

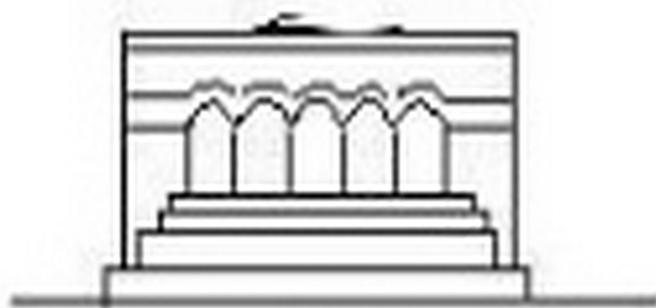
Մ Ե Ն Ա Ն Ի Կ Ա



МЕХАНИКА



MECHANICS



1983

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КОЛЬЦЕВОГО СЕКТОРА НА ЖЕСТКОМ ОСНОВАНИИ

ԱՐՄԵՆՅԱՆ Ր. Ա., ՏԱՐԿԻՅԱՆ Վ. Գ.

Рассматривается смешанная плоская задача для кольцевого сектора, покоящегося на жестком гладком основании при воздействии внешних сил.

Основная цель работы заключается в определении размера зоны контакта (отрыва) между кольцевым сектором и жестким телом в зависимости от внешних нагрузок и геометрических параметров задачи.

Контактные задачи с определением области контакта (отрыва) рассмотрены в работах [5—9] и др.

Задачи решаются методом Фурье [1, 4], при этом коэффициенты разложения и неизвестный размер зоны контакта определяются из бесконечных систем уравнений. Доказывается, что систему уравнений можно решать методом последовательных приближений.

1. Рассмотрим кольцевой сектор, где по малому радиусу ($r = a$) приложена равномерно распределенная нагрузка на участке $\varphi = \varphi_1$, а по большому радиусу ($r = b$) на участке $\varphi = \varphi_2$ он опирается на жесткое основание.

Предполагается, что при воздействии нагрузки образуется зона отрыва на участке $\varphi = \varphi_2 - \varphi_3$ (фиг. 1).

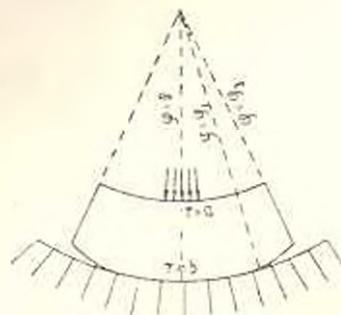
В силу симметрии рассматривается только половина сектора $0 \leq t \leq t_1$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ при граничных условиях:

$$\begin{aligned} \tau_{r\varphi}(t, 0) = v(t, 0) = \tau_{r\varphi}(0, \varphi) = 0 \\ \tau_{r\varphi}(t_1, \varphi) = \tau_{r\varphi}(t, \varphi_2) - \sigma_r(t, \varphi_2) = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$a^2 z_r(0, \varphi) = d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos \alpha_k \varphi$$

$$u(t_1, \varphi) = 0, \quad 0 < \varphi \leq \varphi_2$$

$$\tau_r(t_1, \varphi) = 0, \quad \varphi_3 < \varphi \leq \varphi_2$$



Фиг. 1.

Отметим, что угол φ_3 , которым характеризуется область контакта, неизвестен и в дальнейшем подлежит определению.

Пользуясь решением [2, 5], функцию $t(t, \varphi)$ ищем в виде

$$t(t, \varphi) = a(\varphi) + b(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) \cos \alpha_k \varphi + \sum_{l=1}^{\infty} \Phi_l(\varphi) \cos \beta_l t$$

$$(0 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad 0 \leq t \leq t_1)$$

$$\Phi_k(\varphi) = A_k \operatorname{sh} \beta_k \varphi \sin \varphi + B_k \operatorname{sh} \beta_k \varphi \cos \varphi + C_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi \sin \varphi + D_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi \cos \varphi =$$

$$\psi_k'(t) = E_k \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 - t) \operatorname{sh} (t_1 - t) + G_k \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 - t) \operatorname{sh} t +$$

$$+ F_k \operatorname{sh} \alpha_k t \operatorname{sh} (t_1 - t) + H_k \operatorname{sh} \alpha_k t \operatorname{sh} t \quad (1.2)$$

$$a(\varphi) = a_0 \varphi \sin \varphi, \quad b(t) = b_0 e^t + b_1 t e^{-t}, \quad \varphi_0 = e^t$$

$$\alpha_k(t) = \sin \beta_k t + \beta_k \cos \beta_k t, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{t_1}, \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{\varphi_1}, \quad t = \ln \frac{r}{a}$$

Удовлетворяя условиям (1.1), получим

$$B_k = C_k = E_k = H_k = 0 \quad (1.3)$$

$$A_k (\beta_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1 \sin \varphi_1 + \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1 \cos \varphi_1) +$$

$$+ D_k (\beta_k \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1 \cos \varphi_1 - \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1 \sin \varphi_1) = 0 \quad (1.4)$$

$$\beta_k (\beta_k^2 + 1) \Phi_p(\varphi_1) = \frac{2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_0^{t_1} [\psi_k'(t) +$$

$$+ \psi_k''(t)] \varphi_p(t) dt + \frac{2}{t_1} \int_0^{t_1} [b''(t) + b'(t)] \varphi_p(t) dt$$

$$b_0 (e^{2t_1} - 1) - b_1 t_1 = 0$$

где

$$\Phi_k(\varphi_1) = A_k \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1 \cos \varphi_1 + D_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1 \cos \varphi_1$$

$$\int_0^{t_1} [\psi_k'(t) + \psi_k''(t)] \varphi_p(t) dt =$$

$$= \frac{2\beta_k (\beta_k^2 + 1) [\operatorname{ch} \alpha_k t_1 + (-1)^{k+1} \operatorname{ch} t_1] [G_k + (-1)^{k+1} F_k]}{[\beta_k^2 + (\alpha_k + 1)^2] [\beta_k^2 + (\alpha_k - 1)^2]} \quad (1.5)$$

$$\int_0^{\varphi_1} [\Phi_k'(\varphi) + \Phi_k(\varphi)] \cos \alpha_k \varphi d\varphi = \frac{2(-1)^{k+1} (\alpha_k^2 - 1) \beta_k (\beta_k^2 + 1)}{[\beta_k^2 + (\alpha_k + 1)^2] [\beta_k^2 + (\alpha_k - 1)^2]} \times$$

$$\times [A_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1 \sin \varphi_1 + D_k \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1 \cos \varphi_1]$$

Удовлетворяя смешанным условиям (1.1), получим

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^2 - 1} [G_k \alpha_k \{(1 - 2\nu) \operatorname{sh} t_1 + 2(1 - \nu) \operatorname{ch} t_1\} +$$

$$+ F_k \{2(1 - \nu) \alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k t_1 - (1 - 2\nu) \operatorname{sh} \alpha_k t_1\}] \cos \alpha_k \varphi +$$

$$+ (1 - 2\nu) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Phi_k(\varphi) + [J_2(\tau)] = 0 \quad 0 \leq \varphi < \varphi_1$$

$$|J_2(\varphi)| = 2(1-\nu) a_0 t_1 \cos \varphi + (1-2\nu) a_0 \varphi \cos \varphi + 2(1-2\nu) b_0 e^{t_1} - b_1 e^{-t_1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} [a_k \operatorname{sh} t_1 G_k - F_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1] \cos \alpha_k \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [\Phi_k(\varphi) + \Phi_k(\varphi)] + \quad (1.6)$$

$$+ 2a_0 \cos \varphi + 2b_0 e^{t_1} + b_1 e^{-t_1} = 0 \quad \varphi_2 < \varphi < \varphi_3$$

Введем новые неизвестные

$$\begin{aligned} G_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1 - \alpha_k \operatorname{sh} t_1 F_k &= X'_k \\ G_k \alpha_k \operatorname{sh} t_1 - \operatorname{sh} \alpha_k t_1 F_k &= Y'_k \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$-1_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi_3 \sin \varphi_3 + D_k \operatorname{sh} \beta_k \varphi_3 \cos \varphi_3 = \frac{m_1 Z'_k}{\beta_k^2 + 1}$$

Произведя замену неизвестных (1.7) в формулах (1.3), (1.4) и (1.6), используя решение парных рядов уравнений [3], после некоторых преобразований получим следующие бесконечные системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} Z'_p &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp1} X'_k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp2} Y'_k + a_p \\ X'_p &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{kp} X'_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_{kp1} Y'_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{kp2} Z'_k + b_p \\ Y'_p &= \sum_{k=1}^{\infty} c_{kp1} Y'_k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kp2} X'_k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kp3} Z'_k + c_{p1} \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$a_{kp1} = \frac{4\pi(\beta_p^2 + 1)(\operatorname{ch}^2 \beta_p \varphi_3 - \cos^2 \varphi_3)(-1)^k \alpha_k [\operatorname{ch} \alpha_k t_1 + (-1)^{p+1} \operatorname{ch} t_1]}{m_1 t_1^2 (\operatorname{ch} \beta_p \varphi_3 \operatorname{sh} \beta_p \varphi_3 + \beta_p \cos \varphi_3 \sin \varphi_3) [\beta_p^2 + (\alpha_k + 1)^2]} \times$$

$$\times \frac{[\operatorname{sh} \alpha_k t_1 + (-1)^{p+1} \alpha_k \operatorname{sh} t_1]}{[\beta_p^2 + (\alpha_k - 1)^2] (\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh} t_1)}$$

$$a_{kp2} = -a_{kp1}, \quad c_{kp1} = \frac{1}{2} p N_k I_{pk}, \quad c_{kp2} = \frac{1}{2} p M_k I_{pk}$$

$$c_{kp3} = \frac{1}{2} p (-1)^k (\tau_0 v_{pk} + I_{pk}), \quad b_{kp} = -c_{kp2}, \quad b_{kp1} = -c_{kp1}$$

$$b_{kp2} + c_{kp3} = \frac{4m_1 t_1 (-1)^{p-1} (\alpha_p^2 - 1) (\operatorname{sh} \alpha_p t_1 + \alpha_p \operatorname{sh} t_1) \beta_p}{\pi^2 \operatorname{sh} \alpha_p t_1 [\beta_p^2 + (\alpha_p + 1) \beta_p^2 + (\alpha_p - 1)^2]} \quad (1.9)$$

$$a_p = -\frac{4\pi [1 - (-1)^p e^{-t_1}] [x_0 e^{t_1} - y_0]}{2t_1^2 (\beta_p^2 + 1) \operatorname{sh} t_1}, \quad c_{p1} = (a_0 c_0 + Y_0) Y_p (\cos \beta) -$$

$$-a_0 p \sum_{k=1}^{\infty} c_k \tilde{I}_{pk}, \quad b_p = - \frac{\varphi_3 (\operatorname{sh} \alpha_p t_1 + \alpha_p \operatorname{sh} t_1)}{\pi \operatorname{sh} \alpha_p t_1} \times$$

$$\times \left[\frac{4(-1)^{p-1} a_0 \sin \varphi_3}{\varphi_3 (\alpha_p^2 - 1)} + \alpha_p d_p \right] - c_p.$$

$$N_k = 1 + \frac{\alpha_k^2 (\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh} t_1) - 1/2 \alpha_k^2 (\operatorname{sh} 2\alpha_k t_1 + \operatorname{sh} 2t_1)}{(\alpha_k^2 + 1) (\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_2 - \alpha_k^2 \operatorname{sh} t_1)}$$

$$M_k = \frac{\alpha_k^2}{\alpha_k^2 - 1} \frac{\operatorname{sh} \alpha_k t_1 \operatorname{ch} t_1 + \alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k t_1 \operatorname{sh} t_1}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh} t_1}, \quad \nu_0 = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}$$

$$I_{pk} = \int_0^{\theta} Z_p(\cos \theta) Z_p(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$\tilde{I}_{pk} = \int_0^{\theta} Z_k(\cos \theta) Z_p(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$v_{pk} = \int_0^{\theta} u_k(\cos \theta) Z_p(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$I_{pk}^* = \int_0^{\theta} U_k(\cos \theta) Z_p(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$Y_k(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\cos mx \cos x/2}{|\cos x - \cos \theta|} dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\sin mx \cos x/2}{|\cos \theta - \cos x|} dx$$

$$Z_k(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\sin mx \sin x/2}{|\cos x - \cos \theta|} dx = - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\cos mx \sin x/2}{|\cos \theta - \cos x|} dx$$

$$U_k(\cos \theta) = U_{k1}(\cos \theta) + U_{k2}(\cos \theta)$$

$$U_{k1}(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2} m_1 \operatorname{sh} \beta_k \varphi_3 \cos \varphi_3}{\pi \beta_k (\operatorname{ch}^2 \beta_k \varphi_3 - \cos^2 \varphi_3)} \int_0^{\theta} \frac{\operatorname{ch} \beta_k mx \sin mx \sin x/2}{|\cos x - \cos \theta|} dx$$

$$U_{k2}(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2} m_1 \operatorname{ch} \beta_k \varphi_3 \sin \varphi_3}{\pi \beta_k (\operatorname{ch}^2 \beta_k \varphi_3 - \cos^2 \varphi_3)} \int_0^{\theta} \frac{\operatorname{sh} \beta_k mx \cos mx \sin x/2}{|\cos x - \cos \theta|} dx$$

Для определения значения Y_0 , подставляя Y_p в (1.6), получим

$$\begin{aligned}
& Y_0 \left(\nu - 2 \ln \sin \frac{\theta}{2} \right) - \mu x_0 = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} N_p Y_p(\cos \theta) \frac{Y_p}{p} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} M_p Y_p(\cos \theta) \frac{X_p}{p} + \frac{\sigma_0}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p p Z_p \left[\int_0^{\theta} U_p(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta + \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p p Z_p \int_0^{\theta} H_p(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta - \frac{\sigma_0}{2} \frac{\beta_p Q_p - Q_{p1}}{\beta_p^2 + 1} \right] - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^{\theta} G_2(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\theta} G_1(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta - \frac{a_0}{m} t_1 \quad (1.10)
\end{aligned}$$

$$G_2(\cos \theta) = \frac{2 \sqrt{2}}{\pi} a_0 \int_0^{\theta} \frac{t_1 \sin mx - \nu_0 \cos mx + \nu_0 mx \sin x}{|\cos x - \cos \theta|} \sin \frac{x}{2} dx$$

$$G_1(\cos \theta) = \frac{4 \sqrt{2}}{\pi} a_0 \int_0^{\theta} \frac{\cos mx \sin x/2}{|\cos \theta - \cos x|} dx$$

2. Покажем, что полученные бесконечные системы уравнений (1.8) квазивполне регулярны.

Для этого достаточно воспользоваться следующими асимптотическими оценками [2, 3]:

$$\begin{aligned}
U_k(\cos \theta) &= O(k^{-1/2}), & H_k(\cos \theta) &= O(k^{-1/2}) \\
Y_k(x) &= O(k^{-1/2}), & Z_k(x) &= O(k^{-1/2})
\end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k,p1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k,p2}| < \\
& < \frac{8(\sigma^2 - 1)}{m_1 t_1^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{[\beta_k^2 + (\alpha_k + 1)^2][\beta_k^2 + (\alpha_k - 1)^2]} < O(\beta_p^{-1/2}) \quad (2.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} |b_{k,p}| + \sum_{k=1}^{\infty} |b_{k,p1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |b_{k,p2}| < \\
& < \frac{4m t_1 (\sigma^2 - 1) (\operatorname{sh} \alpha_p t_1 + \sigma_p \operatorname{sh} t_1)}{\pi \operatorname{sh} \alpha_p t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{[\beta_k^2 + (\alpha_p + 1)^2][\beta_k^2 + (\alpha_p - 1)^2]} < \\
& < O(\alpha_p^{-1/2})
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{k,p1}| = \frac{1}{2} p \sum_{k=1}^{\infty} M_k |I_{k,p1}|$$

Учитывая, что

$$I_{2k}(\cos \beta) = \frac{k Y_k(\cos \beta) Z_p(\cos \beta) - p Y_p(\cos \beta) Z_k(\cos \beta)}{p^2 - k^2}$$

при $k \neq p$ и

$$I_{pp} = \frac{1}{2p} [2 - 2P_{p-1}(\cos \beta) P_p(\cos \beta) + P_p^2(\cos \beta) - \\ - P_{p-1}^2(\cos \beta)] - 4 \sin^2 \beta \sum_{n=1}^{p-1} \frac{P_n(\cos \beta) P_n(\cos \beta)}{n+1}$$

получим

$$\frac{1}{2} p \sum_{k=1}^{\infty} M_k |I_{2k}| < \frac{p}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left| \frac{\bar{k} / \sqrt{p} - \sqrt{p} / \bar{k}}{p^2 - k^2} \right| < \frac{B}{\sqrt{p}} \\ \frac{1}{2} p \sum_{k=1}^{\infty} |B_0 V_{pk} + F_{rk}| < \frac{1}{2} p \left| \frac{A}{p^{3/2}} + \frac{B_1}{p^{3/2}} \right| < \frac{C}{\sqrt{p}} \quad (2.3)$$

где A, B, B_1, C — постоянные.

Неравенства (2.1) — (2.3) показывают, что, начиная с некоторого значения $p = p_0$, суммы модулей коэффициентов при неизвестных X_k, Y_k, Z_k в системах уравнений (1.8) станут меньше единицы, то есть бесконечные системы квазивполне регулярны. Легко видеть из (1.9), что свободные члены системы ограничены сверху и при $p \rightarrow \infty$ стремятся к нулю.

Приведем выражение для нормального контактного напряжения

$$u^* e^{i\alpha_2}(r_1, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \cos \alpha_1 \varphi + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k m_1 \beta_k Z_k}{(\beta_k + 1) (\operatorname{ch}^2 \beta_k \varphi_3 - \cos^2 \varphi_3)} [\beta_k^2 (\operatorname{ch}^2 \beta_k \varphi_1 \operatorname{ch}^2 \beta_k \varphi \sin \varphi_2 \cos \varphi - \\ - \operatorname{sh} \beta_k \varphi_3 \operatorname{sh} \beta_k \varphi \cos \varphi_2 \sin \varphi) - \beta_k (\operatorname{ch} \beta_k \varphi_3 \operatorname{sh} \beta_k \varphi \sin \varphi_2 \sin \varphi + \\ + \operatorname{sh} \beta_k \varphi_3 \operatorname{ch} \beta_k \varphi \cos \varphi_2 \cos \varphi) + 2 (\operatorname{ch} \beta_k \varphi_1 \operatorname{ch} \beta_k \varphi \sin \varphi_2 \cos \varphi - \\ - \operatorname{sh} \beta_k \varphi_3 \operatorname{sh} \beta_k \varphi \cos \varphi_2 \sin \varphi)] + 2a_0 \cos \varphi + 2b_0 e^{i\alpha_1} + \delta_1 e^{-i\alpha_1} \quad (2.4)$$

В окрестности зоны контакта некоторые ряды, входящие в выражения напряжений, сходятся медленно. Улучшив сходимость этих рядов и выделив при этом соответствующие особенности, получим

$$u^* e^{i\alpha_2}(r_1, \varphi) = \frac{\sqrt{2} \cos \alpha/2 R}{2 \sqrt{|\cos \alpha - \cos \beta|}} + f(r_1, \varphi) \quad (2.5)$$

где $f(r_1, \varphi)$ — регулярная функция, а коэффициент при особенности имеет вид

$$\begin{aligned}
R = & \sum_{p=1}^{\infty} (N_p Y_p + M_p X_p) Z_p(\cos \theta) - z_0 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p p U_p(\cos \beta) Z_p + \\
& + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p p H_p(\cos \beta) Z_p + 2(a_0 c_0 + Y_0) - \\
& - 2a_0 \sum_{p=1}^{\infty} c_p Z_p(\cos \beta) + \frac{a_0}{m} \sum_{p=1}^{\infty} e_p Z_p(\cos \beta) \\
& x = \frac{\varphi \pi}{\varphi_1}, \quad \beta = \frac{\varphi_2 \pi}{\varphi_1}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

До сих пор в проделанных выкладках принималось, что длина зоны контакта φ_1 произвольна и известна. Это привело к тому, что в полученном решении контактное напряжение неограниченно возрастает при приближении к концу зоны контакта. Но из физических соображений ясно, что в данном случае контактное напряжение должно быть непрерывным и ограниченным.

Следовательно, принимая, что при $\varphi = \varphi_2$ $\sigma_r(t_1, \varphi)$ ограничено, из формулы (2.5) получим уравнение для определения размера зоны контакта φ_1 , то есть

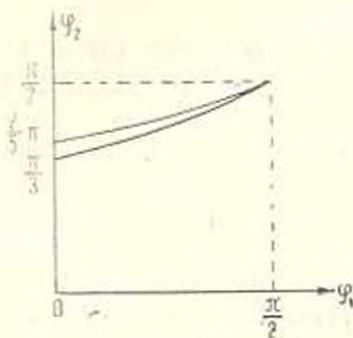
$$R = 0 \tag{2.7}$$

Таким образом, для получения окончательного решения рассматриваемой задачи необходимо совместно решать уравнения (2.7) и (1.8).

3. Бесконечная система решена методом редукции путем замены ее конечной системой. Для достоверности полученных результатов система была решена при $\mu = 40$ и $\mu = 50$. При этом значения неизвестных фактически совпадают, а размеры контакта отличаются не более 2%.

В качестве численного примера рассмотрим случай, когда $\nu = 0,3$, $c_1 = -1/2$, $-\varphi_1 < \varphi < \varphi_1$ и кольцевой сектор прижимается к жесткому основанию нормальным давлением

$$\sigma_{z_0}(0, \varphi) = \begin{cases} -p & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \varphi_1 \\ 0 & \text{при } \varphi_1 \leq \varphi \leq \pi/2 \end{cases} \tag{3.1}$$



Фиг. 2

Таблица 1

	\bar{r}_1	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{\pi}{2}$
$a = \frac{7}{8}b$	\bar{r}_1	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{11}{30}\pi$	$\frac{2}{5}\pi$	$\frac{13}{30}\pi$	$\frac{9}{20}\pi$	$\frac{17}{30}\pi$	$\frac{\pi}{2}$
$a = \frac{5}{6}b$	\bar{r}_2	$\frac{2}{5}\pi$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{13}{30}\pi$	$\frac{4}{9}\pi$	$\frac{7}{15}\pi$	$\frac{22}{45}\pi$	$\frac{\pi}{2}$

На фиг. 2 и в табл. 1 приведены зависимость размера контакта от длины участка распределения нагрузки φ_1 для двух φ_2 значений толщины кольцевых секторов. Из графиков видно, что с увеличением участка распределения нагрузки размер контакта увеличивается почти линейно.

ԿՈՇՏ ՀԻՄԲԻ ՎՐԱ ՍՂԱԿԱՅԻՆ ՍԵԿՏՐԻ ՀԱՐՔ ԽՆԴԻՐԸ

Ռ. Ա. ՀԱՐՈՒՐՅՈՒՆՅԱՆ, Վ. Դ. ՍԱՐԿԻՍՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում է առաձգական օղակային սեկտորի հարթ կոնտակտային խնդիրը, երբ օղակային սեկտորը սեղմվում է կոշտ գոգավոր մարմնին: Ենթադրվում է, որ արտաքին ուժերի ազդեցության տակ հնարավոր է կոնտակտի տիրույթում օղակային սեկտորի ծայրերի հեռացումը կոշտ հիմքից:

Խնդիրը լուծվում է ֆուրյեի մեթոդով: Վերլուծության պրծակիցները որոշվում են դժային հավասարումների անվերջ սխտեմաներից: Ապացուցվում է, որ բացվածքի ցանկացած շափերի համար անվերջ սխտեմաները ընդհանուր դեպքում կվազի-լիսովին ռեզուլյար են:

Բացվածքի շափը որոշելու համար ստացված է տրանսցենդենտ հավասարում: Երկրաչափական պարամետրերի որոշակի հարաբերության դեպքում դիտարկված է միային օրինակ: Բերված է աղյուսակ և գրաֆիկ, որոնք ցույց են տալիս բացվածքի շափի և արտաքին բևեռավորման գործոնների միջև եղած կապերը:

PLANE DEFORMATION OF A HARD BASED CIRCULAR SEGMENT

R. A. HARUTUNIAN, V. G. SARKISIAN

S u m m a r y

This paper deals with the contact problem of an elastic solid when its circular segment presses the hard curve body. The possibility of separating the ends of the circular segment in the contact region from its hard base under the action of external forces is assumed.

The problem is solved by the help of the Fourier method. The coefficients of the decomposition are determined from the infinite systems of linear equations. It is proved that the infinite systems are quasi-regular in the general case for any separation.

A transcendental equation is derived to determine the size of the separation. A numerical example is considered for a certain relation between geometric parameters. A table and a graph showing the dependence of the separation size from external load factors are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. А.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника.— ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
2. *Арутюнян Р. А.* Плоская деформация кольцевого сектора с одной заделанной радиальной стороной.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1973, т. 24, № 6.
3. *Баблюян А. А.* Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
4. *Баблюян А. А.* Решение плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора и напряжениях.— Изв. АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 1962, т. 15, № 1.
5. *Вейцман.* О контакте без сцепления между пластинкой и упругим полупространством.— ПММ, 1969, т. 36, № 2.
6. *Вир. Диндерс. Цвай.* Контактная задача для слоя, лежащего на полупространстве.— ПММ, 1972, т. 39, № 4.
7. *Пу. Хусейн.* К вопросу о контакте без сцепления между пластинкой и упругим полупространством.— ПММ, 1970, т. 37, № 3.
8. *Абрамян Б. А., Макарян В. С.* Осесимметричная задача о контакте между двумя слоями из различных материалов с учетом трения между слоями.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1976, т. 29, № 5.
9. *Мелконян М. Т., Мкртчян А. М.* Об одной контактной задаче для двух прямоугольников.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1975, т. 23, № 3.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса
АрмНИИ строительства и архитектуры

Поступила в редакцию
2. X. 1981

КОЭРЦИТИВНЫЕ ОЦЕНКИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ В ОБЛАСТИ С ДВУМЕРНОЙ ТРЕЩИНОЙ

НАЗАРОВ С. А., ШОИХЕТ Б. А.

Эллиптические краевые задачи в областях с особенностями границы типа «ребра» изучались в [1—6] и др. В [2] сформулированы условия справедливости для таких задач теорем Нетера в пространствах с нормами

$$\left\{ \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} r^{2(m-|\alpha|)} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \quad (0.1)$$

где r — расстояние до ребра. Основным из упомянутых условий является однозначная разрешимость в пространствах с нормами

$$\left\{ \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |y|^{2m} (1 + |y|^{-2})^{m-|\alpha|} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2}}(y) \right|^2 dy_1 dy_2 \right\}^{1/2} \quad (0.2)$$

некоторой вспомогательной модельной задачи в линейном угле k соответствующего двугранного угла.

Работы [3, 4] посвящены выводу асимптотических формул для решений указанных задач, а [6] — коэрцитивным оценкам в классах L_p и Гельдера. В [5] рассмотрены особенности границы более общего вида, в частности, допускаются некасательные пересечения ребер различных размерностей.

В п. 1 настоящей работы приводится постановка задач теории упругости и теории ползучести трехмерного тела с двумерной трещиной M , край ∂M которой представляет собой одномерное ребро двугранного угла раствора 2λ . В п. 2 изучается задача теории упругости. Старшие дифференциальные операторы соответствующей ей модельной задачи в линейном угле образуют систему уравнений плоской задачи теории упругости и задачи антиплоского сдвига. Так как рассматривается случай задания на границе тела напряжений, то модельная задача не является однозначно разрешимой в пространствах с нормами вида (0.2). Для того, чтобы убедиться в этом, рассмотрим неэнергетическое решение u^* однородной задачи для плоскости с полубесконечной трещиной при заданной в ее вершине сосредоточенной силы. Известно, что u^* имеет вблизи вершины разреза порядок $O(|\log r|)$. Очевидно, для однозначной разрешимости задачи необходимо, чтобы u^* не принадлежало пространству с нормой (0.2), поэтому из рассмотрения слагаемого в (0.2), содержащего саму функцию

$\alpha = 0$), следует, что $n \leq q - 1$. В то же время при таком выборе β смещения тела u^R как жесткого целого тоже обратят выражение (0.2) в бесконечность. Таким образом, u^R не попадает в это пространство, и, следовательно, модельная задача разрешима не при всех правых частях; для того, чтобы сделать ее однозначно разрешимой, необходим специальный подбор весовых множителей при различных производных D^r . Соответствующие изменения претерпевают и нормы (0.1).

В п. 3 коэрцитивные оценки решений задачи теории упругости распространяются на задачу теории ползучести неоднородно стареющего тела с трещиной.

Часть результатов статьи анонсирована в заметке [7].

1. *Постановка задач.* Пусть Ω_0 — связная, с гладкой границей $\partial\Omega_0$, подобласть трехмерного пространства R^3 ; m — гладкая поверхность, а M — содержащееся в Ω_0 подмножество поверхности m , ограниченное связным гладким простым контуром ∂M . Множество M определяет двумерную трещину в Ω_0 ; ее берега обозначим через M^+ и M^- . Тело занимает область $\Omega = \Omega_0 \setminus M$. На берегах трещины заданы напряжения. Для определенности будем считать, что на внешней границе $\partial\Omega_0$ также действуют напряжения. Случай, когда к $\partial\Omega_0$ приложены смещения, рассматривается аналогично.

Уравнения краевой задачи ползучести неоднородно стареющих тел имеют вид [8]:

$$\varepsilon_{ij}(t, x) = \varepsilon_{ij}(u) = (u_{i,j}(t, x) + u_{j,i}(t, x))/2, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

$$\sigma_{ij,j}(t, x) + f_i(t, x) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

$$\frac{s_{ij}(t, x)}{2G(t + \tau(x), x)} = e_{ij}(t, x) - \int_0^t R_1(t + \tau(x), \tau + \tau(x), x) e_{ij}(\tau, x) d\tau$$

$$\frac{\sigma(t, x)}{E_*(t + \tau(x), x)} = e(t, x) - \int_0^t R_2(t + \tau(x), \tau + \tau(x), x) e(\tau, x) d\tau \quad (1.3)$$

$$e = \varepsilon_{ij} \beta, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} e, \quad \sigma = \varepsilon_{kk} \beta, \quad s_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_{ij}(t, x) n_j = g_i^+(t, x) \text{ на } M^+, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_{ij}(t, x) n_j = g_i^-(t, x) \text{ на } \partial\Omega_0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.6)$$

Здесь $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ — декартовы компоненты смещений, напряжений и деформаций соответственно; s_{ij}, e_{ij} — компоненты девиаторов напряжений и деформаций; ε, e — их шаровые части; $E_*(t, x), R_1(t, \tau, x)$ — модуль объемного расширения и ядро релаксации при всестороннем расширении-сжатии; $G(t, x), R_2(t, \tau, x)$ — модули сдвига и ядро релаксации при сдвиге; τ — функция неоднородного старения, характе-

ризующая закон изменения возраста материала; f_i, g_i^s, g_i^R — объемные и поперхностные нагрузки, удовлетворяющие при всех t условиям равновесия

$$\int_V f_i u_i^R dx + \int_{M^+} g_i u_i^R dS + \int_{\partial\Omega_0} g_i u_i^R dS = 0 \quad (1.7)$$

для всякого поля смещений u^R тела, как жесткого целого.

Уравнения краевой задачи упругости имеют вид (1.1) — (1.6), если все функции считать независимыми от времени t , а в (1.3) положить $R_1 = R_0 = 0$:

$$s_{ij}(x) = 2G(x) e_{ij}(x), \quad \sigma(x) = E_*(x) e(x) \quad (1.8)$$

В дальнейшем будет удобно использовать матричную запись уравнений Лама и граничных условий однородной теории упругости

$$Lu + f = 0 \quad (1.9)$$

$$Bu = g \quad (1.10)$$

Здесь матричные операторы L и B имеют вид

$$L \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \left\{ \delta_{ij} \mu \Delta + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{i, j=1, 2, 3} \quad (1.11)$$

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$B \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \left\{ \delta_{ij} n_i \frac{\partial}{\partial n} + \lambda n_i \frac{\partial}{\partial x_j} + \mu n_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i, j=1, 2, 3} \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = n_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

λ, μ — коэффициенты Лама ($\mu = G, \lambda = (E_* - 2G)/3$).

Известно, что задача (1.9), (1.10) — эллиптическая в смысле А. Дуглиса, Л. Ниренберга [9].

2. *Задача теории упругости.* Введем в окрестности края ∂M трещины M криволинейные координаты (y_1, y_2, s) , где s — длина дуги, измеренная вдоль ∂M от некоторой точки до проекции x на ∂M . (y_1, y_2) — ортогональные координаты в плоскости, проходящей через x и нормальной к ∂M , причем локально M задается соотношениями $y_1 \leq 0, y_2 = 0$.

Пусть v — векторное поле, компоненты которого имеют носители, сосредоточенные в малой окрестности D точки $P \in \partial M$. Положим $F = -Lv; G = Bv$ на M^+ . Ясно, что v удовлетворяет задаче

$$Lv + F = 0 \text{ в } \Omega; \quad Bv = G^+ \text{ на } M^+; \quad Bv = 0 \text{ на } \partial\Omega_0$$

Перейдем в ней к координатам (y_1, y_2, s) . Тогда ввиду малости носителя v вектор (v_1, v_2, v_3) удовлетворяет системе уравнений в двугранном угле $K = R^3 \setminus \{s \in R^1, y_1 \leq 0, y_2 = 0\}$ раствора 2=:

$$L(\partial/\partial y, \partial/\partial s)v + l(y, s, \partial/\partial y, \partial/\partial s)v = F = 0 \text{ в } K \quad (2.1)$$

$$B(\partial/\partial y, \partial/\partial s)v + b(y, s, \partial/\partial y, \partial/\partial s)v = G \text{ на } \partial K \quad (2.2)$$

Здесь v_1, v_2, v_3 — проекции вектора v на оси координат (y_1, y_2, s) ; l и b — матричные операторы порядков не выше второго и первого, соответственно; их коэффициенты суть гладкие функции, причем можно считать, что они имеют компактные носители (так как $v = 0$ вне D); кроме того, коэффициенты при старших производных обращаются в нуль при $|y| = 0$.

Для того, чтобы вывести оценки v через правые части F и G задачи (2.1), (2.2), необходимо [2] рассмотреть вспомогательную краевую задачу с параметром $\omega = \pm i$ в двумерном угле $k = R^2 \setminus \{x_1 \leq 0, x_2 = 0\}$ раствора 2=:

$$L(\partial/\partial z, \omega)V + \Phi = 0 \text{ в } k; \quad B(\partial/\partial z, \omega)V = \Psi \text{ на } \partial k^+ \quad (2.3)$$

Здесь $z = (z_1, z_2)$; операторы $L(\partial/\partial z, \omega)$ и $B(\partial/\partial z, \omega)$ получаются из $L(\partial/\partial x, \partial/\partial x_2)$ и $B(\partial/\partial x, \partial/\partial x_2)$ формальной заменой дифференцирования по x_2 умножением на ω .

Обозначим через $R_2^q(k)$ и $R_2^{q+1/2}(k)$ пространства функций в k , наделенные нормами

$$|\Phi, R_2^q(k)| = \left\{ \int_k |z|^{2q} \sum_{0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq q} (1 + |z|^{-2})^{q - \alpha_1 - \alpha_2} \left| \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\partial z_1^{\alpha_1} \partial z_2^{\alpha_2}} \Phi(z) \right|^2 dz \right\}^{1/2}$$

$$|V, R_2^{q+1/2}(k)| = \left\{ \int_k |z|^{2q} \left[(1 + |z|^{-2})^q |V(z)|^2 + \sum_{0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq q-1} (1 + |z|^{-2})^{q+1-\alpha_1-\alpha_2} \left| \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\partial z_1^{\alpha_1} \partial z_2^{\alpha_2}} V(z) \right|^2 \right] dz \right\}^{1/2}$$

где $\tau \in (q+1, q+2)$. Пусть еще $R_2^{\tau-1/2}(\partial k^+)$ — пространство следов на ∂k^+ функций из $R_2^{\tau+1/2}(k)$, наделенное [10] нормой

$$\left\{ \int_{\partial k^+} \sum_{\alpha_1 \leq q} |z_1|^{2q} (1 + |z_1|^{-2})^{q+1/\tau-1} \left| \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial z_1^{\alpha_1}} \Psi^\pm(z_1) \right|^2 dz_1 + \int_{\partial k^+} \int_{\partial k^+} \left| z_1^q \frac{\partial^q}{\partial z_1^q} \Psi^\pm(z_1) - \tau^q \frac{\partial^q}{\partial \eta^q} \Psi^\pm(\eta) \right|^2 \frac{dz_1 d\eta}{|z_1 - \eta|^2} \right\}^{1/2}$$

Лемма 1. Если выполнены неравенства

$$q + 1/2 < \beta < q + 1 < \gamma < \beta + 1, \quad (2.4)$$

то справедливы следующие утверждения:

а) Функции $\lambda(r)$, $r^{1/2} \alpha_1(\theta) \lambda(r)$ принадлежат пространству $R_{1, \beta}^{q, \gamma}(k)$, а $[\alpha_2(\theta) \log r + \alpha_3(\theta)] / (r) \in R_{1, \beta}^{q, \gamma, 2}(k)$;

б) Для операторов $N_j(z, D_z)$ порядков j с гладкими ограниченными в R^2 коэффициентами справедливы включения $N_1(z, D_z) \omega \in R_{1, \beta}^{q, \gamma+1}(k)$, $N_2(z, D_z) \omega \in R_{1, \beta}^q(k)$, где $\omega \in R_{1, \beta}^{q, \gamma, 2}(k)$.

Здесь (r, θ) — полярные координаты, λ — срезка из $C_0^\infty(R^2)$, равная единице вблизи точки $r = 0$; $\alpha_p \in C^\infty(\{0, 2\pi\})$, $p = 1, 2, 3$.

Доказательство сформулированных свойств введенных пространства сводится к непосредственному вычислению указанных норм.

Всюду в дальнейшем пространства скалярных и векторзначных функций не различаются в обозначениях.

Теорема 1. Пусть $\Phi \in R_1^q(k)$, $\Psi^0 \in R_1^{q-1/2}(\partial k^0)$ и выполнены неравенства (2.4). Тогда существует и единственно решение $V \in R_{1, \beta}^{q, \gamma, 2}(k)$ задачи (2.3) и для него справедливо неравенство

$$\|V; R_{1, \beta}^{q, \gamma, 2}(k)\| \leq \text{const} \{ \|\Phi; R_1^q(k)\| + \|\Psi^0; R_1^{q-1/2}(\partial k^0)\| \} \quad (2.5)$$

Доказательство. Установим сначала отсутствие нетривиальных решений V^0 однородной ($\Phi = 0$, $\Psi^0 = 0$) задачи (2.3). Можно проверить (используя лемму 1 и результаты работ [10—12]), что всякое такое решение принадлежит $W_2^q(k)$. Умножим скалярно однородную систему уравнений из (2.3) на \bar{V}^0 и проинтегрируем по частям в k с использованием граничных условий. После алгебраических преобразований получим, что

$$\begin{aligned} 0 = \int_k \left\{ 2 \left[\left| \frac{\partial V_1^0}{\partial z_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial V_2^0}{\partial z_2} \right|^2 + |V_3^0|^2 \right] + \frac{\lambda}{r} \left[\frac{\partial V_1^0}{\partial z_1} + \frac{\partial V_2^0}{\partial z_2} + \omega V_3^0 \right]^2 + \right. \\ \left. + \left| \frac{\partial V_1^0}{\partial z_2} + \frac{\partial V_2^0}{\partial z_1} \right|^2 + \left| \omega V_2^0 + \frac{\partial V_3^0}{\partial z_2} \right|^2 + \left| \omega V_1^0 + \frac{\partial V_3^0}{\partial z_1} \right|^2 \right\} dz \end{aligned}$$

Отсюда находим, что $V^0 = 0$.

Докажем теперь разрешимость задачи (2.3). Рассмотрим сначала эту задачу в пространстве $R_{1, \beta}^{q, \gamma, 2}(k)$

$$\{L(\partial/\partial z, \omega), B(\partial/\partial z, \omega)\}; \quad R_1^{q, \gamma, 2}(k) \rightarrow R_1^q(k) \times R_1^{q-1/2}(k) \quad (2.6)$$

Сопряженная краевая однородная задача имеет лишь три линейно независимых решения W^j , представимых в виде

$$W^j(z) = X^j(z) \lambda(r) + W^{j,0}(z)$$

где $W^{j,0}$ — энергетические решения задач

$$L(\partial/\partial z, \omega) W^{j,0} + [L(\partial/\partial z, \omega), \lambda] X^j = 0 \text{ в } k$$

$$B(\partial/\partial z, \omega) W^{\pm} = -[B(\partial/\partial z, \omega), \lambda] X^{\pm} \text{ на } \partial k$$

$[A, B] = AB - BA$ — коммутатор операторов A и B ; $X^{\pm} = (0, 0, (2\pi)^{-1} \log r^{-1})$; матрица $\|X^1, X^2\|$ имеет нулевую третью строку, а первые две составляют двумерный тензор Соммильяно в k , то есть они образованы решениями задачи о плоской деформации угла k сосредоточенными в першине силами $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Таким образом, оператор (2.6) обратим на подпространстве векторов $\{\Phi, \Psi^{\pm}\}$, для которых справедливы равенства

$$\int_k \Phi(z) W^j(z) dz + \int_{\partial k^{\pm}} \Psi^{\pm}(z) W^j(z) dz_1 = 0 \quad (2.7)$$

Так как W^j удовлетворяют (в смысле теории обобщенных функций) уравнениям

$$L(d/dz, \omega) W^j = \delta(0) e^j \text{ в } k, \quad B(d/dz, \omega) W^j = 0 \text{ на } \partial k$$

где $\delta(0)$ — δ -функция Дирака, $e^1 = (1, 0, 0)$, $e^2 = (0, 1, 0)$, $e^3 = (0, 0, 1)$, то

$$\int_k \Phi^p(z) W^j(z) dz + \int_{\partial k} \Psi^p(z) W^j(z) dz_1 = \delta_{pj}$$

(см. также [11]). Здесь $\Phi^p(z) = -L(d/dz, \omega)[e^p \chi(r)]$, $\Psi^p(z) = -B(d/dz, \omega)[e^p \chi(r)]$.

Итак, решение V задачи (2.3) представляется в виде

$$V(z) = V^1(z) + \sum_{j=1}^3 M_j e^j \chi(r) \quad (2.8)$$

где V^1 — решение из $R_{1,3}^{\pm}(k)$ задачи (2.3) с правыми частями

$$\Phi = \sum_{j=1}^3 M_j \Phi^j, \quad \Psi^{\pm} = \sum_{j=1}^3 M_j \Psi^{\pm j}$$

а постоянные M_j находятся из условий разрешимости последней задачи и имеют вид

$$M_j = \int_k \Phi(z) W^j(z) dz + \int_{\partial k} \Psi^{\pm}(z) W^j(z) dz_1, \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.9)$$

Оценка (2.5) вытекает из представления (2.8) решения $V \in R_{1,3}^{\pm}(k)$, равенств (2.9) и ограниченности обратного оператора к (2.6) на векторах подчиненных соотношениям (2.7). Теорема доказана.

Рассмотрим краевую задачу

$$L(\partial/\partial y, \partial/\partial s) U + \varepsilon U = 0 \text{ в } K, \quad B(\partial/\partial y, \partial/\partial s) U = \psi \text{ на } \partial K^{\pm} \quad (2.10)$$

После преобразования Фурье T по переменной $s \in R^1$ система (2.10) переходит в следующую:

$$L(\partial/\partial y, \tilde{\tau}) TU - T\tilde{\tau} = 0 \text{ на } \partial K, \quad B(\partial/\partial y, \tilde{\tau}) TU = T\psi^2 \text{ на } \partial K \quad (2.11)$$

а после замены $y - z = |\tilde{\tau}|y$ преобразуется к виду (2.3), где $V(z) = TU(|\tilde{\tau}|^{-1}z, \tilde{\tau})$, $\Phi(z) = |\tilde{\tau}|^{-2} T\varphi(|\tilde{\tau}|^{-1}z, \tilde{\tau})$, $\Psi^2(z) = |\tilde{\tau}|^{-1} T\psi^2(|\tilde{\tau}|^{-1}z, \tilde{\tau})$, $\omega = \tilde{\tau}|\tilde{\tau}|^{-1}$. Поэтому существует единственное решение $TU \in R_{\tau, \tilde{\tau}}^q(k)$ задачи (2.11), и для него справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K} |y|^{\alpha} \left[(|\tilde{\tau}|^2 + |y|^{-2})^{\alpha-1} |TU(y, \tilde{\tau})|^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} (|\tilde{\tau}|^2 + |y|^{-2})^{\alpha-1-\alpha_1-\alpha_2} \left| \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2}} TU(y, \tilde{\tau}) \right|^2 \right] dy \leq \\ & c \left\{ \int_{\partial K} \sum_{0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} |y|^{\alpha} (|\tilde{\tau}|^2 + |y|^{-2})^{\alpha-1-\alpha_1-\alpha_2} \left| \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2}} T\varphi(y, \tilde{\tau}) \right|^2 dy + \right. \\ & \left. + \int_{\partial K} \sum_{0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} |y_1|^{\alpha} (|\tilde{\tau}|^2 + |y_1|^{-2})^{\alpha-1-\alpha_1-\alpha_2} \left| \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial y_1^{\alpha_1}} T\psi^2(y_1, \tilde{\tau}) \right|^2 dy_1 + \right. \\ & \left. + \int_{\partial K} \int_{\partial K} \left| y_1^{\alpha} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial y_1^{\alpha}} T\psi^2(y_1, \tilde{\tau}) - \psi^2 \frac{\partial^{\alpha}}{\partial s^{\alpha}} T\psi^2(s, \tilde{\tau}) \right|^2 \frac{dy_1 ds}{|y_1 - s|^2} \right\} \quad (2.12) \end{aligned}$$

где постоянная c не зависит от L , φ , ψ и $\tilde{\tau}$.

После обратного преобразования Фурье по $\tilde{\tau}$ из (2.12) получаем, что

$$\begin{aligned} \|U; V_{\tau, \tilde{\tau}}^q(K)\| & \leq \text{const} \|\varphi; V_{\tilde{\tau}}^q(K)\| + \\ & + \|\psi; V_{\tilde{\tau}}^{q-1/2}(\partial K)\| + \|y^{\beta} U; L_2(K)\| \quad (2.13) \end{aligned}$$

Здесь $V_{\tilde{\tau}}^q(K)$ и $V_{\tau, \tilde{\tau}}^q(K)$ — пространства функций в K таких, что конечны следующие нормы (если $q = 1 = \tau$, то в определении нормы отсутствует интеграл по $R^1 \times R^1 \times k$):

$$\begin{aligned} \|\varphi; V_{\tilde{\tau}}^q(K)\| & = \left\{ \int_K \sum_{0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} |y|^{\alpha} (|\tilde{\tau}|^2 + |y|^{-2})^{\alpha-1-\alpha_1-\alpha_2} \left| \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2}} \varphi(y, \tilde{\tau}) \right|^2 dy \right\}^{1/2} \\ \|U; V_{\tau, \tilde{\tau}}^q(K)\| & = \left\{ \int_K |y|^{\alpha} (|\tilde{\tau}|^2 + |y|^{-2})^{\alpha-1-\alpha_1-\alpha_2} |U(y, s)|^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} |y|^{\alpha} (|\tilde{\tau}|^2 + |y|^{-2})^{\alpha-1-\alpha_1-\alpha_2} \left| \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2}} U(y, s) \right|^2 \right\}^{1/2} dy ds + \\ & + \int_K \int_K \int_K |U(y, s) - U(y, \tau)|^2 \frac{dy ds}{|s - \tau|^{1+\alpha_1+\alpha_2-1}} |y|^{\alpha} (|\tilde{\tau}|^2 + |y|^{-2})^{\alpha-1-\alpha_1-\alpha_2} dy \quad (2.14) \end{aligned}$$

$V_3^{q+1/2}(\partial K^+)$ — пространство следов Ψ^q на ∂K^+ функций $\Psi \in V_3^{q+1/2}(K)$, наделенное нормой

$$\begin{aligned} \|\Psi^q; V_3^{q+1/2}(\partial K^+)\| &= \left\| \int_{\partial K^+} \sum_{i=1}^3 |y_i|^{2s+2q-1} \times \right. \\ &\times \left| \frac{\partial^{s+q}}{\partial y_1^s \partial s^s} \Psi^q(y_1, s) \right|^2 dy_1 ds + \int_{\partial K^+} \int_{\partial K^+} \sum_{i=1}^3 \left| y_i \frac{\partial^{s+q}}{\partial y_1^s \partial s^s} \Psi^q(y_1, s) - \right. \\ &\left. - \tau_i \frac{\partial^{s+q}}{\partial y_1^s \partial s^s} \Psi^q(\tau_i, \zeta) \right|^2 \frac{dy_1 d\zeta d\tau_i}{|y_1 - \tau_i|^2 = |s - \zeta|^2} \Bigg\|^{1/2} \quad (2.15) \end{aligned}$$

Сравнивая (2.1), (2.2) с (2.10), находим, что

$$u = U, \varphi = F + l(y, s, \partial/\partial y, \partial/\partial s)u, \psi^+ = G^+ - b(y, s, \partial/\partial y, \partial/\partial s)u \quad (2.16)$$

Используя утверждение б) леммы 1, из (2.13), (2.16) выводим следующую оценку

$$\begin{aligned} \|u; V_3^{q+1/2}(K)\| &\leq \text{const} \{ \|F; V_3^q(K)\| + \\ &+ \|G^+; V_3^{q+1/2}(\partial K^+)\| + \|l\| y^{q-1} u; L_2(K) \} \quad (2.17) \end{aligned}$$

Как обычно, при помощи метода Шварца замораживания коэффициентов, из приведенных рассуждений, эллиптичности в смысле А. Дуглиса, А. Ниренберга [9] краевой задачи теории упругости получаем непрерывность оператора краевой задачи (1.1), (1.2), (1.4)–(1.6), (1.8).

Для формулировки окончательного результата введем функциональные пространства $V_{2,2}^{q+1/2}(\Omega)$, $V_2^q(\Omega)$ и $V_2^{q+1/2}(M^-)$, нормы в которых порождаются из норм (2.14), (2.15) разбиением единицы. Если носитель функции v отделен от ∂M , то ее норма вычисляется в $W_2^{q+1/2}(\Omega)$ ($W_2^q(\Omega)$ или $W_2^{q+1/2}(M^-)$), а если носитель мал и пересекается с ∂M , то норма v совпадает с нормой функции v^* в $V_{2,2}^{q+1/2}(K)$ ($V_2^q(K)$ или $V_2^{q+1/2}(\partial K^+)$), которая получается из v после перехода к координатам (y_1, y_2, s) .

Теорема 2. Пусть выполнены соотношения (1.7) и (2.4); $f \in V_2^q(\Omega)$, $g \in W_2^{q+1/2}(\partial\Omega_0)$, $g^- \in V_2^{q+1/2}(M^-)$, $E_0, G \in C^{1-1}(\Omega)$ и выполняется условие невырождения

$$E_1 \leq E_0 \leq E_2, G_1 \leq G \leq G_2, E_3, E_2, G_3, G_2 = \text{const} > 0$$

Тогда существует единственное (с точностью до смещения Ω как жесткого тела) решение и задачи (1.1), (1.2), (1.4)–(1.6), (1.8) из пространства $V_{2,2}^{q+1/2}(\Omega)$. Если нормировать это решение условиями

$$\int u(x) dx = 0, \int \text{rot } u(x) dx = 0. \quad (2.18)$$

то справедливо неравенство

$$\|u; V_{\gamma, \beta}^{q+2}(\Omega)\| \leq c (\|f; V_{\beta}^q(\Omega)\| + \|g^1; V_{\gamma}^{q+1/2}(M)\| + \|g; W_2^{q+1/2}(\partial\Omega_0)\|) \quad (2.19)$$

где постоянная c не зависит от g, g^1 и f .

Доказательство. В силу неравенств (2.4) всякое решение $u^0 \in V_{\gamma, \beta}^{q+2}(\Omega)$ однородной задачи упругости в Ω принадлежит $W_2^1(\Omega)$. Так как нулевой энергией обладают лишь жесткие смещения, то $u^0 = -a + b \times x$, где a, b — постоянные векторы. Таким образом, сформулированная в теореме „единственность“ доказана.

Если выполнены равенства (1.7), то существует решение задачи (1.1), (1.2), (1.4) — (1.6), (1.8) из пространства $W_2^1(\Omega)$, подчиненное условиям (2.18). При помощи варианта неравенства Харди

$$\int_0^{\infty} r^{-\gamma} |\log r|^{-2} |\zeta(r)|^2 dr \leq \text{const} \int_0^{\infty} r \left| \frac{d\zeta}{dr}(r) \right|^2 dr \quad (\zeta(r) = 0 \text{ при } r > r_0 > 0)$$

в силу соотношения $\gamma < \beta + 1$ получаем оценку

$$\|r^{\beta-1}u; L_2(\Omega)\| \leq c_1 \|r^{-1}(|\log r| + 1)^{-1}u; L_2(\Omega)\| \leq c_2 \|u; W_2^1(\Omega)\|$$

которая вместе с (2.18) приводит к (2.19). Теорема доказана.

Замечание 1. Проверим, что неравенства (2.4) необходимы для непрерывности оператора A краевой задачи (1.1), (1.2), (1.4) — (1.6), (1.8).

а). Пусть $\beta \in (q - 1/2, q + 1/2)$. Тогда вектор $(u_1, u_2, u_3) = (0, 0, c(s)r^{1/2} \cos^{5/2} \varphi) \chi(r)$ не принадлежит $V_{\gamma, \beta}^{q+2}(\Omega)$ (см. лемму 1) при любой функции $c \in C^{\infty}(\partial M)$, но вектор соответствующих ирранных частей системы уравнений Лама попадает в $V_{\gamma}^q(\Omega) \times V_{\gamma}^{q+1/2}(M)$. Таким образом, ядро A бесконечномерно. (В случае $\beta \in (q - k - 1/2, q - k + 1/2]$, $k = 1, 2, 3, \dots$, аналогичные рассуждения необходимо провести для векторов $(0, 0, c(s)r^{k/2} \cos^{k+1/2} \varphi) \chi(r)$).

б). Если $\beta > q + 1$, то в $V_{\gamma, \beta}^{q+2}(\Omega)$ попадает решение задачи теории упругости в Ω для распределенной на ∂M с интенсивностью $c \in C^{\infty}(\partial M)$ силой. В терминах весовых пространств указанные решения удовлетворяют однородной краевой задаче (1.1), (1.2), (1.4) — (1.6), (1.8), и поэтому $\dim \ker A = \infty$. Если же $\beta = q + 1$, то постоянная c в неравенстве (2.5) зависит от V и Φ, Ψ^{∞} [10].

в). В случае $\gamma > q + 1$ оператор A не является непрерывным (см. лемму 1).

г). Для $\gamma > \beta + 1$ вектор $(u_1, u_2, u_3) = (c_1(s), c_2(s)c_3(s)) \chi(r)$ не принадлежит $V_{\gamma, \beta}^{q+2}(\Omega)$ при любых $c_j \in C^{\infty}(\partial M)$ и, как и в а), $\dim \ker A = \infty$.

3. *Задача ползучести.* Решение рассматривается на произвольном отрезке времени $[0, T]$.

Пусть B — банахово пространство. Как обычно, через $L^*(0, t; B)$ будем обозначать пространство отображений P отрезка $[0, T]$ в B , наделенное нормой

$$\|P; B, t\| = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq \tau \leq t} \|P(\tau); B\|$$

Не умаляя общности, будем считать функцию неоднородного старения неотрицательной, и пусть $T^* = \max_{x \in \bar{\Omega}} x$.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены следующие ограничения:*

- а) константы q, γ, θ удовлетворяют неравенствам (2.4);
- б) модули $E_0, G \in C^{q+1}([0, T^*] \times \bar{\Omega})$ и не вырождаются в $\bar{\Omega}$;
- в) ядра релаксации представимы в виде

$$R_i(t, \tau, x) = \rho_i(t, \tau, x) (t - \tau)^{-\mu} q_i(t, \tau, x), \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq \mu < 1 \quad (3.1)$$

где $\rho_i, q_i \in C^{q+1}([0, T^*] \times [0, T^*] \times \bar{\Omega})$;

г) функция λ принадлежит пространству $C^{q+1}(\bar{\Omega})$;

д) нагрузки f, g^1, g при почти всех $t \in [0, T]$ удовлетворяют условиям равновесия (1.7), и справедливы включения

$$\begin{aligned} f &\in L^*(0, T; V_1^q(\Omega)), \quad g^1 \in L^\infty(0, T; V_3^{q-1,2}(M^1)), \\ g &\in L^\infty(0, T; W_3^{q-1,2}(\partial\Omega_0)) \end{aligned}$$

Тогда существует единственное (с точностью до смещения тела, как жесткого целого) решение и краевой задачи (1.1)–(1.6) из пространства $L^*(0, T; V_1^q(\Omega))$. Если это решение при почти всех $t \in [0, T]$ нормируется условиями (2.18), то справедлива оценка

$$\|u; V_1^{q,2}(\Omega), T\| \leq cF(f, g^1, g) \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} F(f, g^1, g) = &\|f; V_1^q(\Omega), T\| + \|g^1; V_3^{q-1,2}(M^1), T\| + \\ &+ \|g; W_3^{q-1,2}(\partial\Omega_0), T\| \end{aligned}$$

Здесь и далее буквой c будем обозначать различные константы, не зависящие от f, g^1, g .

Доказательство. Для краткости, запишем уравнения задачи ползучести в смещениях в операторной форме

$$\begin{aligned} Lu - L'u + f &= 0 \quad \text{при } x \in \Omega, \\ B'u - B''u - g &\text{ на } M^1, \quad B'u - B'u - g \text{ на } \partial\Omega_0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь L — оператор уравнений равновесия упруго-мгновенной задачи, L' — оператор, содержащий все интегральные слагаемые, $B'u, B''u$ — векторы упруго-мгновенных поверхностных напряжений на $M^1, \partial\Omega_0$

соответственно. $B^+ u$, $B^- u$ — интегральные слагаемые векторов поверхностных напряжений.

Зафиксируем $t \in [0, T]$ и рассмотрим интегральные слагаемые $L^+ u(t, \cdot)$, $B^{+\pm} u(t, \cdot)$, $B^- u(t, \cdot)$ как операторы, действующие из пространства $L^-(0, t; V_{1, \beta}^{q+2}(\Omega))$ в пространства $V_3^q(\Omega)$, $V_3^{q+1/2}(M^-)$, $W_2^{q+1/2}(\partial\Omega_0)$ соответственно. Справедливы оценки:

$$\|L^+ u(t, \cdot); V_3^q(\Omega)\| + \|B^{+\pm} u(t, \cdot); V_3^{q+1/2}(M^-)\| + \|B^- u(t, \cdot); W_2^{q+1/2}(\partial\Omega_0)\| \leq c \int_0^t (t-\tau)^{-\rho} \|\sigma; V_{1, \beta}^{q+2}(\Omega), \tau\| d\tau \quad (3.4)$$

Здесь ρ — константа из условий (3.1), c — зависит от области Ω , многообразия M , норм функций E_0 , G , p_i , q_i , σ в пространствах C^{n+1} , а также времени T .

Действительно, из определения L^+ и (1.1) — (1.6) следует, что компоненты $L_i^+ u$ задаются выражениями

$$L_i^+ u(t, x) = \int_0^t \left\{ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} [E_0(t+x(x), x) R_0(t+x(x), \tau+x(x), x) \times \right. \\ \left. \times e(u)(\tau, x) + 2G(t+x(x), x) R_1(t+x(x), \tau+x(x), x) e_{ij}(u)(\tau, x)] \right\} d\tau \quad (3.5)$$

Используя (3.1) и (3.5), получим, что производные порядка $|z|$ от компонент $L_i^+ u$ имеют следующую структуру:

$$D^z L_i^+ u(t, x) = \int_0^t \sum_{j=1}^3 \sum_{0 \leq |z| \leq |z|+2} [(t-\tau)^{-\rho} P_{ijz} + Q_{ijz}] D^z u_j(\tau, x) d\tau \quad (3.6)$$

Здесь функции P_{ijz} , Q_{ijz} содержат производные степени не выше $|z|+1$ от функций E_0 , G , p_i , q_i , σ и следовательно, равномерно ограничены при $|\tau| \leq q$.

Переходя к криволинейным координатам (y_1, y_2, s) в окрестности D края ∂M , из (3.6) получим представления

$$D_y^z L_i^+ u(t, y, s) = \int_0^t \sum_{j=1}^2 \sum_{0 \leq |z| \leq |z|+2} [(t-\tau)^{-\rho} P_{ijz}^* + Q_{ijz}^*] D_y^z u_j(\tau, y, s) d\tau \quad (3.7)$$

Свойства функций P_{ijz}^* , Q_{ijz}^* совпадают со свойствами функций P_{ijz} , Q_{ijz} .

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ — разбиение единицы, порождающее нормы в $V_3^q(\Omega)$, $V_{1, \beta}^{q+2}(\Omega)$, $V_3^{q+1/2}(M^-)$. Из неравенства $\tau > q$ следует, что $\sigma =$

совой множитель $|y|^{p-1}$ при функции в определении нормы пространства $V_{1,2}^{q,p}$ при малых значениях y мажорирует весовой множитель $|y|^{p-1}$ при функции в определении нормы пространства V_2^q (см. (2.14)). Поэтому, используя представления (3.7) или (3.6) (в зависимости от того, пересекается или нет носитель функции χ_i с ∂M), при помощи неравенства Минковского получим

$$\begin{aligned} \|L'u(t, \cdot); V_2^q(\Omega)\| &\leq c \int_0^t [(t-\tau)^{-\alpha} + 1] \|u(\tau, \cdot); V_{1,2}^{q,p}(\Omega)\| d\tau \leq \\ &\leq \int_0^t c(1+T^\alpha)(t-\tau)^{-\alpha} \|u; V_{1,2}^{q,p}(\Omega)\| d\tau \end{aligned}$$

Оценки норм векторов $B^{-1}u$, $B'u$ проводятся аналогично; необходимо лишь воспользоваться соотношением [9, 11]

$$\|v; V_{1,2}^{q,p}(\Omega)\| \leq \|v; W_2^{q,p}(\partial\Omega)\| \leq c \|v; V_2^q(\Omega)\|$$

Будем искать решение задачи (3.3) в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u^n(t, x) \quad (3.8)$$

элементы которого удовлетворяют краевым задачам с параметром t :

$$\begin{aligned} Lu^1 + f &= 0 \text{ при } x \in \Omega, \quad B^{-1}u^1 = g^1 \text{ при } x \in M^+, \quad Bu^1 = g \text{ при } x \in \partial\Omega, \\ Lu^n + f^{n-1} &= 0 \text{ при } x \in \Omega, \quad B^{-1}u^n = g^{n-1} \text{ при } x \in M^+, \quad Bu^n = g^{n-1} \end{aligned} \quad (3.9)$$

при $x \in \partial\Omega_0$

$$f^{n-1} = -L'u^{n-1}, \quad g^{n-1} = B^{-1}u^{n-1}, \quad g^{n-1} = B'u^{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (3.10)$$

Нагрузки f^n , g^n , g^2 при всех t удовлетворяют условиям равновесия (1.7). В самом деле, если обозначить через $z_{ij}^n(u)$ напряжения, порождаемые подстановкой смещений u и интегральные слагаемые закона ползучести (1.3), то в силу соотношений

$$f_i^n = z_{ij,j}^n(u^n), \quad g_i^{n-1} = -z_{ij}^n(u^{n-1})n_j, \quad g_i^2 = -z_{ij}^2(u^2)n_j$$

получим

$$\int_{\Omega} f_i^n u_i^n dx + \int_{M^+} g_i^{n-1} u_i^n ds + \int_{\partial\Omega_0} g_i^2 u_i^n ds = - \int_{\Omega} z_{ij}^n(u^n) z_{ij}^n(u^n) d\Omega = 0$$

Будем считать, что при всяком t решения u^n рекуррентных соотношений (3.9) удовлетворяют условиям нормировки (2.18). По теореме 1 при $t \in [0, T]$ справедливо неравенство

$$\|u^n; V_{\sigma, \sigma}^{q, \lambda}(\Omega), t\| \leq cF \quad (3.11)$$

Из теоремы 1, (3.4) и определения (3.10) следует оценка для u^n через u^{n-1}

$$\begin{aligned} \|u^n; V_{\sigma, \sigma}^{q, \lambda}(\Omega), t\| &\leq c\{\|f^{n-1}; V_{\sigma}^q(\Omega), t\| + \|g^{n-1}; V_{\sigma}^{q-1, \lambda}(M^-), t\| + \\ &+ \|g^{n-1}; W_{\sigma}^{q+1, \lambda}(\partial\Omega_0), t\| \} \\ &\leq c \int_0^t (t-\tau)^{-\lambda} \|u^{n-1}; V_{\sigma, \sigma}^{q, \lambda}(\Omega), \tau\| d\tau, \quad \lambda = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

Из (3.11), (3.12) и леммы 5 работы [13] следует сходимость ряда (3.8) и оценка (3.2). Теорема доказана.

ԵՐԿՉԱՓ ՃԱԲՈՒՆ ԵՐՈՒՅՔՆԵՐՈՒՄ ԱՌԱՋՊԱՎԱՆՈՒԹՅԱՆ ԽՈՒՄՆԵՐԻ
ՏԵՄՈՒԹՅԱՆ ԵՌԱԶԱՓ ԽՆՔԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒՅՈՒՄԵՆԵՐԻ ԿՈՒՐՑՑՑԻՎ
ՊԵՆՁԱՏԱԿԱՆՆԵՐԸ ԿՐՈՒՄԻ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ

Ս. Ա. ՆԱԶԱՐՈՎ, Բ. Ա. ՇՈՎԿԵՏ

Ա. մ. ի. ո. ի. ո. լ. մ.

Գիտարկվում են երկչափ նաքով տիրույթում անհամասեռ ձերացող մարմնի առաձգականության և սողքի առասիլյան հասլափ խնդիրները: Քանի որ ստումնասիրվում է մարմնի ամբողջ կզրի վրա տրված լարումների դեպքը, ապա սովորական օդտադործվող կշռային տարածություններում համապատասխան մոդելային խնդիրը չի հանդիսանում միարժեք լուծելի, այդ պատճառով նորմայի սահմաններում ընտրվում են կշռելի բազմադասակիյներ և արտածվում են մտցված կշռելի տարածություններում լուծման կոէրցիտիվ գնահատականները: Այդ գնահատականները անհրաժեշտ են ճարի կզրի շրջակայքում նշված խնդիրների լուծման ասիմպտոտիկայի ուսումնասիրման համար:

COERCIVE ESTIMATES FOR SOLUTIONS OF WEIGHT SPACES OF THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF ELASTIC AND CREEP THEORY IN THE REGION WITH A TWO-DIMENSIONAL CRACK

S. A. NAZAROV, B. A. SHOWKHET

S u m m a r y

Three-dimensional problems of the theory of elasticity and creep for non-homogeneously ageing media are considered in the region with two-dimensional crack. Since the secondary boundary-value problem is

investigated, the proper model problem cannot be solved in the usual¹⁵ used weight spaces therefore suitable multiplicands are chosen in the definitions of the norm and coercive estimates of solutions are developed. These estimates are necessary for the consideration of asymptotic behaviour of the solution of the problems in question.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратьев В. А. О гладкости решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в кусочно-гладкой области — Дифференциальные уравнения, 1970, т. 8, № 10, с. 1831—1843.
2. Малая В. Г., Пламеневский Б. А. Об эллиптических краевых задачах в областях с кусочно-гладкой границей. — Тр. симпозиума по нелинейным сплочимым средам и родственными проблемам математического анализа (Тбилизи, 1971), т. 1, Тбилиси: Мецниереби, 1973, с. 171—181.
3. Малая В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи ребра — Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 1, с. 33—36.
4. Никишин В. А. Особенности решений задачи Дирихле для уравнения второго порядка в окрестности ребра — Вестник МГУ, сер. мат. мех., 1979, № 2, с. 51—62.
5. Малая В. Г., Пламеневский Б. А. Эллиптические краевые задачи на многообразиях с особенностями. — Проблемы математического анализа, 1977, вып. 6, с. 85—142.
6. Малая В. Г., Пламеневский Б. А. L_p -оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами. — Тр. Моск. матем. о-ва, 1978, т. 37, с. 49—93.
7. Арутюнян Н. Х., Наларов С. А., Шойхет Б. А. Оценки и асимптотика напряженно-деформированного состояния трехмерного тела с трещиной в теории упругости и теории ползучести — Докл. АН СССР, 1982, т. 268, № 6, с. 1365—1369.
8. Арутюнян Н. Х. О теории ползучести для неоднородно наследственно-старееющих сред — Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 3, с. 569—571.
9. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the Boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II — Comm. Pure Appl. Math., 1964, vol. 17, p. 35—92.
10. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. — Тр. Московского математического общества, 1967, т. 16, с. 219—292.
11. Малая В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками — Mathematische Nachrichten, 1977, Bd 76, n. 29—60.
12. Базилов А. А., Фейзин В. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с неограниченной границей. — Докл. АН СССР, 1973, т. 221, № 1, с. 23—26.
13. Арутюнян Н. Х., Шойхет Б. А. Асимптотическое поведение решения краевой задачи теории ползучести неоднородно старееющих тел с односторонними связями — Известия АН СССР, МТТ, 1981, № 3, с. 31—48.

Ленинградский госуниверситет
им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию
27 VII 1982

ВХОД ТЕЛА В ВОДУ ЧЕРЕЗ СЛОЙ ЛЬДА

САГОМОНИАН А. Я., ГАЕВСКАЯ И. С.

Пусть тело имеет форму тонкого конуса с углом раствора 2γ , переходящего на высоте h в цилиндр. Рассмотрим вертикальное проникание такого тела в полупространство, заполненное водой, на поверхности которой лежит слой льда толщиной l . До начала проникания лед и вода неподвижны, начальная скорость проникания V_0 перпендикулярна свободной поверхности льда. Будем считать, что скорость V_0 меньше скорости звука в воде.

При движении тонкого тела во льду возникает присоединенная ударная волна, на фронте которой происходит разрушение льда. Плавления льда на фронте волны не будет, так как в работе [1] экспериментально показано, что плавление льда на фронте волны наблюдается только при интенсивности волны большей $22 \cdot 10^6$ Па. В нашей задаче на рассматриваемом диапазоне скоростей удара такое давление не достигается. Перед фронтом разрушения распространяются акустические волны, под действием которых напряжения в среде достигают предела прочности P_* , составляющего для льда $2 \div 5 \cdot 10^6$ Па. При прохождении ударной волны по льду за ее фронтом происходят необратимые объемные деформации, связанные с разрушением материала, в том числе пор, содержащих пузырьки воздуха, поэтому лед за ударной волной можно рассматривать как пластически сжимаемую среду. Сделаем допущение о том, что плотность льда меняется только на ударной волне и определяется интенсивностью волны, а тензор напряжения в среде за фронтом волны шаровой.

Для расчета движения тела во льду воспользуемся моделью, предложенной в работе [2] для решения задачи о проникании тонкого тела в пластически сжимаемую среду. В модели предполагается, что при описании движения среды вблизи тела можно применять гипотезу плоских сечений.

Задачу будем рассматривать в цилиндрической системе координат r, z , ось z направлена по оси тела вниз (фиг. 1). Пусть в момент времени t вершина конуса находится на глубине $H(t)$, а его скорость равна $\dot{H}(t)$. Исследуем движение среды в некотором произвольном сечении z . В момент, когда вершина конуса коснулась плоскости z , в плоскости в соответствии с используемой гипотезой плоских сечений возникла цилиндрическая ударная волна. В последующие моменты времени область возмущенного движения среды в плоскости z будет заключена между двумя окружностями: радиус внешней окружности равен координате фронта ударной волны $r = r^*$, внутренней границей области будет окружность радиуса

$R(t)$, являющаяся линией пересечения поверхности тела с рассматриваемой плоскостью z

$$R(t) = [H(t) - z] \gamma$$

Уравнения движения и неразрывности среды в сечении z имеют следующий вид:

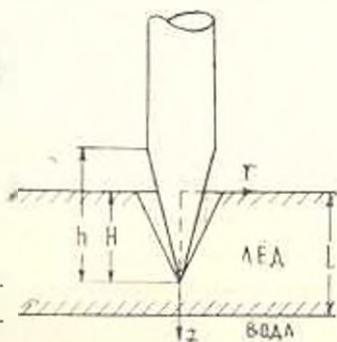
$$\begin{aligned} \rho_0 r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (r + u) \frac{\partial P}{\partial r} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (r + u)^2 &= \frac{\rho_0}{\rho} r \end{aligned} \quad (1.1)$$

где r — координата Лагранжа, u — перемещение частицы, ρ_0 , ρ — начальная и текущая плотность льда, P — давление.

Законы сохранения массы и импульса на фронте ударной волны при $r = r^*$ в сечении z запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \rho_0 D &= \rho (D - u^*) \\ \rho_0 D u^* &= P^* - P_0 \end{aligned}$$

здесь D — скорость ударной волны, u^* — скорость частиц на ударной волне, P_0 — давление перед фронтом волны, P^* — давление на ударной волне.



Фиг. 1.

Граничные условия для системы (1.1) будут следующие:

$$\begin{aligned} \text{при } r = 0 & \quad u(0, t) = R(t) \\ \text{при } r = r^* & \quad P = P^*, \quad u = u^*, \quad \dot{u} = 0 \end{aligned}$$

Решая полученную систему уравнений, найдем давление $P_r(z)$, действующее на коническую поверхность проникающего тела

$$P_r(z) = \frac{\rho_0}{2b} \left(\ln \frac{1}{1-b} \right) (H-z) H \gamma^2 + \frac{\rho_0}{2b} \left(\ln \frac{1}{1-b} + b \right) H \gamma^2 + P_0$$

Параметр $b = \rho_0/\rho$ определяется по значению плотности за ударной волной в начальный момент проникания. В этот момент давление на фронте волны равно

$$P^* = P_0 + \rho_0 v_0^2 \gamma^2$$

Из динамической кривой сжатия льда по вычисленному значению P^* находят значение плотности ρ . Экспериментальная динамическая кривая сжатия льда с начальной плотностью $\rho_0 = 920 \text{ кг/м}^3$ приведена в работе [1].

Определим силу сопротивления, действующую в вертикальном направлении на коническую часть тела, расположенную выше линии раздела лед-вода.

При глубине проникания $H < h$ сила сопротивления равна

$$F_A = 2\pi\gamma^2 \int_0^H (H-z) P_s(z) dz = \lambda_s H^3 + \alpha_s H^2 \dot{H}^2 + \beta H^2$$

$$\lambda_s = \pi\gamma^2 \frac{\rho_0}{3b} \ln \frac{1}{1-b}; \quad \alpha_s = \pi\gamma^2 \frac{\rho_0}{2b} \left(\ln \frac{1}{1-b} + b \right); \quad \beta = \pi\gamma^2 P_0/2$$

При дальнейшем проникании, когда H становится больше длины конической части проникающего тела, происходит отрыв среды от боковой поверхности в точке $z = H - h$, и поверхность контакта конуса со льдом не меняется до того момента, пока вершина тела не коснется линии раздела лед-вода. Сила сопротивления на этом участке определяется по формуле

$$F_A = 2\pi\gamma^2 \int_{H-h}^H (H-z) P_s(z) dz = \lambda_s h^3 H + \alpha_s h^2 H^2 + \beta h^2$$

При глубине проникания $H > l$ сила сопротивления со стороны льда действует только на ту часть конуса, которая находится выше линии раздела, на нижнюю часть конуса действует сила сопротивления воды. Сила F_A будет равна

$$F_A = 2\pi\gamma^2 \int_{H-l}^l (H-z) P_s(z) dz = \lambda_s [h^2 - (H-l)^2] H + \alpha_s [h^2 - (H-l)^2] H^2 + \beta [h^2 - (H-l)^2]$$

Перейдем к рассмотрению движения тела в воде и определим силу сопротивления воды. Как показывают исследования, влиянием сжимаемости воды при проникании тонких тел в первом приближении можно пренебречь, поэтому будем в качестве модели воды использовать модель идеальной несжимаемой жидкости.

Пусть в момент времени t_1 , когда вершина конуса достигла линии раздела лед-вода, скорость тела равна V_1 . До момента $t = t_1$ жидкость покоилась. Движение, возникшее в жидкости при $t > t_1$, будет потенциальным. Потенциал скорости $\varphi(r, z, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0$$

Поскольку для модели проникания тела в лед была принята гипотеза плоских сечений, то граничное условие на поверхности раздела $z = l$ для любого момента времени будет иметь вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

Граничное условие на поверхности тела в силу малости угла γ запишется так

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \begin{cases} H\gamma, & \eta \leq z < \bar{H} \\ 0, & 0 < z < \eta \end{cases} \quad (1.2)$$

Здесь $\bar{H} = H - l$, а функция η задается в виде

$$\eta = \begin{cases} 0, & \bar{H} \leq h \\ \bar{H} - h, & \bar{H} > h \end{cases}$$

Продолжим потенциал скорости на основании принципа симметрии четным образом на верхнюю полуплоскость и представим его в виде

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\bar{H}}^{\bar{H}} \frac{q(\xi)}{\sqrt{(\xi - z)^2 + r^2}} \quad (1.3)$$

Задача свелась к определению функции $q(\xi)$. В работе [3] показано, что на образующей тонкого тела справедливо соотношение

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=0} = \frac{1}{2\pi} \frac{q(z)}{r}$$

Используя граничные условия (1.2) в рамках линейного приближения можно записать

$$q(z) = \begin{cases} 0, & z > H \\ 2\pi\gamma^2(H - z)H, & \eta \leq z \leq H \\ 0, & -\eta < z < \eta \\ 2\pi\gamma^2(H + z)H, & -H \leq z \leq -\eta \\ 0, & z < -H \end{cases} \quad (1.4)$$

Для упрощения знак « \sim » над величиной H временно опустим.

На основании (1.4) потенциал скорости (1.3) представится формулой

$$\varphi = -\frac{1}{2} \gamma^2 H \left\{ \int_{\eta}^H \frac{(H - \xi) d\xi}{\sqrt{(\xi - z)^2 + r^2}} - \int_{-H}^{-\eta} \frac{(H + \xi) d\xi}{\sqrt{(\xi - z)^2 + r^2}} \right\}$$

Из линейризованного уравнения Коши-Лагранжа определим давление, действующее на коническую поверхность тела

$$P_s(z) = -\rho_s \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Рассмотрим два случая в зависимости от глубины проникания тела в воду.

а) глубина проникания в воду меньше h , то есть в воде находится только коническая часть тела. В этом случае давление и сила сопротивления соответственно равны

$$\begin{aligned}
P_0(z) &= \frac{1}{2} \rho_0 \gamma^3 H \left[(H-z) \left(\ln \frac{4}{\gamma^2} - 2 \right) + H \ln \frac{H+z}{H-z} + \right. \\
&\quad \left. + z \ln \frac{H^2 - z^2}{z^2} \right] + \frac{1}{2} \rho_0 \gamma^2 H^3 \left(\ln \frac{L}{\gamma^2} + \ln \frac{H+z}{H-z} \right) \\
F_0 &= 2\pi \gamma^2 \int_0^H (H-z) P_0(z) dz = \gamma_0 H^3 H + \gamma_1 H^2 H^2 \\
\gamma_0 &= \pi_0 \gamma_0 \left(-\frac{2}{3} \ln \gamma + 2 \ln 2 - 1 \right) \\
\gamma_1 &= \pi_1 \gamma_1 (-\ln \gamma - 3 \ln 2 - 1)
\end{aligned}$$

б) глубина проникания в воду больше h

$$\begin{aligned}
P_0(z) &= \frac{1}{2} \rho_0 \gamma^2 H \left[(H-z) \left(\ln \frac{4}{\gamma^2} - 2 \right) + H \ln \frac{H+z}{H-z} \frac{z-\eta}{z+\eta} + \right. \\
&\quad \left. + z \ln \frac{H^2 - z^2}{z^2 - \eta^2} \right] + \frac{1}{2} \rho_0 \gamma^2 H^3 \left[\ln \frac{4}{\gamma^2} + \ln \frac{H+z}{H-z} \frac{z-\eta}{z+\eta} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{h}{\sqrt{(z-\eta)^2 + (H-z)^2 \gamma^2}} - \frac{h}{\sqrt{(z+\eta)^2 + (H-z)^2 \gamma^2}} \right]
\end{aligned}$$

Следует отметить, что вершина тела и линия стыка конической части с цилиндрической являются особыми точками. Около вершины конуса давление стремится к бесконечности, а вблизи линии стыка возникает область разрежения. Нижнюю границу области разрежения можно определить из решения уравнения

$$P_0(z) = 0 \quad (1.5)$$

Расчеты показывают, что основной вклад в величину давления составляет член, пропорциональный H^3 , поэтому членом H можно пренебречь, и тогда уравнение (1.5) сводится к виду

$$\begin{aligned}
\ln \frac{4}{\gamma^2} + \ln \frac{H+z}{H-z} \frac{z-\eta}{z+\eta} - \frac{h}{\sqrt{(z-\eta)^2 + (H-z)^2 \gamma^2}} - \\
- \frac{h}{\sqrt{(z+\eta)^2 + (H-z)^2 \gamma^2}} = 0
\end{aligned}$$

Сила сопротивления, действующая на тело, определяется по формуле

$$F_0 = 2\pi \gamma^2 \int_0^H (H-z) P_0(z) dz = Hf(H, \sigma) + H^2 g(H, \sigma)$$

$$\begin{aligned}
g(H, z) &= (H-z)^2 \ln \frac{2}{\gamma} + \frac{(H-z)^2}{2} \ln \frac{H+z}{H-z} \frac{z-\eta}{z+\eta} + \\
&+ 2H^2 \ln \frac{2H}{H+z} + \frac{1}{2} h^2 \ln \frac{h}{z-\eta} - (H+\eta) \left(H + \frac{h}{2} \right) \ln \frac{H+\eta}{z+\eta} + \\
&+ h^2 - h^2 \ln \frac{2h}{z-\eta + \sqrt{(z-\eta)^2 + (H-z)^2 \gamma^2}} \\
f(H, z) &= \frac{2}{3} (H-z)^2 \left(\ln \frac{2}{\gamma} - 1 \right) + H \left[-h(H-z) + \right. \\
&+ \frac{(H-z)^2}{2} \ln \frac{H+z}{H-z} \frac{z-\eta}{z+\eta} - \frac{1}{2} (H+\eta)^2 \ln \frac{H+\eta}{z+\eta} + \\
&+ h^2 \ln \frac{h}{z-\eta} + 2H^2 \ln \frac{2H}{H-z} \left. \right] + \\
&+ \frac{1}{3} \left[H^3 \ln \frac{H^2 - \eta^2}{4H^2} \frac{H+z}{H-z} + \eta^3 \ln \frac{H-\eta}{H+\eta} \frac{z-\eta}{z+\eta} - \right. \\
&- \alpha^3 \ln \frac{z^2 - \eta^2}{H^2 - \alpha^2} + 2(H^2 - \eta^2)(H-z) \left. \right] + \\
&+ \frac{H}{2} \left[H^2 \ln \frac{H^2 - z^2}{H^2 - \eta^2} + (z^2 - \eta^2) \ln \frac{z^2 - \eta^2}{H^2 - z^2} \right]
\end{aligned}$$

α — нижняя граница области разрежения.

Объединим полученные решения и найдем зависимость между скоростью тела и глубиной проникания. Закон движения тела массы m будет:

$$m\dot{H} = -(F_s + F_n)$$

Выделим в процессе проникания четыре этапа в зависимости от глубины проникания (фиг. 2).

1. Глубина проникания $H \leq h$

Уравнение движения тела имеет вид

$$m\dot{H} = -(\rho_1 H^2 \dot{H} + \rho_2 H^3 \dot{H} - \frac{2}{3} H^3)$$

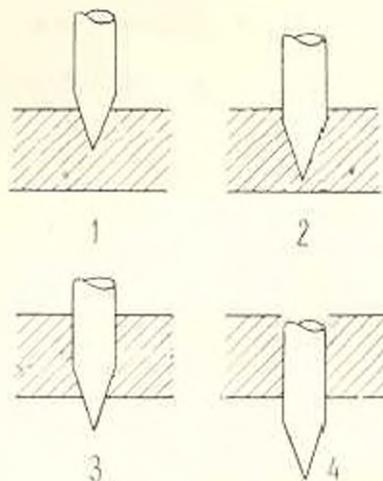
$$H(0) = V_0$$

Решение этого уравнения представляется формулой

$$H = \left| -\frac{\rho_2}{2\rho_1} + \left(V_0^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 + \frac{\rho_2}{m} H^3 \right)^{-2\rho_1 / 3\rho_2} \right|^{1/2}$$

$$(1.6)$$



Фиг. 2.

2. Глубина $h < H \ll l$

$$m\dot{H} = -(\lambda_1 h^3 \dot{H} + \lambda_2 h^2 \dot{H}^2 + \beta h^2)$$

$$H(h) = V_h$$

V_h — значение скорости тела на глубине $H = h$, вычисленное по формуле (1.6).

Решение уравнения:

$$H = \left\{ -\frac{\beta}{\lambda_1} + \left(V_h^2 + \frac{\beta^2}{\lambda_1^2} \right) \exp \left[-\frac{2\lambda_1 h^2}{m + \lambda_1 h^2} (H - h) \right] \right\}^{1/2} \quad (1.7)$$

3. Глубина $l < H \ll l + h$

В этом случае на нижнюю часть конуса действует сила сопротивления со стороны жидкости, а на верхнюю — сила сопротивления льда. Уравнение движения имеет вид

$$m\dot{H} = -[\lambda_1 (h^2 - \bar{H}^2) \dot{H} + \dot{H}^2 \lambda_2 (h^2 - \bar{H}^2) - \beta (h^2 - \bar{H}^2) + \lambda_1 \bar{H}^2 \dot{H} + \lambda_2 \bar{H}^2 \dot{H}^2]$$

$$\dot{H}(l) = V_l, \quad \bar{H} = H - l$$

V_l — значение скорости, найденное по формуле (1.7) для $H = l$. В общем случае уравнение не имеет аналитического решения. Если скорость проникания достаточно велика, то, как показали расчеты, вклад члена, пропорционального величине β , мал на всех этапах и этим членом можно пренебречь. В этом случае уравнение имеет аналитическое решение:

$$H = V_l \exp[-Q(\bar{H})]$$

Функция $Q(x)$ задается в виде

$$Q(x) = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ \frac{1}{3} \ln \frac{a^2 - x^2}{a^2} - \frac{b}{6a^2} \ln \frac{(a-x)^2}{a^2 + ax + x^2} + \frac{b}{a^2} \frac{1}{3} \arctg \left(\frac{2x+a}{a\sqrt{3}} - \frac{x}{6} \right) \right\}$$

$$a^2 = \frac{m + \lambda_1 h^2}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad b = \frac{\lambda_2 h^2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

4. Глубина проникания $H \geq l + h$

$$m\dot{H} = -[Hf(\bar{H}, z) + H^2 g(\bar{H}, z)]$$

$$H(l+h) = v_{l,h}$$

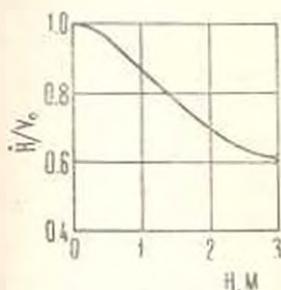
Решение уравнения

$$H = v_{l,h} \exp \left(- \int_{\bar{H}}^H \frac{g(\bar{H}, z)}{m + f(\bar{H}, z)} d\bar{H} \right)$$

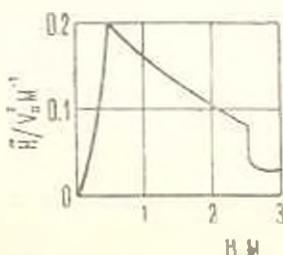
Расчеты показали, что величина $f(\bar{H}, \alpha)$ значительно меньше массы тела m , а значения функции $g(\bar{H}, \alpha)$ мало меняются при увеличении H . Полагая $g(\bar{H}, \alpha) = \cos^2 \alpha = G$ формулу можно упростить

$$\dot{H} = V_{\text{max}} \exp \left[-\frac{G}{m} (\bar{H} - h) \right]$$

Результаты расчетов для тела массы 10 кг, с углом полураствора $\alpha = 10^\circ$, высотой конической части $h = 0,5$ м и значением l , равным $4h$, представлены на графиках. На фиг. 3 показана зависимость скорости тела от глубины проникания. На фиг. 4 показано изменение ускорения тела



Фиг. 3.



Фиг. 4.

в процессе движения. Следует отметить, что максимальная величина ускорения достигается на глубине $H = h$, далее наблюдается монотонный спад ускорения до глубины $H = l + h$, после начала входа в воду цилиндрической части ускорение резко падает.

ԱՆՈՒՅՅԻ ՇԵՐՏԻ ՄԻՋՈՎ ՄԱՐՄԵՆԻ ԲԱՓԱՆՑՈՒՄԸ ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԵՋ

Ա. ՅԱ. ԱՎԻՄՈՆՅԱՆ, Ի. Ս. ՊԱՆՇՄԻՅԱ

Ա մ փ ո փ ո ս ւ

Հաղվածում ուսումնասիրվում է վերջավոր հաստությամբ սառույցի շերտի միջով պինդ, նեղ կանի ներթափանցումը իդեալական անսեղմելի հեղուկի մեջ, որը դրսևեցնում է կիսատարածությունը: Մանրության ուժերը արճամարվում են նեթադրվում է, որ սառույցի մեջ ներթափանցման պրոցեսը տեղի է ունենում բաշրայան մակերևույթի (ալիքի) առաջացումով, սառույցի հալում տեղի է ունենում: Վերջին ենթադրությունը հիմնված է գրեկանության ցանկի [1] աշխատանքի արդյունքների վրա: Ստացված է ներթափանցման օրենքը որոշող անալիտիկ փակ բանաձևեր:

THE PENETRATION OF A BODY INTO WATER THROUGH A LAYER OF ICE

A. Ja. SAGOMONIAN, I. S. GAEVSKAYA

S u m m a r y

In the paper the problem of vertical penetration of a rigid narrow cone through a layer of ice of finite thickness in ideal incompressible fluid occupying half the space is investigated. The gravitation forces are neglected. It is supposed that the process of penetration in a layer of ice is realized with the formation of the surface (wave) of fracture; the melting (thaw) of ice does not occur. The latter assumption is based on the results of paper [1] in the reference list. Closed analytical formulae, determining the law of penetration, are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schroeder R. C., Mc. Master W. H.* Shock compression freezing and melting of water and ice — *J. Appl. Phys.* 1973, 44, No. 6, p. 2591—2594.
2. Согомонян А. Я. Проникание. М.: Изд. МГУ, 1974.
3. Багдасарян А. Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван: Изд. АН Арм.ССР, 1961.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
25. X. 1982

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХ РАЗНОРОДНЫХ ПЛАСТИН В ПРОЦЕССЕ ИХ СОЕДИНЕНИЯ ДВИЖУЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

САРГСЯН А. М.

Изучение напряженно-деформированного состояния в процессе и после соединения однородных и разнородных материалов (сварка, пайка, склеивание) необходимо для обеспечения заданной точности изготовления и прочности неразъемных соединений как в процессе соединения, так и после приложения эксплуатационных нагрузок [1].

Многие вопросы термоупругости и термопластичности в процессе соединения однородных материалов изучены достаточно хорошо [1, 2, 3].

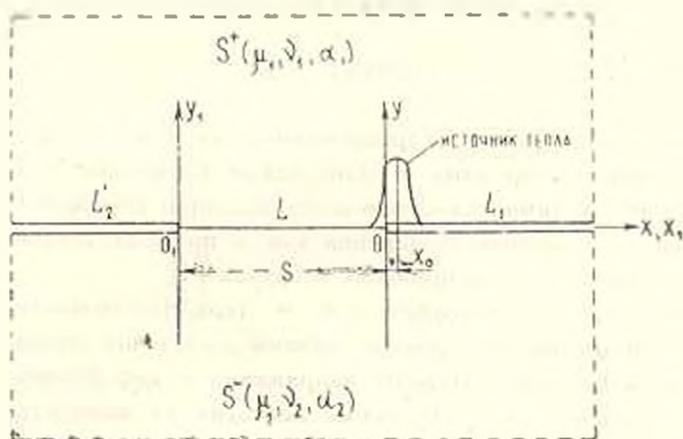
Исследованию температурных напряжений и деформаций в процессе соединения разнородных материалов, несмотря на важность, посвящено очень мало работ. В работах [2, 4], относящихся к сварке разнородных металлов, рассмотрены осесимметричные задачи термопластичности для составных оболочек (труб) в предположении одновременного выполнения сварного шва. Установлено, что в некоторых таких соединениях напряженное состояние после сварки существенно отличается от соответствующего состояния соединений однородных металлов и что разнородность часто играет основную роль в образовании остаточных напряжений.

В работе [5] при изучении остаточных напряжений в составной бесконечной пластине предполагалось, что в процессе соединения разнородные пластины поддерживались при одинаковой постоянной температуре. В линейной термоупругой постановке определены остаточные напряжения, возникающие вследствие разницы между рабочей температурой и температурой соединения.

В настоящей работе в рамках линейной несвязанной термоупругости рассматривается квазистатическая задача о соединении лстык двух тонких разнородных полубесконечных пластин движущимся источником тепла.

Пусть две пластины с термоупругими характеристиками (μ_j, ν_j, α_j) ($j = 1, 2$) занимают соответственно верхнюю и нижнюю полуплоскости S^+ и S^- (фиг. 1), где μ_j — модуль сдвига, ν_j и α_j — коэффициенты Пуассона и линейного теплового расширения соединяемых материалов. Пусть, далее, источник тепла постоянной мощности q движется со скоростью v вдоль границы раздела соединяемых пластин. За источником тепла, начиная с некоторой точки границы раздела, координаты которой по отношению к движущемуся источнику тепла определяются физико-механическими свойствами пластин, температурным полем и другими факторами, меж-

ду пластинами по мере движения источника тепла возникает увеличивающийся по закону $s = vt$ (τ — время соединения) участок полного механического контакта L . Соединение происходит при некоторой разнице продольных деформаций границ пластин, зависящей от параметров задачи и определяемой в ходе ее решения. Остальная часть границы раздела представляется в виде свободных от внешнего воздействия трещин $L' = L_1 + L_2$.



Фиг. 1

В действительности, в зависимости от физико-механических свойств пластины, способа соединения (сварка, пайка, склеивание) в некоторой окрестности зоны соединения в той или иной мере проявляются свойства пластичности и ползучести. В принятой модели влияние этих свойств на процесс соединения учитывается положением точки соединения относительно источника тепла и условием для определения разницы продольных деформаций.

Задача состоит в определении напряженно-деформированного состояния кусочно-однородной пластины с двумя полубесконечными трещинами $L' = L_1 + L_2$ вдоль границы раздела при заранее неизвестной разнице продольных деформаций на участке контакта L .

Граничные условия задачи в подвижной системе координат xOy можно сформулировать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{y1}^*(x, 0) = \sigma_{y2}^*(x, 0), \quad \tau_{xy1}^*(x, 0) = \tau_{xy2}^*(x, 0) \quad \text{на } L \\ u_1^*(x, 0) = u_2^*(x, 0) + F(x), \quad v_1^*(x, 0) = v_2^*(x, 0) \quad \text{на } L \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\sigma_{y1}^*(x, 0) = \tau_{xy1}^*(x, 0) = 0 \quad \text{на } L' \quad (1.2)$$

где $F(x)$ — неизвестная пока функция, определяющая разность продольных смещений на участке L .

Решение задачи выражается через функции напряжений Φ_j^* , которые в соответствующих областях удовлетворяют уравнению [6]

$$\Delta \Phi_j^* = -\alpha_j E_j \Delta T_j \quad (1.3)$$

где $\Phi_j^* = U_j - 2\nu_j V_j$, U_j — бигармонические функции, а V_j — термоупругие потенциалы перемещений, являющиеся частным решением уравнения

$$\Delta V_j = \alpha_j (1 + \nu_j) T_j \quad (1.4)$$

где T_j — разность температур пластин и среды.

Выражения компонентов напряжений и перемещений через функции Φ_j^* имеют вид

$$\sigma_{xx}^* = \frac{\sigma^2 \Phi_j^*}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy}^* = \frac{\sigma^2 \Phi_j^*}{\partial x^2}, \quad -\tau_{xy}^* = \frac{\sigma^2 \Phi_j^*}{\partial x \partial y} \quad (1.5)$$

$$u_j^* = \frac{1}{E_j} \int \frac{\partial^2 \Phi_j^*}{\partial y^2} dx - \frac{\nu_j}{E_j} \frac{\partial \Phi_j^*}{\partial x} + \alpha_j \int T_j dx \quad (1.6)$$

$$v_j^* = \frac{1}{E_j} \int \frac{\partial^2 \Phi_j^*}{\partial x^2} dy - \frac{\nu_j}{E_j} \frac{\partial \Phi_j^*}{\partial y} + \alpha_j \int T_j dy$$

Температурное поле от движущегося распределенного источника тепла в системе координат xOy удовлетворяет уравнению

$$\Delta T_j + p_j \frac{\partial T_j}{\partial x} - m_j^2 T_j = 0 \quad (1.7)$$

При идеальном тепловом контакте на границе раздела $y = 0$

$$T_1 = T_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} - \frac{q}{h} \left[\sqrt{\frac{k}{\pi}} \exp(-k(x-x_0)^2) \right] \quad (1.8)$$

Исчезающее на бесконечности температурное поле определяется формулой [7]

$$T_j = \frac{q}{2\pi h \lambda_j} \int_{-\infty}^{\infty} C(u) \exp(-|y|k_j(u)) \exp(-iux) du \quad (1.9)$$

$$C(u) = \frac{\exp(-u^2 Ak)}{k_1(u) + ik_2(u)} \exp(iu x_0), \quad \lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (1.10)$$

$$k_j(u) = \sqrt{u^2 + iup_j + m_j^2}, \quad \text{Re } k_j(u) > 0$$

где $p_j = \nu_j a_j$, λ_j , a_j — коэффициенты теплопроводности и теплопроводности, k — коэффициент сосредоточенности теплового потока источника тепла, h — толщина пластин, x_0 — смещение центра распределения источника от начала подвижной системы координат, $m_j^2 = 2p_j/h^2$, λ_j — коэффициент теплоотдачи.

При других тепловых условиях на границе раздела выражение для $C(u)$ принимает другой вид [8, 9].

Если частное решение уравнения (1.4) искать в виде

$$V_j = \int_{-\infty}^{\infty} C_j(u) \exp(-|y|k_j(u)) \exp(-iux) du \quad (1.11)$$

то для $C_j(u)$ получается следующее выражение:

$$C_j(u) = \frac{q\alpha_j(1+\nu_j)}{2\pi h_j} \frac{C(u)}{m_j^2 + iup_j} \quad (1.12)$$

С целью приведения рассматриваемой задачи термоупругости к первой основной задаче плоской теории упругости представим функции U_j в виде разности двух бигармонических функций

$$U_j = H_j - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^2} [A_j(u) + yB_j(u)] \exp(-|y||u|) \exp(-iux) du \quad (1.13)$$

где $A_j(u)$ и $B_j(u)$ — неизвестные функции,

$$\Delta \Delta H_j = 0 \quad (1.14)$$

Из требования удовлетворения функции H_j граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial y} \\ \frac{1}{E_1} \int \frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} dx - \frac{\nu_1}{E_1} \frac{\partial H_1}{\partial x} = \frac{1}{E_2} \int \frac{\partial^2 H_2}{\partial y^2} dx - \frac{\nu_2}{E_2} \frac{\partial H_2}{\partial x} + F(x) \quad (1.15) \\ \frac{1}{E_1} \int \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} dy - \frac{\nu_1}{E_1} \frac{\partial H_1}{\partial y} = \frac{1}{E_2} \int \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} dy - \frac{\nu_2}{E_2} \frac{\partial H_2}{\partial y} \end{aligned}$$

на L для определения неизвестных функций $A_j(u)$ и $B_j(u)$ с помощью (1.1), (1.3), (1.5), (1.6), (1.13) получается система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} A_1(u) - A_2(u) = \frac{qC(u)}{2\pi h_1} \left[\frac{\alpha_2 E_2}{m_2^2 + iup_2} - \frac{\alpha_1 E_1}{m_1^2 + iup_1} \right] u^2 \\ - |u| A_1(u) + B_1(u) - |u| A_2(u) - B_2(u) = \\ = \frac{qC(u)}{2\pi h_1} \left[\frac{\alpha_2 E_2 k_2(u)}{m_2^2 + iup_2} + \frac{\alpha_1 E_1 k_1(u)}{m_1^2 + iup_1} \right] u^2 \quad (1.16) \\ - \frac{1+\nu_1}{E_1} u^2 A_1(u) + \frac{2}{E_1} |u| B_1(u) + \frac{1+\nu_2}{E_2} u^2 A_2(u) + \frac{2}{E_2} |u| B_2(u) = \\ = - \frac{qC(u)}{2\pi h_1} \left[\frac{\alpha_2(1+\nu_2)}{m_2^2 + iup_2} - \frac{\alpha_1(1+\nu_1)}{m_1^2 + iup_1} \right] u^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1+\nu_1}{E_1} |u| A_1(u) + \frac{1-\nu_1}{E_1} B_1(u) + \frac{1+\nu_2}{E_2} |u| A_2(u) - \frac{1-\nu_2}{E_2} B_2(u) = \\ & = -\frac{qC(u)}{2\pi h \lambda_1} \left[\frac{a_2(1+\nu_2)k_2(u)}{m_2^2 + iup_2} + \frac{a_1(1+\nu_1)k_1(u)}{m_1^2 + iup_1} \right] u^2 \end{aligned}$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} A_1(u) = \frac{qC(u)}{2\pi h \lambda_1} \left[\mu_{12} \alpha_1 \frac{(2-d_2)u^2 - 2|u|k_2(u)}{m_2^2 + iup_1} + \right. \\ \left. + 2\mu_{21} \alpha_2 \frac{u^2 - |u|k_2(u)}{m_2^2 + iup_2} \right] \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$A_2(u) = A_1(u) - \frac{qC(u)}{2\pi h \lambda_1} \left[\frac{a_2 E_2}{m_2^2 + iup_2} - \frac{a_1 E_1}{m_1^2 + iup_1} \right] u^2$$

$$B_1(u) = \frac{qC(u)}{2\pi h \lambda_1} \mu_{12} \alpha_1 (4-d_2) \frac{|u| - k_1(u)}{m_1^2 + iup_1} u^2$$

$$B_2(u) = \frac{qC(u)}{2\pi h \lambda_1} \frac{\mu_{12} \alpha_2 E_2}{E_1 (4-d_2)^{-1}} \frac{|u| - k_2(u)}{m_2^2 + iup_2} u^2$$

где

$$\mu_{12} = \frac{2\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2 \alpha_1}, \quad \mu_{21} = \frac{2\mu_1 \mu_2}{\mu_2 + \mu_1 \alpha_2}, \quad \alpha_1 = \frac{3-\nu_1}{1+\nu_1}, \quad d_2 = \frac{E_1}{\mu_{12}} \quad (1.18)$$

Граничные условия (1.2) с учетом (1.13) принимают вид

$$\frac{\partial^2 H_j}{\partial x^2} = \frac{q\mu_{12} \alpha_2}{\pi h \lambda_1} p(x), \quad \frac{\partial^2 H_j}{\partial x \partial y} = \frac{q\mu_{21} \alpha_1}{\pi h \lambda_1} q(x) \quad \text{на } L' \quad (1.19)$$

где

$$p(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} C(u) \left[\mu_* \frac{|u| - k_1(u)}{m_1^2 + iup_1} + \alpha \frac{|u| - k_2(u)}{m_2^2 + iup_2} \right] |u| \exp(-iux) du$$

$$q(x) = -i \int_{-\infty}^{\infty} C(u) \left[\mu_* \frac{|u| - k_1(u)}{m_1^2 + iup_1} + \alpha \frac{|u| - k_2(u)}{m_2^2 + iup_2} \right] u \exp(-iux) du \quad (1.20)$$

$$\mu_* = \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}} = \frac{\mu_2 + \mu_1 \alpha_2}{\mu_1 + \mu_2 \alpha_1}, \quad \alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

Таким образом, нахождение функций напряжения Φ_j^* для рассматриваемой задачи термоупругости приведено к определению функций напряжения H_j соответствующей первой основной задачи плоской теории упругости, которые определяются из (1.14), (1.15) и (1.19). Несколько задач такого типа были рассмотрены Вильямсом [10], Черепановым [11], Эрдганом [4, 12] и другими авторами.

Краевая задача (1.14), (1.15) и (1.19) решается методом Колосова-Мухелишвили. Напряжения и перемещения записываются через комплексные функции напряжений в виде [13]

$$\begin{aligned} \sigma_{xj} + \tau_{xy} &= 4 \operatorname{Re} \Phi_j(z) \\ \tau_{xy} - i\tau_{xy} &= \Phi_j(z) - \overline{\Phi_j(z)} + z\overline{\Phi_j(z)} + \overline{\Psi_j(z)} \\ 2\mu_j(u_j + iv_j) &= x_j\overline{\Phi_j(z)} - z\overline{\Phi_j(z)} - \overline{\Psi_j(z)} \\ \Phi_j(z) &= \varphi_j(z), \quad \Psi_j(z) = \psi_j(z) \end{aligned} \quad (1.21)$$

В уравнениях (1.21) голоморфные функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ определены в S^+ , а $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ в S^- . При аналитическом продолжении $\Phi_1(z)$ в S^- , а $\Phi_2(z)$ в S^+ через ненагруженные части границы можно положить [13]

$$\Psi_j(z) = -\Phi_j(z) - \overline{\Phi_j(z)} - z\overline{\Phi_j(z)} \quad (1.22)$$

Из уравнений (1.21) и (1.22) можно теперь получить

$$\sigma_{xj} - i\tau_{xy} = \Phi_j(z) - \Phi_j(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_j(z)} \quad (1.23)$$

$$2\mu_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + i \frac{\partial v_j}{\partial x} \right) = x_j\overline{\Phi_j(z)} + \Phi_j(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_j(z)} \quad (1.24)$$

Граничные условия (1.15) и (1.19) запишутся в виде

$$\sigma_{y1} - i\tau_{xy1} = \sigma_{y2} - i\tau_{xy2} \quad \text{на } L + L' \quad (1.25)$$

$$\sigma_{x1} - i\tau_{xy1} = \sigma_{y2} - i\tau_{xy2} = \frac{q_1 h_1 x_1}{-h_1} [p(x) - iq(x)] \quad \text{на } L' \quad (1.26)$$

$$u_1 + iv_1 = u_2 + iv_2 + f(x) + i\omega x \quad \text{на } L \quad (1.27)$$

где ω — неизвестный параметр, соответствующий жесткому повороту на бесконечности.

На основании (1.23) и (1.25) на всей действительной оси можно записать

$$\Phi_1^-(x) + \Phi_2^-(x) = \Phi_1^+(x) + \Phi_2^+(x) \quad \text{на } L + L' \quad (1.28)$$

Уравнение (1.28) показывает, что функция $\Phi_1(z) + \Phi_2(z)$ голоморфна во всей плоскости, включая действительную ось. Так как напряжения исчезают на бесконечности, то при больших значениях $|z|$ получается

$$\Phi_j(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (1.29)$$

Из уравнения (1.29) видно, что функции $\Phi_j(z)$ исчезают на бесконечности, поэтому во всей плоскости

$$\Phi_1(z) + \Phi_2(z) = 0 \quad (1.30)$$

Дифференцируя уравнение (1.27) и используя (1.24), можно получить

$$\frac{x_1}{2\mu_1} \Phi_1^+(x) + \frac{1}{2\mu_1} \Phi_1^-(x) = \frac{x_2}{2\mu_2} \Phi_2^-(x) + \frac{1}{2\mu_2} \Phi_2^+(x) + f(x) + i\omega \text{ на } L \quad (1.31)$$

где $f(x) = F'(x)$. (1.32)

Условие (1.26) на основании (1.28) принимает следующий вид:

$$\Phi_1^-(x) - \Phi_1^+(x) = \Phi_2^-(x) - \Phi_2^+(x) = \frac{q^{11} \alpha_1 \alpha_2}{\pi h \lambda_1} [p(x) - iq(x)] \text{ на } L' \quad (1.33)$$

С помощью уравнения (1.30) условия (1.31) и (1.33) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(x) + \mu_* \Phi_1^-(x) &= \mu_{12} [f(x) + i\omega] \text{ на } L \\ \Phi_1^-(x) - \Phi_1^+(x) &= \frac{q^{11} \alpha_1 \alpha_2}{\pi h \lambda_1} [p(x) - iq(x)] \text{ на } L' \end{aligned} \quad (1.34)$$

Следовательно, задача сводится к решению неоднородной задачи Гильберта, которая подробно рассмотрена в [13].

Общее решение задачи (1.34) имеет следующий вид:

$$\frac{\Phi_1(z)}{X_0(z)} = \frac{\mu_{12}}{2\pi i} \int_L \frac{f(x) + i\omega}{X_0^+(x)(x-z)} dx + \frac{q^{11} \alpha_1 \alpha_2}{2\pi^2 h \lambda_1 i} \int_{L'} \frac{p(x) - iq(x)}{X_0^+(x)(x-z)} dx \quad (1.35)$$

где

$$X_0(z) = \frac{1}{V} \frac{z + s}{z(z+s)}, \quad 2\pi\gamma = \ln \mu_* \quad (1.36)$$

Параметр ω определяется из условия равенства нулю моментов всех сил, приложенных к границе одной из пластин, относительно начала координат

$$\begin{aligned} \int_L \sigma_{xy}^*(x, 0) x dx &= \int_L \left[\frac{1 + \mu_*}{\mu_*} \operatorname{Re} \Phi_1^+(x) - \mu_{21} f(x) \right] x dx = \\ &= - \frac{q^{11} \alpha_1 \alpha_2}{\pi h \lambda_1} \int_{L'} p(x) x dx \end{aligned} \quad (1.37)$$

Условие для определения $f(x)$ можно получить, исходя из следующих соображений. Разность продольных деформаций, при которой происходит соединение, зависит от теплофизических и упругих свойств соединяемых материалов, напряженно-деформированного состояния всей системы, от процессов, происходящих в некотором участке в зоне соединения, где имеет место неполный механический контакт и т. д. В самом общем случае эту

разность можно представить в виде функционала, зависящего от упомянутых свойств и параметров

$$f(0) = \int_{S^+ + S^-} \Omega(\varepsilon_{ij}^*, \varepsilon_{ij}^*, T_j, E_j, \nu_j, \dots) dx dy \quad (1.38)$$

Таким образом, при известном виде функции Ω система уравнений (1.21), (1.35)—(1.38) полностью определяет напряженно-деформированное состояние составной пластины.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ [(-1)^j 2|u| B_j(u) - u^2 \langle A_j(u) + y B_j(u) \rangle] \times \right. \\ \times \frac{\exp(-|y||u|)}{u^2} - \frac{q_{2j} E_j}{2\pi h \lambda_1} \frac{C(u) k_j(u)}{m_j^2 + i u p_j} \exp(-|y| k_j(u)) \Big| \exp(-iux) du \\ \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - i \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ [B_j(u) + (-1)^j |u| \langle A_j(u) + y B_j(u) \rangle] \times \right. \\ \times \frac{\exp(-|y||u|)}{u} + (-1)^j \frac{q_{2j} E_j}{2\pi h \lambda_1} \frac{C(u) u k_j(u)}{m_j^2 + i u p_j} \times \\ \times \exp(-|y| k_j(u)) \Big| \exp(-iux) du \\ \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ [A_j(u) + y B_j(u)] \exp(-|y||u|) + \right. \\ \left. + \frac{q_{2j} E_j}{2\pi h \lambda_1} \frac{C(u) u^2}{m_j^2 + i u p_j} \exp(-|y| k_j(u)) \right\} \exp(-iux) du \end{aligned} \quad (1.39)$$

Явное выражение для функции Ω в общем случае написать трудно. Однако, в зависимости от способа соединения, функция Ω может принимать достаточно простой вид. Например, в процессе пайки $f(0)$ можно определить как разность средних продольных деформаций границ пластины в участке неполного механического контакта

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{b} \int_0^a [\varepsilon_{21}^*(x, 0) - \varepsilon_{22}^*(x, 0)] dx = \\ &= \frac{1}{b} \int_0^a \left\{ \left(\frac{1}{p_{21}} + \frac{1}{p_{12}} \right) \operatorname{Re} \Phi_1^+(x) - \frac{p(x)}{p_{21}} \right\} dx \end{aligned} \quad (1.40)$$

где величина δ зависит от вышеуказанных факторов и может быть определена, в частности, экспериментально.

Для этого же процесса можно использовать и более простое условие

$$f(0) = [\varepsilon_{11}^*(x, 0) - \varepsilon_{22}^*(x, 0)]|_{t=0} \quad (1.41)$$

В обоих случаях (1.40) и (1.41) с учетом (1.37) в системе координат $x, 0, y, (x_1 = x + s, y_1 = y)$ получается интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $f(x)$.

Например, из условий (1.37) и (1.41) получается

$$f_1(s) - \frac{1 + \mu_*}{2\pi\mu_*} \int_0^s K(s, x_1) f_1(x_1) dx_1 = M(s) \quad (1.42)$$

где

$$K(s, x_1) = N_1(s, x_1) \cos \tau_2 + \frac{N_2(s)}{2} [(\mu_* - 1)^2 (x_1 - s) + 2\sqrt{\mu_* x_1 (s - x_1)}]$$

$$f_1(x_1) = \frac{-\varepsilon^2 h_1 \mu_*}{q_2 (1 + \mu_*)} f(x_1 - s), \quad f(x_1 - s) = f(x) \quad (1.43)$$

$$N_1(s, x_1) = \frac{\sqrt{\mu_* x_1 (s - x_1)}}{(x_1 - s - x_0) \sqrt{x_0 (x_0 + s)}} \quad \tau_2 = \gamma \ln \frac{x_0 x_1}{(x_0 + s)(s - x_1)}$$

$$N_2(s) = \frac{(x_0 + s/2) \sin[\gamma \ln(1 + s/x_0)] - \gamma s \cos[\gamma \ln(1 + s/x_0)]}{0,125 \cdot s^2 (1 + 4\gamma^2) \sqrt{x_0 (x_0 + s)}}$$

$$M(s) = M_1(s) - M_2(s) + M_3(s) - M_4(s) + M_5(s) - M_6(s)$$

$$2M_1(s) = \int_{-\infty}^{-s} [N_1(s, x) \sin \tau_1 - N_2(s) (x + \sqrt{x(x+s)} \cos \tau_1)] p(x) dx$$

$$2M_2(s) = \int_0^{\infty} [N_1(s, x) \sin \tau_1 + N_2(s) (x - \sqrt{x(x+s)} \cos \tau_1)] p(x) dx$$

$$2M_3(s) = \int_{-\infty}^{-s} [N_3(s, x) \cos \tau_1 + N_2(s) \sqrt{x(x+s)} \sin \tau_1] q(x) dx$$

$$2M_4(s) = \int_0^{\infty} [N_3(s, x) \cos \tau_1 + N_2(s) \sqrt{x(x+s)} \sin \tau_1] q(x) dx$$

$$2M_5(s) = \frac{1 - \mu_*}{1 + \mu_*} \pi p(x_0)$$

$$2M_0(s) = \int_{-\infty}^{\infty} W(u) [1 - \exp(-isu)(1-isu)] \frac{du}{u^3}$$

$$N_1(s) = \frac{\sqrt{x(x+s)}}{(x-x_0)\sqrt{x_0(x_0+s)}}, \quad \tau_1 = \gamma \ln \frac{x_0(x+s)}{x(x_0+s)}$$

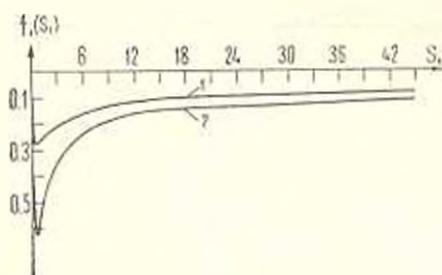
$$W(u) = C(u) \left[\frac{|u| - k_1(u)}{m_1^2 + iup_1} + \frac{|u| - k_2(u)}{m_2^2 + iup_2} \right] |u|$$

В случае соединения пластин с одинаковыми теплофизическими и упругими свойствами из уравнения (1.42) получится $f_1(s) = 0$. Решение уравнения (1.42) при $s \rightarrow 0$ имеет вид $f_1(s) = z_1^{(1)}(x_0, 0) - z_1^{(2)}(x_0, 0)$, где $z_1^{(1)}(x_0, 0)$ — продольные деформации границ несоединенных пластин.

Легко видеть, что ядро интегрального уравнения и свободный член — непрерывные функции своих аргументов. Поэтому уравнение (1.42) имеет единственное решение в классе непрерывных функций [14].

Для приближенного решения уравнения (1.42) был применен метод прямой замены интеграла, входящего в левую часть уравнения, конечной суммой [15]. Расчеты проводились с относительной точностью $\epsilon = 0,001$.

Результаты численных расчетов представлены в виде графиков. На фиг. 2 приведены графики $f_1(s_1)$ в зависимости от $s_1 = s/x_0$. Кривая 1



Фиг. 2

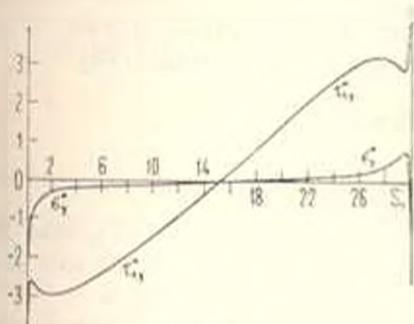
соответствует случаю соединения пластин из сталей, отличающихся только коэффициентами линейного теплового расширения ($\alpha = \alpha_2/\alpha_1 = 2$). Для соединения сталь-алюминий получена кривая 2.

Кривые распределения контактных напряжений σ_y^* и τ_{xy}^* при тех же сочетаниях соединяемых материалов показаны на фиг. 3 и 4 соответственно.

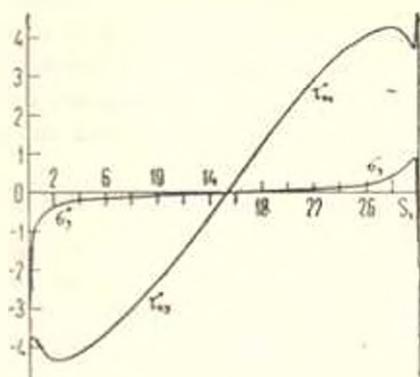
$$\sigma_y^* = A \sigma_{y1}^* \left(\frac{x_1 - s}{x_0}, 0 \right), \quad \tau_{xy}^* = A \tau_{xy1}^* \left(\frac{x_1 - s}{x_0}, 0 \right), \quad A = \frac{\pi^2 h_1^2 \nu_2}{q \alpha_1 (1 + \nu_2) E_1}$$

Из приведенных кривых видно, что при прочих равных условиях различие в тепловых и упругих свойствах указанных материалов приводит к

повышению общего уровня $f_1(s_1)$, σ_y^* и τ_{xy}^* , но изменения в качественной картине при этом не обнаружено.



Фиг. 3



Фиг. 4

Автор благодарит А. С. Хачикяна за полезное обсуждение при постановке задачи и ее решении.

ԵՐԿՈՒ ՏԱՐԱՍԻԷ ԹԻՔԵԿՆԵՐԻ ԼԱՐՎԱՍԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԸ ՏԱՐԻՎՈՂ
ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԱՂՅՈՒՐՈՎ ԼՐԱՆՑ ՄԻԱՑՄԱՆ ՊՐՈՑԵՍՈՒՄ

Ա. Մ. ՍԱՐԳՅԱՆ

Ո. Վ Փ Ո Փ Ո Վ

Գծային չկապակցված ջերմատաճգականություն տեսություն սահմաններում դիտարկված է երկու տարատեսի թիթեղների միացման թվադիստատիկ խընդիրը. շերմային աղբյուրը շարժվում է թիթեղների բաժանման դժի երկարությամբ: Աղբյուրից նետո թիթեղների միջև առաջանում է լրիվ մեխանիկական կոնտակտի մեծացող սեղանա թիթեղների եզրերի ընդերկայնական դիֆորմացիաների նախապես անհայտ տարրերությամբ, որի որոշման համար ստացված է վոլտերրի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարում:

Ինքված են կոնտակտային շարումների բաշխման գրաֆիկները:

STRESS STATE OF TWO DISSIMILAR PLATES DURING THEIR JOINING BY MOVING HEAT SOURCE

A. S. SARGSIAN

S u m m a r y

Within the bounds of linear unconnected thermoelasticity the quasi-static problem on the joining of two thin dissimilar plates by moving heat source is considered. The heat source moves along the

boundary of division of joining materials. Beyond the heat source beginning from some point of the boundary of division the zone of full mechanic contact appears between the plates when the difference of boundary longitudinal strains of the plates is unknown beforehand.

The second type of Walter integral equation is obtained for the determination of the unknown difference of longitudinal strains.

The distribution of contact stresses are shown graphically.

ЛИТЕРАТУРА

1. Махненко В. И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. Киев: Наукова думка, 1976.
2. Винокуров В. А. Сварочные деформации и напряжения. М.: Машиностроение, 1968.
3. Kamtekar A. G. The calculation of welding residual stresses in thin steel plates. International Journal of mechanical sciences. 1978, vol. 20, No. 4.
4. Киселев С. И. Соединение труб из разнородных металлов. М.: Машиностроение, 1981.
5. Эрдоган Ф. Распределение напряжений в связанных разнородных материалах с трещинами. ПМ. (Тр. ASME, ser. E), 1965, № 2.
6. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964.
7. Саргсян А. М. Температурное поле при сварке встык разнородных пластин в условиях теплоотдачи. Физика и химия обработки материалов, 1975, № 5.
8. Хачикян А. С., Саргсян А. М. К расчету температурного поля в свариваемых встык разнородных пластинках сдвинутым источником тепла при неидеальном тепловом контакте между ними. Физика и химия обработки материалов, 1979, № 2.
9. Чобанян К. С., Саргсян А. М., Хачикян А. С. Температурное поле в свариваемых встык разнородных пластинках при отсутствии теплового контакта впереди источника. Физика и химия обработки материалов, 1981, № 5.
10. Williams M. L. The stresses around Fault or Crack in dissimilar media. Bulletin of the Seismological Society of America, 1959, vol. 49, p. 199.
11. Черепанов Г. П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и Машиностроение, 1962, № 1.
12. Эрдоган Ф. Распределение напряжений в неоднородной упругой пластинке, имеющей трещину. ПМ (Тр. ASME, ser. E), 1963, № 2.
13. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
14. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
15. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 2. М.: Физматлит, 1962.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
7. VI. 1982

КОНТАКТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА

ВАТУЛЯН А. О., ОВСЕПЯН В. В., ПРЯХИՆԱ Օ. Ը.

В настоящее время хорошо изучены динамические контактные задачи для изотропных полуограниченных тел типа слоя и бесконечного цилиндра [2—4]. Подобные задачи для анизотропных тел практически не исследованы.

В данной работе изучена динамическая контактная задача для бесконечного анизотропного цилиндра.

1. Рассматривается осесимметричная задача о колебаниях ортотропного неограниченного цилиндра радиуса d под действием колеблющегося штампа ширины $2l$, жестко сцепленного с цилиндром.

Полагая в этом случае, что $U_0 = 0$ и U_r, U_z не зависят от θ , из общих определяющих соотношений для ортотропного материала [1] получим

$$\begin{aligned} \sigma_r &= A_{11}\epsilon_r + A_{22}\epsilon_\theta + A_{13}\epsilon_z \\ \sigma_\theta &= A_{12}\epsilon_r + A_{22}\epsilon_\theta + A_{23}\epsilon_z \\ \sigma_z &= A_{13}\epsilon_r + A_{23}\epsilon_\theta + A_{33}\epsilon_z \\ \tau_{rz} &= A_{30}\gamma_{rz} \\ \tau_{\theta z} &= \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad \tau_{\theta z} = \tau_{\theta r} = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где A_{ij} — упругие постоянные материала.

Граничные условия зададим в форме

$$\begin{aligned} \tau_{rz} = \sigma_r = 0 \quad |z| > l \\ r = d \quad u_r = f_1(z) e^{-i\omega t} \\ u_z = f_2(z) e^{-i\omega t} \quad |z| \leq l \end{aligned} \quad (1.3)$$

Будем искать установившийся режим колебаний и перемещения представим в виде:

$$\begin{aligned}
 u_r &= u_r^0(r, z) \exp(-i\omega t) \\
 u_z &= u_z^0(r, z) \exp(-i\omega t)
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

Подставляя соотношения (1.1) и (1.2) в уравнения движения в напряжениях в цилиндрической системе координат и учитывая (1.4), получим уравнения движения для амплитуд перемещений u_r^0, u_z^0

$$\begin{aligned}
 &A_{11} \frac{\partial^2 u_r^0}{\partial r^2} + A_{11} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^0}{\partial r} - A_{22} \frac{1}{r^2} u_r^0 + (A_{13} + A_{33}) \times \\
 &\times \frac{\partial^2 u_r^0}{\partial r \partial z} + A_{33} \frac{\partial^2 u_r^0}{\partial z^2} + (A_{13} - A_{23}) \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^0}{\partial z} = -\rho \omega^2 u_r^0 \\
 &A_{33} \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial r^2} + A_{33} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^0}{\partial r} + (A_{13} + A_{33}) \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial r \partial z} + \\
 &+ (A_{23} + A_{33}) \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^0}{\partial z} + A_{33} \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial z^2} = -\rho \omega^2 u_z^0
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

Замыкают постановку задачи об установившихся колебаниях условия излучения на бесконечности. При их выводе используется принцип предельного поглощения [2], для чего в (1.5) достаточно положить $\omega^2 = \omega_0^2 + i\omega \varepsilon$, построить решение задачи, убывающее на бесконечности и в полученном решении осуществлять равномерный предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Следем решение поставленной краевой задачи к системе интегральных уравнений.

Для этого рассмотрим вспомогательную задачу, которая описывается уравнением (1.5) и граничными условиями вида

$$\begin{aligned}
 r = d \quad \sigma_r^0 &= \sigma_r^*(z) \\
 \sigma_{rz}^0 &= \sigma_{rz}^*(z)
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

Для решения вспомогательной задачи применим интегральное преобразование Фурье по z к уравнениям (1.5) и к граничным условиям (1.6)

$$\begin{aligned}
 &A_{11} \frac{d^2 \bar{u}_r}{dr^2} + A_{11} \frac{1}{r} \frac{d \bar{u}_r}{dr} - A_{22} \frac{1}{r^2} \bar{u}_r - i\alpha (A_{13} + A_{33}) \times \\
 &\times \frac{d \bar{u}_r}{dr} - \alpha^2 A_{33} \bar{u}_r - i\alpha (A_{13} - A_{23}) \frac{1}{r} \bar{u}_r + \rho \omega^2 \bar{u}_r = 0 \\
 &A_{33} \frac{d^2 \bar{u}_z}{dr^2} + A_{33} \frac{1}{r} \frac{d \bar{u}_z}{dr} - i\alpha (A_{13} + A_{33}) \frac{d \bar{u}_r}{dr} - \\
 &- i\alpha (A_{23} + A_{33}) \frac{1}{r} \bar{u}_r - \alpha^2 A_{33} \bar{u}_z + \rho \omega^2 \bar{u}_z = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

$$A_{11} \frac{d\bar{u}_r}{dr} + A_{12} \frac{1}{r} \bar{u}_r - i\alpha A_{13} \bar{u}_z \Big|_{r=d} = \bar{\sigma}_r^*$$

$$A_{33} \left(\frac{d\bar{u}_z}{dr} - i\alpha \bar{u}_r \right) \Big|_{r=d} = \bar{\tau}_z^*$$
(1.8)

где \bar{u}_r , \bar{u}_z — преобразования Фурье соответственно u_r^0 , u_z^0 .

2. Соотношения (1.1) необходимо дополнить условиями, вытекающими из того, что цилиндр сплошной [1], то есть

$$A_{11} = A_{22}, \quad A_{13} = A_{23}$$

после чего соответствующая краевая задача примет вид (2.1), (2.2)

$$A_{11} \left(\frac{d^2 \bar{u}_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{u}_r}{dr} - \frac{\bar{u}_r}{r^2} \right) + (\rho \omega^2 - A_{33} \alpha^2) \bar{u}_r - i\alpha (A_{13} + A_{33}) \frac{d\bar{u}_z}{dr} = 0$$
(2.1)

$$A_{33} \left(\frac{d^2 \bar{u}_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{u}_z}{dr} \right) + (\rho \omega^2 - A_{33} \alpha^2) \bar{u}_z - i\alpha (A_{13} + A_{33}) \left(\frac{d\bar{u}_r}{dr} + \frac{\bar{u}_r}{r} \right) = 0$$

$$A_{11} \frac{d\bar{u}_r}{dr} + A_{12} \frac{1}{r} \bar{u}_r - i\alpha A_{13} \bar{u}_z \Big|_{r=d} = \bar{\sigma}_r^*$$
(2.2)

$$A_{33} \left(\frac{d\bar{u}_z}{dr} - i\alpha \bar{u}_r \right) \Big|_{r=d} = \bar{\tau}_z^*$$

Решив эту задачу и применяя обратное преобразование Фурье, получим окончательный вид для перемещений u_r^0 и u_z^0 при $r = d$

$$u_r^0 = \frac{\gamma_2 + \gamma_3}{A_{33} \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (K_{11} \bar{\sigma}_r^* + iK_{12} \bar{\tau}_z^*) \exp(-iux) du$$
(2.3)

$$u_z^0 = \frac{\gamma_2 + i\gamma_3}{A_{33} \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (iK_{21} \bar{\sigma}_r^* + K_{22} \bar{\tau}_z^*) \exp(-iux) du$$

причем

$$K_{11} = \gamma_1 \gamma_2 J_1(\alpha_1) J_1(\alpha_2) \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) K_0^{-2}$$

$$K_{12} = -K_{21} = \{ \alpha_1 J_0(\alpha_2) J_1(\alpha_1) [\gamma_1 \gamma_2 \alpha_2^2 + \gamma_3 (x^2 - \gamma_2 u^2)] - \alpha_2 J_0(\alpha_1) J_1(\alpha_2) [\gamma_1 \gamma_2 \alpha_1^2 + \gamma_3 (x^2 - \gamma_2 u^2)] \} u K_0^{-1}$$

$$K_{22} = [\alpha_2 J_1(\alpha_2) J_0(\alpha_1) (\gamma_4 - \gamma_1) (\gamma_1 \alpha_1^2 - x^2 + \gamma_2 u^2) - \alpha_1 J_1(\alpha_1) J_0(\alpha_2) \times$$

$$\times (\gamma_4 - \gamma_1) (\gamma_1 \alpha_2^2 - x^2 + \gamma_2 u^2) - \gamma_1 (\gamma_2 u^2 - x^2) J_0(\alpha_1) J_0(\alpha_2) (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)] K_0^{-1}$$

$$K_0 = \alpha_2 J_0(\alpha_1) J_1(\alpha_2) [\gamma_1 \gamma_2 \alpha_1^2 + \gamma_3 (x^2 - \gamma_2 u^2)] + \gamma_1 (\gamma_2 \alpha_2^2 - \gamma_2 (x^2 + \gamma_3 u^2)) -$$

$$- \alpha_1 J_0(\alpha_2) J_1(\alpha_1) [\gamma_1 \gamma_2 \alpha_2^2 + \gamma_3 (x^2 - \gamma_2 u^2)] + \gamma_1 \gamma_2 (\gamma_4 - \gamma_1) (\gamma_2 + \gamma_3) J_1(\alpha_1) J_1(\alpha_2) \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)$$
(2.4)

Здесь $J_n(t)$ — функции Бесселя первого рода и введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 &= \gamma_1^2 d^2, & \alpha_2^2 &= \gamma_2^2 d^2, & u^2 &= z^2 d^2 \\ x^2 &= \frac{\gamma_{22}^2 d^2}{A_{22}}, & \gamma_1 &= \frac{A_{11}}{A_{22}}, & \gamma_2 &= \frac{A_{22}}{A_{11}} \\ \gamma_{12} &= \frac{A_{12}}{A_{11}}, & \gamma_{21} &= \frac{A_{12}}{A_{22}}, & x &= \frac{z}{d} \end{aligned} \quad (2.5)$$

а α_k ($k = 1, 2$), ($\text{Im } \alpha_k > 0$) есть корни следующего характеристического уравнения

$$\gamma_1 \gamma_2 \alpha^4 - [(\gamma_1 + \gamma_2) \alpha^2 + (\gamma_1 + 2\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_1) u^2] \alpha^2 + (\alpha^2 - \gamma_2 u^2)(\alpha^2 - u^2) = 0 \quad (2.6)$$

Если $d \gg 1$, то уравнение $K_1 = 0$ вырождается в уравнение Рэлея для анизотропного полупространства (при $\alpha_1^2, \alpha_2^2 < 0$).

Используя представление (2.3) и учитывая принцип предельного поглощения, получим систему интегральных уравнений первого рода с разностными ядрами относительно неизвестных контактных напряжений следующего вида:

$$\int_{-a}^a \underline{k}(\xi - x) \underline{q}(\xi) d\xi = 2\pi \underline{f}(x) \quad |x| \leq a \quad (2.7)$$

$$\underline{k}(t) = \int_{\sigma} \underline{K}(u) \exp(iut) du \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} \underline{K} &= \begin{vmatrix} K_{11} & iK_{12} \\ -iK_{12} & K_{22} \end{vmatrix}, & \underline{f} &= \frac{1}{d} \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \end{vmatrix}, & a &= \frac{l}{d} \\ \underline{q} &= \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{vmatrix}, & q_1 &= \frac{\gamma_2 + \gamma_3}{A_{33}} \alpha_1, & q_2 &= \frac{\gamma_2 + \gamma_3}{A_{33}} \alpha_2 \end{aligned}$$

Здесь контур σ выбирается, как указано в [2]. Общая теория систем уравнений вида (2.7) подробно освещена в [2].

Решение системы (2.7) строится методом фиктивного поглощения [4] с некоторой модификацией в части факторизации матрицы $\underline{S}(u)$ ($\underline{K}(u) = \underline{S}(u) \underline{\Pi}(u)$, $\underline{\Pi}(u) = I + O(u^{-\varepsilon})$, $u \rightarrow \infty$, $\varepsilon > 0$, I — единичная матрица), которая в данном случае не вырождается при $|u| \rightarrow \infty$ в функционально-коммутирующую, а именно:

$$\begin{aligned} s_{11} &= C_1 |u|^{-1} (1 + O(u^{-1})) \\ s_{22} &= C_2 |u|^{-1} (1 + O(u^{-1})) \\ s_{12} &= -s_{21} = iB |u|^{-1} (1 + O(u^{-1})) \text{sign } u \end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{\sqrt{-\frac{\gamma_3 - \gamma_2(\gamma_3 + 2\gamma_2)}{\gamma_2} + \frac{2}{\sqrt{\gamma_1}}}}{\gamma_1\gamma_2 - \gamma_3[\gamma_1 - \gamma_3(\gamma_3 + 2\gamma_2)] + \gamma_2\gamma_3^2}$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{-\frac{\gamma_2[\gamma_1 - \gamma_3(\gamma_3 + 2\gamma_2)]}{\gamma_2} + 2\gamma_1^2}}{\gamma_1\gamma_2 - \gamma_3[\gamma_1 - \gamma_3(\gamma_3 + 2\gamma_2)] + \gamma_2\gamma_3^2}$$

$$B = \frac{\gamma_3 - \sqrt{\gamma_1}}{\gamma_1\gamma_2 - \gamma_3[\gamma_1 - \gamma_3(\gamma_3 + 2\gamma_2)] + \gamma_2\gamma_3^2}$$

Введем в рассмотрение диагональные матрицы Λ_- и Λ_+

$$\Lambda_- = \begin{vmatrix} C_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & C_2^{-1/2} \end{vmatrix}, \quad \Lambda_+ = \begin{vmatrix} C_2^{1/2} & 0 \\ 0 & C_1^{1/2} \end{vmatrix}$$

Тогда матрица $S^* = \Lambda_- S \Lambda_+$ вырождается в функционально-коммутативную на бесконечности и для факторизации матрицы в методе фиктивного поглощения достаточно использовать формулы из [4], полагая $c = \sqrt{C_1 C_2}$. После чего можно легко факторизовать матрицу $S(u)$, элементы которой имеют вид

$$s_{11} = C_2^{-1/2} C_1^{1/2} \beta^2 (u^2 + b^2)^{-1/2} \operatorname{ch} 2\alpha\varphi$$

$$s_{22} = C_1^{-1/2} C_2^{1/2} \beta^2 (u^2 + b^2)^{-1/2} \operatorname{ch} 2\alpha\varphi$$

$$s_{12} = -s_{21} = i\beta^2 (u^2 + b^2)^{-1/2} \operatorname{sh} 2\alpha\varphi$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{u}{b}, \quad \alpha = \pi^{-1} \operatorname{arctg} \frac{B}{\sqrt{C_1 C_2}}, \quad \beta^2 = C_1 C_2 - B, \quad b > 0$$

Запишем окончательный вид факторизации матрицы $S(u)$

$$S(u) = C_-(u) D_-(u) = M_-(u) N_-(u)$$

где элементы матриц $C_-(u)$, $D_-(u)$, $M_-(u)$, $N_-(u)$ имеют вид

$$\begin{aligned} d_{11} &= C_1^{-1/2} (b - iu)^{-1}, & 2c_{11}\beta^{-2} &= C_1^{1/2} (b + iu)^{-1} \\ -id_{22} &= C_1^{-1/2} (b - iu)^{-1}, & -2ic_{12}\beta^{-2} &= C_1^{1/2} (b + iu)^{-1} \\ id_{21} &= C_1^{-1/2} (b - iu)^{-1}, & 2ic_{21}\beta^{-2} &= C_2^{1/2} (b + iu)^{-1} \\ -d_{22} &= C_1^{-1/2} (b - iu)^{-1}, & -2c_{22}\beta^{-2} &= C_2^{1/2} (b + iu)^{-1} \\ 2m_{11}\beta^{-2} &= C_1^{1/2} (b - iu)^{-1}, & n_{11} &= C_2^{-1/2} (b + iu)^{-1} \\ -2im_{12}\beta^{-2} &= C_1^{1/2} (b - iu)^{-1}, & in_{12} &= C_1^{-1/2} (b + iu)^{-1} \\ -2im_{21}\beta^{-2} &= C_2^{1/2} (b - iu)^{-1}, & in_{21} &= C_2^{-1/2} (b + iu)^{-1} \\ 2m_{22}\beta^{-2} &= C_2^{1/2} (b - iu)^{-1}, & n_{22} &= C_1^{-1/2} (b + iu)^{-1} \\ \eta_{1,2} &= -1/2 \mp iz \end{aligned}$$

3. В случае гладкого контакта краевая задача сводится к одному интегральному уравнению вида (2.7), а в представлении ядра (2.8) вместо матрицы $K(u)$ достаточно подставить $K_{11}(u)$

$$\int_{-a}^a k(\frac{z}{2} - x) q_1(t) dt = 2\pi j_1(x) \quad |x| \leq a \quad (3.1)$$

$$k(t) = \int K_{11}(u) \exp(iut) du$$

Изучим детально распределение нулей и полюсов функции $K_{11}(u)$.

Функция $K_{11}(u)$ при переходе к изотропному случаю совпадает с известной [3].

Распределение нулей и полюсов функции $K_{11}(u)$ представлено на фиг. 1, где сплошными линиями обозначены полюса, а прерывистыми — нули для материала со следующими упругими постоянными [5]:

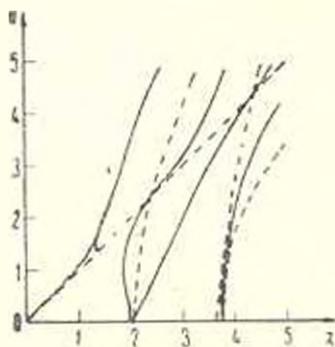
$$\begin{aligned} A_{11} &= 16,8, & A_{12} &= 7,10, & A_{13} &= 18,9, \\ A_{33} &= 5,46, & A_{12} &= 7,82, & & (10^{11} \text{ дн/см}^2) \end{aligned}$$

Из вида этих кривых можно сделать заключение о разрешимости и единственности решения уравнения (3.1) [2], а также сделать некоторые

выводы относительно характера полного поля вне штампа. В частности, на фиг. 1 для $x \in [1,9, 1,97]$ имеется полна с отрицательной групповой скоростью.

Для решения интегрального уравнения (3.1) используется метод фиктивного поглощения, детально описанный в [6].

Функция $K_{11}(u)$ удовлетворяет всем условиям, позволяющим применить этот метод, именно, она является четной мероморфной функцией, имеющей конечное число нулей Z_s ($s = 1, 2, \dots, n_1$) и



Фиг. 1.

полюсов P_l ($l = 1, 2, \dots, n_2$) $n_2 \geq n_1$ на вещественной оси и убывающая на бесконечности.

$$K_{11}(u) = C_1 |u|^{-1} (1 + O(u^{-1})) \quad |u| \rightarrow \infty$$

Аппроксимируем функцию $K_{11}(u)$ функцией

$$K_*(u) = (u^2 + b^2)^{-1/2} H(u) \quad (3.2)$$

$$H(u) = C_1 \prod_{k=1}^n (u^2 - Z_k^2) (u^2 - P_k^2)^{-1}$$

Z_k ($k = n - n_1, \dots, n$), P_k ($k = n - n_2, \dots, n$) — соответственно комплексные нули и полюса $H(u)$, которые находятся в процессе аппроксимации функции полиномами Бернштейна или Лагранжа.

Имеет место теорема [7].

Пусть ядра интегральных уравнений $Kq = f$, $K_*q_* = f$ подчинены условию

$$|K(u) - K_*(u)|(1+u)^a < \delta, \quad \delta > 0, \quad a > 1,5, \quad 0 \leq u \leq \infty$$

Тогда при достаточно малых δ справедливо

$$\|(q - q_*)(a^2 - x^2)^{1/2}\|_C < \varepsilon \|q(a^2 - x^2)^{1/2}\|_C$$

причем $\varepsilon \rightarrow 0$, если $\delta \rightarrow 0$.

Приближенное решение уравнения (3.1) имеет вид

$$\begin{aligned} q_1(x) = & \frac{\exp(-i\gamma_1 x)}{K_{11}(\gamma_1)} + \frac{\sqrt{b-i\gamma_1}}{2-i} \exp(-ia\gamma_1) \int_0^a \frac{\sqrt{b-iu}}{H(u)(u-\gamma_1)} \times \\ & \times \exp(i(a-x)u) du - \frac{\sqrt{b+i\gamma_1}}{2-i} \exp(ia\gamma_1) \int_0^a \frac{\sqrt{b-iu}}{H(u)(u-\gamma_1)} \times \\ & \times \exp(-i(a+x)u) du - \frac{1}{2-i} \sum_{k=1}^n c_k \int_0^a \frac{\sqrt{b-iu}}{H(u)} [F(u, x_k) \times \\ & \times \exp(-i(a+x)u) + F(u, -x_k) \exp(-i(a-x)u)] du \end{aligned}$$

где

$$F(u, x_k) = \sum_{m=1}^n \frac{D_m \exp(i(a+x_k)P_m)}{\sqrt{b-iP_m}(P_m-a)}, \quad D_m = \operatorname{Res}_{u=P_m} H(u)$$

$x_k = \pm y_k$, y_k — точки, делящие интервал $(0, a)$ на равные отрезки, а c_k есть решения линейной алгебраической системы [6]

$$\sum_{k=1}^{2n} A_{lk} c_k = B_l, \quad l = 1, 2, \dots, n$$

причем интегралы в (3.3) легко вычисляются по теории вычетов.

В решении (3.3) первое слагаемое есть вырожденное решение, соответствующее бесконечному штампу, второй и третий интегралы описывают влияние краев штампов и имеют характерную корневую особенность.

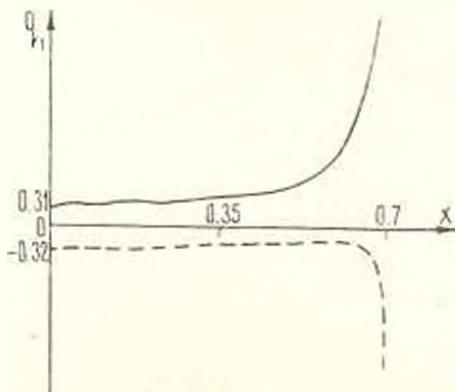
Последний интеграл представляет собой осциллирующую составляющую контактных напряжений под штампом, причем число волн напряжений равно числу вещественных нулей функции $K_{11}(u)$.

4. Численный пример. В качестве примера рассмотрена задача для материала с упругими константами, описанными в п. 3. Вычислено значение C_{11} , $C_{11} = 3,882723$.

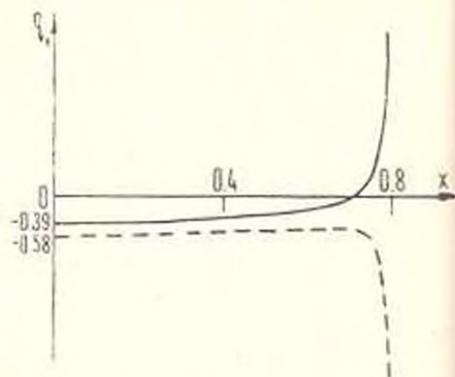
В процессе построения функции $K_{11}(u)$ в (3.2) использованы полиномы Лагранжа.

Эффективное приближение получено при аппроксимации полиномами Лагранжа порядка 8, при $b = 10$ для $x = 1,6$ (для $x = 2,2$ порядка — 6, $b = 10$). Погрешность аппроксимации не превышала 8—10%.

На фиг. 2 и на фиг. 3 приведены графики действительной (сплошная линия) и мнимой (штриховая линия) частей $q_1(x)$ соответственно для $\kappa = 1,6$, $\eta = 0$, $a = 0,7$ и $\kappa = 2,2$, $\eta = 0$, $a = 0,8$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Расчеты проведены на ЭВМ ЕС-1022 и БЭСМ-6.

Авторы выражают благодарность В. А. Бабышко за постановку задачи и обсуждение результатов.

ՄԹՔՈՏԻՐՈՊ ԱՆՎԵՐՋ ԳԼԱՆԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏՆԵՐԻ ԿՐՈՄԵՐԿԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐ

Ա. Շ. ՎԱՏՈՒԼՅԱՆ, Վ. Վ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ, Օ. Դ. ՊՐՅՈՒԽԻՆԱ

Ա մ փ ո ւ փ ո ս մ

Գիտարկվում է առաձգական օրթոտրոպ սնվիրչ գլանի մակերևույթի վրա շտամպի տատանման դինամիկական խնդիր: Ընդհանուր դեպքում խնդիրը լիրվում է կոնտակտային լստումների նկատմամբ առաջին սնոյ ինտեգրալ հավասարումների սխեման: Առաջարկված է մոտավոր լուծման կառուցման մեթոդ: Բերված է թվային օրինակ:

A CONTACT DYNAMICAL PROBLEM FOR AN INFINITE ORTHOTROPIC CYLINDER

A. O. VATULIAN, V. V. HOVSEPIAN, O. D. PRIAKHINA

S u m m a r y

A contact problem of vibration of the stamp on the surface of an infinite orthotropic elastic cylinder is considered. In the general case the problem is reduced to the system of the first type of integrals.

equations relative to the contact stresses. A method for the construction of the approximate solution is proposed. A numerical example has been presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
2. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
3. Калинин В. В. Об одной динамической задаче для бесконечного цилиндра — ПИМ, 1975, т. 39, № 3.
4. Бабешко В. А., Прыкина О. Д. Метод фиктивного поглощения в плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления. — ПИМ, 1981, т. 45, вып. 4.
5. Хатчингтон Р. Упругие постоянные кристаллов. УФН, 1961, т. 74, вып. 2—3.
6. Бабешко В. А., Прыкина О. Д. Метод фиктивного поглощения в плоских динамических задачах — ПИМ, 1980, т. 44, вып. 3.
7. Бабешко В. А. Новый эффективный метод решения динамических контактных задач. — Докл. АН СССР, 1974, т. 217, № 4.

Институт механики и прикладной
математики РГУ

Поступила в редакцию
10. III, 1982

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ
 ВЯЗКОУПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРУБЫ И ПОЛОГО ШАРА.
 ПОДВЕРЖЕННЫХ НЕОДНОРОДНОМУ СТАРЕНИЮ

НАУМОВ В. Э.

Упруго-пластическое напряженно-деформированное состояние цилиндрической трубы и полого шара, находящихся под действием внутреннего давления, исследовалось многими авторами [1]. В [2—6] эти задачи рассматривались с учетом неоднородности распределения механических свойств материала по радиусу трубы или полого шара. В [7] определялись напряжения и перемещения в вязкоупруго-пластическом полом цилиндра. Общие вопросы механического поведения вязкоупруго-пластических нестареющих материалов обсуждались в [8]. Основные уравнения теории вязкоупругости для неоднородно стареющих тел даны в [9, 10].

В настоящей работе рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии вязкоупруго-пластического полого цилиндра и полого шара, материал которых подвержен неоднородному старению.

1. Осесимметричная задача о квазистатическом равновесии под действием внутреннего давления полого цилиндра может быть рассмотрена параллельно с аналогичной сферически симметричной задачей о полом шаре. Для этого в основные соотношения, определяющие постановку этих задач, введем параметр n , который может принимать два значения: $n = 1$, что соответствует задаче о полом цилиндра, и $n = 2$ — в задаче о полом шаре. Полый цилиндр и полый шар в дальнейшем именуется одним словом «сосуд».

Будем предполагать, что толстостенная оболочка сосуда изготовлена из изотропного, несжимаемого и подверженного старению материала, механическое поведение которого зависит от уровня напряжений. При напряжениях, удовлетворяющих условию пластичности Мизеса

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} - K^2 = 0$$

где σ_{ij} , s_{ij} — компоненты тензора и девиатора напряжения соответственно, а K — предел текучести при чистом сдвиге, поведение материала описывается уравнением теории идеально пластического тела

$$\sigma_{ij}^e = \lambda s_{ij} \quad \lambda = \begin{cases} 0, & f(\sigma_{ij}) < 0 \\ s_{ij}^e / 2K^2 > 0, & f(\sigma_{ij}) = 0 \end{cases}$$

где ε_{ij}^p — компоненты скорости пластической деформации, λ — коэффициент пропорциональности в ассоциированном законе течения. При напряжениях, удовлетворяющих неравенству $f(\sigma_{ij}) < 0$, поведение материала подчиняется реологическому уравнению линейной теории вязкоупругости

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^v(t) = \frac{s_{ij}(t)}{2G} - \int_0^t s_{ij}(\tau) Q(t, \tau) d\tau$$

где ε_{ij}^v — компоненты вязкоупругой деформации, G — модуль сдвига, $Q(t, \tau)$ — ядро ползучести, t_0 — момент приложения нагрузки, t — текущий момент времени.

Полная деформация в точке тела определяется как сумма вязкоупругой и пластической деформации

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^v + \varepsilon_{ij}^p$$

2. Представим, что сосуд с внутренним радиусом a и внешним радиусом b был изготовлен «послойно», то есть таким образом, что его внешний радиус возрастал во времени по закону $r^*(t)$. Пусть изготовление сосуда было начато в момент времени $t = 0$ и окончено в момент времени t_* , то есть $r^*(0) = a$, $r^*(t_*) = b$. Предположим далее, что в момент времени $t_0 > t_*$ к сосуду было приложено внутреннее давление p_0 , которое в дальнейшем непрерывно изменяется по закону $p(t)$, $p(t_0) = p_0$. Внешнее давление принимается равным нулю. Обозначим через $\tau^*(r)$ момент изготовления (зарождения) элементарного слоя радиуса r . В частности, будем иметь $\tau^*(a) = 0$, $\tau^*(b) = t_*$. Функцию $\tau^*(r)$, определяющую скорость и последовательность изготовления сосуда, будем в условиях данной задачи считать непрерывной, монотонной и ограниченной. При этом функции $r^*(t)$ и $\tau^*(r)$ являются взаимно обратными

$$r^*(\tau^*(r)) = r, \quad \tau^*(r^*(t)) = t$$

Допустим, что модуль сдвига и предел текучести на сдвиг материала изменяются во времени соответственно по законам

$$G = G(t), \quad K = K(t), \quad t \geq 0 \quad (2.1)$$

Если сосуд был изготовлен за промежуток времени достаточно большой для заметного изменения материальных характеристик, то при решении задачи необходимо учитывать тот факт, что модуль сдвига и предел текучести являются функциями не только времени, но и пространственных координат, то есть стенки сосуда являются неоднородными относительно этих характеристик по толщине. Иначе говоря, величины G и K будут изменяться в различных точках стенки сосуда по одному и тому же временному закону (2.1), но с тем или иным запаздыванием, обусловленным различием во времени изготовления отдельных слоев

$$G(t, r) = G(t - \tau^*(r)), \quad K(t, r) = K(t - \tau^*(r))$$

Зависимости такого вида с запаздывающим временным аргументом, характерные для тел, находящихся в условиях специфической возрастной неоднородности, введены в [9, 10] при описании ползучести неоднородно стареющих сред.

Далее допустим, что под действием давления в начальный момент времени t_0 внутренняя часть стенки сосуда перешла в пластическое состояние. Обозначим через c радиус поверхности, ограничивающей область пластического состояния материала (при $n = 1$ эта поверхность будет поверхностью кругового цилиндра, при $n = 2$ — сферой). Очевидно, что этот радиус будет функцией времени $c = c(t)$.

Условие пластичности в рассматриваемом случае редуцируется к виду

$$\varepsilon_r(t, r) - \varepsilon_\theta(t, r) = \zeta(n) K(t - \tau^*(r))$$

где ε_r (ε_θ) — компоненты напряжения, а величина $\zeta(n)$ определяется следующим образом:

$$\zeta(1) = 2, \quad \zeta(2) = \sqrt{3}$$

Обращение определяющего уравнения вязкоупругого поведения принимает вид

$$\varepsilon_r(t, r) = 2 \left[G(t - \tau^*(r)) \varepsilon_r^*(t, r) - \int_0^t \varepsilon_r^*(\tau, r) R(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) d\tau \right]$$

где $R(t, \tau)$ — ядро релаксации.

Предполагается, что материал ни в одной точке тела не переходит из пластического состояния в вязкоупругое, что в рамках данной задачи равносильно условию неубывания радиуса пластической зоны $dc(t)/dt \geq 0$. В этом случае полные деформации в зоне вязкоупругости ($c(t) \leq r \leq b$) будут равны вязкоупругим деформациям. В пластической области ($a \leq r \leq c(t)$), ввиду статической определенности задачи, полные деформации определяются из условий на границе раздела пластической и вязкоупругой областей.

3. Запишем основные соотношения, определяющие постановку задачи в области $a \leq r \leq b$:

уравнение равновесия —

$$r \partial \varepsilon_r(t, r) / \partial r + n [\varepsilon_r(t, r) - \varepsilon_\theta(t, r)] = 0 \quad (3.1)$$

условие несжимаемости —

$$\varepsilon_r(t, r) + n \varepsilon_\theta(t, r) = 0 \quad (3.2)$$

соотношения Коши —

$$\varepsilon_r(t, r) = \partial u(t, r) / \partial r, \quad \varepsilon_\theta(t, r) = u(t, r) / r \quad (3.3)$$

в области $a \leq r \leq c(t)$:

условие пластичности —

$$\varepsilon_r(t, r) - \varepsilon_z(t, r) = \zeta(n) K(t - z^*(r)) \quad (3.4)$$

граничное условие —

$$\sigma_r(t, a) = -p(t) \quad (3.5)$$

в области $c(t) \leq r \leq b$:

определяющее уравнение —

$$\begin{aligned} \sigma_a(t, r) - \sigma_r(t, r) = 2 \{ G(t - z^*(r)) [\varepsilon_r(t, r) - \varepsilon_z(t, r)] - \\ - \int_a^r [\varepsilon_\varphi(\tau, r) - \varepsilon_r(\tau, r)] R(t - z^*(r), \tau - z^*(r)) d\tau \} \quad (3.6) \end{aligned}$$

граничное условие —

$$\sigma_r(t, b) = 0 \quad (3.7)$$

Кроме того, потребуем выполнения условий непрерывности напряжений на границе раздела вязкоупругой и пластической зон

$$\sigma_r^{(1)}(t, c(t)) = \sigma_r^{(2)}(t, c(t)) \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_z^{(1)}(t, c(t)) = \varepsilon_z^{(2)}(t, c(t)) \quad (3.9)$$

В этих соотношениях $t \geq t_0$; ε_r — компоненты полной деформации: u — радиальное перемещение; верхние индексы 1 и 2 означают принадлежность компоненты напряжения зоне пластичности и зоне вязкоупругости соответственно. Заметим, что для полого цилиндра ($n = 1$) постановка задачи предусматривает случай плоской деформации, когда осевая компонента перемещения равна нулю, а осевая компонента напряжения определяется так

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_z)$$

Интегрируя уравнение несжимаемости (3.2), получим, что перемещение в областях пластического и вязкоупругого поведения материала определяется единым выражением

$$u(t, r) = A(t)/r^n \quad (3.10)$$

где $A(t)$ — функция времени, подлежащая определению.

4. Напряжения в пластической области ($a \leq r \leq c(t)$) находятся из уравнения равновесия (3.1) и условия пластичности (3.4) с учетом граничного условия (3.5)

$$\sigma_r^{(1)}(t, r) = -p(t) + n \zeta(n) [k(t, r) - k(t, a)] \quad (4.1)$$

$$\sigma_z^{(1)}(t, r) = -p(t) + \zeta(n) [K(t - z^*(r)) + n(k(t, r) - k(t, a))] \quad (4.2)$$

где

$$k(t, r) = \int_0^r r^{-1} K(t - \tau^*(r)) dr$$

Определим напряжения в вязкоупругой области ($c(t) \leq r \leq b$). Подставляя (3.10) в (3.6), затем в (3.1) и интегрируя, получим

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(2)}(t, r) = & 2n(n+1) \{ A(t) [g(t, r) - g(t, b)] - \\ & - \int_a^r A(\tau) [\rho(t, \tau, r) - \rho(t, \tau, b)] d\tau \} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(2)}(t, r) = & 2(n+1) \{ A(t) [r^{-n-1} G(t - \tau^*(r)) + n(g(t, r) - g(t, b))] - \\ & - \int_a^r A(\tau) [r^{-n-1} R(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) + n(\rho(t, \tau, r) - \rho(t, \tau, b))] d\tau \} \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} g(t, r) = & \int_0^r r^{-n-2} G(t - \tau^*(r)) dr \\ \rho(t, \tau, r) = & \int_0^r r^{-n-2} R(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) dr \end{aligned}$$

Используя условия непрерывности напряжений (3.8), (3.9), будем иметь следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & 2(n+1) [c(t)]^{-n-1} \{ A(t) G(t - b^*) - \\ & - \int_a^c A(\tau) R(t - b^*, \tau - b^*) d\tau \} = \tau^*(n) K(t - b^*) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} & 2n(n+1) \{ A(t) [g(t, b) - g(t, c(t))] - \int_a^c A(\tau) [\rho(t, \tau, b) - \\ & - \rho(t, \tau, c(t))] d\tau \} + n^2(n) [k(t, c(t)) - k(t, a)] = p(t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь обозначено $b^* = \tau^*(c(t))$.

При заданных зависимостях для внутреннего давления $p(t)$, упруго-мгновенного модуля сдвига $G(t)$, предела текучести $K(t)$, ядра релаксации $R(t, \tau)$ и функции $\tau^*(t)$, определяющей скорость и последовательность изготовления сосуда, соотношения (4.5), (4.6) образуют замкнутую систему уравнений для определения двух неизвестных функций $A(t)$ и $c(t)$. Аналитическое решение этой системы может быть получено лишь в некоторых частных случаях. В общем случае для решения системы уравнений (4.5), (4.6) могут быть использованы численные методы, например,

метод, основанный на дискретизации по времени, после чего радиус пластической зоны на каждом временном шаге определяется из решения некоторого трансцендентного уравнения. Ядро релаксации при этом, следуя [11], можно принять в виде

$$R(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} [G(\tau) - \varphi(\tau)(1 - e^{-\gamma(t-\tau)})] \quad (4.7)$$

где $\varphi(\tau)$ — функция старения [12], γ — некоторая константа.

Если в (4.5), (4.6) положить $c(t) = c = \text{const}$ ($a \leq c \leq b$), то из этих уравнений с учетом (4.7) легко получить выражение для давления $p_c(t)$, при действии которого радиус пластической зоны не изменяет во времени своего значения. Действительно, пользуясь соотношением (4.7) и дифференцируя (4.5) по t , после некоторых преобразований получим задачу Коши для определения функции $A(t)$

$$A''(t)G(t - \tau^*(c)) + A'(t)[G'(t - \tau^*(c)) + \gamma G(t - \tau^*(c)) - \gamma \varphi(t - \tau^*(c))] = m[\gamma K'(t - \tau^*(c)) + K''(t - \tau^*(c))]$$

$$A(t_0) = n k(t_0 - \tau^*(c))/G(t_0 - \tau^*(c))$$

$$A'(t_0) = m[\gamma \varphi(t_0 - \tau^*(c)) K(t_0 - \tau^*(c))/G(t_0 - \tau^*(c)) + K'(t_0 - \tau^*(c))]$$

где штрих означает дифференцирование по t и для краткости введено обозначение

$$m = \frac{1}{2} c^{n+1} \zeta(n)(n+1)^{-1}$$

Решение этой задачи есть

$$A(t) = A(t_0) + \int_{t_0}^t \left\{ A'(t_0) \tau(t_0) + \int_{t_0}^{\tau} H(\tau) \tau(\tau) d\tau \right\} \frac{d\tau}{\tau(\tau)} \quad (4.8)$$

где введены обозначения

$$H(s) = m[\gamma K'(s - \tau^*(c)) + K''(s - \tau^*(c))]/G(s - \tau^*(c))$$

$$\tau(s) = \exp \left\{ \int [\gamma \varphi + (G'(s - \tau^*(c)) - \gamma \varphi(s - \tau^*(c)))/G(s - \tau^*(c))] ds \right\}$$

Подставляя (4.8) в (4.6), где нужно положить $c(t) = c = \text{const}$, получим явное выражение для $p_c(t)$, которое из-за его громоздкости здесь не приводится. Представляет интерес выражение для давления $p_n(t)$, под действием которого сосуд находится в условиях начала образования пластической зоны. Для его определения достаточно положить $c = a$ в выражении для $p_c(t)$. Величина минимального давления p^* , которое в момент приложения обуславливает переход оболочки сосуда в чисто пластическое состояние, определяется из уравнения (4.6) при $t = t_0$ и $c(t_0) = b$

$$p^* = n^*(n)[k(t_0, b) - k(t_0, a)]$$

Заметим, что сделанное предположение о том, что пластическая область начинает развиваться с внутренней части стенки сосуда, налагает определенные ограничения на зависимости $G(t)$, $K(t)$, $\tau^*(t)$. Действительно, достаточным условием этого будет монотонное убывание по радиусу при каждом t функции

$$\omega(t, r) = [J_2(t, r)]^{1/2} / K(t - \tau^*(r))$$

где J_2 — второй инвариант девиатора вязкоупругих напряжений. Таким образом, выше рассмотрен случай, когда при $t \geq t_0$, $a \leq c(t) \leq r \leq b$ выполняется неравенство $\partial\omega(t, r)/\partial r < 0$. В случае, когда $\partial\omega(t, r)/\partial r > 0$, может произойти образование пластической зоны на части стенки сосуда, примыкающей к внешней свободной от нагрузки поверхности. Когда $\partial\omega(t, r)/\partial r = 0$, стенка сосуда может перейти в пластическое состояние только по всей толщине сразу.

Соотношения, определяющие решение задачи, сохраняют силу и для случая монотонно убывающей функции $\tau^*(t)$, что соответствует последовательному изготовлению сосуда, начиная от внешних поверхностных слоев и кончая внутренней граничной поверхностью.

При постоянных $G(\tau)$, $K(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ соотношения (4.1) — (4.7) дают, в качестве частного случая, решение задачи для вязкоупруго-пластического нестареющего материала. При этом в момент приложения нагрузки имеем решение классической упруго-пластической задачи о напряженно-деформированном состоянии однородного сосуда, изготовленного из несжимаемого материала.

5. При проведении численных расчетов для модулей G и K примем зависимости

$$G(t) = G_\infty (1 - \beta e^{-\alpha t}) \quad (5.1)$$

$$K(t) = K_\infty (1 - \xi e^{-\mu t}) \quad (5.2)$$

которые отражают «затвердевание» материала с увеличением его возраста (β, α, ξ, μ — положительные константы).

Зависимость (5.1), предложенная в [12] для модуля упруго-мгновенной деформации стареющих материалов, и зависимость (5.2) для напряжения течения качественно описывают изменение этих механических характеристик в зависимости от времени физического старения для широкого класса полимерных материалов. В частности, для акриловых волокон зависимость (5.1) экспериментально подтверждена в [13]. Данные об изменении напряжения течения с возрастом для твердого поливинилхлорида приведены в [14].

Далее, функцию старения определим следующим образом:

$$\varphi(\tau) = G(0) (\psi + \chi e^{-\kappa \tau})$$

где ψ, χ, κ — константы, определяемые из опытных данных по ползучести стареющего материала.

Ограничимся случаем, когда функция $\tau^*(r)$ является линейной и задается одним из выражений

$$\tau^*(r) = t_* (r - a) / (b - a) \quad (5.3)$$

$$\tau^*(r) = t_* (b - r) / (b - a) \quad (5.4)$$

Выражение (5.3) соответствует увеличению радиуса сосуда с постоянной скоростью от величины a до величины b за промежуток времени t_* . Задание функции $\tau^*(r)$ в виде (5.4) соответствует изменению радиуса сосуда от величины b до a в процессе изготовления.

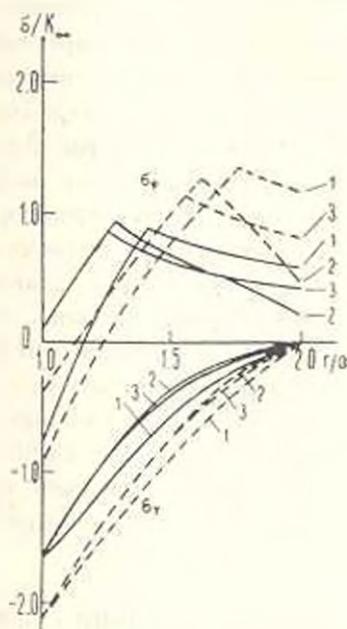
Наконец, для внутреннего давления примем выражение

$$p(t) = p_0 + q(t - t_0) \quad (5.5)$$

При расчетах величины, имеющие размерность длины и давления, отнесены к внутреннему радиусу сосуда a и предельному значению напряжения течения K_* , соответственно.

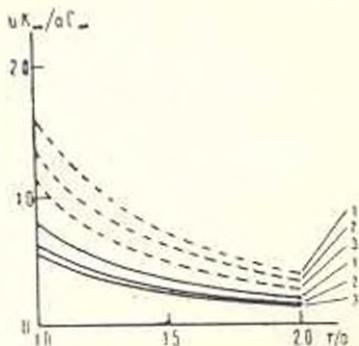
Расчеты по формулам (4.1)–(4.6) были проведены для полого шара ($n = 2$) при следующих значениях констант: $t_* = t_0 = 100$ час; $b = 2$; $G_* = 100$; $p_0 = 1,6458$; $\psi = 0,05$; $q = \alpha = \mu = \kappa = 0,05$ час $^{-1}$; $\gamma = 0,1$ час $^{-1}$.

На фиг. 1 приведены эпюры напряжений для трех характерных случаев нагружения полого шара внутренним давлением, изменяющимся во времени по одному и тому же закону (5.5). Цифрой 1 обозначены эпюры для случая, когда $\tau^*(r)$ определяется выражением (5.4), а $G(t) = G_* = \text{const}$ ($\xi = 0,5$; $\beta = 0$; $\lambda = 0,45$). Цифрой 2 отмечены эпюры, когда $\tau^*(r)$ задается выражением (5.3), а $K(t) = K_* = \text{const}$ ($\xi = 0$; $\beta = 0,5$; $\lambda = 0,45$). Наконец, для сопоставления приведены эпюры, отмеченные цифрой 3, для полого шара, изготовленного из нестареющего материала с предельными значениями модулей G_* и K_* ($\xi = \beta = \lambda = 0$). При этом сплошные кривые линии относятся к мгновенному упруго-пластическому состоянию, возникающему в момент приложения нагрузки, а штриховые — к моменту спустя 10 часов после приложения нагрузки. На фиг. 2 приведены соответствующие эпюры перемещений. Принцип маркировки линий тот же, что и на фиг. 1. На фиг. 3 приведены графики, показывающие изменение со временем радиуса пластической зоны для трех названных выше случаев. Как видно из фиг. 1, неоднородность стенки сферического сосуда

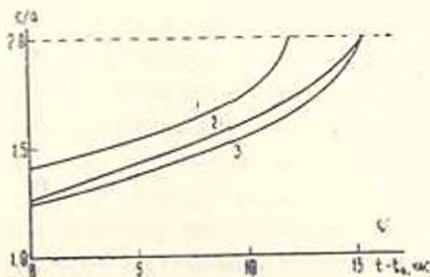


Фиг. 1. Распределение по толщине стенки полого шара окружного (вверху) и радиального (внизу) напряжения

да относительно предела текучести особенно сильно сказывается, когда внутренняя часть стенки заполнена наиболее «молодым» материалом, то есть когда предел текучести в этой части стенки еще не достиг своего предельного возрастного значения, которое при расчете иллюстративного примера взято в два раза большим исходного значения в момент зарождения. Из



Фиг. 2. Распределение радиального перемещения по радиусу полого шара



Фиг. 3. Распространение радиуса пластической области

сравнения эпюр 1 и 3 в начальный момент времени (сплошные кривые) видно, что окружное напряжение на внутренней полости по сравнению со случаем однородного нестарееющего материала изменяет знак, а по абсолютной величине возрастает в несколько раз. Максимальное отличие радиального напряжения в этом случае составляет несколько более 30%. Из сопоставления кривых 1 и 3 на фиг. 2 и 3 следует, что учет неоднородности распределения предела текучести по радиусу полого шара приводит к увеличению в начальный момент времени и последующему ускоренному росту радиуса пластической зоны, а также к существенному увеличению перемещений. Если, наоборот, шар изготавливался «изнутри», то есть вблизи полости находится «старый» материал, то существенное влияние на напряженно-деформированное состояние в зоне вязкоупругости оказывает неоднородность распределения в стенке полого шара вязкоупругих характеристик материала. Из сравнения эпюр 2 и 3 при $t = 10$ часов (штриховые линии) следует, что окружные напряжения в этих двух случаях в вязкоупругой зоне существенно различаются. При учете неоднородности на границе пластической зоны оно больше, чем в однородном случае, а на внешней поверхности почти в два раза меньше.

ԱՆՀԱՄԱՌՆԵՐ ՄԵԿԱՅՄԱՆ ԵՆԹԱԿՆԸ ԱՌԱՉԳԱՄԱՌՈՒՅՈՒՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԽՈՐՈՒՆԿԻ ԵՎ ՄՆԱՄԵՋ ԳՆԻԻ ԼԱՐՎԱՍՏԱՅԻՆ-ԴԻՅՈՐՈՒՄՅՈՒՆ ՎԻՃԱԿԻ ԸՄԱՍԻՆ

Վ. Է. ՆԱՌԻՍՈՎ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Այս աշխատանքում որոշված է հավասարաչափ բաշխման ներքին ճնշման ազդեցությամբ հատուկ «հասակային» անհամասեռություն պայմաններում

գունդող սնամեջ գլանի պատի մեջ լարումների և տեղափոխումների պաշարները, որից պատրաստված է սնամեջ գլանը, համարվում է իզոտրոպ, սնամեջ մեկի և ենթակա է ծերացման, որի մեխանիկական վարքը նկարագրվում է անհամասեռ ծերացող միջավայրի առաձգամածուցիկ-պլաստիկության տեսության սկզբնական համասարումներով: Չուղահեռ դիտարկված է սնամեջ գնդի անալոգ խնդիրը: Խնդիրը բերված է պլաստիկական գոտու փոփոխական շառավղի և ժամանակից ինչ որ օժանդակ ֆունկցիայի նկատմամբ երկու ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը: Մնամեջ գնդի խնդրի համար բերված են թվային հետազոտությունների արդյունքները:

ON THE STRESS-STRAIN STATE IN A VISCOELASTIC-PLASTIC TUBE AND A HOLLOW BALL SUBJECTED TO NONHOMOGENEOUS AGEING

V. E. NAUMOV

S u m m a r y

The stresses and displacements in the wall of a cylindrical tube subjected to a uniformly distributed internal pressure under conditions of specific age-nhomogeneity are obtained in this paper. An isotropic, incompressible and aging material is considered. The mechanical behavior of the material is described by constitutive equations of the theory of viscoelastic-plastic nonhomogeneously aging solids. Simultaneously a similar problem for a hollow ball is considered. The problem is reduced to the solution of a system of two integral equations for time-dependent radius of plastic area and auxiliary time function. The results of a numerical investigation are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
2. Илюшин А. А., Огибалов П. М. Упруго-пластические деформации полых цилиндров. М.: Изд-во МГУ, 1960. 227 с.
3. Olszak W., Urbanowski W. Sprężysto-plastyczny grubościenny walec niejednorodny pod działaniem parcia wewnętrznego i siły podłużnej.— Arch. mech. stos., 1955, v. 7, No. 3, pp. 315—336.
4. Olszak W., Urbanowski W. Sprężysto-plastyczna grubościenna powłoka kulista z materiału niejednorodnego, poddana działaniu ciśnienia wewnętrznego i zewnętrznego.— Rozpr. inż., 1956, v. 4, No. 1, pp. 23—41.
5. Зидоми М. А. Распространение пластической зоны в неоднородной трубе при динамическом воздействии давления.— Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. н., 1960, т. 13, № 3, с. 89—95.
6. Mukhopadhyay J. Effect of non-homogeneity on yield stress in a thick walled cylindrical tube under pressure.— Lett. Appl. and Eng. Sci., 1982, v. 20, No. 8, pp. 963—968.

7. *Shinozuka M.* Stresses in a incompressible viscoelastic-plastic thick-walled cylinder.—AIAA Journal, 1964, v. 2, No. 10, pp. 1800—1804.
8. *Naghdi P. M., Murch S. A.* On the mechanical behavior of viscoelastic-plastic solids.—Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1963, v. 30, No. 3, pp. 321—328.
9. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-старящихся тел.—Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 3, с. 153—164.
10. *Арутюнян Н. Х.* Краевая задача теории ползучести для нарастающего тела.—ПММ, 1977, т. 41, вып. 5, с. 783—789.
11. *Арутюнян Н. Х., Метлов В. В.* Некоторые задачи теории ползучести для нарастающих тел, подверженных старению.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1982, т. 35, № 3, с. 13—30.
12. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., Гостехиздат, 1952. 323 с.
13. *Takaku A., Kobayashi T., Terui S., Okui N., Shimizu J.* Changes of tensile modulus and contractive stress of acrylic fibres during thermal stabilisation for carbon fibre production.—Fibre Sci. and Technol., 1981, v. 15, No. 2, pp. 87—98.
14. *Struik L. C. E.* Physical aging in amorphous polymers and other materials. Amsterdam: Elsevier, 1978. 229 p.

Институт проблем механики АН СССР

Поступила в редакцию
30. VII. 1982