ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVI, № 3, 1983 Механика

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

БАБАДЖАНЯН Г. А.

§ 1. *Уравнения движения и краевые условия*

Рассматривается нестационарное изотермическое одномерное течение несжимаемой вязкой жидкости в трубах (плоской и цилиндрической) с проницаемыми стенками.

Причины, вызывающие нестационарное движение жидкости в трубопроводах, могут быть различными. К ним относятся переменное потребление жидкости, включение и выключение буферных потребителей и компрессорных агрегатов, перекрытие запорных устройств, появление аварийных утечек жидкости из трубопровода и другие.

Дифференциальные уравнения, описывающие вышеуказанное движение, [1]

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\xi\rho u^2}{4h}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+k\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{k\sigma(p-p_н)}{2h}=0 \qquad (1.1)$$

для плоской трубы и

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\xi\rho u^2}{4a}\,^*$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+k\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2k\sigma(p-p_н)}{a}=0 \qquad (1.2)$$

для цилиндрической трубы.

Первые уравнения в системах (1.1) и (1.2) устанавливают равенство между перепадом давления вдоль трубы и трением, обусловленным вязкостью.

Вторые — являются уравнениями неразрывности с учетом проницаемости стенок трубы [2].

В системе уравнений (1.1) и (1.2) p и u — соответственно средние по сечению трубы давление и скорость течения, ξ — коэффициент сопро-

* При выводе первого уравнения системы (1.2) не учтен член $\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}$, так как нами рассматриваются «длинные» трубы [2].

тивления трения, $2h$ — ширина плоской трубы, $p_н$ — внешнее давление, k — модуль объемного сжатия, учитывающий упругость и проницаемость стенок трубы, a — радиус цилиндрической трубы, x — направление потока, t — время, α — коэффициент, показывающий степень проницаемости стенок трубы ($p_н$ и α, а следовательно, и k вдоль трубы принимаются постоянными).

Если $p - p_н > 0$, имеет место отсос, в случае $p - p_н < 0$ — вдувание жидкости.

Режим движения жидкости принимается ламинарным, поэтому значение коэффициента сопротивления трения для плоской трубы будет

$$\xi = \frac{24}{\mathrm{Re}} = \frac{12\nu}{uh} \tag{1.3}$$

а для цилиндрической трубы

$$\xi = \frac{64}{\mathrm{Re}} = \frac{32\nu}{ua} \tag{1.4}$$

Здесь Re — число Рейнольдса, ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Подставляя значение ξ в системы уравнений (1.1) и (1.2), получим

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = bu$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + k\frac{\partial u}{\partial x} + B(p - p_н) = 0 \tag{1.5}$$

где $b = \frac{3\mu}{h^2}$, $B = \frac{k\alpha}{2h}$ для плоской трубы и $b = \frac{8\mu}{a^2}$, $B = \frac{2k\alpha}{a}$ для цилиндрической трубы, μ — динамический коэффициент вязкости жидкости. Исключая из системы уравнений (1.5) переменную $u(x, t)$, относительно $p(x, t)$ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = A\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - B(p - p_н) \tag{1.6}$$

где $A = \frac{kh^2}{3\mu}$, $B = \frac{k\alpha}{2h}$ для плоской трубы и

$A = \frac{ka^2}{8\mu}$, $B = \frac{2k\alpha}{a}$ для цилиндрической трубы.

Если из системы (1.5) исключим переменную $p(x, t)$, то относительно $u(x, t)$ получим такое же уравнение, как для $p(x, t)$, то есть

$$\frac{\partial u}{dt} = A\frac{d^2u}{dx^2} - Bu \tag{1.7}$$

Дифференциальное уравнение (1.6) решаем при следующих краевых условиях:

$$\text{при} \quad x=0 \quad p=p_н$$

$$\text{при} \quad x=l \quad \frac{\partial p}{\partial x}=0$$

$$\text{при} \quad t=0 \quad p=p_0(x) \tag{1.8}$$

Здесь $p_н$ — давление жидкости в начальном сечении, l — длина трубы, функция $p_0(x)$ показывает закон изменения давления при стационарном режиме движения, то есть является решением уравнения

$$\frac{d^2p_0}{dx^2}-\frac{B}{A}(p_0-p_в)=0 \tag{1.9}$$

при следующих граничных условиях:

$$\text{при} \quad x=0 \quad p_0=p_н$$

$$\text{при} \quad x=l \quad p_0=p_к \tag{1.10}$$

Здесь $p_к$ — давление в конечном сечении при стационарном режиме движения.

Второе граничное условие из (1.8) показывает, что в конце трубы расход жидкости прекращается мгновенно, вследствие чего и возникает нестационарный режим движения.

Решение уравнения (1.9) будет

$$p_0(x)=p_в+\frac{(p_к-p_в)\,\mathrm{sh}\,a_1x+(p_н-p_в)\,\mathrm{sh}\,a_1(l-x)}{\mathrm{sh}\,a_1l} \tag{1.11}$$

где $a_1=\sqrt{\frac{B}{A}}$.

§ 2. *Решение уравнения (1.6)*

Перейдем к решению уравнения (1.6) при краевых условиях (1.8). Решение ищется в виде

$$p(x,t)=p_0(x)+p_1(x,t) \tag{2.1}$$

где $p_0(x)$ является решением уравнения (1.9) и имеет вид (1.11), а $p_1(x,t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t}=A\frac{\partial^2p_1}{\partial x^2}-Bp_1 \tag{2.2}$$

Краевые условия для уравнения (2.2) будут

$$\text{при} \quad x=0 \quad p_1=0$$

$$\text{при} \quad x=l \quad \frac{dp_1}{dx}=-\frac{dp_0}{dx}\bigg|_{x=l}=-\frac{a_1[(p_к-p_в)\,\mathrm{ch}\,a_1l-(p_н-p_в)]}{\mathrm{sh}\,a_1l}=D$$

$$\text{при} \quad t=0 \quad p_1=0 \tag{2.3}$$

Применяя к уравнению (2.2) и к краевым условиям (2.3) преобразования Лапласа [2], получим

$$A\frac{d^2p_{1L}}{dx^2} - Bp_{1L} = sp_{1L} \tag{2.4}$$

$$\text{при} \quad x = 0 \quad p_{1L} = 0$$

$$\text{при} \quad x = l \quad \frac{dp_{1L}}{dx} = \frac{D}{s} \tag{2.5}$$

Здесь $p_{1L} = \int\limits_0^\infty p_1(x,\ t)\exp(-st)\,dt$

Решением уравнения (2.4) будет

$$p_{1L} = c_1\exp(\gamma x) + c_2\exp(\gamma x) \tag{2.6}$$

где

$$\gamma = \sqrt{(s+B)/A}$$

Из граничных условий (2.5) для c_1 и c_2 получим

$$c_1 = -c_2 = \frac{D}{2\gamma s\cdot \mathrm{ch}\,\gamma l} \tag{2.7}$$

Тогда для p_{1L} получим

$$p_{1L} = \frac{D\,\mathrm{sh}\,\gamma x}{s\gamma\,\mathrm{ch}\,\gamma l} \tag{2.8}$$

Для получения оригинала функции p_{1L} $(x,\ s)$ применим к (2.8) обратное преобразование Лапласа.
Обозначим

$$\Phi(s) = \mathrm{sh}\,\gamma x/\gamma \tag{2.9}$$

$$\varphi(s) = s\,\mathrm{ch}\,\gamma l \tag{2.10}$$

Можно показать, что функции $\Phi(s)$ и $\varphi(s)$ являются обобщенными полиномами относительно s и что все условия теоремы разложения соблюдены.

Теорему разложения можно написать так:

$$p_1(x,t) = L^{-1}\left[p_{1L}(x,\ s)\right] = L^{-1}\left\{\frac{D\Phi(s)}{\varphi(s)}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{D\Phi(s_n)\exp(s_n t)}{\varphi'(s_n)} \tag{2.11}$$

где s_n — корни полинома $\varphi(s)$.

Найдем корни функции $\varphi(s) = s\,\mathrm{ch}\,\gamma l$.

Получим простой корень $s_0 = 0$ и бесчисленное множество простых корней, определяемых из соотношения

$$i\sqrt{\frac{s_n+B}{A}}\,l = \frac{(2n-1)\pi}{2} = \mu_n$$

откуда

$$s_n = -B - \frac{A}{l^2}\mu_n^2 = -B - \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4l^2}, \quad n = 1, 2, 3\cdots \tag{2.12}$$

Из выражения (2.12) получим

$$p_1(x, t) = D\left[\frac{\psi(s_0)e^{s_0 t}}{\varphi'(s_0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(s_n)e^{s_n t}}{\varphi'(s_n)}\right] \tag{2.13}$$

Вычисляя значения $\psi(s_0)$, $\varphi'(s_0)$, $\psi(s_n)$, $\varphi'(s_n)$ и подставляя их в выражение (2.13), получим

$$p_1(x, t) = D\left[-\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{B}{A}}\,x}{\sqrt{\frac{B}{A}}\operatorname{ch}\sqrt{\frac{B}{A}}\,l} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A\sin\frac{\mu_n x}{l}\cdot e^{s_n t}}{s_n l\sin\mu_n}\right] \tag{2.14}$$

Общее решение задачи согласно (2.1) будет

$$p(x, t) = p_0(x) + p_1(x, t) = p_в +$$

$$+\frac{(p_к - p_в)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{B}{A}}\,x + (p_н - p_в)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{B}{A}}\,(l-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{B}{A}}\,l} +$$

$$+D\left[-\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{B}{A}}\,x}{\sqrt{\frac{B}{A}}\operatorname{ch}\sqrt{\frac{B}{A}}\,l} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}A\cdot\sin\frac{\mu_n x}{l}\,e^{s_n t}}{s_n l}\right] \tag{2.15}$$

Подставляя значения постоянных A, B и D в формулу (2.15), для значения давления окончательно получим

$$p(x, t) = p_в + \frac{(p_к - p_в)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}\,x + (p_н - p_в)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}\,(l-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}\,l} -$$

$$-\frac{\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}\left[(p_к - p_в)\operatorname{ch}\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}\,l + (p_н - p_в)\right]}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}\,l}\left[\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}\,x}{\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}\operatorname{ch}\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}\,l} +\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}kh^2\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\,\exp(s_n t)}{3\mu s_n l}\right] \tag{2.16}$$

где

$$s_n = -k\left[\frac{(2n-1)^2\pi^2 h^2}{12\mu l^2} + \frac{\alpha}{2h}\right]$$

— для плоской трубы и

$$p(x, t) = p_в + \frac{(p_к - p_в)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{16\mu\alpha}{a^3}}\,x + (p_н - p_в)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{16\mu\alpha}{a^3}}\,(l-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{16\mu\alpha}{a^3}}\,l} -$$

$$-\frac{\sqrt{\frac{16\mu\alpha}{a^3}}\left[(p_к - p_н)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{16\mu\alpha}{a^3}}\,l - (p_н - p_в)\right]}{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{16\mu\alpha}{a^3}}\cdot l}\times$$

$$\times\left[\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{16\mu\alpha}{a^3}}\,x}{\sqrt{\frac{16\mu\alpha}{a^3}}\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{16\mu\alpha}{a^3}}\,l} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}ka^2\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}e^{s_n t}}{4\mu s_n l}\right] \quad (2.17)$$

где

$$s_n = -k\left[\frac{(2n-1)^2\pi^2a^2}{32\mu l^2} + \frac{2\alpha}{a}\right]$$

для цилиндрической трубы.

Из первой формулы системы (1.5) получим значение скорости

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{\alpha h}{6\mu}}\frac{1}{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}\,l}\Bigg\{(p_н - p_в)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}(l-x) -$$

$$-(p_к - p_в)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}\,x + \left[(p_к - p_в)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}\,l - (p_н - p_в)\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\mathrm{ch}\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}\,x}{\mathrm{ch}\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}\,l} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}k\mu_n h^2\cos\frac{\mu_n x}{l}e^{s_n t}}{3\mu l^2 s_n}\right]\Bigg\} \quad (2.18)$$

для плоской трубы и

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{a\alpha}{4\mu}}\frac{1}{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{16\mu\alpha}{a^3}}}\Bigg\{(p_н - p_в)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{16\mu\alpha}{a^3}}(l-x) -$$

$$-(p_к - p_в)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{16\mu\alpha}{a^3}}\,x + \left[(p_к - p_в)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{16\mu\alpha}{a^3}}\,l - (p_н - p_в)\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\mathrm{ch}\sqrt{\frac{16\mu\alpha}{a^3}}\,x}{\mathrm{ch}\sqrt{\frac{16\mu\alpha}{a^3}}\,l} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}ka^2\mu_n\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}e^{s_n t}}{4\mu l^2 s_n}\right]\Bigg\} \quad (2.19)$$

для цилиндрической трубы.

Секундный продольный расход жидкости определится по формуле

$$G_{пр} = 2u\rho hL_z \quad (2.20)$$

для плоской трубы и

$$G_{пр} = \pi a^2\rho u \quad (2.21)$$

для цилиндрической трубы.

L_1 в (2.20) есть ширина канала в поперечном направлении. Секундный расход жидкости через стенки (поперечный расход) на единицу длины канала определится по формуле

$$G_{ст} = 2\alpha(p - p_в)\rho L_1 \tag{2.22}$$

для плоской трубы и

$$G_{ст} = 2\pi a\alpha(p - p_в)\rho \tag{2.23}$$

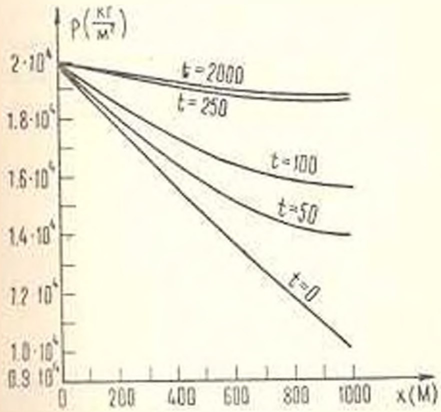
для цилиндрической трубы.

Численный пример. Рассмотрим движение воды в проницаемой цилиндрической трубе при следующих данных:

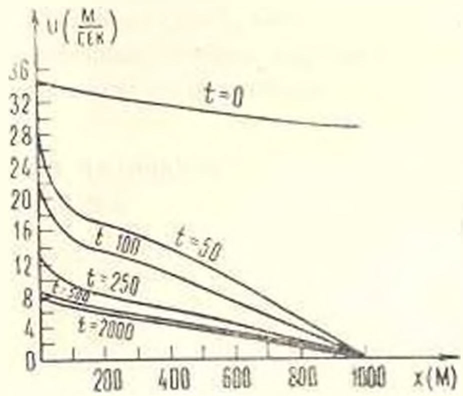
$$p_н = 2\cdot 10^4 \frac{кГ}{м^2}, \quad p_в = 0, \quad p_в = 10^4 \frac{кГ}{м^2}, \quad l = 10^3 \text{ м}, \quad k = 10^3 \frac{кГ}{м^2},$$

$$a = 5\cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad \alpha = 10^{-8} \frac{м^3}{сек\,кГ}, \quad \mu = 10^{-4} \frac{кГ\,сек}{м^2}.$$

Законы изменения давления, скорости, продольного и поперечного расхода жидкости, вычисленные по формулам (2.17), (2.19), (2.21) и (2.23), представлены на фиг. 1, 2, 3, 4.



Фиг. 1.



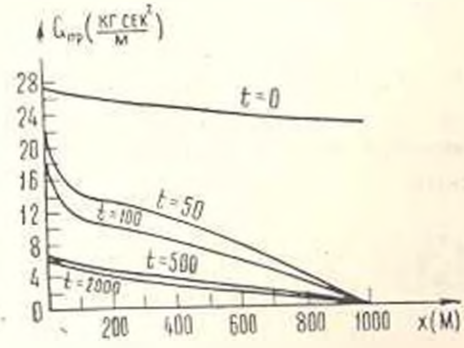
Фиг. 2.

Из фиг. 1 видно, что давление уменьшается вдоль трубы при любом значении времени и увеличивается по времени для любого сечения трубы.

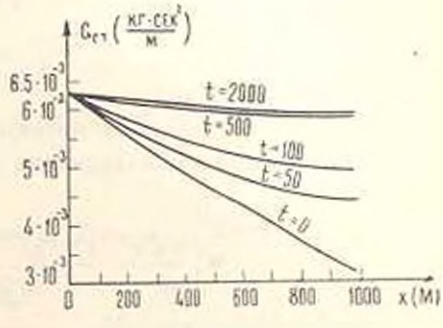
Из фиг. 2 видно, что продольная скорость движения жидкости уменьшается вдоль трубы при любом значении времени. После закрытия задвижки быстрота уменьшения скорости резко увеличивается. Кривые, показывающие законы изменения продольной скорости для моментов времени $t = 0$ и $t = 2000$ сек., параллельны.

Из фиг. 3 видно, что продольный расход жидкости уменьшается вдоль трубы для любого значения времени. После закрытия задвижки быстрота уменьшения расхода резко увеличивается. Кривые, показывающие законы изменения продольного расхода жидкости для моментов времени $t = 0$ и $t = 2000$ сек., параллельны.

На фиг. 4 показан закон изменения поперечного расхода жидкости (расход через стенки). Из него видно, что расход уменьшается вдоль трубы для любого значения времени, но увеличивается по времени для каж-



Фиг. 3.



Фиг. 4.

дого сечения трубы после закрытия задвижки. Из полученных результатов видно, что при выбранных краевых условиях нарушенный заданный стационарный режим движения жидкости через определенный промежуток времени (для данного случая $t = 2000$ сек.) переходит в новый стационарный режим движения с новыми параметрами движения. Проверка показала, что, если в полученных формулах для давления, скорости и расхода при нестационарном движении жидкости время $t \to \infty$, то результаты совпадают с решениями стационарной задачи при граничных условиях (1.8).

ՀԵՂՈՒԿԻ ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՇԱՐԺՈՒՄԸ ԹԱՓԱՆՑՈՂ ՊԱՏԵՐՈՎ ԽՈՂՈՎԱԿՆԵՐՈՒՄ

Գ. Հ. ԲԱԲԱՋԱՆՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրվում է իրական անսեղմելի հեղուկի ոչ ստացիոնար շարժումը ծակոտկեն պատերով խողովակներում (հարթ և գլանային)։

Հեղուկի շարժման լամինար ռեժիմի ենթադրությունը հնարավորություն է տալիս կվազիգծային մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը բերել գծային հավասարումների համակարգի։ Կիրառելով Լապլասի ձևափոխությունը ստացվում է խնդրի փակ լուծումը։ Որոշվում են ճնշման, արագության, երկայնական և ընդլայնական ելքերի փոփոխման օրենքները։ Լուծված է կոնկրետ թվային օրինակ։

NON-STATIONARY FLOW OF LIQUID IN PERMEABLE WALLED TUBES

G. A. BABAJANIAN

S u m m a r y

Non-stationary isothermal flow of noncompressible viscid liquid in flat and cylindrical permeable tubes is considered. The laws of vari-

ation pressure, rate of longitudinal and transversal discharge of liquid are determined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабаджанян Г. А.* Течение реальной несжимаемой жидкости в трубах с проницаемыми стенками.— Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1978, т. 31, № 1.
2. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.—Л.: Гостехтеориздат, 1951.
3. *Лейбензон Л. С.* Собрание трудов. Т. II. М.: Изд. АН СССР, 1953, 1[illegible]7 с.
4. *Лаврентьев М. А.* и *Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Гостехиздат, 1951.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 16. XI. 1981

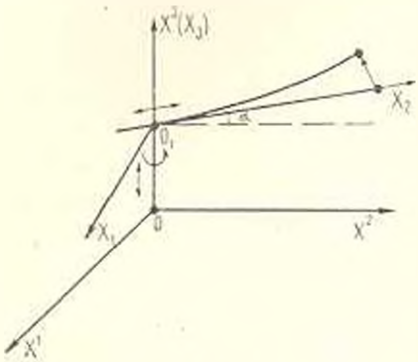
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 3, 1983 Механика

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМЫХ ДВИЖЕНИЙ УПРУГОГО МАНИПУЛЯТОРА С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ ПОДВИЖНОСТИ

ГУКАСЯН А. А.

1. *Исходные предположения и постановка задачи.* При исследовании динамики манипуляторов их звенья обычно считаются абсолютно твердыми телами. Однако, при движении управляемых систем, в частности, роботов и манипуляторов, в ряде случаев существенную роль играет упругая податливость конструкций. Упругость системы приводит к дополнительным колебательным степеням свободы. Исследование динамики упругого манипулятора было в общем случае проведено в работе [1], где рассмотрен многозвенный манипулятор с произвольным числом шарниров. В данной работе на основе методики, описанной в [1], исследуется динамика упругого манипулятора, схема которого приведена на фиг. 1. Манипулятор имеет три управляемых степени подвижности (две поступательные и одна вращательная), соответствующие изменению длины рабочей части звена манипулятора, его вертикальному перемещению и повороту вокруг неподвижной оси. В качестве механической модели рабочего органа (руки) манипулятора принимается тонкий нерастяжимый стержень, подверженный слабым изгибным деформациям. На конце стержня находится груз G, который предполагается абсолютно твердым телом. В недеформированном состоянии стержень имеет прямолинейную форму.



Фиг. 1.

Для описания движения манипулятора введем две правые прямоугольные системы координат $OX^1X^2X^3$ и $O_1X_1X_2X_3$. Ось OX^3 инерциальной системы $OX^1X^2X^3$ направлена по вертикали и является осью вращения стержня. Система $O_1X_1X_2X_3$ является неинерциальной системой координат, которая связана с перемещающимся стержнем. Начало координат совпадает с точкой пересечения стержня с осью вращения. Ось O_1X_3 направлена по вертикали и совпадает с осью вращения OX^3. Ось O_1X_2 направлена по касательной к упругой линии стержня в точке O_1. Ось O_1X_1 дополняет систему до правой прямоугольной системы координат. Точку O_1 будем называть основанием рабочей части звена манипулятора.

Управление манипулятором осуществляется силой F_2, приложенной в точке O_1 и направленной вдоль оси O_1X_2, силой F_1, приложенной в точке O_1 и направленной вдоль вертикальной оси OX^3, и моментом сил M, приложенным к оси вращения.

Введем следующие обозначения: α — угол поворота касательной к упругой оси стержня в точке O_1 вокруг оси вращения OX^3 (для краткости величину α будем называть углом поворота стержня), l — длина рабочей части звена манипулятора (от точки O_1 до нагруженного конца стержня), h — высота основания рабочей части звена манипулятора над горизонтальной плоскостью OX^1X^2, $U(l, t)$ — вектор смещения нагруженного конца упругого стержня, x_1 — проекция вектора смещения на ось O_1X_1, x_3 — проекция вектора смещения на ось O_1X_3. В силу нерастяжимости стержня и малости упругой деформации можно в рамках линейной теории упругости считать, что вектор $U(l, t)$ ортогонален радиусу-вектору нагруженного конца недеформированного стержня. Массу m_n звена манипулятора будем считать пренебрежимо малой по сравнению с массой груза m ($m_n \ll m$) и полагать $m_n = 0$. Такое предположение позволяет рассматривать динамику манипулятора в квазистатическом приближении [1]. В этом случае координаты x_1, x_3, l, h, α вполне определяют конфигурацию деформированного стержня (стрелы манипулятора).

Кинематику движения упругого манипулятора в рамках линейной теории тонких прямолинейных стержней, считая упругие смещения малыми, можно задать следующими соотношениями:

$$q_1 = \alpha + x_1/l, \quad q_2 = l, \quad q_3 = h + x_3 \tag{1.1}$$

С точностью до бесконечно малых высшего порядка обобщенные координаты q_i ($i = 1, 2, 3$) суть: q_1 — угол между осью OX^2 инерциальной системы отсчета и отрезком прямой, соединяющим основание рабочей части стрелы манипулятора (точка O_1) с нагруженным ее концом, q_2, q_3 — проекции радиуса-вектора (относительно точки O) нагруженного конца стержня, соответственно на оси O_1X_2, O_1X_3 вращающейся системы координат.

В случае абсолютно жесткого звена манипулятора имеем $x_1 = x_3 = 0$ (деформации отсутствуют) и величины $q_1 = q_1^0 = \alpha$; $q_2 = q_2^0 = l$; $q_3 = q_3^0 = h$ есть обобщенные координаты, описывающие кинематику движения жесткого манипулятора.

При сделанных предположениях и $m_n \ll m$ следует отметить, что собственные упругие колебания системы (стрелы) можно разделить на две группы. Если обозначить через $C = EJ/l^3$ изгибную жесткость стрелы манипулятора (E — модуль Юнга материала стержня, J — момент инерции поперечного сечения), то частота колебаний первой группы будет порядка $(C/m)^{1/2}$, а второй группы — порядка $(C/m_n)^{1/2}$. Для колебаний первой группы перемещение груза существенно, а стрела манипулятора деформируется квазистатически. Вторая группа состоит из бесконечного числа мод колебаний высоких частот, отвечающих упругим волнам в конструкции манипулятора. Перемещения груза G, обусловленные этими колебаниями, малы, а в силу их более высоких частот они затухают намного быстрее, чем колебания первой группы. Поэтому колебаниями второй группы можно пренебречь. Учитывая лишь колебания первой группы, энергию упругих деформаций системы можно вычислять, считая смещения квазистатическими.

Кинетическая энергия движения манипулятора с грузом на конце равна [4]

$$T=\frac{1}{2}\,m\,(\dot q_2^2+\dot q_3^2+\dot q_1^2 q_2^2) \tag{1.2}$$

Потенциальная энергия манипулятора с грузом в поле сил тяжести П и потенциальная энергия упругих деформаций звена манипулятора П$_1$ равны

$$\Pi=-mg\,q_3 \tag{1.3}$$

$$\Pi_1=3\,EJ\,(x_1^2+x_3^2)/2\,l^3 \tag{1.4}$$

Кинетическая T и потенциальная энергия Π в соответствии с предположением $m_0 \ll m$ включает лишь кинетическую и потенциальную энергию груза G. Потенциальная энергия Π_1 есть энергия малых упругих смещений стрелы манипулятора.

Функция Лагранжа имеет вид

$$L=\frac{1}{2}\,m\,(\dot q_2^2+\dot q_3^2+q_2^2\dot q_1^2)+mg\,q_3-3\,EJ\,(x_1^2+x_3^2)/2\overset{0}{q}{}_2^3 \tag{1.5}$$

Обобщенные непотенциальные силы, соответствующие обобщенным координатам q_1^0, q_2^0, q_3^0, равны $Q_{q_1^0}=M$, $Q_{q_2^0}=F_2$, $Q_{q_3^0}=F_1$. Этот факт непосредственно следует из выражения для работы δW потенциальных сил на виртуальных перемещениях:

$$\delta W=F_1\,\delta q_3^0+F_2\,\delta q_2^0+M\,\delta q_1^0$$

Уравнения Лагранжа, описывающие движение рассматриваемой системы в обобщенных координатах q_1, q_2, q_3, q_1^0, q_3^0, согласно (1.5) принимают следующий вид (см. [1], [3])

$$\begin{gathered} m\,\frac{d}{dt}\,(q_2^2\,\dot q_1)=-C_2(q_2^0)\,x_1,\quad m\,\frac{d}{dt}\,\dot q_2-mq_2\dot q_1^2=F_2 \\ m\,\frac{d}{dt}\,\dot q_3-mg=C_1(q_2^0)\,x_3,\quad M=-C_2\,(q_2^0)\,x_1 \\ F_1=C_1\,(q_2^0)\,x_3 \end{gathered} \tag{1.6}$$

где

$$C_1\,(q_2^0)=3\,EJ/\overset{0}{q}{}_2^3,\quad C_2\,(q_2^0)=3\,EJ/\overset{0}{q}{}_2^2$$

Последние два уравнения системы (1.6) являются вырожденными и описывают условия равновесия безынерционного манипулятора.

Исключая $C_1\,(q_2^0)\,x_3$ и $C_2\,(q_2^0)\,x_1$ из системы уравнений (1.6), получим

$$m\frac{d}{dt}(q_2^2\dot{q}_1)=M,\quad m\frac{d}{dt}\dot{q}_2-mq_2\dot{q}_1^2=F_2$$
$$m\frac{d}{dt}\dot{q}_3-mg=F_1 \tag{1.7}$$

Для абсолютно жесткой модели, когда $x_1=x_3=0$, система (1.7) принимает следующий вид:

$$m\frac{d}{dt}(q_2^{0\,2}\dot{q}_1^0)=M,\quad m\frac{d}{dt}\dot{q}_3^0-mg=F_1^0$$
$$m\frac{d}{dt}\dot{q}_2^0-mq_2^0(\dot{q}_1^0)^2=F_2^0 \tag{1.8}$$

Так как x_1 и x_3 — малые величины, а M и F_1 конечны, то из $M=-C_2(q_2^0)x_1$ и $F_1=C_1(q_2^0)x_3$ следует, что коэффициент жесткости должен быть велик. Следовательно, получим

$$C_1(q_2^0)=\varepsilon^{-2}K_1(q_2^0);\quad x_3=\varepsilon^2X_3 \tag{1.9}$$
$$C_2(q_2^0)=\varepsilon^{-2}K_2(q_2^0);\quad x_1=\varepsilon^2X_1;\quad \varepsilon\ll 1 \tag{1.10}$$

Здесь ε — малый параметр, а K_1, K_2, X_1, X_3 — величины порядка единицы.

При сделанных предположениях динамика упругого манипулятора описывается уравнениями (1.5)—(1.7), (1.9), (1.10). Основываясь на этих уравнениях, можно решить различные задачи динамики управляемого движения упругого манипулятора.

2. *Кинематическое управление.* Пусть задан закон изменения $q_1^0(t)$, $q_2^0(t)$, $q_3^0(t)$, который реализуется двигателями. Требуется найти движение груза $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$, а также силы F_1, F_2 и момент M, обеспечивающие заданное движение для упругого манипулятора.

Подставив формулы $q_1=q_1^0(t)+\varepsilon^2X_1/q_2^0$, $q_2=q_2^0(t)$ и $q_3=q_3^0(t)-\varepsilon^2X_3$ в первое и третье уравнения системы (1.6), получим для $X_1(t)$ и $X_3(t)$ следующие уравнения:

$$m\frac{d}{dt}\left[(\dot{q}_1^0+\varepsilon^2\dot{X}_1/q_2^0)\,q_2^{0\,2}\right]=-C_2(q_2^0)\varepsilon^2X_1 \tag{2.1}$$

$$m\frac{d}{dt}(\dot{q}_3^0-\varepsilon^2\dot{X}_3)-mg=C_1(q_2)\varepsilon^2X_3 \tag{2.2}$$

Уравнения (2.1) и (2.2) содержат малый параметр при старших производных. Их решение в первом приближении ищем в виде [1]:

$$X_1(t)=y_1(t)+z_1(\tau) \tag{2.3}$$
$$X_3(t)=y_3(t)+z_3(\tau)\quad \tau=t/\varepsilon \tag{2.4}$$

где τ — «быстрое» время. Слагаемые $y_1(t)$ и $y_3(t)$ описывают медленное (квазистатическое) смещение, характерное время которого является величиной порядка единицы (порядка времени процесса управления манипулятором). Быстро изменяющиеся слагаемые $z_1(\tau)$ и $z_3(\tau)$ описывают упругие колебания, период которых порядка ε^{-1}.

Подставляя соотношения (2.3), (2.4) в уравнения (2.1) и (2.2), вычисляя производные и опуская члены $O(\varepsilon^2)$, получаем для относительно медленно и быстро изменяющихся слагаемых следующие уравнения:

$$\{2m\dot{q}_2^0\dot{q}_2^0 q_1^0 + mq_2^0\ddot{q}_1^0 - \lambda y_1(t)/\overset{0}{q}{}_2^3\} + \{m\ddot{z}_1(\tau)\overset{0}{q}{}_2^0 + \lambda z_1(\tau)/\overset{0}{q}{}_2^3\} = 0 \quad (2.5)$$

$$\{m\ddot{q}_3^0 - mg - \lambda y_3(t)/\overset{0}{q}{}_2^3\} - \{m\ddot{z}_3(\tau) + \lambda z_3(\tau)/\overset{0}{q}{}_2^3\} = 0 \quad (2.6)$$

где $\lambda = 3\varepsilon^3 EJ \sim 1$.

Первые фигурные скобки в (2.5) и (2.6) заключают выражения, характеризующие квазистатические изменения, не зависящие от τ, а вторые скобки объединяют быстрые слагаемые, зависящие от τ. Потребуем, чтобы каждое из выражений в фигурных скобках (2.5) и (2.6) равнялось нулю. При этом используется произвол, который содержится в представлении решения в виде суммы (2.3) и (2.4).

Приравнивая нулю медленные слагаемые в (2.5) и (2.6), получим

$$X_{1м} = \varepsilon^2 y_1(t) = \overset{0}{q}{}_2^3(-m\ddot{q}_1^0 q_2^0 - 2m\dot{q}_2^0\dot{q}_1^0)/3EJ \quad (2.7)$$

$$X_{3м} = \varepsilon^2 y_3(t) = \overset{0}{q}{}_2^3(m\ddot{q}_3^0 - mg)/3EJ \quad (2.8)$$

Соотношения (2.7) и (2.8) определяют квазистатические упругие смещения.

Приравнивая нулю быстрые слагаемые в (2.5) и (2.6), для $z_1(\tau)$ и $z_3(\tau)$ получим следующие уравнения:

$$\frac{d}{d\tau}\left[\alpha(t)\frac{d}{dt}z_i(\tau)\right] + \beta(t)z_i(\tau) = \varepsilon R(t)\frac{d}{dt}z_i(\tau) \quad (2.9)$$

где

$$\alpha(t) = mq_2(t),\ \beta(t) = \lambda/q_2^3(t),\ R(t) = \dot{q}_2(t)m;\ i = 1;\ 3$$

Дифференциальные уравнения (2.9) описывают колебания механической системы с медленно изменяющимися параметрами. Такие уравнения исследуются при помощи асимптотических методов [2].

Общее решение уравнения (2.9) ищем в виде

$$z_i(\tau) = a_i(t)\cos\psi_i(t) \quad (i = 1;\ 3) \quad (2.10)$$

Величины $a_i(t)$ и $\psi_i(t)$ как функции времени определяются следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d}{d\tau}a_i(t) = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon a_i(t)}{\alpha(t)\omega(t)}\frac{d}{dt}(\alpha(t)\omega(t)) + \frac{\varepsilon}{2\pi\alpha(t)\omega(t)}\int_0^{2\pi} R_i^1(t)\sin^2\psi_i\,d\psi_i$$

$$(2.11)$$

$$\frac{d}{d\tau}\psi_i(t) = \omega(t) - \frac{\varepsilon}{2\pi\alpha(t)\omega(t)a_i(t)}\int_0^{2\pi} R_i^1(t)\sin\psi_i\cos\psi_i\,d\psi_i$$

где

$$\omega(t)=\sqrt{\beta(t)/\alpha(t)},\quad R_1^i(t)=R(t)\,a_i(t)\,\omega(t);\quad i=1;\ 3 \tag{2.12}$$

После вычисления интегралов при постоянном t получим следующие соотношения для $a_i(t)$ и $\psi_i(t)$:

$$\begin{aligned} a_i(t)&=a_i(t_0)\left[\omega(t_0)/\omega(t)\right]^{1/2}\\ \psi_i(t)&=\varepsilon^{-1}\int_{t_0}^{t}\omega(t_1)\,dt_1+\psi_i(t_0)\end{aligned} \tag{2.13}$$

Для определения произвольных постоянных $a_i(t_0)$ и $\psi_i(t_0)$ в решении (2.13) следует воспользоваться начальными данными. Пусть при $t=t_0$ заданы упругие смещения $x_i(t_0)$ и скорость их изменений $\dot x_i(t_0)$. Приравняв эти величины соответственно решению $\varepsilon^2 X(t)$ и его производной при $t=t_0$, получим

$$\begin{aligned} y_i(t_0)+a_i(t_0)\cos\psi_i(t_0)&=\varepsilon^{-2}x_i(t_0)\\ -\varepsilon^{-1}a_i(t_0)\,\omega(t_0)\sin\psi_i(t_0)&=\varepsilon^{-2}\dot x_i(t_0),\quad (i=1;\ 3)\end{aligned} \tag{2.14}$$

В левой части второго равенства (2.14) опущены члены порядка ε^2. Из равенства (2.14) видно, что начальные данные должны иметь следующие порядки малости: $x_i(t_0)\sim\varepsilon^2$; $\dot x_i(t_0)\sim\varepsilon$ (в противном случае не будут выполнены сделанные предположения).

Из уравнения (2.14) получим

$$\begin{aligned} a_i(t_0)&=\left[(y_i(t_0)-\varepsilon^{-2}x_i(t_0))^2\,\omega^2(t_0)+\varepsilon^{-2}\dot x_i^2(t_0)\right]^{1/2}/\omega(t_0)\\ \psi_i(t_0)&=\operatorname{arctg}\dot x_i(t_0)/\varepsilon\left[y_i(t_0)-\varepsilon^{-2}x_i(t_0)\right]\omega(t_0)\end{aligned} \tag{2.15}$$

Подставляя соотношение (2.15) в (2.13), получим

$$a_i(t)=\left[\omega(t_0)\,(y_i(t_0)-\varepsilon^{-2}x_i(t_0))^2/\omega(t)+\dot x_i^2(t_0)/\varepsilon^2\omega(t_0)\,\omega(t)\right]^{1/2}$$

$$\psi_i(t)=\varepsilon^{-1}\int_{t_0}^{t}\omega(t_1)\,dt_1+\operatorname{arctg}\dot x_i(t_0)/\varepsilon\left[y_i(t_0)-\varepsilon^{-2}x_i(t_0)\right]\omega(t_0) \tag{2.16}$$

Управляющий момент M и силы F_1, F_2, необходимые для реализации заданных законов $q_i^0(t)$ $(i=1,2,3)$, найдем, подставляя в $M=-C_2(q_2^0)\,x_1$ и $F_1=C_1(q_2^0)\,x_3$ выражения (2.3) и (2.4). Получим соответственно

$$\begin{aligned} M^*&=-C_2(q_2^0)\,\varepsilon^2(y_1(t)+z_1(\tau))=M_M+M_1\\ F_1^*&=C_1(q_2^0)\,\varepsilon^2(y_3(t)+z_3(\tau))=F_{1M}+F_{1\text{в}}\\ F_2^*&=F_2-F_2^0\end{aligned} \tag{2.17}$$

Следовательно, момент M и силы F_1, F_2, необходимые для реализации заданных законов $q_i^0(t)$ $(i=1, 2, 3)$, для упругого манипулятора равны:

$$F_1 = F_1^0 + F_1^*; \quad F_2 = F_2^0 + F_2^*; \quad M = M^0 + M^*$$

где F_1^0, F_2^0, M^0 определяются из (1.8), а F_2^* равно

$$F_2^* = -2mq_2^0 q_1^0 (x_1/q_2^0)^{\cdot} - mq_2^0[(x_1/q_2^0)^{\cdot}]^2 \qquad (2.18)$$

Итак, в случае заданного кинематического управления $q_i^0(t)$ $(i=1, 2, 3)$ определяются упругие смещения, а также управляющие силы F_1, F_2 и момент M, обеспечивающие реализацию рассчитанного движения.

Смещения x_i $(i=1; 3)$, момент M и силы F_1, F_2 представляются в виде суммы двух слагаемых: медленных или квазистатических и быстрых, которые имеют один и тот же порядок.

3. *Динамическое управление.* Предположим теперь, что задан закон изменения управляющих сил $F_1(q^0, t)$, $F_2(q^0, t)$ и момента $M(q^0, t)$. Этот случай, который будем называть случаем динамического управления, включает как программное управление $M^0(t)$, $F_1^0(t)$, $F_2^0(t)$, так и управление с обратной связью $M(q^0)$, $F_1(q^0)$, $F_2(q^0)$.

Требуется найти движение упругого манипулятора с грузом, то есть в конечном случае $q_i^0(t)$ и $q_i(t)$ $(i=1, 2, 3)$. Считая $M(q^0, t)$ и $F_1(q^0, t)$ заданными, выразим x_1 и x_2 из $M = -C_2(q_2^0)x_1$, $F_1 = C_1(q_2^0)x_2$ и подставим в соотношение (1.1), при этом получим

$$q_1 = q_1^0 - \varepsilon^2 M(q^0, t)/q_2^0 K_2(q_2^0); \quad q_2 = q_2^0; \quad q_3 = q_3^0 - \varepsilon^2 F_1(q^0, t)/K_1(q_2^0) \qquad (3.1)$$

Здесь использованы также представления (1.9) и (1.10). Подставив (3.1) в (1.7) и разложив правые части уравнений (1.7) в ряд по ε^2, получим

$$m\frac{d}{dt}(q_2^2 \dot{q}_1) = M(q^0, t) - \varepsilon^2\mu_1; \quad m\frac{d}{dt}\dot{q}_3 - mg = F_1(q^0, t) - \varepsilon^2\mu_2$$

$$m\frac{d}{dt}\dot{q}_2 - mq_2\dot{q}_1^2 = F_2(q^0, t) - \varepsilon^2\mu_3 \qquad (3.2)$$

где

$$\mu_1 = M(q^0, t)\frac{\partial M}{\partial q_1^0}\Big/ q_2^0 K_2(q_2^0) + F_1(q^0, t)\frac{\partial M}{\partial q_3^0}\Big/ K_1(q_2^0)$$

$$\mu_2 = M(q^0, t)\frac{\partial F_1}{\partial q_1^0}\Big/ q_2^0 K_2(q_2^0) + F_1(q^0, t)\frac{\partial F_1}{\partial q_3^0}\Big/ K_1(q_2^0) \qquad (3.3)$$

$$\mu_3 = M(q^0, t)\frac{\partial F_2}{\partial q_1^0}\Big/ q_2^0 K_2(q_2^0) + F_1(q^0, t)\frac{\partial F_2}{\partial q_3^0}\Big/ K_1(q_2^0)$$

Величины $\varepsilon^2\mu_i$ $(i=1, 2, 3)$ рассматриваются как малые добавки к $M(q^0, t)$, $F_1(q^0, t)$, $F_2(q^0, t)$.

В случае, когда $\varepsilon^2\mu_i$ $(i=1, 2, 3)$ равняются нулю, уравнение (3.2) совпадает с уравнением абсолютно жесткого манипулятора.

Решая уравнение (3.2) при определенных F_1^0, F_2^0 и M^0, можно в конечном итоге получить закон изменения $q_i(t)$ или q_i^0 ($i=1, 2, 3$).

Итак, влияние упругости в случае заданных $M(q^0, t)$, $F_1(q^0, t)$, $F_2(q^0, t)$ учитывается, если в уравнения движения жесткой модели, взятые в любой форме, ввести дополнительные малые силовые слагаемые, которые определяются равенствами (3.3). В этом случае решение для переменных $q_i(t)$ и $q_i^0(t)$ не будет содержать в отличие от п. 2 быстрых упругих колебаний. Движение будет отличаться от движения жесткой модели малыми медленно меняющимися добавочными смещениями.

4. Заданное движение груза. Рассмотрим теперь случай, когда желаемое движение груза задано в виде $q_i = q_i^*(t)$ ($i=1, 2, 3$), где $q_i^*(t)$ — известные функции. Требуется определить программный закон изменения $M(t)$, $F_1(t)$ и $F_2(t)$ для упругого манипулятора. Предполагаем, что начальные данные отвечают заданному движению, то есть $q_i(0) = q_i^*(0)$, $\dot{q}_i(0) = \dot{q}_i^*(0)$ ($i=1, 2, 3$). Воспользуемся уравнениями движения в форме (3.2). В этих соотношениях следует положить $q_i = q_i^*(t)$ ($i=1, 2, 3$) и отождествить M^0, F_1^0, F_2^0 с искомыми $M(t)$, $F_1(t)$ и $F_2(t)$.

Разрешая полученные равенства относительно $M(t)$, $F_1(t)$ и $F_2(t)$, найдем

$$M(t) = M^*(t) + \varepsilon^2\mu_1;\ F_1(t) = F_1^* + \varepsilon^2\mu_2;\ F_2(t) = F_2^*(t) + \varepsilon^2\mu_3 \quad (4.1)$$

где μ_i ($i=1, 2, 3$) оказываются равными нулю:

$$\mu_1 = M(q^*, t)\frac{\partial M}{\partial q_1^*}\Big|\, q_2^* K_2(q_2^*) + F_1(q^*, t)\frac{\partial M}{\partial q_3^*}\Big|\, K_1(q_2^*) = 0$$

$$\mu_2 = M(q^*, t)\frac{\partial M}{\partial q_1^*}\Big|\, q_2^* K_2(q_2^*) + F_1(q^*, t)\frac{\partial F_1}{\partial q_3^*}\Big|\, K_1(q_2^*) = 0 \quad (4.2)$$

$$\mu_3 = M(q^*, t)\frac{\partial M}{\partial q_1^*}\Big|\, q_2^* K_2(q_2^*) + F_2(q^*, t)\frac{\partial F_2}{\partial q_3^*}\Big|\, K_1(q_2^*) = 0$$

и

$$M^*(t) = m\frac{d}{dt}(q_2^{*2} \dot{q}_1^*),\quad F_1^*(t) = m\frac{d}{dt}\dot{q}_3^* - mg$$

$$F_2^*(t) = m\frac{d}{dt}\dot{q}_2^* - mq_2^*(\dot{q}_1^*)^2 \quad (4.3)$$

Здесь $M^*(t)$, $F_1^*(t)$, $F_2^*(t)$ — законы изменения силы F_1, F_2 и M, обеспечивающие заданное движение $q_i^*(t)$ ($i=1, 2, 3$). Дополнительный малый момент и сила, компенсирующие $\varepsilon^2\mu_i$ ($i=1, 2, 3$), определяемые равенствами (4.2), в этом случае равны нулю.

Соотношения (4.1) и (4.3) дают решение поставленной задачи. Итак, для решения задачи управления с упругим элементом, в отличие от жесткой модели, надо учитывать те дополнительные силы и моменты, которые обусловлены упругой податливостью звена манипулятора.

Автор благодарит Ф. Л. Черноусько за постановку задачи, а также Л. Д. Акуленко и Н. Н. Болотина за полезные замечания.

ՂԵԿԱՎԱՐՎՈՂ ԵՐԵՔ ՇԱՐԺՈՒՆԱԿՈՒԹՅԱՆ ԱՍՏԻՃԱՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՄԱՆԻՊՈՒԼՅԱՏՈՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Ա. Ա. ՂՈՒԿԱՍՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է շարժունակության երեք ղեկավարվող աստիճան ունեցող միօղակ մանիպուլյատորի դինամիկական օղակի առաձգական ընկերկելիության հաշվառումով, որը բերում է լրացուցիչ տատանողական ազատության աստիճանների։ Մանիպուլյատորի օղակը ենթադրվում է թույլ դեֆորմացվող չձգվող առաձգական ուղիղ ձող, որի ծայրին գտնվում է բեռ, որը ենթադրվում է բացարձակ կոշտ մարմին։ Մանիպուլյատորի օղակի զանգվածը ենթադրվում է արհամարհելիորեն փոքր համեմատած բեռի զանգվածի հետ։ Ղեկավարումը իրականացվում է չդեֆորմացված օղակի երկայնությամբ ազդող F_2, ուղղաձիգ ազդող F_1 ուժերով և M ուժազույգով, կիրառված պտտման առանցքին։

THE INVESTIGATION OF CONTROLLED MOTIONS OF AN ELASTIC MANIPULATOR WITH THREE DEGREES OF FREEDOM

A. A. GUKASIAN

S u m m a r y

The dynamics of a sigle-link manipulator with three controlled degrees of freedom is investigated, the elastic stiffness of the link giving rise to additional oscillatory degrees of freedom being taken into account. The link of the manipulator is suggested to be a weakly deformalle rectilinear rod loaded by the rigid body on one of its end. The mass of the link is neglected with respect to the mass of the load. The control of the manipulator is carried out by force F_2, directed along the link, vertically directed force F_1 and a torque M, applied to the axis of rotation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф. Л.* Динамика управляемых движений упругого манипулятора.— Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1981, № 5.
2. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1960.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1964.
4. *Айзерман М. А.* Классическая механика. М.: Наука, 1980.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила в редакцию
22. VI. 1982

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 3, 1983 Механика

НЕКОТОРЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СТАТИЧЕСКОЙ АЭРОУПРУГОСТИ ДЛЯ КРЫЛЬЕВ ИЗ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

БАНИЧУК Н. В., ИВАНОВА С. Ю.

Сформулированы задачи минимизации веса прямых крыльев большого удлинения из хаотически армированных изотропных композитных материалов при ограничениях по критическим скоростям дивергенции и реверса. Выведены необходимые условия экстремума и с их помощью найдены оптимальные распределения концентрации армирующих включений по размаху крыльев. Оценены выигрыши по весу, получаемые за счет оптимизации.

Ранее задачи оптимизации рассматривались, в основном, для крыльев из однородных материалов [1—5]. Решение задач с учетом ограничений по дивергенции и реверсу получено в [1, 2, 6—8]. Оптимальному проектированию балок, колонн и оболочек вращения из композитных материалов посвящена работа [9].

1. Рассматриваются задачи минимизации веса прямых крыльев большого удлинения при ограничениях, наложенных на критические скорости дивергенции крыла и реверса элеронов. Материал крыла представляет собой упругий изотропный композит, хаотически армированный жесткими включениями. Эффективный модуль сдвига $G(x)$ (x — координата, изменяемая вдоль размаха крыла) композитного материала связан с концентрацией армирующих включений $\eta(x)$ соотношением [10]

$$G(x) = G_0(1 + \alpha\eta(x)) \tag{1.1}$$

$$\alpha = \frac{E_a}{15\mu_m} - 1, \quad G_0 = \mu_m$$

где E_a — модуль упругости армирующего материала, а μ_m — модуль сдвига матрицы. Функция $\eta(x)$, описывающая распределение концентрации армирующих включений по размаху крыла, выбирается в качестве искомой управляющей переменной, подлежащей определению из условия минимума функционала веса

$$j = A\int_0^l \eta(x)\,dx + B \tag{1.2}$$

$$A = g l^{-1} V(\rho_a - \rho_m), \quad B = g\rho_m V$$

Здесь l — размах крыла, где V — объем, занимаемый силовым материалом, g — ускорение свободного падения, ρ_f и ρ_m — соответственно плотности армирующего материала и матрицы.

На концентрацию $\eta(x)$ армирующего материала наложены ограничения

$$0 < \eta_{min} \leqslant \eta(x) \leqslant \eta_{max} \leqslant 1 \tag{1.3}$$

Для описания деформации применяется балочная модель крыла. Ось x считается совмещенной с упругой осью крыла. Деформации крыла характеризуются в рассматриваемой модели углом закручивания $\Theta = \Theta(x)$. Аэродинамические силы, действующие на крыло, вычисляются согласно теории несущей полосы.

2. Рассмотрим задачу минимизации веса крыла за счет оптимального распределения концентрации армирующих включений по размаху крыла при заданной критической скорости дивергенции. Запишем уравнение равновесия и граничные условия для упругого крыла в потоке газа [11, 12]

$$(G/\Theta_x)_x + C_y^{\alpha} qec^2\Theta = 0 \tag{2.1}$$
$$\Theta(0) = (G/\Theta_x)_{x=l} = 0$$

где c — хорда, ec — расстояние между линиями аэродинамических центров и центров кручения (упругой осью), C_y^{α} — коэффициент подъемной силы $q = \rho v^2/2$ — скоростной напор, v — скорость, ρ — плотность. Нижним индексом x обозначается дифференцирование по этой координате. Для определенности рассматриваются прямоугольные крылья и поэтому считается, что величины c и e не меняются по размаху крыла. Граничные условия (2.1) соответствуют жесткому закреплению в точке $x = 0$ и отсутствию сосредоточенного момента у свободного края, то есть при $x = l$.

С использованием безразмерных переменных и обозначений $x' = x/l$, $\eta' = \eta/\eta_{max}$, $\eta_{min} = \eta_{min}/\eta_{max}$, $\lambda^2 = C_y^{\alpha} qec^2 l^2/G_s$, $J' = (J - B)/A$ основным соотношениям задачи оптимизации можно придать вид (штрихи опускаются)

$$((1 + a\eta)\Theta_x)_x + \lambda^2\Theta = 0 \tag{2.2}$$

$$\Theta(0) = ((1 + a\eta)\Theta_x)_{x=1} = 0 \tag{2.3}$$

$$0 < \eta_{min} \leqslant \eta \leqslant 1 \tag{2.4}$$

$$J = \int_0^1 \eta(x)\, dx \to \min \tag{2.5}$$

Требуется определить распределение концентрации $\eta = \eta(x)$, минимизирующее функционал (2.5) при ограничениях (2.4) и такое, что дивергенция крыла реализуется при заданной критической скорости λ. Заметим, что критическая скорость дивергенции дается минимальным собственным значением задачи (2.2), (2.3). Задача на собственные значения (2.2), (2.3) является самосопряженной и положительно определенной.

Это обстоятельство вносит известные упрощения при получении необходимых условий оптимальности. Проводя стандартные выкладки, получим выражение, связывающее вариации минимизируемого функционала с вариацией управляющей функции

$$\delta J = \int_0^1 (1 - \alpha a \Theta_x^2) \delta\eta \, dx \qquad (2.6)$$

Через α обозначена некоторая неизвестная константа. Из условия минимума $\delta J \geq 0$ получим необходимые условия оптимальности

$$\begin{gathered} \alpha a \Theta_x^2 = 1 \quad \text{при} \quad \eta_{min} < \eta < 1 \\ \alpha a \Theta_x^2 \geq 1 \quad \text{при} \quad \eta = 1 \quad \text{и} \quad \alpha a \Theta_x^2 \leq 1 \quad \text{при} \quad \eta = \eta_{min} \end{gathered} \qquad (2.7)$$

В точках выхода функции $\eta(x)$ на ограничения должны выполняться условия Вейерштрасса-Эрдмана, сводящиеся в рассматриваемом случае к требованию непрерывности функции $\eta(x)$ в этих точках.

Построение аналитического решения основывается на использовании основных соотношений задачи (2.2)—(2.4) и необходимых условий оптимальности (2.7). Из условия оптимальности (2.7) вытекает, что на участке изменения переменной x, где $\eta_{min} < \eta < 1$, зависимость Θ от x дается выражением

$$\Theta = \frac{x}{\sqrt{\alpha a}} + C_1 \qquad (2.8)$$

Подставив (2.8) в уравнение (2.2) и выполнив интегрирование, получим

$$\eta = -\frac{\lambda^2}{2a} x^2 - \frac{\lambda^2}{a} \sqrt{\alpha a}\, C_1 x + C_2 \qquad (2.9)$$

Формула (2.9) справедлива при $\eta_{min} < \eta < 1$. При проведении дальнейших рассмотрений положим $\eta_{min} = 0$ и через x_+, x_- будем обозначать соответственно координаты точек, в которых функция $\eta(x)$, определяемая согласно (2.9), достигает своего нижнего ($\eta = 0$) и верхнего ($\eta = 1$) предельного значения. С использованием этих обозначений и приведенных формул (2.8), (2.9) оптимальное решение может быть представлено в виде

$$\Theta = C_3 \sin\left(\frac{\lambda x}{\sqrt{a-1}} + C_4\right), \quad \eta = 1, \quad 0 \leq x \leq x_+ \qquad (2.10)$$

$$\Theta = \frac{x}{\sqrt{\alpha a}} + C_1, \quad \eta = -\frac{\lambda^2}{2a} x^2 - \frac{\lambda^2}{a} \sqrt{\alpha a}\, C_1 x - C_2, \quad x_+ \leq x \leq x_-$$

$$\Theta = C_5 \sin(\lambda x + C_6), \quad \eta = 0, \quad x_- \leq x \leq 1$$

В выражения (2.10) для Θ и η входят 9 неизвестных констант: α, x_+, x_-, C_i ($i = 1, \cdots, 6$). Константу C_3 определим из условия нормировки $v(1)=1$. Получим $C_5=1$. Для отыскания остальных восьми констант используем два граничных условия (2.3) и шесть соотношений, выражающих условие непрерывности функций $v(x)$, $H(x)$, $H_1(x)$ в точках $x=x_-$, $x=x_+$. С использованием граничных условий получим $C_4=0$, $C_6=1/2\pi-\lambda$. Определение остальных неизвестных сводится к отысканию x_+, x_- из решения системы двух трансцендентных уравнений

$$\frac{\lambda^2}{a}(x_+-x_-)\left[\frac{\sqrt{a+1}}{\lambda}\operatorname{tg}\frac{\lambda x_-}{\sqrt{a+1}}-x_-\right]+\frac{\lambda^2}{2a}(x_+^2-x_-^2)-1=0$$

(2.11)

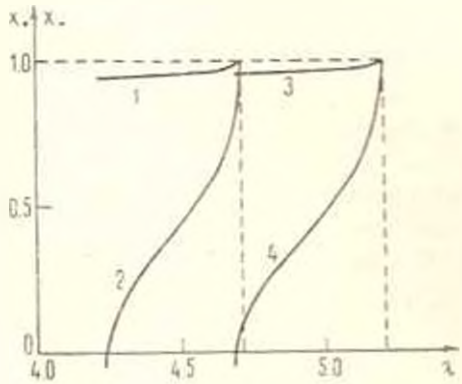
$$\lambda\operatorname{tg}(\lambda(1-x_+))\left(\frac{\sqrt{a+1}}{\lambda}\operatorname{tg}\frac{\lambda x_-}{\sqrt{a+1}}+x_+-x_-\right)-1=0$$

и вычислению α, C_1, C_2, C_3 по формулам

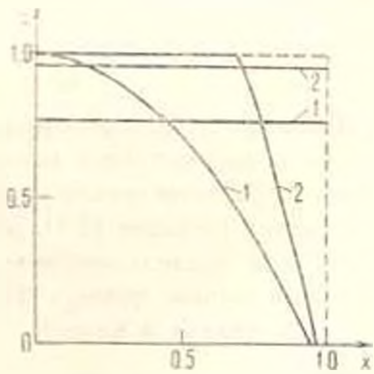
$$\alpha=1/a\lambda^2\sin^2(\lambda(1-x_+)),\quad C_1=\cos\lambda(1-x_+)-\frac{x_+}{\sqrt{\alpha a}}$$

$$C_2=1+\frac{\lambda^2}{2a}x_-^2+\frac{\lambda^2}{a}\sqrt{\alpha a}\,C_1x_-,\quad C_3=\sqrt{a+1}/\lambda\sqrt{\alpha a}\cos\left(\frac{\lambda x_-}{\sqrt{a+1}}\right)$$

Система уравнений (2.11) решалась численно методом Ньютона. Расчеты проводились для значений параметра $a=8$ и $a=10$. Вариант с $a=8$ соответствует углепластику, а вариант с $a=10$—боропластику. На фиг. 1 показаны полученные в результате расчетов зависимости величин x_+ и x_- от параметра λ соответственно для случаев $a=8$ (кривые 1, 2) и $a=10$ (кривые 3, 4). На фиг. 2 кривыми 1, 2 показаны опти-



Фиг. 1.



Фиг. 2

мальные распределения концентрации $v_1(x)$ при $a=8$ для случаев $\lambda=4.240$ и $\lambda=4.665$. Для сравнения прямыми линиями 1, 2 показаны постоянные распределения v_0, соответствующие тем же значениям λ и параметра a. Значению $\lambda=\lambda_{кр}=\pi/2$ соответствует решение с $v_1(x)=0$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$. Для всех рассчитанных решений с $\lambda>\pi/2$, как это видно из фиг. 1 и 2, реализуется выход на нижнее ограничение.

Выход распределения концентрации $\eta(x)$ на верхнее ограничение $\eta=1$ происходит для значений $\lambda \geqslant 4{,}24$. Допустимые значения параметра λ, для которых проводились расчеты, не превышают величины $\lambda_{max} = 1/2\,\pi\sqrt{a+1}$, определенной из условия, что $\eta(x) = 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

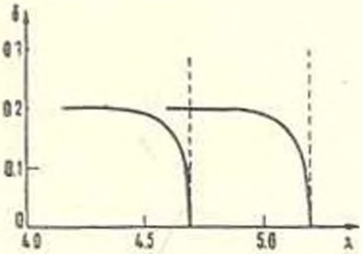
Для распределения выигрыша, получаемого за счет оптимизации, сравним по весу (по функционалу J) оптимальное крыло с эталонным крылом тех же размеров и с тем же значением параметра λ, но для которого распределение армирующего материала по размаху крыла является постоянным $\eta(x) = \text{const}$. Относительный выигрыш в весе δ оценивается по формуле

$$\delta = 1 - \frac{a\pi^2}{4\lambda^2 - \pi^2}\Big(x_+ - \frac{\lambda^2}{6a}(x_+^3 - x_-^3) - \frac{\lambda^2}{2a}\sqrt{aa}\,C_1(x_+^2 - x_-^2) + \tag{2.12}$$

$$+ C_2(x_+ - x_-)\Big)$$

Найденные в результате расчетов зависимости $\delta = \delta(\lambda)$ показаны на фиг. 3 кривыми 1 и 2 соответственно для случаев $a = 8$ и $a = 10$.

При изменении λ в диапазоне $4{,}3 \leqslant \lambda \leqslant 4{,}4$ выигрыш в весе, оцененный по формуле (2.12), составляет 19—18 %. Существенная зависимость δ от λ проявляется в окрестности точки $\lambda = \lambda_{max}$.



Фиг. 3.

3. Рассмотрим задачу минимизации веса прямого крыла большого удлинения с элероном при заданной критической скорости реверса элерона. Как и в предыдущем параграфе, в качестве искомой управляющей функции примем распределение концентрации $\eta(x)$, а ось x совместим с упругой осью крыла. Угол $\Theta(x)$ закручивания крыла относительно этой оси и угол $\beta(x)$ отклонения элерона представим в виде $\Theta(x) = \Theta_0\varphi(x)$, $\beta(x) = \beta_0\chi(x)$. Функция $\chi(x)$ на участке расположения элерона $x \in [\xi_1 l, \xi_2 l]$ считается заданной (для жесткого элерона $\chi(x) = 1$). На остальной части крыла $\chi(x) \equiv 0$. Размах крыла l и параметры ξ_1, ξ_2 удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant \xi_1 < \xi_2 \leqslant 1$. Интегро-дифференциальное уравнение упругого равновесия крыла в потоке газа и граничные условия имеют вид [7, 11, 12]

$$(GJ\varphi_x)_x + C_y^\alpha e c^2 q\varphi = \frac{C_y^\alpha c^2 \chi q\left[\dfrac{\partial C_y}{\partial\beta}e + \dfrac{\partial C_m}{\partial\beta}\right]\displaystyle\int_0^l xc\varphi\,dx}{\displaystyle\int_0^l \frac{\partial C_y}{\partial\beta}\chi c x\,dx}$$

$$\varphi(0) = (GJ\varphi_x)_{x=l} = 0$$

где $\partial C_y/\partial\beta$ и $\partial C_m/\partial\beta$ — заданные аэродинамические коэффициенты. В дальнейшем рассматривается случай прямоугольного крыла с жестким элероном, расположенным по всему размаху крыла. В этом случае $\xi_1=0$, $\xi_2=1$, а e и c не зависят от x. Приведенные соотношения (3.1) представляют собой несамосопряженную краевую задачу на собственные значения, причем роль собственного значения играет скоростной напор q. Наименьшее собственное значение q определяет критическую скорость реверса $v=\sqrt{2q/\rho}$. Если приравнять правую часть в уравнении нулю, то получим краевую задачу, совпадающую с (2.1) и описывающую явление крутильной дивергенции крыла.

В безразмерных переменных, введенных в предыдущем параграфе, и с учетом обозначения $d=1+(\partial C_m/\partial\theta)/(\partial C_y/\partial\theta)e$, $\mu=\dfrac{C_y^\theta ec^2ql^2}{IG_0}$ (μ — приведенный скоростной напор) основные соотношения задачи оптимизации примут вид

$$((1+a\eta)\varphi_x)_x+\mu\varphi=2\mu d\int_0^1 x\varphi dx \tag{3.1}$$

$$\varphi(0)=((1+a\eta)\varphi_x)_{x=1}=0 \tag{3.2}$$

$$0\leqslant\eta_{\min}\leqslant\eta\leqslant 1 \tag{3.3}$$

$$J=\int_0^1\eta(x)\,dx\to\min \tag{3.4}$$

Задача оптимизации (3.1)—(3.4) заключается в отыскании распределения концентрации $\eta(x)$, доставляющего минимум функционалу веса крыла и такого, что критическое значение приведенного скоростного напора μ, являющегося минимальным собственным значением краевой задачи (3.1), (3.2), равно заданной величине.

Получим необходимое условие оптимальности. С этой целью, вводя сопряженную функцию $\psi(x)$, составим расширенный функционал Лагранжа

$$J_L=\int_0^1\eta(x)dx+\int_0^1\psi(x)\left[\left((1+a\eta)\varphi_x\right)_x+\mu\varphi-2\mu d\int_0^1 x\varphi dx\right]$$

Выражение для первой вариации функционала, обусловленной вариациями функций η и φ, при помощи выполнения элементарных операций и применения интегрирования по частям может быть записано в виде

$$\delta J_L=\int_0^1(1-a\varphi_x\psi_x)\delta\eta dx+\int_0^1\left[((1+a\eta)\psi_x)_x+\mu\psi-2\mu dx\int_x^1\psi dx\right]\delta\varphi dx-$$

$$-[\psi\delta((1+a\eta)\varphi_x)]_{x=0}-[(1+a\eta)\psi_x\delta\varphi]_{x=1}$$

В дальнейшем будем считать, что сопряженная переменная ψ является решением следующей краевой задачи на собственные значения:

$$((1+a\eta)\psi_x)_x+\mu\psi=2\mu dx\int_0^1\psi dx \qquad (3.5)$$

$$\psi(0)=((1+a\eta)\psi_x)_{x=1}=0 \qquad (3.6)$$

Тогда в выражении для вариации функционала J_l все слагаемые, кроме первого, обратятся в нуль. Будем иметь

$$\delta J_l=\int_0^1(1-a\varphi_x\psi_x)\,\delta\eta dx \qquad (3.7)$$

Для функции η, доставляющей минимум функционалу J при ограничениях (3.3), должно выполняться неравенство $\delta J_l \geqslant 0$. Данное неравенство с учетом соотношений (3.3), (3.7) приводит к следующим необходимым условиям оптимальности:

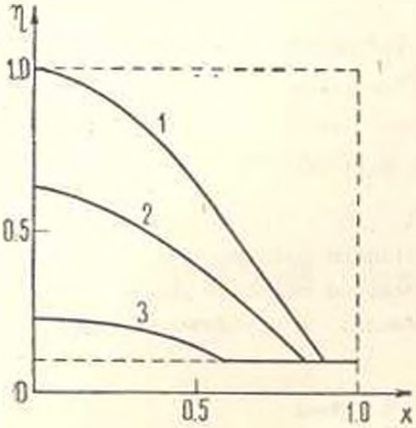
$$\begin{aligned} &a\varphi_x\psi_x<1, \quad \eta=\eta_{min}\\ &a\varphi_x\psi_x=1, \quad \eta_{min}<\eta<1\\ &a\varphi_x\psi_x>1 \quad \eta=1 \end{aligned} \qquad (3.8)$$

В точках выхода функции η на ограничения и в точках ξ_1, ξ_2 должны выполняться условия непрерывности величин ψ и $(1+a\eta)\psi_x$.

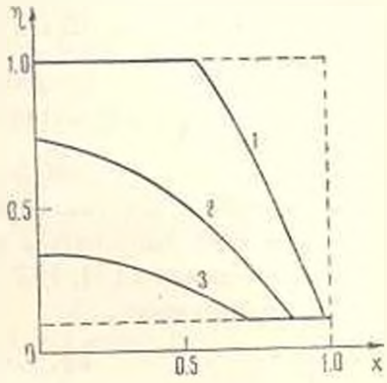
В работе [7] показано, что для прямоугольного крыла при отрицательных значениях параметра d активным является ограничение по скорости реверса, то есть что для крыла минимального веса, найденного при условии $\mu=\mu_0$ ($\mu>0$ — заданная константа), величина критического скоростного напора дивергенции удовлетворяет неравенству $\lambda^2 \geqslant \mu_0$. При положительных значениях d определяющим является ограничение по скорости дивергенции. В последнем случае нужно вместо уравнения (3.1) рассматривать уравнение дивергенции крыла (2.2). Доказательство, приведенное в [7], распространяется и на случай, рассматриваемый в данной работе. Поэтому ниже численное решение задачи минимизации веса приводится только для отрицательных значений параметра d.

Численное решение оптимальной задачи проводилось при помощи алгоритма последовательной оптимизации. Решение «прямых» задач на собственные значения (3.1), (3.2) и (3.5), (3.6) для функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ (при заданном распределении концентрации $\eta(x)$) отыскивалось методом последовательных приближений [13]. Улучшающие вариации управляющей функции $\eta(x)$ выбирались по методу проектирования градиентов. При этом существенно использовалась формула для вариации функционала (3.7). Подробное описание применяемого алгоритма содержится в [14]. Опишем результаты расчетов для $a=10$ (боропластик).

На фиг. 4 показаны полученные в результате расчетов концентрации включений для $\mu=7$ и $\eta_{min}=0{,}1$. Кривыми 1, 2, 3 показаны соответственно распределения, отвечающие значениям параметра $d=0$, -1, -2. Распределение армирующего материала оказывается наиболее эффективным вблизи закрепленного края, причем во всех рассчитанных случаях вблизи свободного края концентрация η принимает минимальное допустимое значение. Представленные на фиг. 5 оптимальные распределения концентрации отвечают случаю $d = -0.5$, $\eta_{min} = 0.1$. Кривыми с номерами 1, 2, 3 показаны



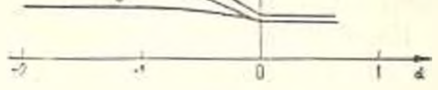
Фиг. 4.



Фиг. 5.

распределения $\eta(x)$, соответствующие значениям $\mu = 17.09$; 10.53; 5.69. С увеличением параметра μ увеличивается область максимально допустимой концентрации, поведение функции $\eta(x)$ в переходной зоне ($\eta_{min} < \eta < 1$) становится менее плавным.

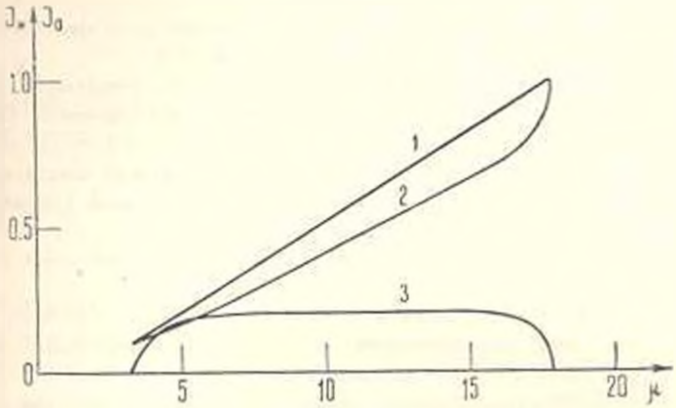
Зависимость оптимального веса J_* от параметра d показана на фиг. 6 кривой 2. Для сравнения на этой же фигуре кривой 1 показана зависимость веса J_0 от параметра d для эталонного крыла с постоянным распределением концентрации $\eta(x) = \text{const}$. Размеры эталонного и оптимального крыльев, а также их аэродинамические характеристики предполагаются одинаковыми. Относительный выигрыш, получаемый за счет оптимизации, показан кривой 3. Для отрицательных d (в широком диапазоне изменения этого параметра) выигрыш составляет 20—21%. Для положительных d, как отмечалось выше, определяющим является ограничение по скорости дивергенции, а это означает, что рассматриваемые величины не зависят от d при $d > 0$ (фиг. 6).



Фиг. 6.

На фиг. 7 сплошными линиями 1, 2, 3 представлены соответственно зависимости функционалов веса для эталонного и оптимального крыльев, а также получаемого относительного выигрыша от μ. Значение параметра d, отвечающее всем трем кривым, равно $d = -0.5$. Отметим, что линии, изображающие зависимости J_0 и J_* от μ, при постоянном d так же, как и линии, изображающие зависимость указанных величин от d, при постоянном

μ мало отличаются от прямых. Сопоставление рассчитанных зависимостей J_0 и J_1 от μ позволяет сделать вывод, что за счет оптимального распределения армирующего материала и подбора параметра μ можно значительно снизить вес крыла.



Фиг. 7.

В заключение заметим, что приведенные в данной работе решения дают возможность при помощи только перерастяжения и масштабирования переменных получать оптимальные решения некоторых задач минимизации веса за счет варьирования толщин обшивки $h(x)$ по размаху крыла (материал однородный) при двусторонних ограничениях, наложенных на допустимые значения толщин.

Авторы выражают благодарность В. И. Бирюку, В. В. Кобелеву, А. П. Сейраняну за полезные обсуждения и замечания.

ԿՈՄՊՈԶԻՏ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ԹԵՎԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԱԷՐՈԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՍՏԱՏԻԿ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ն. Վ. ԲԱՆԻՉՈՒԿ, Ս. ՅՈՒ. ԻՎԱՆՈՎԱ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում դիտարկված են կոմպոզիտ նյութերից թևերի կշռի մինիմալացման խնդիրներ ըստ ոլորման կրիտիկական արագության և էլերոնի դարձիչի կրիտիկական արագության սահմանափակումներով։

Ստացված են օպտիմալության անհրաժեշտ պայմաններ, բերված է թվային լուծում։

SOME OPTIMIZATION PROBLEMS OF STATIC AEROELASTICITY FOR WINGS MADE FROM COMPOSITE MATERIALS

N. V. BANICHUK, S. Ju. IVANOVA

S u m m a r y

The weight minimization problems for wings made from composite materials are considered under the constraints on the critical divergence

speed and critical aileron reverse speed. Necessary optimality co-
ditions are derived; a numerical solution is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *McIntosh S. C. and Eastep F. E.* Design of minimum mass structures with spe-
cified stiffness properties.—AIAA J., 1968, 6, 962—964.
2. *Ashley H., McIntosh S. C.* Applications of aeroelastic constraints in structu-
optimization. Proceeding of the 12-th International Congress of Theoretical a
Applied Mechanics, Springer—Verlag, Berlin, 1969.
3. *Украинуса Г. В., Фролов В. М.* Метод оптимизации силовой конструкции крыла с
жесткости при варьировании распределением относительной толщины профиля.—
Учен. записки ЦАГИ, 1972, т. 3, № 4.
4. *Бирюк В. И., Липин Е. К., Фролов В. М.* Методы проектирования самолетов. М
Машиностроение, 1977.
5. *Баничук Н. В., Бирюк В. И., Ковнлс И. И., Миронов А. А., Сейранян А. П.* Кры
минимального веса при ограничении по несущей способности.— Учен. запис
ЦАГИ, 1979, т. X, № 1.
6. *Баничук Н. В.* Минимизация веса крыла при ограничении по скорости дивергенции.—
Учен. записки ЦАГИ, 1978, т. IX, № 5.
7. *Сейранян А. П.* Оптимизация веса крыла при ограничениях по статической аэр
упругости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 4.
8. *Сейранян А. П.* Задача минимизации веса крыла с обратной стреловидностью пр
ограничении по скорости дивергенции.— Учен. записки ЦАГИ, 1979, № 6.
9. *Баничук Н. В., Кобелев В. В.* Оптимизация конструкций из хаотически армирова
ных композитов. Механика композитных материалов, 1981, № 2.
10. *Аннин Б. Д.* Современные модели пластических тел. Новосибирск: 1975.
11. *Бисплингофф Р. Л., Эшли Х., Халфмен Р. Л.* Аэроупругость. М.: ИЛ, 1958.
12. *Фын Я. Ц.* Введение в теорию аэроупругости. М.: Физматгиз, 1959.
13. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968.
14. *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980.

Институт проблем механики АН СССР
Московский физико-технический институт

Поступила в редакци
12. VI. 198

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 3, 1983 Механика

О СХОДИМОСТИ ОДНОГО МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В КЛАССЕ ЗАДАЧ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

БРОВКО Г. Л.

В рамках общей теории пластичности А. А. Ильюшина [1] в качестве ее частного варианта [2] предложена теория упруго-пластических процессов малой кривизны, для которой проведен анализ постановки и методов решения краевых задач [3]. В отличие от теории малых упруго-пластических деформаций [4], обладающей целым рядом хорошо обоснованных и подробно изученных методов [5—7], в теории упруго-пластических процессов малой кривизны расчетная методика требует разработки. Для решения краевых задач этой теории [8] предложен метод последовательных приближений — метод семидискретизации [9]. В настоящей работе дано доказательство сходимости этого метода, одновременно устанавливающее существование решения краевых задач (единственность решения установлена в [10]) и некоторое свойство его гладкости. При доказательстве в основном используются подходы, методика и обозначения, принятые в работах [5—7, 11—14].

Краевая задача теории упруго-пластических процессов малой кривизны [8] описывает квазистатический процесс деформации начально недеформированного и ненапряженного изотропного упруго-пластического тела, занимающего область трехмерного пространства Ω с границей S, на отрезке времени $t \in [0, T]$ под действием объемных сил $F(x, t)$, заданных в $Q = \Omega \times [0, T]$, поверхностных сил $T_{\sigma}(x, t)$, заданных на части $\Sigma_{\sigma} = S_{\sigma} \times [0, T]$ поверхности $\Sigma = S \times [0, T]$, при граничных скоростях перемещений $\psi(x, t)$, заданных на остальной части $\Sigma_u = S_u \times [0, T]$ $(S_{\sigma} \cap S_u = S)$ поверхности Σ. Задача состоит в отыскании вектор-функции скоростей перемещений точек тела $\mathbf{v}(x, t)$, тензора скоростей деформаций $v_{ij}(x, t)$ и тензора напряжений $\sigma_{ij}(x, t)$. Предполагается, что внешние нагрузки обеспечивают в каждой точке тела упруго-пластический процесс рассматриваемого класса (малой кривизны).

Доказательство сходимости метода проводится для обобщенной формулировки краевой задачи, выражающейся в операторном уравнении [8]

$$A v = g \tag{1.1}$$

где A: $L_1([0, T], H(\Omega)) \rightarrow L_{\infty}([0, T], H^{*}(\Omega))$ — основной оператор краевой задачи теории, g — заданный элемент из $L_{\infty}([0, T], H^{*}(\Omega))$, определяемый внешними нагрузками, $\mathbf{v}$ — искомый элемент и $L_1([0,\ T],\ H(\Omega))$.

Согласно основной схеме метода семидискретизации [9] производится разбиение рассматриваемого интервала времени $[0,\ T]$ на N отрезков длины Δ точками $t_n = n\Delta\ (n = 0,\ 1,\ 2, \cdots,\ N;\ t_0 = 0,\ t_N = T)$, вводится кусочно-постоянное (семидискретное) приближенное представление $\mathbf{v}_{(\Delta)}(x,\ t)$ неизвестной вектор-функции скоростей точек тела $\mathbf{v}(x,\ t)$

$$\mathbf{v}_{(\Delta)}(x,\ t) = \mathbf{v}^{(n)}(x) \text{ при } t \in (t_{n-1},\ t_n]\ (n = 1,\ 2, \cdots,\ N) \tag{1.2}$$

а также аналогичные представления других функций процесса, и относительно $\mathbf{v}^{(n)}(x)$ поэтапно для $n = 1,\ 2, \ldots, N$ решается рекуррентная последовательность краевых задач, выражающаяся при выполнении кинематических граничных условий интегральным соотношением

$$\iiint\limits_{\Omega} \sigma_{ij}^{\text{ср.}(n)}(x)\,\zeta_{ij}(x)\,d\Omega = \iiint\limits_{\Omega} F_i^{\text{ср.}(n)}(x)\,\zeta_i(x)\,d\Omega +$$

$$+ \iint\limits_{S_\sigma} T_{\nu i}^{\text{ср.}(n)}(x)\,\zeta_i(x)\,dS \tag{1.3}$$

с произвольной мгновенной виртуальной скоростью $\zeta(x)$. В соотношении (1.3) величины $F_i^{\text{ср.}(n)} = (F_i^{(n)} - F_i^{(n-1)})/\Delta$ и $T_{\nu i}^{\text{ср.}(n)} = (T_{\nu i}^{(n)} - T_{\nu i}^{(n-1)})/\Delta$ — средние скорости изменения заданных внешних нагрузок на n-ом этапе, а приближенное значение средней скорости изменения напряжений на n-ом этапе $\sigma_{ij}^{\text{ср.}(n)} = (\sigma_{ij}^{(n)} - \sigma_{ij}^{(n-1)})/\Delta$ выражается через искомую вектор-функцию $\mathbf{v}^{(n)}(x)$ в виде

$$\sigma_{ij}^{\text{ср.}(n)} = 2G\left[1 - \frac{s^{(n)}\omega(s^{(n)}) - s^{(n-1)}\omega(s^{(n-1)})}{s^{(n)} - s^{(n-1)}}\right] v_{ij}^{\prime(n)} + \tag{1.4}$$

$$- 2Gs^{(n-1)}[1 - \omega(s^{(n-1)})](p_{ij}^{(n)} - p_{ij}^{(n-1)})/\Delta + 3Kv^{(n)}\delta_{ij}$$

где G и K — модули упругости материала, ω — функция Ильюшина [4], δ_{ij} — символ Кронекера; $v_{ij}^{\prime(k)}$, $v^{(k)}$, $s^{(k)}$, $p_{ij}^{(k)}$ — найденные из рекуррентной последовательности ($k < n$) или искомые ($k = n$) значения (функции от x) соответственно девиатора скоростей деформаций, скорости средней деформации, длины дуги траектории деформации и направляющего тензора скоростей деформаций на k-ом этапе, определенные конечными выражениями [9] от приближенного значения тензора скоростей деформаций на k-ом этапе $v_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2}(v_{i,j}^{(k)} + v_{j,i}^{(k)})$. Кроме того, предполагается, что

$$F_i^{(0)} = 0,\ T_{\nu i}^{(0)} = 0,\ s^{(0)} = 0,\ \sigma_{ij}^{(0)} = 0 \tag{1.5}$$

Основное расчетное соотношение (1.4) метода семидискретизации выражает зависимость в точке $x \in \Omega$ тензора $\sigma_{ij}^{\text{ср.}(n)}$ от тензора $v_{ij}^{(n)}$, прилинейно описывающую в конечных приращениях активную деформацию (интенсивность скоростей деформаций $v_u^{(n)}=\left(\frac{2}{3}v_{ij}^{(n)}v_{ij}^{(n)}\right)^{1/2}$ отлична от нуля) окрестности точки тела в упруго-пластическом процессе малой кривизны. При $v_u^{(n)}\neq 0$ эта зависимость однозначна, непрерывна и имеет потенциал

$$\varphi^{(n)}(v_{ij}^{(n)})=\frac{1}{\Delta}\left(\int\limits_0^{\Delta s^{(n)}}\frac{\Phi(s^{(n-1)}+s)-\Phi(s^{(n-1)})}{\Delta}ds+\Phi(s^{(n-1)})v_u^{(n)}-\right.$$

$$\left.-\sigma_{ij}^{(n-1)}v_{ij}^{(n)}+\frac{9K}{2}v^{(n)2}\right) \qquad (1.6)$$

где $\Delta s^{(n)}=s^{(n)}-s^{(n-1)}=v_u^{(n)}\Delta$, Φ — функция связи $\sigma_u\sim s$ для данного материала: $\Phi(s)=3Gs[1-\omega(s)]$. Для упрочняющихся упруго-пластических материалов зависимость (1.4) строго монотонна, и соответственно потенциал (1.6) — строго выпуклая функция от $v_{ij}^{(n)}$, квадратично возрастающая на бесконечности.

Решение задачи (1.3), (1.4) (предусматривающее активную деформацию почти во всех точках тела), очевидно, существует лишь для определенного класса приращений внешних нагрузок. Не задаваясь априорным выяснением вида таких нагрузок, доопределим потенциал (1.6) по непрерывности при $v_u^{(n)}=0$, а зависимость (1.4) — до многозначного при $v_u^{(n)}=0$ отображения, задаваемого множеством опорных гиперплоскостей к графику функции (1.6), (то есть допустим при расчете в общем случае также возможность «жесткой разгрузки») и, аналогично [15], вместо задачи (1.3), (1.4) будем рассматривать на n-ом этапе метода задачу о минимизации функционала

$$J^{(n)}[\mathbf{v}^{(n)}]\equiv\iiint\limits_{\Omega}\varphi^{(n)}(v_{ij}^{(n)}(x))\,d\Omega-\iiint\limits_{\Omega}F_i^{cp,(n)}(x)\,v_i^{(n)}(x)\,d\Omega-$$

$$-\iint\limits_{S_0}T_{vi}^{cp,(n)}(x)\,v_i^{(n)}(x)\,dS \qquad (1.7)$$

на множестве кинематически возможных скоростей n-го этапа $\mathbf{v}^{(n)}$. Функционал (1.7) по свойствам аналогичен функционалам вязкопластичности, подробно изученным в [15]. Задача о минимизации (1.7) (с доопределенным потенциалом (1.6)) имеет решение $\mathbf{v}^{(n)}$ без существенных ограничений на вид приращений внешних нагрузок, и если при этом $v_u^{(n)}\neq 0$ почти всюду в Ω, то ее решение $\mathbf{v}^{(n)}$ есть также решение задачи (1.3), (1.4).

Теорема. Пусть заданные внешние нагрузки удовлетворяют условиям

$$F_i\in L_\infty([0,T],L_p(\Omega)),\quad T_{vi}\in L_\infty([0,T],L_q(S_0)) \qquad (1.8)$$

$$\dot F_i\in L_2([0,T],L_p(\Omega)),\quad \dot T_{vi}\in L_2([0,T],L_q(S_0))$$

$$(p>6/5,\ q\geqslant 4/3)$$

$$F_i(x, 0) = 0, \quad T_{ii}(x, 0) = 0 \tag{1.9}$$

Пусть материал является инфинитезимально или начально упругим [16], и описывающая его пластические свойства функция ω Ильюшина [4] удовлетворяет условиям

$$0 \leq \frac{s_1\,\omega(s_1) - s_2\,\omega(s_2)}{s_1 - s_2} \leq \frac{s_1'\,\omega(s_1') - s_2'\,\omega(s_2')}{s_1' - s_2'} < \lambda < 1 \tag{1.10}$$

для произвольных неотрицательных s_1, s_2, s_1', s_2' таких, что $s_1 \leq s_1'$, $s_2 \leq s_2'$, $s_1 \neq s_2$, $s_1' \neq s_2'$. Пусть для любого Δ решение $\mathbf{v}^{(n)}$ задачи n-го этапа метода семидискретизации ($n = 1, 2, \cdots, N$) таково, что $v_{**}^{(n)} \neq 0$ почти всюду в Ω. Тогда операторное уравнение (1.1) имеет единственное решение $\mathbf{v} \in L_2([0, T], H(\Omega))$, последовательность семидискретных приближенных решений $\mathbf{v}_{(\Delta)}$ вида (1.2) сходится при $\Delta \to 0$ к решению $\mathbf{v}$ слабо в $L_2([0, T], H(\Omega))$, а последовательность кусочно-линейных по t функций

$$\overset{\circ}{u}_{(\Delta)i}(x, t) = \int\limits_0^t v_{(\Delta)i}(x, \tau)\, d\tau \tag{1.11}$$

сходится к функции перемещений

$$u_i(x, t) = \int\limits_0^t v_i(x, \tau)\, d\tau \tag{1.12}$$

сильно в $L_2([0, T], L_2(\Omega)) = L_2(Q)$ и почти всюду в $Q = \Omega \times [0, T]$, причем $\overset{\circ}{u}_{(\Delta)}, u \in C([0, T], H(\Omega))$.

Замечание 1. Из условия (1.8) следует [13], что

$$F_i \in C([0, T], L_p(\Omega)), \quad T_{ii} \in C([0, T], L_q(S_2)) \tag{1.13}$$

и поэтому значения (соответственно в $L_p(\Omega)$ и $L_q(S_2)$) внешних нагрузок F_i и T_{ii} при любом $t \in [0, T]$ существуют, в частности, формулы (1.9) имеют смысл.

Замечание 2. Поскольку в обобщенной постановке краевых задач [8] кинематические граничные условия предполагаются однородными, то в силу выбора функциональных пространств они всюду выполняются автоматически.

Доказательство. Покажем сначала, что в условиях теоремы для любого разбиения отрезка $[0, T]$ (то есть для любого Δ) функция $\mathbf{v}_{(\Delta)}$ может быть построена, притом единственным образом, в соответствии с указанной схемой метода семидискретизации. Для этого методом математической индукции докажем существование и единственность решения $\mathbf{v}^{(n)} \in H(\Omega)$ задачи n-го этапа метода для всех $n = 1, 2, \cdots, N$.

Основанием индукции служит существование и единственность решения задачи (1.3), (1.4) (или задачи о минимизации функционала (1.7)) при $n = 1$. В этом случае в силу (1.5) соотношение (1.3) приводится к виду

$$\iiint_{\Omega} \sigma_{ij}^{(1)}(x)\,\zeta_{ij}(x)\,d\Omega = \iiint_{\Omega} F_i^{(1)}(x)\,\zeta_i(x)\,d\Omega + \iint_{S_\sigma} T_{\nu i}^{(1)}(x)\,\zeta_i(x)\,dS \tag{1.14}$$

где с учетом (1.9), (1.13) $F_i^{(1)}(x) = F_i(x, t_1)$, $T_{\nu i}^{(1)}(x) = T_{\nu i}(x, t_1)$, а выражение тензора напряжений на первом этапе через искомую вектор-функцию $\mathbf{v}^{(1)}$, получаемое из (1.4), имеет вид

$$\sigma_{ij}^{(1)} = 2G\,[1 - \omega(s^{(1)})]\,v_{ij}^{(1)}\Delta + 3Kv^{(1)}\Delta\delta_{ij} \tag{1.15}$$

что в силу равенств $s^{(1)} = \Delta s^{(1)} = v_*^{(1)}\Delta$ представляет собой основное соотношение теории малых упруго-пластических деформаций [4] ($\sigma_{ij}^{(1)}$ — тензор напряжений, $\vartheta_{ij}^{(1)} = v_{ij}^{(1)}\Delta$ и $\vartheta_*^{(1)} = v_*^{(1)}\Delta$ — девиатор и интенсивность деформаций, $\varepsilon^{(1)} = v^{(1)}\Delta$ — средняя деформация). Следовательно, соотношения (1.14), (1.15) представляют не что иное, как соответствующую вариационному принципу Лагранжа [4] обобщенную формулировку некоторой краевой задачи теории малых упруго-пластических деформаций, существование и единственность в $H(\Omega)$ решения которой в условиях настоящей теоремы доказаны [5, 6]. Заметим, что если на рассматриваемом начальном этапе процесса $[0, t_1]$ деформации являются простыми [4, 16] или же не выходят за предел упругости, то полученное на этом этапе приближенное решение: перемещения $u_i^{(1)}(x) = v_i^{(1)}(x)\Delta$, деформации $\varepsilon_{ij}^{(1)}(x) = v_{ij}^{(1)}(x)\Delta$, напряжения $\sigma_{ij}^{(1)}(x)$ — совпадает с точным решением в момент t_1: $u_i(x, t_1)$, $\varepsilon_{ij}(x, t_1)$, $\sigma_{ij}(x, t_1)$.

Основание индукции установлено.

При переходе от $n-1$ к n будем считать (индуктивное предположение), что найдены, притом единственным образом решения на всех предыдущих этапах метода:

$$\mathbf{v}^{(k)} \in H(\Omega) \quad k = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{1.16}$$

По условию теоремы $v_*^{(k)} \neq 0$ почти всюду в Ω. Тогда на основании неравенств Коши—Буняковского, неравества Корна и теорем вложения Соболева [11, 12, 15, 17] из (1.4), (1.6), (1.8), (1.10), (1.13), (1.16) с учетом определения функциональных пространств $H(\Omega)$ [7, 8] вытекает, что функционал (1.7) является непрерывным строго выпуклым на $H(\Omega)$, и при $\|\mathbf{v}^{(n)}\|_{H(\Omega)} \to \infty$ имеем $J^{(n)}[\mathbf{v}^{(n)}] \to \infty$. Следовательно, в силу известных теорем [12, 14] он имеет точку строгого минимума $\mathbf{v}^{(n)} \in H(\Omega)$, и таким образом, задача n-го этапа метода имеет единственное решение $\mathbf{v}^{(n)}$. Теорема индуктивного перехода доказана.

Итак, для любого Δ существует единственная функция $\mathbf{v}_{(\Delta)}$ вида (1.2), построенная по схеме метода семидискретизации. Условие $v_*^{(n)} \neq 0$ почти всюду в $\Omega\,(n = 1, 2, \cdots, N)$ означает, что для всех $\mathbf{v}^{(n)}$, наряду с экстремальностью (1.7) при условии (1.6), выполнены соотношения (1.3), (1.4).

Рассмотрим теперь последовательность таких функций $\{v_{(\Delta)}\}$ и покажем, что при $\Delta \to 0$ она является сходящейся, и ее предел есть обобщенное решение краевой задачи, то есть решение операторного уравнения (1.1).

Полагая в (1.3) $\tau = \mathbf{v}^{(n)} \in H(\Omega)$, умножая обе части на Δ и суммируя по n от 1 до N, с учетом определения $F_i^{\text{ср.}(n)}$, $T_{\nu i}^{\text{ср}(n)}$ в [9] получаем

$$\sum_{n=1}^{N}\Delta\iiint_{\Omega}\sigma_{ij}^{\text{ср.}(n)}(x)\,v_{ij}^{(n)}(x)\,d\Omega=\sum_{n=1}^{N}\iiint_{\Omega}\int_{t_{n-1}}^{t_n}F_i(x,\tau)\,d\tau\cdot v_i^{(n)}(x)\,d\Omega+ \tag{1.17}$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\iint_{S_2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}T_{\nu i}(x,\tau)\,d\tau\,v_i^{(n)}(x)\,dS$$

откуда, используя (1.10) и (1.2), приходим к неравенству

$$2G(1-\lambda)\int_0^T\iiint_{\Omega}v_{(\Delta)ij}v_{(\Delta)ij}\,d\Omega dt+9K\int_0^T\iiint_{\Omega}v_{(\Delta)}^2\,d\Omega dt\leqslant \tag{1.18}$$

$$\leqslant\int_0^T\iiint_{\Omega}F_i\,\mathbf{v}_{(\Delta)i}\,d\Omega dt+\int_0^T\iint_{S_2}T_{\nu i}\,v_{(\Delta)i}\,dSdt$$

правая часть которого представляет собой на основании (1.8) в силу теорем Соболева [11, 17] линейный ограниченный функционал от $v_{(\Delta)}\in L_2([0,\ T],\ H(\Omega))$. Обозначая этот функционал как элемент сопряженного пространства $L_2([0,\ T],\ H^*(\Omega))$ через g^*, получаем из (1.18) оценку

$$\|\mathbf{v}_{(\Delta)}\|_{L_2([0,\ T],\ H(\Omega))}\leqslant C \tag{1.19}$$

где константа $C=(2G(1-\lambda)/3)^{-1}\|g^*\|_{L_2([0,\ T],\ H^*(\Omega))}$ не зависит от Δ.

Оценка (1.19) показывает, что последовательность $\{v_{(\Delta)}\}$ при $\Delta\to 0$ ограничена в $L_2([0,\ T],\ H(\Omega))$. В силу свойства слабой компактности ограниченных множеств, следующего [18] из рефлексивности пространства $L_2([0,\ T],\ H(\Omega))$, последовательность $\{v_{(\Delta)}\}$ имеет в $L_2([0,\ T],\ H(\Omega))$ слабую предельную точку, и можно считать, что она является сходящейся[1]. Обозначим предел этой последовательности через v. Поскольку из слабой сходимости в $L_2([0,\ T],\ H(\Omega))$ следует слабая сходимость в $L_1([0,\ T],\ H(\Omega))$, имеем

$$\mathbf{v}_{(\Delta)}\to\mathbf{v}\quad\text{слабо в } L_1([0,\ T],\ H(\Omega)) \tag{1.20}$$

---

[1] Точнее говоря, существует сходящаяся подпоследовательность, которую мы также можем обозначить через $\{v_{(\Delta)}\}$. Однако ввиду выполнения условий единственности решения [10] не требуется специально выделять в $\{v_{(\Delta)}\}$ сходящуюся подпоследовательность.

Далее, следуя определениям семидискретных приближений типа (1.2) функций процесса [9], с помощью (1.19) для функций $\sigma_{(\Delta)ij}(x, t)$ нетрудно получить для произвольного $n = 1, 2, \cdots, N$ и произвольного $t \in (t_{n-1}, t_n]$ (то есть для произвольного $t \in [0, T]$) следующую оценку[1]:

$$\|\sigma_{(\Delta)}\|_{(L_2(\Omega))^9} \leq C_1 \tag{1.21}$$

где постоянная $C_1 = C'TC^2$ одна и та же для всех $t \in [0, T]$ и не зависит от Δ (C' — положительная постоянная, зависящая только от модулей G и K; C — та же константа, что и в (1.19)). Это показывает ограниченность последовательности $\{\sigma_{(\Delta)ij}\}$ при $\Delta \to 0$ в $L_\infty([0, T], (L_2(\Omega))^9)$. По теореме Данфорда-Петтиса [19] это пространство является сопряженным к сепарабельному банахову пространству $L_1([0, T], (L_2(\Omega))^9)$, и следовательно, в $L_\infty([0, T], (L_2(\Omega))^9)$ выполняется свойство $*$ — слабой компактности ограниченных множеств. Поэтому на основании (1.21) можем аналогично (1.20) считать последовательность $\{\sigma_{(\Delta)ij}\}$ $*$ — слабо сходящейся в $L_\infty([0, T], (L_2(\Omega))^9)$ к некоторому элементу σ_{ij}:

$$\sigma_{(\Delta)ij} \to \sigma_{ij} \quad * \text{ — слабо в } L_\infty([0, T], (L_2(\Omega))^9) \tag{1.22}$$

Поскольку $\sigma_{(\Delta)ij}, \sigma_{ij} \in L_\infty([0, T], (L_2(\Omega))^9)$, то они определяют собой некоторые ограниченные линейные функционалы $\sigma_{(\Delta)}$ и σ соответственно над $L_1([0, T], H(\Omega))$, задаваемые формулами

$$\langle \sigma_{(\Delta)}, \xi \rangle = \int_0^T \iiint_\Omega \sigma_{(\Delta)ij} \xi_{ij}\, d\Omega dt, \quad \langle \sigma, \xi \rangle = \int_0^T \iiint_\Omega \sigma_{ij} \xi_{ij}\, d\Omega dt \tag{1.23}$$

для любой $\xi \in L_1([0, T], H(\Omega))$, то есть $\sigma_{(\Delta)}, \sigma \in (L_1([0, T], H(\Omega)))^* = L_\infty([0, T], H^*(\Omega))$. Из (1.22), (1.23) легко получить сходимость

$$\sigma_{(\Delta)} \to \sigma \quad * \text{ — слабо в } L_\infty([0, T], H^*(\Omega)) \tag{1.24}$$

Покажем теперь, что предельная функция в (1.22) (функционал в (1.24)) удовлетворяет условиям равновесия в форме принципа виртуальных работ [8]. Умножая обе части (1.3) на Δ и суммируя по n по 1 до m ($1 \leq m \leq N$), с учетом (1.5), а также определений в [9] для произвольного $m = 1, 2, \ldots, N$ получаем

$$\iiint_\Omega \sigma_{ij}^{(m)}(x)\, \zeta_{ij}(x)\, d\Omega = \iiint_\Omega F_i^{(m)}(x)\, \zeta_i(x)\, d\Omega +$$

$$+ \iint_{S_\sigma} T_i^{(m)}(x)\, \zeta_i(x)\, dS \tag{1.25}$$

---

[1]) Через $(L_2(\Omega))^9$ обозначено прямое произведение девяти гильбертовых пространств $L_2(\Omega)$.

что выражает для семидискретного приближения напряжений $\sigma_{(\Delta)ij}$ выполнение условия равновесия в форме принципа виртуальных мощностей [8] с семидискретными приближенными нагрузками $F_{(\Delta)i}$, $T_{\nu(\Delta)i}$.

Далее, рассмотрим произвольную непрерывную абстрактную функцию

$$\xi \in C([0, T], H(\Omega)) \tag{1.26}$$

Обозначим через $\xi_{(\Delta)}(x, t)$ ее семидискретное приближение вида (1.2), положив $\xi^{(n)}(x) \equiv \xi(x, t_n)$. Подставляя в (1.25) $\xi = \xi^{(m)} \in H(\Omega)$, умножая обе части на Δ и суммируя по m от 1 до N, получаем

$$\int_0^T \iiint_\Omega \sigma_{(\Delta)ij}(x, t)\, \xi_{(\Delta)ij}(x, t)\, d\Omega dt = \tag{1.27}$$

$$= \int_0^T \iiint_\Omega F_{(\Delta)i}(x, t)\, \xi_{(\Delta)i}(x, t)\, d\Omega dt + \int_0^T \iint_{S_\sigma} T_{\nu(\Delta)i}(x, t)\, \xi_{(\Delta)i}(x, t)\, dS dt$$

При $\Delta \to 0$ имеет место (1.22), а также сходимости: $\xi_{(\Delta)} \to \xi$ сильно в $L_1([0, T], H(\Omega))$, $\xi_{(\Delta)ij} \to \xi_{ij}$ сильно в $L_1([0, T], (L_2(\Omega))^6)$, $F_{(\Delta)i} \to F_i$ в $L_\infty([0, T], L_p(\Omega))$, $T_{\nu(\Delta)i} \to T_{\nu i}$ в $L_\infty([0, T], L_q(S_\sigma))$, где $p > 6/5$, $q \geqslant 4/3$. Отсюда на основании (1.27) в пределе при $\Delta \to 0$ приходим к неравенству

$$\int_0^T \iiint_\Omega \sigma_{ij}(x, t)\, \xi_{ij}(x, t)\, d\Omega dt = \tag{1.28}$$

$$= \int_0^T \iiint_\Omega F_i(x, t)\, \xi_i(x, t)\, d\Omega dt + \int_0^T \iint_{S_\sigma} T_{\nu i}(x, t)\, \xi_i(x, t)\, dS dt$$

для любой функции вида (1.26). А поскольку множество функций вида (1.26) слабо плотно в $L_1([0, T], H(\Omega))$, то (1.28) имеет место для любой $\xi \in L_1([0, T], H(\Omega))$, что и означает выполнение для предельной функции $\sigma_{ij}(x, t)$ условий равновесия в форме принципа виртуальных работ. С учетом (1.23), а также определения функционала g виртуальной работы внешних сил [8], фигурирующего также в (1.1), можем записать (1.28) в виде

$$\sigma = g \text{ в } L_\infty([0, T], H^*(\Omega)) \tag{1.29}$$

Покажем, наконец, что для предельных функций $\mathbf{v}$ из (1.20) и σ из (1.24) на самом деле выполнено соотношение

$$\sigma = A\mathbf{v} \tag{1.30}$$

где A — основной оператор краевой задачи теории упруго-пластических процессов малой кривизны [8]. Иными словами, покажем, что для предельных функций $\sigma_{ij}(x, t)$ и $\mathbf{v}(x, t)$ выполнены соотношения этой теории

[8]. Подставляя в (1.25) $\xi = \mathbf{v}^{(m)} \in H(\Omega)$, умножая обе части на Δ и суммируя по m от 1 до N, с учетом представлений вида (1.2) имеем

$$\int_0^T \iiint_\Omega \sigma_{(\Delta)ij}(x, t)\, v_{(\Delta)ij}(x, t)\, d\Omega dt = \tag{1.31}$$

$$= \int_0^T \iiint_\Omega F_{(\Delta)i}(x, t)\, v_{(\Delta)i}(x, t)\, d\Omega dt + \int_0^T \iint_{S_\sigma} T_{*(\Delta)i}(x, t)\, v_{(\Delta)i}(x, t)\, dS dt$$

или в обобщенной записи

$$\langle \sigma_{(\Delta)},\ v_{(\Delta)} \rangle = \langle g_{(\Delta)},\ v_{(\Delta)} \rangle \tag{1.32}$$

В силу замечания 1 при $\Delta \to 0$ $F_{(\Delta)i} \to F_i$ сильно в $L_\infty([0,\ T],\ L_p(\Omega))$, $T_{*(\Delta)i} \to T_{*i}$ сильно в $L_\infty([0,\ T],\ L_q(S_\sigma))$, где $p \geqslant 6/5$, $q \geqslant 4/3$, и следовательно, $g_{(\Delta)} \to g$ сильно в $L_\infty([0,\ T],\ H^*(\Omega))$. Кроме того, имеет место (1.20). Следовательно, $\langle g_{(\Delta)},\ \mathbf{v}_{(\Delta)} \rangle \to \langle g,\ \mathbf{v} \rangle$, то есть в силу (1.29), (1.32)

$$\langle \sigma_{(\Delta)},\ \mathbf{v}_{(\Delta)} \rangle \to \langle \sigma,\ \mathbf{v} \rangle \tag{1.33}$$

Введем обозначения

$$s^*_{(\Delta)}(x, t) = \int_0^t v_{u(\Delta)}(x, \tau)\, d\tau,\quad \varepsilon^*_{(\Delta)}(x, t) = \int_0^t v_{(\Delta)}(x, \tau)\, d\tau \tag{1.34}$$

и рассмотрим функцию

$$\sigma^*_{(\Delta)ij}(x, t) = 2Gs^*_{(\Delta)}(x, t)[1 - \omega(s^*_{(\Delta)}(x, t))]\, p_{(\Delta)ij}(x, t) + 3K\varepsilon^*_{(\Delta)}(x, t)\, \delta_{ij} \tag{1.35}$$

выражающуюся через $v_{(\Delta)ij}$ как тензор напряжений через тензор скоростей деформаций по соотношениям теории упруго-пластических процессов малой кривизны. Легко видеть [8], что справедливо формальное равенство

$$\langle A\mathbf{v}_{(\Delta)},\ \xi \rangle = \int_0^T \iiint_\Omega \sigma^*_{(\Delta)ij}(x, t)\, \xi_{ij}(x, t)\, d\Omega dt \tag{1.36}$$

где A — основной оператор теории. Очевидно, что $\sigma^*_{(\Delta)ij} \in L_\infty([0,\ T],\ (L_2(\Omega))^6)$. На основании определения семидискретных приближений функций процесса [9], а также соотношений (1.10), (1.19), (1.34), (1.35) можно получить следующую равномерную по $t \in [0,\ T]$ оценку близости функций $\sigma_{(\Delta)ij}$ и $\sigma^*_{(\Delta)ij}$ при $\Delta \to 0$:

$$\|\sigma_{(\Delta)ij} - \sigma^*_{(\Delta)ij}\|^2_{(L_2(\Omega))^6} \leqslant (\Delta/T)\, C_1 \tag{1.37}$$

где постоянная C_1 та же, что и в (1.21). Из (1.37) видно, что при $\Delta \to 0$ разность $(\sigma_{(\Delta)ij} - \sigma^*_{(\Delta)ij}) \to 0$ сильно в $L_\infty([0,\ T],\ (L_2(\Omega))^6)$, а следовательно, в силу (1.23), (1.36) имеем

$$(\sigma_{(\Delta)} - Av_{(\Delta)}) \to 0 \text{ сильно в } L_\infty([0, T], H^*(\Omega)) \tag{1.38}$$

На основании (1.19), (1.20), (1.24), (1.33), (1.38) получаем

$$Av_{(\Delta)} \to \sigma \ast\text{-- слабо в } L_\infty([0, T], H^*(\Omega)), \ \langle Av_{(\Delta)}, v_{(\Delta)} \rangle \to \langle \sigma, v \rangle \tag{1.39}$$

В силу монотонности оператора A [10] имеем

$$\langle A\xi - Av_{(\Delta)}, \xi - v_{(\Delta)} \rangle \geqslant 0 \quad \forall \xi \in L_1([0, T], H(\Omega)) \tag{1.40}$$

Переходя в (1.40) к пределу при $\Delta \to 0$ с учетом (1.39), получаем неравенство $\langle A\xi - \sigma, \xi - v \rangle \geqslant 0$ для любой $\xi \in L_1([0, T], H(\Omega))$, откуда следует [14] доказываемое соотношение (1.30).

Итак, на основании (1.20), (1.29), (1.30) заключаем, что последовательность семидискретных приближений $\{v_{(\Delta)}\}$ при $\Delta \to 0$ имеет предел v, и этот предел удовлетворяет операторному уравнению (1.1), то есть является обобщенным решением краевой задачи теории упруго-пластических процессов малой кривизны [8]. Как доказано [10], полученное решение является единственным.

Далее, в силу неравенства Корна, справедливого [12, 15, 17] для функций из $H(\Omega)$, имеем: $v_{(\Delta)i}$, $v_i \in L_2([0, T], W_2^{(1)}(\Omega))$ и, в частности, $v_{(\Delta)i}$, $v_i \in L_2([0, T], L_2(\Omega)) = L_2(Q)$. Следовательно, функции (1.11), (1.12), а также их первые производные принадлежат классу $L_2(Q)$, то есть, таким образом, $\dot{u}_{(\Delta)i}$, $u_i \in W_2^{(1)}(Q)$. На основании (1.19), (1.20) можно установить, что функции $\dot{u}_{(\Delta)i}$ составляют ограниченное множество в $W_2^{(1)}(Q)$ и $\dot{u}_{(\Delta)i} \to u_i$ слабо в $W_2^{(1)}(Q)$. По теореме Реллиха-Кондрашова [20] вложение $W_2^{(1)}(Q)$ в $L_2(Q)$ компактно. Следовательно, последовательность $u_{(\Delta)i} \to u_i$ сильно в $L_2(Q)$ и почти всюду в Q. Кроме того, из известных теорем [13, 18] следует что функции $\dot{u}_{(\Delta)}$, $u \in C([0, T], H(\Omega))$. Таким образом, $\{\dot{u}_{(\Delta)}\}$ есть последовательность непрерывных абстрактных функций, сходящаяся при каждом $t \in [0, T]$ почти всюду в Ω к непрерывной абстрактной функции u.

Теорема доказана.

В уточнение замечания 1 можно отметить, что условия (1.8) на внешние нагрузки F_i и T_{ni} краевой задачи означают, что они являются непрерывными по Гельдеру (с гельдеровой константой $\alpha > 1/2$) отображениями из $[0, T]$ в пространства Лебега $L_p(\Omega)$ и $L_q(S_\sigma)$ соответственно (пространства классов функций, суммируемых со степенями p и q). Условия (1.8) выполняются для весьма широкого класса внешних нагрузок.

Требование в условии теоремы инфинитезимальной или начальной упругости материала, а также условия (1.10), означающие возрастание и выпуклость (невогнутость) кривой $\sigma_u \sim s$, и являющиеся частным случаем известных [4] свойств функции ω, выполняются для широкого класса упрочняющихся упруго-пластических материалов. Более того, отметим, что в первой части доказательства теоремы (при доказательстве возможности построения, притом единственным образом, функции $\mathbf{v}_{(\Lambda)}$ для любого Λ) свойство выпуклости кривой $\sigma_u \sim s$ не использовалось, а во второй части доказательства теоремы (при установлении соотношения (1.30)) оно использовалось лишь как достаточное условие монотонности основного оператора A, примененной притом в заключении довольно общего характера. Это позволяет предположить, что требование выпуклости (невогнутости) кривой $\sigma_u \sim s$ в условии теоремы может быть ослаблено.

Требуемые в условиях теоремы для любого Λ неравенства $v_u^{(n)} \neq 0$ ($n = 1, 2, \ldots, N$) почти всюду в Ω исключают возможность появления в теле зон разгрузки (признаком которых может служить появление при расчетах на n-ом этапе метода «жестких зон» с $v_u^{(n)} = 0$, определяемых решением $\mathbf{v}^{(n)}$ задачи о минимизации функционала (1.7) с доопределенным потенциалом (1.6)) и тем самым регламентирует множество способов изменения во времени задаваемых полей внешних нагрузок. Проверка выполнения неравенства $v_u^{(n)} \neq 0$ почти всюду в Ω с одновременной оценкой малости вычисляемых приближенных значений кривизны траекторий деформации непосредственно в ходе расчетов на каждом этапе метода семидискретизации может служить для задаваемых внешних нагрузок расчетным критерием того, что в каждой точке тела обеспечен упруго-пластический процесс малой кривизны. Выяснение вида внешних нагрузок, обеспечивающих такое неравенство, представляется необходимым при теоретическом исследовании условий упруго-пластического процесса малой кривизны.

Приведенное в настоящей работе доказательство теоремы может служить основой при рассмотрении вопроса о сходимости приближенных решений различных модификаций метода семидискретизации [9]. Использованные методы и подходы могут быть плодотворными также при исследовании других классов нелинейных краевых задач механики деформируемого твердого тела.

ՊԼԱՍՏԻԿՈՒԹՅԱՆ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԴԱՍՈՒՄ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻ ՄԵԹՈԴԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Դ. Լ. ԲՐՈՎԿՈ

Ամփոփում

Բերվում է հաջորդական մոտավորությունների մեթոդի զուգամիտության ապացույցը փոքր կորության առաձգա-պլաստիկ պրոցեսների տեսության եզրային խնդիրների համար, ցույց է տրվում եզրային խնդիրների լուծման գոյությունը և ողորկության մի քանի հատկությունները։ Ապացուցման ընթացքում օգտագործվում են ֆունկցիոնալ անալիզի մեթոդները։ Արտաքին բեռերի, ինչպես նաև նյութի պլաստիկ հատկությունների (սկզբնական առաձգականության, ամրապնդման, $\sigma_u \sim s$ կախվածության կորի ուռուցիկության) վրա պահանջվող պայմանները սահմանափակող չեն։ Առաջարկվում է մարմնում փոքր կորության առաձգա-պլաստիկ պրոցեսների իրականացման հաշվարկային հայտանիշ, որը ստուգվում է անմիջականորեն հաշվումների ընթացքում։

ON THE CONVERGENCE OF ONE METHOD OF SUCCESSIVE APPROXIMATION IN THE CLASS OF BOUNDARY PROBLEMS OF GENERAL PLASTICITY

G. L. BROVKO

Summary

In the framework of the theory of small-curvature elastoplastic processes we give the proof of a convergence towards the method of successive approximation (the method of semidiscretization): the establiching of the existence and certain properties of smoothness in the solution of the boundary value problem. To obtain the proof modern methods of functional analysis are used. The required loading conditions as well as the limitations to the properties of a plastic material (infinitesimal or initial elasticity, work-hardening with the convex (non-concave) curve) are found in a wide range. The calculative criterion of realization of the small-curvature elastoplastic processes in the body is given verified immediately during the calculation scheme of the method.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
2. *Ильюшин А. А., Ленский В. С.* О соотношениях и методах современной теории пластичности. В сб.: «Успехи механики деформируемых сред». М.: Наука, 1975, с. 240—255.
3. *Бровко Г. Л.* Анализ постановки и методы решения краевых задач теории упруго-пластических процессов малой кривизны. Автореф. канд. дисс. М.: МГУ, 1978.
4. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Ч. 1. М.—Л.: ГИТТЛ, 1948.
5. *Быков Д. Л.* О некоторых методах решения задач теории пластичности. В сб.: «Упругость и неупругость». Вып. 4. М.: Изд-во МГУ, 1975, с. 119—139.
6. *Ворович И. И., Красовский Ю. П.* О методе упругих решений.— Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 4.
7. *Бровко Г. Л., Ленский В. С.* О сходимости метода однородных линейных приближений в задачах теории пластичности неоднородных тел.— ПММ, 1972, т. 36, № 3.
8. *Бровко Г. Л.* О постановке краевых задач теории упруго-пластических процессов малой кривизны.— Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1980, № 4, с. 80—83.
9. *Бровко Г. Л.* Об одном методе последовательных приближений в классе задач общей теории пластичности.— Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1982, № 6.
10. *Бровко Г. Л.* Теорема единственности в теории упруго-пластических процессов малой кривизны.— Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1980, № 5, с. 70—74.
11. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
12. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.: Физматгиз, 1952.
13. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
14. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972.
15. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981.
16. *Бровко Г. Л.* Необходимые и достаточные условия однородно простой деформации.— ПММ, 1978, т. 42, № 4, с. 701—710.

17. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
18. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ. 1962.
19. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
20. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Е.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
12.X.1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVI, № 3, 1983 Механика

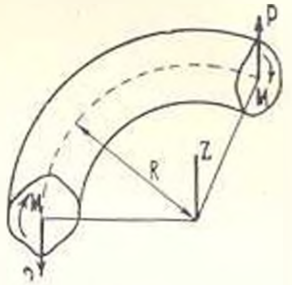
КРУЧЕНИЕ СЕКТОРА КРУГОВОГО КОЛЬЦА С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

ПОЛАДЯН Ф. М.

Рассматривается задача о кручении стержня с круговой осью и постоянным поперечным сечением, материал которого обладает свойством нелинейной наследственной ползучести [1].

Пусть рассматриваемый стержень находится под воздействием перерезывающих сил P и крутящих моментов PR (R-радиус оси стержня), приложенных на торцевых сечениях (фиг. 1).

Впервые такая задача в постановке теории упругости рассматривалась в работе [2], а затем — в [3—6]. Аналогичная задача за пределом упругости для неупрочняющегося материала исследована в [7—9]. Для упрочняющегося материала эта задача исследована в работах [10—12].



Фиг. 1.

Кручение кривых стержней при нелинейной наследственной ползучести исследовано в работах [13—15].

§ 1. *Основные уравнения задачи.* В случае пространственного напряженного состояния связь между компонентами деформации ползучести и напряжения при нелинейной теории наследственности с учетом старения материала, согласно Н. Х. Арутюняну [1], имеет вид

$$2G(t)\,\varepsilon_{ij}(t) = s_{ij}(t) - \int_{\tau_1}^{t} s_{ij}(\tau)\,K_1(t,\tau)\,d\tau -$$

$$- \int_{\tau_1}^{t} s_{ij}(\tau)\,f[\sigma_0(\tau)]\,K(t,\tau)\,d\tau \qquad (1.1)$$

где $G(t)$ – модуль мгновенной деформации сдвига, $\varepsilon_{ij}(t)$ — компоненты деформаций, $s_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t) - \delta_{ij}\,\sigma(t)$, $\sigma_{ij}(t)$ — компоненты напряжения, δ_{ij} — символ Кронекера, $\sigma(t)$ — среднее давление, $f[\sigma_0(t)]$ — некоторая функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести для данного материала, $\sigma_0(t)$ — интенсивность касательных напряжений,

$$K_1(t,\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{G(t)}{G(\tau)}\right], \quad K(t,\tau) = 3G(t)\,\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}$$

$C(t, \tau)$ — мера ползучести при одноосном напряженном состоянии, τ_1 — возраст материала в момент приложения нагрузки, t — время.

Воспользуемся цилиндрическими координатами.

Для компонентов деформации будем иметь [16]

$$\varepsilon_r(t) = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta(t) = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\varepsilon_z(t) = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{r\theta}(t) = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{1.2}$$

$$2\varepsilon_{z\theta}(t) = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad 2\varepsilon_{zr}(t) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$$

Перемещения представим в виде

$$u = u_0 + \int \left[2r\varepsilon_{r\theta}(t) - r\frac{\partial v}{\partial r} + v\right] d\theta$$

$$v = v_0 + \int \left[r\varepsilon_\theta(t) - u\right] d\theta \tag{1.3}$$

$$w = w_0 + \int \left[2r\varepsilon_{\theta z}(t) - r\frac{\partial v}{\partial z}\right] d\theta$$

где u_0, v_0, w_0 — произвольные функции r, z и t.

Положим, что все компоненты напряжения, за исключением $\tau_{r\theta}(t)$ и $\tau_{z\theta}(t)$, в любой момент времени t равны нулю, тогда из уравнений равновесия [16] остаются

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}(t)}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{z\theta}(t)}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \tau_{r\theta}(t)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[r^2 \tau_{z\theta}(t)\right] = 0 \tag{1.4}$$

Из двух первых уравнений (1.4) следует, что напряженное состояние стержня не зависит от полярного угла θ. Тогда из соотношения (1.1) следует, что тензор деформации также не зависит от θ.

Подставляя (1.3) в (1.2) и учитывая указанное обстоятельство, получим

$$\varepsilon_r(t) = \frac{\partial u_0}{\partial r}, \quad \varepsilon_z(t) = \frac{\partial w_0}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{rz}(t) = \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial r} \tag{1.5}$$

и

$$2\varepsilon_{r\theta}(t) = \frac{\partial v_0}{\partial r} - \frac{v_0}{r}, \quad 2\varepsilon_{z\theta}(t) = \frac{\partial v_0}{\partial z} - \frac{D(t)}{r} \tag{1.6}$$

где $D(t)$ — произвольная функция от t.

Из соотношения (1.6), исключая v_0, получим уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\varepsilon_{z\theta}(t)}{r}\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\varepsilon_{r\theta}(t)}{r}\right] = \frac{D(t)}{r^3} \tag{1.7}$$

Полагая в (1.5) равными нулю все компоненты деформаций, получим систему относительно u_0, w_0. Решая эту систему и пользуясь (1.3), для перемещения получим

$$u = a(t)\, z \sin\theta, \quad v = v_0 + a(t)\, z \cos\theta, \quad w = -D(t)\,\theta - a(t)\, r \sin\theta$$

где $a(t)$ — функция от t, определяемая из условия закрепления стержня.

Вводя функцию напряжений

$$\tau_{r\theta}(t) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad \tau_{z\theta}(t) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial r} \tag{1.8}$$

при помощи соотношения (1.1) и уравнения (1.7) получим основное уравнение задачи

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) - \int_{\tau_1}^{t}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right] K_1(t,\tau)\, d\tau - \int_{\tau_1}^{t}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{f(\tau_0)}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{f(\tau_0)}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right]\right\} K(t,\tau)\, d\tau = -\frac{D(t)\, G(t)}{r^3} \tag{1.9}$$

где

$$\tau_0 = \tau_0(t) = \frac{1}{r^2}\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2} \tag{1.10}$$

Так как боковая поверхность сектора кольца свободна от внешних сил, то $\Phi(r, z, t) = \mathrm{const}$ на контуре. Для односвязной области без нарушения общности можно принять $\Phi(r, z, t) = 0$ на контуре. В случае многосвязной области на каждом контуре Φ принимает различные значения, зависящие только от t.

Таким образом, задача о кручении стержня с круговой осью в условиях нелинейной ползучести приводится к определению функции Φ из нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.9) при граничном условии

$$\Phi(r, z, t) = 0 \quad \text{на } \Gamma \tag{1.11}$$

Крутящий момент выражается формулой

$$M = \iint\limits_{\Omega} \left[(r - R)\, \tau_{z\theta}(t) - z\tau_{r\theta}(t)\right] d\Omega \tag{1.12}$$

Подставляя (1.8) в (1.12) и применяя формулу Грина-Остроградского, получим

$$M = -\oint\limits_{\Gamma} \Phi\, d\left(\frac{z}{r}\right) + R\oint\limits_{\Gamma}\frac{\Phi}{r^2}\, dz + 2R\iint\limits_{\Omega}\frac{\Phi}{r^3}\, d\Omega \tag{1.13}$$

Принимая $\Phi = 0$ на внешнем контуре, найдем

$$M = -\sum_{k=1}^{n} R\Phi_k(t) \oint_{\Gamma_k} \frac{dz}{r^2} + 2R \iint_{\Omega} \frac{\Phi}{r^3} d\Omega \tag{1.14}$$

Здесь $\Phi_k(t)$ — значение Φ на внутренних контурах Γ_k. Для односвязной области имеем [5, 11, 15]

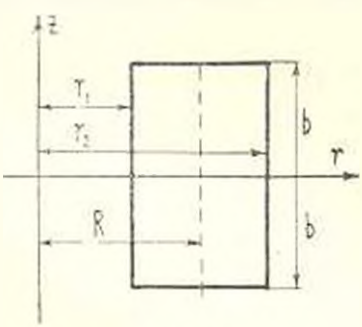
$$M = 2R \iint_{\Omega} \frac{\Phi}{r^3} d\Omega \tag{1.15}$$

§ 2. *Обобщение теоремы Бредта.* Пусть Γ_* — замкнутая кривая, целиком лежащая в поперечном сечении скручиваемого сектора кольца. Область, ограниченную контуром Γ_*, обозначим Ω_*. Интегрируя обе части уравнения (1.9) в области Ω_* и переходя к контурному интегралу, получим (при условии $G(t) = G = \mathrm{const}$)

$$\int_{\Gamma_*} \frac{1}{r^3} \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial n} - \int_{\tau_1}^{t} f[\sigma_0(\tau)] \frac{\partial\Phi}{\partial n} K(t, \tau)\, d\tau \right\} ds = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_*} \frac{dz}{r^2} \tag{2.1}$$

где n — направление внешней нормали к контуру Γ_*, а s — дуга этого контура. Формула (2.1) представляет собой обобщение теоремы Бредта о циркуляции деформации сдвигов при кручении стержня с круговой осью при произвольном законе нелинейной связи между деформациями ползучести и напряжениями.

§ 3. *Прямоугольное сечение.* Рассмотрим случай, когда поперечное сечение представляет прямоугольник (фиг. 2). Тогда граничные условия (1.11) примут следующий вид:



Фиг. 2.

$$\Phi(r_1, z, t) = \Phi(r_2, z, t) = \Phi(r, b, t) = \Phi(r, -b, t) = 0 \tag{3.1}$$

Полагаем, что $f(\sigma_0)$ содержит физический параметр λ, нулевое значение которого соответствует линейной ползучести, то есть $f(\sigma_0) = 1$ при $\lambda = 0$. Закон нелинейности возьмем в виде

$$f[\sigma_0(t)] = 1 + \lambda [\sigma_0(t)]^2 \tag{3.2}$$

Предположим, что решение уравнения (1.9) является аналитической функцией параметра λ и попытаемся определить коэффициенты его разложения в ряд Тейлора по степеням λ. Положим

$$\Phi(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(r, z, t) \tag{3.3}$$

где $\Phi_0(r, z, t)$ соответствует случаю идеально упругого материала.

Для упрощения дальнейших выкладок принимаем

$$G(t) = G = \mathrm{const}$$

Подставляя (3.3) в (1.9) и (1.10), после некоторых преобразований приходим к системе рекуррентных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial r^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial \Phi_n}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial z^2} = -\varphi_n \quad (n=0, 1, \cdots) \tag{3.4}$$

где

$$\varphi_0 = \varphi_0(t) = G\left[D(t) + \int_{\tau_1}^{t} D(\tau)\, R(t, \tau)\, d\tau\right]$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_{n+1}(r, z, t) = \sum_{k=0}^{n} \int_{\tau_1}^{t} N(t, \tau)\,(\operatorname{grad} \Phi_k \operatorname{grad} \omega_{n-k} - \omega_k\, \varphi_{n-k})\, d\tau$$

$$(n = 0, 1, \cdots)$$

$$N(t, \tau) = K(t, \tau) + \int_{\tau}^{t} R(t, \xi)\, K(\xi, \tau)\, d\xi$$

$$\omega_n = r^{-4} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{grad} \Phi_k \operatorname{grad} \Phi_{n-k}$$

$R(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau)$. При

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau)\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right]$$

$$R(t, \tau) = \gamma - \eta'(\tau) + [\eta''(\tau) + \eta'^2(\tau) -$$

$$- \gamma\eta'(\tau)]\, e^{\eta(\tau)} \int_{\tau}^{t} e^{-\eta(x)}\, dx$$

$$\eta(t) = \gamma \int_{\tau_1}^{t} [1 + 3G\varphi(\tau)]\, d\tau$$

$$\varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau} \tag{3.5}$$

здесь γ, C_0, A_1 — некоторые постоянные, характеризующие свойство ползучести материала, определяемые из опыта для данного материала.

Пользуясь (3.1) и (3.3), получим граничные условия для Φ_n:

$$\Phi_n(r_1, z, t) = \Phi_n(r_2, z, t) = \Phi_n(r, b, t) = \Phi_n(r, -b, t) = 0 \tag{3.6}$$

Решение уравнения (3.4) при условии (3.6) ищем в виде ряда

$$\Phi_n(r, z, t) = -\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}(r, t) \cos \mu_k z, \quad \text{где} \quad \mu_k = \frac{2k-1}{2b}\pi \tag{3.7}$$

Тогда для коэффициентов этого ряда получим уравнения

$$\frac{\partial^2 A_{nk}(r,t)}{\partial r^2}-\frac{3}{r}\frac{\partial A_{nk}(r,t)}{\partial r}-\mu_k^2 A_{nk}(r,t)=a_{nk}(r,t) \tag{3.8}$$

где

$$a_{nk}(r,t)=\frac{2}{b}\int\limits_0^b \varphi_{nk}(r,\eta,t)\cos\mu_k\eta\, d\eta \tag{3.9}$$

Вводя новую функцию $B_{nk}(r,t)$ при помощи подстановки

$$A_{nk}(r,t)=r^2 B_{nk}(r,t) \tag{3.10}$$

уравнение (3.8) приведем к дифференциальному уравнению Бесселя [17]

$$r^2\frac{\partial^2 B_{nk}(r,t)}{\partial r^2}+r\frac{\partial B_{nk}(r,t)}{\partial r}-[(r\mu_k)^2+4]\,B_{nk}(r,t)=a_{nk}(r,t) \tag{3.11}$$

а из (3.6), (3.7) и (3.10) получим граничные условия для новых функций $B_{nk}(r,t)$:

$$B_{nk}(r_1,t)=B_{nk}(r_2,t)=0 \tag{3.12}$$

Решая уравнение (3.11) при граничных условиях (3.12) и переходя к $A_{nk}(r,t)$, получим

$$A_{nk}(r,t)=r^2\int\limits_{r_1}^{r_2} a_{nk}(\xi,t)\,\xi\,\Gamma_k(r,\xi)\,d\xi \tag{3.13}$$

где

$\Gamma_k(r,\xi)=B_k(r,\xi)$ при $\xi\leqslant r$, $\Gamma_k(r,\xi)=B_k(\xi,r)$ при $\xi\geqslant r$

причем

$$B_k(r,\xi)=V_k^2(r,r_2)\,V_k^2(\xi,r_1)[V_k^2(r_2,r_1)]^{-1}$$

Здесь

$$V_k^2(r,z)=I_2(\mu_k r)\,K_2(\mu_k z)-I_2(\mu_k z)\,K_2(\mu_k r)$$

где $I_2(x)$ и $K_2(x)$—функции Бесселя мнимого аргумента [17].

Далее, подставляя (3.13) в (3.7) и пользуясь (3.9), после некоторых преобразований окончательно получим

$$\Phi_n(r,z,t)=-\frac{r^2}{b}\iint\limits_{\Omega}\varphi_n(\xi,\eta,t)\,\Gamma(\xi,\eta;r,z)\,d\Omega \tag{3.14}$$

где $\Gamma(\xi,\eta;r,z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Gamma_k(r,\xi)\cos\mu_k\eta\cos\mu_k z$ — функция Грина рассматриваемой задачи.

Для доказательства сходимости ряда (3.3) в области поперечного сечения стержня введем норму

$$\|X\|=\max|X|+\sup\frac{|X(M)-X(N)|}{|MN|^{\alpha}}$$

где M и N — произвольные точки внутри области $0<\alpha<1$. Применяя априорные оценки Шаудера и принцип максимума [18], которые в данном случае запишутся в виде $\|D^2\Phi_n\| \leqslant c\|\varphi_n\|$, где c — некоторая постоянная, зависящая от геометрии области, аналогично [11, 13—15] показано, что ряд (3.3) и ряды, составленные из производных $\sum\limits_{n=0}^{\infty} [illegible] D\Phi_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} [illegible] D^2\Phi_n$, сходятся абсолютно и равномерно с некоторым радиусом сходимости.

§ 4. *Тонкостенный стержень открытого профиля.* Пусть поперечное сечение тонкостенного кривого стержня — узкий прямоугольник, вытянутый по направлению оси z. В этом случае в уравнении (1.9) можно пренебречь производной по z и заменить его уравнением вида

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)-\int\limits_{\tau_1}^{t}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{f(\sigma_0)}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right]K(t,\tau)\,d\tau=-\frac{D(t)\,G}{r^2} \qquad (4.1)$$

где

$$\sigma_0=\sigma_0(t)=\tau_{z\theta}(t)=\frac{1}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial r} \qquad (4.2)$$

Интегрируя уравнение (4.1) и принимая во внимание, что $\sigma_0(t)=0$ при $r=R$ и пользуясь (4.2), получим

$$\sigma_0(t)-\int\limits_{\tau_1}^{t} f[\sigma_0(\tau)]\,\sigma_0(\tau)\,K(t,\tau)\,d\tau=D(\tau)\,Gg \qquad (4.3)$$

где

$$g=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{r^2}\right)$$

Если к этому уравнению применить вышеизложенный метод и удовлетвориться только первыми двумя приближениями, то для $\sigma_0(t)$ получим

$$\sigma_0(t)=Gg\left\{H_0(t,\tau_1)+\lambda Gg\left[H_1(t,\tau_1)+\int\limits_{\tau_1}^{t}H_1(\tau,\tau_1)\,R(t,\tau)\,d\tau\right]\right\}+O(\lambda^2) \qquad (4.4)$$

где

$$H_0(t,\tau_1)=D(t)+\int\limits_{\tau_1}^{t}D(\tau)\,R(t,\tau)\,d\tau$$

$$H_1(t,\tau_1)=\int\limits_{\tau_1}^{t}[H_0(\tau,\tau_1)]^2\,K(t,\tau)\,d\tau \qquad (4.5)$$

здесь приняли $f(\sigma_0)=1+\lambda\sigma_0$.

Пользуясь (1.12) и (4.4), получим

$$H_0(t, \tau_1) + \lambda k_1 \int_{\tau_1}^{t} \Big\{ [H_0(\tau, \tau_1)]^2 +$$

$$+ \int_{\tau_1}^{\tau} [H_0(x, \tau_1)]^2 R(\tau, x)\, dx \Big\} K(t, \tau)\, d\tau = k_2 \tag{4.6}$$

где $k_1 = -G/2R$, $k_2 = M(2\,bh\,G)^{-1}$ ($2h$ — ширина прямоугольника).

Если к уравнению (4.6) применить вышеизложенный метод и удовлетвориться только первыми двумя приближениями, то для неизвестной функции $H_0(t, \tau_1)$ получим

$$H_0(t, \tau_1) = k_2 \Big\{ 1 - \lambda k_1 k_2 \Big[3\,GC(t, \tau_1) -$$

$$- \int_{\tau_1}^{t} \int_{\tau_1}^{\tau} R(t, x)\, K(t, \tau)\, dx\, d\tau \Big] \Big\} + O(\lambda^2)$$

Таким образом, значение $H_0(t, \tau_1)$ известно.

Решая интегральное уравнение (4.5) относительно $D(t)$, будем иметь

$$D(t) = H_0(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^{t} H_0(\tau, \tau_1)\, K(t, \tau)\, d\tau$$

Рассмотрим задачу релаксации напряжений. В начальный момент стержню сообщим крутку $D(\tau_1)$, оставляя ее во времени неизменной. Тогда интегральное уравнение (4.3) примет вид

$$\sigma_0(t) - \int_{\tau_1}^{t} f[\sigma_0(\tau)]\, \sigma_0(\tau)\, K(t, \tau)\, d\tau = D(\tau_1)\, Gg \tag{4.7}$$

Если к этому уравнению применить вышеизложенный метод и удовлетвориться соответственно первыми двумя и первыми тремя приближениями, пользуясь (1.15), для определения релаксации крутящего момента получим следующие формулы:

$$\frac{M(t)}{M(\tau_1)} = H_0^*(t, \tau_1) + \lambda k_3 \Big[H_1^*(t, \tau_1) +$$

$$+ \int_{\tau_1}^{t} H_1^*(\tau, \tau_1)\, R(t, \tau)\, d\tau \Big] + O(\lambda^2) \tag{4.8}$$

$$\frac{M(t)}{M(\tau_1)} = H_0^*(t, \tau_1) + \lambda k_3 \Big[H_1^*(t, \tau_1) +$$

$$+\int_{\tau_1}^{t} H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau)\, d\tau \Big] + \nu^2 k_4 \Big[H_2(t, \tau_1) +$$

$$+\int_{\tau_1}^{t} H_2^*(\tau, \tau_1) R(t, \tau)\, d\tau \Big] + O(\nu^3) \qquad (4.9)$$

где

$$H_0^*(t, \tau_1) = 1 - 3G\gamma\left(C_0 + \frac{A_1}{\tau_1}\right) e^{s\tau_1} \tau_1 s^{-p} \Big[\Phi_*(st, p) - \Phi_*(s\tau_1, p)\Big]$$

$$H_1^*(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^{t} [H_0^*(\tau, \tau_1)]^2 K(t, \tau)\, d\tau$$

$$H_2^*(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^{t} H_0^*(\tau, \tau_1) \Big[H_1^*(\tau, \tau_1) +$$

$$+\int_{\tau_1}^{\tau} H_1^*(x, \tau_1) R(\tau, x)\, dx \Big] K(t, \tau)\, d\tau$$

$$p = 3GA_1\gamma,\ s = \gamma(1 + 3GC_0),\ k_3 = -D(\tau_1)\, G/2R$$

$k_4 = -1{,}5\,[GD(\tau_1)]^2/R^2$, $\Phi_*(\tau, p) = \int_0^{\tau} e^{-\tau}\tau^{-p}\, d\tau$ — неполная гамма-функция.

Для старого материала в (3.5) можно положить $\psi(\tau) = C_0$. Тогда из (4.7) получим замкнутое решение

$$\tau_0(t) = \frac{(\omega - x_2)\, x_1 - x_2(\omega - x_1)\exp(-A_*(t - \tau_1)(x_1 - x_2))}{\omega - x_2 - (\omega - x_1)\exp(-A_*(t - \tau_1)(x_1 - x_2))}$$

где $\omega = D(\tau_1)\, Gg$, $A_* = 3GC_0\, g\gamma$, а x_1 и x_2 — корни уравнения

$$A_* x^2 + \gamma(1 + 3GC_0)\, x - \omega\gamma = 0$$

Аналогичным образом [14, 15], если принять $f(\tau_0) = 1 + \lambda\tau_0^2$, то решение получается в квадратурах.

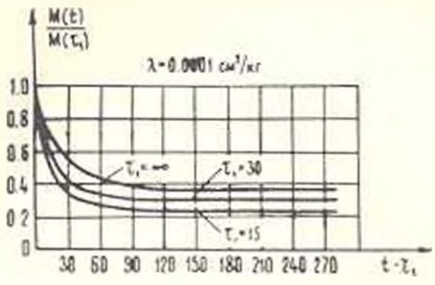
На ЭВМ «ЕС-1022» при значениях параметров

$$R = 6\ \text{см};\ 2h = 1{,}5\ \text{см};\ b = 5\ \text{см};\ 3G = 2\cdot 10^{5}\ \text{кг/см}^2$$

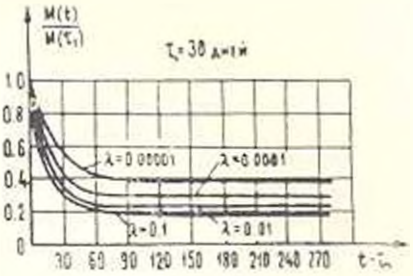
$$A_1 = 4{,}82\cdot 10^{-5};\ C_0 = 0{,}9\cdot 10^{-5};\ \gamma = 0{,}026;\ M(\tau_1) = 400\ \text{кг}\cdot\text{см}$$

дано решение задачи о релаксации крутящего момента тонкостенного стержня.

Вычисления показывают, что значения $M(t)/M(\tau_1)$, полученные при помощи формул (4.8) и (4.9), почти совпадают, следовательно, в общем решении основного уравнения можно ограничиться первыми двумя приближениями.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

На фиг. 3 и 4 показано изменение крутящего момента во времени при различных значениях τ_1 и λ.

ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՕՂԱԿԻ ՍԵԿՏՈՐԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ֆ. Մ. ՓՈԼԱԴՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրվում է ուղղանկյուն լայնական կտրվածքով շրջանային օղակի սեկտորի ոլորումը ոչ-գծային ժառանգական սողքի դեպքում։ Օգտագործելով գլանային կոորդինատները, կիսահակադարձային մեթոդով խնդիրը բերվում է լարումների ֆունկցիայի նկատմամբ ոչ-գծային ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման, որի լուծումը փնտրվում է աստիճանային շարքի օգնությամբ և ապացուցվում է այդ շարքի զուգամիտությունը։

Բարակապատ ուղղանկյուն պրոֆիլով շրջանային օղակի սեկտորի համար լուծված են սողքի և ռելաքսացիայի խնդիրները։ Վերջինիս համար բերված թվային օրինակների հիման վրա կառուցված են ոլորող մոմենտի գրաֆիկները։

THE TORSION OF A RECTANGULAR CROSS-SECTION CIRCULAR RING SECTORS UNDER NON-LINEAR CREEP

F. M. POLADIAN

S u m m a r y

The torsion of a rectangular cross-section with circular ring sectors is considered under non-linear hereditary creep. By using cylindric coordinates and the semi-reverse method the problem is reduced to the nonlinear integro-differential equation with respect to the stress function. The solution of this equation is obtained in the form of a power series and the convergence of the series is proved.

For a thin-walled core of a rectangular section the problem of creep and relaxation is solved. Graphs for relaxation are plotted on the basis of numerical examples.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л.: ГИТТЛ, 1952.
2. *Göhner O.* Spannugsverteilung in einem an den Endquerschnitten belasteten Ringstabsektor. Ingr—Arch., 1931, Bd2.
3. *Freiberger W.* The uniform torsion of an incomplate tore. —Austral. J. Scient. Res. Ser. A, 1949, vol 2, № 3.
4. *Larghaar H. L.* Torsion of curved beams of rectangular cross section.—J. Appl Mech., 1952, vol. 19, № 1.
5. *Рабинович А. Л.* Кручение элемента кругового кольца. Исследования по механике и прикладной математике.— Тр. Моск. физ.-техн. ин-та, 1958, вып. 1.
6. *Stein I.* Stress analysis of a helical coil.—Trans. ASME, ser. E. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, № 1. (Рус. перев.: Прикл. механ., Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1963, т. 30, № 1)
7. *Freiberger W., Prager W.* Plastic twisting of thick—walled circular ring sectors.—J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, № 3.
8. *Wang A. J., Prager W.* Plastic twisting of a circular ring sector.—J. Mech. and Phys. Solids, 1955, vol. 3.
9. *Freiberger W.* Elastic—plastic torsion of circular ring sectors.—Quart. Appl. Math., 1956, vol. 14, № 3.
10. *Задоян М. А.* Пластическое кручение неполного тора.—Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 2.
11. *Задоян М. А.* Пластическое кручение сектора кольца.—Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 1.
12. *Галпчян П. В., Задоян М. А.* Пластическое кручение кругового стержня с поперечным сечением в виде кольцевого сектора.—Изв. АН Арм.ССР. Механика, 1979, т. 32, № 1.
13. *Задоян М. А., Поладян Ф. М.* Задача нелинейной ползучести кривого стержня при кручении.—Докл. АН Арм.ССР, 1980, т. 71, № 3.
14. *Поладян Ф. М.* Кручение кривой разностенной трубы при нелинейной ползучести.—Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1981, т. 34, № 2.
15. *Поладян Ф. М.* Кручение кривого полого стержня с криволинейными щелями при нелинейной ползучести.—Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1981, т. 34, № 3.
16. *Новожилов В. В.* Теория упругости. М.—Л.: Судстройиздат, 1962.
17. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Т. 1. М.: ИЛ, 1949.
18. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1965.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
10.11.1982

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 3, 1983 Механика

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ ОРГАНОПЛАСТИКА ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

МАРТИРОСЯН М. М.

Исследованиями [1; 2; 3] установлено, что органопластик независимо от ориентации волокон склонен к ползучести, которая в общем имеет нелинейный характер. Предлагая модели и методы, позволяющие предсказать ползучесть органопластика, авторы вместе с тем не приводят анализ зависимости между напряжениями и деформациями ползучести.

В настоящей статье приведены результаты экспериментального исследования ползучести однонаправленного органопластика в направлении волокон при одноосном растяжении в нормальных условиях температуры и влажности.

Сделана попытка анализировать зависимость между напряжением, временем и деформациями ползучести органопластика, загруженного в направлении армирующих волокон. На основании полученных результатов дано описание кривых ползучести.

Эксперименты проводились на плоских однонаправленных образцах толщиной в 2 мм, изготовленных фрезерованием из прямоугольных полосок толщиной 4 мм, шириной и длиной соответственно 15 и 300 мм. Материал был получен методом мокрой намотки органоволокна [7] на плоскую оправку с дальнейшей термообработкой. Связующее — ЭДТ-10. Толщина 2 мм выдерживалась только в рабочей зоне образца длиной 150 мм и, таким образом, сравнительно толстые участки в местах зажима обеспечивали надежное крепление к разрушение образца по рабочей зоне.

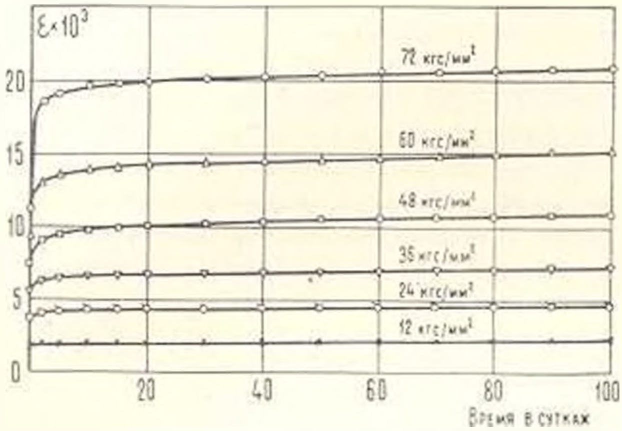
Диапазон напряжений был выбран от $0{,}1\,\sigma_в$ до $0{,}6\,\sigma_в$ с интервалом в $0{,}1\,\sigma_в$, где $\sigma_в$ — предел кратковременной прочности образцов, определяемый перед испытаниями на ползучесть (табл. 1).

Таблица 1

Характеристика	Среднее значение	Колич. образцов	Статистическая обработка данных				
			Среднее квадрат. отклонен.	Средняя ошибка	Коэффиц вариации	Показатель точн.	Доверительный интервал при довер. вероятности 0,95
кгс/см²	кгс/см²	шт.	кгс/см²	кгс/см²	%	%	кгс/см²
$\sigma_в$	12120	11	668	201	5,5	1,66	12120±450
E	547000	12	23000	6628	4,2	1,20	547000±14600

По каждому уровню напряжения на ползучесть устанавливали по три зачетных образца, а кривые ползучести строили по средним значениям зачетных наблюдений, число которых было не менее двух. Деформации измеряли механическими тензометрами часового типа МК-3. Длительность эксперимента была более ста суток.

На фиг. 1 приведены кривые полных деформаций ползучести однонаправленного органопластика.



Фиг. 1. Кривые полных деформаций ползучести (ε_n) однонаправленного органопластика

В момент нагружения в образце развиваются мгновенные деформации, характер которых зависит от величины напряжения и скорости нагружения. В наших экспериментах величина деформации в момент нагружения, условно названных мгновенно-упругими, определялась из диаграмм $\sigma - \varepsilon$, полученных при растяжении со скоростью $v = 300$ мм/мин., которые затем сравнивались со значениями этих деформаций, полученных при быстрой разгрузке образцов сразу же после их полного нагружения.

На фиг. 2 приведены диаграммы $\sigma - \varepsilon_м$, полученные в двух случаях нагружения. Первая диаграмма получена при кратковременном растяжении со скоростью $v = 300$ мм/мин., вторая—в процессе нагружения образца постоянными нагрузками. Как видно, при низких уровнях напряжений две диаграммы полностью совпадают. С повышением уровня напряжения, когда время полного нагружения образца увеличивается, условно мгновенные деформации чувствительно растут за счет вязкоупругих и остаточных деформаций. Интересно отметить, что для однонаправленного стеклопластика типа СВАМ зависимость мгновенных дефор-

Фиг. 2. Диаграмма $\sigma - \varepsilon$ при двух значениях скоростей нагружения образца.

маций от напряжений в момент нагружения линейна вплоть до разрушения [4]. Величина условно-мгновенных деформаций, определяемая различными методами, никак не отражается на кривых полных деформаций ползучести. Однако, кривые ползучести, получаемые при различных скоростях нагружения, параллельно перемещаются по оси ε_c на величину разности значений мгновенных деформаций.

Исследования показывают, что величина напряжения существенно влияет на ползучесть органопластика, при этом нет прямой пропорциональности между напряжениями и деформациями ползучести. Так, если при низких уровнях $(0{,}1\,\sigma_в)$ увеличение напряжения в два раза $(0{,}2\,\sigma_в)$ приводит к изменению деформации ползучести примерно в два раза, то с повышением уровня напряжений до 0,5 и $0{,}6\,\sigma_в$ деформации растут более, чем в 20 и 40 раз.

На фиг. 3 в координатах $\sigma - \varepsilon_c$ построены кривые зависимости напряжений от деформаций ползучести для 4-х фиксированных значений времени t. Из диаграммы видно, что эта зависимость имеет ярко выраженный нелинейный характер, который проявляется в течение всего времени ползучести. Влияние величины напряжения весьма чувствительно в первые дни ползучести, когда практически развивается основная часть деформации. Эксперименты показывают, что уже на второй день при напряжении $0{,}6\,\sigma_в$ накапливается более 75% деформаций ползучести, фиксированных на сотый день ползучести, тогда как при напряжении $0{,}1\,\sigma_в$ —только 30%.

Фиг. 3. Зависимость деформации ползучести от напряжения: △ — 2 дня, □ — 10 дней, ▽ — 20 дней; ○ — 30 дней, × — 100 дней.

Отсутствие линейной связи между напряжениями и деформациями ползучести является предвестником того, что деформации ползучести от единичного напряжения для всех уровней напряжения не имеют единого графика, и, таким образом, удельная деформация ползучести (податливости) не постоянна, а тесно связана с величиной напряжения.

С другой стороны, анализ показывает, что между кривыми нет и строгого подобия, то есть между соседними кривыми не соблюдается равенство

$$\varepsilon_c(\sigma_1;\, t) = k\,\varepsilon_c(\sigma_2;\, t) \qquad (1.1)$$

где k — коэффициент подобия.

Однако, с некоторыми допущениями можно считать, что кривые при напряжениях 0,3; 0,4; 0,5 и $0{,}6\,\sigma_в$ подобны. Условие подобия для этих кривых в пределах принятой базы времени $t = 100$ дней соблюдается при максимальном отклонении не более 10%.

Сравнивая ползучесть однонаправленного органопластика с ползучестью однонаправленного стеклопластика типа СВАМ, можно заключить, что чувствительные деформации первого являются результатом податливости армирующих органических волокон.

Имея результаты исследования ползучести органопластика, мы задались целью дать математическое описание экспериментальных кривых.

При аппроксимации предполагается, что при постоянном напряжении имеется определенная зависимость между полной деформацией, напряжением и временем [5], то есть

$$F(\varepsilon_n; \sigma; t) = 0 \tag{1.2}$$

при этом

$$\varepsilon_n(\sigma; t) = \varepsilon_м(\sigma) + \varepsilon_t(\sigma; t) \tag{1.3}$$

Выше был описан метод определения мгновенных деформаций. Отметим еще раз, что в наших экспериментах они определялись из диаграммы

$$\sigma - \varepsilon, \text{ как } \varepsilon_м(\sigma) = \sigma/E \tag{1.4}$$

Для деформации ползучести в случае ее нелинейной зависимости от напряжения можно записать (условно принимая кривые подобными)

$$\varepsilon_t(\sigma, t) = f(\sigma)\,\varphi(t) \tag{1.5}$$

где $\varphi(t)$ — податливость материала (удельная деформация ползучести), которая при нелинейной ползучести является функцией, зависящей от напряжения и времени.

Принимая значение удельной деформации ползучести от напряжения $0{,}1\sigma_в$ за меру ползучести, определяем величину $f(\sigma)$ для нескольких фиксированных значений времени

$$f(\sigma_i) = \frac{\varepsilon_n(\sigma_i, t)\,0{,}1\sigma_в}{\varepsilon_n(0{,}1\sigma_в; t)} \tag{1.6}$$

Расчеты показывают, что с увеличением длительности эксперимента кривая $f(\sigma)$ стремится к предельному значению, после которого практически перестает зависеть от времени.

Для определения вида функции была принята кривая, соответствующая $t = 30$ дней. Максимальное отклонение $f(\sigma)$ при $t = 30$ дней от кривой стодневной длительности составляет 15%. Для описания кривой принята степенная функция вида [6]

$$f(\sigma) = \alpha\sigma + \beta\sigma^n \tag{1.7}$$

где $n = 3{,}8$; $\beta = 0{,}000034$; $\alpha = 0{,}964257$, при этом сохранено условие

$$f(0{,}1\sigma_в) = 0{,}1\sigma_в$$

и

$$\alpha + \beta(0{,}1\sigma_в)^{n-1} = 1$$

Имея значения $f(\sigma)$ из расчетной формулы (1.7), с помощью (1.5) вычисляем $\varphi(t)$ при заданных напряжениях и различных моментах времени.

На фиг. 4 показана кривая $\varphi(t)$. Она построена с соблюдением условия наименьшего отклонения среднего значения от расчетных при высоких уровнях напряжений ($0{,}3\,\sigma_в$ и выше).

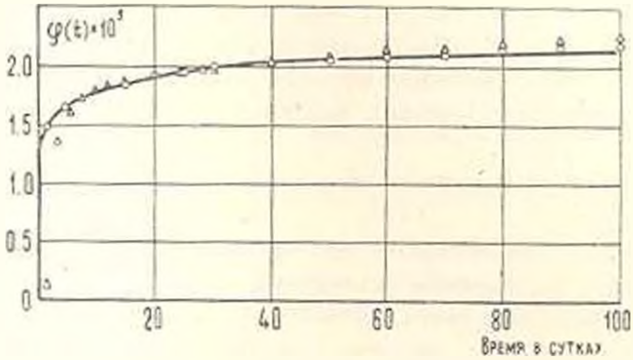
Аналитическое выражение для функции $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = \varphi_0 [1 - (a_1 e^{-\gamma_1 t} + a_2 e^{-\gamma_2 t})] \tag{1.8}$$

где φ_0 — предельное значение $\varphi(t)$ при $t = \infty$; γ_1, γ_2, a_1 и a_2 — опытные постоянные.

На фиг. 4 треугольниками обозначены значения $\varphi(t)$, определенные из (1.8), когда $\varphi_0 = 3 \cdot 10^{-5}$, $\gamma_1 = 0{,}005$; $\gamma_2 = 0{,}34$; $a_1 = 0{,}4$; $a_2 = 0{,}6$.

Сравнение показывает, что формула (1.8) вполне удовлетворительно описывает функцию $\varphi(t)$.

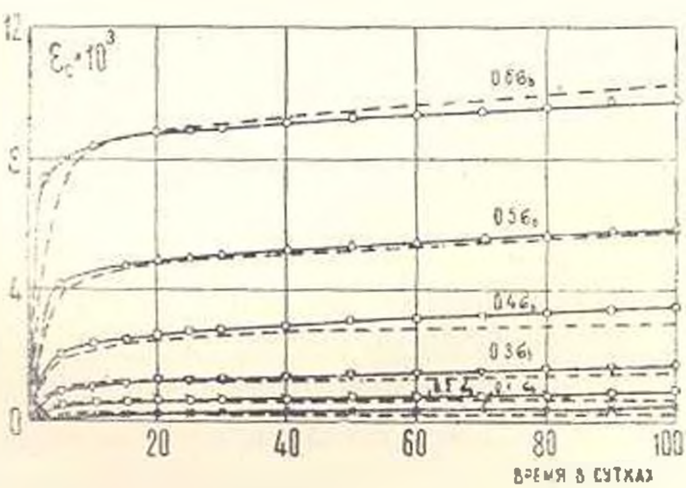


Фиг. 4. График функции времени $\varphi(t)$ для однонаправленного органопластика.

Подставляя значения $f(\sigma)$ и $\varphi(t)$ в (1.5), для деформации ползучести однонаправленного органопластика получаем

$$\varepsilon_c(\sigma, t) = 3 \cdot 10^{-5} [1 - (0{,}4\, e^{-0{,}005t} + 0{,}6\, e^{-0{,}34t})] \times$$
$$\times (0{,}964257\sigma - 0{,}000034\sigma^{3{,}8}) \tag{1.9}$$

Насколько удачно выбрана эта зависимость можно судить, сравнивая расчетные данные с экспериментальными. На фиг. 5 пунктиром обозначе-



Фиг. 5. Кривые ползучести органопластика: сплошные — эксперимент; пунктир — расчетные.

ны кривые, рассчитанные по формуле (1.9). Нужно заметить, что большие отклонения при малых напряжениях объясняются соответствующим выбором значений $\varphi(t)$. Отсутствие строгого подобия между кривыми при всех уровнях напряжений приводит к чувствительным отклонениям расчетных значений $\varphi(t)$ от среднего, и так как $\varphi(t)$ выбрано с расчетом лучшего описания кривых ползучести при высоких уровнях напряжений и больших значениях t, то, естественно, при малых (в основном при 0,1 и 0,2 $\sigma_в$) напряжениях и t расчетные кривые должны отклоняться от экспериментальных. Тем не менее, учитывая, что на практике обычно исследуется ползучесть при относительно высоких напряжениях и что при экстраполяции обычно рассматриваются области кривой, удаленной от начала координат, можно считать, что приведенная формула и методы ее построения вполне удовлетворительны для описания ползучести однонаправленного органопластика.

На основании приведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Ползучесть однонаправленного органопластика в направлении волокон имеет ярко выраженный нелинейный характер.

2. Для кривых ползучести органопластика однонаправленной структуры отсутствует строгое подобие, однако, с некоторыми допущениями можно считать, что кривые ползучести при напряжениях 0,3; 0,4; 0,5 и 0,6 $\sigma_в$ подобны.

3. Для описания кривых ползучести при постоянном напряжении предложена формула (1.9), которая обеспечивает достаточную для практических целей точность.

ՕՐԳԱՆՈՊԼԱՍՏԻԿԻ ՍՈՂՔԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ՄԻԱՌԱՆՑՔ ՁԳՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Մ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում բերված է միառանցքված օրգանոպլաստիկի սողքի փորձարարական հետազոտման արդյունքները։ Ելնելով ստացված արդյունքներից, փորձ է արված տալ սողքի կորերի մաթեմատիկական նկարագրումը։

Ցույց է տրված հաշվարկային կորերի բավարար համընկնումը փորձարարական կորերի հետ։

THE INVESTIGATION OF ORGANO-FLASTIC CREEP IN THE CASE OF UNIAXIAL STRESS

M. M. MARTIROSIAN

S u m m a r y

The results of experimental investigation of uniaxial organo-plastic creep are shown. From the conclusion of the obtained results, an

experiment was performed in order to give the mathematical description of creep curves.

The fair correspondance of calculated curves with the experimental curves was shown.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколов Е. А.* Возможности предсказания ползучести слоистого органопластика по свойствам однонаправленно армированного материала.— Механика композитных материалов, 1980, № 1.
2. *Суворова Ю. В.* Нелинейные эффекты при деформировании наследственных сред.— Механика полимеров, 1977, № 6, с. 976—980.
3. *Соколов Е. А., Максимов Р. Д.* Возможности предсказания ползучести, армированного полимерными волокнами. Механика полимеров, 1978, № 6, с. 1005—1012.
4. *Андриевская Г. Д.* Высокопрочные ориентированные стеклопластики. М.: Наука, 1966.
5. *Гольденблат И. И., Бажанов В. Л., Копнов В. А.* Длительная прочность в машиностроении. М.: Наука, 1977, 248 с.
6. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.: Гостехтеориздат, 1952, 323 с.
7. Сверхпрочное синтетическое волокно внивлон II. Информация ВНИИВ—Химическое волокно, 1971, № 1, с. 76.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ