial U_0}{\partial z} \right) + \frac{1}{4} \Gamma \frac{\partial^3}{\partial z^3} (U_1 \bar{U}_1) \exp(-2\nu \alpha^2 t) + D \frac{\partial^3 U_0}{\partial z^3} + E \frac{\partial^3 U_0}{\partial z^3} + G \frac{\partial^3 U_0}{\partial z^3} \right] \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t \partial z} - \frac{\partial U_1}{\partial z} (i\omega + \nu \alpha^2) + i\alpha \frac{\partial U_1}{\partial t} + \omega \alpha U_1 - i\alpha^3 \nu U_1 - \frac{1}{2} L(U_1) = \\ = -\frac{1}{H_1} \left[-\Gamma \alpha^2 U_0 U_1 - \Gamma \frac{1}{2} \alpha^2 \bar{U}_1 U_2 \exp(-2\nu \alpha^2 t) + 3D i\alpha \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} - \right. \\ \left. - 3D \alpha^2 \frac{\partial U_1}{\partial z} - D i\alpha^3 U_1 - 6E \alpha^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} - 4E i\alpha^3 \frac{\partial U_1}{\partial z} + \alpha^4 E U_1 - \right. \\ \left. - 10G i\alpha^3 \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} + 5\alpha^4 G \frac{\partial U_1}{\partial z} + G i\alpha^5 U_1 \right] \quad (2.3) \end{aligned}$$

$$4\alpha^3 \nu U_2 - 4i\alpha^3 \nu U_2 = -\frac{1}{H_1} [-\alpha^2 U_1^2 \Gamma - 8i\alpha^3 U_2 D + 16\alpha^4 U_2 E + 32\alpha^5 i U_2 G] \quad (2.4)$$

При написании (2.4) опущены слагаемые $2i\alpha \frac{\partial U_2}{\partial t} - \frac{1}{2} L(U_2)$, что допустимо при $E\alpha^3 \gg 1$, и отбросены произведения U_2 .

Приравнявая в (2.3) члены, содержащие U_1 , получим линейное дисперсионное соотношение и коэффициент затухания

$$\omega = -\frac{1}{H_1} E \alpha^3, \quad \nu = -\frac{1}{H_1} D + \frac{1}{H_1} G \alpha^2 \quad (2.5), (2.6)$$

Из уравнения (2.4), с учетом (2.5) и (2.6), можно получить $U_2 \sim \varepsilon^2$ (ε — малая величина порядка U_1). Уравнение (2.3) после подстановки (2.5), (2.6) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t \partial \tau} + i\alpha \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial \tau} \left[1 - \frac{3}{H_1} E i \alpha^2 - \frac{2}{H_1} D \alpha^2 - \frac{4}{H_1} G \alpha^2 \right] + \\ + \frac{1}{H_1} (3 D i \alpha - 6 E \alpha^2 - 10 G i \alpha^3) \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} = \frac{1}{H_1} \left(\Gamma \alpha^2 U_0 U_1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2 \alpha^2 U_1 U_1^2 \exp(-2 \alpha^2 t)}{4 D i \alpha - 12 E \alpha^2 + 28 G i \alpha^3} \right) + \frac{1}{2} L(U_1) \end{aligned} \quad (2.7)$$

В неоднородной среде в (2.7) добавится член $i\alpha U_1 \frac{\partial \ln \Phi}{\partial t}$

3. Уравнения для амплитуд в задаче стационарной дифракции. Предположим, что размеры области по y и z имеют порядок $\sqrt{\epsilon}$, что является типичным для задач дифракции узких пучков. Тогда из уравнения (2.2) можно получить $U_0 \sim \epsilon^3$ и соответствующий член U_0 в уравнении (2.3) можно отбросить. Поскольку задача стационарная и имеет место

$\left(\frac{\partial U_1}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} \right)_{x_k} + \frac{\partial U_1}{\partial \tau}$, что следует из $\tau = \tau_1(x_k) - t$, где x_k — ис-

ходная система координат, то $\left(\frac{\partial U_1}{\partial t} \right)_{x_k} = 0$, причем $\left(\frac{\partial U_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial U_1}{\partial \tau}$. Для

дифракционных задач $\frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2}$ можно отбросить по сравнению с $\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2}$,

следовательно, уравнение (2.7) примет вид (в дальнейшем индекс при τ опущен)

$$\begin{aligned} i\alpha \frac{\partial U_1}{\partial \tau} \left(1 - \frac{3}{H_1} E \alpha^2 - \frac{2}{H_1} D \alpha^2 - \frac{4}{H_1} G \alpha^2 \right) = \\ = - \frac{1}{2 H_1} \frac{\Gamma^2 \alpha^2 U_1 |U_1|^2 \exp(-2 \alpha^2 t)}{4 D i \alpha - 12 E \alpha^2 + 28 G i \alpha^3} - \frac{1}{2 \alpha_1} \left[\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x_2 \partial \tau_3} \frac{\partial^2 U_1}{\partial y \partial z} \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Положим

$$U_1 = a e^{i\varphi} \quad (3.2)$$

где a — амплитуда, φ — фаза.

Рассмотрим плоскую задачу, зависящую от (τ, y) . Тогда из (3.1) получим для действительной части

$$\begin{aligned} -\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \left(1 - \frac{3}{H_1} E \alpha^2 \right) - \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} \left(\frac{2}{H_1} D \alpha - \frac{4}{H_1} G \alpha^3 \right) = \alpha_1 \alpha^3 + \\ + \frac{1}{2 \alpha \alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha^2} \left[\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} - \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

а для мнимой —

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} \left(1 - \frac{3}{H_1} E \alpha^2 \right) - \alpha \frac{\partial \tau}{\partial \tau} \left(\frac{2}{H_1} D \alpha - \frac{4}{H_1} G \alpha^3 \right) = \alpha_2 \alpha^3 + \\ + \frac{1}{2 \alpha \alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha^2} \left[\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь

$$\kappa_1 = 3 E \alpha^2, \quad \kappa_2 = (D \alpha - 7 G \alpha^2), \quad \zeta = \frac{1}{8} \frac{l^2 \exp(-2 \kappa_2 l)}{9 E^2 \alpha^2 + (D - 7 G \alpha^2)^2} \quad (3.5)$$

4. *Поперечная устойчивость плоских нестационарных волн.* Исследуем решение уравнений нестационарного движения (2.2) и (2.7) на устойчивость.

Будем рассматривать типичные задачи дифракции, в которых производные по y и z значительно превосходят производные по l , т. Тогда $U_0 \sim e^j$ и слагаемые U_0 в уравнении (2.7) можно отбросить. При исследовании на поперечную устойчивость производные по t следует отбросить.

Для простоты рассматриваем плоскую задачу по l, y .

Уравнение (2.7) для амплитуды, записанное в переменных l, y , после отбрасывания членов, содержащих U_0 и производных по t и после отделения действительной и мнимой частей, примет вид

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} a = \kappa_1 + \frac{1}{2 \alpha \alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_1^2} \left[\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} - a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (4.1)$$

для действительной части,

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \kappa_2 a^3 + \frac{1}{2 \alpha \alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_1^2} \left[a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \quad (4.2)$$

для мнимой части. Здесь было использовано выражение (3.2) для U_1 .

Дадим малые возмущения амплитуде a и фазе φ

$$a = a_0 + a', \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi' \quad (4.3)$$

В нестационарной задаче a_0, φ_0 для основного состояния являются функцией l : $a_0 = a_0(l)$, $\varphi_0 = \varphi_0(l)$.

В задаче поперечной устойчивости волн нестационарного движения следует полагать

$$a' = A \exp(i(\omega' t - \beta' y)), \quad \varphi' = \Phi \exp(i(\omega' t - \beta' y)) \quad (4.4)$$

то есть зависимостью от t пренебрегаем. Здесь A и Φ — амплитуды, которые считаются постоянными величинами, ω' и β' — частота и волновое число возмущенной волны.

Таким образом, рассматриваются поперечные возмущения, распространяющиеся вдоль волны.

Подставляя в уравнения (4.1) и (4.2) значения a и φ из (4.3), получим

$$-\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} a_0 = \kappa_1 a_0^3, \quad \frac{\partial a_0}{\partial t} = \kappa_2 a_0^3 \quad (4.5), (4.6)$$

$$-\frac{\partial \varphi'}{\partial t} a_0 = 2 a_0^3 a' \kappa_1 + \frac{1}{2 \alpha \alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_1^2} \frac{\partial^2 a'}{\partial y^2} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial a'}{\partial t} = 3 a_0^2 a' \kappa_2 + \frac{1}{2 \alpha \alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_1^2} a_0 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} \quad (4.8)$$

Подставляя значения возмущенных величин a' и φ' из (4.4) в (4.7) и (4.8), получим систему однородных уравнений для Φ , A , откуда получим

$$\omega' = -i \frac{3 a_0^2 x_2}{2} \pm$$

$$\pm \sqrt{-\left(\frac{3 a_0^2 x_1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2 a_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_1^2} (\beta')^2} \left| 2 a_0^2 x_1 - \frac{1}{2 a_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_1^2} (\beta')^2 \right| \quad (4.9)$$

Решение устойчиво при $\text{Im } \omega' > 0$. Так как $x_2 < 0$, при $\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_1^2} < 0$

знак мнимой части определяется первым членом в правой части выражения (4.9) для ω' , и решение устойчиво. Таким образом, для выпуклых волн волна в поперечном направлении устойчива. При $\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_1^2} > 0$ и $2 a_0^2 x_1 - \frac{1}{2 a_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_1^2} (\beta')^2 < 0$, то есть для незначительных амплитуд, решение снова устойчиво. При $\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_1^2} > 0$ и $2 a_0^2 x_1 - \frac{1}{2 a_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_1^2} (\beta')^2 > 0$

решение неустойчиво.

Итак, для вогнутых участков волн решение может быть устойчивым только для небольших амплитуд.

Полученный вывод позволяет сказать, что при распространении волн, выпуклые волны должны дефокусироваться, поскольку они устойчивы в поперечном к волновому вектору направлении. Вогнутые участки медленной магнитозвуковой волны в случае небольших амплитуд будут дефокусироваться, а в случае конечных амплитуд будут фокусироваться. Полученные выводы согласуются с решением для узких пучков, которое приводится ниже.

5. Решение задачи об узких пучках. Если считать, что магнитное поле направлено по оси x и указанная ось является осью симметрии пучка, то для осесимметричной задачи уравнения (3.3) и (3.4) запишутся в виде

$$\begin{aligned} -a \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \left(1 - \frac{3}{H_1} E x^2 \right) - \frac{\partial a}{\partial \tau} \left(\frac{2}{H_1} D x - \frac{4}{H_1} G x^3 \right) = \\ = x_1 a^3 + \frac{1}{2 x_{21}} \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_1^2} \left| \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial a}{\partial y} - a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right| \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial \tau} \left(1 - \frac{3}{H_1} E x^2 \right) - a \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \left(\frac{2}{H_1} D x - \frac{4}{H_1} G x^3 \right) = \\ = x_2 a^3 + \frac{1}{2 a_{21}} \frac{\partial^2 x_2}{\partial x_2^2} \left| a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{y} a \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| \end{aligned} \quad (5.2)$$

Решение (5.1), (5.2) ищем в виде

$$a = \frac{K}{f} e^{-\frac{y^2}{2 f^2}}, \quad \varphi = \tau + k \frac{y^2}{2} \quad (5.3)$$

где $K = \text{const}$, $f = f(\tau)$, $k = k(\tau)$, $k H_1 / \tau$ — кривизна поляны, $\eta_0 = \text{const}$ — начальная ширина пучка.

Подставляя (5.3) в (5.1) и (5.2), получим

$$-\left[z''(\tau) + k'(\tau) \frac{y^2}{2} \right] = z_1 \frac{K^2}{f^2} \exp\left(-\frac{y^2}{y_0^2 f^2}\right) + \frac{1}{2\alpha z_1} \frac{\partial^2 z_1}{\partial z_1^2} \left[-\frac{4}{f^2 y_0^2} + \right. \\ \left. + \frac{4}{f^4 y_0^4} y^2 - k^2 y^2 \right] \quad (5.4)$$

$$-\frac{f'}{f} + \frac{2y^2 f'}{y_0^2 f^2} = z_2 \frac{K^2}{f^2} \exp\left(-2\frac{y^2}{y_0^2 f^2}\right) + \frac{1}{2\alpha z_1} \frac{\partial^2 z_1}{\partial z_1^2} \left[2k - 4\frac{ky^2}{f^2 y_0^2} \right] \quad (5.5)$$

Здесь и далее штрих — производная по τ .

При получении уравнений (5.4) и (5.5) коэффициенты D , E , G предположены малыми по сравнению с единицей и соответствующие члены в левых частях (5.1) и (5.2) отброшены.

Считая, что пучки узкие, то есть $\frac{y}{y_0 f} \ll 1$, $\exp\left(-2\frac{y^2}{y_0^2 f^2}\right)$ разлагаем по степеням $\frac{y}{y_0 f}$ и оставляем первые степени, приравниваем члены порядка единицы и y^2 в (5.4) и (5.5), тогда получим уравнения

$$-z'(\tau) = z_1 \frac{K^2}{f^2} - \frac{1}{2\alpha z_1} \frac{\partial^2 z_1}{\partial z_1^2} \frac{4}{y_0^2 f^2} \quad (5.6)$$

$$-\frac{k'(\tau)}{2} = -z_1 \frac{K^2}{f^2} \frac{2}{y_0^2 f^2} + \frac{1}{2\alpha z_1} \frac{\partial^2 z_1}{\partial z_1^2} \left[\frac{4}{f^4 y_0^4} - k^2 \right] \quad (5.7)$$

$$-\frac{f'}{f} = z_2 \frac{K^2}{f^2} + \frac{1}{2\alpha z_1} \frac{\partial^2 z_1}{\partial z_1^2} k \quad (5.8)$$

Подставляя значение k из (5.8) в (5.7), получим

$$(f')^2 = -\frac{f}{f^2} + C \quad \text{или} \quad f' = -\sqrt{C - \frac{1}{f^2}} \quad (5.9)$$

Предполагаем, что начальное условие для f' имеет вид $f'(0) < 0$, что может выполняться при $\frac{\partial^2 z_1}{\partial z_1^2} k > 0$.

Здесь

$$k = -z_1 \frac{4}{2\alpha z_1} \frac{\partial^2 z_1}{\partial z_1^2} \frac{K^2}{y_0^2} + \frac{16}{y_0^4} \left(\frac{1}{2\alpha z_1} \frac{\partial^2 z_1}{\partial z_1^2} \right)^2 \quad (5.10)$$

При получении (5.9), в силу малости α , член, содержащий $\frac{\partial^2 z_1}{\partial z_1^2}$, отброшен. Постоянная интегрирования C определяется из граничных условий:

$$\text{при } \tau = 0, \quad f = 1, \quad k = \frac{1}{R_0}$$

Здесь $\frac{1}{R_0}$ — начальный радиус кривизны фронта волны.

Из формулы (5.8) имеем, что при $\tau = 0$

$$f = -\frac{1}{R_0} \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} - x_2 K^2$$

Тогда

$$C = \left(\frac{1}{R_0} \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} + x_2 K^2 \right)^2 + \frac{1}{2}$$

Из выражения (5.9) находим

$$\tau = \frac{\sqrt{Cf^2 - \frac{1}{2}}}{C} = \frac{\sqrt{C - \frac{1}{2}}}{C}$$

Значение τ для фокуса, в котором $f = 0$, действительно при $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} < 0$, причем для $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} < 0$, $\frac{1}{2} > 0$. Таким образом, быстрые магнито-газодинамические волны не самофокусируются, а медленные волны, для которых $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} > 0$, могут фокусироваться.

Согласно (1.40), (1.41) и (1.38) для быстрой волны, в которой $c = a_{+0}$, в коэффициенты D , E , G магнитное поле и микрополяризация не входят, а для медленной волны $c = a_{-0}$, $E = \frac{I}{8a_{-0}}$ магнитное поле приводит к фокусированию, причем условие преобладания дисперсии над диссипацией $I\alpha \gg \nu$. Подставляя (5.3) в (5.1) и (5.2) и записывая условие малости диссипативных членов в левых частях, а также условие существенности влияния диссипации в (5.10), получим условия применимости решения $\frac{K^2}{Ea^2} \gg 1$. При $a_{+0} < a_1$ фокусируется волна $c = a_{+0}$.

Путем прямой подстановки решения (2.1) в исходные уравнения для обычной непроводящей жидкости можно получить уравнения модуляций, которые совпадают с уравнениями, получаемыми из (2.2), (2.7), и тем самым обосновать применимость уравнений коротких волн (1.42) для получения вышеуказанных уравнений.

ԱՐԻՏՆԵՐԻ ՏԱՐԱՄՈՒՄԸ ԽԵՐՈՓՈՒՅԱԸ ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆՈՐԴԻՆԳ ՀԵՂՈՒԿՈՒՄԸ

Ա. Կ. ԲԱԿԻՆԵՎ, Լ. Դ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Ա. Մ. ՓԻՆԻՆ և Վ. Մ.

Տրվում է մագնիսական դաշտում դաշտի ոչ սիմետրիկ լարման տենզորով (մոմենտային տեսություն) դադի պղպշակների պարունակող, էլեկտրահաղորդիչ հեղուկի համար փոքր խտնախտության ալիքների շրջակայքում կամայական ոչ զծային թույլ դիսպատիվ միջավայրի պարամետրերը փոփոխությունը նկարագրող կարճ ալիքների հավասարումների բնդհանուր տեսքի կառուցումը: Ստացված են բավականախորհմամակ ալիքների դանդաղ փոփոխվող ամպլիտուդների և ֆազերի հավասարումները: Տրվելի դիֆրակցիոն խնդրի համար տրվում է մոդուլյացիայի հավասարումների պարզեցումը, որում որոշիչ են հանդիսանում ըստ ալիքի երկարության տծանցյալները: Հետազոտվում են ստացված հավասարումների լուծումները կալունության տեսակետից: Լուծված է նեղ փնջերի վերաբերյալ խնդիրը:

THE PROPAGATION OF WAVES IN MICROFOLAR ELECTROCONDUCTING FLUID

A. G. BAGDOEV, L. G. PETROSSIAN

Summary

The construction of the general form of equations of short waves describing the evolution of parameters of arbitrary nonlinear slowly dissipative medium in the vicinity of waves of small intensity for electroconducting fluid containing gas bubbles with asymmetrical stress tensor (moment theory) in magnetic field is performed. The equations of slow modulating amplitudes and phases of quasimonochromatic waves are obtained. The modulation equations are simplified for typical problem of diffraction in which the determining are the derivatives along the wave. The solution of the obtained equations is investigated on stability. The problem of narrow bundles is solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рунсон О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. — ПИММ, 1958, т. 22, № 5, с. 586—599.
2. Шенгер Г. М. Учет эффектов вязкости и теплопроводности при распространении импульсов в неоднородной движущейся жидкости. — ПИММ, 1969, т. 33, № 1, с. 162—168.
3. Бабич В. М. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов для анизотропной упругой среды. Сб. вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. — А.: АГУ, 1961, № 5, с. 36—46.
4. Бабич В. М., Кирилличева Н. Я. Метод пограничного слоя в задачах дифракции. — А.: АГУ, 1974, 124 с.
5. Бабич В. М., Дюнов З. Н. Исследования движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке. — Журнал Выч. мат. и матем. физики, 1972, т. 12, № 6, с. 1512—1529.
6. Багдоев А. Г., Петросян А. Г. Уравнения коротких волн для теплопроводящей жидкости с несимметричным тензором напряжений. I. Упрощенные уравнения коротких волн для произвольной нелинейной слабо диссипативной среды. — ЖТФ, 1980, т. 50, вып. 12, с. 2504—2511.
7. Багдоев А. Г., Петросян А. Г. Уравнения коротких волн для теплопроводящей жидкости с несимметричным тензором напряжений. II. Коэффициенты уравнений коротких волн для теплопроводящей жидкости с моментными напряжениями. — ЖТФ, 1980, т. 50, вып. 12, с. 2512—2519.
8. Петросян А. Г. К построению модели магнитной гидродинамики несимметричных жидкостей. — ПИМ, 1976, т. 12, № 11, с. 103—109.
9. Petrosjan L. G. Zur Konstruktion eines Modells der Magnetohydrodynamik asymmetrischen Flüssigkeiten. Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete Mathematics Abstracts, 1978, Band 366, Berlin, Heidelberg, New York, p. 462—464.
10. Ван Вейнторден Л. Одномерные течения жидкости с пузырьками газа. — Реология суспензий (сб. статей). М.: Мир, 1975, с. 68—103.
11. Jeffrey A., Taniuti T. Nonlinear wave propagation. — New York—London, Acad. Press, 1964, 369 p.
12. Багдоев А. Г. Уравнение нелинейной вязкотермомангнитной среды вблизи фронтов волн. — Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1974, т. 27, № 1, с. 63—77.

Институт механики АН Арм.ССР

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию

31. V. 1982

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ НЕОДНОРОДНО-СТАРЕЮЩИХ ТЕЛ С ДВУМЕРНОЙ ТРЕЩИНОЙ

АРУТЮНЯН Н. Х., НАЗАРОВ С. А., ШОЙХЕТ Б. А.

Получены и обоснованы асимптотические представления напряжений и смещений вблизи края двумерной трещины в трехмерном теле в теории упругости и теории ползучести неоднородно-стареющих тел. Вывод асимптотик базируется на коэрцитивных оценках решений задач теории упругости и теории ползучести в некоторых песовых пространствах [1] и на асимптотических представлениях решений плоских задач [2—4] и задачи кручения [5] в области с трещиной. Часть результатов статьи анонсирована в заметке [6].

1. *Постановка задач.* Пусть Ω_0 — связная, с гладкой (класса C^1) границей $\partial\Omega_0$ подобласть трехмерного пространства R^3 ; m — гладкая поверхность, а M — содержащееся в Ω_0 подмножество поверхности m , ограниченное гладким простым замкнутым контуром ∂M . Множество M определяет трещину в Ω_0 ; ее берега обозначим через M^+ и M^- . Изучаемое тело занимает область $\Omega = \Omega_0 \setminus M$. На берегах трещины заданы напряжения. Для определенности будем считать, что на внешней границе $\partial\Omega_0$ также действуют напряжения. Случай, когда к $\partial\Omega$ приложены смещения, рассматривается аналогично.

Уравнения краевой задачи теории ползучести неоднородно-стареющих тел имеют вид [7]

$$\epsilon_{jk}(t, x) = \epsilon_{jk}(u) \equiv (u_{j,k}(t, x) + u_{k,j}(t, x))/2, \quad j, k = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

$$z_{j,k}(t, x) + f_j(t, x) = 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

$$\frac{s_{jk}(t, x)}{2G(t + \chi(x), x)} = e_{jk}(t, x) - \int_0^t R_1(t - \tau, x(x), \tau + \chi(x), x) e_{jk}(\tau, x) d\tau \quad (1.3)$$

$$\frac{\sigma(t, x)}{E_2(t + \chi(x), x)} = e(t, x) - \int_0^t R_2(t - \tau, x(x), \tau + \chi(x), x) e(\tau, x) d\tau$$

$$e = e_{\mu\mu}/3, \quad e_{jk} \equiv \epsilon_{jk} - \delta_{jk} e, \quad \sigma \equiv \sigma_{\mu\mu}/3, \quad s_{jk} \equiv \tau_{jk} - \delta_{jk} \tau \quad (1.4)$$

$$\sigma_{jk}(t, x) n_k = g_j^+(t, x) \quad \text{на } M^+, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.5)$$

$$\sigma_{jk}(t, x) n_k = g_j^-(t, x) \quad \text{на } \partial\Omega_0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.6)$$

Здесь $u_i, e_{jk}, \varepsilon_k$ — декартовы компоненты смещений, напряжений и деформаций, соответственно; e_{jk}, s_{jk} — компоненты девиаторов напряжений и деформаций, e, ε — их шаровые части; $E_*(t, x), R_*(t, x)$ — модуль объемного расширения и ядро релаксации при всестороннем растяжении (сжатии), $G(t, x), R_1(t, x)$ — модуль сдвига и ядро релаксации при сдвиге; $v(x)$ — функция неоднородного старения, характеризующая закон изменения возраста материала в зависимости от пространственных координат; f_i, g_i^*, g_i — объемные и поверхностные нагрузки, удовлетворяющие при всех t условиям равновесия

$$\int_V f_i u_i^R dx + \int_M g_i^* u_i^R ds + \int_{\partial V} g_i u_i^R ds = 0 \quad (1.7)$$

для всякого поля смещений u^R тела, как жесткого целого, то есть для $u^R = a + b \times x$, где a, b — постоянные векторы.

Уравнения задачи теории упругости имеют вид (1.1) — (1.6), если все функции считать не зависящими от времени t , а в реологическом законе (1.3) положить $R_* = R_1 = 0$:

$$s_{jk}(x) = 2G(x)e_{jk}(x), \quad \varepsilon_k(x) = E_*(x)e(x) \quad (1.8)$$

Отметим известный факт: задача теории упругости является эллиптической в смысле А. Дуглиса, Л. Ниренберга [8].

Асимптотические разложения решений общих эллиптических краевых задач в областях с коническими (в частности, угловыми) точками изучены в работах [9, 10] и других. Последовательное применение указанных результатов в задачах теории упругости содержится в монографиях [11, 12]. Асимптотические представления вблизи ребер решений эллиптических краевых задач найдены в [13, 14]. Коэрцитивные оценки и теоремы Нётера для широкого класса таких задач содержатся в [15].

В случае, если на берегах трещины заданы напряжения, задача теории упругости не попадает в класс задач, изученных в [15, 13], так как нарушается сформулированное в этих работах требование однозначной разрешимости модельной задачи в двумерном угле. Необходимые для построения асимптотики коэрцитивные оценки решений задач теории упругости и теории ползучести в весовых функциональных пространствах выведены в [1].

2. Функциональные пространства и оценки решений. Пусть K — двугранный угол раствора 2π ; s — координата на его ребре: (y, y_*) и (r, θ) — декартовы и полярные координаты в плоскости, перпендикулярной ребру, причем грани ∂K угла задаются соотношениями $y_* < 0$, $y_* = \pm 0$ или $r > 0$, $\theta = \pi \pm \alpha$.

Пусть q — целое неотрицательное, γ, β — вещественные числа, подчиненные неравенствам

$$q + 1/2 < \beta < q + 1 \leq \gamma < \beta + 1 \quad (2.1)$$

В работе [1] введены используемые здесь пространства $V^q(K)$, $V^{q-1/2}_s(K)$ функций в K и пространство $V^{q-1/2}_s(\partial K)$ следов функций из $V^{q-1}(K)$ на ∂K . Нормы определены формулами (2.14), (2.15) из [1].

Для описания функциональных пространств в области Ω определим в окрестности D края ∂M трещины M криволинейные координаты (y_1, y_2, s) , где s — длина дуги, измеренная вдоль ∂M от некоторой точки до проекции x на ∂M , (y_1, y_2) — ортогональные координаты в плоскости, проходящей через x и нормальной к ∂M , причем локально M задается соотношениями $y_1 \leq 0, y_2 = 0$.

Нормы в пространствах $V^{q-1/2}_s(\Omega)$, $V^q_s(\Omega)$ и $V^{q-1/2}_s(M)$ порождаются из норм $V^{q-1/2}_s(K)$, $V^q_s(K)$ и $V^{q-1/2}_s(\partial K)$ разбиением единицы. Если носитель функции v отделен от ∂M , то ее норма вычисляется в $W^{q-1/2}_s(\Omega)$, $W^q_s(\Omega)$ или $W^{q-1/2}_s(M)$, а, если носитель мал и пересекается с ∂M , то норма v совпадает с нормой в $V^{q-1/2}_s(K)$, $V^q_s(K)$ или $V^{q-1/2}_s(\partial K)$ функции v^* , которая получается из v после перехода к координатам (y_1, y_2, s) .

Следующее утверждение вытекает непосредственно из определения норм в перечисленных пространствах.

Лемма 1. Пусть $N_j(x, \partial x)$ — дифференциальный оператор в Ω порядка j , коэффициенты которого и их производные до порядка $q+1$ включительно ограничены в Ω , а W — функция из $V^{q-1/2}_s(\Omega)$, где q, s, β удовлетворяют неравенствам (2.1). Тогда $N_1 W \in V^{q-1/2}_s(\Omega)$, $N_2 W \in V^q_s(\Omega)$, и справедливы оценки

$$\|N_j W; V^{q-1/2}_s(\Omega)\| \leq \text{const} \|W; V^{q-1/2}_s(\Omega)\|, \quad j=1, 2$$

Сформулируем еще (в несколько ослабленной, но достаточной для наших целей форме) две теоремы о разрешимости задач теории упругости и теории ползучести [1, 6]. Для этого понадобится следующее определение. Пусть B — банахово пространство. Как обычно, через $L^p(0, t; B)$ будем обозначать пространство отображений L^p отрезка $[0, t]$ в B , наделенное нормой

$$\|P; B, t\| = \text{ess sup}_0^t \|P(\cdot); B\|$$

Теорема 1. Пусть выполнены соотношения (1.7) и (2.1), $f \in L^q_s(\Omega)$, $g \in W^{q-1/2}_s(\partial\Omega_0)$, $g^* \in V^{q-1/2}_s(M^*)$; $E_*, G \in C^{q-1}(\Omega)$ и выполняется условие невырождения в Ω

$$E_1 \leq E_* \leq E_2, \quad G_1 \leq G \leq G_2, \quad E_1, G_1 = \text{const} > 0$$

Тогда существует единственное (с точностью до жесткого смещения) решение задачи (1.1), (1.2), (1.4)–(1.6), (1.8) из пространства $V^{q-1/2}_s(\Omega)$. Если это решение нормировано условиями

$$\int \mathbf{u} dx = 0, \quad \int \text{rot } \mathbf{u} dx = 0 \quad (2.2)$$

то справедливо неравенство

¹ Здесь и всюду далее пространства скалярных и векторзначных функций не различаются в обозначениях; норма вектор-функции равна сумме норм ее компонент.

$$\|u; V_{1,3}^{q+2}(\Omega)\| \leq c \|f; V_3^q(\Omega)\| + \|g; W_2^{q+1/2}(\partial\Omega_0)\| + \|g; V_3^{q+1/2}(M^+)\| \quad (2.3)$$

Не умаляя общности, будем считать $\kappa(x) \geq 0$ и пусть

$$T^* = \max_{x \in \bar{\Omega}} \kappa(x) + T.$$

Теорема 2. Пусть модули E_α, G — достаточно гладкие (класса $C^{q+1}([0, T^*] \times \bar{\Omega})$) функции переменных t, x и не вырождаются в $\bar{\Omega}$, ядра релаксации R_j представимы в виде

$$R_j(t, \tau, x) = p_j(t, \tau, x)(t - \tau)^{-\alpha} + q_j(t, \tau, x), \quad j = 1, 2, \alpha < 1;$$

$p_j, q_j \in C^{q+1}([0, T^*] \times [0, T^*] \times \bar{\Omega})$, $\kappa \in C^{q+1}(\bar{\Omega})$, при почти всех $t \in [0, T]$ выполнены равенства (1.7), справедливы соотношения (2.1) и включения $f \in L^-(0, T; V_3^q(\Omega))$,

$$g \in L^-(0, T; W_2^{q+1/2}(\partial\Omega_0)), \quad g^+ \in L^-(0, T; V_3^{q+1/2}(M^+))$$

Тогда на отрезке времени $[0, T]$ существует единственное (нормированное при почти всех t условиями (2.2)) решение $u \in L^-(0, T; V_{1,3}^{q+2}(\Omega))$ задачи ползучести (1.1) — (1.6) такое, что справедливо неравенство

$$\|u; V_{1,3}^{q+2}(\Omega), T\| \leq c \|f; V_3^q(\Omega), T\| + \|g; W_2^{q+1/2}(\partial\Omega_0), T\| + \|g^+; V_3^{q+1/2}(M^+)\| \quad (2.4)$$

с постоянной c , не зависящей от f, g, g^+ и u .

Замечание 1. Оценки (2.3) и (2.4) становятся все более точными при увеличении γ до $\beta + 1 - 0$, однако постоянные в этих неравенствах неограниченно возрастают.

3. Вспомогательные утверждения. При выводе асимптотики напряженно-деформированного состояния понадобятся дополнительные оценки решений рассматриваемых задач. Обозначим через $\partial^{(n)} u / \partial s^n$

Лемма 2. Пусть в дополнение к условиям теоремы 1

$$E_\alpha^{(n)}, G^{(n)} \in C^{q+1}(\bar{D}), \quad f^{(n)} \in V_3^q(D \setminus M), \quad g^{(n)} \in V_3^{q+1/2}(D \cap M^+) \quad (3.1)$$

$$n = 1, 2, \dots, N$$

Тогда для нормированного условиями (2.2) решения $u \in V_{1,3}^{q+2}(\Omega)$ задачи (1.1), (1.2), (1.4) — (1.6), (1.8) справедливы включения $u^{(n)} \in V_{1,3}^{q+2}(D_0 \setminus M)$ и неравенства

$$\|u^{(n)}; V_{1,3}^{q+2}(D_0 \setminus M)\| \leq c_n \left\{ \|f; V_3^q(\Omega)\| + \|g^+; V_3^{q+1/2}(M^+)\| + \|g; W_2^{q+1/2}(\partial\Omega_0)\| + \sum_{p=1}^n \|f^{(p)}; V_3^q(D \setminus M)\| + \|g^{(p)}; V_3^{q+1/2}(D \cap M^+)\| \right\} \quad (3.2)$$

Здесь $n = 1, \dots, N$; D_0 — окрестность M , причем $\bar{D}_0 \subset D$.

Доказательство. Пусть u — решение задачи (1.1), (1.2), (1.4) — (1.6), (1.8), а $\chi \in C_0^\infty(R^2)$ — срезка с малым носителем, равная

единице в окрестности нуля; $\text{supp } \chi \in D$. Векторное поле $v(x) = \chi(y)u(x)$ удовлетворяет системе уравнений теории упругости с новыми правыми частями

$$F(x) = \chi(y)f(x) + l\left(y, s, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial s}\right)u(x), \quad G(x) = \chi(y)g(x) + b(y, s)u(x) \quad (3.3)$$

в уравнениях (1.2), (1.5) и однородным граничным условиям (1.6). Здесь l — матричный оператор первого порядка, b — матрица-функция; носители коэффициентов l и элементов b содержатся в D и отделены от ∂M . Поэтому (см. лемму 1) справедливы неравенства

$$\|u; V_{1,3}^q(\Omega)\| + \|bu; V_{1,3}^{q+1/2}(M^-)\| \leq c_1 \|u; V_{1,3}^{q+1}(\Omega)\| \leq c_2 \|u; V_{1,3}^{q+2}(\Omega)\| \quad (3.4)$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial s} lu; V_{1,3}^q(\Omega) \right\| + \left\| \frac{\partial}{\partial s} bu; V_{1,3}^{q+1/2}(\partial\Omega) \right\| \leq c_3 \|u; V_{1,3}^{q+2}(\Omega)\|$$

Вектор смещений v удовлетворяет системе Ламе и граничным условиям на M^- с правыми частями F и G . Запишем указанные уравнения для краткости в матричной форме

$$L(x, \partial/\partial x)v + F = 0 \text{ в } \Omega; \quad B(x, \partial/\partial x)v = G \text{ на } M^- \quad (3.5)$$

Дифференцируя (3.5) по s , имеем

$$L(x, \partial/\partial x)v^{(1)} + \partial L/\partial s + \frac{\partial L}{\partial s}(x, \partial/\partial x)v = 0 \text{ в } \Omega$$

$$B(x, \partial/\partial x)v^{(1)} = \partial G/\partial s - \frac{\partial B}{\partial s}(x, \partial/\partial x)v \text{ на } M^- \quad (3.6)$$

В силу соотношения

$$\left\| \frac{\partial L}{\partial s} v; V_{1,3}^q(\Omega) \right\| + \left\| \frac{\partial B}{\partial s} v; V_{1,3}^{q+1/2}(M^-) \right\| \leq c_4 \|u; V_{1,3}^{q+2}(\Omega)\|$$

из неравенств (3.4) и теоремы 1 получаем, что решение $v^{(1)}$ уравнений (3.6) и однородных граничных условий на $\partial\Omega$, удовлетворяет оценке

$$\|v^{(1)}; V_{1,3}^{q+2}(\Omega)\| \leq c_5 \left(\|u; V_{1,3}^{q+2}(\Omega)\| + \|f^{(1)}; V_{1,3}^q(D \setminus M)\| + \|g^{(1)}; V_{1,3}^{q+1/2}(D \cap M^-)\| \right) \quad (3.7)$$

Так как поля u и v совпадают на множестве $\{x: \chi(y) = 1\}$, то согласно (2.6), из (3.7) следует требуемое неравенство (3.2) при $n = 1$. Для остальных значений n оценки (3.2) получаются последовательным применением приведенных рассуждений к вектор-функциям $v^{(n-1)}$. Лемма доказана.

При доказательстве теоремы 2 настоящей работы (см. теорему 3 из [1]), решение задачи ползучести, как обычно [16, 17], было представлено в виде сходящегося в $L^2(0, T; V_{1,3}^{q+2}(\Omega))$ ряда, члены которого суть решения рекуррентной последовательности задач теории упругости. Применяя к ним оценки (3.2) и повторяя ход доказательства теоремы 3 [1], получим следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть в дополнение к условиям теоремы 2 имеют место включения

$$E_*, G \in C^{q+1-n}([0, T^*] \times D), \quad p_i, q_i \in C^{q+1+n}([0, T^*] \times [0, T^*] \times \bar{D})$$

$$f^{(n)} \in C^{q+1-n}(D), \quad f^{(n)} \in L^{\infty}(0, T; V_3^q(D \setminus M))$$

$$g^{(n)} \in L^{\infty}(0, T; V_3^{q+1/2}(D \cap M)), \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.8)$$

Тогда для нормированного условиями (2.2) решения u задачи (1.1) — (1.6) справедливы включения $u^{(n)} \in L^{\infty}(0, T; V_{3,0}^{q+2}(D_0 \setminus M))$ и неравенства

$$\|u^{(n)}\|_{V_{3,0}^{q+2}(D_0 \setminus M)} \leq c_n \|f\|_{V_3^q(D \setminus M)}, \quad \|T\| = \|g\|_{W_3^{q+1/2}(\partial D_0)} + \\ + \|g^{(n)}\|_{V_3^{q+1/2}(D \cap M)}, \quad \|T\| + \sum_{p=1}^n \|W^p, V_3^q(D \setminus M), T\| + \\ + \|g^{(n)}\|_{V_3^{q+1/2}(D \cap M)}, \quad \|T\| \quad (3.9)$$

4. Асимптотика в задаче упругости. Следуя [13], получим асимптотические формулы для решения u задачи упругости (1.1), (1.2), (1.4) — (1.6), (1.8). Для этого на множестве $D \setminus M$ сведем указанную краевую задачу к совокупности двумерной задачи теории упругости и задачи кручения в сечении $\{(y, s) \in D \setminus M: s = s_0\}$:

$$L^0\left(s, \frac{\partial}{\partial y}\right) v, (y, s) + \Phi(y, s) = 0 \text{ и } k_2 B^0\left(s, \frac{\partial}{\partial y}\right) v(y, s) = \\ = \Psi^0(y, s) \text{ на } \partial k \quad (4.1)$$

где $k = R^2 \setminus \{y: y_2 = 0, y_1 \leq 0\}$ — плоскость, ослабленная лучом;

$$L^0\left(s, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \\ = \begin{vmatrix} \mu(s) \Delta + (\lambda(s) + \mu(s)) \partial^2 / \partial y_1^2; & (\lambda(s) + \mu(s)) \partial^2 / \partial y_1 \partial y_2; & 0 \\ (\lambda(s) + \mu(s)) \partial^2 / \partial y_2 \partial y_1; & \mu(s) \Delta + (\lambda(s) + \mu(s)) \partial^2 / \partial y_2^2; & 0 \\ 0 & 0 & \mu(s) \Delta \end{vmatrix} \\ B^0\left(s, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \begin{vmatrix} \mu(s) \partial / \partial y_2; & \mu(s) \partial / \partial y_1; & 0; \\ \lambda(s) \partial / \partial y_2; & (2\mu(s) + \lambda(s)) \partial / \partial y_2; & 0; \\ 0 & 0 & \mu(s) \partial / \partial y_2 \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

$\mu(s), \lambda(s)$ — замороженные на ребре ∂M коэффициенты Ламе

$$\mu(s) = G(0, s), \quad \lambda(s) = [E_1(0, s) - 2G(0, s)]/3. \quad (4.3)$$

Как и в лемме 2, умножим поле смещений u на срезающую функцию χ . Полученная вектор-функция $v = \chi u$ удовлетворяет системе (3.4), а, следовательно, и уравнениям (4.1), где

$$\Phi(y, s) = F(x) + [L(x, \partial / \partial x) - L^0(s, \partial / \partial y)] v \\ \Psi^0(y, s) = G^0(x) - [B(x, \partial / \partial x) - B^0(s, \partial / \partial y)] v \quad (4.4)$$

Для того, чтобы воспользоваться результатами [9, 10, 2, 3, 5] о плоских задачах, необходимо оценить нормы функции (4.4) в пространствах $V_3^q(k)$ и $V_3^{q+1/2}(\partial k)$.

Предположим, что при $n = 0$ справедливы соотношения

$$f^{(n)} \in V_q^n(D \setminus M), \quad g^{(n)} \in V_q^{q+1/2}(D \cap M^+) \quad (4.5)$$

Тогда в силу (3.3) и того, что носители коэффициентов операторов l и b отделены от M , находим

$$\int_{\partial M} \{ \|F(\cdot, s); V_q^n(k)\|^2 + \|G(\cdot, s); V_q^{q+1/2}(\partial k^+)\|^2 \} ds \leq \quad (4.6)$$

$$\leq \text{const} \{ \|f; V_q^q(\Omega)\|^2 + \|g; V_q^{q+1/2}(M^+)\|^2 + \|v; V_{1,0}^{q+1/2}(\Omega)\|^2 \}$$

Операторы $L - L^0$ и $B - B^0$ второго и первого порядков, соответственно, обладают следующими свойствами: коэффициенты при $\partial^2/\partial y_i \partial y_k$ в $L - L^0$ и при $\partial/\partial y_i$ в $B - B^0$ обращаются в нуль, если $y = 0$; все коэффициенты этих операторов гладкие в Ω вплоть до границы функции. Поэтому

$$\int_{\partial M} \{ \|(L - L^0)v(\cdot, s); V_{1,0}^{q-1}(k)\|^2 + \|(B - B^0)v(\cdot, s); V_{1,0}^{q+1/2}(\partial k^+)\|^2 \} ds \leq$$

$$\leq \text{const} \{ \|v; V_{1,0}^{q-2}(\Omega)\|^2 + \|\partial v/\partial s; V_{1,0}^{q-2}(D^+ \setminus M)\|^2 \} \quad (4.7)$$

Окончательно, используя теорему 1, лемму 2 и соотношения (2.1), из оценок (4.6), (4.7) получаем неравенство

$$\int_{\partial M} \{ \|\Phi(\cdot, s); V_q^q(k)\|^2 + \|\Psi(\cdot, s); V_q^{q+1/2}(\partial k^+)\|^2 \} ds \leq$$

$$\leq \text{const} \{ \|f; V_q^q(\Omega)\|^2 + \|g; V_q^{q+1/2}(M^+)\|^2 + \|g; W_2^{q+1/2}(\partial \Omega_0)\|^2 +$$

$$+ \|f^{(1)}; V_q^q(D \setminus M)\|^2 + \|g^{(1)}; V_q^{q+1/2}(D \cap M^+)\|^2 \} \quad (4.8)$$

Так как первые две строки системы (4.1) образуют плоскую задачу теории упругости, а третья — задачу кручения (см. (4.2)), то, согласно результатам [9, 10, 2, 3, 5] об асимптотике решений двумерных задач, справедливы асимптотические формулы

$$(v_r, v_\theta) = \{ c_1(s)(\cos \theta, \sin \theta) + c_2(s)(-\sin \theta, \cos \theta) +$$

$$+ C_1(s)r^{1/2}(U_r^1(s, \theta), U_\theta^1(s, \theta)) + C_2(s)r^{1/2}(U_r^2(s, \theta), U_\theta^2(s, \theta)) \} / r +$$

$$+ (v_r^*, v_\theta^*), \quad v_r^* = \{ c_2(s) + C_3(s)r^{1/2}U_\theta^1(\theta) \} / r + v_r^*, \quad (4.9)$$

Здесь аргументами функций v_r, v_θ являются переменные y, s ; угловые части $U_r^1, U_\theta^1, U_\theta^2$ определены равенствами

$$U_r^1(s, \theta) = (2k(s) - 1) \sin \theta/2 + \sin 3\theta/2$$

$$U_\theta^1(s, \theta) = (2k(s) + 1) \cos \theta/2 + \cos 3\theta/2$$

$$U_r^2(s, \theta) = (2k(s) - 1) \cos \theta/2 + 3 \cos 3\theta/2$$

$$U_\theta^2(s, \theta) = -(2k(s) + 1) \sin \theta/2 - 3 \sin 3\theta/2, \quad U_\theta^3(\theta) = \cos \theta/2 \quad (4.10)$$

где $k(s) = 3 - 4\nu(s)$, $\nu(s) = [E_*(0, s) - 2G(0, s)]/[2G(0, s) + 2E_*(0, s)]$

В силу результатов [9, 10] при любом $\mu > 0$ и каждом s справедливы оценки

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \|c_j(s)\|^2 + \|C_j(s)\|^2 + \|v^*(\cdot, s); V_{\sigma, \sigma}^{q+2}(k)\|^2 &\leq \\ &\leq \text{const} \{ \|\Phi(\cdot, s); V_{\sigma}^q(k)\|^2 + \|W(\cdot, s); V_{\sigma}^{q+2}(\sigma k)\|^2 + \\ &+ \|v(\cdot, s); V_{\sigma, \sigma}^q(k)\|^2 \} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Интегрируя (4.11) по ∂M , из неравенств (2.6) и (4.8) получаем, что $c_j, C_j \in L_2(\partial M)$, $r^{1-2/h} \nabla_y^h v^* \in L_2(D \setminus M)$, $h=0, \dots, q+2$. Здесь ∇_y^h и далее через $\nabla_y^h v$ обозначена совокупность всех производных порядка h по y_1, y_2 от вектор-функции v .

Так как в окрестности ∂M поля n и v совпадают ($l=1$), то доказано следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть в дополнение к условиям теоремы 1 выполнены соотношения (3.1) при $n=1$ и (4.5) при $n=0$. Тогда для решения $u \in V_{\sigma, \sigma}^{q+2}(\Omega)$ задачи (1.1), (1.2), (1.4)–(1.6), (1.8), нормированного условиями (2.2), справедливы асимптотические представления

$$\begin{aligned} (u_r, u_\theta) = & \{c_1(s) (\cos \theta, -\sin \theta) + c_2(s) (-\sin \theta, \cos \theta) + \\ & + C_1(s) r^{1/2} (U_r^1(s, \theta) + U_\theta^1(s, \theta)) + C_2(s) r^{1/2} (U_r^2(s, \theta), U_\theta^2(s, \theta))\} \chi(r) + \\ & + (u_r^*, u_\theta^*) \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} u_s = & \{c_2(s) + C_2(s) r^{1/2} U_s^1(\theta)\} \chi(r) + u_s^* \\ \sigma_{pq} = & 2 G(0, s) r^{-1/2} \{C_1(s) \sum_{pq}^1(\theta) + C_2(s) \sum_{pq}^2(\theta)\} \chi(r) + \sigma_{pq}^*, \quad p, q = r, \theta \\ \sigma_{rs} = & \frac{1}{2} G(0, s) r^{-1/2} C_2(s) \sum_{rs}(\theta) \chi(r) + \sigma_{rs}^*, \quad p = r, \theta \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\sigma_{ss} = 8v(s) G(0, s) r^{-1/2} \{c_1(s) \sum_{ss}^1(\theta) + c_2 \sum_{ss}^2(\theta)\} \chi(r) + \sigma_{ss}^* \quad (4.14)$$

Здесь аргументами функций u_r и u_θ являются переменные y, s ; угловые части в соотношениях (4.12) определены равенствами (4.10), а в соотношениях (4.13), (4.14) – равенствами

$$\begin{aligned} \sum_{rr}^1(\theta) = \frac{5}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{3\theta}{2}, \quad \sum_{rr}^2(\theta) = \frac{5}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sum_{\theta\theta}^1(\theta) = \frac{3}{2} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{3\theta}{2}, \quad \sum_{\theta\theta}^2(\theta) = \frac{3}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sum_{r\theta}^1(\theta) = \cos \frac{3\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2}, \quad \sum_{r\theta}^2(\theta) = \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sum_{ss}^1(\theta) = -\sum_{\theta s}(\theta) = \sin \frac{\theta}{2}, \quad \sum_{ss}^2(\theta) = \sum_{rs}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

при любом $p > 0$ справедлива оценка

$$\sum_{j=1}^3 \|c_j; L_2(\partial M)\| + \|C_j; L_2(\partial M)\| + \sum_{l=1}^{q-2} \|r^{2^{-2+l}} \tau_v^l u^2; L_2(D \setminus M)\| + \\ + \sum_{j=1}^{q+2} \|r^{2^{-1+j}} \tau^2; L_2(D \setminus M)\| \leq c \|f; V_q^q(\Omega)\| + \|g; V_q^{q-1/2}(M)\| + \\ + \|g; W_l^{l+1/2}(\partial\Omega_0)\| + \|f^{(1)}; V_2^1(D \setminus M)\| + \|g^{(1)}; V_2^{q-1/2}(M \cap D)\|$$

где постоянная c не зависит от f , g и g .

Доказательство. Осталось указать, что представления (4.13), (4.14) получаются после дифференцирования формул (4.12) по y_i и применения неравенства (3.2), $n = 1$ (ср. (1.1), (1.4), (1.8)).

Замечание 2. Выделенные в асимптотических формулах (4.12) и (4.13), (4.14) слагаемые не принадлежат при $\gamma \in (0, 1/2)$ пространствам, содержащим $\mathcal{W}_2^*$ и $\mathcal{W}_{1/2}$.

Покажем теперь, что при наличии дополнительной гладкости по s внешних нагрузок f и g — коэффициенты интенсивности C_j и функции c_j в (4.12) — (4.14) приобретают дополнительную гладкость.

Обозначим через $U_h(r, \theta, s)$ выражения, стоящие в фигурных скобках в формулах (4.9), а через $V_h(r, \theta, s)$ (через $\Xi_h(r, \theta, s)$) — аналогичные выражения, где c_j , C_j заменены на $\partial c_j / \partial s$, $\partial C_j / \partial s$ (k^0 заменено на $\partial k^0 / \partial s$).

Продифференцируем краевую задачу (4.1) по s . Имеем

$$L^0(s, \partial/\partial y) v^{(1)}(y, s) + L^{(1)}(s, \partial/\partial y) v(y, s) + \Phi^{(1)}(y, s) = 0 \text{ в } k \\ B^0(s, \partial/\partial y) v^{(1)}(y, s) + B^{(1)}(s, \partial/\partial y) v(y, s) = \Psi^{(1)}(y, s) \text{ на } \partial k \quad (4.17)$$

Так как U — решение однородной плоской задачи теории упругости и однородной задачи кручения, то [2, 3, 5]

$$0 = \frac{\partial}{\partial s}(AU) = \frac{\partial A}{\partial s} U + A V + A \Xi - \frac{\partial A}{\partial s} U + A \Xi \quad (4.18)$$

где $A = \{L^0(s, \partial/\partial y), B^0(s, \partial/\partial y)\}$. Введем вектор-функцию

$$w(r, \theta, s) = v^{(1)}(r, \theta, s) - \Xi(r, \theta, s) / (r)$$

Из (4.17), (4.18) получаем, что

$$L^0\left(s, \frac{\partial}{\partial y}\right) w + \varphi = 0 \text{ в } k; B^0\left(s, \frac{\partial}{\partial y}\right) w = \psi \text{ на } \partial k \quad (4.19)$$

где

$$|\varphi, \psi| = |\Phi^{(1)}, \Psi^{(1)}| + |L^{(1)}, B^{(1)}| v^* + \\ + |[L^{(1)}, B^{(1)}], \chi] U + |[L^0, B^0], \chi] \Xi \quad (4.20)$$

Допустим, что выполнены включения (3.1), $N = 2$, и (4.5), $n = 1$. Из (4.4), (4.16), (3.2) и того, что носители двух последних слагаемых отделены от ∂M , при любом $\mu > 0$ справедливо неравенство

$$\int_{\partial M} \|f(\cdot, s); V_{q,p}^q(k)\|^2 + \|\psi^\pm(\cdot, s); V_{q,p}^{q+1/2}(\partial k)\|^2 ds \leq \\ \leq c(p) \{ \|f; V_q^q(\Omega)\|^2 + \|g^\pm; V_q^{q+1/2}(M^\pm)\|^2 + \|g; W_2^{q+1/2}(\partial\Omega_0)\|^2 + \\ + \|f^{(1)}; V_q^q(D \setminus M)\|^2 + \|g^{(1)}; V_q^{q+1/2}(D \cap M^\pm)\|^2 + \\ + \|f^0; V_q^q(D \setminus M)\|^2 + \|g^{(2)}; V_q^{q+1/2}(D \cap M^\pm)\|^2 \}$$

Остается воспользоваться теми же результатами о двумерных задачах, что и при выводе оценок (4.11), (4.16). Таким образом, при $\Lambda = 1$ имеем

$$\sum_{j=1}^3 \{ \|c_j; W_2^N(\partial M)\| + \|C_j; W_2^N(\partial M)\| \} \leq \text{const } \Pi(f, g^\pm, g) \quad (4.21)$$

где

$$\Pi(f, g^\pm, g) = \|f; V_q^q(\Omega)\| + \|g^\pm; V_q^{q+1/2}(M^\pm)\| + \|g; W_2^{q+1/2}(\partial\Omega_0)\| + \\ + \|f^{(N+1)}; V_q^q(D \setminus M)\| + \|g^{(N+1)}; V_q^{q+1/2}(D \cap M^\pm)\| + \\ + \sum_{j=1}^N \{ \|f^{(j)}; V_q^q(D \setminus M)\| + \|g^{(j)}; V_q^{q+1/2}(D \cap M^\pm)\| \}$$

При помощи подобных же выкладок получаются неравенства (4.21) при $\Lambda' > 1$. Итак, установлено следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть в дополнение к условиям теоремы 1 выполнены включения (3.1) при $n = 1, \dots, N+1$ и (4.5) при $n = 0, \dots, N$. Тогда для коэффициентов c_j и C_j в формулах (4.12)–(4.14) справедливы оценки (4.21). Кроме того, для остатков u^* и σ^* в формулах (4.12)–(4.14) имеют место неравенства

$$\sum_{n=0}^N \left\| \sum_{j=0}^{q+2} \left[r^{j-2n-1} \Delta_r^j \frac{\partial^n u^*}{\partial s^n}; L_2(D \setminus M) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{j=n}^{q-1} \left[r^{j-1-n} \nabla_r^j \frac{\partial^n \sigma^*}{\partial s^n}; L_2(D \setminus M) \right] \right\| \leq \text{const } \Pi(f, g^\pm, g)$$

5. Асимптотика решения задач полнотести. Введем обозначения для «замороженных» на ребре ∂M трещины реологических характеристик:

$$G^0(t, s) = G(t + z(x), x), E_*^0(t, s) = E_*(t + z(x), x) \text{ при } x \in \partial M$$

$$v(t, x) = [E_*(t, x) - 2G(t, x)] / [2G(t, x) + \\ + 2E_*(t, x)], k(t, x) = 3 - 4v(t, x)$$

$$v^0(t, s) = v(t + z(x), x), k^0(t, s) = k(t, z(x), x) \text{ при } x \in \partial M$$

$$R_i^0(t, z, s) = R_i(t + z(x), z + z(x), x) \text{ при } x \in \partial M, i = 1, 2$$

Здесь $(0, s)$ — криволинейные координаты точки $x \in \partial M$.

Теорема 5. Пусть в дополнение к условиям теоремы 2 выполнены соотношения (3.8) при $n = 1, \dots, N+1$ и следующие исключения при $n = 0, 1, \dots, N$:

$$f^{(n)} \in L^-(0, T; V_q^n(D \setminus M)), \quad g^{(n)} \in L^-(0, T; V_q^{n+1,2} D \cap M) \quad (5.1)$$

Тогда для решения $u \in L^\infty(0, T; V_{1,3}^{1,2}(\Omega))$ задачи (1.1)–(1.6), нормированного условиями (2.2), справедливы асимптотические представления

$$(u_r, u_\theta) = [c_1(t, s)(\cos \theta, \sin \theta) + c_2(t, s)(-\sin \theta, \cos \theta)] \chi(r) + \\ + r^{1/2} \left\{ \sum_{j=1}^2 C_j(t, s)(U_j'(t, s, \theta), U_j'(t, s, \theta)) + A_1(t, s) \left(\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right) + \right. \\ \left. + A_2(t, s) \left(\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right) \right\} \chi(r) + (u_r^*, u_\theta^*) \quad (5.2)$$

$$u_s = [c_3(t, s) + r^{1/2} C_3(t, s) U_3'(t, s)] \chi(r) + u_s^*$$

$$z_{hl} = 2 G^0(t, s) r^{-1/2} \sum_{j=1}^2 B_j(t, s) \sum_{\gamma,j}^{(6)} \chi(r) + z_{hl}^*, \quad h, l = r, \theta$$

$$z_{\theta s} = -\frac{1}{2} G^0(t, s) r^{-1/2} B_3(t, s) \sin \frac{\theta}{2} \chi(r) + z_{\theta s}^*$$

$$z_{rs} = \frac{1}{2} G^0(t, s) r^{-1/2} B_3(t, s) \cos \frac{\theta}{2} \chi(r) + z_{rs}^* \quad (5.3)$$

$$z_{ss} = 2 G^0(t, s) r^{-1/2} \left[B_1(t, s) \sin \frac{\theta}{2} + B_2(t, s) \cos \frac{\theta}{2} \right] \chi(r) + z_{ss}^*$$

Здесь аргументами функций u_{hl} , z_{hl} являются переменные (t, y, s) , угловые части $\sum_{\gamma,j}^{(6)}$ задаются формулами (4.15), а функции $U_k(t, s, \theta)$ определяются по соответствующей функции $U_k(s, \theta)$ заменой в (4.10) величины $k(s)$ на $k^0(t, s)$; коэффициенты A_1 и A_2 в (5.2) при каждом s определяются через C_1 и C_2 из уравнения Вольтерра второго рода

$$A_1(t, s) + \frac{2(1 + v^0(t, s))}{3} \int_0^t [R_1^0(t, \tau, s) - R_2^0(t, \tau, s)] A_1(\tau, s) d\tau = \\ = \int_0^t R_1^0(t, \tau, s) A_1(\tau, s) d\tau + \frac{8(1 + v^0(t, s))}{3} \int_0^t [R_1^0(t, \tau, s) - \\ - R_2^0(t, \tau, s)] C_1(\tau, s) d\tau - \\ - 8 \int_0^t R_1^0(t, \tau, s) [v^0(t, s) - v^0(\tau, s)] C_1(\tau, s) d\tau = 0$$

коэффициенты интенсивности B_1, B_2, B_3 выражаются через C_1, C_2, C_3 формулами

$$B_j(t, s) = C_j(t, s) - \int_0^t R_1^0(t, \tau, s) C_j(\tau, s) d\tau, \quad j=1, 2, 3;$$

коэффициенты интенсивности B_4, B_5 связаны с C_1, C_2, A_1, A_2 равенствами

$$B_j(t, s) = \frac{E_s^0(t, s) - 2 G^0(t, s)}{6 G^0(t, s)} \{C_{j-3}(t, s) 2[k^0(t, s) - 1] + A_{j-3}(t, s)\} + \\ + \frac{1}{3} \int_0^t R_1^0(t, \tau, s) \{C_{j-3}(\tau, s) 2[k^0(t, s) - 1] + A_{j-3}(\tau, s)\} d\tau - \\ - \frac{E_s^0(t, s)}{6 G^0(t, s)} \int_0^t R_2^0(t, \tau, s) \{C_{j-3}(\tau, s) 2[k^0(t, s) - 1] + A_{j-3}(\tau, s)\} d\tau, \quad j=4, 5$$

Остатки u_h^*, σ_{kl}^* в представлениях (5.2), (5.3) малы по сравнению с асимптотическими слагаемыми в следующем смысле: при любом $\epsilon > 0$ справедливы оценки

$$\left| \sum_{\alpha=0}^N \left\| \sum_{j=1}^{q+2} r^{j-2+\epsilon} \nabla_y^j \frac{\partial^\alpha u^*}{\partial s^{\alpha-\epsilon}}; L_2(D \setminus M), T \right\| + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{q+2} \left\| r^{j-1+\epsilon} \nabla_y^j \frac{\partial^{\alpha+2} u^*}{\partial s^{\alpha-\epsilon}}; L_2(D \setminus M), T \right\| \right| \leq \text{const} \Pi(f, g^*, g; T) \quad (5.4)$$

$$\Pi(f, g^*, g; T) = \|f; V_q^q(\Omega), T\| + \|g^*; V_q^{q+1/2}(M), T\| + \\ + \|g; W_2^{q+1/2}(\partial\Omega_0), T\| + \|f^{(N-1)}; V_q^q(D \setminus M), T\| + \|g^{(N-1)}; V_q^{q+1/2}(D \cap M), T\| + \\ + \sum_{j=1}^N \|f^{(j)}; V_q^q(D \setminus M), T\| + \|g^{(j)}; V_q^{q+1/2}(D \cap M), T\|$$

Коэффициенты c_j, G_j, A_j, B_j в (5.2), (5.3) удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{j=1}^3 \{ \|c_j; W_2^N(\partial M), T\| + \|G_j; W_2^N(\partial M), T\| \} + \sum_{j=1}^3 \|A_j; W_2^N(\partial M), T\| + \\ + \sum_{j=1}^3 \|B_j; W_2^N(\partial M), T\| \leq \text{const} \Pi(f, g^*, g; T)$$

Замечание 3. Выделенные в (5.2), (5.3) асимптотические слагаемые не принадлежат при $\epsilon \in (0, 1/2)$ пространствам, содержащим u_h^* и σ_{kl}^* .

Замечание 4. Из формул (5.3) и (4.14) следует, что асимптотика перемещений u_r, u_θ, u_z и напряжения $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ в задаче теории ползучести отличается от асимптотики в задаче теории упругости.

ԵՐԿՉԱՔԻ ՀԱԲՈՎ ԱՆՀԱՄԱՐՈՒՄԻ ՍԵՐԱՅՈՂ ՄԱՐԻՆՆԵՐԻ ԻՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ
ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒՄՄԱՆ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿԱՆ

Ն. Խ. ԱՐՈՒՄՅԱՆ, Ս. Ա. ՆԱԶԱՐՈՎ, Բ. Ա. ՇՈՅԽԵՏ

Ա մ փ ո փ ո մ

Առաձգականության տեսության և անհամասեռ ծերացող սողքի տեսության մեջ նույնի մարմնում երկչափ ճաքի եզրի շրջակայքի լարումների և աեղափոխումների համար ստացված են և հիմնավորված ասիմպտոտիկ ներկայացումներ: Դիստրիբյուցիա մարմնի եզրի վրա և ճաքում տրված մակերևույթներին առերի ղեկքը: Ասիմպտոտիկայի արտածումը հիմնվում է որոշ կշիռների տարածություններում առաձգականության և սողքի տեսության ինդիքների լուծումների կոնքրետիվ գնահատականների և հարթ խնդրի լուծումների ասիմպտոտիկ ներկայացման և ճաքով տիրույթների սյուրման խնդիրների վրա:

ASYMPTOTIC FORMULAE FOR THE SOLUTION OF PROBLEMS
OF CREEP THEORY OF NONHOMOGENEOUSLY AGING MEDIA

N. Kh. ARUTUNIAN, S. A. NAZAROV, B. A. SHOIKHET

S u m m a r y

An asymptotic behaviour of stresses and strains near the edge of the crack in the three-dimensional body in the theory of elasticity or in the creep theory of non-homogeneously aging media is obtained and proved. The case of action of surface loading is investigated. The inference of asymptotic formulae is based on the asymptotic formulae for solutions concerning the plane problems and the problems of torsion in the domain weakened by an infinite crack. The basis of the formulae in question is the use of the coercive estimates for weighed functional spaces of solutions concerning the problems of the theory of elasticity and the creep theory.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров С. А., Шойхет Б. А. Коэрцитивные оценки в несовместных пространствах решений трехмерных задач теории упругости и ползучести в области с двумерной трещиной.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1983, т. 36, № 4.
2. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension.— J. Appl. Math., 1952, vol. 19, № 4, p. 526—528.
3. Седов А. И. Механика сплошной среды, т. 2, М.: Наука, 1976, 376 с.
4. Жиралес В. П., Назаров С. А., Шойхет Б. А. Асимптотика вблизи вершины трещины напряженно-деформированного состояния неоднородно стареющих тел.— Докл. АН АрмССР, 1982, т. 74, № 1, с. 26—29.
5. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. А. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963, 686 с.

6. Арутюнян Н. Х., Нахром С. А., Шойхет Б. А. Оценки и асимптотика напряженно-деформированного состояния трехмерного тела с трещиной в теории упругости и теории ползучести.— Докл. АН СССР, 1982, т. 268, № 6, с. 1365—1369.
7. Арутюнян Н. Х. О теории ползучести для неоднородно наследственно-старяющихся сред.— Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 3, с. 569—571.
8. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations, satisfying general boundary conditions.— Comm. Pure Appl. Math., 1964, vol. 17, p. 35—92.
9. Каннатьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.— Тр. Московского матем. общества, 1967, т. 16, с. 219—292.
10. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками.— Math. Nachr., 1977, Bd. 76, s. 29—60.
11. Морозов Н. Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости. Л.: изд-во АГУ, 1980. 184 с.
12. Партин В. Э., Перлин И. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
13. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи ребра.— Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 1, с. 33—36.
14. Никишкин В. А. Особенности решений задачи Дирихле для уравнений второго порядка в окрестности ребра.— Вестник МГУ, сер. мат. мех., 1979, № 2, с. 51—62.
15. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. Об эллиптических краевых задачах в областях с кусочно гладкой границей.— Тр. симпозиума по механике сплошных сред и родственным проблемам математического анализа (Тбилиси, 1971), т. 1, Тбилиси: Мецниереба, 1973, с. 171—181.
16. Арутюнян Н. Х., Шойхет Б. А. Асимптотическое поведение решения краевой задачи теории ползучести неоднородно старяющихся тел с односторонними связями.— Изв. АН СССР, МТТ, 1981, № 3, с. 31—48.
17. Фиксера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 160 с.
18. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.

Институт проблем механики АН СССР

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Всесоюзный научно-исследовательский институт
гидротехники им. Б. Е. Веденеева

Поступила в редакцию
19. XI. 1982

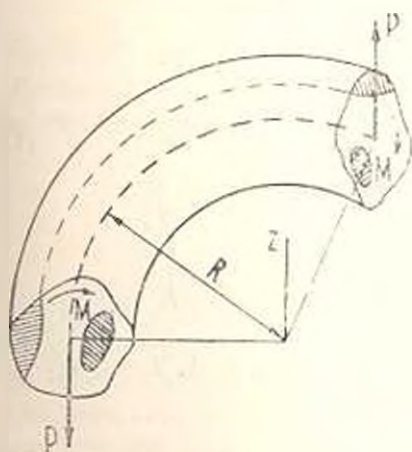
ПОЛЗУЧЕСТЬ КРИВОГО СОСТАВНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

ЗАДОЯН М. А., ПОЛАДЯН Ф. М.

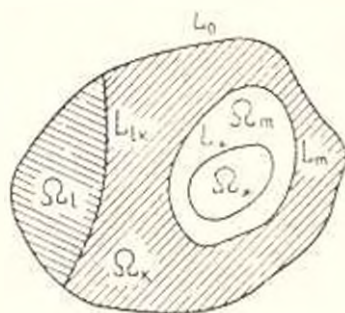
Рассматривается задача о кручении кривого составного стержня, поперечное сечение которого состоит из N различных областей, материалы которых обладают свойством наследственной ползучести [1] с различными мерами ползучести и модулем мгновенного сдвига.

Пусть рассматриваемый стержень с постоянным поперечным сечением находится под воздействием перерезывающих сил P и крутящих моментов PR (R — радиус оси стержня), приложенных на торцевых сечениях (фиг. 1).

Задачи кручения призматических упругих стержней, составленных из различных материалов, исследованы в [2—6]. Библиографию работ, посвященных решению этой задачи, можно найти в монографии [6]. Кручение однородных кривых стержней из упрочняющегося материала рассмотрено в [7—11]. Пластическое кручение кривого стержня, состав-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

ленного из различных материалов, исследовано в [12].

Кручение призматических стержней, составленных из различных материалов, при учете ползучести материала впервые решена в работе [13]. В нашей работе [14] рассмотрено кручение однородных кривых стержней при нелинейной ползучести.

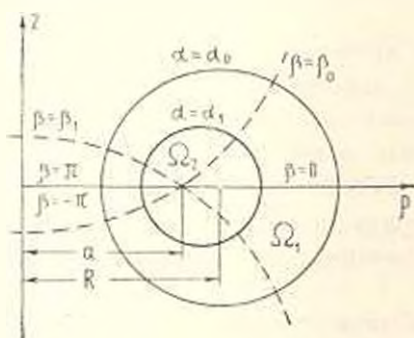
§ 1. Основные уравнения задачи. Обозначим через L_0 внешний контур области всего поперечного сечения стержня, через L_m — контур области Ω_m , а через L_{1k} — линию раздела смежных областей Ω_1 и Ω_k (фиг. 2).

Принимаем, что в области Ω_m имеют место соотношения наследственной теории ползучести Маслова-Арутюняна [1]:

$$2 G_m \varepsilon_{ij}^{(m)} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{(m)} = \int_{\tau}^t \dot{\varepsilon}_{ij}^{(m)} K_m(t, \tau) d\tau \quad (1.1)$$

($m = 1, 2, \dots, N$)

где $G_m = E_m/3$, а E_m принимается постоянным, $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(m)} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{(m)} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{(m)}$, $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(m)}$ — символ Кронекера, $\dot{\varepsilon}^{(m)}$ — среднее давление, $K_m(t, \tau) = 3G_m \frac{\partial C_m(t, \tau)}{\partial \tau}$.



Фиг. 3.

Здесь G_m — модуль сдвига, а $C_m(t, \tau)$ — мера ползучести в области Ω_m .

Воспользуемся тороидальными координатами α, β, γ : $x = r \cos \gamma$, $y = r \sin \gamma$, $z = H \sin \beta$, где $r = a \operatorname{sh} \alpha$, $\gamma = (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{-1}$, $H = a (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{-1}$ здесь $0 \leq \alpha \leq \infty$, $-\pi \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ (фиг. 3).

Для компонент деформации будем иметь [15]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(m)} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\alpha^{(m)}}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\beta^{(m)}}{H} \right) \\ 2 \varepsilon_{\alpha\gamma}^{(m)} &= \frac{H}{r} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{u_\alpha^{(m)}}{H} \right) + \frac{r}{H} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\gamma^{(m)}}{H} \right) \Big|_{(\alpha, \beta)} \\ \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(m)} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\alpha^{(m)}}{H} \right) + \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} u_\alpha^{(m)} + \frac{\partial H}{\partial \beta} u_\beta^{(m)} \right) \Big|_{(\alpha, \beta)} \\ \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(m)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \gamma} (u_\gamma^{(m)}) + \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha} u_\alpha^{(m)} + \frac{\partial r}{\partial \beta} u_\beta^{(m)} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

($m = 1, 2, \dots, N$)

Из (1.2) перемещения представим в виде

$$\begin{aligned} u_\alpha^{(m)} &= u_{\alpha 0}^{(m)} + \int_{\gamma} F_\alpha^{(m)} d\gamma \Big|_{(\alpha, \beta)}, \quad F_\alpha^{(m)} = 2 r \varepsilon_{\alpha\gamma}^{(m)} - \frac{r^2}{H^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\gamma^{(m)}}{r} \right) \Big|_{(\alpha, \beta)} \\ u_\gamma^{(m)} &= u_{\gamma 0}^{(m)} + \int \left(u_{\gamma 1}^{(m)} - \frac{1}{H} \frac{\partial r}{\partial \alpha} u_\alpha^{(m)} - \frac{1}{H} \frac{\partial r}{\partial \beta} u_\beta^{(m)} \right) d\gamma, \end{aligned} \quad (1.3)$$

($m = 1, 2, \dots, N$)

где $u_{\alpha 0}^{(m)}, u_{\beta 0}^{(m)}, u_{\gamma 0}^{(m)}$ — произвольные функции от α, β и t .

Положим далее, как и при кручении однородных стержней [6], что все компоненты напряжения, за исключением $\sigma_{\alpha\alpha}^{(m)}$ и $\sigma_{\beta\beta}^{(m)}$ ($m = 1, 2, \dots, N$).

в любой момент времени t равны нулю, тогда из уравнений равновесия [15] остается

$$\frac{\partial}{\partial x} (H \rho^2 \varepsilon_{\alpha\gamma}^{(m)}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H \rho^2 \varepsilon_{\alpha\gamma}^{(m)}) = 0 \quad (1.4)$$

$$(m = 1, 2, \dots, N)$$

а из остальных уравнений следует, что напряженное состояние стержня не зависит от γ , следовательно, тензор деформации также не зависит от γ .

Подставляя (1.3) в (1.2) и учитывая указанное обстоятельство, получим

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(m)} = \frac{1}{H} \frac{\partial u_{\alpha 0}^{(m)}}{\partial x} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial \beta} u_{\alpha 0}^{(m)} \Big|_{(x, \beta)} \quad (1.5)$$

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(m)} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_{\beta 0}^{(m)}}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_{\alpha 0}^{(m)}}{H} \right)$$

$$(m = 1, 2, \dots, N)$$

а относительно $F_{\alpha}^{(m)}, F_{\beta}^{(m)}$ приходим к системе трех дифференциальных уравнений, решение которой будет

$$F_{\alpha}^{(m)} = (D_0 + D_1 z) \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial x} + (D - D_1 \rho) \frac{1}{H} \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(x, \beta)} \quad (1.6)$$

$$(m = 1, 2, \dots, N)$$

где D_0, D_1, D — произвольные функции от t .

Исключая из (1.3) $u_{\gamma}^{(m)}$ и используя (1.6), получим уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H}{\rho} \varepsilon_{\beta\gamma}^{(m)} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{H}{\rho} \varepsilon_{\alpha\gamma}^{(m)} \right) = D \frac{H^2}{\rho^3} \quad (1.7)$$

$$(m = 1, 2, \dots, N)$$

Полагая в (1.5) равными нулю все компоненты деформаций, кроме $\varepsilon_{\alpha\gamma}^{(m)}$ и $\varepsilon_{\beta\gamma}^{(m)}$, получаем систему относительно $u_{\alpha 0}^{(m)}, u_{\beta 0}^{(m)}$. Решая полученную систему уравнений, находим выражения $u_{\alpha 0}^{(m)}$ и $u_{\beta 0}^{(m)}$. После подстановки этих величин из (1.6) в (1.3) получим выражения для перемещений $u_{\alpha}^{(m)}, u_{\beta}^{(m)}, u_{\gamma}^{(m)}$.

Вводя функцию напряжений

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(m)} = - \frac{1}{H \rho^2} \frac{\partial \Phi_m}{\partial \rho}, \quad \sigma_{\beta\gamma}^{(m)} = \frac{1}{H \rho^2} \frac{\partial \Phi_m}{\partial z} \quad (1.8)$$

$$(m = 1, 2, \dots, N)$$

из (1.1) и (1.7) приходим к основным уравнениям задачи

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \Phi_m}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \Phi_m}{\partial \beta} \right) - \int_{\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \Phi_m}{\partial z} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \Phi_m}{\partial \beta} \right) \right] K_m(t, \tau) d\tau = DG_m \frac{H^2}{\rho^3} \quad (1.9)$$

($m=1, 2, \dots, N$)

Пользуясь условием, что боковая поверхность стержня свободна от внешних сил, получим

$$\Phi_m(\alpha, \beta, t) = \bar{C}_0(t) \text{ на } L_0 \quad (1.10)$$

где $\bar{C}_0(t)$ — произвольная функция, зависящая только от времени t .

Пользуясь условием равновесия бесконечно малого элемента, находящегося в окрестности линии раздела L_{lk} смежных областей Ω_l и Ω_k , получим

$$\Phi_l(\alpha, \beta, t) = \Phi_k(\alpha, \beta, t) + \bar{C}_{lk}(t) \text{ на } L_{lk} \quad (1.11)$$

где $\bar{C}_{lk}(t)$ — произвольная функция от t .

Не нарушая общности, произвольные функции $\bar{C}_0(t)$ и $\bar{C}_{lk}(t)$ можно принять равными нулю [6].

Приближаясь к линии раздела L_{lk} со стороны областей Ω_l и Ω_k , пользуясь (1.1)–(1.3), (1.6), (1.9) и принимая во внимание непрерывность перемещения $u_l^{(m)}$, находим условия, которым должны удовлетворять нормальные производные функции напряжений $\Phi(\alpha, \beta, t)$ на линиях раздела L_{lk} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_l} \frac{\partial \Phi_l}{\partial n} - \int_0^t \frac{\partial \Phi_l}{\partial n} \frac{\partial C_l(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ = \frac{1}{G_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} - \int_0^t \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} \frac{\partial C_k(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \end{aligned} \quad (1.12)$$

где n — нормаль к L_{lk} .

Крутящий момент выражается формулой

$$M = \sum_{m=1}^N \int_{\Omega_m} [(p - R) z_{\beta\beta}^{(m)} - z z_{\beta\beta}^{(m)}] d\Omega \quad (1.13)$$

где $d\Omega = H^2 d\alpha d\beta = d\rho dz$.

Переходя от $z_{\alpha\beta}^{(m)}$, $\sigma_{\beta\beta}^{(m)}$ к $z_{\beta\beta}^{(m)}$, $\sigma_{\beta\beta}^{(m)}$ и подставляя в (1.13), после применения формулы Грина—Остроградского получим

$$M = 2R \sum_{m=1}^N \int_{\Omega_m} \frac{\Phi_m}{\rho^3} d\Omega \quad (1.14)$$

§ 2. Пусть L_* — замкнутая кривая, целиком лежащая в одной из областей Ω_m ($m = 1, 2, \dots, N$) поперечного сечения скручиваемого стержня. Область, ограниченную этим контуром, обозначим Ω_* (фиг. 2). Интегри-

руя обе части уравнения (1.9) в области Ω_s и переходя к контурному интегралу, получим

$$\int_{L_s} \frac{1}{\rho^3} \left[\frac{\partial \Phi_m}{\partial n} - \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{\partial \Phi_m}{\partial n} K_m(t, \tau) d\tau \right] ds = - \frac{DG_m}{2} \int_{L_s} \frac{dz}{\rho^2} \quad (2.1)$$

где n — направление внешней нормали к контуру L_s , а s — дуга этого контура. Интегральное уравнение (2.1) обобщает теорему Бредта о циркуляции касательных напряжений при кручении составного кривого стержня с учетом ползучести.

Можно доказать [6] верность формулы (2.1), когда контур проходит через несколько областей Ω_m ($m = 1, 2, \dots, s \leq N$), пересекая их линии раздела L_{jk} .

§ 3. Решение уравнения (1.9). Уравнения (1.9) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial z^2} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \Phi_m}{\partial x} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \Phi_m}{\partial z} = H^2 f_m(t) \quad (3.1)$$

$$(m = 1, 2, \dots, N)$$

где

$$f_m(t) = G_m \left[D(t) + \int_{\tau_1}^{\tau} D(\tau) R_m(t, \tau) d\tau \right] \quad (3.2)$$

$$(m = 1, 2, \dots, N)$$

а $R_m(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_m(t, \tau)$. При

$$C_m(t, \tau) = \varphi_m(\tau) [1 - \exp(-\gamma_m(t - \tau))]$$

имеем

$$R_m(t, \tau) = \gamma_m - \gamma_m'(\tau) + [\gamma_m'(\tau) + \gamma_m'^2(\tau) - \gamma_m \gamma_m'(\tau)] \times$$

$$\times \exp(\gamma_m(\tau)) \int_{\tau}^t \exp(-\gamma_m(x)) dx$$

$$\gamma_m(\tau) = \gamma_m \int_{\tau_1}^{\tau} [1 + 3 G_m \varphi_m(\tau)] d\tau$$

здесь $\varphi_m(\tau) = C_{0,m} + A_{1,m}/\tau$, где $A_{1,m}$, $C_{0,m}$, γ_m — постоянные, характеризующие свойство ползучести материала.

Вводя новую функцию $\Psi_m(\alpha, \beta, t)$ при помощи соотношения $\Phi_m(\alpha, \beta, t) = (\cosh \alpha - \cos \beta)^{-3/2} \text{sh}^2 \alpha \Psi_m(\alpha, \beta, t)$, из (3.1) получим уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{\partial^2 \Psi_m}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Psi_m}{\partial \beta^2} + \text{cth} \alpha \frac{\partial \Psi_m}{\partial \alpha} + \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{\text{sh}^2 \alpha} \right) \Psi_m = H^2 A^{-1} f_m(t) \quad (3.3)$$

$$(m = 1, 2, \dots, N)$$

где

$$A = A(\alpha, \beta) = \text{sh}^2 \alpha (\cosh \alpha - \cos \beta)^{-3/2}$$

Пользуясь (1.10)–(1.12), получим

$$\begin{aligned}\Psi_m(\alpha, \beta, t) &= 0 \quad \text{на } L_0 \\ \Psi_i(\alpha, \beta, t) &= \Psi_k(\alpha, \beta, t) \quad \text{на } L_{ik}\end{aligned}\quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{G_1} \frac{\partial (A\Psi_1)}{\partial n} - \int_0^1 \frac{\partial (A\Psi_1)}{\partial n} \frac{\partial C_1(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ = -\frac{1}{G_2} \frac{\partial (A\Psi_2)}{\partial n} - \int_0^1 \frac{\partial (A\Psi_2)}{\partial n} \frac{\partial C_2(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad \text{на } L_{12}\end{aligned}$$

§ 4. Рассмотрим задачу о кручении составного кривого стержня, поперечное сечение которого состоит из двух областей, ограниченных неконцентрическими окружностями $\alpha = \alpha_0$, $\alpha = \alpha_1$ (фиг. 3). Пусть в области Ω_1 материал обладает свойством ползучести, а в области Ω_2 справедлив закон Гука. На основании вышесказанного, функции $\Psi_1(\alpha, \beta, t)$ и $\Psi_2(\alpha, \beta, t)$ в областях Ω_1 и Ω_2 должны удовлетворять уравнению (3.3) при $m = 1, 2$. Здесь значения $f_m(t)$ определяются из (3.2), которые в данном случае примут следующий вид:

$$f_1(t) = G_1 \left| D(t) + \int_0^1 D(\tau) R_1(t, \tau) d\tau \right|, \quad f_2(t) = G_2 D(t) \quad (4.1)$$

а из условия (3.4) имеем

$$\Psi_1(\alpha_0, \beta, t) = 0, \quad \Psi_1(\alpha_1, \beta, t) = \Psi_2(\alpha_1, \beta, t) \quad (4.2)$$

$$\frac{G_1}{G_2} \frac{\partial (A\Psi_2)}{\partial \alpha} = \frac{\partial (A\Psi_1)}{\partial \alpha} - \int_0^1 \frac{\partial (A\Psi_1)}{\partial \alpha} K_1(t, \tau) d\tau \quad \text{при } \alpha = \alpha_1$$

Предварительно введем функции

$$\begin{aligned}Z_n^m(\alpha, \beta) &= P_n^m(\operatorname{ch} \alpha) Q_n^m(\operatorname{ch} \beta) - P_n^m(\operatorname{ch} \beta) Q_n^m(\operatorname{ch} \alpha) \\ Z_n^{ms}(\alpha, \beta) &= P_n^m(\operatorname{ch} \alpha) Q_n^s(\operatorname{ch} \beta) - P_n^s(\operatorname{ch} \beta) Q_n^m(\operatorname{ch} \alpha)\end{aligned}$$

где $P_n^m(x)$ и $Q_n^m(x)$ — присоединенные сферические функции соответственно первого и второго рода m -го порядка n -го индекса.

Вводя новую функцию $F_i(\alpha, \beta, t)$ при помощи соотношений

$$\Psi_i(\alpha, \beta, t) = F_i(\alpha, \beta, t) + f_i(t)(2A)^{-1} z^2 \quad (i=1, 2) \quad (4.3)$$

для $F_i(\alpha, \beta, t)$ на основании (3.3) приходим к дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F_i}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \beta^2} + \operatorname{cth} \alpha \frac{\partial F_i}{\partial \alpha} + \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{\operatorname{sh}^2 \alpha} \right) F_i = 0 \\ (i=1, 2)\end{aligned}\quad (4.4)$$

На основании краевых условий (4.2) из (4.3) находим

$$F_1(z_0, \beta, t) = -f_1(t) a^2 \sin^2 \beta [2 \operatorname{sh}^2 z_0 (\operatorname{ch} z_0 - \cos \beta)]^{-1/2} \quad (4.5)$$

$$F_1(z_1, \beta, t) - F_2(z_1, \beta, t) = [f_2(t) - f_1(t)] a^2 [2 \operatorname{sh}^2 z_1 (\operatorname{ch} z_1 - \cos \beta)]^{1/2} \quad (4.6)$$

$$\frac{G_1}{G_2} \frac{\partial (AF_2)}{\partial z} = \frac{\partial (AF_1)}{\partial z} = \int_0^1 \frac{\partial (AF_1)}{\partial z} K_1(t, z) dz$$

при $z = z_1$

Решение систем уравнений (4.4) при граничных условиях (4.5) можно представить в виде

$$F_1(z, \beta, t) = \frac{a_0(t)}{2} \frac{Z_{-1/2}^-(z_0, z)}{Z_{-1/2}^-(z_0, z_1)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{Z_{n-1/2}^-(z_0, z)}{Z_{n-1/2}^-(z_0, z_1)} \cos n\beta + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\beta_n^1(t) \frac{Z_{n-1/2}^-(z_1, z)}{Z_{n-1/2}^-(z_1, z_1)} + \beta_n^2(t) \frac{Z_{n-1/2}^-(z_0, z)}{Z_{n-1/2}^-(z_0, z_1)} \right] \cos n\beta \quad (4.7)$$

$$F_2(z, \beta, t) = \frac{a_0(t)}{2} \frac{Q_{-1/2}^-(\operatorname{ch} z)}{Q_{-1/2}^-(\operatorname{ch} z_1)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \frac{Q_{n-1/2}^-(\operatorname{ch} z)}{Q_{n-1/2}^-(\operatorname{ch} z_1)} \cos n\beta$$

где

$$\beta_0^1(t) = -\frac{f_1(t) a^2}{2 \operatorname{sh}^2 z_0} \int_0^1 \frac{\sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} z_0 - \cos \beta)^{1/2}} d\beta$$

$$\beta_n^1(t) = -\frac{f_1(t) a^2}{\pi \operatorname{sh}^2 z_0} \int_0^1 \frac{\sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} z_0 - \cos \beta)^{1/2}} \cos n\beta d\beta \\ (n = 1, 2, \dots)$$

$$\beta_0^2(t) = \frac{f_2(t) - f_1(t)}{2 \operatorname{sh}^2 z_1} a^2 \int_0^1 \frac{\sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} z_1 - \cos \beta)^{1/2}} d\beta$$

$$\beta_n^2(t) = \frac{f_2(t) - f_1(t)}{\operatorname{sh}^2 z_1} a^2 \int_0^1 \frac{\sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} z_1 - \cos \beta)^{1/2}} \cos n\beta d\beta \\ (n = 1, 2, \dots)$$

Используя условие (4.6), из (4.7) приходим к бесконечной системе интегральных уравнений относительно $a_n(t)$

$$B_{00} a_0(t) + 2B_{01} a_1(t) = \int_0^1 [B_{00} a_0(z) + 2B_{01} a_1(z)] K_1(t, z) dz = 2h_0(t)$$

$$\sum_{i=n-1}^{n+1} \left[B_{ni} a_i(t) - \int_{\tau_1}^t B_{ni} a_i(\tau) K_1(t, \tau) d\tau \right] = h_n(t) \quad (4.8)$$

(n = 1, 2, \dots)

Коэффициенты и свободные члены определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} B_{n1} &= (i^2 - 9/4) \frac{G_1}{G_2} \frac{Z_{n-1/2}^{(1)}(a_0, a_1)}{Z_{n-1/2}^{(2)}(a_0, a_1)} \operatorname{sh} a_1 - B_{n1}^* \\ B_{n1}^* &= (i^2 - 9/4) \operatorname{sh} a_1 \frac{Q_{n-1/2}^{(1)}(\operatorname{ch} a_1)}{Q_{n-1/2}^{(2)}(\operatorname{ch} a_1)} \quad \left(\begin{matrix} i = n-1, n+1 \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{matrix} \right) \\ B_{nn} &= \frac{G_1}{G_2} \left[-3 \operatorname{sh}^2 a_1 + \operatorname{sh} 2a_1 (n^2 - 9/4) \frac{Z_{n-1/2}^{(1)}(a_0, a_1)}{Z_{n-1/2}^{(2)}(a_0, a_1)} \right] - B_{nn}^* \\ B_{nn}^* &= -3 \operatorname{sh}^2 a_1 + \operatorname{sh} 2a_1 (n^2 - 9/4) \frac{Q_{n-1/2}^{(1)}(\operatorname{ch} a_1)}{Q_{n-1/2}^{(2)}(\operatorname{ch} a_1)} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \\ 2h_0(t) &= H_0(t) - G_1 G_2^{-1} [-3 \operatorname{sh}^2 a_1 \beta_0^1(t) + \operatorname{sh} 2a_1 c_0(t) - 2 \operatorname{sh} a_1 c_1(t)] \\ h_n(t) &= -G_1 G_2^{-1} [-3 \operatorname{sh}^2 a_1 \beta_n^1(t) + \operatorname{sh} 2a_1 c_n(t) - \\ &\quad - \operatorname{sh} a_1 c_{n-1}(t) - \operatorname{sh} a_1 c_{n+1}(t)] \quad (n=1, 2, \dots) \\ c_n(t) &= \frac{n^2 - 9/4}{Z_{n-1/2}^{(2)}(a_0, a_1)} [Z_{n-1/2}^{(1)}(a_1, a_1) \cdot \beta_n^1(t) - Z_{n-1/2}^{(2)}(a_1, a_1) \beta_n^2(t)] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Из соотношений (1.14), (4.3) и (4.7) определяем значение неизвестной функции $D(t)$.

§ 5. Исследование бесконечной системы интегральных уравнений (4.8). Пользуясь асимптотическим разложением присоединенных функций Лежандра [16] $P_n^m(\operatorname{ch} x)$, $Q_n^m(\operatorname{ch} x)$ при больших значениях n

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(n+1-m)}{\Gamma(n+1)} P_n^m(\operatorname{ch} x) &= \frac{\exp\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{(2\pi n \operatorname{sh} x)^{1/2}} \left(1 - \frac{1}{8n}\right) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1-4m^2}{4n} \frac{\exp(-2x)}{1 - \exp(-2x)}\right) \\ \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+m+1)} Q_n^m(\operatorname{ch} x) &= \exp(\pi m i) \left(\frac{\pi}{n}\right)^{1/2} \frac{\exp(-(n+1/2)x)}{(2 \operatorname{sh} x)^{1/2}} \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $\Gamma(p)$ — гамма-функция, а i — мнимая единица, покажем квазирегулярность системы (4.8) при $t = \tau_1$, $t = \infty$ и в случае $K_1(t, \tau) = K(t - \tau)$.

Систему уравнений (4.8) при $t = \tau_1$ представим в виде

$$a_0(\tau_1) = -\frac{2 B_{01}}{B_{00}} a_1(\tau_1) + \frac{2 h_0(\tau_1)}{B_{00}} \quad (5.2)$$

$$a_n(\tau_1) = -\frac{B_{n,n-1}}{B_{nn}} a_{n-1}(\tau_1) - \frac{B_{n,n+1}}{B_{nn}} a_{n+1}(\tau_1) + \frac{h_n(\tau_1)}{B_{nn}} \\ (n = 1, 2, \dots)$$

Пользуясь формулами (4.9) и оценками (5.1), получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left| \frac{B_{n,n-1}}{B_{nn}} \right| + \left| \frac{B_{n,n+1}}{B_{nn}} \right| \right| = (\text{cha}_1)^{-1} \quad (5.3)$$

Таким образом, система (5.2) квазивполне регулярна.

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n^1(\tau_1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\beta_n^1(\tau_1)] = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^2 - 9/4}{n} \cdot \frac{Z_{n-1/2}^{21}(z_0, a_1)}{Z_{n-1/2}^{21}(z_0, a_1)} \right] = -1$$

то имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{h_n(\tau_1)}{B_{nn}} \right] = 0$, то есть совокупность свободных членов системы (5.2) не только ограничена, но и стремится к нулю.

Обозначим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [a_n(t)] = a_n^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [h_n(t)] = h_n^*$$

и переходя к пределу в (4.8) при $t \rightarrow \infty$, получим

$$a_0^* = 2\gamma_{01}^* a_1^* + 2\bar{h}_0$$

$$a_n^* = \gamma_{n,n-1}^* a_{n-1}^* + \gamma_{n,n+1}^* a_{n+1}^* + \bar{h}_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.4)$$

здесь

$$\gamma_{ni}^* = \frac{B_{ni} - 3G_1 C_{0,1} B_{ni}^*}{3G_1 C_{0,1} B_{nn}^* - B_{nn}^*} \quad (n = 0, 1, \dots, i = n-1, n+1), \quad \bar{h}_n = \frac{h_n^*}{B_{nn} - 3G_1 C_{0,1} B_{nn}^*} \\ (n = 0, 1, \dots)$$

Исходя из формул (4.9) и оценок для сумм модулей коэффициентов при неизвестных a_n^* в системе (5.4), можно получить аналогичные (5.3) оценки.

Рассмотрим случай $K_1(t, \tau) = K(t - \tau)$, то есть когда в области Ω_1 имеем старый материал. Тогда применив к обеим частям системы уравнений (4.8) преобразование Лапласа, получим

$$B_{00} X_0(p) + 2B_{01} X_1(p) - [B_{00}^* X_0(p) + 2B_{01}^* X_1(p)] \bar{K}(p) = 2\bar{H}_0(p) \quad (5.5)$$

$$\sum_{i=n-1}^{n+1} [B_{ni} - B_{ni}^* \bar{K}(p)] X_i(p) = \bar{H}_n(p) \\ (n = 1, 2, \dots)$$

где

$$a(t) \rightleftharpoons X_n(p), \quad h_n(t) \rightleftharpoons \bar{H}_n(p), \quad K(t) \rightleftharpoons \bar{K}(p)$$

Нетрудно проверить, что система (5.5) квазивполне регулярна. Решая систему (5.5), найдем $X_i(p)$, оригиналы для которых и будут решением исходной системы интегральных уравнений (4.8).

ԲԱԶԱԴՐՅԱԼ ԿՈՐ ՉՈՂԻ ՍՈՂԵՐ ՈՒՐՈՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Մ. Ա. ՉԱԴՅԱՆ, Գ. Մ. ՓՈԼԱԴԻԱՆ

Ա ռ ի ո լ ի ո լ

Ստուժնասիրվում է ժառանգական սողրի հատկությամբ օժտված սողրի տարրեր չափեր ունեցող նյութերից կազմված կոր ձողի ուրման խնդիրը:

Սղաղելով թորական կոորդինատային համակարգից խնդիրը յուրաքանչյուր տիրույթում բերվում է ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրմանը խառը եզրային պայմաններով:

Ստուժնասիրվում է այն դեպքը, երբ ուղղահայաց հատույթը սահմանափակված է ոչ համակենտրոն շրջանագծերով: Այն դեպքում լուծումները ներկայացված են եռանկյունաչափական շարքերի միջոցով, որոնց գործակիցների համար ստացված է ինտեգրալ հավասարումների անվերջ համակարգ:

Մի քանի մասնավոր դեպքերի համար ցույց է տրվում ստացված համակարգի կվադրիտիկ ռեկուրյարությունը և ազոտ անդամների սահմանափակությունը:

THE CREEP OF THE CURVE OF THE COMPOUND BAR UNDER TORSION

M. A. ZADROYAN, F. M. POLADIAN

S u m m a r y

The problem refers to the torsion of the curved bar composed of materials possessing hereditary creep properties with different measurements.

By using the toroidal coordinate system the problem leads to integration in every interval of the integrodifferential equations with mixed boundary conditions.

The case is considered when the cross section is limited by non-concentric circles. In this case the solution is represented by means of the geometrical series for the coefficients of which an infinite system of integral equations is obtained.

For some partial cases the quasi-quite regularity and the limit of the free members of this system is shown.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арцтюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.—А.: ГИИЛ, 1952
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд. АН СССР, 1954.
3. Веква И. Н., Рухадзе А. К. Задача кручения кругового цилиндра, армированного продольным круговым стержнем. Изв. АН СССР, 1933, № 3.

4. Чобанян К. С. Применение функции напряжений в задаче о кручении призматических стержней, составленных из различных материалов.— Изв. АН Арм.ССР, серия физ.-мат., ест. и тех. наук, 1955, т. 8, № 2.
5. Лехницкий С. Г. Кручение многослойного стержня прямоугольного сечения.— Инж. сборник АН СССР, 1956, № 23.
6. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. А. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963.
7. Задоян М. А. Пластическое кручение неполного тора.— Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 2.
8. Задоян М. А. Пластическое кручение сектора кольца.— Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 1.
9. Галпчян П. В., Задоян М. А. Пластическое кручение крутового стержня с поперечным сечением в виде кольцевого сектора.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1979, т. 32, № 1.
10. Freiberger W. The uniform of a perfectly plastic circular ring. Commonwealth of Australia. Aeronautical Research Laboratories, Report ARLSM 2B, 1953.
11. Wang A. J., Prager W. Plastic twisting of a circular ring sector.— J. Mech. and Phys. Solids, 1955, vol. 3, p. 169—175.
12. Галпчян П. В. Пластическое кручение кривого стержня, составленного из различных материалов.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1980, т. 33, № 4.
13. Арутюнян Н. Х., Чобанян К. С. О кручении призматических стержней, составленных из различных материалов с учетом ползучести.— Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 6.
14. Задоян М. А., Поладян Ф. М. Задача нелинейной ползучести кривого стержня при кручении.— Докл. АН Арм.ССР, 1980, т. 71, № 3.
15. Новожилов В. В. Теория упругости. М.—Л.: Судостроиздат, 1962.
16. Гобсон Е. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952.

Институт механики АН Армянской ССР

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
27. VII, 1981

ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПЛАСТИЧЕСКИ-НЕОДНОРОДНЫХ УПРОЧНЯЮЩИХСЯ ТЕЛ ПРИ ВНЕЗАПНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

СЛАФАРЯН Н. Б.

Пластически-неоднородные тела при динамическом воздействии впервые исследованы в работах Х. А. Рахматулина [1, 2], где предел текучести принимается переменным по длине рассматриваемого стержня. Этому вопросу посвящены также работы [3—9]. Подробный анализ исследований по динамическим задачам пластически-неоднородных тел приведен в обзорных статьях Х. А. Рахматулина и Г. С. Шапиро [10], Н. Кристеску [11] и в монографии В. Ольшака, Я. Рыхлевского, В. Урбановского [12].

В вышеуказанных работах исследования проводились, в основном, для случая идеально-пластической среды или случая линейного упрочнения.

В этой работе рассматриваются некоторые динамические задачи плоской деформации для несжимаемых двумерно-неоднородных тел со степенным упрочнением.

1. Соотношения деформационной теории пластичности при плоской деформации, несжимаемости материала и степенном упрочнении в случае двумерной неоднородности можно представить в виде:

дифференциальные уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial z_\theta}{\partial \theta} + \frac{z_r - z_\theta}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial z_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial z_r}{\partial \theta} + \frac{2}{r} z_r &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

закон упрочнения

$$z_0 = k(r, \theta) z_0^m$$

$$z_0 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau_{r\theta}^2}, \quad \varepsilon_0 = \sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + 4\gamma_{r\theta}^2} \quad (1.2)$$

где $k(r, \theta)$ — известная из эксперимента функция, характеризующая неоднородность материала; m — показатель упрочнения материала; соотношения между компонентами деформации, перемещения и напряжения

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2} K(r, \theta) z_0^{m-1} (z_r - z_\theta)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta} &= \frac{\sigma}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = \frac{1}{2} K(r, \theta) \varepsilon_0^{-1} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{\sigma}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} K(r, \theta) \varepsilon_0^{-1} \varepsilon_3 \end{aligned} \quad (1.3)$$

здесь

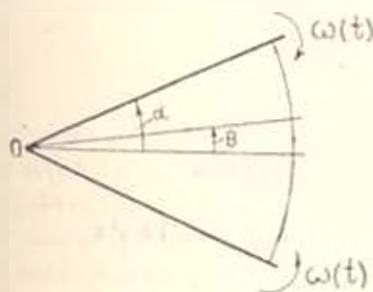
$$n = \frac{1}{m}, \quad K(r, \theta) = k^{-n} (r, \theta), \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$$

В данной работе полагаем, что закон неоднородности задан в виде

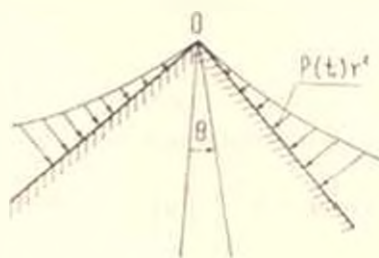
$$k(r, \theta) = k r^{-\mu} \cos \lambda \theta \quad (1.4)$$

где k, μ, λ — постоянные параметры материала.

2. Внезапно сжатие пластически-неоднородного клина между шероховатыми жесткими плитами (фиг. 1). Принимаем, что пластически-неодно-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

родный клин с раствором 2α в момент $t = 0$ внезапно сжимается шероховатыми жесткими плитами, вращающимися вокруг оси $r = 0$ по закону

$$v = \pm \omega(t) r, \quad \theta = \pm \alpha, \quad \text{где } \omega(0) = 0 \quad (2.1)$$

Проекция на ось $\Pi = 0$ равнодействующей напряжений, вычисленная на боковой поверхности цилиндра $r = \text{const}$, равна нулю

$$\int_0^\pi (\varepsilon_1 \cos \theta - \varepsilon_2 \sin \theta) d\theta = 0 \quad (2.2)$$

Здесь учтена симметричность относительно оси $\theta = 0$.

Компоненты перемещения, удовлетворяющие условию несжимаемости, введем в виде

$$\begin{aligned} u &= -r^{-1-1} f(t) \cos \theta + N(t) \cos \theta \\ v &= -r^{-1-1} f(t) \sin \theta - N(t) \sin \theta \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $N(t)$ — произвольная функция от t .

Выражения компонентов напряжений

$$\sigma_r, \sigma_\theta = H(t) + \mu r^{-2} f(t) \cos \theta + \mu N(t) r \cos \theta +$$

$$+ k \lambda [2 \lambda (\lambda + 1)]^{m-1} r^{-2\lambda-2} f^m(t) [\lambda \cos 2\lambda\theta - 2[\lambda + (\lambda + 1)] \cos^2 \lambda\theta] \\ \tau_{r\theta} = k \lambda (\lambda + 1) [2 \lambda (\lambda + 1)]^{m-1} r^{-2\lambda-2} f^m(t) \sin 2\lambda\theta \quad (2.4)$$

Здесь функция $H(t)$ получается при интегрировании уравнения (1.1) $\lambda = \frac{2m-2+\mu}{2-m}$.

В нашем случае, полагая $\mu = -2$, то есть при законе неоднородности $k(r, \theta) = kr^2 \cos 2\theta$ и $N(t) = 0$ будем иметь

$$\sigma_r, \sigma_\theta = H(t) + r^2 [p f''(t) \cos 2\theta - k 4^m f^m(t) (1 \mp \cos^2 2\theta)] \\ \tau_{r\theta} = -k 4^m f^m(t) r^2 \sin 2\theta \cos 2\theta \quad (2.5)$$

Для компонентов перемещений находим

$$u = 2f(t) r \cos 2\theta, \quad v = -2f(t) r \sin 2\theta \quad (2.6)$$

Из граничных условий (2.1) определяем

$$f(t) = \frac{\omega(t)}{2 \sin 2\alpha} \quad (2.7)$$

Далее, подставляя σ_r и $\tau_{r\theta}$ из (2.5) в (2.2), получим

$$H(t) = R^2 p f''(t) \left| \frac{2}{3} \sin^2 \alpha - 1 \right| + \frac{2}{3} k 4^m R^2 f^m(t) \sin^2 \alpha \quad (2.8)$$

где R — фиксированное значение r .

Сила давления на клин будет

$$P(t) = - \int_0^R \sigma_r(r, \alpha, t) dr = \\ = -H(t) R - [p f''(t) \cos 2\alpha - k 4^m f^m(t) (1 + \cos^2 2\alpha)] \frac{R^3}{3} \quad (2.9)$$

3. Взаимное воздействие нормального давления на неоднородной четверть-плоскости (фиг. 2). Положим, что на гранях четверть-плоскости, неоднородность которой определяется законом $k(r, \theta) = kr^2 \cos 2\theta$, в момент $t = 0$ приложено давление, меняющееся по длине по параболическому закону

$$\sigma_\theta = -P(t) r^2 \quad \theta = \pm \frac{\pi}{4} \quad (3.1)$$

Полагая в соотношениях компонентов напряжений и перемещений $\mu = -2$, ($\lambda = -2$), $H(t) = 0$, получим

$$\sigma_r, \sigma_\theta = [p f''(t) \cos 2\theta - k 4^m f^m(t) (1 \mp \cos^2 2\theta)] r^2 \\ \tau_{r\theta} = -k 4^m f^m(t) r^2 \sin 2\theta \cos 2\theta \\ u = 2f(t) r \cos 2\theta, \quad v = -2f(t) r \sin 2\theta \quad (3.2)$$

Из граничных условий (3.1) определяем

$$f(t) = \frac{1}{4} \left(\frac{P(t)}{k} \right)^n$$

Перемещения на границах будут

$$u = 0 \quad \varphi = \mp \frac{1}{2} \left(\frac{P(t)}{k} \right)^n \quad r = 0 = \pm \frac{\pi}{4}$$

Этап разгрузки можно рассматривать обычным способом.

ՊԼԱՍՏԻԿՈՐԵՆ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԱՄՐԱՊԵՂՎՈՂ ՄԱՐԻՆԵՆԵՐԻ ՀԱՐՔ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆ ՀԱՆԿԱՐԱԿԻ ԱՋԴԵՅՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԳԵՊՔՈՒՄ

Ն. Բ. ՍԱԳԱՐԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Ուսումնասիրվում է աստիճանային ամրապնդվող երկչափ անհամասեին և անսեղմելի մարմինների հարթ դեֆորմացիոն զինակր չանկարծախի ազդեցությունների դեպքում:

Օգտագործելով անսեղմելիության պայմանը դիտարկվող երկու խնդիրներում անդափսխելիությունները փնտրվում են որոշակի անսքոփ և անհամասեինության $k \cdot r^2 \cos 2\theta$ օրենքի դեպքում բավարարելով շարժման հավասարումներին ու եզրային պայմաններին, լարումների և անդափսխելիությունների համար ստացվում են պարզ անալիտիկ արտահայտություններ:

THE PLANE DEFORMATION OF THE PLASTIC NONHOMOGENEOUS STRENGTHING BODIES BY SUDDEN ACTION

N. B. SAFARIAN

S u m m a r y

The plane deformation state of two-dimensional nonhomogeneous, incompressible bodies with power strengthening by sudden action is considered. Assuming the incompressible condition in the two considered problems, the displacements are determined in a definite form.

Satisfying the motion equations and boundary conditions, by means of nonhomogeneous rule $k \cdot r^2 \cos 2\theta$ for the stresses and for the displacements the simple analytic expressions are obtained.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Рахматуллин Х. А. О распространении волны разгрузки вдоль стержня переменного предела упругости — ПИММ, 1946, т. 10, № 3.
2. Рахматуллин Х. А. Исследование законов распространения плоских упруго-пластических волн в среде с переменным пределом упругости. — ПИММ, 1950, т. 14, № 1.

3. Ленский В. С. Задача распространения упруго-пластических волн.— Вестник МГУ, 1949, № 3.
4. Мочалов С. Д. К вопросу о распространении упруго-пластических волн вдоль стержня переменного предела упругости.— Уч. запис. Томск. Ун-та, 1955, № 25.
5. *Peshtna P.* Propagation of elastic-plastic Waves in a non-homogeneous medium. Arch. Mech. Stos 1959, № 5.
6. Пешина П. Основные вопросы вязкопластичности. М.: Изд-во Мир, 1968.
7. *Gulowski R., Koliski S., Ostiecki J.* Propagation of the unloading plane wave in a non-homogeneous soil. Biuletyn WAT, 1959, № 2.
8. Кукуджанов В. Н., Никитин А. В. Распространение волн в стержнях из неоднородного упруго-вязко-пластического материала.— Изв. АН СССР, отд. мех. и мат., 1960, № 4.
9. Зидоян М. А. Распространение пластической зоны в неоднородной трубе при динамическом воздействии давления.— Изв. АН Арм. ССР, сер. физ. мат. н., 1960, т.13, № 3.
10. Рахматуллин Х. А., Шапиро Г. С. Распространение возмущений в нелинейно-упругой и неупругой среде.— Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 2.
11. *Cristescu N.* "Proc. Soc. Symposium", Pergamon Press, New-York, 1960.
12. Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. М.: Изд-во Мир, 1964.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
5. II. 1982

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛОСКИХ
ЗАДАЧ КОНТАКТНО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ
СМАЗКИ ПРИ РЕЖИМАХ ТЯЖЕЛОГО НАГРУЖЕНИЯ.
ЧАСТЬ II. НЕИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

КУДНШ И. И

1. *Введение.* Данная работа, являющаяся продолжением [1], посвящена асимптотическому исследованию плоской стационарной неизотермической контактно-гидродинамической задачи для шероховатых упругих тел, разделенных тонким слоем несжимаемой смазки с реологией типа Рейнера-Ривалина. Указанная задача для случая ньютоновской жидкости и гладких тел исследовалась в [2—5] численными методами или на основе ряда априорных допущений о поведении давления $p(x)$, зазора $h(x)$ и температуры смазки $T(x, z)$.

Исходные уравнения и постановка задачи, а также смысл использованных обозначений подробно описаны в [1]. В данной работе асимптотическое исследование задачи, как правило, допедено до стадии, когда оказываются непосредственно применимыми методы [1]. Поэтому ниже приведен лишь тот анализ задачи, который отличает настоящую работу от [1]. Кроме того, в статье приведены некоторые результаты по толщине слоя смазки, температуре и т. д.

2. *Метод решения плоской неизотермической упруго-гидродинамической задачи для случая тяжело нагруженного контакта.* В данном параграфе развивается метод регулярных возмущений [6], который в ряде случаев позволяет свести плоскую неизотермическую упруго-гидродинамическую задачу для тяжело нагруженного контакта к аналогу задачи § 2 работы [1] и далее исследовать ее изложенным в § 2 работы [1] методом. Отметим, что трудности, встающие на пути решения изотермической задачи, при решении неизотермической задачи усугубляются необходимостью совместного определения давления, зазора и температуры. В то же время методы решения и сами решения этих двух задач в качественном отношении близки. Поэтому все сказанное в § 2 работы [1] о решении изотермической задачи в равной мере относится и к решению неизотермической задачи.

В условиях тяжело нагруженного контакта в уравнения (1.1) — (1.11) входит малый параметр ω , порожденный большими нагрузками на контакт, малыми линейными скоростями движения и т. д. Более подробно смысл параметра ω и примеры его задания изложены в [1]. Напомним, что контакт называется тяжело нагруженным, если при $\omega \ll 1$ обеспечивается выполнение неравенства [1]

$$H_0(h-1) - \nu p^2 \ll 1 \quad \text{при } x-a \gg \varepsilon_q, \quad c-x \gg \varepsilon_q \quad (2.1)$$

где $\varepsilon_q = \varepsilon_q(\omega) \ll 1$ и $\varepsilon_a = \varepsilon_a(\omega) \ll 1$ — характерные размеры зон входа и выхода из области контакта, расположенных в окрестностях точек $x=a$ и $x=c$. При этом давление по всей области контакта за исключением малых зон входа и выхода близко к герцевскому.

Ниже детально разобраны различные режимы смазывания, классификация которых устанавливается с помощью порядка величины $\nu(x)$

$$\nu(x) = \frac{H_0 h dp}{2f dx} \quad (2.2)$$

Заметим, что при $\omega \ll 1$ в зоне входа функция ν может иметь значения $\nu \ll 1$, $\nu \sim 1$ или $\nu \gg 1$.

Для возможности проведения асимптотического исследования предположим, что постоянные a , sl , $\bar{h}$ и χ являются функциями малого параметра ω и удовлетворяют условиям [1]

$$a = -1 + \alpha_1 \varepsilon_q, \quad \alpha_1 < 0, \quad \alpha_1 \sim 1; \quad l = l_0 \varepsilon_q^{\frac{1-\alpha}{2}}, \quad l_0 > 0, \quad l_0 \sim 1 \quad (2.3)$$

$|sl| \ll 1$ при $\omega \ll 1$

С целью сокращения изложения ниже будут приведены лишь основные результаты и опорные моменты в исследовании рассматриваемой задачи. Для облегчения понимания существа примененных асимптотических методов, где это необходимо, будут делаться ссылки на работу [1], в которой эти методы подробно изложены.

А) Рассмотрим условия смазывания, при которых в зоне входа $\nu \ll 1$. Из вида уравнений (1.1) (второе уравнение) и (1.5), а также из определения (2.2) функции ν следует, что функции $f(x)$ и $T(x, z)$ при $\nu \ll 1$ необходимо искать в виде разложений по целым степеням $\nu \ll 1$

$$f = f_0 + \nu f_1 + O(\nu^2), \quad T = T_0 + \nu T_1 + O(\nu^2) \quad (2.4)$$

Разложив функцию $f\left[1 + \frac{2z}{h}\nu\right]$, входящую в (1.5) и второе уравнение (1.1), по формуле Тейлора в окрестности $l = l_0$ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ν , с помощью разложения (2.4) получим

$$\begin{aligned} f_0 &= \Phi \left[sl / \int_{h/2}^{h/2} \frac{ds}{\mu(p, T_0)} \right] \\ f_1 &= \left[sl \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\mu_T(p, T_0) T_1 ds}{\mu^2(p, T_0)} \cdot \Phi' \left[sl / \int_{h/2}^{h/2} \frac{ds}{\mu(p, T_0)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2f_0}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{ds}{\mu(p, T_0)} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{s ds}{\mu(p, T_0)} \right] / \left(\int_{-h/2}^{h/2} \frac{ds}{\mu(p, T_0)} \right)^2, \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

а также уравнения для определения функций $T_0(x, z)$, $T_1(x, z), \dots$. Из разложений по степеням $v \ll 1$ функций $T_{\pm 1}(x)$ получим граничные условия для функций $T_k(x, z)$. Решив полученные таким образом уравнения, найдем функции $T_0(x, z)$ и $T_1(x, z)$, как функции z , $p(x)$, $h(x)$, $T_{\pm 1}^0(x)$, $T_{\pm 2}^0(x)$, $T_{\pm 1}^1(x)$, $T_{\pm 2}^1(x)$, x , sl , H_0 (здесь $T_{\pm 1}^k(x)$ — коэффициенты асимптотических разложений $T_{\pm 1}(x)$). В результате, используя (2.4) и формулу Тейлора для разложения функции

$$F\left[f\left(1 + \frac{2z}{h}v\right)\right] \text{ в окрестности } f=f_0 \text{ до второго члена включительно,}$$

вычислим интеграл, входящий в (1.2), и тем самым функцию $W(p, h)$. Для краткости мы не будем приводить аналитического выражения для функции W в общем случае.

Следует отметить, что для исследования в главном задачи относительно $p(x)$, H_0 и т. д. (при $v \ll 1$ в зоне входа) необходимо и достаточно знание лишь функций $f_{\pm}(x)$, $f_1(x)$, $T_0(x, z)$ и $T_1(x, z)$. Поэтому дальнейший анализ упрощенной системы уравнений при $\omega \ll 1$ выполняется в полном согласии с асимптотическим методом § 2 работы [1].

Проналюстрируем изложенную методику исследования на примере конкретных зависимостей

$$\mu(p, T) = \bar{\mu}(p) e^{-\delta T}, \quad \frac{\partial f(p, T)}{\partial T} = 0 \quad (2.6)$$

хорошо аппроксимирующих экспериментальные данные для широкого класса смазочных материалов. Здесь $\bar{\mu}(p)$ и $\delta = \delta(p)$ — функции давления, независимые от температуры. Предположим также для простоты, что температуры тел одинаковы, причем потребуем, чтобы выполнялись равенства

$$T_0\left(x, \pm \frac{h}{2}\right) = T_{\pm}(x), \quad T_k\left(x, \pm \frac{h}{2}\right) = 0; \quad k=1, 2, \dots \quad (2.7)$$

В этих предположениях с помощью (2.5) — (2.7) и изложенной выше методики получим краевые задачи для функций T_0 и T_1 ,

$$\chi(p) \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} = - \frac{\delta H_0}{\bar{\mu}(p)} f_0 F(f_0) \exp(\delta T_0), \quad T_0\left(x, \pm \frac{h}{2}\right) = T_{\pm}(x) \quad (2.8)$$

$$\chi(p) \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = - \frac{\delta H_0}{\bar{\mu}(p)} f_0 F(f_0) \exp(\delta T_0) \left\{ \frac{2z}{h} \left[1 + \frac{f_0}{sl \bar{\mu}(p)} \int_{-h/2}^{h/2} \exp(\delta T_0) ds \right] \right. \\ \left. / \Phi\left(sl \bar{\mu}(p) / \int_{-h/2}^{h/2} \exp(\delta T_0) ds\right) + \delta T_1 \right\}, \quad T_1\left(x, \pm \frac{h}{2}\right) = 0 \quad (2.9)$$

Решение краевой задачи (2.8) получим в виде [7, 8]

$$\exp(\delta T_0) = A_0 [1 - \text{th}^2 Bz] \quad (2.10)$$

$$A_0 = \exp(\delta T_w) \operatorname{ch}^2 \frac{Bh}{2} \cdot \Phi \left(sl \tilde{\mu} \exp(-\delta T_w) \frac{B}{\operatorname{sh} Bh} \right) = \frac{4\gamma}{sl \chi \delta H_0} B \operatorname{th} \frac{Bh}{2} \quad (2.11)$$

Заметим, что при $sl \neq 0$ и выполненных условиях

$$\Phi(x) > 0 \text{ при } x > 0, \quad \Phi \left(sl \tilde{\mu} \exp(-\delta T_w) \frac{x}{\operatorname{sh} xh} \right) < \frac{4\gamma}{sl \chi \delta H_0} x \operatorname{th} \frac{xh}{2} \quad (2.12)$$

$x \rightarrow \infty$

и случае монотонно возрастающей функции Φ [1], решение второго уравнения в (2.11) для величины B существует и единственно.

Решение задачи (2.9) для функции T_1 имеет вид [8]

$$T_1 = \frac{1}{\delta} \left[1 + \frac{f_0 \exp(\delta T_w) \operatorname{sh} Bh}{sl \tilde{\mu} B} / \Phi' \left(sl \tilde{\mu} / \int_{-h/2}^{h/2} \exp(\delta T_0) ds \right) \right] \times \\ \times \left\{ \operatorname{th} \frac{Bz}{2} - \frac{2z}{h} \right\} \quad (2.13)$$

Теперь с помощью (2.4), (2.5), (2.10), (2.11) и (2.13) найдем выражение для функции

$$W(p, h) = - \frac{H_0 \delta \frac{dp}{dx} \operatorname{ch}^2 \frac{Bh}{2}}{2\tilde{\mu}(p) \exp(-\delta T_w) B^2} \left[\frac{Bh}{2 \operatorname{th} \frac{Bh}{2}} - \frac{Bh}{2} \operatorname{th} \frac{Bh}{2} - 1 + \right. \\ \left. + \frac{sl^2 \chi H_0 \tilde{\mu}(p) \exp(-\delta T_w)}{8\gamma \operatorname{sh}^2 \frac{Bh}{2}} \Phi' \left(\frac{sl \tilde{\mu}(p) \exp(-\delta T_w) B}{\operatorname{sh} Bh} \right) \right] \frac{Bh}{2 \operatorname{th} \frac{Bh}{2}} + \\ + \left[- \frac{Bh}{2} \operatorname{th} \frac{Bh}{2} - 4 \ln \operatorname{ch} \frac{Bh}{2} - 1 + \frac{8}{Bh} \int_0^{Bh/2} \ln \operatorname{ch} y dy \right] / \\ / \Phi' \left(\frac{sl \tilde{\mu}(p) \exp(-\delta T_w) B}{\operatorname{sh} Bh} \right) \quad (2.14)$$

Дальнейший асимптотический анализ полученной системы уравнений (1.1) (первое уравнение), (1.3), (1.4), (2.14) и (2.11) при условии, что в зонах входа и выхода $\delta(p) \sim 1$, $\chi(p) \sim 1$ и $T_w(x) \sim 1$, проводится в полном соответствии с § 2 работы [1]. Для данного анализа необходимо сделать следующее предположение об асимптотическом поведении функции Φ в зонах входа и выхода из области контакта [1]:

$$\Phi(v(x) sl) = \omega |sl|^m H_0^{-n} \Phi_0(t) + \dots; \quad \Phi_0(t) \sim 1, \quad t \sim 1 \quad (2.15)$$

Заметим, что из (2.15) вытекает равенство [1]

$$F(H_0 \varepsilon_p^{-1/2} w(t)) = (\omega^{-1} \varepsilon_p^{-1/2} H_0^{n-1})^{1/m} F_0(t) + \dots, F_n(t) \sim 1, w(t) \sim 1 \quad (2.16)$$

Здесь $\mu(x)$ и $w(t)$ — некоторые функции порядка единицы, величины ε_x и t в зоне входа заменяются на ε_y и $r = (x-a)/\varepsilon_a$, а в зоне выхода — соответственно на ε_x и $s = (x-c)/\varepsilon_y$.

Ниже будут рассмотрены условия смазывания, при которых в зонах входа и выхода при $\omega \ll 1$ выполняется соотношение $B \ll 1$ или $B \sim 1$ или $B \gg 1$. При этом из (2.15) и второго уравнения (2.11) следуют оценки

$$B \ll 1 \text{ при } \omega^1 |sl|^{m+1} H_0^{1-n} \ll 1 \quad (2.17)$$

$$B \sim 1 \text{ при } \omega^1 |sl|^{m+1} H_0^{1-n} \sim 1 \quad (2.18)$$

$$B \gg 1 \text{ при } \omega^1 |sl|^{m+1} H_0^{1-n} \gg 1 \quad (2.19)$$

В случае, когда в зоне входа $B \ll 1$, с помощью оценки (2.15) из второго уравнения (2.11) в зоне входа (выхода) в главном получим

$$B = \left[\frac{\kappa sl \partial H_0}{2\gamma h} \Phi \left(sl \frac{\mu \exp(-\delta T_w)}{h} \right) \right]^{1/2} + \dots = \quad (2.20)$$

$$= (\omega^1 |sl|^{m+1} H_0^{1-n})^{1/2} \left[\frac{\partial \Phi_0(t)}{2\gamma h} \text{Sign}(sl) \right]^{1/2} + \dots \text{ при } r, s \sim 1$$

При этом имеет место оценка (2.17). Учитывая малость величины B , из (2.14) найдем главный член разложения функции $W(p, h)$

$$W(p, h) = \frac{h^3}{12 \mu(p) \exp(-\delta T_w)} H_0 \frac{dp}{dx} / \Phi \left(\frac{sl \mu(p) \exp(-\delta T_w)}{h} \right) + \dots \quad (2.21)$$

Из сравнения выражений (2.21) для функции $W(p, h)$ в неизотермическом случае и (3.8) из [1] для функции $W(p, h)$ в изотермическом случае следует, что с точностью до замены μ на $\mu \exp(-\delta T_w)$ все результаты, полученные в п. А § 3 из [1], переносятся на рассматриваемый случай без изменений. Заметим, что при $\mu(p) = \mu(p)$ и $T_w \rightarrow 0$ из (2.21) следует, что неизотермическая задача сводится к изотермической.

На основании сказанного для толщины слоя смазки H_0 получим

$$H_0 = A (\omega^1 |sl|^{m+1} \varepsilon_p^2)^{1/(n+2)}, A = A(\alpha_1, l, m, n, \varepsilon_0, \alpha) \sim 1 \quad (2.22)$$

Поэтому в зонах входа и выхода величина B оказывается существенно меньше единицы, если выполнена оценка (см. (2.20))

$$\kappa \ll (\omega^{5l} |sl|^{2n+5m+3})^{-1/(3n+2)}, \omega \ll 1 \quad (2.23)$$

Отсюда следует справедливость (2.17).

Рассмотрим случай, когда в зонах входа и выхода $B \sim 1$. Из ранее изученного случая следует, что условием реализации данного режима является оценка (см. (2.23))

$$x \sim (\omega^{5l} |sl|^{2n+5m-3})^{-1/(3n-2)}, \quad \omega \ll 1 \quad (2.24)$$

Учитывая, что если решение уравнения (2.11) $B \sim 1$, то величины $\text{sh} \frac{Bh}{2}$, $\text{ch} \frac{Bh}{2}$ и т. п. имеют порядок 1, при замене в (3.8) из [1] и на $\mu \exp(-\delta T_w)$ и $\frac{h^2}{12} / \Phi' \left(\frac{\mu sl}{h} \right)$ соответственно на

$$\begin{aligned} & \frac{\text{ch}^2 \frac{Bh}{2}}{B^2} \left[\frac{Bh}{2 \text{th} \frac{Bh}{2}} - \frac{Bh}{2} \text{th} \frac{Bh}{2} - 1 + \frac{sl^2 \times H_0 \delta \mu(p) \exp(-\delta T_w)}{8 \chi \text{sh}^2 \frac{Bh}{2}} \times \right. \\ & \times \Phi' \left(\frac{sl \mu(p) \exp(-\delta T_w) B}{\text{sh} Bh} \right) \left[-\frac{Bh}{2 \text{th} \frac{Bh}{2}} + \frac{Bh}{2} \ln \frac{Bh}{2} - \right. \\ & \left. \left. - 4 \ln \text{ch} \frac{Bh}{2} - 1 + \frac{8}{Bh} \int_0^{\frac{Bh}{2}} \ln \text{ch} y dy \right] \right] / \Phi' \left(\frac{sl \mu(p) \exp(-\delta T_w) B}{\text{sh} Bh} \right) \end{aligned}$$

получим, что результаты п. А § 3 из [1] остаются в силе. Кроме того, отсюда следует справедливость оценки (2.18) (см. (2.22) и (2.24)). При этом для толщины слоя смазки H_0 по-прежнему имеет место оценка (2.22).

Рассмотрим случай, когда в зонах входа и выхода $B \gg 1$. При этом второе уравнение (2.11) в главном принимает вид (2.15)

$$\exp(m Bh) = \kappa \omega^l |sl|^{m+1} H_0^{1-n} \delta \chi^{-1} \mu^m \exp(-m \delta T_w) 2^{m-2} \Phi_0(t) \text{Sign}(sl) B^{m-1} \quad (2.25)$$

Предположим, что реология жидкости такова, что всегда имеет место неравенство $m > 0$. Тогда главный член решения уравнения (2.25) при $m > 0$ и $B \gg 1$ имеет вид [9]

$$B = \frac{1}{mh} \ln \left\{ \kappa \omega^l |sl|^{m+1} H_0^{1-n} \frac{2^{m-2} \mu^m \delta}{\chi \exp(m \delta T_w)} \Phi_0(t) \text{Sign}(sl) \right\} > 1 \quad (2.26)$$

Вычислим функцию $W(p, h)$ из (2.14). Разложив $W(p, h)$ из (2.14) при $B \gg 1$, с помощью соотношений (2.15), (2.25) и (2.26) найдем

$$W(p, h) = \frac{\kappa sl^2 H_0^2}{\ln^2 \left(\frac{1}{24} \kappa \omega^l |sl|^{m+1} H_0^{n-1} \right)} \frac{m(m+1) \delta h^l}{16 l} \frac{dp}{dx} + \dots \quad (2.27)$$

Следует отметить, что в (2.27) в роли вязкости смазки μ выступает теплопроводность χ .

Далее анализ задачи проводится в полном соответствии с асимптотическим методом § 2 п. 1. Не повторяя всех выкладок, приведем лишь результаты. Безразмерная толщина слоя H_0 находится из уравнения

$$H_0 = A \left| \frac{\varepsilon_0^2}{\kappa s l^2} \ln^2 \left(\frac{1}{24} \kappa \omega^l |s l|^{n-1} H_0^{1-n} \right) \right|^{1/3} \quad (2.28)$$

$$A = A(\alpha, l, m, n, \lambda_0, \gamma) = 1; \quad \omega \ll 1$$

Заметим, что из (2.28) при $n = 1$ следует явное выражение для H_0 . При прочих n , однако, подчеркивает необходимость решения уравнения (2.28) относительно H_0 при известной постоянной A . Не останавливаясь на этом подробно, отметим, что постоянная A является одним из компонентов решения соответствующих систем асимптотически справедливых уравнений из [1], в которых χ и $W_0(l)$ определяются из равенств

$$W_0(l) = \frac{m(m+1)\lambda_0 h^2}{16 l_0} \frac{d\rho}{dt}, \quad r=3, \quad \lambda_0 = \frac{1}{2}(\varepsilon_0^{1/2} \omega), \quad \gamma_0 = \chi(\varepsilon_0^{1/2} \omega) \quad (2.29)$$

Здесь в зоне входа символы ω , h и l следует заменить на q , h_q и r , а в зоне выхода — на g , h_g и s , где $q = q(r)$ и $g = g(s)$ — главные члены асимптотик давления в зонах входа и выхода [1] и $\varepsilon_0 = \varepsilon_q$.

Заметим, что из условия в зоне входа $\omega \ll 1$ с помощью формул (2.2), (2.22), (2.28), (2.4), (2.5) получим оценку, совпадающую с оценкой (3.13) из [1], при χ из (2.23) или (2.24) и оценку

$$\varepsilon_q \ll (|s l| \kappa^{-1} \ln(\kappa^{-1} |s l|^{n-1} H_0^{1-n}))^{2/3}, \quad \omega \ll 1 \quad (2.30)$$

при χ из (2.19). При выводе (2.30) также использовано равенство (2.26).

Остановимся кратко на условиях, при которых справедливы проведенный в данном пункте асимптотический анализ. Этими условиями являются (см. § 2 и п. А § 3 в [1]) (2.20) из [1], (2.15), $\bar{\varepsilon}(\varepsilon_0^{1/2}) \sim 1$, $\bar{\varepsilon}(\varepsilon_0^{1/2}) \sim 1$, $\chi(\varepsilon_0^{1/2}) \sim 1$, $T_n(x) \sim 1$ при $x \pm 1 \sim \varepsilon$, и $\varepsilon \ll 1$. При этом ε_0 , χ и H_0 удовлетворяют одной из следующих троек условий: (3.13) из [1], (2.23), (2.22); (3.13) из [1], (2.24), (2.22) и (2.30), (2.19), (2.28). Следует отметить, что в данном случае, также как и в п. А § 3 из [1], можно показать справедливость оценки (2.20) из [1], лежащей в основе примененного асимптотического метода.

Таким образом, для каждого из рассмотренных случаев в зонах входа и выхода получены две системы асимптотически справедливых уравнений с соответствующими постоянными χ и функциями $W_0(l)$. Данные системы уравнений замыкаются при $B \ll 1$ равенствами $h_q(r) = h_g(s) = 1$, а при $B \gg 1$ — уравнениями (2.29), (2.31) из [1] для $h_q(r)$ и $h_g(s)$. При этом в зависимости от порядка B для H_0 справедливы формулы (2.22) или (2.28).

В) Рассмотрим условия смазывания, при которых в зонах входа и выхода $\omega = 1$. В этом случае функцию f в зонах входа и выхода будем искать

в виде (3.15) из [1]. При этом уравнение для температуры (1.5) с учетом оценки (2.16) в зонах входа и выхода принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial z} \right) = - \frac{\varepsilon (\omega^{-1} \varepsilon_q)^{\frac{m+1}{2}} H_0^{2m+2+1} f_0}{\omega (\varepsilon_q^{1/2} v, T)} \left(f_0 + z \frac{df_0}{dz} \right) F_0(t, z) \quad (2.31)$$

Здесь символы Q и l в зоне входа заменяются на q и r , а в зоне выхода соответственно на g и s ; f_0 и f_q — главные члены асимптотик функции $f(x)$ в зонах входа и выхода [1]. Кроме того, в (2.31) уже использовано равенство (2.15) из [1].

Для простоты предположим, что $\chi(p, T) = \chi(p)$ и не зависит от T , а также, что $T_{w1}(x) = T_{w2}(x) = T_w(x)$.

Легко видеть, что величина $\varepsilon = \varepsilon (\omega^{-1} \varepsilon_q)^{\frac{m+1}{2}} H_0^{2m+2+1} f_0$ может иметь различный порядок при $\omega \ll 1$. При $\varepsilon \ll 1$ из уравнений задачи для температуры (см. (2.31), (1.6) и сделанные выше предположения) следует, что в главном $T(x, z) = T_w(x) + O(\varepsilon)$. Подставив эту функцию T в выражение (1.2) для $\Psi(p, h)$, найдем, что рассматриваемая неизотермическая упруго-гидродинамическая задача свелась к изотермической задаче, изученной в п. В § 3 из [1]. В силу этого все полученные в п. В § 3 из [1] результаты и условия их применимости верны и для рассматриваемой здесь задачи. В частности, для величин v_0 и H_0 имеют место формулы [1]

$$\varepsilon_q = (\omega^l |sl|^{n-m-1})^{2/(3n-2)} \\ H_0 = A(\omega^{3l} |sl|^{3m+1})^{1/(2n+2)}, \quad A = A(\alpha_1, l, m, n, \lambda_0, \alpha) \sim 1 \quad (2.32)$$

Поэтому из (2.32) следует, что $\sigma \ll 1$ при $\omega \ll 1$ при условии выполнения оценки (2.23).

При $\sigma \sim 1$ из уравнения (2.31) и условия $T_w(x) \sim 1$ в зонах входа и выхода получим, что $T(x, z) = O(1)$. В силу этого в зонах входа и выхода $\mu(p, T) \sim 1$. Поэтому, определив T из уравнений (2.31), (1.6) как функцию переменных $z, r(s), q(r)$ ($g(s)$) и т. д. и подставив в выражение (1.2) для функции $\Psi(p, h)$ и второе уравнение (1.1), найдем, что асимптотический анализ получившихся систем уравнений при $\omega \ll 1$ может быть проведен согласно методу § 2 из [1], который в данном случае несущественно отличается от метода, использованного в п. В § 3 из [1]. В силу сказанного, после очевидных изменений результаты п. В § 3 из [1] переносятся на рассматриваемый случай. В частности, для v_0 и H_0 справедливы формулы (2.32). Поэтому из (2.32) следует, что оценка $\sigma \sim 1$ при $\omega \ll 1$ имеет место при выполнении условия (2.24).

Рассмотрим случай $\sigma \gg 1$. При этом уравнения (2.31), (1.6) для температуры T имеют вид уравнений классической сингулярно возмущенной задачи с малым параметром при старшей производной [6, 10]. После нахождения с помощью второго уравнения (1.1), (2.16) и (3.15) из [1] функций f_0 и f_1 , входящих в (2.31), определение функции T из (2.31), (1.6) связано со значительными трудностями. Уравнение (2.31) в общем

случае является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами. Поэтому получить решение данного уравнения в аналитическом виде (за исключением случая $\mu(p, T) = \mu(p)/(1 + \delta T)$) вряд ли представляется возможным (данное замечание относится и к случаю $\sigma \sim 1$). Однако, с помощью результатов п. А настоящего параграфа и соотношения $v \sim 1$ по непрерывности получим (см. формулы (2.2), (2.5), (2.26) и (2.28)) оценки (2.28) и

$$\varepsilon_q = [sl/x^{-1} \ln(x\omega/x_0^{m+1} H_0^{-n})]^{1/5}, \quad \omega \ll 1 \quad (2.33)$$

служащие для определения ε_q и H_0 как функций $x, \omega, |sl|, m, n$ и l . Далее анализируется какой именно режим смазывания реализуется: масляное голодание или обильная смазка [1], после чего используются уравнения (2.29), (2.35) из [1] и (2.32). Детальный же анализ задачи связан с численным методом решения исходных уравнений (1.1)–(1.6) и соответствующей системы с обращенным интегральным оператором [1].

В заключение данного пункта отметим, что проведенный асимптотический анализ справедлив при выполнении оценок (см. п. В § 3 из [1]) (2.22)

из [1], (2.16), $\mu(\varepsilon_q^{1/2}) \sim 1$, $\lambda(\varepsilon_q^{1/2}) \sim 1$, $\gamma(\varepsilon_q^{1/2}) \sim 1$, $T_\infty(x) \sim 1$ при $x \pm 1 \sim \varepsilon_q$ и $\omega \ll 1$. При этом ε_q, H_0 и ω удовлетворяют одной из следующих троек условий: (2.32), (2.23); (2.32), (2.24) и (2.33), (2.28).

$x(\omega^{-1} \varepsilon_q^{m+1} H_0^{n+1})^{1/5} \gg 1$. Кроме того, следует отметить, что можно показать справедливость оценки (2.20) из [1], лежащей в основе примененного асимптотического метода.

С) Рассмотрим условия смазывания, при которых в зонах входа и выхода $v \gg 1$. Выразим из (2.2) $H_0 \frac{dp}{dx}$ и подставим во второе уравнение

(1.1) и уравнение (1.5). Легко видеть, что вне малой, порядка $h/2v$, окрестности точки $z = 0$ функцию $T(x, z)$ и, одновременно, функцию $l(x)$ следует искать в виде асимптотического разложения по степеням $v^{-1} \ll 1$

$$f = f_0 + O(v^{-1}), \quad T = T_0 + v^{-1} T_1 + O(v^{-2}) \quad (2.34)$$

Разложив функцию $F \left[H_0 \frac{dp}{dx} \left(z + \frac{h}{2v} \right) \right]$ в ряд Тейлора в окрестности точки $H_0 \frac{dp}{dx}$ (который является асимптотическим при $|z| \gg \frac{h}{2v}$) и ограничившись первыми двумя членами, подставим это разложение в (1.5) и второе уравнение (1.1). После приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях v^{-1} с помощью (2.34) найдем

$$f_0 = \left[sl - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{F \left(H_0 s \frac{dp}{dx} \right)}{\mu(p, T_0)} ds \right] / \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{F' \left(H_0 s \frac{dp}{dx} \right)}{\mu(p, T_0)} ds - \right. \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2}{H_0 h \frac{dp}{dx} - h^2} \left\{ \frac{F\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right) \mu_T(p, T_0) T_1 ds}{\mu^2(p, T_0)} \right\} \\
& \frac{\partial}{\partial z} \left[\chi(p, T_0) \frac{\partial T_0}{\partial z} \right] = - \frac{z H_0^2 \frac{dp}{dx}}{\mu(p, T_0)} z F\left(H_0 z \frac{dp}{dx}\right) \quad (2.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z} \left[\chi(p, T_0) \frac{\partial T_1}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\chi_T(p, T_0) T_1 \frac{\partial T_0}{\partial z} \right] = - \frac{z H_0^2 \frac{dp}{dx}}{\mu(p, T_0)} F\left(H_0 z \frac{dp}{dx}\right) \times \\
& \times \left\{ \frac{h}{2} \left[1 + H_0 z \frac{dp}{dx} \frac{F'\left(H_0 z \frac{dp}{dx}\right)}{F\left(H_0 z \frac{dp}{dx}\right)} \right] - z \frac{\mu_T(p, T_0)}{\mu(p, T_0)} T_1 \right\} \quad (2.37)
\end{aligned}$$

Заметим, что уравнения (2.36), (2.37) замыкаются с помощью граничных условий для функций $T_n(x, z)$, полученных в предположении, что функции $T_{n+1}(x)$ и $T_n(x)$ представимы в виде рядов по степеням $v^{-1} \ll 1$.

Предположим, что каким-либо способом нам удалось получить решения уравнений (2.36), (2.37), выраженные через $p(x)$, $h(x)$, $\frac{dp}{dx}$, H_0 и т. д. Тогда можно перейти к выводу приближенного уравнения Рейнольдса. Для этого функции $F\left[H_0 \frac{dp}{dx} \left(s + \frac{h}{2s}\right)\right]$ и $\frac{1}{\mu(p, T)}$ с помощью представлений (2.34) разложим по формуле Тейлора соответственно в окрестности точек $H_0 s \frac{dp}{dx}$ и T_0 , удерживая при этом по два члена. Подставив затем эти разложения в (1.2), с учетом (2.2) получим

$$\begin{aligned}
W(p, h) = & \frac{sl}{2} h - \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-h/2}^s \frac{F\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right)}{\mu(p, T_0)} ds - \left[sl - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{F\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right)}{\mu(p, T_0)} ds \right] \times \\
& \times \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-h/2}^s \frac{1}{\mu(p, T_0)} \left[\frac{H_0 h}{2} \frac{dp}{dx} F'\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right) - \right. \\
& - \frac{\mu_T(p, T_0)}{\mu(p, T_0)} T_1 F\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right) \Big] ds + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{\mu(p, T_0)} \left[\frac{H_0 h}{2} \frac{dp}{dx} F'\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right) - \right. \\
& - \frac{\mu_T(p, T_0)}{\mu(p, T_0)} T_1 F\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right) \Big] ds + \dots \quad (2.38)
\end{aligned}$$

Рассмотрим для простоты частный случай равных температур тел (2.7). При этом из уравнений (2.36) и (2.37) следует, что функция $T_n(x, z)$ четна, а функция $T_1(x, z)$ нечетна по z . Отсюда вытекают равенства

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{F\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right)}{\mu(p, T_0)} ds = 0 \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-h/2}^z \frac{1}{\mu(p, T_0)} \left| \frac{H_0 h}{2} \frac{dp}{dx} F'\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right) - \frac{\mu_T(p, T_0)}{\mu(p, T_0)} T_1 F\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right) \right| ds = \\ & = \frac{h}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{\mu(p, T_0)} \left| \frac{H_0 h}{2} \frac{dp}{dx} F'\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right) - \frac{\mu_T(p, T_0)}{\mu(p, T_0)} T_1 F\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right) \right| ds \end{aligned}$$

с помощью которых будем иметь

$$W(p, h) = - \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-h/2}^z \frac{F\left(H_0 s \frac{dp}{dx}\right)}{\mu(p, T_0)} ds + \dots \quad (2.40)$$

В уравнениях (2.36) и (2.37) в зонах входа и выхода возникает параметр $\varepsilon = \chi \left(\omega \frac{1}{\varepsilon_q} \right)^{\frac{m+1}{2}} H_0^{m+1} \varepsilon_q^{1/2}$ (см. представления (2.8) из [1] и (2.16)), который может иметь различный порядок при $\omega \ll 1$. При $\varepsilon \ll 1$ из уравнений для функций $T_0(x, z)$ и $T_1(x, z)$ (2.36), (2.37) и граничных условий (2.7) следует, что в основном в зонах входа и выхода $T(x, z) = T_\infty(x) + O(\varepsilon)$. Подставив эти выражения в (2.40), найдем, что рассматриваемая неизотермическая упруго-гидродинамическая задача свелась к изотермической задаче, изученной в п. С § 3 из [1]. В силу этого все полученные в п. С § 3 из [1] результаты и условия их применимости верны для рассматриваемого случая. В частности, для H_0 справедлива оценка (см. (3.25) из [1])

$$H_0 = A \left(\omega \frac{1}{\varepsilon_q} \right)^{\frac{3m+1}{2}} \varepsilon_q^{1/2}, \quad A = A(\gamma, l, m, n, \nu_0, \alpha) \sim 1 \quad (2.41)$$

и при этом выполняется одна из оценок (3.28) из [1] или (3.29) из [1], в зависимости от чего реализуется либо режим масляного голодания, либо — обильной смазки [1]. Поэтому из (2.41) следует, что оценка $\sigma \ll 1$ при $\omega \ll 1$ справедлива при условии

$$\chi \ll \left(\omega \frac{1}{\varepsilon_q} \right)^{\frac{2n+3m+3}{2}} \varepsilon_q^{1/2}, \quad \omega \ll 1 \quad (2.42)$$

При $\sigma \sim 1$ из уравнений (2.36), (2.37) и (2.7) вытекает, что в зонах входа и выхода $T_0(x, z) \sim 1$ и $T_1(x, z) \sim 1$. Отсюда в зонах входа и выхода имеем оценку $\mu(p, T) \sim 1$. Поэтому, определив функции $T_0(x, z)$ и $T_1(x, z)$ из уравнений (2.36), (2.37), (2.7), как функции перемещенных $z, r(s), q(r)$ ($g(s)$) и т. д., затем подставим эти функции в выражение (2.40) для $W(p, h)$. В результате получим, что асимптотический анализ

выведенных таким образом уравнений при $\omega \ll 1$ проводится согласно методике § 2 из [1], которая в данном случае мало отличается от метода, использованного в п. С § 3 из [1]. Поэтому после очевидных изменений результаты п. С § 3 из [1] переносятся на рассматриваемый случай. При этом оценки (3.28) и (3.29) из [1] переносятся без изменений, а формула для H_0 имеет вид (2.41). Из (2.41) следует условие справедливости оценки $\sigma \sim 1$ при $\omega \ll 1$ в виде

$$x \sim (\omega^2 \varepsilon_0^{2n+3m})^{-1/2}, \quad \omega \ll 1 \quad (2.43)$$

Рассмотрим случай $\sigma \gg 1$ при $\omega \ll 1$. При этом уравнения (2.36), (2.37), (2.7) для функций $T_0(x, z)$ и $T_1(x, z)$ имеют вид уравнений классической сингулярно возмущенной задачи с малым параметром при старшей производной [6, 10]. Уравнение (2.36) для $T_0(x, z)$ в общем случае нелинейное (исключение составляет случай $\mu(p, T) = \mu(p)/(1 + \delta T)$), а уравнение (2.37) для $T_1(x, z)$ — линейное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Поэтому решить эти уравнения или хотя бы оценить порядок функций $T_0(x, z)$ и $T_1(x, z)$ при $\omega \ll 1$ в общем случае не представляется возможным. В силу этого дальнейший асимптотический анализ не может быть осуществлен. По-видимому, единственной возможностью здесь является непосредственное численное исследование исходных систем уравнений.

Аналогично п. С § 3 из [1] можно показать справедливость оценки (2.22) из [1], лежащей в основе асимптотического анализа. Таким образом, проведенный в данном пункте асимптотический анализ справедлив при выполнении оценок (см. п. С § 3 из [1]) (2.16), $\mu(\varepsilon_0^{1/2}) \sim 1$, $\delta(\varepsilon_0^{1/2}) \sim 1$, $\lambda(\varepsilon_0^{1/2}) \sim 1$, $T_0(x) \sim 1$ при $x \sim 1 \sim \varepsilon_0$ и $\omega \ll 1$. При этом величины ε_0 , H_0 и x удовлетворяют одной из следующих троек условий: (3.27) из [1], (2.41), (2.42) и (3.27) из [1], (2.41), (2.43).

Следует иметь в виду, что выводы, сделанные в § 3 из [1] относительно поведения решения изотермической задачи, с несущественными изменениями переносятся на случай неизотермической задачи.

Автор благодарен В. М. Александрову за полезное обсуждение работы.

ՀԱՅԿԱՍՏԱՆԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՆ-ԶԻՆՈՒԹՅԱՆ ԻՆՏԵՐՆԱԿԱՆ ՏԵԽՆԻԹԵԶԱՆ ԸՆԴՐ ԽՆԴԻՐԱՆԵՐԻ
ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ՄԵԹՈԴՆԵՐԸ ՆԱՆԵՐ ԲԵՌՆԱԾՈՒԹՅԱՆ
ՌԵԶՈՒԼՏԱՏԻՆԵՐԻ ԿԵԼԵԲՈՒՄ: ՄԱՍ 11: ՈՉ ԻԶՈՒՆԵՐՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ե. Բ. ԿՈՒԿԵՆ

Պ. Ս. ՓԻՆՓԻՆԱՆ

Դիտարկվում է յուրման բարակ շերտով անջատված երկու խորթուրորդ առաձգական մարմինների սահմանով զուրման մասին հարթ առաջինար ոչ իզոտերմիկ կոնաակտու-հիդրոդինամիկական խնդիրը: Յուրումը դիտվում է մեկնեթ-միվլինի տիպի, բավականին ընդհանուր ռեոլոգիայով, անսահմանի մածուցիկ հեղուկ: Միկրոանհարթությունների շերտի տրորումը մոտարկվում

է նշման աստիճանային ֆունկցիայով, խնդիրը բերվում է ոչ գծային ինտեգրողիֆերենցիալ հավասարումների սխեմա՝ Ռեզոլյար ասիմպտոտիկ վերլուծությունների և կցման մեթոդներով խնդրի հետազոտման դեպքում, կոնտակտի տիրույթից մուտքի և ելքի գոտիներում ստացված են հավասարումներ հնչման և բացվածքի ասիմպտոտիկայի զլխավոր անդամների համար:

Բացի դրանից ստացված են մի շարք փերլուծական բանաձևեր յուզման շերտի հաստությունների և սահճի շփման ուժերի համար: Նշված բանաձևերը իրարից տարբերվում են զլոքման շփման լարումների և սահճի շփման լարումների տարբեր կարգի հարարերությունների գեպքում:

ASYMPTOTIC METHODS OF INVESTIGATION OF PLANE PROBLEMS OF ELASTOHYDRODYNAMIC LUBRICATION THEORY FOR HEAVY-LOADED REGIMES. PART II. NONISOTHERMAL PROBLEM

I. I. KUDISH

S u m m a r y

A plane nonisothermal elastohydrodynamic problem for rough bodies, divided by a thin layer of non-Newtonian viscous Reiner-Rivlin's liquid is studied by the method of matched asymptotic expansions in case of heavy-loaded contact. Asymptotic estimations are obtained for the lubricant film thickness and friction force under conditions of lubricant deficiency and abundant lubrication. Equations for major terms of pressure asymptotics are derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудиш И. И. Асимптотические методы исследования плоских задач контактно-гидродинамической теории смазки при режимах тяжелого нагружения. Часть I. Изотермическая задача.—Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1982, т. 35, № 5.
2. Каннел, Уоллуит. Упрощенный анализ сил трения при упруго-гидродинамическом контакте в условиях качения со скольжением.—Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Проблемы трения и смазки, 1971, т. 93, № 1.
3. Cheng H. S. Refined Solution of the Thermal Elastohydrodynamic Lubrication of Rolling and Sliding Cylinders, ASLE Trans., 1965, v. 8.
4. Ширококов В. В., Дроздов Ю. Н. Толщина смазочного слоя при качении со скольжением тел с учетом тепловых процессов.—Машиностроение, 1979, № 4.
5. Коднир Д. С. Контактная гидродинамика смазки деталей машин. М.: Машиностроение, 1976.
6. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 4-е изд. М.: Наука, 1971.
8. Кудиш И. И. Асимптотический анализ плоской неизоотермической упруго-гидродинамической задачи для тяжело нагруженного контакта качения.—Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1978, т. 31, № 6.
9. Де Брейн Н. Г. Асимптотические методы и анализе. М.: ИЛ, 1961.
10. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

К ВОПРОСУ О КОЛЕБАНИЯХ МАГНИТОУПРУГИХ ПЛАСТИН

ЗИЛЬБЕРГЛЕНТ А. С.

1. Не раз отмечалось [1—3], что силы диссипативного характера могут не только демпфировать колебания упругой системы, но и наоборот, в некоторых случаях служить причиной ее дестабилизации. Последнее утверждение выглядит несколько парадоксальным: ведь если силы действительно диссипативны, то они (по определению) должны отбирать энергию у системы, и, следовательно, гасить, а не усиливать, ее колебания.

Настоящая работа имеет целью прояснить этот вопрос применительно к динамическому поведению магнитоупругих пластинок конечных размеров. Показано, что если контур пластинки зажат или свободно оперт, то силы, являющиеся результатом взаимодействия колебаний электропроводящей пластинки с магнитным полем, действительно диссипативны, то есть обеспечивают положительную определенность функции диссипации. Именно, закон сохранения энергии системы при отсутствии внешней нагрузки есть

$$\frac{dE}{dt} = -D \quad (1.1)$$

где E — энергия, D — функция диссипации системы, являющиеся квадратичными функционалами от прогиба w и некоторых его производных первого и второго порядка; при указанных обстоятельствах $D > 0$ на всех допустимых ненулевых функциях прогиба.

Напротив, если часть контура магнитоупругой пластинки свободна, то знак диссипативной функции не определен и зависит от начальных условий и параметров задачи, так что возможны ситуации, в которых $D < 0$ и энергия системы растет со временем. Это по существу означает, что при наличии свободных участков границы магнитоупругие силы не являются строго диссипативными в рамках принятой гипотезы магнитоупругости тонких тел [4].

Такие же выводы о динамическом поведении магнитоупругих пластинок для ряда частных случаев были получены в [3] путем прямого исследования точных или приближенных решений соответствующих задач.

Подчеркнем один важный общий момент: вопрос о том, являются ли данные силы диссипативными или недиссипативными (активными), может быть решен только на основе закона сохранения энергии и тем самым обязательно при учете граничных условий, определяющих, наряду с уравнениями движения, множество допустимых состояний системы.

2. Начнем с пространственно-одномерной задачи (магнитоупругая балка длины l или пластина-полоса ширины l). Прогиб удовлетворяет уравнению [4, 3]:

$$D_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\gamma h \frac{\partial^3 w}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2}, \quad 0 < x < l \quad (2.1)$$

Здесь D_0 — жесткость пластины, ρ , h — соответственно ее плотность и толщина, $\kappa > 0$ — магнитоупругий коэффициент, имеющий значение $2\sigma h^3 H_0^2 / 3 c^2$ для колебаний пластинки в постоянном поперечном магнитном поле H_0 (σ — электропроводность материала пластинки, c — скорость света); для токнесущей пластинки $\kappa = 32\pi^2 \sigma h^3 j_0^2 / 15 c^4$, j_0 — плотность равномерно распределенного продольного тока.

Начальные условия задачи суть

$$w \Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x) \quad (2.2)$$

а граничные условия могут быть различными: один или оба конца $x = 0$, l пластинки могут быть заделаны ($a = 0$, $a = l$ или $a = 0, l$)

$$w \Big|_{x=a} = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0 \quad (2.3)$$

свободно оперты

$$w \Big|_{x=a} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=a} = 0 \quad (2.4)$$

и, наконец, при условии (2.3) или (2.4) на границе $x = 0$ конец $x = l$ может быть свободным от усилий

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=l} = 0 \quad (2.5)$$

Умножим уравнение (2.1) на $\frac{\partial w}{\partial t}$, проинтегрируем по интервалу $[0, l]$ и преобразуем при помощи интегрирования по частям. В результате получим закон сохранения энергии в виде (1.1), причем

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l [D_0 w_{xx}^2 + 2\gamma h w_t^2] dx \quad (2.6)$$

а функция диссипации есть

$$D(t) = D_0 [w_t w_{xxx} - w_{xt} w_{xx}]_0^l - \kappa w_t w_{xx} \Big|_0^l + \kappa \int_0^l w_{xt}^2 dx$$

(нижние индексы означают частные производные по соответствующим переменным). Легко убедиться, что при любом из граничных условий (2.3)–(2.5) первое слагаемое в правой части последнего равенства есть нуль, так что

$$D(t) = \varepsilon \left| -w_t w_{xt} \Big|_0^l + \int_0^l w_{xt}^2 dx \right| \quad (2.7)$$

Если оба конца $x = 0, l$ зашлемлены или свободно оперты, то есть выполняются условия (2.3) или (и) (2.4), то и оставшаяся в (2.7) двойная подстановка исчезает, а тогда

$$D = \varepsilon \int_0^l w_{xt}^2 dx > 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{dE}{dt} = -D < 0, \quad 0 < t < \infty$$

Таким образом, магнитоупругая пластинка-полоса без свободных краев оказывается энергетически устойчивой — ее энергия убывает со временем. Из выражения (2.6) ясно, что и сами значения прогиба могут при этом неограниченно нарастать лишь в исключительных — «патологических» — случаях. Более того, если оба края закреплены, то справедливо неравенство [5]

$$\int_0^l w^2 dx < \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \int_0^l w_{xx}^2 dx < \frac{2}{D_0} \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 E(t) < \frac{2}{D_0} \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 E(0)$$

а, значит, среднеквадратичный прогиб ограничен для всех значений t . Заметим еще, что соотношения (2.8), (2.6) очевидным образом гарантируют единственность решения соответствующих задач.

Совершенно иначе обстоит дело, если край $x = l$ свободен, то есть выполняется (2.5). В выражении (2.7) для функции диссипации сохраняется внеинтегральное слагаемое,

$$D(t) = \varepsilon \left| -w_t w_{xt} \Big|_{x=l} + \int_0^l w_{xt}^2 dx \right| \quad (2.9)$$

и в общем случае знак D не определен. Существует бесконечное множество функций $w(x, t)$, удовлетворяющих граничным условиям, для которых $D(t) < 0$. Однако выполняется ли это неравенство на настоящих решениях задачи? Следующее простое рассуждение дает положительный ответ на этот вопрос.

Будем, ради определенности, считать, что при $x = 0$ пластинка жестко закреплена (а при $x = l$ свободна). В начальных данных положим $\varphi(x) = 0$, а $\psi(x)$ выберем таким образом, чтобы $D(0) < 0$, и чтобы выполнялись условия согласования начальных и граничных условий

$$\psi(0) = \psi'(0) = 0, \quad \psi''(l) = \psi'''(l) = 0 \quad (2.10)$$

Тогда функция $D(t)$ заведомо непрерывна в некоторой правой окрестности точки $t = 0$, и, следовательно, сохраняет знак $D(0)$: $D(t) < 0$ по крайней мере при $t \in [0, t_n]$, $t_n > 0$.

В качестве примера функции $\psi(x)$, удовлетворяющей всем требованиям, включая (2.10), можно привести

$$\psi(x) = C \left[1 - (n+3) \frac{x}{l} + \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{n+3} \right], \quad n \geq 1, \quad C = \text{const} \quad (2.11)$$

нетрудно убедиться, что при этом

$$D(0) = -\frac{x}{l} C^2 \frac{(n+2)(n+3)}{2n+5} < 0$$

По сказанному, $D(t) < 0$ и при $t > 0$ — энергия решения задачи с начальным данным (2.11) растет по меньшей мере в первые моменты времени t , значит, может расти и само решение.

Итак, остается неясным лишь одно обстоятельство: может ли энергия, а вместе с ней и решение, расти и при $t \rightarrow \infty$, при каких начальных данных и параметрах задачи это может происходить. Приближенные расчеты работы [3] указывают на то, что подобные ситуации возможны, но для полного доказательства необходимо соответствующее точное решение. Его нетрудно построить по крайней мере для случая, когда при $x = 0$ пластинка свободно опирается (выполняются условия (2.4)), а конец $x = l$ свободен. Именно, возьмем начальные данные (2.2) в виде

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = \frac{x}{\tau}, \quad \tau > 0 \quad (2.12)$$

тогда, как можно проверить, точное решение всей задачи (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) есть

$$w_0(x, t) = x \frac{t}{\tau} \quad (2.13)$$

и оно неограниченно растет при $t \rightarrow +\infty$.

Механический смысл решения (2.13) прост: пластинка поворачивается как целое вокруг опертых края $x = 0$, а так как (2.13) обращает в нуль функцию диссипации (2.7), то неограниченному росту прогиба ничто не препятствует, как и при отсутствии диссипации.

С помощью (2.13) можно получить сколько угодно неограниченно растущих решений задачи с условиями «опора — свободный край». Действительно, если начальные данные

$$\varphi(x) = \varphi_1(x), \quad \psi(x) = \psi_1(x)$$

таковы, что отвечающий им прогиб $w_1(x, t)$ ограничен, то, рассмотрев задачу с начальными условиями

$$\varphi(x) = \varphi_1(x), \quad \psi(x) = \frac{x}{\tau} + \psi_1(x)$$

получим неограниченное при $t \rightarrow +\infty$ решение

$$w(x, t) = x \frac{t}{\tau} + w_1(x, t)$$

Отметим, что в [3] для опертой по обоим концам балки с помощью точного решения была показана ограниченность прогиба, что соответству-

ет сделанному выше общему выводу. Приближенный анализ, проведенный в [3] для консольной балки (один конец зашлемен, другой — свободен), указывает на устойчивость колебаний при достаточно малых значениях x , $x < x_*$, и дестабилизацию при $x > x_*$; в качестве x_* предложено значение $2\sqrt{6\rho h D}$.

3. Рассмотрение двумерной задачи совершенно аналогично предыдущему, поэтому проведем его кратко.

Пусть магнитоупругая пластина занимает ограниченную область Ω плоскости xOy с кусочно-гладкой границей Γ , часть которой Γ_1 жестко закреплена, Γ_2 опята, Γ_3 свободна от усилий; пусть n — внешняя нормаль к Γ . Уравнение движения и начальные условия суть

$$D_0 \Delta \Delta w + 2\rho h w_{tt} = x \Delta w_t \quad (3.1)$$

$$w|_{t=0} = \varphi(x, y); \quad w_t|_{t=0} = \psi(x, y) \quad (3.2)$$

$$x, y, \in \Omega$$

Выражение для энергии пластины имеет вид

$$E(t) = K(t) + U(t)$$

$$K(t) = \rho h \int_{\Omega} w_t^2 dx dy$$

$$U(t) = \frac{D_0}{2} \int_{\Omega} [(\Delta w)^2 - 2(1-\nu)(w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2)] dx dy \quad (3.3)$$

ν — коэффициент Пуассона.

Умножим (3.1) на w_t и проинтегрируем по Ω . Используем тождество ([6], формулы (13.61) и (13.55)), в которых следует принять $\delta w = w_t$:

$$D_0 \int_{\Omega} w_t \Delta \Delta w dx dy = \frac{dU}{dt} + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial w_t}{\partial n} M - w_t Q \right) ds$$

и очевидное равенство

$$\int_{\Omega} w_t \Delta w_t dx dy = \int_{\Gamma} w_t \frac{\partial w_t}{\partial n} ds - \int_{\Omega} (\nabla w_t)^2 dx dy$$

(здесь M — изгибающий момент, Q — обобщенная перерезывающая сила на контуре, ds — элемент дуги Γ). Принимая во внимание сформулированные граничные условия, приходим к закону сохранения энергии в форме (1.1) с функцией диссипации

$$D(t) = x \left[- \int_{\Gamma_1} w_t \frac{\partial w_t}{\partial n} ds + \int_{\Omega} (\nabla w_t)^2 dx dy \right] \quad (3.4)$$

Если граница пластины не содержит свободных участков, $\Gamma_3 = \emptyset$, то $D(t) > 0$, энергия колебаний убывает со временем; в противном случае, как видно из (3.4), знак $D(t)$ не определен, возможен рост энергии.

Пример неограниченно растущего решения при $\Gamma_3 = \emptyset$ (отсутствие закрепленных участков границы) строится здесь так же, как и в одномерном случае. Примем, что свободно опята́тый участок границы Γ_3 совпадает

с отрезком прямой $x = 0$, $0 < y < a$, а ее свободная часть Γ_1 имеет положительную конечную длину, а в остальном произвольна. Считая, что начальные данные (3.2) суть

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \dot{\varphi}(x, y) = \frac{x}{\tau}, \quad \tau > 0 \quad (3.5)$$

имеем точное линейно растущее со временем решение

$$w_0(x, t) = x \frac{t}{\tau}. \quad (3.6)$$

(мгментов и перерезывающих сил этот прогиб, очевидно, не создает). При помощи (3.6) и принципа суперпозиции число подобных примеров можно неограниченно увеличивать.

ՄԱԳՆԵՏՈՒԼԱՉՊԵԼԱՍՏԻ ՓԻՔԵԼՆԵՐԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՐՑԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Ս. ՋԻԼԲԵՐԳԼԵՅՏ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Ցույց է տրված, որ եթե բարակ մագնիսառաձգական սալի եզրագիծը չունի խորամանկից ազատ հատվածներ, ապա մագնիսառաձգական ուժերը խիստ ցրվող ալիքներն՝ կամայական ոչ համասեռ սկզբնական պայմաններում խնդրում են երգիան ժամանակի ընթացքում եվազում է: Ընդհակառակը, երբ սալի եզրագիծն մի մասը ազատ է, ապա ցրվող ֆունկցիայի նշանը որոշված չէ, և էներգիան (որտ հետ միասին նաև ճկվածքը) ժամանակի ընթացքում կարող է աճել:

ON VIBRATION OF MAGNETOELASTIC PLATES

A. S. SILBERGLEIT

S u m m a r y

Magnetoelastic bending vibration of thin plates is shown to be energetically stable if the boundary of the plate has no parts free of stresses: magnetoelastic forces are strongly dissipative in this case. On the contrary, if some part of the boundary is stress-free, the sign of the dissipative function is not determined so that the growth of energy (and corresponding elastic displacement) is possible.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бологин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961.
2. Диндер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971.
3. Багдасарян М. В. Некоторые вопросы магнитоупругих колебаний пластин. — Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1979, т. 32, № 3.
4. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Багдасарян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977.
5. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
6. Лейбензон А. С. Курс теории упругости. М.—Л.: Гостехиздат, 1947.

Ֆիզիկա-տեխնիկական ինստիտուտ
 իմ. Ա. Փ. Ուոլֆի ԱՊ ՍՍՏՐ

Поступила в редакцию
 28. I. 1981