ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVI, № 2, 1983 Механика

К ВОПРОСУ УСТОЙЧИВОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ

БАГДОЕВ А. Г., МОВСИСЯН Л. А.

Получены уравнения модуляций квазимонохроматических изгибных волн в нелинейно упругой пластинке с большими прогибами с учетом наследственных свойств материала. Последнее учитывается согласно гипотезе Фохта в предположении малости диссипации материала. Изучены вопросы устойчивости распространения волн. В основу положена классическая теория пластин.

Уравнения движения пластинки берем в виде [1]

$$
\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i, j = 1, 2)
$$

$$
\frac{\partial^2 M_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(T_{ij} \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \right) = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \tag{1.1}
$$

где суммирование проводится по повторяющимся индексам.

Связь между компонентами напряжений и деформаций берется по [2], прибавив при этом линейные вязкие члены [3] —

$$
\sigma_{ij} = 3K\varepsilon_0\delta_{ij} + 2G(1 + \gamma_2\psi_0^2)(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_0\delta_{ij}) -
$$

$$
- \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{V}\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \tag{1.2}
$$

Здесь $K = E/3(1-2\nu)$ — модуль объемного сжатия, G — модуль сдвига, γ_2 — коэффициент, характеризующий нелинейность,

$$
\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})
$$

$$
\psi_0^2 = \frac{4}{3}\left[\frac{2}{3}(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 - \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}) + \frac{1}{2}\varepsilon_{12}^2 \right] \tag{1.3}
$$

$\vec{V} = \dfrac{\partial \vec{U}}{\partial t}$ — вектор скорости, μ — коэффициент вязкости, δ_{ij} — символы Кронекера,

$$
\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2}\frac{\partial u_3}{\partial x_i}\frac{\partial u_3}{\partial x_j} - x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_i \partial x_j} \tag{1.4}
$$

$u_{1,2}$ — перемещения срединной поверхности, u_3 — прогиб.

Усилия и моменты выражаются через напряжения обычным образом [1].

При получении соотношений упругости принимается:

а) в законе упругости $\sigma_{33} = 0$;

б) пренебрегается нелинейными членами от перемещений u_1, u_2, поскольку они при изгибных колебаниях на порядок выше, чем u_3;

в) плоская волна распространяется так, что нормаль совпадает с осью x_1 (в нелинейных членах производные по x_1 удерживаются в основных порядках).

Тогда получим следующие соотношения:

$$T_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2 + \nu\left[\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2\right]\right\} + \\ + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left(4\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) \tag{1.5}$$

$$T_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2 + \nu\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2\right]\right\} + \\ + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + 4\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)$$

$$T_{12} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + \frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

$$M_{11} = -D\left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{4h^2}{45}\gamma_2\nu_1\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}\right)^3\right] - \\ - \frac{\mu h^3}{9}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}\right) \tag{1.6}$$

$$M_{22} = -D\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}\right) - \frac{\mu h^3}{9}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}\right)$$

$$M_{12} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\mu h^3}{9}\frac{\partial^3 u_3}{\partial t \partial x_1 \partial x_2}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \qquad \nu_1 = \frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^3}$$

Подставляя (1.6) в (1.1), получим нелинейные уравнения движения пластинки в перемещениях, которые из-за громоздкости не приводятся. Нашей целью является получить из этой системы уравнения для амплитуды и фазы изгибных квазимонохроматических волн, поэтому перемещения пластинки будем искать в виде разложения Стокса

$$u_j = u_j^0 + C_j e^{2i\tau} + \overline{C}_j e^{-2i\tau}, \quad j = 1, 2$$
$$u_3 = Ae^{i\tau} + \overline{A}e^{-i\tau} \tag{1.7}$$
$$\tau = \alpha x_1 + \beta x_2 - \omega t$$

Вид (1.7) обусловлен тем, что перемещения u_1, u_2 при изгибных колебаниях на порядок выше, чем u_3 [4]. Здесь u_j^0 — так называемое среднее течение, которое отсутствует, если задачу рассматривать только в физически нелинейной постановке [1], C_j, $\overline{C}_j$, A, $\overline{A}$ — медленно изменяющиеся функции.

Подставляя (1.5) и (1.7) в (1.1), из первых двух уравнений движения для u_j^0 получим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_2^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1 \partial x_2}+\alpha^2\frac{\partial}{\partial x_1}|A|^2=\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} \\
\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1 \partial x_2}+\frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_2^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1^2}+\nu\alpha^2\frac{\partial}{\partial x_2}|A|^2=\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u_2^0}{\partial t^2}
\end{gathered} \tag{1.8}$$

Кроме того, из указанных уравнений также следует, что

$$4\left(1-\frac{h^2\alpha^2}{12}\right)C_1=-i\alpha A^2, \quad C_2=0 \tag{1.9}$$

Уравнение для прогиба будет следующим:

$$\begin{gathered}
D\left[\Delta\Delta u_3+\frac{4h^2}{45}\gamma_2\nu_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}\right)^3\right]+\frac{\rho h^3}{9}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}\right)- \\
-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(T_{11}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(T_{12}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)+\rho h\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}=0
\end{gathered} \tag{1.10}$$

Для упрощения анализа решения (1.8) рассматриваются два класса типичных задач.

I. В задачах стационарной дифракции $\partial/\partial t=0$, $\partial/\partial x_1 \ll \partial/\partial x_2$, следовательно, из (1.8) имеем

$$\frac{\partial u_2^0}{\partial x_2}=-\nu\alpha^2|A|^2, \quad \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_2^2}=-\alpha^2\frac{\partial}{\partial x_1}|A|^2 \tag{1.11}$$

II. В одномерных по x_1 задачах [4, 5]

$$\frac{\partial}{\partial x_2}=0, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}=C^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad C=2G_1k$$

$$G_1=\sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\nu^2)}}\,h, \quad k=\alpha, \quad \beta=0$$

и из (1.8) получим

$$u_2^0=0, \quad \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}=-\alpha^2|A|^2\left(1+\frac{h^2\alpha^2}{3}\right) \tag{1.12}$$

На основании (1.5), (1.7), (1.11) и (1.12) для усилий T_{11} и T_{12} соответственно для первого и второго классов задач получим

$$
T_{11}=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\alpha^4h^2}{24}\left(A^2e^{2i\theta}+\bar{A}^2e^{-2i\theta}\right)+(1-\nu^2)\xi|A|^2\right]
$$

$$
T_{12}=\frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2^0}{\partial x_1}\right) \tag{1.13}
$$

$$
T_{11}=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\alpha^4h^2}{24}\left(A^2e^{2i\theta}+\bar{A}^2e^{-2i\theta}\right)-|A|^2\frac{h^2\alpha^4}{3}\right]
$$

$$
T_{12}=0 \tag{1.14}
$$

Для получения уравнения относительно A (1.7) подставляется в (1.10) с учетом (1.13) и (1.14), при этом удерживаются производные от A по x_1 только до третьего порядка.

Если решение полученного уравнения искать в виде

$$
A=\Psi e^{-\omega' t},\quad \omega'=\frac{\mu h^2\alpha^4}{18\rho} \tag{1.15}
$$

то для комплексной амплитуды Ψ получим

$$
\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\left(\frac{d\omega_0}{dk}-i\frac{\mu}{3\rho}h^2k^3\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\frac{\mu k^2h^2}{\rho}+i\frac{d^2\omega_0}{dk^2}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2}-
$$

$$
-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu h^2k^2}{3\rho}-i\frac{d\omega_0}{k\,dk}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_2^2}+\frac{3}{\rho h}\varkappa\left(\frac{\mu}{9}h^2k^4+2i\omega_0\rho\right)\Psi|\Psi|^2e^{-2\omega' t}=0 \tag{1.16}
$$

здесь

$$
\omega_0=G_1k^2,\quad k=\alpha_1,\quad \varkappa=\xi+\frac{1}{45}\gamma_2\nu_1k^4h^4
$$

Для задач первого класса в уравнении (1.16) вместо ξ надо подставить $1-\nu^2$ и отбросить вторые производные по x_1 и производную по t.

Для задач второго класса полагается $\xi=-3{,}8\,h^2k^2$ и отбрасываются производные по x_2.

Чтобы получить уравнения модуляций, следует искать Ψ в виде $\Psi=ae^{i\varphi}$, где a — амплитуда и φ — фаза волны. Тогда из (1.16) получим

$$
\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{d\omega_0}{dk}\frac{\partial a}{\partial x_1}+\frac{\mu}{3\rho}h^2k^3a\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\frac{1}{6\rho}\mu h^2k^2\left[\frac{\partial^2a}{\partial x_1^2}-a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2\right]+
$$

$$
+\frac{1}{2}\frac{d^2\omega_0}{dk^2}\left(2\frac{\partial a}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}\right)-\frac{\mu h^2k^2}{6\rho}\left[\frac{\partial^2a}{\partial x_2^2}-a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2\right]+
$$

$$
+\frac{1}{2k}\frac{d\omega_0}{dk}\left(2\frac{\partial a}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right)+\frac{\mu h^2}{3\rho}\varkappa k^4a^3e^{-2\omega' t}=0 \tag{1.17}
$$

$$
a\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{d\omega_0}{dk}a\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\frac{\mu h^2k^3}{3\rho}\frac{\partial a}{\partial x_1}-\frac{1}{2}\frac{d^2\omega_0}{dk^2}\left[\frac{\partial^2a}{\partial x_1^2}-a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2\right]-
$$

$$
-\frac{\mu k^2h^2}{6\rho}\left(2\frac{\partial a}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}\right)-\frac{\mu h^2k^2}{6\rho}\left(2\frac{\partial a}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right)-
$$

$$
-\frac{1}{2k}\frac{d\omega_0}{dk}\left[\frac{\partial^2a}{\partial x_2^2}-a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2\right]+\frac{6}{h^2}\varkappa a^3\omega_0e^{-2\omega' t}=0
$$

При исследовании устойчивости квазимонохроматических волн дается возмущение основной волны с амплитудой a_0 и фазой φ_0

$$a = a_0(t) + a', \quad \varphi = \varphi_0(t) + \varphi' \tag{1.18}$$

Тогда из (1.17) получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial a_0}{\partial t} + \frac{\varkappa}{3\rho}\mu k^4 a_0^2 e^{-2\omega' t} = 0 \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{6}{h^2}\varkappa\omega a_0^2 e^{-2\omega' t} = 0 \end{aligned} \tag{1.19}$$

а для возмущенного движения

$$\frac{\partial a'}{\partial t} + \frac{d\omega^0}{dk}\frac{\partial a'}{\partial x_1} + \frac{\mu}{3\rho}h^2k^3 a_0\frac{\partial \varphi'}{\partial x_1} - \frac{\mu}{6\rho}h^2k^2\frac{\partial^2 a'}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}\frac{d^2\omega_0}{dk^2}a_0\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2} -$$

$$- \frac{\mu}{6\rho}h^2k^2\frac{\partial^2 a'}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2k}\frac{d\omega_0}{dk}a_0\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x_2^2} + \frac{\mu}{\rho}\varkappa k^4 a_0^2 a' e^{-2\omega' t} = 0 \tag{1.20}$$

$$a_0\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + a'\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \frac{d\omega_0}{dk}a_0\frac{\partial\varphi'}{\partial x_1} - \frac{\mu}{3\rho}h^2k^3\frac{\partial a'}{\partial x_1} - \frac{1}{2}\frac{d^2\omega_0}{dk^2}\frac{\partial^2 a'}{\partial x_1^2} -$$

$$- \frac{\mu}{6\rho}k^2h^2a_0\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x_1^2} - \frac{\mu}{6\rho}h^2k^2a_0\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x_2^2} - \frac{1}{2k}\frac{d\omega_0}{dk}\frac{\partial a'}{\partial x_2^2} +$$

$$+ \frac{18}{h^2}\varkappa\omega a_0^2 a' e^{-2\omega' t} = 0$$

В (1.20) хотя коэффициенты и зависят от t, однако в силу малости диссипации их можно считать медленно меняющимися по длине волны возмущения, поэтому решение можно искать в виде

$$\begin{aligned} a' &= F\exp[i(\alpha' x_1 + \beta' x_2 - \Omega t)] \\ \varphi' &= \Phi\exp[i(\alpha' x_1 + \beta' x_2 - \Omega t)] \end{aligned} \tag{1.21}$$

Из (1.20) и (1.21) получается следующее дисперсионное уравнение:

$$z^2 - 2Mz - N = 0 \tag{1.22}$$

где

$$z = -i\Omega + i\beta'\frac{d\omega_0}{dk} + \frac{\mu}{6\rho}h^2k^2k_1^2, \quad k_1^2 = (\alpha')^2 + (\beta')^2$$

$$M = \frac{1}{2\rho}\mu\varkappa k^4 a_0^2 e^{-2\omega' t}, \qquad N = N_1 + iN_2$$

$$N_1 = -\frac{\omega_0^2 k_1^2}{k^2}\left[\frac{k_1^2}{k^2} + \frac{12\varkappa}{h^2}a_0^2 e^{-2\omega' t}\right]$$

$$N_2 = \frac{2\mu h^2 k^3}{3\rho}\omega_0^2\left|\frac{k_1^2}{k^2} + \frac{6\varkappa}{h^2}a^2 e^{-2\omega' t}\right|$$

Об устойчивости движения будем судить, исходя из (1.22). Движение устойчивое, если $\operatorname{Im}\Omega \leqslant 0$. При отсутствии диссипации ($\mu = 0$) имеем $M = N_- = 0$ и в адиабатическом приближении условие действительности Ω имеет место для жидкоподобных сред. Для обычных упругих материалов устойчивость будет при такой геометрической нелинейности, при которой $\varkappa > 0$.

Более точное условие устойчивости дает

$$a_0 < -\frac{h^2 k_1^2}{12\varkappa k^2} \tag{1.23}$$

В силу того, что огибающие являются относительно длинноволновыми ($k_1 \ll k$), неравенство (1.23) выполняется лишь для малых a_0.

При выполнении (1.23) или при $N_1 < 0$ условие устойчивости в диссипативной задаче при удержании первых степеней μ дает

$$k_1^2 > \frac{k^2\alpha'\left[\dfrac{2k_1^2}{k^2} + \dfrac{12}{h^2}\varkappa a_0^2 e^{-2\mu t}\right]}{\sqrt{\dfrac{k_1^2}{k^2} + \dfrac{12}{h^2}\varkappa a_0^2 e^{-2\mu t}}} \tag{1.24}$$

При обратном знаке неравенства получится условие неустойчивости. Усиленное условие неустойчивости имеет вид

$$k_1^4 < 4(\alpha')^2 k^4\left[\frac{k_1^2}{k^2} + \frac{12}{h^2}\varkappa a_0^2\right] \tag{1.25}$$

В силу того, что $k_1 \ll k$, из (1.25) можно получить при $\alpha' = 0$ (то есть при наличии продольных возмущений)

$$\left(\frac{k_1}{k}\right)^2 > -\frac{12\varkappa a_0^2}{h^2} \tag{1.26}$$

что совпадает с (1.23), то есть при наличии устойчивости недиссипативных волн будет неустойчивым волновое движение диссипативной задачи.

Рассмотрим теперь случай, когда (1.23) не выполняется, то есть $N_1 > 0$. Условие устойчивости в диссипативной задаче $\operatorname{Im}\Omega \leqslant 0$

$$\mu h^2 k^2 k_1^2 > 6\alpha\sqrt{N_1} \tag{1.27}$$

что для малых μ не выполняется, то есть снова волна будет неустойчивой.

Рассматриваемые условия имеют место при $\alpha' \neq 0$. При $\alpha' = 0$, то есть для поперечных возмущений, волны устойчивы, если выполняется (1.23).

Таким образом, для чисто поперечных возмущений условие устойчивости диссипативных и недиссипативных волн одинаковы.

Исследование устойчивости стационарных волн ($\partial/\partial t = \partial^2/\partial x_1^2 = 0$) показывает, что движение всегда неустойчивое.

ԱՌԱՁԳԱՄԱԾՈՒՑԻԿ ՍԱԼՈՒՄ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Ամփոփում

Մեծ ճկվածքներով ոչ գծային նյութից սալի համար դուրս են բերվում քվազիմոնոխրոմատիկ ծռման ալիքների մոդուլյացիաների հավասարումները: Դիսիպացիան հաշվի է առնվում Ֆոխտի վարկածի համաձայն: Հիմքում դրված է սալերի դասական տեսությունը:

Ուսումնասիրված են ալիքների տարածման կայունության պայմանները: Երկայնական գրգռումների ալիքների համար ստացվում է, որ դիսիպացիայի առկայության դեպքում միշտ տեղի ունի անկայունություն, իսկ լայնական կայունության պայմանները դիսիպացիայի առկայության և բացակայության դեպքում միևնույն են:

ON THE QUESTION OF STABILITY OF PROPAGATION OF NONLINEAR WAVES IN THE VISCOELASTIC PLATE

A. G. BAGDOEV, L. A. MOVSISIAN

Summary

The modulation equations for quasi-monochromatic bending waves in the plate from nonlinear elastic material with large flexures are derived. The dissipation is taken into account according to Voigt's hypothesis. The classical theory of plates is at it's foundation.

The stability conditions of wave propagation are studied. For longitudinal wave disturbance it becomes clear that in the presence of dissipation instability always exists and the transversal stability conditions in the presence or absence of dissipation are the same.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
2. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: ИЛ, 1961.
3. *Ландау Л. Д.* и *Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: ГИТТЛ, 1954.
4. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Уравнение модуляций в нелинейных диспергирующих средах и их применение к волнам в тонких телах.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1980, т. 33, № 3.
5. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Некоторые вопросы распространения квазимонохроматических нелинейных волн в пластинках и оболочках. Тр. XII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, т. I, Ереван, 1980.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
8.IX.1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 2, 1983 Механика

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

БАНИЧУК Н. В., КОБЕЛЕВ В. В.

Рассмотрены статические задачи оптимизации упругих оболочек вращения в случае действия осесимметричных нагрузок. При проектировании учитываются такие характеристики как вес, жесткость и прочность (максимальная интенсивность напряжений), а в качестве искомых управляющих переменных выступают поочередно или совместно форма меридиана срединной поверхности и распределение толщины вдоль меридиана. Для безмоментных оболочек вращения, проектируемых с учетом требовании минимальности веса при ограничениях по прочности, доказано, что критерием оптимальности является условие равнопрочности. Даны конкретные примеры оптимальных распределений толщин для частных критериев прочности (критерии Мизеса и Треска).

Исследованы задачи максимизации жесткости тонких упругих оболочек, работающих на кручение. Объем материала (вес оболочки) предполагается заданным. Получены аналитические решения, описывающие распределение толщины и формы меридиана оптимальных оболочек.

Ранее задачи определения рациональных и равнопрочных оболочек решались в [1—5]. Распределение толщины в задаче о равнопрочной осесимметричной безмоментной оболочке вращения найдено в [6]. Задача об оптимальной по жесткости оболочки в задаче кручения изучалась в [7].

1. *Оболочки минимальной массы при ограничениях по прочности.* Рассмотрим оболочку вращения, находящуюся под действием осесимметричной нагрузки. Положение точки на срединной поверхности оболочки характеризуется углами θ и φ, где θ ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$) — угол, образуемый нормалью к срединной поверхности и осью вращения, а φ — угол, задающий положение меридиана. Главные радиусы кривизны и радиус круга, образованного при сечении оболочки плоскостью, нормальной к оси вращения обозначаются соответственно через R_1, R_2 и R.

Обозначим через $p = p(\theta)$ действующую на единицу поверхности оболочки радиальную внешнюю силу, а через $Q = Q(\theta)$ — суммарную нагрузку, приложенную к части оболочки, расположенной над параллельным кругом θ (фиг. 1). Из условий равновесия указанной части оболочки вытекают выражения для напряжений

$$\sigma_\theta = \varphi_1(\theta)/h, \quad \varphi_1 = -Q/2\pi R \sin\theta$$
$$\sigma_\varphi = \varphi_2(\theta)/h, \quad \varphi_2 = -pR_1 - \varphi_1 R_2/R_1 \qquad (1.1)$$

где $h = h(\theta)$ — распределение толщины вдоль меридиана. Величины σ_φ, σ_θ полностью характеризуют напряженное состояние оболочки.

На допустимые величины напряжений наложено ограничение по прочности

$$\Phi(\sigma_\varphi, \sigma_\theta) \leq 0 \tag{1.2}$$

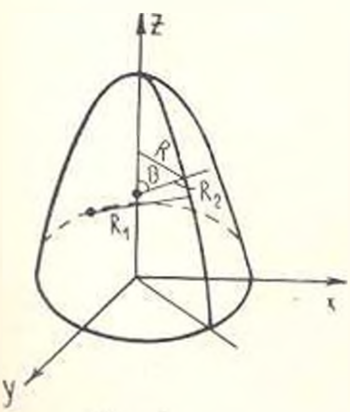
Заметим, что в плоскости главных напряжений область допустимых состояний Ω является выпуклой и начало координат (точка $\sigma_\varphi = 0$, $\sigma_\theta = 0$) является внутренней точкой Ω.

Масса элемента оболочки, лежащего между параллельными кругами θ_0 и θ, определяется формулой

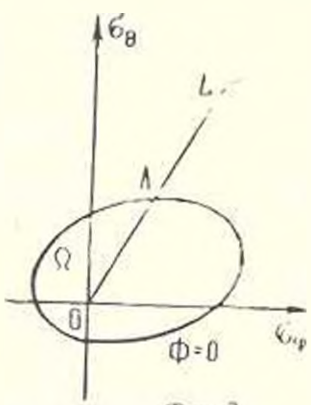
$$J = \rho \int_{\theta_0}^{\theta} hR_1R_2 \sin\theta d\theta \tag{1.3}$$

Задача оптимизации заключается в отыскании распределения толщины оболочки $h(\theta)$, доставляющего минимум функционалу (1.3) (функционалу веса) и такого, что напряжения, подсчитываемые по формулам (1.1), удовлетворяют условию прочности (1.2).

Функционал (1.3) линеен по h. Выражение $R_1 R_2 \sin\theta$ положительно, так как $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, а $0 \leq \theta \leq \pi$. Следовательно, минимум функционала достигается на нижнем ограничении для функции h, обусловленном критерием прочности. Искомую управляющую переменную h будем рассматривать как параметр в формулах (1.1), определяющий положение точки в плоскости напряжений на луче L, выходящем из начала координат (фиг. 2). Часть луча L, принадлежащая области Ω (OA на фиг. 2), соот-



Фиг. 1



Фиг. 2

ветствует напряженным состояниям в смысле критерия (1.2). При этом минимальная допустимая толщина h оболочки определяется пересечением луча L с предельной кривой ($\Phi = 0$). Оболочки, для которых толщины определяются таким образом, называются равнопрочными. Из проведенного рассмотрения очевидно, что для равнопрочных оболочек вращения реализуется минимум функционала (1.3) (массы материала).

Заметим, что если на оболочку действуют и скручивающие усилия, вызывающие сдвиговые напряжения, то аналогичными рассуждениями можно установить оптимальность равнопрочной оболочки и в этом случае.

В качестве примера рассмотрим задачу оптимального проектирования оболочки под действием гидростатического давления. Жидкость с плотностью μ заполняет весь объем обращенной выпуклостью вниз полусферической оболочки радиуса R. Для компонент напряжения имеем

$$\sigma_\theta = \frac{\mu g R^2}{3h}\,\frac{1-\cos^3\theta}{\sin^2\theta}, \qquad \sigma_\varphi = \frac{\mu g R^2}{3h}\left[3\cos\theta - \frac{1-\cos^3\theta}{\sin^2\theta}\right] \tag{1.4}$$

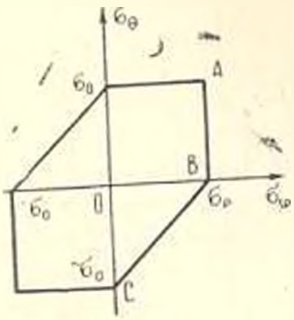
В качестве условия прочности примем критерий Треска

$$\max\left(|\sigma_\theta|,\ |\sigma_\varphi|,\ |\sigma_\theta-\sigma_\varphi|\right) \leqslant \sigma_0 \tag{1.5}$$

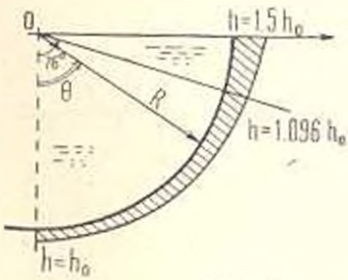
Предельная кривая этого условия на плоскости главных напряжений σ_θ, σ_φ изображена на фиг. 3. Из рассмотрения формул (1.4), (1.5) видно, что при $0 < \theta < \arccos((\sqrt{3}-1)/2) = 76^\circ$, как σ_θ, так и σ_φ положительны, и $|\sigma_\varphi| < |\sigma_\theta|$. Точка, характеризующая напряженное состояние оптимальной равнопрочной оболочки на плоскости $(\sigma_\theta, \sigma_\varphi)$, находится на прямой AB. Толщина оболочки в этом диапазоне изменения углов вычисляется по формуле $h = \mu g R^2(1-\cos^3\theta)/(3\sigma_0\sin^2\theta)$. На интервале $76^\circ < \theta < 90$ напряжение σ_φ становится отрицательным и точка в пространстве напряжений переходит на прямую BC (с уравнением $\sigma_\theta - \sigma_\varphi = \sigma_0$). Равнопрочная оболочка обладает толщиной

$$h = \frac{\mu g R^2}{3\sigma_0}\left|\frac{2(1-\cos^3\theta)}{\sin^2\theta} - 3\cos\theta\right|$$

График функции распределения толщины представлен на фиг. 4.



Фиг. 3



Фиг. 4

Приведем решение задачи оптимального проектирования тороидальной оболочки под действием внутреннего давления p. Пусть срединная поверхность оболочки представляет собой тор, образованный движением окружности радиуса R. При этом ее центр описывает окружность радиуса a. Компоненты напряжений равны

$$\sigma_\theta = \frac{pR}{2h}\,\frac{2a + R\sin\theta}{a + R\sin\theta}, \qquad \sigma_\varphi = \frac{pR}{2h}$$

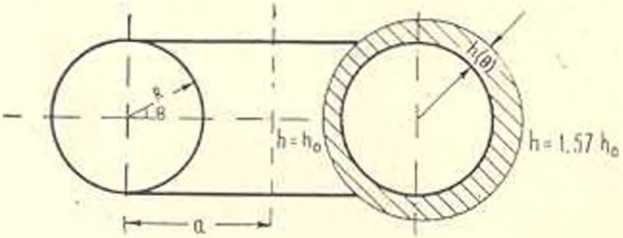
Предположим, что материал оболочки удовлетворяет условию прочности Мизеса

$$\sigma_\theta^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_\theta\sigma_\varphi \leqslant \sigma_0^2$$

Тогда оптимальное распределение толщин представляется формулой

$$h = \frac{pR}{2\sigma_0}\,\frac{\sqrt{3a^2 + 3aR\sin\theta + R^2\sin^2\theta}}{a + R\sin\theta}$$

График распределения толщины показан на фиг. 5.



Фиг. 5

2. *Оболочки максимальной жесткости.* Равновесие оболочки вращения, закрепленной вдоль одного края ($z = 0$) и нагруженной скручивающими усилиями q, описывается уравнениями

$$\frac{d}{d\theta}\left[R^2\left(S + \frac{2H}{R_2}\right)\right] = -qR_1R^2$$

$$H = \frac{Gh^3R}{6R_1R_2}\,\frac{d}{d\theta}\left(\frac{u}{R}\right), \qquad S = \frac{GhR}{R_2}\,\frac{d}{d\theta}\left(\frac{u}{R}\right)$$

где u — смещение в окружном направлении (вдоль параллели оболочки), G — модуль сдвига, h — толщина оболочки, R, R_1, R_2 означают соответственно текущий радиус оболочки, радиус кривизны меридиана, расстояние по нормали от поверхности до оси вращения. Через θ обозначен угол, образованный нормалью к поверхности оболочки и осью вращения z. Подставим выражения для H и S в уравнение равновесия и опустим в получающемся выражении член порядка $(h/R_2)^2$, который является величиной более высокого порядка малости, чем погрешность, допускаемая при выводе уравнений теории тонких оболочек. Будем иметь:

$$\frac{d}{d\theta}\left[\frac{GhR^3}{R_1}\,\frac{d}{d\theta}\left(\frac{u}{R}\right)\right] = -qR_1R^2$$

Учитывая соотношения $dR/d\theta = R_1\cos\theta$, $dz/dR = \operatorname{tg}\theta$ и переходя от дифференцирования по θ к дифференцированию по z, получим уравнение, описывающее распределение перемещений u как функцию координаты z:

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{GhR^3}{\sqrt{1+R_z^2}}\frac{d}{dz}\left(\frac{u}{R}\right)\right] = m \tag{2.1}$$

$$m = -qR^2\sqrt{1+(dR/dz)^2}$$

Граничные условия при $z = 0$ и на незакрепленном крае имеют вид

$$u(0) = 0, \quad \left[\frac{GhR^3}{\sqrt{1+R_z^2}}\frac{d}{dz}\left(\frac{u}{R}\right)\right]_{z=l} = 0 \tag{2.2}$$

Интегрируя уравнение (2.1) и выбирая константы интегрирования при помощи условия (2.2), находим распределение смещений оболочки

$$u(z) = R\int_0^l N(z,\zeta)\, m(\zeta)\, d\zeta \tag{2.3}$$

$$N(z,\zeta) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^z \frac{d\eta}{\psi(\eta)}, & 0 \leqslant z \leqslant \zeta \leqslant l \\ \displaystyle\int_0^\zeta \frac{d\eta}{\psi(\eta)}, & 0 \leqslant \zeta \leqslant z \leqslant l \end{cases}$$

$$\psi(\eta) = \frac{G(\eta)\, h(\eta)\, R^3(\eta)}{\sqrt{1+(dR/d\eta)^2}}$$

Рассмотрим для определенности случай, когда нагрузка приложена к незакрепленному краю оболочки. Перемещение свободного края вдоль параллели при приложении крутящего момента $M = q_0\left(R^2\sqrt{1+R'^2}\right)_{z=l}$ определяется формулой

$$u(l) = M\int_0^l \frac{\sqrt{1+R_z^2}}{GhR^3}\, dz \tag{2.4}$$

Объем материала оболочки фиксирован и равен заданной константе V, то есть

$$2\pi\int_0^l hR\sqrt{1+R_z^2}\, dz = V \tag{2.5}$$

Считается, что оболочка обладает максимальной жесткостью, если смещение $u(l)$ минимально. Поэтому задача отмимизации жесткости оболочки сводится к отысканию минимума функционала (2.4) при условии (2.5).

Определим оптимальный проект оболочки в случае, когда функция распределения толщины $h(z)$ рассматривается в качестве управляющей, а функция $R = R(z)$ задана. Можно показать, что необходимым и достаточным условием минимума функционала (2.4) при условии (2.5) является выполнение равенства

$$hR^2 = \sqrt{\nu}$$

где $\nu > 0$ — константа.

Используя данное условие оптимальности и изопериметрическое равенство (2.5), находим искомое распределение толщин

$$h = \frac{V}{2\pi R^2}\left(\int_0^l \frac{\sqrt{1+R_z^2}}{R}\,dz\right)^{-1} \tag{2.6}$$

Для оценки эффективности оптимизации рассмотрим оболочку с той же формой меридиана и обладающей постоянной толщиной. Выигрыш за счет оптимизации определяется по формуле

$$\eta = 1 - \frac{u(l)}{u_0(l)}$$

где $u_0(l)$, $u(l)$ — перемещение в параллельном направлении конца оболочек соответственно постоянной толщины и оптимальной. Считается, что объемы рассматриваемых оболочек равны. Производя соответствующие вычисления, определяем выигрыш

$$\eta = 1 - \frac{\int_0^l R\sqrt{1+R_z^2}\,dz \int_0^l \frac{\sqrt{1+R_z^2}}{R^3}\,dz}{\left(\int_0^l \frac{\sqrt{1+R_z^2}}{R}\,dz\right)^2}$$

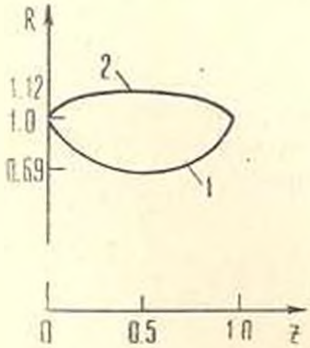
Рассмотрим теперь задачу отыскания оптимальной формы меридиана. Распределение толщин $h(z)$ будем предполагать заданным. С использованием соотношений (2.4), (2.5) и уравнения Эйлера нетрудно получить необходимое условие оптимальности (в дифференциальной форме), первый интеграл которого имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{1+R_z^2}}\left(\frac{\nu}{hR^3} + Rh\right) = G \tag{2.7}$$

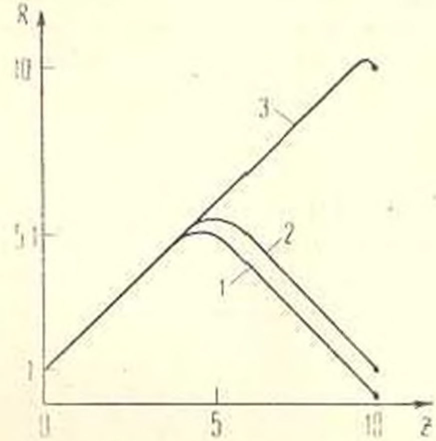
Константа G определяется из краевого условия $R(l) = R_l$, а ν — из изопериметрического условия. При $\nu = 0$ оптимальная оболочка представляет собой поверхность минимальной площади. Краевая задача решалась численно. В результате проведенных расчетов показано, что в некотором диапазоне параметров существуют два экстремальных решения. Одно из решений ($C > 0$) соответствует минимуму функционала (2.4), а другое ($C < 0$) — максимуму. На фиг. 6 показаны оптимальные очертания оболочки для различных значений параметра ν. Кривая 1 соответствует $\nu = 0$, кривая 2 — $\nu = \infty$.

Рассмотрим случай, когда управлениями являются как толщина, так и радиус оболочки. Выписывая условия экстремума по h и R, получим в данной задаче два соотношения (2.6), (2.7), служащие для определения искомых управляющих переменных. Нетрудно заметить, что для распределения толщин $h(z)$, удовлетворяющих условию (2.6), уравнение интегрируется в элементарных функциях

$$R = \sqrt{-z^2 + R_0^2(1 - z/l) + (R_l^2 + l^2)\, z/l}$$
$$h = \sqrt{\nu}/R^2 \tag{2.8}$$



Фиг. 6



Фиг. 7

Из (2.8) видно, что форма оболочки зависит только от значений величин R_0, R_l, l. Константа ν определяется из изопериметрического условия. На фиг. 7 кривыми 1, 2, 3 показано семейство оптимальных форм ($R = R(z)$) упругих оболочек соответственно для $R_0 = 1$, $l = 1$ и $R_l = 0.1$, $R_l = 1$, $R_l = 10$.

ՊՏՏՄԱՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՆԱԽԱԳԾՄԱՆ ՈՐՈՇ ՀԱՐՑԵՐ

ԲԱՆԻՉՈՒԿ Ն. Վ., ԿՈԲԵԼԵՎ Վ. Վ.

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում դիտարկված են պտտման առաձգական թաղանթների օպտիմալ նախագծման խնդիրները։ Մասսան (նյութի կշիռը, ծավալը), կոշտությունը և ամրությունը (լարումների կոնցենտրացիա) ենթադրվում են տրված։

Ապացուցված է, որ թաղանթների որոշ դասի համար օպտիմալության հայտանիշ է հանդիսանում համաչափամրության պայմանը։

SOME OPTIMUM DESIGN PROBLEMS FOR THE SHELLS OF REVOLUTION

N. V. BANICHUK, V. V. KOBELEV

Summary

This paper is devoted to the problem of optimum design of the elastic shells of revolution. Mass (weight, volume of the material), rigidity and strength (stress concentration) are considered as the functionals. It was proved that for some class of shells the optimality criterium is the equistrength condition.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Флюгге В.* Статика и динамика оболочек. М.: Госстройиздат, 1961. 306 с.
2. *Runge C., König H.* Vorlesungen über numerisches Rechnen. Berlin: 1924.
3. *Mansfield E. H.* An optimum surface of revolution for pressured shells. I. J. Mech. Sci., 1981, vol. 23, p. 57–62.
4. *Хуберян К. М.* Рациональные формы трубопроводов, резервуаров и напорных покрытий. М.: Госстройиздат, 1956.
5. *Ширко И. В.* Осесимметричный изгиб равнопрочной цилиндрической оболочки. ПМ, 1969, т. 5, вып. 4, с. 46—53.
6. *Циглер Н.* Купола равной прочности.— Механика, [illegible], № 2, с. 127—132.
7. *Гура Н. М.* Оболочки вращения максимальной жесткости, работающая на кручение.— МТТ, 1971, № 1, с. 138—144.

Институт проблем механики АН СССР
Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию
23. VI. 1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVI, № 2, 1983 Механика

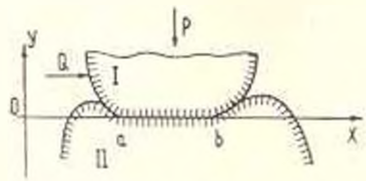
ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ АБЕЛЯ И ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ СО СТЕПЕННЫМ УПРОЧНЕНИЕМ МАТЕРИАЛА С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ТРЕНИЯ

РУБИН Б. С.

Известно, что интегральные уравнения первого рода со степенным ядром часто возникают в ряде задач механики. В настоящей статье дается решение в замкнутой форме плоской контактной задачи теории пластичности со степенным упрочнением материала в случае, когда коэффициент трения k между сжимаемыми телами является переменной величиной, зависящей от координаты точки контакта: $k = k(t)$. Приводимый здесь метод пригоден также для решения контактных задач теории ползучести при степенном законе связи между напряжениями и деформациями. Аналогичные контактные задачи без учета сил трения ранее исследовались Н. Х. Арутюняном [1, 2]. Случай, когда коэффициент трения является постоянной величиной, рассматривался Н. Х. Арутюняном и М. М. Манукяном в статье [3].

Обобщение результатов статьи [3] для случая переменного коэффициента трения основывается здесь на применении теории обобщенных уравнений Абеля, развитой С. Г. Самко в [4]. Метод этой работы заключается в сведении интегрального уравнения со степенным ядром к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши. Некоторые идеи, используемые в настоящей статье, заимствованы из монографии [5].

Пусть два соприкасающихся между собой тела прижимаются одно к другому под действием внешних сил, равнодействующая которых перпендикулярна к оси абсцисс. Допустим, что одно из сжимаемых тел, например, тело II, закреплено, между телами отсутствуют силы сцепления и действуют только силы трения, в направлении оси Ox на тело I действует сила Q, величина которой определяется из условия предельного равновесия тела I. Будем также считать, что область контакта сжимаемых тел совпадает с некоторым отрезком $[a, b]$ оси абсцисс.



Фиг. 1.

Условие пластичности с упрочнением материала принимается в виде

$$\sigma_i = K\varepsilon_i^{\mu} \tag{1.1}$$

где ε — интенсивность деформаций сдвига, σ_i — интенсивность касательных напряжений. K и μ — физические константы, причем $0 < \mu < 1$*.

Следуя работам [1, 3], введем обозначения: $y = f_1(x)$, $y = -f_2(x)$ — уравнения поверхностей контактирующих тел до приложения к ним сил; K_1, K_2 — физические постоянные, которыми определяются модули пластичности материалов первого и второго тел при одинаковом показателе μ.

$$A_{1,2} = \frac{m-2}{(2K_{1,2})^m (m-1)\, l}; \quad m = \frac{1}{\mu}; \qquad l^2 = \begin{cases} (2\mu - 1)/\mu^2, & \mu > 1/2 \\ (1 - 2\mu)/\mu^2, & \mu < 1/2 \end{cases}$$

$$a_1(x) = \begin{cases} D_1(x) \cos l\pi/2, & \mu > 1/2; \\ D_1(x) \operatorname{ch} l\pi/2, & \mu < 1/2; \end{cases} \qquad a_2 = \begin{cases} \sin l\pi/2, & \mu > 1/2 \\ \operatorname{sh} l\pi/2, & \mu < 1/2 \end{cases}$$

$D_1(x)$ и $D_2(x)$ — функции, определяемые из системы

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-D_1(x) \sin l\theta + \cos l\theta)^m (k(x) \cos\theta - \sin\theta)\, d\theta = 0 \\ D_2(x) = \left| \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-D_1(x) \sin l\theta + \cos l\theta)^m \cos\theta\, d\theta \right|^{-1} \end{cases}$$

если $\mu > 1/2$, и из системы

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (D_1(x) \operatorname{sh} l\theta + \operatorname{ch} l\theta)^m (k(x) \cos\theta - \sin\theta)\, d\theta = 0 \\ D_2(x) = \left| \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (D_1(x) \operatorname{sh} l\theta + \operatorname{ch} l\theta)^m \cos\theta\, d\theta \right|^{-1} \end{cases} \tag{1.2}$$

если $\mu < 1/2$.

$$f(x) = \left| \gamma - \frac{f_1(x) + f_2(x)}{A_1 + A_2} \right|^m \tag{1.3}$$

γ — некоторая константа, которая будет определена в дальнейшем.

Учитывая введенные обозначения, интегральное уравнение для определения нормального давления $p(x)$ в области контакта можно ([3]) записать в виде

$$\int_a^b D_2(s) \frac{[a_2 - a_1(s) \operatorname{sign}(s-x)]^m}{|s-x|^{1-\mu}}\, p(s)\, ds = f(x) \tag{1.4}$$

или

---

* Заметим, что поскольку закон (1.1) лишь приближенно характеризует зависимость между напряжениями и деформациями, то можно считать $\mu \neq 1/2$, заменяя при необходимости значение $\mu = 1/2$ сколь угодно близким.

$$I^{\mu}_{a+}\eta\psi + I^{\mu}_{b-}\zeta\psi = \frac{1}{\Gamma(\mu)} f \tag{1.5}$$

где

$$I^{\mu}_{a+}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_a^x \frac{\varphi(s)\,ds}{(x-s)^{1-\mu}}, \qquad I^{\mu}_{b-}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_x^b \frac{\varphi(s)\,ds}{(s-x)^{1-\mu}}$$

— левосторонний и правосторонний дробные интегралы Римана-Лиувилля порядка μ от функции φ, $\eta(x) = [a_2 + a_1(x)]^{-1}$, $\zeta(x) = [a_2 - a_1(x)]^{-1}$, $\varphi(x) = p(x)\,D_2(x)$.

Далее, пусть

$$S_{b-}\varphi = \frac{1}{\pi}\int_a^b \left(\frac{b-y}{b-x}\right)^{\mu} \frac{\varphi(y)\,dy}{y-x}$$

$D^{\mu}_{a+} f = (d/dx)\, I^{1-\mu}_{a+} f$, $D^{\mu}_{b-} f = -(d/dx)\, I^{1-\mu}_{b-} f$ — дробные производные Римана-Лиувилля порядка μ от функции f. С помощью соотношения

$$I^{\mu}_{a+}\varphi = \cos(\mu\pi)\, I^{\mu}_{b-}\varphi - \sin(\mu\pi)\, I^{\mu}_{b-} S_{b-}\varphi$$

([4], стр. 303) преобразуем уравнение (1.5) (такие уравнения называются обобщенными уравнениями Абеля) к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши:

$$c_1(x)\varphi(x) - \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{c_2(t)\varphi(t)}{t-x}\,dt = \frac{(b-x)^{\mu}}{\Gamma(\mu)}(D^{\mu}_{b-}f)(x) \tag{1.6}$$

где $c_1(x) = \zeta(x) + \eta(x)\cos\mu\pi$, $c_2(x) = \eta(x)\sin\mu\pi$, $\varphi(x) = \psi(x)(b-x)^{\mu}$.

Так как системы (1.2) в замкнутой форме не разрешимы, то будем считать коэффициент трения $k(x)$ кусочно-постоянной функцией $k(x) = k_i$, $x \in (a_i, a_{i+1})$, $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1} = b$. В этом случае функции $D_{1,2}(x)$ тоже будут кусочно-постоянными и значения их на каждом отрезке $[a_i, a_{i+1}]$ могут быть посчитаны приближенными методами ([3]). Уравнение (1.6) будет представлять собой уравнение с кусочно-постоянными коэффициентами.

Подобного рода идеализация вынуждает нас решение уравнения (1.4) искать в классе функций, допускающих интегрируемую особенность в точках разрыва коэффициента трения.

Решение этого уравнения имеет вид ([6]):

$$p(x) = \gamma_1(x)(D^{\mu}_{b-}f)(x) + \frac{(b-x)^{-\mu}}{\pi Z(x)\, D_2(x)}\int_a^b \frac{Z(t)\,\gamma_2(t)\,(b-t)^{\mu}\,(D^{\mu}_{b-}f)(t)}{t-x}\,dt +$$

$$+ \frac{(b-x)^{-\mu}\, P_{\kappa-1}(x)}{Z(x)\, D_2(x)} \tag{1.7}$$

где

$$\gamma_1(x) = \frac{c_1(x)}{\Gamma(\mu)\, D_2(x)\,[c_1^2(x) + c_2^2(x)]}, \qquad \gamma_2(x) = \frac{c_2(x)}{\Gamma(\mu)\,[c_1^2(x) + c_2^2(x)]}$$

$$Z(x) = \prod_{k=1}^{n+1} (x - a_k)^{-\varkappa_k} e^{\Gamma_0(x)}, \qquad \Gamma_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\ln G(t)\, dt}{t - x}$$

$$G(x) = \frac{c_1(x) - ic_2(x)}{c_1(x) + ic_2(x)} = \frac{\zeta(x) + \gamma_1(x)\, e^{-i\pi\mu}}{\zeta(x) + \gamma_1(x)\, e^{i\pi\mu}}, \qquad \varkappa = \sum_{k=1}^{n+1} \varkappa_k$$

Числа $\varkappa_k$ выбираются на каждом конце в соответствии с классом решений. Пусть $G(a_k) = \rho_k e^{i\theta_k}$. Тогда

$$G(a_1 - 0) = 1, \quad G(a_1 + 0) = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad \frac{G(a_1 - 0)}{G(a_1 + 0)} = \frac{1}{\rho_1} e^{-i\theta_1}$$

$$G(a_k - 0) = \rho_{k-1} e^{i\theta_{k-1}}, \quad G(a_k + 0) = \rho_k e^{i\theta_k}$$

$$\frac{G(a_k - 0)}{G(a_k + 0)} = \frac{\rho_{k-1}}{\rho_k} e^{i(\theta_{k-1} - \theta_k)}, \quad k = 2, \ldots, n$$

$$G(a_{n+1} - 0) = \rho_n e^{i\theta_n}, \quad G(a_{n+1} + 0) = 1, \quad \frac{G(a_{n+1} - 0)}{G(a_{n+1} + 0)} = \rho_n e^{i\theta_n}$$

Условимся значения θ_k брать в пределах $-2\pi < \theta_k \leqslant 0$. Тогда для решений, принадлежащих самому широкому классу, будем иметь

$$\varkappa_1 = \left[-\frac{\theta_1}{2\pi} \right] = 0, \quad \varkappa_k = \left[\frac{\theta_{k-1} - \theta_k}{2\pi} \right] = \begin{cases} 0, & \theta_k < \theta_{k-1}, \\ 1, & \theta_k > \theta_{k-1}, \end{cases} \quad k = 2, \ldots, n$$

$$\varkappa_{n+1} = \left[\frac{\theta_n}{2\pi} \right] = -1, \quad \varkappa = -1 + \sum_{k=2}^{n} \varkappa_k \leqslant -1.$$

Заметим, что случаев автоматической ограниченности решений в точках a_k можно избежать, изменив сколь угодно мало величину μ, поэтому мы эти случаи рассматривать не будем.

Преобразовывая выражение для $Z(x)$, решение (1.7) можно записать в виде

$$p(x) = \gamma_1(x)\,(D_{b-}^{\nu} f)(x) +$$

$$+ \frac{(b-x)^{\nu-\mu}}{\pi Z_1(x)\, D_2(x)} \int_a^b \frac{\gamma_2(t)\, Z_1(t)\, (b-t)^{\mu-\nu}(D_{b-}^{\nu} f)(t)}{t - x}\, dt + \tag{1.8}$$

$$+ \left[P_{-\varkappa-1}(x) - \frac{1}{\pi} \int_a^b \gamma_2(t)\, Z_1(t)\, (b-t)^{-\varkappa+\mu-\nu} (D_{b-}^{\nu} f)(t)\, dt \right] \frac{(b-x)^{\varkappa-1-\mu}}{Z_1(x)\, D_2(x)}$$

где

$$Z_1(x) = \prod_{k=1}^{n} |x - a_k|^{\lambda_k} e^{-i\varkappa_k \arg(x - a_k)}, \quad \lambda_k = \frac{\theta_{k-1} - \theta_k}{2\pi} - \varkappa_k, \quad k = 1, \ldots, n$$

$$\lambda = -\frac{\theta_n}{2\pi}, \quad 0 < \lambda_1, \ \ldots \ \lambda_k < 1$$

Учитывая, что $\lambda = -\dfrac{\theta_n}{2\pi} = -\dfrac{1}{2\pi} \arg \dfrac{\xi^\mu + e^{-\mu\pi i}}{\xi^\mu + e^{\mu\pi i}}$, где

$$\xi = \frac{a_2 - a_1(b-0)}{a_2 + a_1(b-0)}$$

можно показать, что если $\xi > 0$, то $\lambda < \mu$, а если $\xi < 0$, то выполнения неравенства $\lambda < \mu$ всегда можно добиться за счет выбора ветви аргумента ξ^μ. Так как при $\lambda < \mu$ второе слагаемое в (1.8) имеет неинтегрируемую особенность, то следует обратить его в нуль, полагая

$$P_{-\lambda-1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \gamma_2(t) Z_2(t) (b-t)^{-\lambda+\mu} (D_{b-}^{\mu} f)(t)\, dt$$

Наконец, в силу соотношения

$$(D_{b-}^{\mu} f)(x) = \frac{f(b)}{\Gamma(1-\mu)(b-x)^\mu} - (I_{b-}^{1-\mu} f')(x)$$

окончательно имеем

$$p(x) = \frac{\gamma_1(x) f(b)}{\Gamma(1-\mu)(b-x)^\mu} + \frac{f(b)(b-x)^{\lambda-\mu}}{\pi\Gamma(1-\mu) Z_1(x) D_2(x)} \int_a^b \frac{Z_1(t)\gamma_2(t)(b-t)^{-\lambda} dt}{t-x} -$$

$$- (RI_{b-}^{1-\mu} f')(x) \qquad (1.9)$$

где

$$(RI_{b-}^{1-\mu} f')(x) = \gamma_1(x)(I_{b-}^{1-\mu} f')(x) +$$

$$+ \frac{(b-x)^{\lambda-\mu}}{\pi Z_1(x) D_2(x)} \int_a^b \frac{\gamma_2(t) Z_1(t)(b-t)^{-\lambda+\mu} (I_{b-}^{1-\mu} f')(t)}{t-x}\, dt$$

В формуле (1.9) первые два слагаемых дают решение задачи о контакте двух тел с прямолинейными профилями участков, вступающих в контакт. Добавка $RI_{b-}^{1-\mu} f'$ вызвана наличием кривизны контактирующих участков.

Полученная формула дает решение контактной задачи в случае, когда в точках a и b хотя бы одно из сжимаемых тел имеет углы.

Получим решение задачи для случая, когда контактирующие поверхности не имеют углов. Преобразуем сингулярные интегралы в формуле (1.9)

$$J_1 = \frac{(b-x)^{\lambda-\mu}}{\pi Z_1(x) D_2(x)} \int_a^b \frac{\gamma_2(t) Z_1(t) (b-t)^{-\lambda+\mu} (I_{b-}^{1-\mu} f')(t)}{t-x}\, dt =$$

$$= \frac{(b-x)^{1+\lambda-\mu}}{\pi Z_1(x) D_2(x)} \int_a^b \frac{\gamma_2(t) Z_1(t) (b-t)^{-1-\lambda+\mu} (I_{b-}^{1-\mu} f')(t)}{t-x}\, dt -$$

$$- \frac{(b-x)^{\lambda-\mu}}{\pi D_2(x) Z_1(x)} \int_a^b \gamma_2(t) Z_1(t) (b-t)^{-1-\lambda+\mu} (I_{b-}^{1-\mu} f')(t)\, dt$$

Первые два слагаемых в (1.9), пользуясь соотношением

$$S_{b,\lambda} \psi = -\operatorname{ctg}(\lambda\pi)\, \psi + \operatorname{cosec}(\lambda\pi)\, I_{b-}^{\lambda} D_{a}^{\lambda} \psi$$

([4], стр. 305), можно преобразовать следующим образом:

$$J_3 = \frac{f(b)(b-x)^{-\mu}}{D_2(x)\Gamma(1-\mu)} \Big[D_2(x)\gamma_1(x) - \operatorname{ctg}(\lambda\pi)\gamma_2(x) +$$

$$+ \frac{1}{\sin(\lambda\pi) Z_1(x)} (I_{b-}^{\lambda} D_{a_*}^{\lambda} Z_1\gamma_2)(x) \Big]$$

Пусть $x \in [a_*, b]$. Нетрудно убедиться, что $D_2(x)\gamma_1(x) - \operatorname{ctg}(\lambda\pi)\gamma_1(x) = 0$. Отсюда

$$J_3 = \frac{f(b)(b-x)^{-\mu}}{D_2(x)\Gamma(1-\mu)\sin(\lambda\pi) Z_1(x)} (I_{b-}^{\lambda} D_{a_*}^{\lambda} Z_1\gamma_2)(x)$$

или

$$J_3 = \frac{f(b)(b-x)^{\lambda-\mu}\psi_1(b)}{D_2(x)\Gamma(1-\mu)\sin(\lambda\pi) Z_1(x)\lambda\Gamma(\lambda)} -$$

$$- \frac{f(b)(b-x)^{-\mu} D_2^{-1}(x)}{\lambda\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\mu)\sin(\lambda\pi) Z_1(x)} \int_x^b (t-x)^{\lambda} \psi_1'(t)\, dt$$

где

$$\psi_1(t) = (D_{a_*}^{\lambda} Z_1\gamma_2)(t), \quad t > a_*.$$

Второе слагаемое в (1.10) ограничено в точке $x = b$. Таким образом, в случае, когда в точке $x = b$ нет угла, решение на отрезке $[a_*, b]$ имеет вид

$$p(x) = - \frac{f(b)(b-x)^{-\mu} D_2^{-1}(x)}{\Gamma(1+\lambda)\Gamma(1-\mu)\sin(\lambda\pi) Z_1(x)} \int_a^b \psi_1'(t)(t-x)^{\lambda}\, dt -$$

$$- \gamma_1 (I_{b-}^{1-\mu} f')(x) - \frac{(b-x)^{1+\lambda-\mu}}{\pi Z_1(x) D_2(x)} \int_a^b \frac{\gamma_2(t) Z_1(t) (b-t)^{-1-\lambda+\mu} (I_{b-}^{1-\mu} f')(t)}{t-x}\, dt$$

при выполнении условия

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \gamma_2(t)\, Z_1(t)\,(b-t)^{\ldots}\,(I_{b-}^{1-\mu}f')(t)\,dt = \frac{f(b)\,\psi_1(b)}{\Gamma(1-\mu)\sin(\lambda\pi)\,\Gamma(1+\lambda)}$$

которое служит для определения координаты точки b.

Аналогично в случае, когда в точке $x=a$ нет угла, при $x \in (a_1, a_2)$, полагая $Z_2(x) = (x-a)^{\ldots} Z_1(x)(b-x)^{\ldots}$, где $\varkappa_2 = -\theta_1/2\pi$, получаем

$$p(x) = \frac{f(b)\,(I_{a+}^{1-\mu} I_{b-}^{\mu}(b-\tau)^{-\mu} Z_2(\tau))(x)}{\Gamma(1-\mu)\sin(\varkappa_2\pi)\, Z_2(x)\, D_2(x)} - \gamma_1(x)(I_{b-}^{1-\mu}f')(x) -$$

$$-\frac{(x-a)^{1-\varkappa_2}}{\pi D_2(x)\, Z_2(x)}\int_a^b \frac{\gamma_2(t)\, Z_2(t)\,(t-a)^{\varkappa_2-1}(I_{b-}^{1-\mu}f')(t)}{t-x}\,dt$$

При этом предполагается выполненным условие

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \gamma_2(t)\, Z_2(t)\,(t-a)^{\varkappa_2-1}(I_{b-}^{1-\mu}f')(t)\,dt = \frac{f(b)\,\psi_2(a)}{\Gamma(1-\mu)\sin(\varkappa_2\pi)\,\Gamma(1-\varkappa_2)}$$

$$\psi_2 = I_{b-}^{\mu}\frac{Z_2(t)}{(b-t)^{\mu}}$$

которое служит для нахождения координаты точки a.

В полученных формулах можно избавиться от сингулярных интегралов, если воспользоваться соотношениями (1.20)—(1.21) из [4].

Постоянная γ, которая входит в выражение для функции f, находится из условия равновесия

$$P = \int_a^b p(x)\,dx$$

В заключение заметим, что формула (2.24), полученная в [3] для определения давления штампа с прямолинейным основанием на полуплоскость в случае постоянного коэффициента трения, легко выводится из (1.9). Имеем:

$$EI_{b-}^{1-\mu} f = 0, \quad f(b) = \gamma_1^{\ldots}, \quad Z_1(x) = (x-a)^{\ldots}$$

$$p(x) = \frac{\gamma^{\ldots}(b-x)^{\ldots}}{\Gamma(1-\mu)\, D_2}\left(D_2\gamma_1 + \frac{\gamma_2(b-x)^{\ldots}}{\pi(x-a)^{\ldots}}\int_a^b \frac{(t-a)^{\ldots}(b-t)^{\ldots}}{t-x}\,dt\right) =$$

$$= \frac{\gamma^{\ldots}\gamma_2\,(x-a)^{\ldots}(b-x)^{\ldots}}{D_2\sin(\varkappa\pi)}$$

Находя значение γ, окончательно получаем

$$p(x) = \frac{P\,(x-a)^{\ldots}(b-x)^{\ldots}}{B(1-\varkappa,\ 1+\varkappa-\mu)}$$

что, как нетрудно убедиться, есть не что иное, как формула (2.24) из [3].

ԱԲԵԼԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ ԵՎ ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՕՐԵՆՔՈՎ ԱՄՐԱՊՆԴՎՈՂ ՆՅՈՒԹԻ ՊԼԱՍՏԻԿՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ ՇՓՄԱՆ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԳՈՐԾԱԿՑՈՎ

ՌՈՒԲԻՆ Բ. Ս.

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Վերնագրում նշված խնդիրը լուծվում է փակ տեսքով։ Ինտեգրալ հավասարումը, որից որոշվում է p (X) նորմալ ճնշումը, պատկանում է ներքին գործակիցներով Աբելի ընդհանրացված հավասարումների դասին։ Հաշվի առնելով կոտորակային ինտեգրալների և Կոշու կորիզով սինգուլյար օպերատորների միջև կապը, այդ հավասարումը բերվում է սինգուլյարի և լուծվում է կվադրատուրաներով։ Ստացված են լուծումներ այն դեպքերի համար, երբ կոնտակտային մակերևույթները ունեն անկյուններ և չունեն։

GENERALIZED ABEL'S EQUATION AND THE PLANE CONTACT PROBLEM OF PLASTICITY THEORY WITH DEGREE STRENGTHENING OF MATERIAL WITH VARIABLE FRICTION COEFFICIENT

B. S. RUBIN

S u m m a r y

The indicated problem has been solved in a closed form. The integral equation from which the normal pressure $p(x)$ is found belongs to the class of generalized Abel's equations with internal coefficients. Due to the connection between fractional integrals and singular operators with the Cauchy kernel, this equation is reduced to the singular one and is solved in quadratures. The solutions have been obtained in those cases when the contact surfaces have or have not angles.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала.— Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. н., 1959, т. 12, № 2.
2. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
3. *Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
4. *Самко С. Г.* Об обобщенном уравнении Абеля и операторах дробного интегрирования.— Дифференц. уравнения, 1968, т. 4, № 2.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: ГИФМЛ, 1963.

Ростовский государственный университет

Поступила в редакцию 4.IX.1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 2, 1983 Механика

О СООТНОШЕНИЯХ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА, РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ ДЕФОРМАЦИЯМ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ

МКРТЧЯН Р. Е.

Многие композиционные материалы проявляют свойство разносопротивляемости к растяжению и сжатию как в связи с плохой сопротивляемостью к растяжению связующего материала, так и по причине потери устойчивости некоторых армирующих волокон при сжатии. Например, большинство из расчетов железобетонных конструкций основывается на предположении, что при растяжении железобетона в нем работает только арматура, а при сжатии — бетон и арматура. Существуют также однородные материалы, обладающие свойством разносопротивляемости.

Исследованию свойств таких разномодульных материалов посвящено много замечательных работ советских и зарубежных исследователей ([1—16] и др.). Экспериментальным путем найдены физические константы некоторых материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Обзор этих работ и систематическое изложение разномодульной теории упругости можно найти в книге [16] и в работах [10—12].

В настоящей работе рассматриваются определяющие соотношения для плоской деформации упругого материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия. Работа основывается на результатах работы [7], которые в дальнейшем подтверждались в работах* [8, 12].

1. Если принять, что указанный материал по всем направлениям растягивается или сжимается, то контравариантные компоненты тензора на-

* В работе [12] отмечается, что несмотря на соответствие в общем с предшествующими авторами, имеется некоторая разница ввиду отбрасывания некоторых членов при представлении функции энергии. Это замечание относится к выражениям вида [7, 9]

$$W = W(I_1, I_2, I_3, \gamma_{(33)}) = W(I_1, I_2, I_3, \gamma_{(3)}^2) \tag{a}$$

где инвариант I_3 с помощью соотношения [3]

$$\lambda^6 - \lambda^4 I_1 + \lambda^2 I_2 - I_3 = 0 \tag{b}$$

выражается через I_1 и I_2, и W представляется в виде [12]

$$W = W(I_1, I_2, \lambda^2) \tag{c}$$

Соглашаясь с полезностью представления (c), автор настоящей работы считает, что и представления (a) не теряют своего значения, так как с помощью (b) можно выразить как I_3, так и I_1 и I_2 через остальные инварианты и привести (a) к соответствующему виду.

В работе [12] отмечается также, что результаты работ [7, 8, 9, 12] при малых деформациях соответствуют друг другу.

пряжений σ^{ij}_{+} или σ^{ij}_{-} относительно произвольной системы координат $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ при малых деформациях определяются выражениями [7]

$$\sigma^{ij}_{+} = \lambda\gamma^s_s g^{ij} + 2\mu^{+}\gamma^{ij}, \quad \sigma^{ij}_{-} = \lambda\gamma^s_s g^{ij} + 2\mu^{-}\gamma^{ij} \tag{1.1}$$

где γ^{ij} и γ^i_j — контрвариантные и смешанные компоненты тензора деформаций соответственно; g^{ij} — контрвариантные компоненты метрического тензора; λ, μ^{+} (или μ^{-}) — постоянные Ляме.

С деформированным телом свяжем ортогональную систему координат $(\bar\theta^1, \bar\theta^2, \bar\theta^3)$, направления осей которой в каждой точке совпадают с главными направлениями деформаций. Если материал растягивается по направлению $\bar\theta^s$ (по остальным двум материал сжимается, или деформации равны нулю), то контрвариантные компоненты тензора напряжений определяются выражениями [7]

$$\sigma^{ij}_{(s)} = \lambda\gamma^s_s g^{ij} + 2\mu^{-}\gamma^{ij} + 2(\mu^{+} - \mu^{-})\bar e_s M^{ij}_{(s)} \tag{1.2}$$

где

$$\bar e_s = \frac{\bar\gamma_{ss}}{\bar g_{ss}}, \qquad M^{ij}_{(s)} = \frac{\partial\theta^i}{\partial\bar\theta^s}\frac{\partial\theta^j}{\partial\bar\theta^s}\Big/\bar g_{ss} \tag{1.3}$$

(здесь и в последующих формулах по индексу s не суммировать), $\bar\gamma_{ss}$ и $\bar g_{ss}$ — ковариантные компоненты тензора деформаций и метрического тензора относительно системы $(\bar\theta^1, \bar\theta^2, \bar\theta^3)$, $\bar e_s$ — главные относительные удлинения.

В случае, когда материал сжимается только по направлению $\bar\theta^s$, имеем

$$\sigma^{ij}_{(s)} = \lambda\gamma^s_s g^{ij} + 2\mu^{+}\gamma^{ij} + 2(\mu^{-} - \mu^{+})\bar e_s M^{ij}_{(s)} \tag{1.4}$$

В прямоугольной декартовой системе координат $(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = (x_1, x_2, x_3)$ выражения (1.3) принимают следующий вид:

$$M^{ij}_{(s)} = \cos(x_i, \bar\theta^s)\cos(x_j, \bar\theta^s)$$

и уравнения (1.1), (1.2) и (1.4) представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\sigma^{+}_{ij} &= \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu^{+}e_{ij}\\
\sigma^{-}_{ij} &= \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu^{-}e_{ij}\\
\sigma^{(s)}_{ij} &= \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu^{-}e_{ij} + 2(\mu^{+} - \mu^{-})\cos(x_i, \bar\theta^s)\cos(x_j, \bar\theta^s)\bar e_s\\
\sigma^{(s)}_{ij} &= \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu^{+}e_{ij} + 2(\mu^{-} - \mu^{+})\cos(x_i, \bar\theta^s)\cos(x_j, \bar\theta^s)\bar e_s
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где σ_{ij} — физические компоненты напряжений, e_{ij} — компоненты тензора деформаций в системе (x_1, x_2, x_3), δ_{ij} — символы Кронекера,

$$\Delta = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \bar e_1 + \bar e_2 + \bar e_3$$

2. Рассмотрим состояние плоской деформации

$$\partial/\partial x_3 = 0, \quad e_{23} = e_{13} = e_{33} = \bar{e}_3 = 0$$

Тогда выражения (1.5) принимают вид

$$\sigma^{+}_{\alpha\beta} = \lambda\Delta\delta_{\alpha\beta} + 2\mu^{+} e_{\alpha\beta}$$

$$\sigma^{-}_{\alpha\beta} = \lambda\Delta\delta_{\alpha\beta} + 2\mu^{-} e_{\alpha\beta}$$

$$\sigma'^{(1)}_{\alpha\beta} = \lambda\Delta\delta_{\alpha\beta} + 2\mu^{-} e_{\alpha\beta} + 2(\mu^{+} - \mu^{-})\cos(x_\alpha, \bar{\theta}^1)\cos(x_\beta, \bar{\theta}^1)\bar{e}_1$$

$$\sigma''^{(1)}_{\alpha\beta} = \lambda\Delta\delta_{\alpha\beta} + 2\mu^{+} e_{\alpha\beta} + 2(\mu^{-} - \mu^{+})\cos(x_\alpha, \bar{\theta}^1)\cos(x_\beta, \bar{\theta}^1)\bar{e}_1 \tag{2.1}$$

$$\sigma_{33} = \lambda\Delta, \quad \sigma_{\alpha 3} = 0$$

$$\Delta = e_{11} + e_{22} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$$

Здесь и в дальнейшем индексы α, β и γ принимают значения 1 и 2, σ_{33} и $\sigma_{\alpha 3}$ символизируют соответствующие напряжения со штрихами и с индексами «+» и «−».

Если ортогональная система главных направлений $(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2, \bar{\theta}^3)$ образует правую систему, то

$$\cos(x_1, \bar{\theta}^1) = \cos\alpha$$

$$\cos(x_2, \bar{\theta}^1) = \cos(3/2\,\pi + \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(x_1, \bar{\theta}^2) = \cos(1/2\,\pi + \alpha) = -\sin\alpha \tag{2.2}$$

$$\cos(x_2, \bar{\theta}^2) = \cos\alpha$$

Из условия, что материал по направлению x_3 не деформируется, следует

$$\sigma'^{(1)}_{\alpha\beta} = \sigma''^{(2)}_{\alpha\beta} = \sigma^{+-}_{\alpha\beta}, \quad \sigma'^{(2)}_{\gamma\beta} = \sigma''^{(1)}_{\alpha\beta} = \sigma^{-+}_{\alpha\beta} \tag{2.3}$$

Подставляя в (2.3) выражения соответствующих напряжений из (1.1) и принимая во внимание (2.2), можно получить

$$e_{11} = \bar{e}_1\cos^2\alpha + \bar{e}_2\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + \frac{1}{2}(\bar{e}_1 - \bar{e}_2)\cos 2\alpha$$

$$e_{22} = \bar{e}_1\sin^2\alpha + \bar{e}_2\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) - \frac{1}{2}(\bar{e}_1 - \bar{e}_2)\cos 2\alpha \tag{2.4}$$

$$e_{12} = (\bar{e}_1 - \bar{e}_2)\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}(\bar{e}_1 - \bar{e}_2)\sin 2\alpha$$

Эти формулы выражают известную связь между $e_{\alpha\beta}$ и $\bar{e}_\gamma$.

Из (2.1) с помощью (2.3) и (2.4) получаем

$$\sigma^{+-}_{11} = \lambda\Delta + 2\mu^{+}\cos^2\alpha\,\bar{e}_1 + 2\mu^{-}\sin^2\alpha\,\bar{e}_2$$

$$\sigma^{+-}_{22} = \lambda\Delta + 2\mu^{-}\sin^2\alpha\,\bar{e}_1 + 2\mu^{-}\cos^2\alpha\,\bar{e}_2 \tag{2.5}$$

$$\sigma^{+-}_{12} = 2(\bar{e}_1\mu^{+} - \bar{e}_2\mu^{-})\sin\alpha\cos\alpha$$

Для $\sigma^{-+}_{\alpha\beta}$ получаются аналогичные выражения (вместо μ^+ подставляется μ^- и, наоборот).

Из (2.4) и (2.5) вытекает

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2e_{12}}{e_{11} - e_{22}} = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \tag{2.6}$$

$$\bar{e}_1 = \frac{\Delta}{2} + \frac{e_{11} - e_{22}}{2\cos 2\alpha}, \quad \bar{e}_2 = \frac{\Delta}{2} - \frac{e_{11} - e_{22}}{2\cos 2\alpha} \tag{2.7}$$

Подставляя (2.7) в (2.5), можно получить следующие выражения:

$$\sigma^{+-}_{\alpha\beta} = \lambda\Delta\delta_{\alpha\beta} + (\mu^+ + \mu^-)\, e_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\Delta(\mu^+ - \mu^-)\, T_{\alpha\beta} + (\mu^+ - \mu^-)\frac{e_{11} - e_{22}}{2T_{11}}\delta_{\alpha\beta} \tag{2.8}$$

где

$$T_{11} = -T_{22} = \cos 2\alpha, \quad T_{12} = T_{21} = \sin 2\alpha \tag{2.9}$$

Разрешая соотношения (2.8) относительно деформаций и принимая во внимание (2.6), можно определить

$$e_{\alpha\beta} = \frac{\lambda + \mu^+ + \mu^-}{c}\sigma^{+-}_{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{c}(\sigma^{+-} - \sigma^{+-}_{\alpha\beta})\,\delta_{\alpha\beta} - \frac{\mu^+ - \mu^-}{2c}\sigma^{+-}T_{\alpha\beta} -$$

$$- \frac{(\mu^+ - \mu^-)}{2c}\frac{(\sigma^{+-}_{11} - \sigma^{+-}_{22})}{T_{22}}\delta_{\alpha\beta} \tag{2.10}$$

где

$$\sigma^{+-} = \sigma^{+-}_{11} + \sigma^{+-}_{22}, \quad c = 2\lambda(\mu^+ + \mu^-) + 4\mu^+\mu^-$$

(здесь по α и β не суммировать).

3. При решении задач теории упругости к физическим уравнениям (2.1), (2.8) и (2.10) присоединяются уравнения равновесия

$$\sigma_{\beta\alpha,\beta} + X_\alpha = 0 \tag{3.1}$$

и геометрические уравнения

$$e_{\alpha\beta} = 1/2\,(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \tag{3.2}$$

$$e_{11,22} + e_{22,11} = 2e_{12,12} \tag{3.3}$$

В этих уравнениях запятая обозначает частное дифференцирование. $X_\alpha(x_1, x_2)$ и u_α — компоненты объемной силы и вектора перемещения соответственно.

В том частном случае, когда возможно показать, что в плоскодеформированном теле или в какой-то его части возможны только растягивающие или только сжимающие деформации, то решение такой задачи для этого тела или его части в принципе не отличается от решения соответствующей задачи для обычного материала. Поэтому здесь рассматривается только случай, когда одновременно возникают деформации разного знака.

Подставляя (2.8) в (3.1) и учитывая (3.2), можно получить выражение

$$\Delta_{,\alpha} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\nabla^2 u_\alpha + \frac{1}{\lambda+\mu}X_\alpha - \frac{\mu^- - \mu^+}{2(\lambda+\mu)}\left[\left(\frac{u_{1,1}-u_{2,2}}{T_{11}}\right) - \Delta T_{\alpha\beta,\beta}\right] \qquad (3.4)$$

где значения $T_{\alpha\beta}$ приводятся в (2.9)

$$\mu = \frac{1}{2}(\mu^+ + \mu^-), \quad \Delta = e_{11} + e_{22} = u_{i,i}$$

∇^2 — оператор Лапласа.

При решении второй основной задачи, когда на контуре заданы перемещения

$$u_1 = g_1(s), \quad u_2 = g_2(s) \qquad (3.5)$$

как заданные функции дуги s контура, в (3.4) подставляются значения

$$T_{12} = T_{21} = \sin 2\alpha = \frac{u_{1,2}+u_{2,1}}{\sqrt{(u_{1,1}-u_{2,2})^2 + (u_{1,2}+u_{2,1})^2}}$$

$$T_{11} = -T_{22} = \cos 2\alpha = \frac{u_{1,1}-u_{2,2}}{\sqrt{(u_{1,1}-u_{2,2})^2 + (u_{1,2}+u_{2,1})^2}}$$

которые вытекают из (2.6) и (3.2).

Если в уравнении равновесия (3.1) предположить, что компоненты объемной силы $X_\alpha(x_1, x_2)$ определяются, исходя из потенциальной функции $V(x_1, x_2)$, в форме

$$X_\alpha = -V_{,\alpha}$$

и что существует функция напряжения Φ такая, что $\sigma_{ij} = -\Phi_{,ij}$, то уравнению (3.1) удовлетворяет следующее соотношение:

$$\sigma_{ij} = -\Phi_{,ij} + \delta_{ij}\Phi_{,kk} + \delta_{ij}V \qquad (3.6)$$

Для того, чтобы (3.2) имело действительные решения, должны удовлетворяться уравнения совместности (3.3). Подставляя выражения (2.9) и (2.10) в (3.3) и принимая во внимание (2.6) и (3.2), можно найти следующее уравнение:

$$\nabla^4\Phi + \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\nabla^2 V + \frac{\mu^+ - \mu^-}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(\sigma\cos 2\alpha) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(\sigma\cos 2\alpha) - \right.$$

$$\left. - \nabla^2\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{\cos 2\alpha}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(\sigma\sin 2\alpha)\right] = 0 \qquad (3.7)$$

где ∇^4 — бигармонический оператор, $\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22}$.

Если в (3.7) подставить из (2.6) значения

$$\sin 2\alpha = \frac{2\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+4\sigma_{12}^2}}, \quad \cos 2\alpha = \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+4\sigma_{12}^2}} \tag{3.8}$$

и выражение $\sigma_{\alpha\beta}$ из (3.6), то для определения функции Φ получается довольно сложное нелинейное уравнение с граничными условиями

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}\frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_2}\frac{dx_1}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\right) \\ p_2 &= -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_2}\frac{dx_2}{ds} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}\frac{dx_1}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right) \end{aligned} \tag{3.9}$$

где p_1 и p_2 — компоненты нагрузки на контуре.

В каждом конкретном случае, предварительно убедившись в сходимости итерационного процесса, для решения первой и второй граничных задач (3.7) — (3.9) и (3.4), (3.5) можно применить метод последовательных приближений следующим образом. При решении задачи (3.7), (3.9) в первом приближении принимается, что рассматриваемое тело или характерная его часть изготовлены из обычного изотропного материала с упругими постоянными λ и $\mu = (\mu^+ + \mu^-)/2$ (постоянные Ляме) и решается граничная задача (если нет такого решения в литературе)

$$\nabla^4\Phi^{\mathrm{I}} + \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\nabla^2 V = 0 \tag{3.10}$$

с граничными условиями (3.9). Индексы I, II и т. д. показывают номер приближения соответствующих величин.

Определяя значения $\sigma_{\alpha\beta}^{\mathrm{I}}$, $\sin^{\mathrm{I}} 2\alpha$ и $\cos^{\mathrm{I}} 2\alpha$ из (3.6) и (3.8) и подставляя их в квадратные скобки (3.7) совместно с (3.9), можно получить граничную задачу для второго приближения

$$\nabla^4\Phi^{\mathrm{II}} + F^{\mathrm{I}} = 0 \tag{3.11}$$

где

$$F^{\mathrm{I}} = \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\nabla^2 V + \frac{\mu^+ - \mu^-}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(\sigma^{\mathrm{I}}\cos 2\alpha) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(\sigma^{\mathrm{I}}\cos^{\mathrm{I}} 2\alpha) - \right.$$

$$\left. - \nabla^2\frac{(\sigma_{11}^{\mathrm{I}} - \sigma_{22}^{\mathrm{I}})}{\cos 2\alpha} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}(\sigma^{\mathrm{I}}\sin^{\mathrm{I}} 2\alpha)\right] \tag{3.12}$$

Указанный итерационный процесс повторяется до получения необходимой точности, то есть до достижения достаточно малой величины $\max\left|\dfrac{\sigma_{\alpha\beta}^{N} - \sigma_{\alpha\beta}^{N-1}}{\sigma_{\alpha\beta}^{N}}\right|$, где N — номер последнего приближения.

Вторую основную задачу (3.4) и (3.5) можно решить аналогичным путем.

В случае слабо выраженной разносопротивляемости, то есть когда $\frac{\mu^+ - \mu^-}{\lambda + 2\mu} \ll 1$ $\left(\text{или } \frac{\mu^+ - \mu^-}{2(\lambda + \mu)} \ll 1\right)$, при решении первой и второй граничных задач можно воспользоваться методом малого параметра. Например, при решении второй основной задачи (3.4) и (3.5), представляя перемещения u_α и объемные силы в виде разложения в абсолютно сходящиеся ряды по $\varepsilon = \frac{\mu^+ - \mu^-}{2(\lambda + \mu)}$

$$u_\alpha = \varepsilon u_\alpha + \varepsilon^2 u_\alpha^* + \ldots = u_\alpha^{(1)} + u_\alpha^{(2)} + \ldots$$

$$X_\alpha = \varepsilon X_\alpha + \varepsilon^2 X_\alpha^* + \ldots = X_\alpha^{(1)} + X_\alpha^{(2)} + \ldots \quad (\alpha = 1,\ 2)$$

можно получить уравнения первого приближения

$$\Delta u_\alpha^{(1)} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \nabla^2 u + \frac{1}{\lambda + \mu} X_\alpha^{(1)} = 0$$

и уравнения второго приближения

$$\Delta u_\alpha^{(2)} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \nabla^2 u_\alpha^{(2)} + \frac{1}{\lambda + \mu} X_\alpha^{(2)} = \varepsilon\left(\frac{u_{1,1}^{(1)} - u_{2,2}^{(1)}}{T_{11}^{(1)}} - \Delta T_{\alpha\beta,\beta}^{(1)}\right)$$

Определение областей, где деформации не меняют своего знака, является одной из особенностей задач упругости для материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия.

При решении конкретных задач для рассматриваемого материала желательно иметь решения соответствующих задач для обычного материала. Эти решения помогут нахождению указанных зон.

4. В качестве примера рассматривается задача упругого равновесия полуплоскости.

Пусть в системе прямоугольных декартовых координат $(x_1,\ x_2)$ тело занимает область $x_2 \geqslant 0$ и на границе $x_2 = 0$ заданы

$$\sigma_{22} = f(x_1), \quad \sigma_{12} = g(x_1) \text{ при } x_2 = 0 \tag{4.1}$$

Для обычного изотропного материала напряжения определяются [17]

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x_2 f(\xi) + (x_1 - \xi)\, g(\xi)}{[(x_1 - \xi)^2 + x_2^2]^2} (x_\alpha - \delta_{1\alpha}\xi)(x_\beta - \delta_{1\beta}\xi)\, d\xi \tag{4.2}$$

Определяя $e_{\alpha\beta}$ из закона Гука и значения главных удлинений $\bar{e}_\alpha$ из (2.7), с помощью уравнений $\bar{e}_1 = 0$, $\bar{e}_2 = 0$ можно найти разделяющие линии (если они существуют) областей, где $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ не меняют свой знак. Если после этих вычислений выясняется, что в деформированном теле возникает такая зона, где $\bar{e}_1 \geqslant 0$, $\bar{e}_2 \geqslant 0$ ($\bar{e}_1 \leqslant 0$, $\bar{e}_2 \leqslant 0$), то решения (4.2) и соответствующие деформации при $\mu = \mu^+$ ($\mu = \mu^-$)

являются действительными в указанной зоне для рассматриваемого материала.

Когда в деформированном теле возникает область, где $\bar{e}_1 > 0$, $\bar{e}_2 < 0$, то нужно решить граничную задачу (3.7) с граничными условиями

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} = f(x_1) = -p_2, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -g(x_1) = p_1 \text{ при } x_2 = 0 \tag{4.3}$$

Решение рассматриваемой граничной задачи находится следующим образом:

$$\Phi^N = \Phi^1 + \Phi_0^N \tag{4.4}$$

где N — номер приближения, Φ_0^N — частное решение уравнения

$$\nabla^4\Phi^N + F^{N-1} = 0 \tag{4.5}$$

$$F^N = \frac{\mu^+ - \mu^-}{\lambda + 2\mu}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(\sigma^N \cos^N 2\alpha) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(\sigma^N \cos^N 2\alpha) - \right.$$

$$\left. - \nabla^2\frac{(\sigma_{11}^N - \sigma_{22}^N)}{\cos^N 2\alpha} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(\sigma^N \sin^N 2\alpha)\right] \tag{4.6}$$

Частное решение Φ_0^N уравнения (4.5) можно найти, например, с помощью интегральных преобразований. После применения преобразования Фурье уравнение (4.5) приводится к виду

$$\frac{d^4\bar{\Phi}^N}{dx_2^4} - 2p^2\frac{d^2\bar{\Phi}^N}{dx_2^2} + p^4\frac{d\bar{\Phi}^N}{dx_2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F^{N-1}(\xi, x_2)\, e^{ip\xi}\, d\xi \tag{4.7}$$

где

$$\bar{\Phi}^N(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^N(\xi, x_2)\, e^{ip\xi}\, d\xi$$

при условии, что, когда $|x_1| \to \infty$, функция Φ и ее производные до третьего порядка стремятся к нулю.

Частное решение уравнения (4.7) получается в следующем виде:

$$\bar{\Phi}_0^N(x_2) = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi p^3}}\int_0^{x_2}[p(x_2 - \eta)\operatorname{ch} p(x_2 - \eta) - \operatorname{sh} p(x_2 - \eta)]\, d\eta \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} F^{N-1}(\xi, \eta)\, e^{-ip\xi}\, d\xi \tag{4.8}$$

при условии, что при $x_2 = 0$

$$\overline{\Phi}_0^N(x_2) = \frac{d\overline{\Phi}_0^N(x_2)}{dx_2} = \frac{d^2\overline{\Phi}_0^N(x_2)}{dx_2^2} = \frac{d^3\overline{\Phi}_0^N(x_2)}{dx_2^3} = 0$$

Φ_0^N получается с помощью формулы обращения Фурье

$$\Phi_0^N(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\Phi}_0^N(x_2)\, e^{-ipx_1}\, dp \tag{4.9}$$

Рассмотрим частный случай, когда сосредоточенная сила с составляющими (p_1, p_2) приложена в начале координат. Тогда напряжения для обычного материала определяются по формуле

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{2}{\pi}\, x_\alpha x_\beta \frac{x_\gamma p_\gamma}{(x_\gamma x_\gamma)^2} \tag{4.10}$$

Из (4.10) следует, что в этом случае имеет место соотношение

$$\sigma_{12}^2 = \sigma_{11}\sigma_{22} \tag{4.11}$$

Легко доказать следующее утверждение: если из решения соответствующей плоской задачи для обычного материала получается соотношение (4.11), то это решение и есть искомое при определении напряжений, если принимать, что $\mu = \mu^+$ при $\overline{e}_\alpha > 0$; $\mu = \mu^-$ при $\overline{e}_\alpha < 0$ и $\mu = (\mu^+ + \mu^-)/2$, если $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ разного знака.

Пусть в деформированном теле $\overline{e}_1 > 0$ и $\overline{e}_2 < 0$. Тогда для определения напряжений необходимо решить граничную задачу (3.6)—(3.9). Если напряжения, полученные после решения этой задачи, удовлетворяют соотношению (4.11), то из (3.8) вытекает

$$\sin 2\alpha = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma}, \qquad \cos 2\alpha = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\sigma}, \qquad \sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22}$$

Эти значения с помощью (3.6) обращают выражение внутри квадратных скобок (3.7) в нуль, и (3.7) приводится к обычному уравнению

$$\nabla^4\Phi + \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}\nabla^2 V = 0$$

что и доказывает наше утверждение.

На основании этого утверждения и (4.11) напряжения в рассматриваемом случае определяются выражениями (4.10) при всех видах деформированных состояний. Предполагая, что $\overline{e}_1 > 0$, $\overline{e}_2 < 0$, из (4.10), (2.10) и (2.7) можно определить

$$e_{\alpha\beta} = \varphi\left[2(\lambda + \mu^-)\, x_\alpha x_\beta - \lambda x_\gamma x_\gamma\right] \tag{4.12}$$

$$\overline{e}_1 = \varphi(\lambda + 2\mu^-), \quad \overline{e}_2 = -\varphi\lambda \tag{4.13}$$

где

$$\varphi = \frac{2x_1 p_1}{[2\lambda(\mu_1^2 + \mu_2^2) + 4\mu_1\mu_2 + (x_1 x_2)^2]}$$

Из (4.13) видно, что в деформированном теле получаются только две области: $\bar{e}_1 > 0$, $\bar{e}_2 < 0$ при $\varphi > 0$ и $\bar{e}_1 < 0$, $\bar{e}_2 > 0$ при $\varphi < 0$, которые разделяются линией $\varphi = 0$ или $x_1 p_1 = 0$.

ՁԳՄԱՆ ԵՎ ՍԵՂՄՄԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻՆ ՏԱՐԲԵՐ ԴԻՄԱԴՐՈՂ ԻԶՈՏՐՈՊ ՆՅՈՒԹԻ ՀԱՐԹ ԽՆԴՐԻ ԿԱՊԱԿՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ռ. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Արտածվում են ձգման և սեղմման դեֆորմացիաներին տարբեր դիմադրող իզոտրոպ նյութի համար հարթ դեֆորմացիաների որոշիչ առնչությունները։

Ցույց է տրվում, որ հարթ դեֆորմացիաների առաջին և երկրորդ հիմնական խնդիրներից ստացված ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման համար կարելի է կիրառել հաջորդական մոտավորությունների եղանակը։

Որպես օրինակ դիտարկվում է նշված նյութից պատրաստված առաձգական կիսահարթության հավասարակշռության խնդիրը։

ON RELATIONS OF PLANE PROBLEM OF ISOTROPIC MATERIAL HETERORESISTANT TO DEFORMATIONS OF TENSION AND COMPRESSION

R. E. MKRTCHIAN

S u m m a r y

The determining correlations for plane deformation of the material, heteroresistant to deformations and compression are derived.

It is shown, that for the solution of nonlinear differential equations, which are obtained from the first and second principal problems of plane deformations, one can use the method of successive approximations.

As an example the problem of elastic equilibrium of a half-plane from the examined material is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С. П.* Сопротивление материалов. Т. 2. М.—Л.: Гостехтеориздат, 1946. 456 с.
2. *Амбарцумян С. А.* Уравнения плоской задачи разносопротивляющейся или разномодульной теории упругости.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1966, т. 19, № 2, с. 1—19.

3. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию.— Инж. ж., МТТ, 1966, № 2, с. 44—53.
4. *Шапиро Г. С.* О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию.— Инж. ж., МТТ, 1966, № 2, с. 123—125.
5. *Матченко Н. М., Толоконников А. А.* О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах.— Инж. ж., МТТ, 1968, № 6, с. 108—110.
6. *Wesolowski Z.* Elastic material with different elastic constants in two regions of variability of deformation. — Arch. of Mech. Polich Acad. Sci. 1969, 21, No. 4, pp. 449 - 468.
7. *Мкртчян Р. Е.* Об одной модели материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1970, т. 23, № 5, с. 37—47.
8. *Саркисян М. С.* К теории упругости изотропных тел, материал которых по-разному сопротивляется растяжению и сжатию.— Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1971, № 5.
9. *Мкртчян Р. Е.* Большие упругие деформации несжимаемого материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1972, т. 25, № 1, с. 28—41.
10. *Kamiya N.* On Bimodulus Elasticity and Strength Differential A Precis of Recent Developments.—Res. Rep. Fac. Eng. Mie. Univ., 1976, vol. 1, pp. 59—79.
11. *Jones R. M.* Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression.—AIAA Journal, 1977, vol. 15, No. 1. (Русск. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1977, № 1, с. 16—25).
12. *Green A. E. and Mkrtichian J. Z.* Elastic Solids with Different Moduli in Tension and Compression.— Journal of Elasticity, 1977, vol. 7, No. 4, October, pp. 369—386.
13. *Isabekian Naira, Metellus Anne-Marie.* Sur le comportement d'un materiau élastique anisotrope possedant des modules differents en traction et en compression, en theorie des petites perturbations.—C. R. Acad. Sc. Paris, t. 286, Serie A—491 (13. Mars, 1978).
14. *Ломакин Е. В., Работнов Ю. Н.* Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела.— Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 6.
15. *Ломакин Е. В.* О единственности решения теории упругости для изотропного разномодульного тела.— Изв. АН СССР, МТТ, 1979, № 2, с. 42—45.
16. *Амбарцумян С. А.* Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 317 с.
17. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Изд. Наука, 1968. 402 с.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила в редакцию
22. X. 1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 2, 1983 Механика

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ПРОЧНОСТИ, МОДУЛЯ ДЕФОРМАЦИИ И ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОННОГО ЭЛЕМЕНТА

КАРАПЕТЯН К. С., КАРАПЕТЯН К. А.

Как известно, бетон является неоднородно-стареющим материалом, прочностная и деформационная неоднородность которого обусловлена разными причинами.

Традиционной неоднородностью будем считать, когда бетон неоднороден в пределах сечения элемента конструкции. Такая неоднородность является следствием того, что из-за высыхания наружного слоя элемента физико-механические свойства бетона во времени в наружном слое и в ядровой части изменяются с разной интенсивностью.

Другая неоднородность обусловлена процессом возведения элементов конструкций. При этом, из-за перерывов в работе бетонирования, элементы конструкций получаются разного возраста, а следовательно, с разными физико-механическими свойствами. Особенно это имеет место при возведении массивных конструкций.

Учет неоднородности прочности, модуля деформации и деформации ползучести бетона имеет весьма важное значение для оценки действительного напряженно-деформативного состояния конструкции. С этой точки зрения весьма важным является разработанная Н. Х. Арутюняном теория ползучести неоднородно-стареющих сред [1—4].

Прочностная и деформационная неоднородность бетона, несмотря на ее большое научное и практическое значение, до сих пор мало исследована. Специально поставленные авторами опыты над весьма старым бетоном (возраста 23 лет) дали возможность установить существенную неоднородность бетона по сечению цилиндра большого диаметра. Из-за высыхания прочность бетона на сжатие в наружном слое цилиндра оказалась намного меньше, а деформации — больше, чем в ядровой части цилиндра [5].

Как известно, причиной неодинаковости свойств бетона в различных направлениях, то есть анизотропии, являются те водные прослойки, которые образуются под частицами заполнителя в результате внутреннего расслаивания при его укладке и уплотнении. При испарении этих прослоек на их местах остаются пустоты (дефекты), которые ослабляют сечение бетонного элемента и снижают его прочность, увеличивают деформации. Отрицательное влияние дефектов на физико-механические свойства бетона более существенно в том случае, когда образцы испытываются перпендикулярно слоям бетонирования, так как в этом случае ослабление сечения образцов дефектами получается наибольшее [6, 7]. Дальнейшие опыты показали, что восстановление водных прослоек путем насыщения сухого бетона водой приводит к обратному явлению — росту прочности и модуля деформации [8, 9].

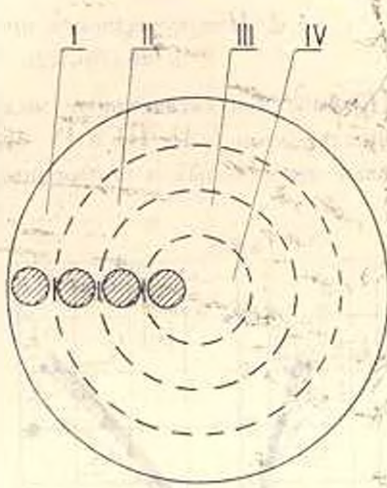
В работе [5] авторы поставили опыты специально над весьма старым бетоном для того, чтобы количественно оценить влияние как испарения, так и восстановления водных прослоек на прочность и модуль деформации бетона. Одновременно изучалась и неоднородность прочности и модуля деформации бетона по сечению цилиндра большого диаметра (50 см). Анализ опытов показал, что и неоднородность бетона в основном является следствием отрицательного влияния испарения водных прослоек из наружного слоя бетонного элемента. Потеря доли прочности, вызванная испарением водных прослоек, может привести к чувствительному снижению несущей способности конструкции.

Учитывая важность рассматриваемого вопроса, авторы поставили более обширные опыты для исследования изменения во времени прочностной и деформативной неоднородности бетона в пределах сечения бетонного цилиндра большого диаметра, результаты которых и приводятся в данной работе. Исследована неоднородность прочности, модуля деформации и ползучести бетона при сжатии и растяжении.

§ 1. *Методика опытов*

Как и в работе [5], исследования проводились испытанием малых цилиндров диаметром 5,5 см, высотой на этот раз 22 см, которые выбуривали из 4-х различных зон (I, II, III и IV) сечения большого цилиндра (фиг. 1). Большие цилиндры в количестве 5 штук диаметром 57 см, высотой 25 см были изготовлены из бетона на литоидной пемзе состава в массе 1 : 1,43 : 2,50, В/Ц = 0,86, Ц = 294 кг на 1 м^3 бетона активностью 50 МПа. Сразу после формовки верхние торцы цилиндров покрывались металлическими листами, а после их распалубки, которая производилась через 5 сут., оба торца покрывались несколькими слоями расплавленного парафина и слоем фольги, так что испарение происходило только с боковых поверхностей. После распалубки и изоляции торцов большие цилиндры первые 5 месяцев хранились под открытым небом, а в дальнейшем — в обычных лабораторных условиях, где температура воздуха $T = 22 \pm 5$°C, а относительная влажность $P = 58 \pm 12\%$.

Для исследования изменения неоднородности прочности и модуля деформации бетона во времени по сечению большого цилиндра малые цилиндры выбуривали и испытывали в возрастах 28 сут.; 3 и 6 мес.; 1 и 2 лет. Малые цилиндры, выбуриваемые из одного большого цилиндра, испытывали в одном возрасте. Однако, количество образцов, которое получалось из одного большого цилиндра, по зонам I, II, III и IV (фиг. 1) существенно отличалось и соответственно составило 22, 16, 10 и 4 шт. Количество образцов по зоне III и особенно зоне IV было явно недостаточно для намеченных программой опытов даже в одном возрасте. Выход из этого положения нам подсказали результаты наших прежних опытов, где изучалась неоднородность прочности и модуля деформации бетона при сжатии по сечению туфобетонного цилиндра диаметром 50 см возраста 23 лет. В этих опытах также малые цилиндры выбуривали из 4-х зон [5]. Опыты показали, что в пределах зон II, III и IV, то есть ядровой части большого цилиндра, бетон по прочности и модулю деформации однороден. Руководствуясь этим, стало обоснованно возможным существенно сократить количество испытываемых образцов без ущерба исследованию интересующих нас вопросов. Учитывая наши возможности с точки зрения количества образцов в новых опытах кратковременным испытаниям как на сжатие, так и на растяжение подвергали образцы, выбуренные из всех 4-х зон, что необходимо было, чтобы еще раз подтвердить ранее сделанный нами вывод об однородности бетона в пределах зон II, III и IV. Это весьма было важно для обоснования опытов ползучести путем постановки опытов над образцами, выбуренными из зон II и III и отнесения результатов опытов ко всему ядру большого бетонного цилиндра. Так что в опытах на ползучесть нами длительному загружению на сжатие и растяжение подвергались малые цилиндры, принадлежащие зоне I и смешано зонам II и III.



Фиг. 1. Зоны поперечного сечения большого бетонного цилиндра, из которого выбуривались малые цилиндры

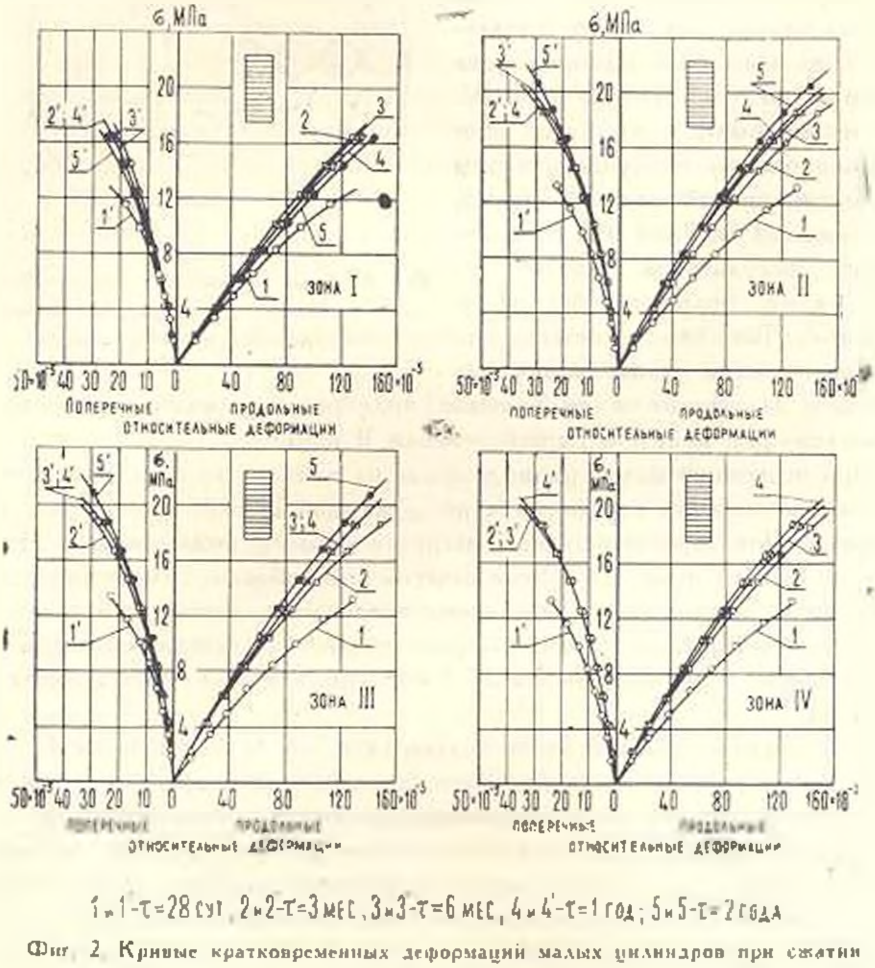
При испытании малых цилиндров как на сжатие, так и на растяжение нагрузка повышалась ступенями и после каждой ступени измерялись деформации. Под каждой ступенью нагрузки образец выдерживался лишь на время, необходимое для взятия отчетов по приборам, измеряющим деформации. В опытах на сжатие, кроме продольных, измерялись также и поперечные деформации. Ввиду ограниченного количества образцов из каждой зоны испытывалось по 2—3 образца, а в отдельных случаях и 4 образца.

Результаты испытаний вновь подтвердили, что в пределах зон II, III и IV, то есть ядровой части большого бетонного цилиндра, бетон как по прочности, так и по модулю деформации при сжатии однороден и, как показали опыты, то же самое имеет место и при растяжении. Учитывая это, опытные данные о прочности и модуле деформаций образцов, относящиеся к этим трем зонам, были усреднены по каждому возрасту.

Для исследования неоднородной ползучести бетона по сечению большого цилиндра длительному сжатию и растяжению были подвергнуты неизолированные и изолированные малые цилиндры в возрастах 28 сут., 3; 6 мес. и 1 года. При этом неизолированные образцы, выбуренные из зоны I большого цилиндра, имитировали условия бетона этой зоны, а изолированные образцы, которые для исключения испарения изолировались сразу после их выбуривания из зон II, III и IV, имитировали условия бетона этих зон. Напряжение в сжатых образцах составляло 5 МПа, а в растянутых — 0,4 МПа. В каждом возрасте из каждой разновидности загружались по 3 образца и на таком же количестве образцов-близнецов определялись усадочные деформации.

§ 2. *Неоднородность прочности, модуля деформации и ползучести бетона при сжатии*

Прочности и касательные модули деформации малых цилиндров, выбуренных из зон I, II, III и IV большого цилиндра, приведены в табл. 1, а кривые продольных и поперечных деформаций — на фиг. 2. Как видим



Фиг. 2. Кривые кратковременных деформаций малых цилиндров при сжатии

в возрасте 28 сут. как прочности, так и модули деформации образцов, выбуренных из наружного слоя (зоны I) и ядровой части (зон II, III и IV) большого цилиндра, практически одинаковы, а это означает, что до этого возраста бетонный цилиндр по прочности и модулю деформации в пределах всего сечения однороден. Однако, после возраста 28 сут. однородность

Таблица 1

Характеристики бетона при сжатии в различных зонах сечения большого цилиндра

Возраст бетона к моменту испытания	Зоны выбуривания образцов	Объемная масса бетона в кг/м³	Прочность на сжатие в МПа	Касательные модули деформации $E \cdot 10^{-2}$ в МПа при напряжении (МПа)					Прочность в % от прочности в возрасте 28 сут.	Модуль деформации (при σ=10 МПа) в % от модуля деформации в возрасте 28 сут.	Коэффициент неоднородности по прочности ($H_{сж}$)	Коэффициент неоднородности по модулю деформации ($H'_{сж}$) при напряжении (МПа)				
				0	5	10	15	20				0	5	10	15	20
28 сут.	I	1715	16,1	146	113	81	59	—	100	100	1,02	1,01	1,02	1,02	1,03	—
	II, III и IV	1728	16,5	148	115	86	61	—	100	100						
3 мес.	I	1694	22,1	162	144	126	110	95	138	150	1,11	1,11	1,07	1,03	0,98	0,92
	II, III и IV	1731	24,6	180	154	130	108	88	149	151						
6 мес.	I	1672	21,6	160	141	124	107	92	134	148	1,17	1,17	1,15	1,12	1,09	1,07
	II, III и IV	1725	25,2	188	163	139	117	97	153	162						
1 год	I	1663	20,5	152	137	122	109	96	127	145	1,26	1,27	1,22	1,16	1,10	1,04
	II, III и IV	1716	25,8	193	167	142	121	100	156	165						
2 года	I	1616	21,1	137	126	115	104	94	131	137	1,30	1,46	1,39	1,32	1,25	1,18
	II, III и IV	1702	27,5	200	176	152	131	111	161	177						

сохранилась только в пределах невысыхающей ядровой части, а в целом, по всему сечению, из-за высыхания наружного слоя, бетон становится неоднородным. Причиной этого является то, что после 28 сут. возраста вызванный процессом твердения рост прочности и модуля деформации наружного слоя из-за испарения протекает менее интенсивно, чем ядровой части. С другой стороны, из-за испарения начинается отрицательное влияние большой усадки наружного слоя и тех пустот (дефектов), которые остаются на местах водных прослоек, образующихся под зернами заполнителя при укладке и уплотнении бетона [6—8]. С некоторого момента отрицательное влияние этих двух факторов начинает все больше преволировать над положительным эффектом процесса твердения и это приводит к снижению прочности и увеличению деформативности бетона.

При уровне напряжения 0,5 коэффициенты Пуассона бетона в возрастах 28 сут., 3; 6 мес. и 1; 2 лет в различных зонах сечения большого цилиндра составили: в наружном слое 0,137; 0,168; 0,156; 0,161 и 0,158, а в ядровой части — 0,142; 0,151; 0,159; 0,169 и 0,171. Как видим, коэффициенты Пуассона указанных зон во всяком возрасте испытания мало отличаются друг от друга, а со старением бетона возрастают.

Для описания роста прочности бетона во времени ядровой части большого цилиндра получена следующая зависимость:

$$R_{сж\,я} = \frac{45\tau}{1+1,6\tau} \qquad (2.1)$$

где τ — возраст бетона в месяцах. Максимальное отклонение прочности по (2.1) от опытных значений составляет $+3,5$ и $-5,7\%$.

Рост начального модуля упругости бетона ядровой части большого цилиндра во времени при $\sigma_{я} = 0,3\ R_{сж}$ хорошо описывает зависимость

$$E_{сж\,я} = \left(650 + \frac{120}{\tau}\right)\left(\frac{45\tau}{1+1,6\tau}\right) \qquad (2.2)$$

Рассмотрим теперь результаты исследования неоднородной ползучести бетона по сечению большого бетонного цилиндра (фиг. 3). Кривые ползучести рассчитаны по следующим зависимостям:

а) образцов, выбуренных из наружного слоя (зона I)

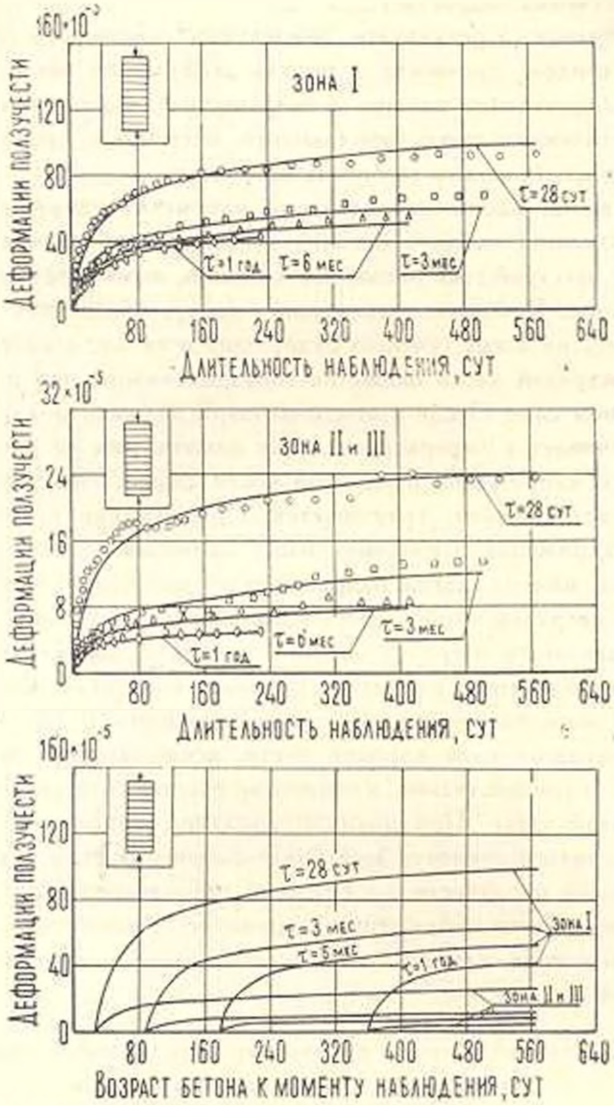
$$\varepsilon_{сж\,н} = \left(9,53 + \frac{312}{\tau}\right)[1 - 0,5(e^{-0,005t} + e^{-0,06t})]\cdot 5\cdot 10^{-5} \qquad (2.3)$$

б) образцов, выбуренных из ядровой части (зоны II и III)

$$\varepsilon_{сж\,я} = \left(0,9 + \frac{120}{\tau}\right)[1 - 0,5(e^{-0,005t} + e^{-0,06t})]\ 5\cdot 10^{-5} \qquad (2.4)$$

В зависимостях (2.3) и (2.4) τ представляет возраст бетона в момент длительного загружения в сутках, t — длительность загружения. Как видим из фиг. 3, кривые, рассчитанные по этим зависимостям, дают удовлетворительное совпадение с опытными данными.

Сравнение зависимостей (2.3) и (2.4) приводит к выводу, что кривые ползучести образцов, выбуренных из наружного слоя и ядровой части большого цилиндра во всяком возрасте загружения, подобны, а отношение их деформаций ползучести в любом возрасте не зависит от длительности загружения.



Фиг. 3. Кривые ползучести малых цилиндров при сжатии

Коэффициент неоднородности бетона по деформациям ползучести при сжатии

$$H^{*}_{сж} = \varepsilon_{сж\,н}/\varepsilon_{сж\,я} = 10{,}6\,\frac{\tau + 33}{\tau + 133} \qquad (2.5)$$

Рассчитанные по зависимости (2.5) коэффициенты неоднородности бетона по деформациям ползучести для возрастов к моменту загружения

28 сут., 3; 6 мес. и 1 года соответственно составляют 4,0; 5,8; 7,2 и 8,4, а при $\tau = \infty$ $H_{св} = 10,6$. Таким образом, в связи с высыханием наружного слоя неоднородная ползучесть по сечению большого цилиндра начинается с раннего возраста и с увеличением τ степень неоднородности ползучести существенно возрастает.

Таким образом, в результате высыхания наружного слоя большого бетонного цилиндра, прочность и модуль деформации бетона при сжатии в этой части существенно меньше, а ползучесть больше, чем в его ядровой части. С увеличением продолжительности высыхания прочностная и деформационная неоднородность бетона возрастает.

На основании наших исследований изменение напряженно-деформированного состояния сжатого бетонного элемента во времени, вызванное неоднородной ползучестью бетона по сечению, нами представляется следующим образом. В момент загружения упруго-мгновенная деформация такого элемента по всему сечению будет одна и та же, а напряжение в более жесткой ядровой части окажется гораздо больше, чем в более податливом наружном слое. После этого, благодаря большей ползучести наружного слоя, начинается перераспределение напряжений во времени и в результате этого напряжение в ядровой части существенно возрастает, а в наружном слое, наоборот, уменьшается. Продолжение процесса перераспределения напряжений в конечном итоге приводит к тому, что наступит, наконец, такой момент, когда напряжение от непосредственного действия вертикальной нагрузки в наружном слое может исчезнуть и в последующем этот слой будет нести нагрузку лишь постольку, поскольку он является частью общего элемента, имеющего прочный контакт с ядровой частью. С указанного момента наружный слой, в основном, будет играть роль обоймы и защитного слоя ядровой части, исключающего испарение водных прослоек, а следовательно, и снижение прочности и увеличение деформативности этой части. При наличии арматуры напряженно-деформативное состояние такого элемента еще более сложно. В этом случае, благодаря неоднородной ползучести по сечению, перераспределение напряжений приведет к увеличению напряжения в арматуре и, наоборот, к уменьшению напряжения в бетоне, причем более чувствительно в наружном слое, чем ядровой части.

§ 3. *Неоднородность прочности, модуля деформации и ползучести бетона при растяжении*

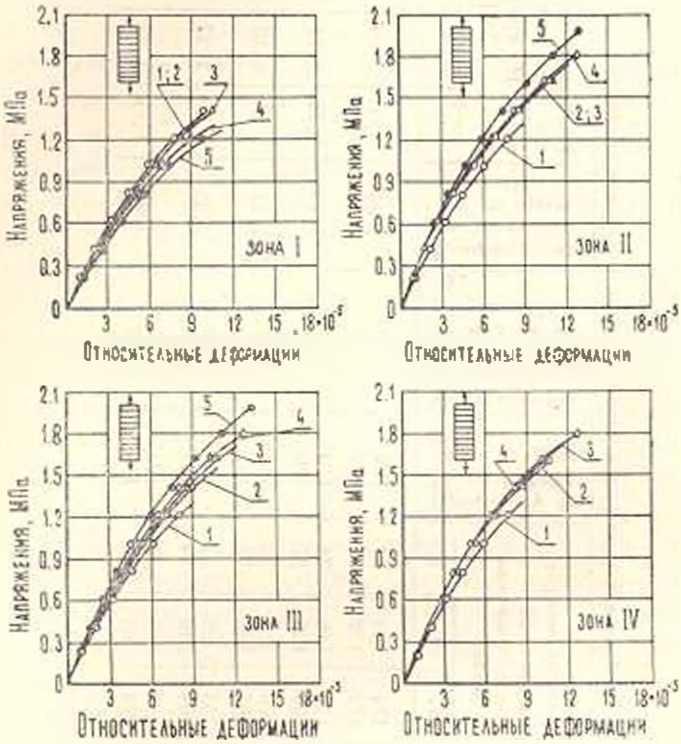
Результаты кратковременных испытаний на растяжение малых цилиндров, выбуренных из зон I, II, III и IV большого цилиндра, в различных возрастах приведены в табл. 2 и на фиг. 4. Анализ опытных данных приводит к выводу, что влияние высыхания наружного слоя большого цилиндра на изменение неоднородности прочности и модуля деформации бетона во времени по сечению при растяжении качественно имеет тот же характер, что и при сжатии. При растяжении также в возрасте 28 сут. прочности и модули деформации малых цилиндров, выбуренных из наружного слоя (зоны I) и ядровой части (зон. II, III и IV), практически не отли-

Таблица

Характеристики бетона при растяжении в различных зонах сечения большого цилиндра

Возраст бетона к моменту испытания	Зоны выбуривания образцов	Объемная масса бетона в кг/м³	Прочность на растяжение в МПа	Касательные модули деформации $E \cdot 10^{-2}$ в МПа при напряжении (МПа)				Прочность в % от прочности в возрасте 28 сут.	Модуль деформации (при σ = 1МПа) в % от модуля в возрасте 28 сут.	Коэффициент неоднородности по прочности ($Н_р$)	Коэффициент неоднородности по модулю деформации $Н_р'$ при напряжении (МПа)			
				0	0,5	1,0	1,5				0	0,5	1,0	1,5
28 сут.	I	1715	1,58	231	174	124	84	100	100	1,04	1,00	0,99	0,98	0,96
	II, III и IV	1728	1,64	231	172	122	81	100	100					
3 мес.	I	1694	1,74	237	173	118	74	110	95	1,13	1,13	1,14	1,15	1,18
	II, III и IV	1731	1,97	268	197	136	87	120	111					
6 мес.	I	1672	1,78	236	170	115	70	113	93	1,21	1,15	1,18	1,24	1,33
	II, III и IV	1725	2,15	271	201	142	93	131	116					
1 год	I	1663	1,65	219	153	99	57	105	80	1,35	1,29	1,37	1,47	1,65
	II, III и IV	1716	2,22	283	209	146	94	135	120					
2 года	I	1616	1,63	191	135	93	58	103	75	1,53	1,51	1,62	1,80	2,04
	II, III и IV	1702	2,50	289	234	167	118	152	137					

чаются, то есть до этого возраста бетон по всему сечению по прочности и модулю деформации однороден. Однако, после этого возраста однородность бетона сохраняется только в пределах ядровой части большого цилиндра, а из-за высыхания наружного слоя в целом по сечению становится неоднородным и с увеличением возраста степень неоднородности увеличивается. Причиной этого является то, что после возраста 28 сут. прирост прочности бетона наружного слоя продолжался до возраста 6 мес. и



1-τ=28 сут 2-τ=3 мес, 3-τ=6 мес 4-τ=1 год, 5-τ-2 года

Фиг. 4. Кривые кратковременных деформаций малых цилиндров при растяжения.

всего составил 13%, а после этого прочность снизилась даже до исходного значения. Из-за высыхания качественно то же самое имело место и с модулем деформации бетона наружного слоя с той лишь разницей, что спад модуля деформации начинается сразу после возраста 28 сут. и к 2-м годам по своему значению составляет 75% от исходного значения. Что касается ядровой части, то здесь нарастание прочности и модуля деформации бетона во времени протекало устойчиво в процессе всего опыта и к 2-м годам прочность на 52%, а модуль деформации (при напряжении 1 МПа) на 37% больше своих начальных значений.

Из сравнения данных табл. 1 и 2 можно заключить, что степень неоднородности бетона по сечению бетонного элемента как по прочности, так и по модулю деформации при растяжении более чувствительна, чем при сжатии. При этом, степень неоднородности бетона по модулю деформации при растяжении также существенно зависит от величины напряжения и с ее увеличением степень неоднородности возрастает. В вышеописанных опытах на сжатие наблюдалась обратная картина.

Экспериментальные данные нарастания прочности бетона во времени в ядровой части бетонного цилиндра при растяжении весьма удовлетворительно описывает зависимость

$$R_{ря} = \frac{5,6\tau}{1 + 2,4\tau} \tag{3.1}$$

Для описания кривой нарастания начального модуля упругости бетона ядровой части во времени при растяжении ($\sigma = 0,3\ R_р$) получена следующая зависимость:

$$E_{ря} = \left(10000 + \frac{2200}{\tau}\right)\left(\frac{5,6\tau}{1 + 2,4\tau}\right) \tag{3.2}$$

На фиг. 5 представлены кривые ползучести малых цилиндров, выбуренных из наружного слоя (зоны I) и ядровой части (зон II и III) большого цилиндра, испытанных на растяжение. Кривые ползучести рассчитаны по зависимостям:

а) образцов, выбуренных из наружного слоя

$$\varepsilon_{рн} = \left(19 + \frac{990}{\tau}\right)[1 - 0,5\,(e^{-0,005t} + e^{-0,06t})]\cdot 0,4\cdot 10^{-5} \tag{3.3}$$

б) образцов, выбуренных из ядровой части

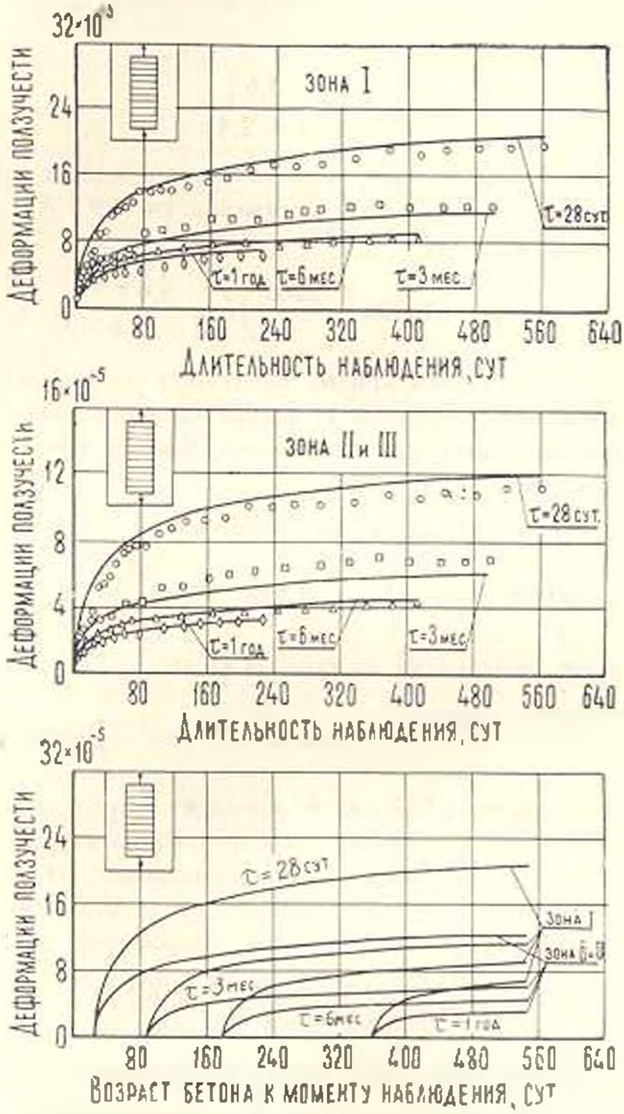
$$\varepsilon_{ря} = \left(8,3 + \frac{663}{\tau}\right)[1 - 0,5\,(e^{-0,004t} + e^{-0,06t})]\cdot 0,4\cdot 10^{-5} \tag{3.4}$$

Сравнение зависимостей (3.3) и (3.4) приводит к выводу, что и при растяжении кривые ползучести образцов, выбуренных из наружного слоя и ядровой части большого цилиндра, во всяком возрасте загружения подобны и поэтому отношение $\varepsilon_{рн}/\varepsilon_{ря}$ не зависит от длительности загружения. Коэффициент неоднородности бетона по деформациям ползучести

$$H_р^{с} = \varepsilon_{рн}/\varepsilon_{ря} = 2,3\,\frac{\tau + 52}{\tau + 80} \tag{3.5}$$

Рассчитанные по зависимости (3.5) коэффициенты неоднородности бетона по деформациям ползучести для возрастов к моменту загружения 28 сут., 3; 6 мес. и 1 года соответственно составляют 1,70; 1,92; 2,05 и 2,15, а при $\tau = \infty$ $H_р^{с} = 2,30$. Таким образом, и при растяжении связи с высыханием наружного слоя большого цилиндра неоднородная ползучесть по сечению начинается с раннего возраста и с увеличением τ степень неоднородности ползучести возрастает. Из сравнения (2.5) и (3.5) можно заключить, что степень неоднородности бетона по ползучести при сжатии существенно больше, чем при растяжении. При увеличении τ от 28 сут. до 1 года $H_с^{с}$ увеличивается от 4,0 до 8,4 а $H_р^{с}$ — от 1,70 до 2,15.

Таким образом, в результате высыхания наружного слоя большого цилиндра, прочность и модуль деформации бетона и при растяжении в этой части меньше, а ползучесть больше, чем в его ядровой части. С увеличе-



Фиг. 5. Кривые ползучести малых цилиндров при растяжении.

нием продолжительности высыхания прочностная и деформационная неоднородность бетона возрастает.

§ 4. *Причины неоднородности прочности и деформации бетона по сечению бетонного элемента при высыхании*

Наши исследования показали [5], что причинами неоднородности бетона по прочности и деформациям при сжатии бетонного элемента являются:

1. Обезвоживание наружного слоя бетонного элемента и в связи с этим преждевременное прекращение процесса твердения;

2. Микротрещинообразование из-за внутренних напряжений, вызванных неравномерной усадкой по сечению большого элемента. По мере высыхания наружного слоя, усадка которого гораздо больше, чем более глубоких слоев, микротрещинообразование постепенно охватывает более глубокие слои. Чем меньше влажность среды, тем больше глубина высыхания, а следовательно, и степень разуплотнения бетона микротрещинами;

3. Испарение образовавшихся под зернами заполнителя водных прослоек и в связи с этим отрицательное влияние оставшихся на их местах пустот (дефектов).

Отрицательное влияние перечисленных факторов на прочность и деформации бетона при высыхании в большинстве случаев происходит одновременно и поэтому невозможно количественно оценить влияние каждого в общем явлении. Проведенные нами по специальной методике исследования над весьма старым бетоном (возраста 23 лет) позволили установить, что отрицательное влияние испарения водных прослоек на прочность и деформации бетона при сжатии весьма чувствительно [5]. При растяжении отрицательное влияние испарения водных прослоек на прочность и деформации бетона исключается. В этом случае снижение прочности и увеличение деформативности бетона наружного слоя бетонного элемента, в основном, связано с отрицательным влиянием неравномерной усадки по сечению элемента. В наших опытах после возраста 28 сут. усадка наружного слоя большого бетонного цилиндра оказалась в 4 раза больше усадки его ядровой части, что и является основной причиной снижения прочности и увеличения деформативности, а следовательно, и неоднородности бетона. Несомненно, в этом явлении определенную отрицательную роль играет и набухание пористого заполнителя литоидной пемзы в раннем возрасте бетонного элемента. Известно, что при насыщении пористая литоидная пемза сильно набухает и это может привести к образованию микротрещин в цементном камне в местах ее контакта с зернами заполнителя. При высыхании бетона происходит усадка как цементного камня, так и пористого заполнителя литоидной пемзы. Однако, как показали опыты, при усадке первоначальные объемы зерен заполнителя полностью не восстанавливаются, а поэтому микротрещины, которые образуются в цементном камне при набухании пористого заполнителя, частично сохраняются и тем самым сказывают отрицательное влияние на физико-механические свойства бетона. Причем, это отрицательное влияние в случае растяжения более существенно, чем при сжатии.

Основные выводы

1. В раннем возрасте бетонный элемент в пределах всего сечения по прочности и деформациям (кратковременным и длительным) при сжатии и растяжении однороден, а в дальнейшем, по мере высыхания наружного слоя, однородность сохраняется только в пределах невысохшей ядровой части сечения. Причиной этого является то, что из-за высыхания вызван-

ное процессом твердения упрочнение наружного слоя элемента во времени с некоторого момента происходит менее интенсивно, чем упрочнение ядровой части. Одновременно на это отрицательное влияние высыхания накладывается также все прогрессирующее отрицательное влияние большей усадки наружного слоя, а также испарение образовавшихся под зернами заполнителя водных прослоек, что приводит к постепенному снижению прочности и увеличению деформативности бетона наружного слоя и тем самым к неоднородности в пределах всего сечения элемента.

Основными причинами снижения прочности и увеличения деформативности наружного слоя бетонного элемента являются: при сжатии — пустоты (дефекты), которые остаются на местах водных прослоек по мере их испарения, а при растяжении — разуплотнение бетона усадочными микротрещинами, вызванное значительно большей усадкой наружного слоя элемента.

2. Прочностная и деформационная неоднородность бетона по сечению бетонного элемента существенно зависит от влажности среды и размеров поперечного сечения элемента и в зависимости от этих факторов могут быть следующие случаи:

а) бетонный элемент сначала однороден и остается таким в дальнейшем. Сказанное независимо от размеров поперечного сечения элемента имеет место в тех случаях, когда влажность среды высокая или испарение исключено путем изоляции;

б) бетонный элемент сначала однороден, а в дальнейшем становится неоднородным. Это имеет место в том случае, когда сечение элемента большое, а влажность среды невысокая;

в) бетонный элемент сначала однороден, а в дальнейшем по мере высыхания сперва становится неоднородным и в итоге вновь однородным. Это имеет место в том случае, когда размеры поперечного сечения элемента небольшие, а влажность среды невысокая.

3. Продольные и поперечные деформации высыхающего наружного слоя бетонного элемента большого сечения существенно больше, чем бетона невысыхающей ядровой части элемента, однако коэффициенты Пуассона указанных двух зон при сжатии в любом возрасте практически равны.

4. Вызванная высыханием наружного слоя бетонного элемента неоднородная ползучесть по сечению начинается с раннего возраста и с увеличением возраста к моменту загружения степень неоднородности ползучести возрастает. Отношение деформаций ползучести наружного слоя к деформациям ползучести ядровой части при загружении в возрастах 28 сут., 3; 6 мес. и 1 года соответственно составило: при сжатии 4,0; 5,8; 7,2 и 8,1, а при растяжении — 1,70; 1,92; 2,05 и 2,15, то есть степень неоднородности бетона по ползучести при сжатии существенно больше, чем при растяжении.

5. Кривые ползучести бетона наружного слоя и ядровой части бетонного элемента во всяком возрасте загружения как при сжатии, так и при растяжении подобны, и отношение их деформаций ползучести не зависит от длительности загружения.

6. В сжатом бетонном элементе из-за большей ползучести наружный слой во времени разгружается, а ядровая часть, наоборот, догружается. В связи с перераспределением напряжений с некоторого момента наружный слой начинает нести нагрузку лишь постольку, поскольку он является частью общего элемента, имеющего прочный контакт с ядровой частью. С этого момента наружный слой, в основном играет роль обоймы и защитного слоя ядровой части.

7. Вызванная высыханием прочностная и деформационная неоднородность бетона по сечению бетонного элемента оказывает отрицательное влияние на работу бетонных и железобетонных конструкций при всех напряженных состояниях. Поэтому учет неоднородности прочности, модуля упругости и деформаций ползучести имеет весьма важное значение в деле рационального проектирования конструкций и обеспечения их долговечности.

8. Исследование неоднородности прочности, модуля деформации и деформаций ползучести бетона по сечению бетонного элемента авторы проводили испытанием малых цилиндров, выбуренных из различных зон сечения бетонного элемента. Такая методика хотя и является наиболее обоснованной, но она является весьма трудоемкой. Проведение нами по этой методике исследования позволяют предложить более простую, но вполне обоснованную методику оценки прочностной и деформационной неоднородности бетонного элемента, сущность которой заключается в изготовлении и испытании призм сечением 10×10 см, высотой 40 см. Для того, чтобы такая призма имитировала бы условия бетона наружного слоя элемента, необходимо после распалубки оба торцевых сечения и три боковые поверхности призм изолировать от влагопотери. Другая же призма, имитирующая условия бетона ядровой части элемента, должна быть изолирована полностью.

9. Необходимо в зависимости от характеристик материалов, применяемых для приготовления бетона, условий производства работ и условий работы бетонных и железобетонных конструкций принять все возможные меры, чтобы уменьшить, а если возможно, полностью исключить те причины, которые приводят к неоднородности бетона по сечению бетонного элемента.

ԲԵՏՈՆԵ ԷԼԵՄԵՆՏԻ ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ, ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ՄՈԴՈՒԼԻ ԵՎ ՍՈՂՔԻ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌՈՒԹՅԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ Կ. Ս., ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ Կ. Ա.

Ամփոփում

Աշխատանքում բերվում են բետոնի ամրության և դեֆորմացիոն անհամասեռության հետազոտման արդյունքները ըստ էլեմենտի ընդլայնական կտրվածքի։ Սեղմման և ձգման դեպքում հետազոտված է բետոնի ամրության, դեֆորմացիաների մոդուլի և սողքի անհամասեռության աստիճանի

փոփոխությունը ժամանակի ընթացքում։ Փորձարկվել են գլանիկներ, որոնք կտրված-հանված են տարբեր հասակներում միայն կողմնային մակերևույթով չորացած, մեծ տրամագծի բետոնե գլանի ընդլայնական կտրվածքի տարբեր մասերից։

Սեղմման և ձգման դեպքում հաստատված է, որ վաղ հասակում մեծ կտրվածքի բետոնե էլեմենտը ըստ ամրության և դեֆորմացիաների համասեռ է, իսկ հետագայում, արտաքին շերտերի չորացման և այդ իսկ պատճառով ամրության անկման հետևանքով այն դառնում է անհամասեռ։ Ցանկացած հասակում բեռնավորված բետոնե էլեմենտի արտաքին շերտերի և միջուկի սողքի կորերը՝ ինչպես սեղմման, այնպես էլ ձգման դեպքում նման են և սողքի դեֆորմացիաների հարաբերությունը կախված չէ բեռնավորման երկարատևությունից։

Աշխատանքում բացատրվում են այն երևույթները, որոնք բերում են բետոնե էլեմենտի արտաքին շերտերի ամրության անկմանը, դեֆորմացիաների մեծացմանը և դրանով իսկ ըստ կտրվածքի անհամասեռության աստիճանի աճին։

INVESTIGATION OF HETEROGENEITY OF STRENGTH MODULUS OF DEFORMATION AND CONCRETE ELEMENT CREEP

K. S. KARAPETIAN, K. A. KARAPETIAN

S u m m a r y

The paper deals with the results of the investigations of strength and deformational heterogeneity of concrete at the concrete element section. Changes of the degree of strength heterogeneity in time, modulus of deformation and concrete creep at compression and tension were investigated. Small cylinders, drilled from different section zones of concrete cylinder of a large diameter and different age, dried only at the lateral surface, were tested.

The explanation is given to the phenomena, which lead to strength decrease and increase of deformation of the external layer of the concrete element and thus to the increase of the degree of its heterogeneity at the section.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* О теории ползучести для неоднородных наследственно-стареющих сред.— Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 3.
2. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые задачи теории ползучести неоднородно-стареющих тел.— Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 3.
3. *Арутюнян Н. Х.* Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела.—ПММ 1977, т. 41, № 5.
4. *Арутюнян Н. Х.* Теория ползучести неоднородно-стареющих тел. М.: Изд. Института проблем механики АН СССР, 1981.
5. *Карапетян К. С., Карапетян К. А.* Исследование изменения прочности, модуля деформации и степени анизотропии весьма старого туфобетона при сжатии вслед

ствие водонасыщения и высыхания.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1981, т. 34 № 4.

6. *Карапетян К. С.* Об одном существенном факторе в прочностных и деформативных свойствах бетона.— Докл. АН АрмССР, 1957, т. 24, № 4.

7. *Карапетян К. С.* Влияние анизотропии на ползучесть бетона.— Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 1957, т. 10, № 6.

8. *Карапетян К. С.* О вторичном твердении и изменении анизотропных свойств бетона при его водонасыщении.— Докл. АН АрмССР, 1973, т. 57, № 3.

9. *Карапетян К. С., Котикян Р. А., Карапетян К. А.* Исследование анизотропии прочности и модуля деформации весьма старого бетона. Третий национальный конгресс по теоретической и прикладной механике. Доклады, книга 1, Болгария, Варна, 1977.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила в редакцию
26. V. 1982

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 2, 1983 Механика

О ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ КОНСОЛИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

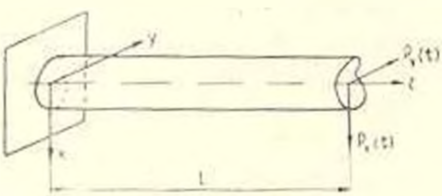
СИМОНЯН А. М., АВЕТИСЯН Г. А.

Вопросы распределения напряжений в брусьях при чистом изгибе рассматривались в ряде работ, например, в [1—5]. Учет поперечных сил при изгибе, согласно линейной теории наследственности, осуществлен в работе [6]. В работе [7] исследовался вопрос о поперечном изгибе призматического бруса с сечением, имеющим ось симметрии, при действии поперечной силы, направленной по оси симметрии сечения, в условиях ползучести, описываемой теорией течения [8].

В настоящей работе строится решение о действии сосредоточенной поперечной силы на конце призматического бруса произвольного сечения, материал которого деформируется, согласно нелинейной теории наследственности [9] в постановке [10] с некоторыми видоизменениями. Исследуется положение центра изгиба с учетом ползучести.

1. *Постановка задачи*

Рассмотрим заделанный одним торцом призматический брус длины l произвольного односвязного сечения, на другой торец которого действует поперечная сосредоточенная сила, определяемая проекциями $P_x(t)$ и $P_y(t)$ на центральные оси x и y поперечного сечения бруса (фиг. 1).



Фиг. 1.

Принимается, что

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \tag{1.1}$$

а также условие объемной несжимаемости материала

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 \tag{1.2}$$

Для описания ползучести, описываемой нелинейной зависимостью от напряжений, обычно принимается тезис о пропорциональности и соосности девиаторов напряжений и деформаций [9]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\sigma_x - \sigma) \qquad (x, y, z) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\tau_{xy}) \qquad (x, y, z) \end{aligned} \tag{1.3}$$

где

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 3/2(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}$$

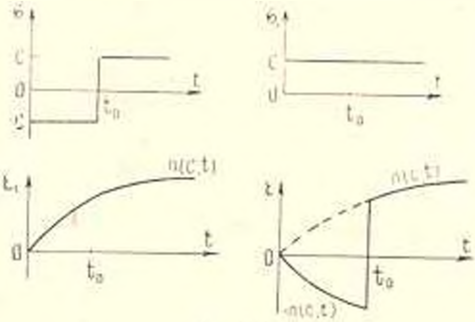
причем σ_i и ε_i связаны друг с другом посредством некоторого временного оператора Π, независимо от вида напряженного состояния

$$\varepsilon_i(t) = \Pi[\sigma_i(t), t] \tag{1.4}$$

Однако уравнения (1.3) вкупе с (1.4) содержат в себе недостатки, которые можно проиллюстрировать, в частности, на примере нижеследующей программы изменения осевого напряжения $\sigma_z(t)$:

$$\sigma_z(t) = \begin{cases} -c & \text{при } 0 < t < t_0 \\ c & \text{при } t > t_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Согласно (1.3) — (1.5), легко видеть (фиг. 2), что деформации ползучести $\varepsilon(t)$ при $t > t_0$ будут точно такими же, какими они были бы при $\sigma(t) \equiv c$ (показаны штриховыми линиями), независимо от t_0 и от вида оператора Π, при этом в точке $t = t_0$ они претерпевают разрыв, в два раза превосходящий накопившуюся деформацию ползучести до момента t_0, что не имеет смысла. В связи с тем, что в задачах изгиба брусьев преналирующими напряжениями являются σ_z, естественным представляется здесь в уравнениях (1.3) значения интенсивностей напряжений σ_i и деформаций ε_i заменить соответственно σ_z и ε_z, которые, в отличие от интенсивностей, могут быть знакопеременными. Вместо (1.3) будем иметь



Фиг. 2.

$$\varepsilon_x = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_z}{\sigma_z}(\sigma_x - \sigma) \qquad (x, y, z)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_z}{\sigma_z}\tau_{xy} \qquad (x, y, z) \tag{1.6}$$

Присовокупим сюда соотношение, аналогичное (1.4), записанное для нелинейной теории наследственности

$$\varepsilon_z(t) = (1 + K^*) f[\sigma_z(t)] \tag{1.7}$$

где принято обозначение [10]

$$K^* f[\sigma(t)] = \int_0^t f[\sigma(\tau)]\, K(t, \tau)\, d\tau$$

$$K(t, \tau) = -\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \tag{1.8}$$

$C(t, \tau)$ — мера ползучести материала, загруженного в возрасте τ [11]

$$f(\sigma) = A\,|\sigma|^n \operatorname{sign} \sigma \tag{1.9}$$

где A и n — параметры, определяемые из испытания на одноосную ползучесть.

Отметим, что уравнения (1.6) вкупе с (1.7) не имеют вышеуказанных недостатков, присущих (1.3) вкупе с (1.4).

Согласно принимаемой здесь гипотезе плоских сечений, имеем также

$$\varepsilon_z(x, y, z, t) = a(z, t)\,x + b(z, t)\,y + s(z, t) \tag{1.10}$$

§ 2. *Сведение задачи к разрешающим уравнениям*

Выпишем уравнения и граничные условия, которые должны соблюдаться:

дифференциальные уравнения равновесия, которые с учетом (1.1) запишутся в виде

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \tag{2.2}$$

интегральные условия

$$\iint_\Omega \sigma_z\, d\Omega = 0 \tag{2.3}$$

$$\iint_\Omega \sigma_z x\, d\Omega = -P_x(t)(l - z) \tag{2.4}$$

$$\iint_\Omega \sigma_z y\, d\Omega = -P_y(t)(l - z) \tag{2.5}$$

где Ω — площадь поперечного сечения бруса, а также условия совместности деформаций, которые с учетом (1.1) и (1.3) запишутся в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}\right) = 2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y\, \partial z} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}\right) = 2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x\, \partial z} \tag{2.7}$$

Поскольку поперечные размеры малы по сравнению с длиной, то естественно принять $\partial\varepsilon_x/\partial z \ll \partial\varepsilon_z/\partial x$ и $\partial\varepsilon_y/\partial z \ll \partial\varepsilon_z/\partial y$, вследствие чего, а также с учетом (1.10), (1.2) и (1.6), остальные условия совместности деформаций можно снять из рассмотрения. Используя (1.7), (1.9), (1.10), (2.3), (2.4), (2.5), получим

$$\varepsilon_z(x, y, z, t) = [\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)](l - z)^n \tag{2.8}$$

$$\sigma_z(x, y, z, t) = |(1 - R^*)[\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)]|^{1/n - 1} \times$$

$$\times (1 - R^*)[\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)]A^{-1/n}(l - z) \tag{2.9}$$

где при обозначении (1.8) $R(t, \tau)$ — резольвента вольтерровского ядра $K(t, \tau)$, а введенные здесь функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\delta(t)$ при произвольных фиксированных t определяются из уравнений

$$\iint_\Omega |(1 - R^*)[\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)]|^{1/n} x d\Omega = -A^{1/n}P_x$$

$$\iint_\Omega |(1 - R^*)[\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)]|^{1/n} y d\Omega = -A^{1/n}P_y \tag{2.10}$$

$$\iint_\Omega |(1 - R^*)[\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)]|^{1/n} d\Omega = 0$$

где степенная функция для отрицательных аргументов понимается в смысле нечетного продолжения.

Уравнения (2.1) и (2.2) при использовании (2.9) решаются путем введения функции напряжений $F(x, y, t)$ по формулам

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} + A^{-1/n}\frac{n}{n+1}|(1 - R^*)[\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)]|^{1/n - 1} + f_1(y, t)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x} + f_2(x, t) \tag{2.11}$$

где $f_1(y, t)$ и $f_2(x, t)$ — произвольные функции.

Уравнения (2.6) и (2.7) могут быть сведены к следующему:

$$\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} = (l - z)^{n-1}\{[\beta(t)x - \alpha(t)y]n + B(t)\} \tag{2.12}$$

где $B(t)$ — функция времени, определяющая поворот поперечного сечения.

Подставляя (1.6), (2.8), (2.9) и (2.11) в (2.12), получим основное уравнение относительно функции напряжения $F(x, y)$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \mu(x, y)\frac{\partial F}{\partial y} + \nu(x, y)\frac{\partial F}{\partial x} = \lambda(x, y) \tag{2.13}$$

где

$$\varphi(x, y) = \frac{\beta(t)}{\Lambda(x, y, t)} - \frac{1}{n}\frac{(1-R^*)\beta(t)}{(1-R^*)\Lambda(x, y, t)} \tag{2.14}$$

$$\psi(x, y) = \frac{\alpha(t)}{\Lambda(x, y, t)} - \frac{1}{n}\frac{(1-R^*)\alpha(t)}{(1-R^*)\Lambda(x, y, t)} \tag{2.15}$$

$$\lambda(x, y) = \frac{2}{3} n A^{-1/n}[\Lambda(x, y, t)]^{-1}\left|\beta(t)x - \alpha(t)y + \frac{B(t)}{n}\right| \times$$

$$\times |(1-R^*)\Lambda(x, y, t)|^{1/n-1}(1-R^*)\Lambda(x, y, t) -$$

$$-\frac{n}{n+1}A^{-1/n}(1-R^*)\beta(t)\,|(1-R^*)\Lambda(x, y, t)|^{1/n+1}(1-R^*)\Lambda(x, y, t) -$$

$$-\frac{n}{n+1}A^{-1/n}\frac{\beta(t)}{\Lambda(x, y, t)}|(1-R^*)\Lambda(x, y, t)|^{1/n+1} +$$

$$+\frac{\partial f_2(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(y, t)}{\partial y} + \left[\frac{\alpha(t)}{\Lambda(x, y, t)} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{n}\frac{(1-R^*)\alpha(t)}{(1-R^*)\Lambda(x, y, t)}\right] f_2(x, t) -$$

$$-\left[\frac{\beta(t)}{\Lambda(x, y, t)} - \frac{1}{n}\frac{(1-R^*)\beta(t)}{(1-R^*)\Lambda(x, y, t)}\right] f_1(y, t) \tag{2.16}$$

$$\Lambda(x, y, t) = \alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)$$

$$(1-R^*)f(t) = f(t) - \int_0^t R(t, \tau) f(\tau)\, d\tau$$

Поскольку на контуре сечения не имеется внешних нагрузок, то краевое условие запишется так:

$$\tau_{xz}\cos(\bar{n}, \bar{x}) + \tau_{yz}\cos(\bar{n}, \bar{y}) = 0 \tag{2.17}$$

где $\bar{n}$ — внешняя нормаль к точке контура сечения.

Подставляя (2.11) в (2.17), получим следующее краевое условие для функции $F(x, y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = -A^{-1/n}\frac{n}{n+1}|(1-R^*)[\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)]|^{1/n+1}\frac{dy}{ds} +$$

$$+ f_2(x, t)\frac{\partial x}{\partial s} - f_1(y, t)\frac{\partial y}{\partial s} \tag{2.18}$$

где ds — элемент контура сечения.

Таким образом, задача определения касательных напряжений сведена к уравнению (2.13) при краевом условии (2.18).

Рассмотрим теперь вопрос, будет ли брус закручиваться и где следует приложить силы $P_x(t)$ и $P_y(t)$ для изгиба без кручения, то есть, где находится центр изгиба. Поскольку для несимметричных сечений, вообще говоря, суждение об отсутствии кручения затруднительно, то будем считать кручение отсутствующим, если

$$\iint_{\Omega} \omega_z(x, y)\, d\Omega = 0 \tag{2.19}$$

где ω_z — поворот элемента площади в окрестности точки x, y относительно оси z. Легко видеть из формул Ламе, выражающих деформации через перемещения, что

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \tag{2.20}$$

Подставляя (2.20) и (2.12) в (2.19), получим, что кручение отсутствует при условии

$$B(t) = 0 \tag{2.21}$$

что конкретизирует правую часть уравнения (2.13).

Определим теперь местоположение центра изгиба. Для этого воспользуемся следующим интегральным условием:

$$\iint_{\Omega} (y\tau_{xz} - x\tau_{yz})\, d\Omega = -M_{кр} \tag{2.22}$$

где $M_{кр}$ — крутящий момент, вызванный силами P_x и P_y. Подставляя сюда $M_{кр} = P_x y_0 - P_y x_0$, а также (2.11), для определения условия отсутствия кручения получим уравнение прямой линии

$$P_y(t)\, x_0 - P_x(t)\, y_0 - \iint_{\Omega} \Big\{ y \frac{\partial F(x, y, t)}{\partial y} + x \frac{\partial F(x, y, t)}{\partial x} + y f_1(y, t) -$$

$$- x f_2(x, t) + \frac{ny}{n+1} A^{-1*} |(1 - R^*)[\alpha(t)\, x + \beta(t)\, y + \delta(t)]|^{1/n+1} \Big\}\, d\Omega = 0 \tag{2.23}$$

то есть при действии силы с составляющими $P_x(t)$ и $P_y(t)$ кручение не будет иметь места, если точка приложения (x_0, y_0) этой силы находится на прямой линии, определяемой уравнением (2.23).

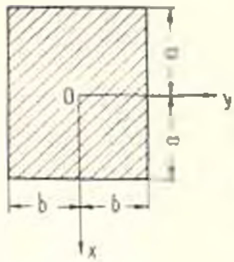
Вышеприведенные уравнения можно использовать и для случая наличия кручения, если задан поворот сечения на некотором расстоянии от защемления.

Для тонкостенных несимметричных и длинных брусьев определение центра изгиба приобретает особое значение. Таким образом, задача об изгибе брусьев сведена к решению системы (2.10) относительно $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\delta(t)$, где t играет роль параметра, и, следовательно, определению σ_z и ε_z по формулам (2.8) и (2.9), затем к решению уравнения (2.13) при краевом условии (2.18) и определению центра изгиба согласно (2.23), к которому должны быть приложены внешние силы для отсутствия кручения. Функции $f_1(y, t)$ и $f_2(x, t)$, входящие в (2.16), (2.18) и (2.23), произвольны, приравнение их нулю не отражается на определении напряжений.

§ 3. *Изгиб консольного бруса прямоугольного сечения*

В качестве приложения рассмотрим задачу об изгибе бруса прямоугольного сечения, допускающую аналитическое решение.

Положим, что на брус (фиг. 3) вдоль оси x действует сила P. Из системы (2.10) получим



Фиг. 3.

$$
\alpha(t) = -A\left(\frac{2+1/n}{4b}\right)^n a^{1/(1+2n)}(1+K^*)\left[|P|^{n-1}P\right]
$$
$$
\beta(t) = \gamma(t) = 0 \tag{3.1}
$$

Условие (2.18) запишется так

$$
\frac{\partial F}{\partial s} = -A^{-1/n}\frac{n}{n+1}\left|(1-R^*)\alpha(t)\right|^{1/n+1} x^{1/n+1}\frac{\partial y}{\partial s} +
$$
$$
+ f_2(x, t)\frac{\partial x}{\partial s} - f_1(y, t)\frac{\partial y}{\partial s} \tag{3.2}
$$

Принимая

$$
f_2(x, t) = 0
$$
$$
f_1(y, t) = -A^{-1/n}\frac{n}{n+1}\left|(1-R^*)\alpha(t)\right|^{1/n+1} a^{1/n+1} \tag{3.3}
$$

получим, что как на сторонах $y = \pm b$, так и $x = \pm a$, то есть на всем контуре $\partial F/\partial s = 0$, и, не умаляя общности, можно принять

$$
F(\pm a, y) = 0
$$
$$
F(x, \pm b) = 0 \tag{3.4}
$$

Учитывая (3.1) и (3.3), уравнение (2.13) перепишем так

$$
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{(1+2n)P}{6}\,\frac{y|x|^{1/n-1}}{ba^{1/n+2}} \tag{3.5}
$$

Решение уравнения (3.5), удовлетворяющее второму условию (3.4), ищем в виде ряда

$$
F(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa_k(x, t)\sin\frac{k\pi}{b}y \tag{3.6}
$$

Разлагая в аналогичный ряд Фурье правую часть (3.5) и приравнивая коэффициенты при $\sin(k\pi y)/b$, получим

$$
\frac{\partial^2 \varkappa_k(x, t)}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{x}\,\frac{\partial \varkappa_k(x, t)}{\partial x} - \frac{\pi^2 k^2}{b^2}\varkappa_k(x, t) =
$$
$$
= \frac{1+2n}{3k\pi}(-1)^{k+1}\frac{x^{1/n-1}P}{a^{1/n+2}} \tag{3.7}
$$

Осуществляя замену переменных

$$x = \frac{b\xi_k}{ik\pi}; \qquad \varkappa_k = \psi_k x^{1/2n}; \qquad \nu = \frac{1}{2n} \tag{3.8}$$

уравнение (3.7) сводится к неоднородному уравнению Бесселя

$$\xi^2 \frac{d^2\psi_k}{d\xi^2} + \xi \frac{d\psi_k}{d\xi} + (\xi^2 - \nu^2)\psi_k = \frac{(-1)^{k-1}(1+2n)}{3k\pi a^{1/n+2}} \left(\frac{b\xi}{ik\pi}\right)^{1+1/2n} P \tag{3.9}$$

Общее решение уравнения (3.9) при обозначениях (3.8) запишется в виде [12]

$$\psi_k(x) = C_{1k}(t) I_\nu \left(\frac{k\pi x}{b}\right) + C_{2k}(t) I_{-\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right) + \chi(x, t) \tag{3.10}$$

где I_ν и $I_{-\nu}$ — функции Бесселя мнимого аргумента порядка ν и $-\nu$ соответственно, $C_{1k}(t)$ и $C_{2k}(t)$ — произвольные функции интегрирования, $\chi(x, t)$ — частное решение уравнения (3.9). Используя результаты [13], для функции $\chi(x, t)$ получим выражение

$$\chi(x, t) = (-1)^k \left(\frac{b}{k\pi}\right)^{\nu+1} P \frac{(1+2n) 2^{\nu-1} \Gamma(\nu + 1/2)}{3k\sqrt{\pi}\, a^{2+1/n}} L_\nu \left(\frac{k\pi x}{b}\right) \tag{3.11}$$

где $L_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right)$ — функция Струве, представляемая в виде нижеследующего ряда:

$$L_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{k\pi x}{2b}\right)^{2m+\nu+1}}{\Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu + m + \frac{3}{2}\right)} \tag{3.12}$$

Используя (3.6), (3.8), (3.10) и (3.11), для функции напряжений $F(x, y, t)$ получим выражение

$$F(x, y, t) = x^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_{1k}(t) I_\nu \left(\frac{k\pi x}{b}\right) + C_{2k}(t) I_{-\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right) + \lambda_k(t) L_\nu \left(\frac{k\pi x}{b}\right)\right] \sin\frac{k\pi y}{b} \tag{3.13}$$

где

$$\lambda_k(t) = (-1)^k \left(\frac{b}{k\pi}\right)^{\nu+1} \frac{(1+2n) 2^{\nu-1} \Gamma(\nu + 1/2)}{3k\sqrt{\pi}\, a^{1/n+2}} P \tag{3.14}$$

Подставляя (3.13) во второе уравнение (2.11) и учитывая (3.3), получим

$$\tau_{yx}(x, y, t) = -\nu x^{\nu-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_{1k}(t) I_\nu \left(\frac{k\pi x}{b}\right) + C_{2k}(t) I_{-\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right) + \right.$$

$$+\lambda(t)\, L_{\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right)\Bigg]\sin\frac{k\pi y}{b} - x^{\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg[C_{1k}(t)\frac{d}{dx} I_{\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right) + \tag{3.15}$$

$$+ C_{2k}(t)\frac{d}{dx} I_{-\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right) + \lambda_k(t)\frac{d}{dx} L_{\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right)\Bigg]\sin\frac{k\pi y}{b}$$

Из условия, что τ_{yz} на линии $x = 0$ является конечной величиной, заключаем, что

$$C_{1k}(t) = 0 \tag{3.16}$$

Для того, чтобы удовлетворить первому условию (3.4), достаточно положить

$$C_{2k}(t) = -\frac{\lambda_k(t)\, L_{\nu}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)}{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)} \tag{3.17}$$

Используя (3.13), (3.14), (3.16) и (3.17), получим следующее выражение для функции напряжений $F(x, y, t)$:

$$F(x, y, t) = \frac{2^{\nu-1} b^{\nu+1} x^{\nu} (1+2n)\Gamma(\nu+1/2) P}{3\pi^{\nu+3/2} a^{2+1/n}} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{\nu+2}}\left[-L_{\nu}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)\frac{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right)}{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)} + L_{\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right)\right]\sin\frac{k\pi y}{b} \tag{3.18}$$

Можно показать, что, принимая в (3.18) $n = 1$ ($\nu = 1/2n = 1/2$), из формулы (3.18) получим известное решение задачи Сен-Венана об изгибе упругой консольной балки прямоугольного сечения [14].

Поскольку функции Бесселя протабулированы, целесообразным представляется выразить через них функцию Струве, согласно [12]:

$$L_{\nu}(x) = I_{-\nu}(x) - \frac{2(x/2)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(1/2)}\int_0^{\infty}(1+y^2)^{\nu-1/2}\sin(x y)\, dy \tag{3.19}$$

После подстановки (3.19) в (3.18) и (2.11) и использования рекуррентных соотношений для $I_{\nu}(x)$ и $I_{-\nu}(x)$ после ряда преобразований получим нижеследующие выражения для τ_{xz} и τ_{yz}

$$\tau_{xz} = \frac{(1+2n)x^{\nu}P}{3\pi a^{\nu+2}}\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{\frac{(-1)^k}{k}\left[\frac{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right)}{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)}\int_0^{\infty}\sin\left(\frac{k\pi a\xi}{b}\right)(1+\xi^2)^{\nu-1/2}\, d\xi -\right.$$

$$
-\left(x/a\right)^{\nu}\int\limits_{0}^{\infty}\sin\left(\frac{k\pi x\xi}{b}\right)\left(1+\xi^{2}\right)^{\nu-1/2}d\xi\;\Bigg]\cos\frac{k\pi y}{b}\Bigg\}+ \qquad (3.20)
$$

$$
+\frac{P\left(\nu+1\right)\left(a^{2\nu+1}-x^{2\nu+1}\right)}{2\left(2\nu+1\right)ba^{2(\nu+1)}}.
$$

$$
\tau_{yz}=-\frac{P\left(\nu+1\right)bx^{\nu-1}}{3\pi^{2}a^{\nu+2}}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{k}}{k^{2}}\left[\frac{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right)}{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)}\times\right.\right.
$$

$$
\times\int\limits_{0}^{\infty}\sin\left(\frac{k\pi a\xi}{b}\right)\left(1+\xi^{2}\right)^{\nu-1/2}d\xi+
$$

$$
+\frac{k\pi x}{2\nu b}\left(\frac{I_{-\nu-1}\left(\frac{k\pi x}{b}\right)}{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)}+\frac{I_{-\nu+1}\left(\frac{k\pi x}{b}\right)}{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)}\right)\int\limits_{0}^{\infty}\sin\left(\frac{k\pi a\xi}{b}\right)\left(1+\xi^{2}\right)^{\nu-1/2}d\xi+
$$

$$
\left.\left.+2\left(n-1\right)\left(\frac{x}{a}\right)^{\nu}\int\limits_{0}^{\infty}\sin\left(\frac{k\pi x\xi}{b}\right)\left(1+\xi^{2}\right)^{\nu-3/2}d\xi\;\right]\sin\frac{k\pi y}{b}\right\} \qquad (3.21)
$$

В табл. 1 при обозначении $p^{*}=P/h^{2}$ приведены значения τ_{xz}/p^{*} и τ_{yz}/p^{*}, вычисленные по формулам (3.20) и (3.21), в применении к изгибу бруса сечения $h\times 2h$ силой P при $n=3$, в сравнении с соответствующими значениями при $n=1$.

Таблица 1

Значения касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} при изгибе бруса прямоугольного сечения $h\times 2h$

	$2y/h$		x/h							
			0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1,000
τ_{xz}/p^{*}	0	$n=3$	0,850	0,789	0,699	0,592	0,470	0,333	0,178	0
		$n=1$	0,558	0,530	0,484	0,421	0,338	0,236	0,111	0
τ_{xz}/p^{*}	1	$n=3$	0,741	0,623	0,507	0,386	0,263	0,140	0,031	0
		$n=1$	0,606	0,579	0,535	0,469	0,387	0,284	0,159	0
	x/h		$2y/h$							
			0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1,000
τ_{xz}/p^{*}	0	$n=3$	0,874	0,874	0,875	0,875	0,876	0,876	0,877	0,877
		$n=1$	0,567	0,570	0,573	0,578	0,585	0,594	0,604	0,614
τ_{yz}/p^{*}	0	$n=3$	0,0196	0,0388	0,0540	0,0703	0,0712	0,0705	0,0522	0
		$n=1$	0,0054	0,0102	0,0147	0,0181	0,0196	0,0194	0,0153	0

§ 4. *Изгиб консольного бруса тонкостенного швеллерного сечения*

Рассмотрим определение напряжений у консольного бруса, сечение которого показано на фиг. 4, при действии силы, параллельной оси x, при условии отсутствия закручивания. Из условия тонкостенности сечения имеем

$$
\begin{aligned}
\tau_{xz} &= 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = 0 \quad \text{на полках} \\
\tau_{yz} &= 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = 0 \quad \text{на стенке}
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

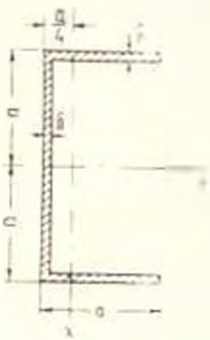
Вследствие симметрии поперечного сечения относительно оси y, получим, что условия (2.10) удовлетворяются при

$$
\begin{aligned}
\alpha(t) &= -\frac{A}{a^{1+3n}}\left[\frac{1+2n}{2\delta(1+3n)}\right]^n (1+K^n)[P^n(t)] \\
\beta(t) &= \delta(t) = 0
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

где степенная функция от отрицательных аргументов понимается в смысле нечетного ее продолжения.

Согласно (2.9) и (4.2), нормальные напряжения σ_z определяются по формулам

$$
\begin{aligned}
\sigma_z &= \mp \frac{P(1+2n)(l-z)}{2(1+3n)\delta a^2} \quad \text{на полках } x = \pm a \\
\sigma_z &= -\frac{|x|^{1/n-1} x P(l-z)(1+2n)}{2(1+3n)\delta a^{2+1/n}} \quad \text{на стенке}
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$



Фиг. 4.

Используя (4.1), (2.2) и (4.3), а также очевидные условия $\tau_{yz}(3/4\, a) = 0$ и $\int\limits_{-a}^{a} \tau_{xz}(x)\,\delta dx = P$, получим

$$
\begin{aligned}
\tau_{yz}(\pm a, y) &= \pm \frac{P(1+2n)}{2(1+3n)\delta a}\left(\frac{3}{4} - \frac{y}{a}\right) \\
\tau_{xz}(\pm a, y) &= 0 \quad \text{на полках}
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

$$
\tau_{xz}\left(x, -\frac{a}{4}\right) = \frac{P(1+2n)}{2\delta a(1+3n)(1+n)}\left[1+2n-n\left(\frac{|x|}{a}\right)^{1/n+1}\right] \quad \text{на стенке}
$$

$$
\tau_{yz}\left(x, -\frac{a}{4}\right) = 0
$$

При $n = 1$ из (4.4) получим

$$
\tau_{xz}\left(x, -\frac{a}{4}\right) = \frac{3}{16}\frac{P}{\delta a}\left[3 - \left(\frac{|x|}{a}\right)^2\right] \tag{4.5}
$$

что совпадает с формулой Журавского для швеллерных сечений.

Центр изгиба определяется значением y_0 при $P_y = 0$, согласно (2.22), (4.4) и (4.5), по формуле

$$y_0 = -\frac{5n^2 + 7n + 2}{12n^2 + 16n + 4}\,a$$

Отметим, что зависимость y_0 от показателя нелинейности n весьма мала. Действительно, для линейно-деформируемых тел ($n = 1$) имеем $y_0 = -0{,}4375\,a$, в то время как при $n = 3$ $y_0 = -0{,}425\,a$, а при $n \to \infty$ $y_0 = -0{,}4167\,a$.

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԿՈՆՍՈԼԻ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԾՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Հ. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ոչ գծային ժառանգական սողքի տեսության հիման վրա կառուցվում է կամայական լայնական հատվածքի կոնսոլային չորսուի վրա ազդող կենտրոնացված լայնական ուժի ազդեցության խնդրի լուծումը։ Խնդիրը բերված է մասնակի ածանցյալներով երկրորդ սեռի դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը։ Ուղղանկյուն լայնական հատվածքի դեպքում ստացված են լարումների համար արտահայտությունները։ Ստացված են բանաձևերը լարումների և ծռման կենտրոնի որոշման համար շվելերային հատվածքի բարակապատ չորսուի դեպքում։

ON THE CROSS-SECTION BENDING OF THE CONSOLE IN THE NONLINEAR THEORY OF CREEP

A. M. SIMONIAN, G. A. AVETISSIAN

S u m m a r y

On the basis of the nonlinear hereditary theory of creep, the solution of the problem concerning the action of concentrated shear force on a cantilever beam with an arbitrary cross-section is built.

The problem is reduced to the second order differential equation. In the case of a right-angled cross-section, the expressions for stresses are received. The formulas for the determination of stresses and the center of bending, in the case of a thin-walled beam with a horizontal cross-section, are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинин Н. Н.* Некоторые одномерные задачи неустановившейся ползучести.— Инж. сб., 1951, т. 10.
2. *Малинин Н. Н.* Основы расчета на ползучесть. М.: Машгиз, 1948.
3. *Ptechnik S., Chrzanowski M.* Time of total creep rupture of a beam under combined tension and bending.—Int. journal solids and structure, 1970, v. 6, No. 4.
4. *Александрян Р. А., Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Релаксационная задача об изгибе призматического стержня.— Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
5. *Работнов Ю. Н.* Некоторые вопросы теории ползучести.— Вестник МГУ, 1948, № 10.
6. *Арутюнян Н. Х., Чобанян К. С.* Изгиб призматических стержней, составленных из различных материалов, с учетом ползучести.— Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 1957, т. 10, № 5.
7. *Аветисян Г. А.* Поперечный изгиб однородного призматического стержня, находящегося в условиях неустановившейся ползучести.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1977, т. 30, № 5.
8. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960.
9. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М., Наука, 1966.
10. *Simonian A. M.* Calculation of thermal stresses in thick-walled cylinders taking account of non-linear creep.—International Journal of Engineering Science, 1979, v. 17, No. 5.
11. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.: Гостехтеориздат, 1952.
12. *Ватсон Дж. Н.* Теория бесселевых функций, ч. 1. М.: ИЛ, 1975.
13. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
14. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975.

СКТБ Института механики АН АрмССР
Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию
8.IX.1981