ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 1, 1983 Механика

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ И КОЛЬЦЕОБРАЗНЫХ НАКЛАДОК

МХИТАРЯН С. М., ТОРОСЯН Ф. С.

Обширный класс задач по исследованию напряженного состояния упругой бесконечной пластины с круговым отверстием, усиленной на обводе отверстия накладками в виде полных тонких колец, рассмотрен в монографии [1]. При этом в качестве основной физической модели для накладок в [1] принята теория кривых стержней. Работы [2, 3] основаны на допущении об одноосности напряженного состояния кольцеобразных накладок, заимствованном из работ [4, 5] применительно к прямолинейным накладкам. Однако, непосредственное перенесение этого допущения, которое с достаточной точностью справедливо в применении к последним, на случай кольцеобразных накладок любых размеров в известной мере неприемлемо, хотя для коротких накладок оно все же имеет место.

Кроме того, из-за такого подхода в [2, 3] возникают лишние осложнения в структуре разрешающего уравнения и дополнительные трудности аналитического и вычислительного характера.

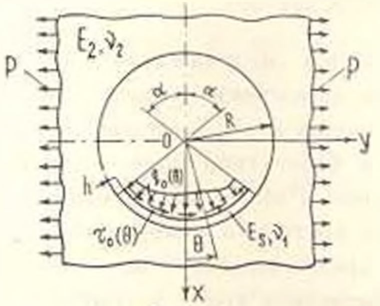
В настоящей работе исследуется напряженное состояние упругой бесконечной плоскости с круговым отверстием, усиленной на обводе отверстия одним или двумя одинаковыми и симметрично расположенными кольцеобразными накладками в виде неполных тонких колец. Последние здесь, в отличие от [1—3], где накладки загружены только тангенциальными силами, подвержены одновременному действию радиальных и тангенциальных сил произвольных интенсивностей. При этом предполагается, что бесконечная плоскость с отверстием находится в условиях плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния, а накладки трактуются в рамках теории тонких оболочек [6]. Последнее допущение принципиально согласуется с принятым в [1].

В рамках указанных предположений решение поставленных задач сводится к решению сингулярного интегрального уравнения, ядро которого представляется в виде суммы ядра Гильберта и некоторого регулярного ядра. На основе аппарата полиномов Якоби видоизмененного аргумента это уравнение сводится к эквивалентной бесконечной системе. Для одного частного случая проведен численный анализ решений.

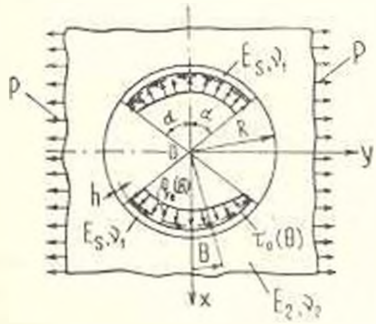
1. *Постановка задач и вывод разрешающих уравнений.* В первой задаче пусть бесконечная пластина с круговым отверстием радиуса R вдоль дугового отрезка $\overline{a\bar{a}}$ ($a = Re^{i\alpha}$) обвода отверстия усилена приваренной или

приклеенной к ней упругой кольцеобразной накладкой малой толщины h ($h/R \leqslant 1/20$ [6]), которая одновременно нагружена тангенциальными и нормальными силами интенсивностей $\tau_0(\theta)$ и $q_0(\theta)$ соответственно (фиг. 1).

Во второй задаче на обводе отверстия имеются две одинаковые симметрично расположенные накладки, загруженные тангенциальными и нормальными силами, обладающими симметрией относительно точки о, то есть $\tau_0(\theta+\pi)=\tau_0(\theta)$, $q_0(\theta+\pi)=q_0(\theta)$ $(-\alpha\leqslant\theta\leqslant\alpha)$ (фиг. 2).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Наконец, в третьей задаче на обводе отверстия имеются две одинаковые симметрично расположенные накладки, которые в данном случае загружены теми же силами, симметричными относительно оси oy, то есть $\tau_0(\theta+\pi)=\tau_0(-\theta)$, $q_0(\theta+\pi)=q_0(-\theta)$ $(-\alpha\leqslant\theta\leqslant\alpha)$.

Во всех трех задачах пластина на бесконечности растягивается в направлении оси oy силами постоянной интенсивности p. Предполагается также, что пластина с накладками находится в условиях плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния.

Требуется определить законы распределения тангенциальных $\tau(\theta)$ и нормальных $q(\theta)$ контактных напряжений вдоль отрезков креплений упругих накладок с основанием.

В дальнейшем подробно будет рассматриваться первая задача, а для второй и третьей задач соответствующие результаты будут приведены в готовом виде.

Приступив к выводу разрешающего уравнения первой задачи, отметим, что на линии соединения накладки с основанием должны иметь место следующие очевидные условия контакта:

$$\varepsilon_\theta^{(1)}=\varepsilon_\theta^{(2)},\quad \gamma_1=\gamma_2\quad(-\alpha\leqslant\theta\leqslant\alpha) \tag{1.1}$$

где $\varepsilon_\theta^{(1)}$ и γ_1 — соответственно относительное удлинение срединной линии накладки по направлению θ и угол, на который поворачивается нормаль к этой линии, а $\varepsilon_\theta^{(2)}$ и γ_2 — те же параметры, относящиеся к основанию, то есть

$$\varepsilon_\theta^{(2)}=\frac{1}{R}\frac{dv_\theta}{d\theta}+\frac{v_r}{R},\qquad \gamma_2=\frac{1}{R}\frac{dv_r}{d\theta}-\frac{v_\theta}{R} \tag{1.2}$$

где v_r и v_θ — соответственно радиальный и тангенциальный компоненты упругих перемещений граничных точек бесконечной пластины от внешних (p) и контактных напряжений ($\tau(0)$ и $q(0)$).

Очевидно, что условия (1.1) эквивалентны обычным условиям контакта, выраженным в перемещениях.

Пользуясь известным комплексным представлением решения плоской задачи теории упругости [7], легко получить, что компоненты перемещений v_r и v_θ выражаются формулой:

$$
\begin{aligned}
2\mu(v_r + iv_\theta) = &-\frac{(\varkappa+1)R}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}[q(u)+i\tau(u)]\,e^{-i(\theta-u)}\ln 2\left|\sin\frac{\theta-u}{2}\right|du - \\
&-i\frac{(\varkappa-1)R}{4\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}[q(u)+i\tau(u)]\,e^{-i(\theta-u)}(\pi-|\theta-u|)\,\mathrm{sign}\,(\theta-u)\,du + \\
&+\frac{(\varkappa+1)R}{4}\,p\,(1-2e^{-2i\theta})
\end{aligned}
\qquad (1.3)
$$

Здесь $\varkappa = 3-4\nu_2$ при плоской деформации, $\mu = E_2/2(1+\nu_2)$, а E_2 и ν_2 — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона для материала пластины.

Когда бесконечная пластина с отверстием толщины d_2 находится в условиях обобщенного плоского напряженного состояния и загружена только по части толщины шириной $d\,(d \leqslant d_2)$, то в (1.3) следует заменить $q(u)$ на $dq(u)/d_2$, $\tau(u)$ — на $d\tau(u)/d_2$, а $\varkappa$ — на $\varkappa^* = (3-\nu_2)/(1+\nu_2)$ [7].

Подставляя значения v_r и v_θ из (1.3) в (1.2), для $\varepsilon_\theta^{(2)}$ и γ_2 получим следующие выражения:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_\theta^{(2)} = &-\frac{\varkappa+1}{8\pi\mu}\int_{-\alpha}^{\alpha}\tau(u)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\theta-u}{2}\,du + \frac{\varkappa+1}{8\pi\mu}\int_{-\alpha}^{\alpha}q(u)\,du - \frac{\varkappa-1}{4\mu}\,q(\theta) + \\
&+\frac{\varkappa}{4\pi\mu R}(X\cos\theta + Y\sin\theta) + \frac{\varkappa+1}{4\mu}\,p\cos 2\theta + \frac{\varkappa+1}{8\mu}\,p \\
\gamma_2 = &-\frac{\varkappa+1}{8\pi\mu}\int_{-\alpha}^{\alpha}q(u)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\theta-u}{2}\,du - \frac{\varkappa+1}{8\pi\mu}\int_{-\alpha}^{\alpha}\tau(u)\,du + \\
&+\frac{\varkappa-1}{4\mu}\,\tau(\theta) + \frac{\varkappa}{4\pi\mu R}(X\sin\theta - Y\cos\theta) + \frac{\varkappa+1}{4\mu}\,p\sin 2\theta
\end{aligned}
\qquad (1.4)
$$

где X и Y — компоненты главного вектора внешних нагрузок по осям ox и oy, действующих на накладку

$$
X + iY = R\int_{-\alpha}^{\alpha}[q_0(u)+i\tau_0(u)]\,e^{iu}\,du = R\int_{-\alpha}^{\alpha}[q(u)+i\tau(u)]\,e^{iu}\,du \qquad (1.5)
$$

Главный же момент внешних нагрузок будет

$$M = R^2 \int_{-\pi}^{\pi} \tau_0 (u)\, du = R^2 \int_{-\pi}^{\pi} \tau (u)\, du \tag{1.6}$$

Перейдем теперь к определению компонентов деформации накладки $\varepsilon_\theta^{(1)}$ и ψ_1.

Рассматривая накладку как тонкую цилиндрическую оболочку, находящуюся в условиях плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния, при помощи уравнений равновесия (7.4) и (7.8) ([6], стр. 36, 37) и упругих соотношений (10.8) ([6], стр. 47) обнаружим, что компоненты деформации срединной линии накладки $\varepsilon_\theta^{(1)}$ и ψ_1 удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{D}{R^3} \frac{d^3 \psi_1}{d\theta^3} + \frac{G}{R} \varepsilon_\theta^{(1)} = q_0 (\theta) - q (\theta) \\ &\frac{D}{R^3} \frac{d^2 \psi_1}{d\theta^2} - \frac{G}{R} \frac{d\varepsilon_\theta^{(1)}}{d\theta} = \tau_0 (\theta) - \tau (\theta) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Легко заметить, что последнюю систему можно записать также в виде

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 \varepsilon_\theta^{(1)}}{d\theta^2} + \varepsilon_\theta^{(1)} = \frac{R}{G} \left[q_0 (\theta) - q (\theta) - \frac{d}{d\theta} (\tau_0 (\theta) + \tau (\theta)) \right] \\ &\frac{d^4 \psi_1}{d\theta^4} + \frac{d^2 \psi_1}{d\theta^2} = \frac{R^3}{D} \left[\frac{d}{d\theta^2} (q_0 (\theta) - q (\theta)) + \tau_0 (\theta) - \tau (\theta) \right] \end{aligned} \tag{1.8}$$

Здесь $D = E_2 h^3 / 12 (1 - \nu_1^2)$ — жесткость накладки на изгиб, $G = E_2 h / (1 - \nu_1^2)$, а E_2 и ν_1 — упругие постоянные накладки.

Для обобщенного плоского напряженного состояния накладки следует заменить E_2 на $E_2^* = E_2 (1 + 2\nu_1)/(1 + \nu_1)^2$, ν_1 — на $\nu_1^* = \nu_1/(1 + \nu_1)$, а $q (\theta)$ и $\tau (\theta)$ — на $dq (\theta)/d_1$ и $d\tau (\theta)/d_1$ соответственно, где d_1 — ширина накладки, d — эффективная ширина контактной зоны, причем $d \leqslant \min (d_1, d_2)$.

Интегрируем уравнения (1.8) при следующих граничных условиях:

$$T (\theta) \big|_{\theta = \pm\pi} = G \varepsilon_\theta^{(1)} \big|_{\theta = \pm\pi} = 0, \qquad N (\theta) \big|_{\theta = \pm\pi} = - \frac{D}{R^2} \frac{d^2 \psi_1}{d\theta^2} \bigg|_{\theta = \pm\pi} = 0$$

$$M (\theta) \big|_{\theta = \pm\pi} = - \frac{D}{R} \frac{d\psi_1}{d\theta} \bigg|_{\theta = \pm\pi} = 0$$

выражающих отсутствие на концевых сечениях накладки продольной силы $T (\theta)$, поперечной силы $N (\theta)$ и изгибающего момента $M (\theta)$, отнесенных к единице ширины накладки. В результате получим

$$\varepsilon_\theta^{(1)} = - \frac{R}{G} \int_{-\pi}^{\theta} [q (u) \sin (\theta - u) - \tau (u) \cos (\theta - u)]\, du +$$

$$
+\frac{R}{G}\int_{-\alpha}^{\theta}\left[q_0(u)\sin(\theta-u)-\tau_0(u)\cos(\theta-u)\right]du
$$

$$
\psi_1 = -\frac{R^3}{D}\int_{-\alpha}^{\theta}\left[q_0(u)-q(u)\right]du+\frac{R^3}{D}\int_{-\alpha}^{\theta}(\theta-u)\left[\tau_0(u)-\tau(u)\right]du+
$$

$$
+\frac{R^3}{D}\int_{-\alpha}^{\theta}\left[q(u)\cos(\theta-u)+\tau(u)\sin(\theta-u)\right]du-
$$

$$
-\frac{R^3}{D}\int_{-\alpha}^{\theta}\left[q_0(u)\cos(\theta-u)+\tau_0(u)\sin(\theta-u)\right]du+C, \quad (C=\mathrm{const}) \qquad (1.9)
$$

Подставляя выражения $\varepsilon_\theta^{(1)}$, ψ_1 и $\varepsilon_\theta^{(2)}$, ψ_2 соответственно из (1.9) и (1.4) в систему (1.1), затем умножая первое из соотношений (1.1) на мнимую единицу i и складывая со вторым, придем к интегральному уравнению

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{ctg}\frac{u-\theta}{2}\chi(u)\,du+\int_{-\alpha}^{\alpha}R^{(j)}(\theta-u)\chi(u)\,du+\int_{-\alpha}^{\alpha}N^{(j)}(\theta+u)\overline{\chi(u)}\,du+
$$

$$
+2\,\mathrm{Re}\int_{-\alpha}^{\alpha}K(\theta-u)\chi(u)\,du=i\,\mathrm{th}(\pi\gamma)\chi(\theta)+f^{(j)}(\theta), \quad (-\alpha<\theta<\alpha) \quad (1.10)
$$

Здесь $j=1;\ 2;\ 3$ — соответствуют первой, второй, третьей задачам и введены следующие обозначения:

$$
\chi(\theta)=\left[q(\theta)+i\tau(\theta)\right]/4\mu, \quad \mathrm{th}(\pi\gamma)=(\varkappa-1)/(\varkappa+1)
$$

$$
R^{(j)}(\theta-u)=\begin{cases}0, & j=1;\ 3\\ (2\pi)^{-1}\,\mathrm{tg}\dfrac{\theta-u}{2}, & j=2\end{cases}
$$

$$
N^{(j)}(\theta+u)=\begin{cases}0, & j=1;\ 2\\ (2\pi)^{-1}\,\mathrm{tg}\dfrac{\theta+u}{2}, & j=3\end{cases}
$$

$$
K(\theta-u)=\frac{2\mu}{\varkappa+1}\left\{\frac{R^3}{D}-\left(\frac{R^3}{D}+\frac{R}{G}\right)\cos(\theta-u)-\right.
$$

$$
\left.-i\left[\frac{R^3}{D}(\theta-u)-\left(\frac{R^3}{D}+\frac{R}{G}\right)\sin(\theta-u)\right]\right\}
$$

$$
f^{(j)}(\theta)=-i\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\chi(u)\,du-\frac{\varkappa}{4\pi\mu R(\varkappa+1)}ie^{-i\theta}(X+iY)+f(\theta)
$$

$$f^{(2)}(\theta) = -i\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\chi(u)\,du + f(\theta)$$

$$f^{(3)}(\theta) = -i\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\chi(u)\,du + \frac{\varkappa Y e^{-i\theta}}{2\pi\mu R(\varkappa+1)} + f(\theta)$$

где

$$f(\theta) = \frac{R^3}{D(\varkappa+1)}\int_{-\alpha}^{\theta}(\theta-u)\,\tau_0(u)\,du - \frac{R^3}{D(\varkappa+1)}\int_{-\alpha}^{\theta}[q_0(u)\cos(\theta-u) +$$

$$+\tau_0(u)\sin(\theta-u)]\,du + i\frac{R}{G(\varkappa+1)}\int_{-\alpha}^{\theta}[q_0(u)\sin(\theta-u) -$$

$$-\tau_0(u)\cos(\theta-u)]\,du - i\frac{1}{4\mu}pe^{-2i\theta} - i\frac{1}{8\mu}p + C/(\varkappa+1)$$

Таким образом, решение поставленных задач сводится к решению сингулярных интегральных уравнений (1.10) при условиях (1.5) и (1.6), ядра которых представлены в виде суммы ядра Гильберта $(2\pi)^{-1}\operatorname{ctg}(u-\theta)/2$ и регулярных ядер в виде функций $R^{(j)}(\theta-u)$, $N^{(j)}(\theta-u)$ и $K(\theta-u)$.

Отметим, что силовые характеристики упругих накладок определяются формулами

$$T(\theta) = R\int_{-\alpha}^{\theta}\cos(\theta-u)[\tau(u)-\tau_0(u)]\,du -$$

$$-R\int_{-\alpha}^{\theta}\sin(\theta-u)[q(u)-q_0(u)]\,du$$

$$N(\theta) = R\int_{-\alpha}^{\theta}\sin(\theta-u)[\tau(u)-\tau_0(u)]\,du +$$

$$+R\int_{-\alpha}^{\theta}\cos(\theta-u)[q(u)-q_0(u)]\,du$$

$$M(\theta) = 2R^2\int_{-\alpha}^{\theta}\sin^2\frac{\theta-u}{2}[\tau(u)-\tau_0(u)]\,du +$$

$$+R^2\int_{-\alpha}^{\theta}\sin(\theta-u)[q(u)-q_0(u)]\,du$$

Рассмотрим частный случай, когда жесткость накладок на изгиб пренебрежимо мала, то есть $D = 0$. Тогда первое соотношение граничных условий (1.1) и система (1.7) приводит к следующему сингулярному интегро-дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{ctg}\frac{u-\theta}{2}\varphi'(u)\,du + \int_{-\alpha}^{\alpha} K^{(j)}(\theta, u)\,\varphi'(u)\,du = \lambda\varphi(\theta) + f_j(\theta) \quad (1.11)$$

$$(-\alpha < \theta < \alpha)$$

при граничных условиях

$$\varphi(-\alpha) = 0, \quad \varphi(\alpha) = M/4\mu R^2$$

Здесь снова $j = 1;\ 2;\ 3$ для первой, второй и третьей задач, а

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{4\mu}\int_{-\alpha}^{\theta}\tau(u)\,du, \quad \lambda = \frac{4\mu R}{G(\varkappa+1)} - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}$$

$$K^{(1)}(\theta, u) = 0,\ K^{(2)}(\theta, u) = (2\pi)^{-1}\operatorname{tg}\frac{\theta-u}{2},\ K^{(3)}(\theta, u) = -(2\pi)^{-1}\operatorname{tg}\frac{\theta+u}{2}$$

$$f_1(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi(u)\,du - \frac{1}{8\pi\mu}\int_{-\alpha}^{\alpha}[q_0(u) + p(u)]\,du -$$

$$- \frac{\varkappa}{4\pi\mu R(\varkappa+1)}(X\cos\theta + Y\sin\theta) + g(\theta)$$

$$f_2(\theta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi(u)\,du - \frac{1}{4\pi\mu}\int_{-\alpha}^{\alpha}[q_0(u) + p(u)]\,du + g(\theta)$$

$$f_3(\theta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi(u)\,du - \frac{1}{4\pi\mu}\int_{-\alpha}^{\alpha}[q_0(u) + p(u)]\,du +$$

$$+ \frac{\varkappa}{2\pi\mu R(\varkappa+1)}Y\sin\theta + g(\theta)$$

В последних формулах

$$p(\theta) = \int_{-\alpha}^{\theta}\tau_0(u)\,du, \quad g(\theta) = -\lambda\frac{p(\theta)}{4\mu} + \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\,\frac{1}{4\mu}\,q_0(\theta) -$$

$$- \frac{1}{4\mu}\,p\cos 2\theta - \frac{1}{8\mu}\,p$$

Тангенциальные контактные напряжения выражаются формулой

$$\tau(\theta) = 4\mu\varphi'(\theta), \quad (-\alpha < \theta < \alpha)$$

а нормальные контактные напряжения определятся после определения $\tau(\theta)$ формулой

$$q(\theta) = -\int_{-\alpha}^{\theta} \tau(u)\,du + q_0(\theta) + \int_{-\alpha}^{\theta} \tau_0(u)\,du = -4\mu\varphi(\theta) + q_0(\theta) + p(\theta)$$

2. *Сведение разрешающих уравнений к бесконечным системам линейных уравнений.* Решение (1.10) представим рядом [8]

$$\chi(\theta) = w(\theta)\sum_{m=0}^{\infty} Z_m P_m^{(\sigma,\rho)}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$$

с неизвестными коэффициентами Z_m ($m = 0, 1, 2, \ldots$).

Здесь

$$w(\theta) = \frac{1}{2}\left(\sec\frac{\theta}{2}\right)^{2+\sigma+\rho}\left(\sin\frac{\alpha-\theta}{2}\right)^{\sigma}\left(\sin\frac{\alpha+\theta}{2}\right)^{\rho}$$

$$\sigma = -\frac{1}{2} - i\gamma, \qquad \rho = -\frac{1}{2} + i\gamma$$

$P_m^{(\sigma,\rho)}(x)$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$), ($\mathrm{Re}\,(\sigma, \rho) > -1$) — многочлены Якоби, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1-x)^{\sigma}(1+x)^{\rho}$.

Сведение (1.10) к бесконечной системе основано на следующих соотношениях для многочленов Якоби [9, 10]:

$$-i\,\mathrm{th}(\pi\gamma)\,w(\theta)\,P_m^{(\sigma,\rho)}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{u-\theta}{2}\,w(u)\,P_m^{(\sigma,\rho)}\left(\operatorname{tg}\frac{u}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)du =$$

$$=\left(4\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{ch}\,\pi\gamma\right)^{-1}\sec^2\frac{\theta}{2}\,P_{m-1}^{(-\sigma,-\rho)}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right), \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

$$-i\,\mathrm{th}(\pi\gamma)\,w(\theta) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{u-\theta}{2}\,w(u)\,du = \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{sch}(\pi\gamma)\,\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

Используя эти соотношения и свойства ортогональности многочленов Якоби [11, 12], известным способом получим бесконечную систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов Z_m ($m = 1, 2, \ldots$), которая квазивполне регулярна [8, 13].

Следует отметить, что коэффициент Z_0 и постоянная C определяются при помощи соотношений (1.5) и (1.6).

Отметим также, что решение разрешающего уравнения (1.11) можно построить при помощи аппарата ортогональных многочленов Чебышева, как это сделано в работах [2, 14].

3. *Числовой пример.* Подробно рассмотрим третью задачу, когда внешние нагрузки, действующие на накладки, отсутствуют, и на пластине в бесконечности действуют только растягивающие напряжения p в направлении оси oy. При этом

$$\tau_0(\theta)=0,\quad q_0(\theta)=0,\quad p(\theta)=0,\quad X=Y=0$$

кроме того,

$$q(-\theta)=q(\theta),\quad \tau(-\theta)=-\tau(\theta),\quad \varphi(-\theta)=\varphi(\theta)$$

и разрешающее уравнение (1.11) задачи примет вид

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\operatorname{ctg}(u-\theta)\,\varphi'(u)\,du=\lambda\varphi(\theta)+f_3(\theta)\quad(-\alpha<\theta<\alpha),\qquad (\tau(\theta)=4\mu\varphi'(\theta)) \tag{3.1}$$

а граничные условия — вид

$$\varphi(-\alpha)=\varphi(\alpha)=0$$

Функция $f_3(\theta)$ в обсуждаемом частном случае выражается формулой

$$f_3(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi(u)\,du-\frac{1}{8\mu}p-\frac{1}{4\mu}p\cos 2\theta$$

Нормальное контактное напряжение будет даваться формулой

$$q(\theta)=-\int_{-\alpha}^{\theta}\tau(u)\,du=-4\mu\varphi(\theta)$$

Уравнение (3.1) запишем в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\beta}^{\beta}\operatorname{ctg}\frac{u-\theta}{2}\,\varphi_*'(u)\,du=\lambda\varphi_*(\theta)+f_*(\theta),\quad(-\beta<\theta<\beta),\quad |\beta|<\pi \tag{3.2}$$

$$\varphi_*(-\beta)=\varphi_*(\beta)=0$$

где обозначено

$$\beta=2\alpha,\quad \varphi_*(\theta)=\varphi\left(\frac{\theta}{2}\right),\quad f_*(\theta)=f_3\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Решение уравнения (3.2) представим в виде [2, 14]

$$\varphi_*'(\theta)=\frac{\sec\theta/2}{\sqrt{2\cos\theta-2\cos\beta}}\sum_{m=1}^{\infty}X_m T_{2m-1}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) \tag{3.3}$$

$$\varphi_*(\theta)=-\csc\beta\sum_{m=1}^{\infty}X_m(2m-1)^{-1}\sqrt{2\cos\theta-2\cos\beta}\,\sec\frac{\theta}{2}\times$$

$$\times U_{2m-2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) \tag{3.4}$$

Здесь $T_n(x)$ и $U_n(x)$ ($|x| \leqslant 1$) — соответственно многочлены Чебышева первого и второго рода.

Подставляя (3.3) и (3.4) в (3.2) и используя соотношение [14]

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\beta}^{\beta} \operatorname{ctg}\frac{u-\theta}{2} \frac{\sec\frac{u}{2} T_{2m-1}\left(\operatorname{tg}\frac{u}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) du}{\sqrt{2\cos u - 2\cos\beta}} =$$

$$= \frac{1}{2}\csc\frac{\beta}{2} U_{2m-2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)\sec^2\frac{\theta}{2}, \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

известным способом получим бесконечную систему линейных уравнений относительно коэффициентов X_m ($m = 1, 2, \ldots$):

$$X_n + \sum_{m=1}^{\infty} X_m a_{n,m} = \frac{1}{2}\left(\pi \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^{-1}\left(\frac{p}{E_2} b_n^{(1)} + A b_n^{(2)}\right), \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

где

$$a_{n,m} = \lambda_m \int_{-\alpha}^{\alpha} U_{2n-2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) U_{2m-2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)\sec^2\frac{\theta}{2} \times$$

$$\times (2\cos\theta - 2\cos\beta)\, d\theta$$

$$\lambda_m = \lambda\left[(2m-1)\, 4\pi \sin^2\frac{\beta}{2}\right]^{-1}$$

$$b_n^{(1)} = -\frac{1+\nu_2}{2}\int_{-\beta}^{\beta}\cos\theta \sec\frac{\theta}{2}\sqrt{2\cos\theta - 2\cos\beta}\, U_{2n-2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) d\theta =$$

$$= \pi(1+\nu_2)\sin\beta\,(2n-1)(-1)^n\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}\right)^{2n-1}$$

$$b_n^{(2)} = \int_{-\beta}^{\beta}\sec\frac{\theta}{2}\sqrt{2\cos\theta - 2\cos\beta}\, U_{2n-2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) d\theta =$$

$$= 4\pi \sin\frac{\beta}{2}(-1)^{n-1}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}\right)^{2n-1}$$

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\beta}^{\beta}\varphi_*(u)\, du - \frac{1}{8\mu} p - \sec\frac{\beta}{2} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} X_m (2m-1)^{-1}(-1)^m\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}\right)^{2m-1} - p/8\mu \qquad (3.5)$$

Коэффициенты $\{X_m\}_{m=1}^{\infty}$ представим в виде

$$X_m = \frac{p}{E_2} X_m^{(1)} + A X_m^{(2)} \tag{3.6}$$

где $X_m^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ представляют собой решения бесконечных систем

$$X_n^{(j)} + \sum_{m=1}^{\infty} X_m^{(j)} a_{n,m} = \frac{1}{2}\left(\pi \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^{-1} b_n^{(j)}$$

Постоянная A определяется из соотношения (3.5), которое после постановки в него (3.6) примет вид

$$A = \frac{p}{E_2} \frac{\sec\frac{\beta}{2}\sum_{m=1}^{\infty} X_m^{(1)}(2m-1)^{-1}(-1)^m\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}\right)^{2m-1} - (1+\nu_2)/4}{1 - \sec\frac{\beta}{2}\sum_{m=1}^{\infty} X_m^{(2)}(2m-1)^{-1}(-1)^m\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}\right)^{2m-1}}$$

Для числовых расчетов ядро $a_{n,m}$ удобно представить в виде быстро сходящегося ряда [14]

$$a_{n,m} = -\frac{16}{\pi}\lambda(2n-1)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}\right)^{2k+1}}{[(2k-2n+2)^2-(2m-1)^2][(2k+2n)^2-(2m-1)^2]}$$

Числовые расчеты проведены для случая $\varkappa = 3-4\nu$, при следующих значениях физических и геометрических параметров:

$$\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3, \quad E_2/E_1 = 2;\ 1;\ 0{,}5;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0,\ h/R = 0{,}05,$$

$$2\alpha = 30^\circ;\ 60^\circ,\ (2\beta = 60^\circ;\ 120^\circ).$$

Бесконечные системы решались методом редукции, причем ограничивались лишь решением системы из шести уравнений, поскольку ее решение с точностью, по крайней мере, до пяти цифр совпало с решением системы из пяти уравнений.

Числовые результаты приведены в табл. 1.

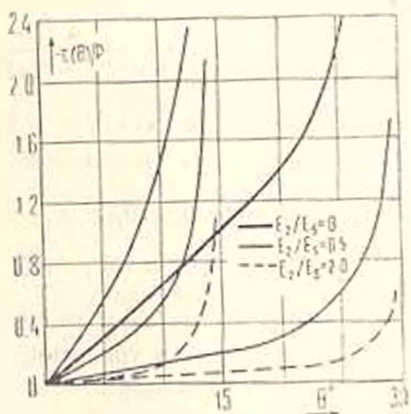
$$x_n = -\frac{E_2}{p} X_n$$

На фиг. 3 показаны закономерности изменения контактного тангенциального напряжения в зависимости от материалов контактирующих пар и длин участков контакта. Замечено, что при уменьшении значений отношения E_2/E_1, то есть когда материал стрингеров становится более жестким, контактные тангенциальные напряжения под упругими криволинейными стрингерами увеличиваются.

Далее определены значения нормального напряжения $\sigma_\theta(r, \theta)$ в точке $(R, 0)$ для различных контактирующих пар и длин участков контакта. Эти результаты приведены в табл. 2.

Таблица 1

		E_2/E_1					
		2	1	0,5	0,2	0,1	0
$2\alpha=30°$	x_1	0,0454	0,0762	0,1163	0,1780	0,2026	0,2497
	x_2	0,0163	0,0169	0,0132	0,0040	−0,0026	−0,0132
	x_3	0,0069	0,0056	0,0038	0,0019	0,0010	0
	x_4	0,0030	0,0021	0,0013	0,0005	0,0003	0,0001
	x_5	0,0014	0,0010	0,0006	0,0003	0,0001	0
$2\alpha=60°$	x_1	0,0410	0,0739	0,1243	0,2123	0,2789	0,4079
	x_2	0,0098	0,0093	0,0023	−0,0185	−0,0378	−0,0791
	x_3	0,0085	0,0086	0,0076	0,0065	0,0065	0,0080
	x_4	0,0039	0,0030	0,0020	0,0008	0	−0,0011
	x_5	0,0021	0,0015	0,0010	0,0006	0,0003	−0,0001
	x_6	0,0012	0,0008	0,0006	0,0003	0,0001	−0,0001



Фиг. 3.

Таблица 2

		E_2/E_1					
		2	1	0,5	0,2	0,1	0
σ_θ/p	$2\alpha=30$	2,642	2,327	1,870	1,197	0,788	0,173
	$2\alpha=60$	2,802	2,620	2,313	1,729	1,263	0,331

Общеизвестно, что отверстия в пластинах являются зонами концентрации напряжений, в частности замечаются концентрации нормального напряжения σ_θ в точках $(R, 0)$ и (R, π) (фиг. 2), равного утроенному значению внешнего растягивающего напряжения p [7]. Из табл. 2 видно, что эти напряжения при наличии кольцеобразных накладок на границе отверстия пластины заметно уменьшаются, причем, как и следовало ожидать, этот эффект заметнее при малых значениях отношения E_y/E_*.

В итоге можно утверждать, что усиление круговой границы пластины накладками благоприятно влияет на напряженное состояние пластины в целом.

ԿԼՈՐ ԱՆՑՔՈՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԱՆՎԵՐՋ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՕՂԱԿԱՁԵՎ ՎԵՐԱԴԻՐՆԵՐԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, Ֆ. Ս. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում են մի քանի կոնտակտային խնդիրներ՝ կլոր անցքով առաձգական հարթության համար, որն իր եզրագծի աղեղային հատվածներով ուժեղացված է բարակ առաձգական վերադիրներով։ Վերադիրների համար որպես ֆիզիկական մոդել ընդունված է բարակ գլանային թաղանթների լարվածային վիճակի մոդելը՝ Կիրխհոֆ-Լյավի հիպոթեզների շրջանակներում։ Խնդիրների որոշիչ հավասարումները հանգում են Հիլբերտի և որոշ սինգուլյար կորիզով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման։ Օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդով այդ հավասարման համար ստացված է էֆեկտիվ լուծում։ Դիտարկված են մասնավոր դեպքեր։ Ստացված են թվային արդյունքներ։

ON SOME PROBLEMS OF CONTACT INTERACTION BETWEEN THE ELASTIC INFINITE PLANE WITH A CIRCULAR HOLE AND CIRCULAR STIFFENERS

S. M. MKHITARIAN, F. S. TOROSSIAN

Summary

Certain contact problems for an elastic plane with a circular hole, reinforced above the arc segment of its boundary with elastic stiffeners of a small thickness are considered. The solution of the above problems is reduced to that of singular integral equations. By the method of the Jacobi orthogonal polynomials the efficient solution for these equations is founded. For this particular case, the numerical results are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шереметьев М. П.* Пластинки с подкрепленным краем. Львов: изд-во Львовск. ун-та, 1960.
2. *Шагинян С. С.* Передача нагрузки от кольцевой накладки к плоскости с круговым отверстием.— Изв. АН СССР, МТТ, 1972, 5, с. 178—183.
3. *Шагинян С. С.* Некоторые контактные задачи для плоскости с круговым отверстием, усиленной на своей границе упругими накладками.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1974, 27, № 1, с. 3—17.
4. *Melan E.* Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen.— Ingr-Arch., 1932, 3, Nr. 2, s. 123–129.
5. *Арутюнян Н. Х.* Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением.— ПММ, 1968, 32, № 2, с. 632—646.
6. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1951.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
8. *Мхитарян С. М., Торосян Ф. С.* О контактном взаимодействии кругового диска и бесконечной пластины с круговым отверстием, подкрепленным тонким кольцевым покрытием.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1978, 31, № 5, с. 3—19.
9. *Попов Г. Я.* Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения.— ПММ, 1966, 30, № 3, с. 551—563.
10. *Карпенко Л. Н.* Приближенное решение одного сингулярного интегрального уравнения при помощи многочленов Якоби.— ПММ, 1966, 30, № 3, с. 564—569.
11. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
12. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, ч. 1, М.: Наука, 1973.
13. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Контактная задача о вдавливании штампа в упругую полуплоскость с тонким усиливающим покрытием.— ПММ, 1975, 39, № 5, с. 857—875.
14. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К периодической контактной задаче для полуплоскости с упругими накладками.— ПММ, 1971, 35, № 1, с. 172—178.

Институт механики АН Армянской ССР
Ленинаканский филиал ЕрПИ им. К. Маркса

Поступила в редакцию
7. IV. 1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 1, 1983 Механика

О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ПАРАБОЛОИДНОЙ ТРЕЩИНЫ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ

МАРТЫНЕНКО М. А., УЛИТКО А. Ф.

Впервые задача о равновесии упругого пространства, ослабленного разрезом по части параболоидной поверхности, рассматривалась в работе [1]. В ней авторы использовали точные решения основных граничных задач для параболоида вращения в виде интегралов Ханкеля и с помощью метода парных уравнений свели задачу к системе интегро-дифференциальных уравнений фредгольмового типа. Однако, при решении системы парных уравнений не было использовано интегральное условие для одной из введенных функций, вследствие чего полученная система интегро-дифференциальных уравнений оказалась незамкнутой. В [2] были представлены формулы для аналитического исследования лишь локального поля перемещений и напряжений вблизи граничной окружности параболоидного разреза; вопрос о численном решении задачи в названных работах не рассматривался.

Ниже задача о параболоидном разрезе в упругом теле приведена к замкнутой системе интегро-дифференциальных уравнений фредгольмового типа, исследовано локальное напряженно-деформируемое состояние у границы разрыва сплошности материала и получены численные значения ряда физических характеристик при конкретном нагружении поверхностей разреза.

1. Пусть упругое пространство ослаблено разрезом по части параболоидальной поверхности $\xi = \xi_0$, $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0$ (фиг. 1). Предполагается, что поверхности разреза не вступают в контактное взаимодействие, а поля напряжений и перемещений удовлетворяют следующим условиям:

$$Z_n^{(1)} = -Z_n^{(2)} = f_1(\eta), \quad R_n^{(1)} = -R_n^{(2)} = f_2(\eta) \quad (\xi = \xi_0;\ 0 \leqslant \eta < \eta_0)$$
$$Z_n^{(1)} = -Z_n^{(2)}, \ R_n^{(1)} = -R_n^{(2)}, \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \ u_z^{(1)} = u_z^{(2)} \ (\xi = \xi_0;\ \eta_0 \leqslant \eta < \infty) \tag{1.1}$$

Согласно [3], общее решение внутренней задачи (индекс 1) по отношению к поверхности параболоида вращения записывается в виде

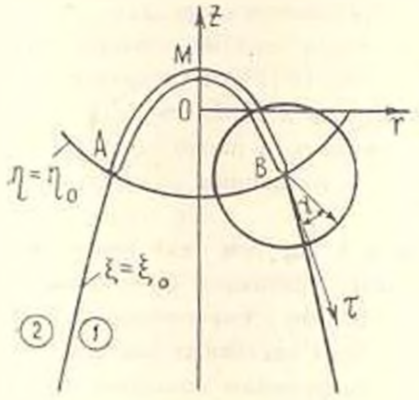
$$2Gu_z^{(1)} = \int_0^\infty \left[\bar{\beta}(\tau, \xi) I_0 - \left(\tau\xi I_1 + 2\frac{m-1}{m} I_0 \right) \bar{\alpha}(\tau)\, \tau^{-1} \right] J_0(\tau\eta)\, \tau d\tau$$
$$2Gu_r^{(1)} = \int_0^\infty \left[\bar{\beta}(\tau, \xi) I_1 - \left(\tau\xi I_0 - 2\frac{m-1}{m} I_1 \right) \bar{\alpha}(\tau)\, \tau^{-1} \right] J_1(\tau\eta)\, \tau d\tau \tag{1.2}$$

$$hZ_n^{(1)} = \int_0^\infty [\bar{\beta}(\tau, \xi)\tau I_1 - \xi\tau I_0 \bar{\alpha}(\tau)] J_0(\tau\eta)\tau d\tau$$

$$hR_n^{(1)} = -\int_0^\infty \left[\bar{\beta}(\tau, \xi)(\tau I_0 - \xi^{-1} I_1) - \left(\tau\xi I_1 - I_0 + 2\frac{m-1}{m\tau\xi} I_1\right)\bar{\alpha}(\tau)\right] J_1(\tau\eta)\tau d\tau \qquad (1.3)$$

$$\bar{\alpha}(\tau) = \alpha'(\tau), \quad \bar{\beta}(\tau, \xi) = \beta(\tau) - \xi^2\alpha(\tau) - \frac{1}{2}\alpha''(\tau), \qquad I_p = I_p(\tau\xi)$$

Решение для внешней задачи (индекс 2) получим из (1.2), (1.3), если $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ заменим новыми неизвестными плотностями $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\beta}_1$, а I_0, I_1 — функциями Макдональда K_0, $-K_1$. При этом, в проекциях вектора напряжений знаки необходимо поменять на противоположные. Удовлетворяя граничным условиям (1.1), приходим к следующей взаимосвязанной системе парных интегральных уравнений относительно $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$:



Фиг. 1.

$$\int_0^\infty L_{11}(\tau, \xi_0) J_0(\tau\eta) d\tau = 0$$

$$\int_0^\infty L_{12}(\tau, \xi_0) J_1(\tau\eta) d\tau = 0 \quad (\eta_0 \leqslant \eta < \infty)$$

$$\int_0^\infty L_{21}(\tau, \xi_0) J_0(\tau\eta) d\tau = hf_1(\eta) \qquad (1.4)$$

$$\int_0^\infty L_{22}(\tau, \xi_0) J_1(\tau\eta) d\tau = -hf_2(\eta)$$

$$(0 \leqslant \eta < \eta_0)$$

где

$$L_{11}(\tau, \xi_0) = \frac{\tau}{\Delta}\left[\bar{\beta}(K_0 + K_1\tau^{-1}\xi_0^{-1}) - \bar{\alpha}(\tau)\tau^{-1}\left(\tau\xi_0 K_1 + K_0 + 2\frac{m-1}{m\tau\xi_0}K_1\right)\right]$$

$$L_{12}(\tau, \xi_0) = \frac{\tau}{\Delta}[\bar{\beta}K_1 - \xi_0 K_0 \bar{\alpha}(\tau)], \quad L_{21}(\tau, \xi_0) = \tau[\bar{\beta}I_1 - \xi_0 I_0 \bar{\alpha}(\tau)] \qquad (1.5)$$

$$L_{22}(\tau, \xi_0) = \bar{\beta}(\tau I_0 - \xi_0^{-1} I_1)\tau - \left(\tau^2\xi_0 I_1 - \tau I_0 + 2\frac{m-1}{m\xi_0} I_1\right)\bar{\alpha}(\tau)$$

$$\Delta = \tau^2\xi_0[(K_0)^2 - (K_1)^2] - 2\frac{m-1}{m}(K_1)^2, \quad I_p = I_p(\tau\xi_0)$$

$$K_p = K_p(\tau\xi_0), \quad \bar{\beta} = \bar{\beta}(\tau, \xi_0)$$

В соответствии с общей идеей метода парных уравнений [4] решение взаимосвязанной системы (1.4) будем искать в виде

$$L_{11}(\tau, \xi_0)=\int_0^{\eta_0}\psi(t)\sin\tau t\,dt, \quad L_{12}(\tau, \xi_0)=\int_0^{\eta_0}\varphi(t)\cos\tau t\,dt \tag{1.6}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — новые вспомогательные функции, непрерывные на отрезке $[0, \eta_0]$ вместе со своими первыми производными. Введенные интегралы тождественно удовлетворяют первым двум уравнениям системы (1.4) на основании разрывных интегралов Вебера [5] и следующего условия:

$$\int_0^{\eta_0}\varphi(t)\,dt=0 \tag{1.7}$$

Выражая из равенств (1.5), (1.6) неизвестные плотности $\bar\beta$, $\bar\alpha$ через введенные интегралы и подставляя их значения в последние два уравнения системы (1.4), приходим к системе интегро-дифференциальных уравнений фредгольмового типа относительно функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\varphi'(x)-\frac{m-4}{4m\xi_0}\psi(x)+\int_0^{\eta_0}[K_{11}(x,t)\psi(t)+K_{12}(x,t)\varphi(t)]\,dt=g_1(x)\\ \frac{1}{2}\psi'(x)+\frac{m-4}{4m\xi_0}\varphi(x)-\int_0^{\eta_0}[K_{21}(x,t)\psi(t)+K_{22}(x,t)\varphi(t)]\,dt=g_2(x)\end{gathered} \tag{1.8}$$

$$\psi(0)=0, \quad \int_0^{\eta_0}\varphi(t)\,dt=0$$

где

$$K_{11}(x,t)=\frac{27m-12}{32m}\left|\begin{matrix} t & t<x\\ x & t>x\end{matrix}\right.+\overline{K}_{11}(x,t)$$

$$K_{12}(x,t)=-\frac{3m+16}{32m\xi_0^2}\left|\begin{matrix} 2 & t<x\\ 1 & t=x\\ 0 & t>x\end{matrix}\right.+\overline{K}_{12}(x,t)$$

$$K_{21}(x,t)=-\frac{3}{32\xi_0}\left|\begin{matrix} 0 & t<x\\ 1 & t=x\\ 2 & t>x\end{matrix}\right.+\overline{K}_{21}(x,t) \tag{1.9}$$

$$K_{22}(x,t)=\frac{27m-12}{32m\xi_0^2}\left|\begin{matrix} 0 & t<x\\ x-t & t>x\end{matrix}\right.+\overline{K}_{22}(x,t)$$

$$\overline{K}_{11}(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\Big[\tau^2\xi_0^2(K_0I_0-K_1I_1)+\tau\xi_0(K_1I_0-K_0I_1)-$$

$$-2\frac{m-1}{m}K_1I_1+\frac{m-4}{4m\tau\xi_0}-\frac{27m-12}{32m\tau^2\xi_0^2}\Big]\tau\sin\tau x\sin\tau t\,d\tau$$

$$\overline{K}_{12}(x,\ t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \left[\left(\tau^2\xi_0^2 + \frac{3m-2}{m} \right) (K_0 I_1 - K_1 I_0) + 2\tau\xi_0 (K_1 I_1 - K_0 I_0) + \right.$$

$$\left. + 4\frac{m-1}{m\tau\xi_0} I_1 K_1 + \frac{1}{2} + \frac{3m+16}{16m\tau^2\xi_0^2} \right] \tau \cos\tau t \sin\tau x\, d\tau$$

$$\overline{K}_{21}(x,\ t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \left[\tau^2\xi_0^2 (I_1 K_0 - K_1 I_0) + \frac{1}{2} + \frac{3}{16\tau^2\xi_0^2} \right] \tau \sin\tau t \cos\tau x\, d\tau$$

Значение $\overline{K}_{22}(x,\ t)$ получается из $\overline{K}_{11}(x,\ t)$ путем замены функций $\sin\tau x$, $\sin\tau t$ функциями $\cos\tau x$, $\cos\tau t$. Заметим, что выражения в квадратных скобках, входящие в $\overline{K}_{ij}(x,\ t)$, имеют порядок τ^{-3} и τ^{-1} при больших значениях $\tau \gg 1$. Выделение указанных асимптотических значений в ядрах гарантирует быструю сходимость численного процесса при приближенном решении системы (1.8). После того, как $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ будут найдены, поле перемещений, например, во внешней области определяется по формулам

$$2Gu_z^{(2)} = \int\limits_0^\infty \left[\tau K_0 \alpha_1 + \left(\tau\xi \frac{\xi_0^2 + \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} K_1 - 2\frac{m-1}{m} K_0 \right) \beta_1 \right] J_0(\tau\eta)\, d\tau +$$

$$+ \eta \frac{\xi^2 - \xi_0^2}{\xi^2 + \eta^2} \int\limits_0^\infty \beta_1 K_0 J_1(\tau\eta)\, \tau\, d\tau$$

(1.10)

$$2Gu_r^{(2)} = \int\limits_0^\infty \left[\tau K_1 \alpha_1 + \left(\tau\xi \frac{\xi_0^2 + \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} K_0 + 2\frac{m-1}{m} K_1 \right) \beta_1 \right] J_1(\tau\eta)\, d\tau -$$

$$- \eta \frac{\xi^2 - \xi_0^2}{\xi^2 + \eta^2} \int\limits_0^\infty \beta_1 K_1 J_0(\tau\eta)\, \tau\, d\tau$$

где

$$\beta_1(\tau) = (I_1 - \tau\xi_0 I_0) \int\limits_0^{\eta_0} \varphi(t) \cos\tau t\, dt - \tau\xi_0 I_1 \int\limits_0^{\eta_0} \psi(t) \sin\tau t\, dt$$

$$\tau\alpha_1(\tau) = \left(\tau^2\xi_0^2 I_1 - \tau\xi_0 I_0 + 2\frac{m-1}{m} I_1 \right) \int\limits_0^{\eta_0} \varphi(t) \cos\tau t\, dt + \qquad (1.11)$$

$$+ \tau^2\xi_0^2 I_0 \int\limits_0^{\eta_0} \psi(t) \sin\tau t\, dt, \qquad I_n = I_n(\tau\xi_0), \quad K_n = K_n(\tau\xi_0)$$

Значения перемещений во внутренней области приведены в [6], [7]. Поле напряжений находится по известному полю перемещений. Ввиду громоздкости этих выражений они здесь не приводятся. Приведем выражения для проекций вектора усилий на поверхности параболоида вне разреза, полученные на основании (1.11), (1.8) и (1.3).

$$hR_n = \frac{1}{2}\frac{\varphi(\eta_0)\eta_0}{\eta_1\sqrt{\eta_1^2-\eta_0^2}} - \int_0^{\eta_0}\frac{g_1(x)\,x\,dx}{\eta\sqrt{\eta^2-x^3}} -$$

$$-\int_{\eta_0}^{\eta_1}\frac{x\,dx}{\eta_1\sqrt{\eta_1^2-x^2}}\int_0^{\eta_0}[K_{11}(x,t)\psi(t)+K_{12}(x,t)\varphi(t)]\,dt$$

$$x>t,\quad \eta_1>\eta_0 \tag{1.12}$$

$$hZ_n = \frac{1}{2}\frac{\psi(\eta_0)}{\sqrt{\eta_1^2-\eta_0^2}} - \int_0^{\eta_0}\frac{g_2(x)\,dx}{\sqrt{\eta_1^2-x^2}} +$$

$$+\int_{\eta_0}^{\eta_1}\frac{dx}{\sqrt{\eta_1^2-x^2}}\int_0^{\eta_0}[K_{21}(x,t)\psi(t)+K_{22}(x,t)\varphi(t)]\,dt$$

$$x>t,\quad \eta_1>\eta_0$$

Отсюда видно, что проекции вектора усилий имеют корневую особенность при $\eta\to\eta_0$. Для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений найдем компоненты тензора напряжений в параболоидальных координатах на поверхностях с нормалью $\bar{n}=\bar{e}_\xi$ по формулам

$$\sigma_{\xi\xi} = R_n^{(1)}\cos\alpha + Z_n^{(1)}\sin\alpha,\qquad \sigma_{\xi\eta} = R_n^{(1)}\sin\alpha - Z_n^{(1)}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \eta_1(\xi^2+\eta_1^2)^{-1/2},\qquad \sin\alpha = \xi(\xi^2+\eta_1^2)^{-1/2} \tag{1.13}$$

После этого, коэффициенты интенсивности напряжений находится из следующих соотношений [8]:

$$k_1 = \lim_{\rho_0\to 0}\sigma_{\xi\xi}\big|_{\eta_1\to\eta_0}\sqrt{2\rho_0},\quad k_2 = \lim_{\rho_0\to 0}\sigma_{\xi\eta}\big|_{\eta_1\to\eta_0}\sqrt{2\rho_0}$$

$$\rho_0 = (\eta_1-\eta_0)\sqrt{\xi_0^2+\eta_1^2} \tag{1.14}$$

В результате предельного перехода получим

$$k_1 = \frac{\eta_0\psi(\eta_0)+\xi_0\varphi(\eta_0)}{2\sqrt{\eta_0}\,(\xi_0^2+\eta_0^2)^{1/4}}$$

$$k_2 = \frac{\xi_0\varphi(\eta_0)-\eta_0\psi(\eta_0)}{2\sqrt{\eta_0}\,(\xi_0^2+\eta_0^2)^{1/4}} \tag{1.15}$$

Для исследования напряженного состояния вблизи граничной окружности параболоидального разреза введем локальную полярную систему координат (ρ,γ), как показано на фиг. 1.

Связь между параболоидальными и полярными координатами в окрестности разреза определяем следующими приближенными зависимостями:

$$(\xi-\xi_0)\sqrt{\xi^2+\eta^2}\approx\rho\sin\gamma,\quad(\eta-\eta_0)\sqrt{\xi^2+\eta^2}\approx\rho\cos\gamma \tag{1.16}$$

Подставляя (1.11) в (1.10) и осуществляя асимптотическое интегрирование точного решения вблизи граничной окружности разреза, а затем переходя к проекциям вектора перемещения на оси ρ, γ, получим

$$\begin{aligned}2Gu_\rho&\approx\frac{\sqrt{\rho}}{2\sqrt{2}}\Big\{k_1\Big[(2\varkappa-1)\cos\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{3\gamma}{2}\Big]-\\&-k_2\Big[(2\varkappa-1)\sin\frac{\gamma}{2}-3\sin\frac{3\gamma}{2}\Big]\Big\}+\ldots\\2Gu_\gamma&\approx\frac{\sqrt{\rho}}{2\sqrt{2}}\Big\{k_1\Big[\sin\frac{3\gamma}{2}-(2\varkappa+1)\sin\frac{\gamma}{2}\Big]-\\&-k_2\Big[(2\varkappa+1)\cos\frac{\gamma}{2}-3\cos\frac{3\gamma}{2}\Big]\Big\}+\ldots\end{aligned}\tag{1.17}$$

где $\varkappa=(3m-4)/m$, что соответствует плоской деформации.

При этом были использованы асимптотические значения функций Бесселя и Макдональда при $\tau\gg1$ [5], а также полученные приближенные значения интегралов следующего типа:

$$\int_0^\infty\exp(-\tau(\xi-\xi_0-i\eta_0))\,J_1(\tau\eta)\,d\tau\approx\frac{i\sqrt{h}}{\sqrt{2\rho\eta_0}}\exp\Big(i\frac{\gamma}{2}\Big)+\ldots$$

$$\int_0^\infty\exp(-\tau(\xi-\xi_0-i\eta_0))\,J_1(\tau\eta)\,\tau^{-1}\,d\tau\approx\frac{\sqrt{2\rho}}{\sqrt{\eta_0 h}}\exp\Big(-i\frac{\gamma}{2}\Big)+\ldots$$

Аналогично осуществлялось асимптотическое интегрирование компонент тензора напряжений у устья разреза. В полярной системе координат они имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_\gamma&\approx\frac{1}{2\sqrt{2\rho}}\Big[k_1(1+\cos\gamma)\cos\frac{\gamma}{2}-3k_2\sin\gamma\cos\frac{\gamma}{2}\Big]+\ldots\\\sigma_\rho&\approx\frac{1}{2\sqrt{2\rho}}\Big[k_1(3-\cos\gamma)\cos\frac{\gamma}{2}+k_2(3\cos\gamma-1)\sin\frac{\gamma}{2}\Big]+\ldots\\\sigma_{\rho\gamma}&\approx\frac{1}{2\sqrt{2\rho}}\Big[k_1\sin\gamma\cos\frac{\gamma}{2}+k_2(3\cos\gamma-1)\cos\frac{\gamma}{2}\Big]+\ldots\end{aligned}\tag{1.18}$$

На основании известных критериев хрупкого разрушения материалов [8] и использования формул (1.17), (1.18) определяются предельные нагрузки и начальное направление распространения трещины. Например, согласно критерию максимальных растягивающих напряжений угол начального направления распространения трещины находится по формуле [9]

$$\gamma_* = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{k_1 - \sqrt{k_1^2 + 8k_2^2}}{4k_2} \tag{1.19}$$

а критическое значение нагрузки — из соотношения

$$\cos^3\frac{\gamma_*}{2}\left(k_1 - 3k_2\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma_*}{2}\right) = \frac{k_{1c}}{\sqrt{\pi}} \tag{1.20}$$

Рассмотрим всестороннее растяжение упругого пространства на бесконечности. В этом случае поверхности разреза будут испытывать давление интенсивности q. В правых частях системы уравнений (1.8) будут стоять функции

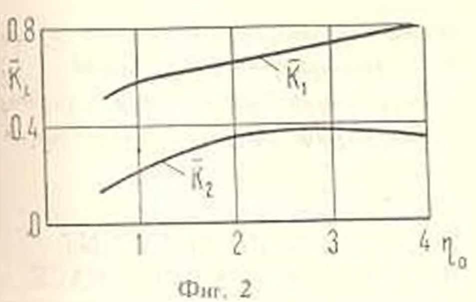
$$g_1(x) = 4qx/\pi, \quad g_2(x) = 2q/\pi \tag{1.21}$$

Для решения системы применялся конечно-разностный метод, вследствие чего задача была приведена к системе алгебраических уравнений.

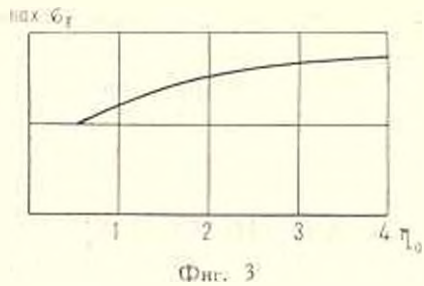
На фиг. 2 показана зависимость коэффициентов напряжений $\overline{k}_1 = k_1 q^{-1}$, $\overline{k}_2 = -k_2 q^{-1}$ от величины разреза при $\xi_0 = 1$, $m = 3$.

Из графика видно, что при увеличении разреза $\overline{k}_1$ возрастает, а $\overline{k}_2$ достигает наибольшего значения по модулю при $\eta_0 \approx 2{,}7$.

На фиг. 3 представлено значение максимального растягивающего напряжения при различных η и $\xi_0 = 1$, $m = 3$.



Фиг. 2

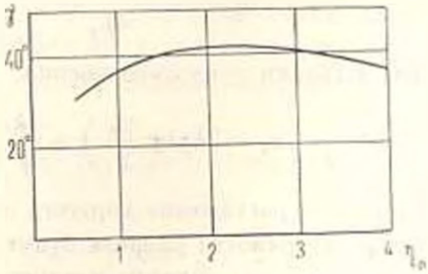


Фиг. 3

Исходя из критерия максимальных растягивающих напряжений, можно сделать вывод, что при рассматриваемой нагрузке и данной геометрии объемлющая трещина ($\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_2$) параболоидной формы более опасная, чем объемлемая ($\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_1$, $\eta_1 < \eta_2$). Этого нельзя сказать относительно трещин, например, сферической формы [7], [10], где $\max \sigma_\tau$ возрастают только при увеличении разреза до определенного значения. Отсюда видно существенное влияние кривизны поверхности трещин на напряженное состояние тела, а следовательно, и на оценку его прочности.

На фиг. 4 даны значения предполагаемых начальных углов разрушения γ_* в зависимости от геометрии разреза.

В заключение заметим, что полученные решения осесимметричных задач о параболоидальной и сферической трещинах в упругих телах можно применить для оценки прочности тела с трещинами более сложной геометрии.



Фиг. 4.

В этом случае реальную трещину следует заключить между трещинами сферической и параболоидальной формы и получить двустороннюю оценку предельных нагрузок.

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ՊԱՐԱԲՈԼՈԻԴԱՁԵՎ ՃԱՔԻ ՄՈՏ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԿՈՆՑԵՆՏՐԱՑԻԱՅԻ ՄԱՍԻՆ

Մ. Ա. ՄԱՐՏԻՆԵՆԿՈ, Ա. Ֆ. ՈՒԼԻՏԿՈ

Ամփոփում

Լուծվել է առաձգականության տեսության առանցքասիմետրիկ խնդիր պարաբոլոիդաձև ճաքով տարածության հավասարակշռության մասին։

Թվային արդյունքներ ստացվել են այն դեպքի համար, երբ կտրվածքի մակերևույթները բեռնավորված են հավասարաչափ բաշխված ճնշումով։

ON THE CONCENTRATION OF TENSION ADJACENT TO THE PARABOLIC FRACTURE IN AN ELASTIC SPACE

M. A. MARTINENKO, A. F. ULITKO

Summary

The axial symmetrical problem of the theory of elasticity in space equilibrium with fracture of paraboloidal form has been solved. Numerical results were obtained for the case of loading of the section surface by equal pressure.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куценко Г. В., Улитко А. Ф.* Равновесие упругого пространства, ослабленного параболоидальным разрезом.— ДАН УССР, сер. А, 1976, № 2, с. 144—148.
2. *Мартыненко М. А.* К исследованию напряженного состояния упругого пространства, ослабленного параболоидальным разрезом. В кн. «Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебры». Киев: Наукова думка, 1978, с. 181—184.
3. *Улітко А. Т.* Осесиметрична деформація пружного параболоїда обертання.— Доп. АН УССР, сер. А, 1968, № 12.
4. *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977, 220 с.
5. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949, 798 с.
6. *Улитко А. Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наукова думка, 1979, 264 с.
7. *Скрипка В. И., Улитко А. Ф.* Равновесие упругого параболоида вращения, нагруженного в вершине осевой сосредоточенной силой.— ПМ, 1973, 9, № 5, с. 10—15.
8. Разрушение. Ред. Г. Либовиц, т. 2. М.: Мир, 1975, 763 с.
9. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976, 443 с.
10. *Мартыненко М. А., Улитко А. Ф.* Напряженное состояние вблизи вершины сферического разреза в неограниченной упругой среде.— ПМ, 1978, 14, № 9, с. 15—23.

Киевский технологический институт пищевой промышленности
Киевский госуниверситет

Поступила в редакцию 8.V.1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVI, № 1, 1983 Механика

ПРОНИКАНИЕ ТОНКОГО КОНУСА В ВЕСОМУЮ ЖИДКОСТЬ С ПУЗЫРЬКАМИ

АВАГЯН С. Г.

§ 1. Газожидкостные смеси встречаются в технике в разном виде. В данной статье рассматривается задача проникания тонкого конуса в весомую жидкость с пузырьками. Найдены потенциал скоростей, давление внутри жидкости и сила сопротивления. Построены графики зависимости силы сопротивления от параметра $\varphi = t/\sqrt{\varkappa}$, где параметр $\varkappa$ характеризует пузырьки.

Для получения уравнения движения газожидкостной смеси использованы основные уравнения движения идеального газа в предположении, что термодинамические изменения в пузырьках являются изотермическими и что пузырьки движутся локально вместе с жидкостью [5]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\right) = 0, \quad \rho \approx \rho_f(1-\alpha)$$

$$p = p_r - \rho_f\left[R\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right] \tag{1.1}$$

$$\frac{\rho_f(1-\alpha)}{p_r} = \text{const}, \qquad p_r R^3 = \text{const}$$

Здесь u, v, p, ρ — возмущения компонент вектора скорости в направлении осей z, r, давление и плотность, t — время, α — объемная концентрация газа, g — ускорение силы тяжести, p_r — давление пузырька, ρ_f — плотность жидкой фазы, R — радиус пузырька. Поверхностным натяжением пренебрегается. Уравнения (1.1) можно свести к одному уравнению для функции φ (где $u = \partial\varphi/\partial z$, $v = \partial\varphi/\partial r$), если обозначим возмущения параметров ρ, R, p_r, α через ρ_0, R_0, p_{r_0}, α_0 соответственно. В силу малости концентрации α_0 в шестом уравнении (1.1) в формуле для плотности пренебрегается слагаемое, соответствующее газовой фазе. Тогда линеаризованные уравнения примут вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\right) = 0 \tag{1.2}$$

$$p = p_r - \rho_0 R_0 \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} \tag{1.3}$$

Из (1.3) и соотношения $p_r R^3 = p_{r_0} R_0^3$ следует, что

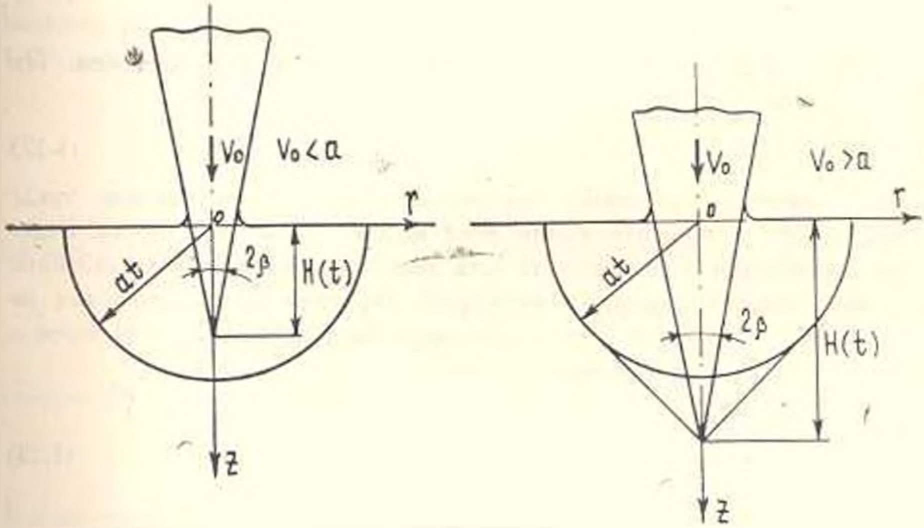
$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p_r}{\partial t} + \frac{\rho_0 R_0^2}{3 p_{r_0}} \frac{\partial^3 p_r}{\partial t^3} \tag{1.4}$$

Согласно (1.1) $\partial\rho/\partial t = -\rho_f(\partial\alpha/\partial t)$, и уравнение (1.2) примет вид

$$-\rho_f \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 \tag{1.5}$$

Учитывая условие $\dfrac{\rho_f (1-\alpha)}{p_r \alpha} = \text{const}$, имеем

$$\frac{1}{p_{r_0}} \frac{\partial p_r}{\partial t} + \frac{1}{\alpha_0 (1-\alpha_0)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0 \tag{1.6}$$



Фиг. 1

Решая совместно уравнения (1.5) и (1.6), получим

$$\frac{\rho_f (1-\alpha_0)\alpha_0}{p_{r_0}} \frac{\partial p_r}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 \tag{1.7}$$

Используя интеграл Коши-Лагранжа $p = -\rho(\partial\varphi/\partial t) + \rho g z$, будем иметь

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{1.8}$$

Из (1.4), (1.7) и (1.8) получим уравнение

$$\left(1 + \frac{\rho_0 R_0^2}{3 p_{r_0}} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{\rho_f (1-\alpha_0)\alpha_0}{p_{r_0}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Обозначим [2] $\frac{\gamma_f(1-\varepsilon_0)\varkappa_0}{p_{r_0}} = \frac{1}{a^2}$, где a — скорость звука в невозмущенной жидкости. Обозначая еще $\varkappa = \frac{\gamma_0 R_0^2}{3p_{r_0}}$, причем $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$ есть частота свободных пульсаций пузырька [5], получим

$$\left(1 + \varkappa\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Delta\varphi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{1.9}$$

где Δ — оператор Лапласа. Для нахождения потенциала скоростей φ, кроме уравнения (1.9), имеем еще следующие граничные условия на свободной поверхности и на теле соответственно:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - g\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0 \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \dot{H}(t)\beta \tag{1.11}$$

где $\dot{H}(t)$ — скорость проникания конуса, β — угол полураствора. Так как задача линеаризована, то можно полагать

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \tag{1.12}$$

где φ_0 соответствует решению о движении тела в безграничной среде $-\infty < z < \infty$, а φ_1 — отражению волн от свободной поверхности. Задачу решаем методом источников, то есть действие конуса на воду заменяем действием концентрированных импульсов давления, прикладываемых по оси тела. Метод сочетаем с интегральными преобразованиями. φ_0 ищем в виде потенциала запаздывающих источников

$$\varphi_0 = -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{q(z_1, t')}{R^*}\,dz_1 \tag{1.13}$$

где $t' = t - R^*/a$ — запаздывающее время, $R^* = \sqrt{(z_1 - z)^2 + r^2}$. Применяя преобразование Лапласа, из (1.9) получим

$$(1 + \varkappa S^2)\,\Delta\bar{\varphi} - (S^2/a^2)\,\bar{\varphi} = 0 \tag{1.14}$$

Рассматриваем решение для отдельных источников φ^0, то есть

$$\varphi = \int_0^\infty \varphi^0 dz_1 \tag{1.15}$$

Имея в виду (1.14), для изображения $\bar{\varphi}_0^0$ имеем

$$\bar{\varphi}^0_0 = -\frac{\overline{q(z_1, t)}\exp(\theta R^*)}{4\pi R^*} \tag{1.16}$$

где

$$\theta = -S/a\,(1 + \varkappa S^2)$$

В силу известного равенства

$$\frac{\exp(\theta R^*)}{R^*}=\int_0^\infty \frac{k\exp[-|z_1-z|\lambda]}{\lambda}J_0(kr)\,dk$$

Тогда для φ_0^0 будем иметь

$$\bar{\varphi}_0^0=-\frac{\overline{q(z_1,\,t)}}{4\pi}\int_0^\infty \frac{k\exp[-|z_1-z|\lambda]}{\lambda}J_0(kr)\,dk \qquad (1.17)$$

Изображение отраженных поля φ_1^0 ищем в виде

$$\bar{\varphi}_1^0=\int_0^\infty \frac{k\exp[-(z_1+z)\lambda]}{\lambda}AJ_0(kr)\,dk \qquad (1.18)$$

Применяя преобразование Лапласа к (1.10), (1.12) и имея в виду (1.17), (1.18), найдем значение A. Подставляя значение A в (1.18), будем иметь

$$\bar{\varphi}_1^0=\int_0^\infty \frac{\overline{q(z_1,\,t)}}{4\pi}\,\frac{k\exp[-(z_1+z)\lambda]}{\lambda}\,\frac{S^2-g\lambda}{S^2+g\lambda}J_0(kr)\,dk \qquad (1.19)$$

где через λ обозначено $\lambda=\sqrt{k^2+\theta^2}$. Как известно [3], при $r\to 0$ имеем

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r\to 0}=\frac{1}{2\pi}\,\frac{q(z,\,t')}{r}+0(q)$$

Тогда из (1.11) получится

$$q(z_1,\,t')=2\pi\beta^2H(H-z_1) \qquad (1.20)$$

Для простоты принимаем, что проникание происходит с постоянной скоростью. Для нахождения $\bar{\varphi}_1^0$ разложим (1.19) в ряд по степеням $g\lambda/S^2$, тогда получим

$$\bar{\varphi}_1^0=-\int_0^\infty \frac{\overline{q(z_1,\,t)}}{4\pi}\,\frac{k\exp[-(z_1+z)\lambda]}{\lambda}J_0(kr)\,dk+$$

$$+\int_0^\infty \frac{2\overline{q(z_1,\,t)}}{4\pi}\,\frac{k\exp[-(z_1+z)\lambda]}{\lambda}J_0(kr)\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\left(\frac{g\lambda}{S^2}\right)^n dk$$

Обозначая значение $\bar{\varphi}_1^0$ при $g=0$ через Φ_1^0, получим

$$\bar{\varphi}_1^0=\bar{\Phi}_1^0+\frac{2g}{S^2}\frac{\partial\bar{\Phi}_1^0}{\partial z}+\frac{2g^2}{S^4}\frac{\partial^2\bar{\Phi}_1^0}{\partial z^2}+\dots$$

где $$\overline{\Phi}_1^0 = \frac{\overline{q(z_1, t)}}{4\pi} \frac{\exp(\theta R_0^*)}{R_0^*}, \qquad R_0^* = \sqrt{(z_1 + z)^2 + r^2}$$

Начиная с некоторого момента времени, можно полагать $t/\sqrt{\varkappa} \gg 1$, отсюда $\varkappa S^2 \ll 1$, то есть время t значительно больше периода свободных пульсаций пузырька и

$$\exp(\theta R_0^*) = \exp\left(-S\frac{R_0^*}{a}\right)\exp\left(-\varkappa S^3 \frac{R_0^*}{a}\right) \approx$$

$$\approx \left(1 - \varkappa S^3 \frac{R_0^*}{a}\right)\exp\left(-S\frac{R_0^*}{a}\right)$$

Значит

$$\overline{\Phi}_1^0 = \frac{\overline{q(z_1, t)}}{4\pi R_0^*}\left(1 - \varkappa S^3 \frac{R_0^*}{a}\right)\exp\left(-S\frac{R_0^*}{a}\right)$$

Отсюда, после обратного преобразования, получим

$$\Phi_1^0 = \frac{\beta^2 v_0^2}{2R_0^*}\mu_0 + \frac{\beta^2 v_0^2}{2a}\cos\sqrt{\frac{1}{\varkappa}}\,\mu_0$$

где

$$\mu_0 = t - \frac{z_1}{v_0} - \frac{R_0^*}{a}$$

Из (1.16) следует

$$\varphi_0^0 = -\frac{\beta^2 v_0^2}{2R^*}\mu - \frac{\beta^2 v_0^2}{2a}\cos\sqrt{\frac{1}{\varkappa}}\,\mu \tag{1.21}$$

где

$$\mu = t - \frac{z_1}{v_0} - \frac{R^*}{a}$$

Для нахождения φ_1^0 используем теорему о свертке. Имея в виду (1.12) и обозначая $\nu = 1/\sqrt{\varkappa}$, найдем

$$\varphi^0 = -\frac{\beta^2 v_0^2}{2R^*}\mu - \frac{\beta^2 v_0^2}{2a}\cos(\nu\mu) + \frac{\beta^2 v_0^2}{2R_0^*}\mu_0 + \frac{\beta^2 v_0^2}{2a}\cos(\nu\mu_0) +$$

$$+ \beta^2 v_0^2 g \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_0^*}\right)\left[\frac{1}{2}\mu_0^2\left(t - \frac{z_1}{v_0}\right) - \frac{1}{3}\mu_0^3\right] + \frac{\beta^2 v_0^2 g \varkappa}{a}\frac{\partial}{\partial z}[1 - \cos(\nu\mu_0)] \tag{1.22}$$

Из (1.15) для $\partial\varphi/\partial t$ получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\int_0^{\alpha}\frac{\beta^2 v_0^2}{2R^*}\,dz_1 + \int_0^{\alpha}\frac{\beta^2 v_0^2 \nu}{2a}\sin(\nu\mu)\,dz_1 + \int_0^{\gamma}\frac{\beta^2 v_0^2}{2R_0^*}\,dz_1 -$$

$$-\frac{\beta^2 v_0^2 \nu}{2a}\int_0^{\gamma}\sin(\nu\mu_0)\,dz_1 + \frac{\beta^2 v_0^2 g}{2}\int_0^{\gamma}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_0^*}\right)\left[\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^2 -\right.$$

$$\left. -\left(\frac{R_0^*}{a}\right)^2\right] dz_1 + \frac{\beta^2 v_0^2 g}{a\nu}\int_0^{\gamma}\frac{\partial}{\partial z}\sin(\nu\mu_0)\,dz_1 \qquad (1.23)$$

где α и γ — пределы интегрирования, даваемые соотношениями [3] для сжимаемой жидкости для дозвукового проникания

$$\alpha = v_0\,\frac{at+z}{a+v_0}, \qquad \gamma = v_0\,\frac{at-z}{a+v_0}$$

Из (1.23), обозначая $q = a(v_0t+z)/z(a+v_0)$, получим на конусе

$$r = \beta(v_0t - z)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\beta^2 v_0^2}{2}\ln\frac{4az}{\beta^2(a+v_0)(v_0t-z)} + \frac{\beta^2 v_0^2}{2}\ln q +$$

$$+\frac{\beta^2 v_0^3}{2(a+v_0)}\left[\cos 2\nu\left(t+\frac{z}{a}\right) - \cos\nu\left(t+\frac{z}{a}\right) - \cos 2\nu\left(t-\frac{z}{a}\right) +\right.$$

$$\left. +\cos\nu\left(t-\frac{z}{a}\right)\right] + \frac{\beta^2 v_0^2 g}{2}\left[\frac{2t}{v_0}\ln q - \frac{(t-z/a)^2}{\sqrt{z^2+\beta^2(v_0t-z)^2}} +\right.$$

$$+\frac{t}{a}\ln q^2 - \frac{2(at-z)}{v_0(a+v_0)} + \frac{2z}{v_0^2}\ln q - \frac{4(at-z)}{a(a+v_0)} - \frac{2v_0(at-z)}{a^2(a+v_0)} +$$

$$\left. +\frac{2z}{av_0}\ln q\right] + \frac{\beta^2 v_0^2 g}{a\nu}\left[\sin 2\nu\left(t-\frac{z}{a}\right) - \sin\nu\left(t-\frac{z}{a}\right)\right] \qquad (1.24)$$

Давление внутри жидкости найдется по формуле

$$\frac{p}{\rho_0} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} + gz - \frac{\beta^2 v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0}$$

Сила сопротивления через давление $P = p - p_0$ выражается по формуле

$$Q = \int_0^{v_0t} P2\pi\beta^2(v_0t-z)\,dz = -2\pi\rho_0\beta^2\int_0^{v_0t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - gz + \frac{\beta^2 v_0^2}{2}\right)(v_0t - z)\,dz \qquad (1.25)$$

Соотношения (1.24) и (1.25) дают

$$Q = -2\pi\rho_0\beta^4 v_0^4 t^2\left\{\frac{1+\ln 4\beta^2}{4} + \frac{\gamma_1}{4}\left[(M+2)\ln\frac{16}{1+M} + \frac{8}{3} - 2\ln\frac{2}{\beta} +\right.\right.$$

$$+\frac{2}{3}(1+M)\ln\frac{2}{1+M}-\frac{5}{3}(2+M)\ln 2+\frac{M^3+4M^2-3M-6}{3(1+M)}-$$

$$-\frac{2}{3\beta^2}\Bigg|+\frac{1}{2\psi^2(1+M)}\Bigg|2M\psi\sin\psi-M\psi\sin 2\psi-\frac{1}{4}\cos 2\psi(1+M)+$$

$$+\cos\psi(1+M)+\frac{1}{4}\cos 2\psi(1-M)-\cos\psi(1-M)\Bigg|+$$

$$+\frac{\eta}{M\psi^2}\Bigg|\frac{1}{4}\sin 2\psi-\frac{M\psi}{2}\cos 2\psi-$$

$$-\frac{1}{4}\sin 2\psi(1-M)+M\psi\cos\psi+\sin\psi(1-M)-\sin\psi\Bigg|\Bigg\} \quad (1.26)$$

где

$$M=\frac{v_0}{a},\qquad \eta=\frac{gt}{v_0},\qquad \psi=\frac{t}{\sqrt{\varkappa}}$$

Подставляя в (1.26) $M=0$, получим силу сопротивления для несжимаемой жидкости

$$Q=-2\pi\rho_0\beta^4v_0^4t^2\left[\frac{1+\ln 4\beta^2}{4}-\frac{\eta}{2}\left(\ln\frac{2}{\beta}-\frac{8}{3}\ln 2-\frac{1}{3}+\frac{1}{3\beta^2}\right)\right]$$

§ 2. Рассмотрим проникание со сверхзвуковой скоростью. Для $z<at$ давление можно вычислить по той же формуле, что и для дозвукового проникания. Для $at<z<v_0t$ в связи с тем, что свободная поверхность не влияет на этот участок, пренебрегаем слагаемыми, содержащими g, и предполагаем, что также можно пренебречь $\varkappa$. На этом участке давление на теле вычисляется по формуле

$$p=\frac{1}{2}\rho_0\beta^2v_0^2\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{dz_1}{\sqrt{(z_1-z)^2+r^2}}=\frac{1}{2}\rho_0v_0^2\beta^2\ln\frac{4}{\beta^2(M^2-1)}$$

где [3]

$$\xi_1=v_0\frac{z-at}{v_0-a},\qquad \xi_2=v_0\frac{at+z}{v_0+a}$$

Для силы сопротивления будем иметь

$$Q=-2\pi\rho_0\beta^2\left\{\int_0^{at}(v_0t-z)\frac{\partial\varphi}{\partial t}dz-\int_{at}^{v_0t}\frac{\beta^2v_0^2}{2}(v_0t-z)\ln\frac{4}{\beta^2(M^2-1)}dz-\right.$$

$$\left.-\frac{gv_0^3t^3}{6}+\frac{v_0^4t^2\beta^2}{4}\right\}=-2\pi\rho_0\beta^4v_0^4t^2\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln\frac{2}{\beta}+\frac{1}{2}\ln\frac{(1+M)^2}{M}-\right.$$

$$-\frac{\eta}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\beta^2}-\frac{M}{6}\right)+\frac{1}{2M\psi^2(1+M)}\left(\frac{M\psi}{2}\sin 4\psi-\frac{\psi}{2}\sin 4\psi-\right.$$

$$-2M\psi\sin 2\psi-\frac{1}{4}\cos 4\psi+\cos 2\psi+\psi\sin 2\psi+$$

$$+2M\psi\sin\psi-\frac{3}{4}\Big)+\frac{\eta}{M\psi^{3}}\Big[-\frac{\psi}{2}(M-1)-\frac{M\psi}{2}\cos 2\psi+$$

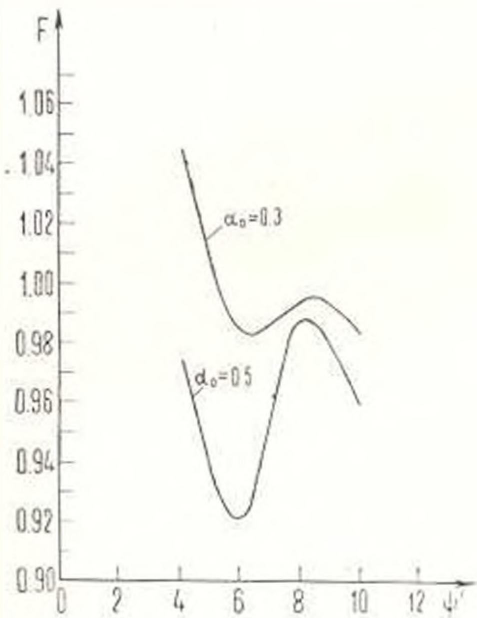
$$+\frac{1}{4}\sin 2\psi+M\psi\cos\psi-\sin\psi\Big]\Big\}$$

При $M=1$

$$Q=-2\pi\rho_0\beta^4v_0^4t^2\Big\{\frac{1+\ln 4\psi^2}{4}+\frac{\eta}{2}\Big(\ln 2\beta+1-\frac{1}{3\psi^2}\Big)+$$

$$+\frac{1}{4\psi^2}\Big(2\psi\sin\psi+\cos 2\psi-\psi\sin 2\psi-\frac{1}{4}\cos 4\psi-\frac{3}{4}\Big)+$$

$$+\frac{\eta}{\psi^3}\Big(\frac{1}{4}\sin 2\psi-\frac{\psi}{2}\cos 2\psi+\psi\cos\psi-\sin\psi\Big)\Big\}$$



Фиг. 2.

На фиг. 2 для разных α_0 и для $M=1$ приведены графики зависимости $F(\psi')$, где $\psi'=t/\sqrt{\kappa'}$, $\kappa'=\kappa/(1-\alpha_0)$, $\psi=\psi'/\sqrt{1-\alpha_0}$. Из фиг. 2 следует, что с увеличением α_0 безразмерная сила сопротивления $F=\dfrac{Q}{2\pi\rho_0\beta^4v_0^4t^2}$ уменьшается. Как видно из фиг. 2, для больших ψ' имеет место колебательное изменение силы от времени проникания.

Автор выражаеѣ глубокую благодарность А. Г. Багдоеву за помощь и обсуждение работы.

ԲԱՐԱԿ ԿՈՆԻ ԹԱՓԱՆՑՈՒՄԸ ԿՇԻՌ ՈՒՆԵՑՈՂ ՊՂՊՋԱԿԱՎՈՐ ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԵՋ

Ս. Գ. ԱՎԱԳՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է բարակ կոնի թափանցման խնդիրը կշիռ ունեցող պղպջակավոր հեղուկի մեջ։ Որոշված են արագության պոտենցիալը, ճնշումը հեղուկի մեջ և դիմադրության ուժը։ Բերված են դիմադրության ուժի $\tau = t/\sqrt{\varkappa}$ պարամետրից կախվածության գրաֆիկները, որտեղ t-ն ժամանակն է, պարամետր $\varkappa$-ն բնութագրում է պղպջակները։

PENETRATION OF A THIN CONE IN PONDERABLE FLUID WITH BUBBLES

S. G. AVAGIAN

S u m m a r y

The problem of penetration of a thin cone in ponderable fluid with bubbles is considered. The velocity potential, pressure in fluid and resistance force are determined.

The graphs of resistance force are given depending on the parameter $\tau = t/\sqrt{\varkappa}$, where t is time while parameter $\varkappa$ characterises the bubbles.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г., Оганян Г. Г.* Распространение модулированных нелинейных волн в релаксирующей газожидкостной смеси. Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 1.
2. *Ван Вейнгарден Л.* Некоторые проблемы составления уравнений для газожидкостных течений. Тр. XIV Международного конгресса. М.: Мир, 1979.
3. *Сагомонян А. Я.* Проникание. Изд-во Моск. ун-та, 1974.
4. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Изд-во Наука, 1965.
5. *Ван Вейнгарден Л.* Одномерное течение жидкостей с пузырьками газа. Реология суспензий. М.: Мир, 1975.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
20. X. 1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 1, 1983 Механика

МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ В ЗАДАЧАХ О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

АЛЕКСАНДРОВ В. М., СТРЕЛЬНИКОВ Г. П.

Исследуется динамика взаимодействия тонкой цилиндрической оболочки с идеальной сжимаемой жидкостью. Рассматриваются следующие задачи:

1) задача о вынужденных колебаниях оболочки конечной длины, защемленной в бесконечном цилиндрическом экране и помещенной в бесконечную акустическую среду;

2) задача о вынужденных колебаниях оболочки конечной длины, защемленной в бесконечном цилиндрическом экране и содержащей внутри себя жидкости;

3) задача о вынужденных колебаниях оболочки конечной длины без доньев, помещенной в бесконечную акустическую среду.

Указанные задачи с помощью интегрального преобразования Фурье сведены а) к интегро-дифференциальным уравнениям относительно комплексной амплитуды прогиба оболочки (задачи 1 и 2), б) к системе дифференциального интегрального уравнения относительно амплитуды прогиба оболочки и контактного давления на ее поверхности (задача 3). Далее, в отличие от известных методов [1—3] решения подобных задач, в работе предлагается единый подход, основанный на использовании метода специальных [4—5] и классических [6—7] ортогональных многочленов. Это позволило достаточно просто получить эффективные формулы для определения комплексной амплитуды прогиба оболочки, потенциала скорости и функции направленности. Для задачи 3), которая является задачей со смешанными краевыми условиями, такие результаты, по-видимому, получены впервые. Рассмотрены некоторые числовые примеры.

1. *Постановка задач.* Уравнение осесимметричных гармонических изгибных колебаний тонкой упругой цилиндрической оболочки относительно комплексной амплитуды прогиба W имеет следующий вид [8]:

$$DW^{\mathrm{IV}}(x) + TW^{\mathrm{II}}(x) + \left(\frac{Eh}{a^2} - \rho h\omega^2\right) W(x) = \pm p(x) \mp q(x) \qquad (1.1)$$

Здесь $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$, E, ν — упругие постоянные, h, a — толщина и радиус оболочки, ρ — плотность материала оболочки, ω — частота колебаний, T — сжимающее (растягивающее) усилие, действующее вдоль оси x, p — давление жидкости на оболочку, q — действующая нагрузка. Верхний знак соответствует давлению на внешнюю поверхность оболочки, нижний — давлению на внутреннюю. Здесь и далее предполагается, что все функции имеют гармоническую зависимость по времени вида $f(x, t) = f(x)\,e^{i\omega t}$. Движение идеальной сжимаемой жидкости, вызванное колебаниями оболочки, определяется потенциалом скорости, амплитуда φ которого удовлетворяет в цилиндрической системе координат уравнению Гельмгольца [9]

$$\Delta\varphi(r, x) + k^2\varphi(r, x) = 0 \tag{1.2}$$

где $k = \omega/c$ — волновое число, c — скорость звука в жидкости. Будем рассматривать следующие задачи взаимодействия упругой оболочки с жидкостью.

Задача 1. Оболочка защемлена в жесткий цилиндрический экран бесконечной длины, помещена в безграничную идеальную-сжимаемую жидкость и возбуждается нагрузкой, действующей на внутреннюю поверхность. Предполагается, что действующее продольное усилие — сжимающее ($T > 0$).

Задача описывается уравнениями (1.1), (1.2), граничными условиями

$$W(\pm b) = W'(\pm b) = 0 \tag{1.3}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = \begin{cases} -i\omega W(x), & |x| \leqslant b \\ 0, & |x| > b \end{cases} \tag{1.4}$$

и условиями излучения на бесконечности

$$\varphi = O(1/\sqrt{r}), \qquad \lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} + ik\varphi\right) = 0 \tag{1.5}$$

Решение уравнения (1.2) ищем в форме интеграла Фурье [10]

$$\varphi(r, x) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma A(\eta)\,H_0\left(\sqrt{k^2 - \eta^2}\,r\right) e^{-i\eta x}\,d\eta \tag{1.6}$$

Неизвестная функция $A(\eta)$ определяется из условия (1.4)

$$A(\eta) = \frac{i\omega W_*(\eta)}{H_1\left(\sqrt{k^2 - \eta^2}\,a\right)\sqrt{k^2 - \eta^2}} \tag{1.7}$$

Здесь $H_\nu(x)$ — функция Ханкеля второго рода порядка ν, $W_*(\eta)$ — трансформанта Фурье функции $W(x)$, контур Γ в соотношении (1.6) совпадает с вещественной осью, обходя точку ветвления $-k$ снизу, а $+k$ — сверху в области комплексного переменного $\eta + i\eta'$.

Используя обращение преобразования Фурье и соотношение (1.7) для потенциала скорости, получим

$$\varphi(r, x) = \frac{i\omega}{2\pi}\int_{-b}^{b} W(u)\,du \int_\Gamma \frac{H_0\left(\sqrt{k^2 - \eta^2}\,r\right) e^{-i\eta(x-u)}}{H_1\left(\sqrt{k^2 - \eta^2}\,a\right)\sqrt{k^2 - \eta^2}}\,d\eta \tag{1.8}$$

Далее нам понадобится связь между давлением и потенциалом скорости [9]

$$p(r,\ x) = -i\omega\rho_*\varphi(r,\ x) \tag{1.9}$$

где ρ_* — плотность жидкости.

Определяя акустическое давление на поверхности оболочки с помощью равенств (1.8) и (1.9) и подставляя его в (1.1), получим интегро-дифференциальное уравнение относительно комплексной амплитуды прогиба оболочки, записанное в безразмерных переменных

$$D_*\overline{W}^{\mathrm{IV}}(z) + T_*\overline{W}^{\mathrm{II}}(z) + P_*\overline{W}(z) = \pm F_*\int_{-1}^{1} W(y)\,L\left(\frac{y-z}{\lambda}\right)dy + \overline{q}(z) \tag{1.10}$$

с граничными условиями

$$\overline{W}(\pm 1) = \overline{W}'(\pm 1) = 0 \tag{1.11}$$

где

$$\overline{W} = aW,\ x = bz,\ u = by,\ D_* = \frac{\mu^2\lambda^4}{12(1-\nu^2)},\ \lambda = \frac{a}{b}$$

$$\eta = \frac{h}{a},\ \ T_* = \frac{T\lambda^2}{aE},\ \ \overline{q} = \frac{q}{E},\ \ F_* = \frac{\alpha R_* k_*^2}{\pi\lambda}$$

$$\alpha = \frac{c^2\rho_*}{E},\ \ R_* = \frac{\rho_*}{\rho},\ \ k_* = ka,\quad P_* = \mu(1 - \alpha k_*^2)$$

$$L(t) = \int_0^\infty \frac{H_0(\sqrt{k_*^2-\xi^2})\cos\xi t}{H_1(\sqrt{k_*^2-\xi^2})\sqrt{k_*^2-\xi^2}}\,d\xi \tag{1.12}$$

Задача 2. Оболочка защемлена в жесткий цилиндрический экран бесконечной длины, содержит внутри себя идеальную сжимаемую жидкость и возбуждается нагрузкой, действующей на внешнюю поверхность. Предполагается, что продольное усилие — растягивающее ($T < 0$). Задача описывается уравнениями (1.1), (1.2) и граничными условиями (1.3), (1.4). Ограниченное при $r = 0$ решение задачи акустики имеет вид [10]

$$\varphi(r,\ x) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma A(\eta)J_0(\sqrt{k^2-\eta^2}\,r)\exp(-i\eta x)\,d\eta \tag{1.13}$$

Определяя $A(\eta)$ из граничного условия (1.4), получим для потенциала скорости выражение

$$\varphi(r,\ x) = \frac{i\omega}{2\pi}\int_{-b}^{b} W(u)\,du\int_\Gamma \frac{J_0(\sqrt{k^2-\eta^2}\,r)\exp(-i\eta(x-u))}{J_1(\sqrt{k^2-\eta^2}\,a)\sqrt{k^2-\eta^2}}\,d\eta \tag{1.14}$$

Здесь $J_\nu(x)$ — функция Бесселя порядка ν, контур Γ совпадает с действительной осью, обходя полюса $-k$ и $+k$ соответственно снизу и сверху в области комплексного переменного $\eta + i\eta'$. Используя соотношения (1.9), (1.14) и процедуру, изложенную выше, получим интегро-дифференциальное уравнение изгибных колебаний оболочки относительно $\overline{W}(z)$, имеющего вид (1.10) с ядром

$$L(t) = \int_0^\infty \left[\frac{J_0(\sqrt{k_*^2 - \xi^2})}{J_1(\sqrt{k_*^2 - \xi^2})\sqrt{k_*^2 - \xi^2}} - \frac{2}{k_*^2 - \xi^2} \right] \cos t\xi \, d\xi + \frac{\pi i \exp(-i|t|k_*)}{k_*} \tag{1.15}$$

где последнее слагаемое в равенстве (1.15) представляет половину вычета в полюсе.

Задача 3. Оболочка без доньев помещается в бесконечную идеальную жидкость и возбуждается нагрузкой, действующей на внутреннюю поверхность. Предполагается, что оболочка короткая, то есть λ — велико, продольное усилие отсутствует ($T = 0$). Задача описывается уравнениями (1.1), (1.2) и граничными условиями

для оболочки
$$W''(\pm b) = W'''(\pm b) = 0 \tag{1.16}$$

для жидкости
$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = -i\omega W(x), \quad |x| < b \tag{1.17}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right|_{r=a} = \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_{r=a}, \quad |x| < \infty \tag{1.18}$$

$$p_1|_{r=a} = p_2|_{r=a}, \quad |x| > b \tag{1.19}$$

На бесконечности выполняется условие (1.5).

Здесь

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1, & 0 \leqslant r \leqslant a \\ \varphi_2, & r > a \end{cases}$$

Давления $p_{1,2}$ связаны с потенциалами скорости $\varphi_{1,2}$ соотношением (1.9).

Решения задачи акустики φ_1, φ_2, удовлетворяющие уравнению (1.1) и граничному условию (1.5), будем искать, используя интегральное преобразование Фурье в форме

$$\varphi_1(r, x) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma A(\eta) \frac{H_1(\sqrt{k^2 - \eta^2}\, a)}{J_1(\sqrt{k^2 - \eta^2}\, a)} J_0(\sqrt{k^2 - \eta^2}\, r) \exp(-i\eta x) \, d\eta \tag{1.20}$$

$$\varphi_2(r, x) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma A(\eta) H_0(\sqrt{k^2 - \eta^2}\, r) \exp(-i\eta x) \, d\eta \tag{1.21}$$

Контур Γ совпадает с вещественной осью, обходя особую точку $-k$ снизу, а $+k$ — сверху в области комплексного переменного $\eta + i\eta'$. Используя соотношения (1.20), (1.21), (1.9) и граничное условие (1.19), определим неизвестное контактное давление $p(x) = p_1(a, x) - p_i(a, x)$

$$-\frac{\rho_* \omega}{a\pi^2}\int\limits_{\Gamma} A(\eta)\frac{\exp(-i\eta x)}{tJ_1(ta)}\,d\eta = \begin{cases} p(x), & |x| \leqslant b \\ 0, & |x| > b \end{cases} \tag{1.22}$$

$$t = \sqrt{k^2 - \eta^2}$$

Здесь использовано известное соотношение между функциями Бесселя [11]

$$J_\nu(z)H_{\nu+1}(z) - H_\nu(z)J_{\nu+1}(z) = \frac{2}{\pi i z}$$

Обращая формулу (1.22), найдем

$$A(\eta) = -\frac{\pi t a}{2\rho_*\omega}J_1(ta)\int\limits_{-b}^{b} p(u)\exp(i\eta u)\,du \tag{1.23}$$

Граничное условие (1.17) и выражение (1.23) позволяют получить интегральное уравнение относительно комплексной амплитуды контактного давления.

$$\int\limits_{-b}^{b} p(u)\,du\int\limits_{0}^{\infty} t^2 J_1(ta)H_1(ta)\cos\eta(u-x)\,d\eta = -\frac{i\rho_*\omega^2}{a}W(x) \tag{1.24}$$

$$|x| \leqslant b$$

причем на концах оболочки

$$p(\pm b) = 0 \tag{1.25}$$

Переходя к безразмерным переменным в уравнениях (1.24), (1.1) и граничных условиях (1.16), (1.25) указанным выше способом, приходим к системе двух уравнений относительно амплитуды контактного давления и амплитуды прогиба

$$\int\limits_{-1}^{1}\bar{p}(y)L\left(\frac{y-z}{\lambda}\right)dy = -iE_*\overline{W}(z), \qquad |z| \leqslant 1 \tag{1.26}$$

$$D^*\overline{W}^{\mathrm{IV}}(z) - P_*\overline{W}(z) = \bar{p}(z) - \bar{q}(z) \tag{1.27}$$

При граничных условиях

$$\bar{p}(\pm 1) = 0 \tag{1.28}$$

$$\overline{W}''(\pm 1) = \overline{W}'''(\pm 1) \tag{1.29}$$

где

$$E_* = R_* a k_0^2 \lambda$$

$$L(t) = \int_0^\infty s^2 J_1(s) H_1(s) \cos \xi t \, d\xi \qquad (1.30)$$

$$s = \sqrt{k_*^2 - \xi^2}$$

Далее черта для всех задач опускается.

Замечание 1. В задачах 1, 3 предполагается, что $k_* < 1/\sqrt{\alpha}$.

Замечание 2. В задаче 2 предполагается, что $k_* < \min(\mu_*, 1/\sqrt{\alpha})$, где $\mu_* \neq 0$ — первый корень функции $J_1(z)$.

2. *Метод решения задач 1, 2.* Неизвестную функцию $W(z)$ в задачах 1, 2 ищем в виде ряда по системе специальных ортогональных полиномов $\{Q_m(x)\}_{m=4}^{\infty}$ [5]

$$W(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k Q_{k+3}(z) \qquad (2.1)$$

которые удовлетворяют следующим условиям нормировки:

$$\int_{-1}^{1} Q_{k+3}^{IV}(z)\, Q_{j+3}(z)\, dz = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad k, j = 1, 2, 3... \qquad (2.2)$$

и граничным условиям

$$Q_{k+3}(\pm 1) = Q'_{k+3}(\pm 1) \qquad (2.3)$$

Подставляя разложение (2.1) в формулу (1.10) и используя условия нормировки (2.2), приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно

$$\sum_{k=1}^{\infty} [D_* \delta_{j,k} + T_* V_{j,k} + P_* S_{j,k} \mp F_* G_{j,k}] B_k = \mp C_j, \quad j = 1, 2,... \qquad (2.4)$$

где

$$V_{j,k} = \int_{-1}^{1} Q''_{k+3}(z)\, Q_{j+3}(z)\, dz, \qquad S_{j,k} = \int_{-1}^{1} Q_{k+3}(z)\, Q_{j+3}(z)\, dz$$

$$C_j = \int_{-1}^{1} q(z)\, Q_{j+3}(z)\, dz$$

$$G_{j,k} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} Q_{k+3}(y)\, Q_{j+3}(z)\, L\left(\frac{y-z}{\lambda}\right) dy\, dz \qquad (2.5)$$

$\delta_{j,k}$ — символ Кронекера. В соотношении (2.5) нетрудно перейти от тройного интеграла к одномерному. Для этого достаточно представить $Q_{k+3}(x)$ в виде разложения по полиномам Лежандра $\{P_m\}_{m=5}^{\infty}$

$$Q_{k+3}(y) = \frac{1}{\sqrt{2(2k+3)}}\left\{\frac{1}{2k+5}[P_{k+5}(y) - P_{k+1}(y)] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2k+1}[P_{k+1}(y) - P_{k-1}(y)]\right\} \qquad (2.6)$$

и воспользоваться интегралом [12]

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\exp(i\alpha x)\,dx = i\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}\,J_{n+0,5}(\alpha) \qquad (2.7)$$

Решение системы (2.4) получено методом редукции, сходимость которого исследуется численно.

Используя полученный результат, определим характеристики дальнего акустического поля для задачи 1. С этой целью подставим разложение для $W(z)$ (2.1) в соотношение (1.8), воспользуемся при этом формулами (2.6), (2.7) и разложением функции Ханкеля $H_1(z)$ при больших значениях аргумента [4]. Получим для комплексной амплитуды потенциала скорости дальнего поля следующее выражение:

$$\varphi(R,\theta) = \sqrt{\frac{\lambda^5}{\pi k_*^5 \sin^5\theta}}\;\frac{\omega b a^2 i \sum\limits_{m=1}^{N} i^m\sqrt{2m+3}\,B_m J_{m+1+0,5}\left(\frac{k_*}{\lambda}\sin\theta\right)}{RK_*\cos\theta H_1(k_*\cos\theta)\exp(i(k_*/a)R)} \qquad (2.8)$$

Здесь R, θ — координаты полярной системы координат:

$$r = R\cos\theta, \quad x = R\sin\theta$$

Применяя полученное выражение, получим амплитудное значение функции направленности по давлению

$$|\Phi(\theta)| = \frac{|\varphi(R,\theta)|}{|\varphi(R,0)|}$$

Рассмотрим конкретный пример для задачи 1. Определим амплитудно-частотную характеристику оболочки, разность фаз между действующей нагрузкой и прогибом оболочки в ее центре и функцию направленности при следующих значениях безразмерных параметров:

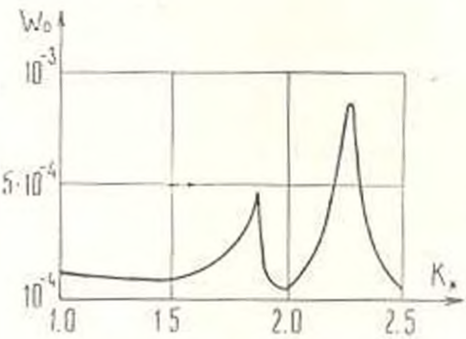
$$\mu = 0{,}01,\ \lambda = 1,\ \nu = 0{,}03,\ \alpha = 0{,}07692,\ R_* = 0{,}12987$$

$$T_* = 2{,}5\cdot 10^{-6}, \quad 0{,}9 \leqslant k_* \leqslant 2{,}5$$

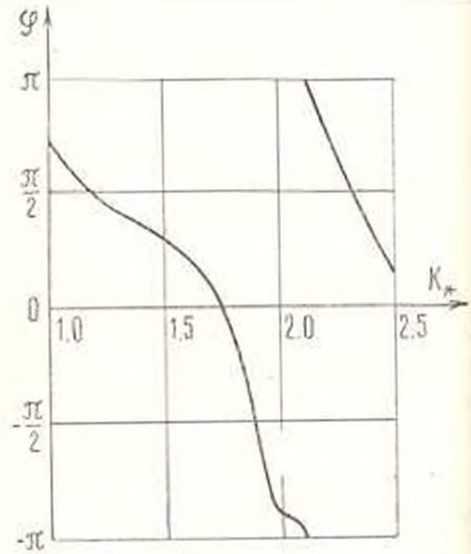
Воспользовавшись формулой (2.1), определим прогиб оболочки в центре

$$W(0,t) = \operatorname{Re}[W_0\exp(i(\varphi+\omega t))] = W_0\cos(\varphi+\omega t)$$

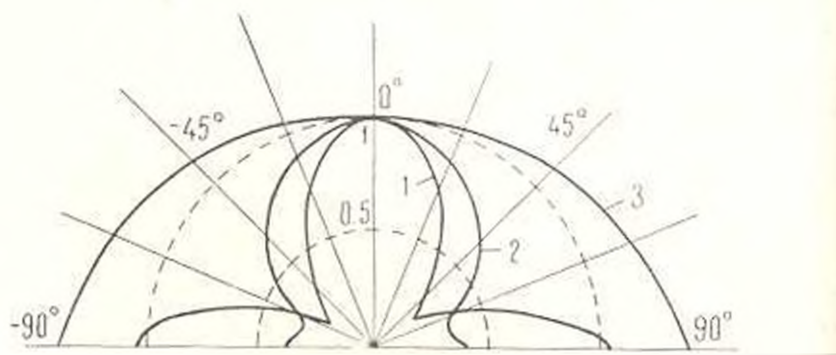
Здесь W_0, φ — модуль и фаза комплексной амплитуды прогиба в центре оболочки. На фиг. 1, 2 приведены зависимости W_* и φ от k_*, а на фиг. 3— диаграмма направленности излучения. Анализ результатов показывает, что в окрестности частот, при которых достигается максимум модуля комплексной амплитуды, оболочка приобретает свойства направленного излучения. Появляются два пика угловой характеристики излучения (см. кривая 1, фиг. 3). При дальнейшем изменении частоты характеристика направленности приобретает вначале вид кривой 2, а затем—вид кривой 3 на фиг. 3. Затем картина повторяется.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

3. *Метод решения задачи 3 при больших λ.* Приближенное решение уравнения (1.27) ищем в форме

$$W(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k Q_{k-5}(z) \tag{3.1}$$

где $\{Q_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$ — система специальных ортогональных полиномов, удовлетворяющих условию нормировки

$$\int_{-1}^{1} Q_{k+5}^{IV}(z)\, Q_{j+5}(z)\, dz = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad k, j = 1, 2, \dots \tag{3.2}$$

и граничным условиям

$$Q''_{k+5}(\pm 1) = Q'''_{k+5}(\pm 1) = 0 \tag{3.3}$$

Заметим, что полиномы $Q_m(z)$ можно выразить через присоединенные функции Лежандра $P_m^4(z)$ следующим образом:

$$Q''_{k+5}(z) = \sqrt{\frac{(2k+7)(k-1)!}{2(k+7)!}}\, P_{k+3}^4(z), \quad k = 1, 2, \dots$$

Ядро $L(t)$ уравнения (1.26) в окрестности нуля имеет степенную особенность, поэтому представим его в форме

$$L(t) = \frac{i}{\pi t^2} + M(t) \tag{3.4}$$

$$M(t) = \int_0^{\infty} \left[s^2 J_1(s)\, H_1(s) + \frac{i}{\pi} \xi \right] \cos \xi t\, d\xi \tag{3.5}$$

Исходя из представлений (3.1), (3.4), (3.5), решение уравнения (1.26) может быть построено следующим образом:

$$p(y) = E_* \sum_{k=1}^{\infty} B_k p_k(y) \tag{3.6}$$

Неизвестные функции $p_k(y)$ удовлетворяют интегральному уравнению

$$\frac{i}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{p_k(y)}{(y-z)^2}\, dy = -\int_{-1}^{1} M\left(\frac{y-z}{\lambda}\right) p_k(y)\, dy - i\, Q_{k+5}(z) \tag{3.7}$$

и граничным условиям (1.28).

Интеграл, стоящий в левой части соотношения (3.7), понимается как производная по z от сингулярного интеграла Коши. Заметим, что обобщенными собственными функциями этого интегрального оператора являются полиномы Чебышева второго рода

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-y^2}}{(y-z)^2}\, U_n(y)\, dy = -(n+1)\pi U_n(z) \tag{3.8}$$

Учитывая вышеизложенное, представим $p_k(y)$ в виде следующего ряда:

$$p_k(y) = \sqrt{1-y^2} \sum_{m=1}^{\infty} C_m^k U_{m-1}(y) \tag{3.9}$$

Подставляя разложение (3.9) в уравнение (3.7) и воспользовавшись известным свойством ортогональности полиномов Чебышева [4]

$$\int_{-1}^{1} U_m(y)\, V_n(y) \sqrt{1-y^2}\, dy = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \qquad (3.10)$$

получим для коэффициентов C_m^k систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[-\frac{i\lambda^2 \pi}{2} \delta_{n,m} + W_{n,m} \right] C_m^k = -iT_n^k \qquad (3.11)$$

где

$$T_n^k = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\, U_{n-1}(y)\, Q_{k-5}(y)\, dy$$

$$W_{n,m} = \int_{0}^{\infty} \left[s^4 J_1(s) H_1(s) + \frac{i}{\pi} s \right] f\left(\frac{s}{\lambda}\right) ds \qquad (3.12)$$

$$f(t) = \begin{cases} (-1)^{(3n+m)/2} (\pi/t)^2\, nm\, J_n(t)\, J_m(t), & n+m \text{ — четно} \\ 0, & n+m \text{ — нечетно} \end{cases}$$

В соотношении (3.12) использовано преобразование Фурье от полиномов Чебышева [6]

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\, U_n(y) \exp(-i\alpha y)\, dy = (-i)^n \frac{\pi}{\alpha} J_{n+1}(\alpha)(n+1) \qquad (3.13)$$

Определение C_m^k из системы (3.11) позволяет теперь найти неизвестные B_k. Подставляя разложения (3.1), (3.6) с учетом (3.9) в уравнение (1.27) и используя условие (3.2), приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно B_k

$$\sum_{k=1}^{\infty} [D_k \delta_{j,k} + P_k S_{j,k} - E_k V_{j,k}] B_k = G_j, \quad j = 1, 2, 3, \ldots \qquad (3.14)$$

где

$$V_{j,k} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m^k T_m^j; \quad S_{j,k} = \int_{-1}^{1} Q_{k-5}(z)\, Q_{j-5}(z)\, dz; \quad G_j = -\int_{-1}^{1} q(z)\, Q_{j-5}(z)$$

Решение систем (3.11), (3.14) строится методом редукции, сходимость которого исследуется численно.

Используя полученные результаты, определим характеристики дальнего поля. Подставляя разложения (3.1) в формулу (1.20) и принимая во внимание (3.13), получим для комплексной амплитуды потенциала скорости выражение

$$\varphi(R, \theta) = \frac{\varepsilon a \sqrt{\pi \cos^2 \theta}\, E_* J_1(k_* \cos \theta) \sum\limits_{k=1}^{N} B_k \sum\limits_{m=1}^{M} C_m^k (-i)^m J_m\left(\frac{k_*}{i} \sin \theta\right)}{2\rho_* \omega R \sin \theta}$$

Здесь R, θ — координаты полярной системы координат.

ԱԿՈՒՍՏԻԿ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՍՏԻՊՈՂԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ

Վ. Մ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎ, Գ. Պ. ՍՏՐԵԼՆԻԿՈՎ

Ամփոփում

Ուսումնասիրված է վերջավոր երկարության թաղանթի ստիպողական տատանումների խնդիրը։ Դիտարկված են հետևյալ դեպքերը՝ անվերջ գլանային էկրանի մեջ գտնվող թաղանթը տեղադրված է անվերջ ակուստիկ միջավայրի մեջ, հեղուկ պարունակող անվերջ գլանային էկրանի մեջ գտնվող թաղանթը տեղադրված է անվերջ ակուստիկ միջավայրի մեջ։

Խնդիրները լուծվել են Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության և օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդի կիրառմամբ։

THE METHOD OF THE ORTHOGONAL POLYNOMIALS IN THE PROBLEMS OF THE FORCED VIBRATIONS OF THE CYLINDRICAL SHELLS IN THE ACOUSTIC MEDIUM

V. M. ALEXANDROV, G. P. STRELNICOV

Summary

The problem of forced vibrations of the finite length shell is investigated. The cases under consideration are: the shell in the infinite cylindrical shield placed in the infinite acoustic medium; the shell in the infinite cylindrical shield containing fluid inside; the shell without bottoms placed in the infinite acoustic medium. The problems are solved with the use of the Fourier integral transform and the method of orthogonal polynomials.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гонткевич В. С.* Собственные колебания оболочки в жидкости. Киев, Наукова думка, 1964.

2. *Ильгамов М. А.* Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1964.
3. *Горшков А. Г.* Динамическое взаимодействие оболочек и пластин с окружающей средой.— МТТ, 1976, № 2.
4. *Александров В. М., Ворович И. И., Солодовник М. Д.* Эффективное решение задачи о цилиндрическом изгибе пластинки конечной ширины на упругом полупространстве.— МТТ, 1973, № 4.
5. *Александров В. М., Шацких А. С.* Универсальная программа расчета изгиба балочных плит на линейно-деформируемом основании. Тр. VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. 1970. 46—51.
6. *Попов Г. Я.* Некоторые свойства классических многочленов и их применение в контактной задаче.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
7. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
8. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975.
9. *Исакович М. А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.
10. *Лепендин Л. Ф.* Акустика. М.: Высшая школа, 1978.
11. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1977.
12. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, 1969, т. 1, 2.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила в редакцию
21.V.1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVI, № 1, 1983 Механика

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С УГЛАМИ

АРСЕНЯН В. А., ЗАРГАРЯН С. С.

Настоящая работа посвящена реализации численного решения интегрального уравнения плоской теории упругости для областей с углами [1].

Ранее в [2] предлагалось решать плоскую задачу для конечных односвязных областей с углами путем выделения в окрестности углов асимптотики решения краевой задачи при однородных условиях на полукасательных, образующих угол области. В [3] была реализована возможность выделения особенностей для напряжений в окрестности угловых точек в бесконечной области путем введения компенсирующих нагрузок.

Цель настоящей работы — показать высокую эффективность выделения асимптотики решения интегральных уравнений в окрестности угловых точек контура и ее гладкого сопряжения с кубическими сплайнами на оставшейся части контура при численном решении интегральных уравнений плоской теории упругости для областей с углами.

На примере плоской задачи для бесконечной плоскости с прямоугольным отверстием, находящимся под действием гидростатической нагрузки, приводится алгоритм численного решения интегрального уравнения методом последовательных приближений и дается анализ, который показывает каким образом расхождения от значения корня трансцендентного уравнения для показателя степени главного члена асимптотики решения вблизи угловых точек контура влияют на точность удовлетворения граничного условия. Этот численный анализ подтверждает необходимость использования асимптотики решения интегральных уравнений в окрестности угловых точек контура для удовлетворения граничного условия задачи с заданной точностью.

1. Пусть D^- — бесконечная область, составляющая внешность прямоугольника L с основанием b и высотой h, обход в положительном направлении которого совершается так, чтобы область D^- оставалась слева. Оси ox и oy направим по осям симметрии прямоугольника так, чтобы ось ox была параллельна его основанию.

Граничное условие задачи записывается так:

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = f(t) - C \tag{1.1}$$

где

$$f(t) = i\int_{t_0}^{t} (X_n + iY_n)\, ds \tag{1.2}$$

C — подлежащая определению комплексная постоянная, X_n и Y_n — проекции действующего по контуру полного напряжения на ох и оу, s — длина контура, отсчитываемая от произвольно фиксируемой точки контура.

Разыскивая комплексные потенциалы в виде интегралов типа Коши

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(s)\, d\tau(s)}{\tau(s) - z} \tag{1.3}$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(s)\, d\tau(s)}}{\tau(s) - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(s)\, d\overline{\tau(s)}}{\tau(s) - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\tau(s)}\,\omega(s)\, d\tau(s)}{(\tau(s) - z)^2} + \frac{b}{z} \tag{1.14}$$

полагая, что

$$b = \frac{i}{M}\int_L \left[\omega(s) d\overline{\tau(s)} - \overline{\omega(s)}\, d\tau(s)\right] \tag{1.5}$$

$$C = -\frac{1}{N}\int_L \omega(s)\, ds \tag{1.6}$$

и подставляя граничные значения (1.3) и (1.4) в (1.1), почти всюду на L получаем следующее уравнение:

$$\omega(\sigma) + \frac{1}{\pi}\int_L \omega(s)\, d_s F(\sigma, s) - \frac{1}{\pi}\int_L \overline{\omega(s)} \exp(2iF(\sigma, s))\, dF(\sigma, s) + \frac{b}{\overline{\tau(\sigma)}} = f(\sigma) + C \tag{1.7}$$

где $\omega(s)$ — комплексная непрерывная функция, производная которой в окрестности угловых точек контура удовлетворяет условию H^* [5].

В (1.5) и (1.6) M и N — действительные числа, принимаемые по удобству в процессе решения [6], а в (1.7) функция $F(\sigma, s)$ представляет угол видимости, равный

$$F(\sigma, s) = \arg[\tau(\sigma) - \tau(s)] \tag{1.8}$$

Здесь σ и s — длины дуг контура, отсчитываемые от некоторой фиксированной точки контура, отличной от угловой. Свойства угла $F(\sigma, s)$ описаны в [4].

Учитывая, что к интегральному уравнению (1.7) можно применять теорию Фредгольма [1], будем решать это уравнение методом последовательных приближений, полагая

$$\omega(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \omega_n(\sigma) \text{ при } \lambda = 1 \tag{1.9}$$

Подставив (1.9) в (1.7), получаем

$$\omega_0(\sigma) = f(\sigma); \quad \omega_n(\sigma) = -\frac{1}{\pi}\int_L \omega_{n-1}(s)\, d_s F(\sigma, s) +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_L \overline{\omega_{n-1}(s)} \exp(2iF(\sigma, s))\, d_s F(\sigma, s) + \frac{i}{M\tau(s)}\int_L \{\omega_{n-1}(s) d\overline{\tau(s)} -$$

$$-\overline{\omega_{n-1}(s)}\, d\tau(s)\} - \frac{1}{N}\int_L \omega_{n-1}(s)\, ds \qquad (1.10)$$

Интегралы, входящие в (1.7) и (1.10), понимаются в смысле Стилтьеса.

Для численного решения интегрального уравнения (1.7) разбиваем узловыми точками равномерным делением на n_1 сегментов длиной Δ_1 каждое основание и n_2 сегментов длиной Δ_2 каждую боковую сторону прямоугольника. Множество T точек $\tau(\sigma_i)$, $i = 1, 2, \ldots 2(n_1 + n_2)$, расположенных в середине между узловыми, назовем множеством основных опорных точек. Сегменты длиной Δ_1 и Δ_2 будем называть Δ- окрестностью основных опорных точек. Крайние сегменты, пересечением которых являются угловые точки, обозначим через Δ_1^* и Δ_2^*. Выберем целое нечетное число $m \geqslant 3$ и между двумя соседними основными опорными точками, не примыкающими к угловым точкам, на разных расстояниях поместим $(m-1)$ дополнительных опорных точек, множество которых обозначим через D.

На каждой Δ_i^* окрестности крайних опорных точек, примыкающих к угловым, поместим $\varkappa$ дополнительных опорных точек $\tau(s_k)$, сгущающихся по мере приближения к угловой, расположение которых определим из условия

$$\Delta F(\sigma, s) = \arg[\tau(\sigma_j^0) - \tau(s_{k+1})] - \arg[\tau(\sigma_j^0) - \tau(s_k)] = \text{const} \qquad (1.11)$$

Здесь $\tau(\sigma_j^0) \in \Delta_1^*$, если $\tau(s_k) \in \Delta_2^*$ и, наоборот, $\tau(\sigma_j^0) \in \Delta_2^*$, если $\tau(s_k) \in \Delta_1^*$. Точки $\tau(s_k)$ будем откладывать на Δ_i^* от основной опорной точки $\tau(\sigma_j) \in \Delta_i^*$ по обе стороны от нее так, чтобы сама точка $\tau(\sigma_j^0)$ совпала с одной из дополнительных. Пусть $T \cup D = Q$. Для вычисления интегралов, входящих в (1.10), будем пользоваться множеством узловых точек R, образуемых угловыми точками и множеством точек, расположенных в серединах соседних точек множества Q, не примыкающих к угловым.

Для приближенного решения уравнения (1.7) в (1.10) заменим интегралы Стилтьеса интегральными суммами Стилтьеса:

$$\frac{1}{\pi}\int_L \omega_{n-1}(s)\, d_s F(\sigma_k, s) = \frac{1}{\pi}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{q} \omega_{n-1}(\sigma_j)[F(\sigma_k, s_{j+1}) - F(\sigma_k, s_j)]$$

$$\frac{1}{\pi}\int_L \overline{\omega_{n-1}(s)} \exp(2iF(\sigma_k, s))\, d_s F(\sigma_k, s) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{q} \overline{\omega_{n-1}(\sigma_j)}\,[\exp(2iF(\sigma_k, s_{j+1})) - \exp(2iF(\sigma_k, s_j))] \qquad (1.12)$$

где $z_j \in Q$; $z_k \in T$; $s_j \in R$; $q = 8(\varkappa - 1) + 2(m-1)(n_1 + n_2 - 4) + 2(n_1 + n_2)$ — число точек множества Q, причем

$$F(z_k, s_{j+1}) - F(z_k, s_j) = \frac{1}{2i}\left[\ln\frac{\tau(s_{j+1}) - \tau(z_k)}{\overline{\tau(s_{j+1})} - \overline{\tau(z_k)}} - \ln\frac{\tau(s_j) - \tau(z_k)}{\overline{\tau(s_j)} - \overline{\tau(z_k)}}\right] \tag{1.13}$$

Пусть s_j^* ($s_1^* = 0$; $s_2^* = b$; $s_3^* = b + h$; $s_4^* = 2b + h$) — дуговые координаты вершин прямоугольника, а $\tau(s_j^*) = a_j$ — угловые точки, являющиеся пересечением сторон прямоугольника L_j, причем $L_j \cap L_{j+1} = a_{j+1}$ для $j = 1, 2, 3$ и $L_4 \cap L_1 = a_1$.

Следуя [1], принимаем, что при отсутствии сосредоточенных воздействий в угловых точках контура в окрестности последних $\omega(s)$ имеет следующее представление на каждой стороне L_j ($j = 1, 2, 3, 4$) прямоугольника, если $\pi < \beta - \alpha < 2\pi$:

$$\omega_j^{\pm}(s) = \sum_{r=1}^{\nu_1} A^{\pm}_{r,j}(s - s^*)^{\lambda_r} + \sum_{r=0}^{\nu_2} E^{\pm}_{r,j}(s - s^*)^r \tag{1.14}$$

в случае простых корней трансцендентного уравнения [7]

$$\sin^2\lambda(\beta - \alpha) = \lambda^2 \sin^2(\beta - \alpha) \tag{1.15}$$

полученного в [1] при изучении асимптотики решения уравнения (1.7).

В (1.14) знак (+) соответствует разложению в окрестности начала L_j, а знак (—) разложению у конца L_j. Числа ν_1 и ν_2 выбираются в соответствии с принимаемой точностью приближенного решения; β и α — углы, образуемые полукасательными, проведенными к угловой точке с фиксированным направлением так, чтобы $(\beta - \alpha)$ представлял угол упругой области в угловой точке контура.

Ввиду непрерывности $\omega(s)$ на всем L имеем также, что в (1.14) имеют место условия:

$$E^-_{0,j} = E^+_{0,j+1}; \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad E^-_{0,5} = E^+_{0,1}$$

Пронумеруем точки множества T от 1 до $2(n_1 + n_2)$, начиная с $\tau(s_1^0) \in L_1$, двигаясь по L в положительном направлении.

Распространим область определения представления (1.14) на отрезки длиной $\Delta_i^* = \Delta_i(l - 2) + \Delta_i/2$, $i = 1, 2$, примыкающие слева и справа к каждой угловой точке, удерживая в последних $(l - 1)$ членов, где $l = \nu_1 + \nu_2 + 2$. На остальных $n_1 - 2l$ сегментах средней части оснований и $n_2 - 2l$ сегментах средней части боковых сторон прямоугольника искомую функцию $\omega(s)$ будем представлять в виде кубического непериодического сплайна [8]

$$\omega_{j,k}(s) = \sum_{m=0}^{3} d^{(m)}_{j,k}(s_k - s)^m \tag{1.16}$$

где k принимает значения:

$$k=\begin{cases} l,\ l+1,\ \ldots,\ n_1-l & \text{при}\quad j=1\\ n_1+l,\ n_1+l+1,\ \ldots\ n_1+n_2-l & \text{при}\ j=2\\ n_1+n_2+l,\ n_1+n_2+l+1,\ldots\ 2n_1+n_2-l & \text{при}\ j=3\\ 2n_1+n_2+l,\ 2n_1+n_2+l+1,\ldots\ 2n_1+2n_2-l & \text{при}\ j=4\end{cases}$$

Для гладкого сопряжения представления (1.14) со сплайном (1.16) в точках контура с дуговыми координатами s_k ($k=l$; $n_1\pm l$; $n_1+n_2\pm l$; $2n_1+n_2\pm l$; $2n_1+2n_2-l$) потребуем выполнения следующих условий:

$$\omega_j(s_k)=d_{j,k}^{(0)};\quad \Omega_j(s_k)=d_{j,k}^{(1)} \tag{1.17}$$

для $j=1$ и $k=n_1-l$, $j=2$ и $k=n_1+n_2-l$; $j=3$ и $k=2n_1+n_2-l$, $j=4$ и $k=2(n_1+n_2)-l$.

Здесь принято обозначение $\omega_j'(s)=\Omega_j(s)$.

Определяя первоначально коэффициенты сплайна (1.16) и представления (1.14) для известной в (1.10) функции $\omega_0(s)=f(s)$ в основных опорных точках T, значения этой функции в дополнительных опорных точках D будем определять из этого сплайна и принимаемого представления. Подставив эти значения $\omega_0(s_k^0)$ в (1.12), определим значения $\omega_1(s_k^0)$ по (1.10) в точках множества T. Продолжая таким образом последовательные приближения, можно придти к искомому численному решению (1.9). Дополнительные опорные точки, используемые в (1.12), повышают точность вычисления интегралов n-ного приближения по значениям искомой функции предыдущего приближения.

Произвол в выборе действительных чисел M и N, входящих в (1.5) и (1.6), позволяет управлять сходимостью последовательных приближений не только в случае гладкого контура, как это показано в [6], но и при использовании представления (1.14) для случая контуров с угловыми точками.

2. Принимая в (1.1) $f(t)=-pt$, рассмотрим задачу о действии гидростатической нагрузки с интенсивностью p по контуру прямоугольного отверстия с отношением сторон $b/h=3/2$.

Ввиду симметрии задачи имеем, что в (1.6) $C=0$.

Последовательные приближения (1.10) оказываются сходящимися при значении параметра $M=6\pi$, входящего в функционал (1.5). При этом, полагая в (1.14) $\nu_1=1$, $\nu_2=2$, а $\lambda=0{,}5445$, получаем, что граничное условие, контролируемое по формулам для напряжений:

$$\sigma_x+\sigma_y=\omega'(t)+\overline{\omega'(t)}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\left[\frac{\omega'(\tau)\,d\tau}{\tau-t}-\frac{\overline{\omega'(\tau)}\,d\bar\tau}{\bar\tau-\bar t}\right]$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=\left[\overline{\omega'(t)}-\omega'(t)\right]\frac{d\bar t}{dt}-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}\left[\frac{\omega'(\tau)\,d\tau}{\tau-t}-\frac{\overline{\omega'(t)}\,d\bar\tau}{\bar\tau-\bar t}\right] \tag{2.1}$$

дает для нормальных и касательных напряжений на контуре наибольшую относительную погрешность в 3% по отношению к величине интенсивности p для случая, если в (1.9) ограничиваться итерацией с номером $n = 26$, при $n_1 = 30$, $n_2 = 20$, $m = 3$, $\varkappa = 8$, а, следовательно, в (1.12) $q = 340$. При этом имеем, что

$$\left| \frac{\omega_n - \omega_{n-1}}{\omega_n} \right| < 0.001 \tag{2.2}$$

Удваивая число точек множества T, то есть полагая, что $n_1 = 60$ и $n_2 = 40$ при тех же значениях m и $\varkappa$, получаем, что относительная погрешность (2.2) последовательных приближений (1.10) достигается при $n = 34$. При этом крайние основные опорные точки сегментов Δ_1^* и Δ_2^* приближаются к угловой, и напряжения дают несколько увеличенную наибольшую относительную погрешность в 3,8% в одной из этих точек.

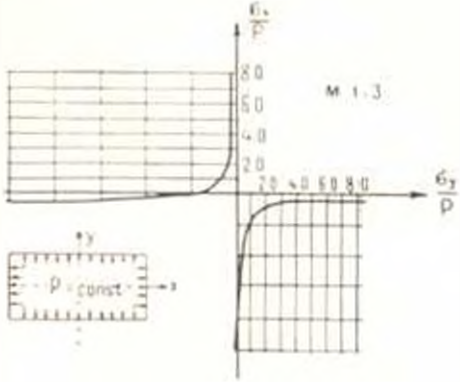
Точность вычисления последовательных приближений (1.10) контролируется согласно (2.2) и вычислением напряжений на контуре (см. столбцы для σ_x и σ_y табл. 1).

Таблица 1

x	y	$\mathrm{Re}\,\omega(t)$	$\mathrm{Im}\,\omega(t)$	σ_x/p	σ_y/p
0,03	0.4	−0,0011	0,1301	0,403	1,008
0,07	0.4	0.0018	0,156	0,403	1.009
0.11	0,4	0,0144	0,2	0,405	1.009
0,15	0.4	0,0104	0,258	0,402	1,009
0,19	0.4	0.0817	0,3255	0,395	1,009
0,23	0,4	0,1385	0,3988	0.381	1.009
0,27	0,4	0,21	0,4745	0,350	1,009
0,31	0,4	0,2948	0.5507	0,327	1.008
0,35	0,4	0,3917	0,6265	0,283	1,009
0,39	0,4	0,5	0.7023	0,224	1,009
0,43	0,4	0,6199	0,7705	0.139	1.008
0,47	0,4	0,754	0,8611	0,012	1,007
0,51	0,4	0,9085	0,9525	−0,211	0,996
0,55	0,4	1,1006	1,0644	−0,614	1,006
0,59	0,4	1.4062	1,2392	−7,992	1,023
0.6	0,39	1,5018	1,1398	0,962	−8,804
0,6	0,35	1,3302	0,8393	1,005	−1,018
0,6	0,31	1,2165	0,6564	0,999	−0.568
0,6	0,27	1.1266	0,5175	1,009	−0.336
0.6	0,23	1,0529	0,4054	1,009	−0.208
0.6	0,19	0,9922	0,3119	1,010	−0.123
0,6	0,15	0,9433	0,2325	1,012	−0,067
0.6	0,11	0,9060	0.1627	1,012	−0.03
0.6	0,07	0.8801	0,1002	1,011	−0,007
0.6	0.03	0,8557	0,0421	1,011	0,005

На фиг. 1 приведен график тангенциальных нормальных напряжений на контуре рассматриваемой пластинки под действием гидростатического давления, показанный для четверти контура.

Введение асимптотики (1.14) существенно влияет на точность получаемого приближенного решения. Для оценки необходимости введения представлений (1.14) проведен следующий анализ, устанавливающий расхождения от точного решения (при $\lambda_1^{(3)} = 0{,}5445$ для угла $\beta - \alpha = 3/2\pi$) тех решений, которые получаются при решении интегрального уравнения со значениями λ_1, отличными от этого значения $\lambda_1^{(1)}$. В результате анализа установлено, что отклонения показателя λ_1 в (1.14) (при $\nu_1 = 1$) от значения $\lambda_1 = 0{,}5445$, являющегося корнем уравнения (1.15) при $\beta - \alpha = 3/2\pi$, приводит к отклонению напряжений (2.1) как в основных, так и в дополнительных опорных точках границы в окрестности углов, хотя интегральное уравнение (1.7) в основных опорных точках удовлетворяется точно. Это приводит к отклонению построенного таким образом решения от заданных на границе напряжений. При этом отметим, что последовательные приближения (1.10) оказываются сходящимися и при отклоняющихся от $\lambda_1 = 0{,}5445$ значениях показателя λ_1. Как показано на фиг. 2, напряжения σ_y, вычисленные в окрестности угловой точки 1 на стороне L_1 при $\nu_1 = 1$ и при λ_1, принимающем в (1.14) значения $\lambda_1^{(1)} = 0{,}1$; $\lambda_1^{(2)} = 0{,}3$; $\lambda_1^{(4)} = 0{,}7$; $\lambda_1^{(5)} = 0{,}9$ и $\lambda_1^{(6)} = 1$, отличаются от заданного $\sigma_y = p$ (см. графики № 1, 2, 4, 5, 6). При $\lambda_1^{(3)} = 0{,}5445$ (график № 3) эти напряжения практически совпадают с заданными. Здесь начало оси абсцисс помещено в угловой точке 1, а ось направлена по L_1. При этом точки деления указаны в процентах от b — длины основания L_1. Таким образом, для построения приближенного решения интегрального уравнения (1.7) необходимо решение (1.7) представлять в виде ее асимптотики (1.14) в окрестности угловых точек контура, а дальше гладко продолжать это решение посредством сплайнов (1.16). Использование других методов численного интегрирования уравнения (1.7), отличных от рассматриваемых, приводит к большим погрешностям из-за процессов численного дифференцирования искомой функции $w(t)$ в интегралах выражений (2.1).



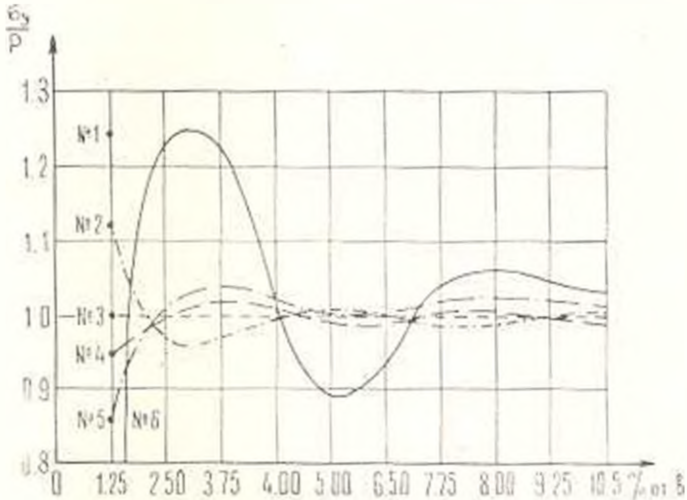
Фиг. 1.

Уравнение (1.15) имеет в интервале $0 < \operatorname{Re}\lambda < 1$ для угла $\beta - \alpha = 3/2\pi$ два действительных корня: $\lambda_1 = 0{,}5445$ и $\lambda_2 = 0{,}9085$. Если принять в (1.14) $\nu_1 = 2$, $\lambda_1 = 0{,}5445$ и изменять лишь λ_2, то при $\lambda_2 > 0{,}5445$, в том числе и для $\lambda_2 = 0{,}9085$, влияние этого второго члена с показателем λ_2 на величину напряжений пренебрежимо мало.

Для рассматриваемого случая гидростатической нагрузки, действующей по контуру прямоугольного отверстия с отношением сторон $b/h = 3/2$, приближенные значения коэффициентов главных членов асимптотики (1.14) для случая $n_1 = 60$ и $n_2 = 40$ равны:

$$A^{+}_{1,1} = A^{+}_{1,3} = 2{,}988 - i\,1{,}541, \qquad A^{-}_{1,1} = A^{-}_{1,3} = 2{,}988 + i\,1{,}541$$

$$A^{+}_{1,2} = A^{+}_{1,4} = 2{,}582 - i\,1{,}527, \qquad A^{-}_{1,2} = A^{-}_{1,4} = 2{,}582 + i\,1{,}527$$



Фиг. 2.

Эти значения меняются в зависимости от способа разбиения контура и числа точек множества T, так как они вместе с другими коэффициентами $A^{\pm}_{r,j}$, $E^{\pm}_{r,j}$ и $d^{(m)}_{r,k}$ определяются последовательными приближениями (1.10) с учетом (1.12), (1.13), (1.14), (1.16) и (1.17). Однако изменения всех коэффициентов, представляющих искомую функцию $\omega(t)$ в зависимости от числа точек множества T и способа разбиения контура, происходит таким образом, что граничное условие удовлетворяется достаточно точно в указанных выше пределах.

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԹՎԱՅԻՆ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Վ. Ա. ԱՐՍԵՆՅԱՆ, Ս. Ս. ԶԱՐԳԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Հաջորդական մոտավորությունների եղանակով լուծվում է Շերման-Լաուրիչելլայի ընդհանրացված ինտեգրալ հավասարումը անկյուններ ունեցող տիրույթների համար։ Նկարագրվում այդ դեպքում տիրույթի անկյունների շրջակայքում ինտեգրալ հավասարման լուծման ասիմպտոտիկան այդ հավասար-

ման թվային լուծումը ցույց է տրվում ուղղանկյունաձև անցքով անվերջ հար-թությունում լարվածային վիճակի որոշման խնդրի վրա։
Խնդրի լուծումը ներկայացվում է աղյուսակի և գրաֆիկների միջոցով։

NUMERICAL SOLUTIONS OF PLANE PROBLEMS OF ELASTICITY FOR REGIONS WITH ANGLES

V. A. ARSENIAN, S. S. ZARGARIAN

S u m m a r y

The integral equation of Sherman-Laurichella for plane problems of elasticity for regions with an angular point on the contour was solved by the numerical iterative method. Owing to the asymptotic representation of the solution of the integral equation at the neighbourhood of angular points of the contour, high accuracy of the numerical solution was obtained.

As an example, the problem for an infinite region bounded internally by a rectangular hole is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Заргарян С. С.* Плоская задача теории упругости для многосвязных областей с углами. Пятый всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. КазССР Алма-Ата: Аннот. докл. изд. «Наука», 1981, с. 160.
2. *Заргарян С. С.* Плоская задача теории упругости для односвязных областей с углами при заданных на границе внешних силах.— Докл. АН АрмССР, 1975, т. 60, № 1, с. 45—50.
3. *Александров А. Я., Зиновьев Б. М., Куршин Л. М.* Об одном численном методе решения задач теории упругости с учетом особенностей напряженного состояния вблизи угловых точек и линий.— Изв. АН СССР, 1980, № 3, с. 39—49.
4. *Данилюк И. И.* Нерегулярные граничные задачи на плоскости. М.: Наука, 1975. 295 с.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968, 511 с.
6. *Арсенян В. А., Заргарян С. С., Мартиросян Н. Р.* О решении интегральных уравнений плоской задачи теории упругости методом последовательных приближений.— Изв. АН СССР, МТТ, № 1, 1982.
7. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension.— J. Appl. Mech., 1952, vol. 19, No. 4, p. 526—528.
8. *Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972, 316 с.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса
Кироваканский филиал ЕрПИ

Поступила в редакцию
22. I. 1982

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 1, 1983 Механика

ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ С УЧЕТОМ РАЗУПРОЧНЕНИЯ

ЛИНЬКОВ А. М.

Многие задачи, касающиеся расчета стержневых и рамных конструкций, проектирования горно-технических сооружений, изучения разрушения при распространении трещин и в условиях стесненной пластичности, требуют рассмотрения зависимостей между кинематическими и силовыми величинами, диаграммы которых имеют наряду с восстающими падающие участки. Последние называются участками разупрочнения. Они могут описывать свойства элементарного объема [1—4], свойства конечного элемента конструкции или расчетной схемы [1, 5—8], а также условия взаимодействия на соприкасающихся поверхностях трещин [9—11], блоков [12] или тела и нагружающего устройства [13].

Разупрочнение само по себе не обязательно свидетельствует о неустойчивости. Однако, при некоторых критических сочетаниях внешних и внутренних параметров системы оно приводит к физическим эффектам, воспринимаемым как динамические, нередко катастрофические явления. К их числу относятся разрушения конструкций при больших запасах упругой энергии, горные удары, землетрясения и др. Построение теории устойчивости, адекватно описывающей подобные эффекты и позволяющей находить критические сочетания параметров, представляет актуальную задачу. Ее решение продвинуто, в основном, в направлении учета разупрочнения, относящегося к свойствам элементов среды (конструкций) [5—8, 14—18]. Не меньшее значение имеет и разработка теории для случаев, когда падающие участки имеются на диаграммах, описывающих взаимодействие на границах трещин, блоков или тела и нагружающего устройства. Хотя к этому направлению примыкает ряд изученных задач теории трещин [9—11, 19—21], общая теория потери устойчивости, которая учитывала бы падающие участки на диаграммах, описывающих условия на границах, отсутствует. Данная работа имеет целью на основе развития результатов для разупрочняющихся элементов дать теорию устойчивости, включающую сложные взаимодействия на границах соприкающихся тел.

1. Изучение устойчивости требует определения этого понятия. Для разных классов задач определения могут быть различными. Применительно к задачам, связанным с разупрочняющимися элементами, предложены два определения [14, 17].

Один из них [14] использует постулат Друкера и характеризует устойчивое состояние как такое, для которого сумма работ приращений внешних сил на отвечающих им приращениях (скоростях)* смещений положитель-

* Ниже термины «приращение» и «скорость» используются как эквивалентные.

на. Это определение требует, чтобы при варьировании граничных условий во всем объеме тела удовлетворялась полная система уравнений (равновесия, совместности и закона деформирования).

Согласно второму определению [17], в отличие от первого, варьируются не граничные значения, а поле смещений внутри рассматриваемого объема. Состояние считается устойчивым, если для любых возможных приращений смещений приращение работы внешних сил меньше приращения внутренней энергии. При этом возможными считаются смещения не только не нарушающие заданных условий на границах тела, но и дающие внутренние усилия, удовлетворяющие статическим уравнениям равновесия в области разупрочнения.

2. Полезно сопоставить следствия этих определений, поскольку они, очевидно, не эквивалентны. Первое из них подразумевает, что решение, отвечающее малым приращениям внешних сил, существует, что делает в известной мере проблематичным его непосредственное использование в случаях, когда близкое смежное состояние равновесия отсутствует и решение испытывает конечный скачок. Второе определение включает эту возможность. Иллюстрацией может служить рассмотренный в [18] пример сжатия двух стержней, последовательно соединенных между собой, на жесткой машине. Однако, отмеченное ограничение на применимость первого определения не сказывается при использовании вытекающего из него достаточного условия устойчивости, формулируемого следующим образом [14].

Пусть в объеме V имеется область V_p необратимых деформаций (в частности, разупрочнения). Скоростям необратимых деформаций $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$ согласно определяющим уравнениям среды отвечают скорости напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$. В общем случае $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$ не удовлетворяют в V_p уравнениям совместности. Они могут рассматриваться как дисторсии. Решая задачу теории упругости при заданных дисторсиях $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$ и фиксированных граничных условиях*, получим самоуравновешенное поле скоростей напряжений $\dot{\sigma}^*_{ij}$. Тогда, как показано в [14], достаточным условием устойчивости является

$$I_1 \geqslant 0 \tag{2.1}$$

где

$$I_1 = \int\limits_{V_p} (\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}^*_{ij})\, \dot{\varepsilon}^p_{ij}\, dV \tag{2.2}$$

по повторяющемуся *тензорному* индексу, как обычно, подразумевается суммирование.

Если под $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$ в (2.1), (2.2) понимать произвольное поле, то оно не обязательно удовлетворяет требованиям определения, принятого в [14].

---

* Неизменность граничных условий здесь и ниже означает, что приращения (скорости) напряжений и смещений не изменяют их. Например, на частях, где заданы смещения, скорости смещений должны обращаться в нуль; на участках границы с фиксированными напряжениями скорости последних равны нулю.

так как в общем случае ему может не соответствовать решение задачи для некоторых приращений внешних сил. Поэтому следует ожидать, что при произвольных $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$ необходимое условие неустойчивости $I_1 \leqslant 0$ охватывает и потерю устойчивости в форме скачка. Доказательство этого положения можно получить, отправляясь от второго определения, предусматривающего возможность скачков. Согласно [17] из этого определения вытекает следующее необходимое и достаточное условие неустойчивости:

$$I_1 < 0 \tag{2.3}$$

где

$$I_1 = \int\limits_{S_*} (\dot{\sigma}_{ni2} - \dot{\sigma}_{ni1}) u_i dS \tag{2.4}$$

S_* — граница, отделяющая объем V_2 от области упругих деформаций V_1; u_i — скорость смещений; $\dot{\sigma}_{ni2}$ — предельные значения скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{ij2}$, получаемых в результате решения задачи для объема V_2 при заданных на S_* скоростях u_i и неизменных граничных условиях на остальной части поверхности объема V_2; $\dot{\sigma}_{ni1}$ — аналогичные значения, получаемые при решении задачи для области упругих деформаций V_1; нормаль к S_* считается внешней по отношению к V_1 (внутренней относительно V_2). Если существуют такие скорости u_i, для которых выполняется (2.3), то исследуемое состояние равновесия неустойчиво. Условие (2.3) включает и потерю устойчивости в форме скачка, поскольку в общем случае $\dot{\sigma}_{ni2} \neq \dot{\sigma}_{ni1}$, то есть скорости напряжений на S_* могут испытывать разрыв.

Пусть полю u_i в V_2 соответствуют скорости необратимых деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$. Их можно рассматривать как дисторсии в части V_2 объема V. Тогда решение задачи для V при дисторсии $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$ и фиксированных граничных условиях на границе тела S дает самоуравновешенные скорости напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^{s}$ и отвечающие им скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^{s}$, определяемые по $\dot{\sigma}_{ij}^{s}$ линейными соотношениями закона Гука. Сумма $\dot{\varepsilon}_{ij}^{s} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$ удовлетворяет уравнениям совместности, то есть ей в V отвечает поле u_i^{s+p}. Оно не совпадает с полем u_i в V_2 и на S_*. Поэтому разность

$$u_i^{f} = u_i - u_i^{s+p} \tag{2.5}$$

в общем случае нулю не равна. Согласно (2.5) решение $\dot{\sigma}_{ij1}$ в упругом объеме V_1 при заданных на S_* скоростях u_i представляется суммой поля $\dot{\sigma}_{ij}^{s}$ и поля $\dot{\sigma}_{ij}^{f}$, получаемого при решении задачи для V_1 при заданных на S_* скоростях u_i^{f}. Тогда на S_*

$$\dot{\sigma}_{ni1} = \dot{\sigma}_{ni}^{s} + \dot{\sigma}_{ni}^{f} \tag{2.6}$$

В упругом объеме V_1 полю $\dot\sigma^f_{ij}$ соответствуют деформации $\dot\varepsilon^f_{ij}$, получаемые по закону Гука. Подстановка (2.6) в (2.4) дает

$$I=\int\limits_{S_*}[\dot\sigma_{ni2}-(\dot\sigma^S_{ni}+\dot\sigma^f_{ni})]\,\dot u_i dS$$

и после преобразования интеграла по S_* в объемные интегралы (с учетом выбранного направления нормали и определений $\dot\sigma^S_{ni}$, $\dot\sigma^f_{ni}$) функционал I принимает вид

$$I=-\int\limits_{V_1}[\dot\sigma_{ij2}-\dot\sigma^S_{ij})\,\dot\varepsilon_{ij}dV-\int\limits_{V_1}\dot\sigma^f_{ij}\,(\dot\varepsilon^S_{ij}+\dot\varepsilon^f_{ij})\,dV \tag{2.7}$$

Интеграл

$$A=-\int\limits_{V_1}\dot\sigma^f_{ij}\,\dot\varepsilon^S_{ij}dV$$

в силу соотношения $\dot\sigma^f_{ij}\,\dot\varepsilon^S_{ij}=\dot\sigma^S_{ij}\,\dot\varepsilon^f_{ij}$, выполняющегося в V_1, преобразуется в интеграл по поверхности $A=-\int\limits_{S_*}\dot\sigma^S_{ni}\dot u^f_i dS$, который в свою очередь преобразуется в интеграл по объему V_2 после использования (2.5)

$$A=\int\limits_{V_1}\dot\sigma^S_{ij}[\dot\varepsilon_{ij}-(\dot\varepsilon^p_{ij}+\dot\varepsilon^S_{ij})]\,dV \tag{2.8}$$

Теперь можно учесть, что упругая деформация $\dot\varepsilon_{ij}-\dot\varepsilon^p_{ij}$ связана с $\dot\sigma_{ij2}$ законом Гука. Тогда, поскольку скорости $\dot\varepsilon^S_{ij}$ связаны этим же законом с $\dot\sigma^S_{ij}$, справедливо равенство $\dot\sigma^S_{ij}(\dot\varepsilon_{ij}-\dot\varepsilon^p_{ij})=\dot\varepsilon^S_{ij}\dot\sigma_{ij2}$. Отсюда

$$\dot\sigma^S_{ij}[\dot\varepsilon_{ij}-(\dot\varepsilon^p_{ij}+\dot\varepsilon^S_{ij})]=(\dot\sigma_{ij2}-\dot\sigma^S_{ij})\,\dot\varepsilon^S_{ij} \tag{2.9}$$

и (2.8) можно записать в виде

$$A=\int\limits_{V_1}(\dot\sigma_{ij2}-\dot\sigma^S_{ij})\,\dot\varepsilon^S_{ij}dV$$

Представляя в (2.7) $\dot\varepsilon_{ij}$ в виде суммы упругой и необратимой частей, $\dot\varepsilon_{ij}=\dot\varepsilon^e_{ij}+\dot\varepsilon^p_{ij}$, и подставляя полученное выражение для A, имеем

$$I=-C_1-I_1 \tag{2.10}$$

где

$$C_1=\int\limits_{V_1}\dot\sigma^f_{ij}\dot\varepsilon^f_{ij}dV+\int\limits_{V_1}(\dot\sigma_{ij2}-\dot\sigma^S_{ij})(\dot\varepsilon^e_{ij}-\dot\varepsilon^S_{ij})\,dV \tag{2.11}$$

I_1 выражается формулой (2.2), причем смысл величин $\dot\sigma_{ij2}$ в (2.10) и $\dot\sigma_{ij}$ в (2.2) совпадает.

Величина C_1 является неотрицательной, так как связь $\dot\sigma_{ij}^f$ с $\dot\varepsilon_{ij}^f$ и $\dot\sigma_{ij2}-\dot\sigma_{ij}^S$ с $\dot\varepsilon_{ij}^e-\dot\varepsilon_{ij}^S$ выражается законом Гука. Поэтому для того, чтобы выполнялось неравенство $I \geqslant 0$, необходимо, чтобы было $I_1 \leqslant 0$. Таким образом, действительно, условие $I_1 \leqslant 0$, полученное в [14], является необходимым условием потери устойчивости и в тех случаях, когда устойчивость теряется в форме скачка. Заметим, однако, что в (2.10) поле $\dot\varepsilon_{ij}^p$ не вполне произвольно — оно порождается некоторыми скоростями $\dot u_i$ на S_*. По-видимому, это ограничение следует иметь в виду при использовании функционала (2.2).

3. Равенство (2.10) позволяет получить еще одно необходимое условие неустойчивости, удобное в приложениях. Для этого введем в V_1 поля $\dot u_{i1}^f$, $\dot\varepsilon_{ij1}^f$, $\dot\sigma_{ij1}^f$, которые компенсируют различие в скоростях напряжений $\dot\sigma_{ij2}$ и $\dot\sigma_{ij}^S$. Они отличаются от введенных в предыдущем пункте полей $\dot u_i^f$, $\dot\varepsilon_{ij}^f$, $\dot\sigma_{ij}^f$, которые компенсировали различие в скоростях смещений $\dot u_i$ и $\dot u_i^{S+p}$. Поля $\dot u_{i1}^f$, $\dot\varepsilon_{ij1}^f$, $\dot\sigma_{ij1}^f$ решают задачу теории упругости для объема V_1 при заданных на S_* скоростях $\dot\sigma_{ni1}^f=\dot\sigma_{ni2}-\dot\sigma_{ni}^S$ и неизменных условиях на остальной части границы V_1. Тогда скорости смещений $\dot u_{i1}=\dot u_{i1}^f+\dot u_i^S$ соответствуют на S_* скорости напряжений

$$\dot\sigma_{ni}=\dot\sigma_{ni2}=\dot\sigma_{ni1}^f+\dot\sigma_{ni}^S \tag{3.1}$$

Составим выражение

$$I_2=I+\int\limits_{V_1}(\dot\sigma_{ij}^f\dot\varepsilon_{ij}^f+\dot\sigma_{ij1}^f\dot\varepsilon_{ij1}^f)\,dV+2\int\limits_{V_1}(\dot\sigma_{ij2}-\dot\sigma_{ij}^S)(\dot\varepsilon_{ij}^e-\dot\varepsilon_{ij}^S)\,dV$$

Оно отличается от I неотрицательными слагаемыми. Поэтому, если $I_2<0$, то и $I<0$. Отсюда отрицательность I_2 является достаточным условием устойчивости. Использование (2.10), (2.11), (2.2) дает

$$I_2=\int\limits_{V_1}\dot\sigma_{ij1}^f\dot\varepsilon_{ij1}^f\,dV+\int\limits_{V_1}(\dot\sigma_{ij2}-\dot\sigma_{ij}^S)(\dot\varepsilon_{ij}^e-\dot\varepsilon_{ij}^S)\,dV-\int\limits_{V_1}(\dot\sigma_{ij2}-\dot\sigma_{ij}^S)\,\dot\varepsilon_{ij}^p\,dV$$

С учетом того, что $\dot\varepsilon_{ij}^e-\dot\varepsilon_{ij}^S=\dot\varepsilon_{ij}-(\dot\varepsilon_{ij}^p+\dot\varepsilon_{ij}^S)$, из (2.9) следует

$$I_2=\int\limits_{V_1}\dot\sigma_{ij1}^f\dot\varepsilon_{ij1}^f\,dV+\int\limits_{V_1}\dot\sigma_{ij2}[\dot\varepsilon_{ij}-(\dot\varepsilon_{ij}^p+\dot\varepsilon_{ij}^S)]\,dV-\int\limits_{V_1}(\dot\sigma_{ij2}-\dot\sigma_{ij}^S)(\dot\varepsilon_{ij}^p+\dot\varepsilon_{ij}^S)\,dV$$

Преобразование объемных интегралов в поверхностные с учетом (3.1) приводит I_2 к виду

$$I_2=\int\limits_{S_*}\dot\sigma_{ni1}^f\dot u_{i1}^f\,dS+\int\limits_{S_*}\dot\sigma_{ni}(\dot u_i^{S+p}-\dot u_i)\,dS+\int\limits_{S_*}\dot\sigma_{ni1}^f\dot u_i^{S+p}\,dS$$

и, поскольку в V_1 выполняются равенства $\dot{\sigma}^{\prime}_{ij}\dot{u}_{i,j} = \dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}^{\prime}_{ij}$, $\dot{u}_i^{S-p} + \dot{u}_i^{\prime} = \dot{u}_{i1}$, получаем окончательное выражение

$$I_2 = \int\limits_{S_*} \dot{\sigma}_{ni}(\dot{u}_{i1} - \dot{u}_{i2})dS \tag{3.2}$$

Здесь для единообразия обозначено $\dot{u}_{i2} = \dot{u}_i$. Достаточным условием устойчивости, как отмечалось, является $I_2 < 0$. Необходимое условие неустойчивости имеет вид $I_2 \geqslant 0$.

Величины, входящие в формулу (3.2) для I_2, в соответствии с принятыми соглашениями имеют следующий простой механический смысл: $\dot{\sigma}_{ni}$ — произвольное поле скоростей напряжений на поверхности S_*, отделяющей зону необратимых деформаций V_2 от упругой области V_1; $\dot{u}_{i1}$ — скорости смещений, получаемые в результате решения задачи для V_1 при заданных на S_* скоростях $\dot{\sigma}_{ni}$ и неизменных прочих условиях вне S_*; $\dot{u}_{i2}$ — скорости смещений, получаемые в аналогичной задаче для V_2.

4. В случаях, когда падающие диаграммы описывают не поведение элемента среды, а граничные условия или взаимодействие на соприкасающихся поверхностях, схема анализа устойчивости, использованная в [17], и описанные выше результаты допускают естественное обобщение. Достаточно принять во внимание, что диаграммы для граничных значений величин идеализируют реальные условия передачи усилий через нагружающие элементы конечных размеров. Точно также диаграммы, описывающие взаимодействие соприкасающихся поверхностей, фактически отражают процессы, происходящие в реальных малых, но конечных, неровностях и прилежащих к ним приповерхностных слоях. Тогда упомянутые элементы, неровности и тонкие слои можно считать объемом V_2, в котором происходит разупрочнение, и перейти к пределу, устремив его толщину к нулю. Разумеется, аналогичную операцию можно выполнить и в случае, когда процессы носят обратимый характер.

В результате все приведенные условия и выражения остаются применимыми с очевидными изменениями в трактовке входящих в них членов. А именно, поскольку поверхность S_* может теперь рассматриваться как совокупность сколь-угодно близких друг к другу поверхностей $\Sigma^{\prime}$ и $\Sigma^{\prime\prime}$ с противоположными направлениями нормалей в смежных точках, скорости $\dot{\sigma}^{\prime}_{ni1}$ на $\Sigma^{\prime}$ и $\dot{\sigma}^{\prime\prime}_{ni1}$ на $\Sigma^{\prime\prime}$ равны по величине и противоположны по знаку. Точно также $\dot{\sigma}^{\prime}_{ni2} = -\dot{\sigma}^{\prime\prime}_{ni2}$. Тогда, считая для определенности поверхность Σ, совпадающей с $\Sigma^{\prime}$, имеем

$$I = \int\limits_{\Sigma} (\dot{\sigma}_{ni2} - \dot{\sigma}_{ni1})\,\Delta\dot{u}_i\,dS \tag{4.1}$$

где $\Delta\dot{u}_i = \dot{u}_i - \dot{u}^{\prime\prime}_i$; величины без штрихов относятся к поверхности

$\Sigma = \Sigma'$. В случае, когда Σ' — внешняя граница тела, на которой задана зависимость напряжений от смещений, поверхность Σ'' считается закрепленной, то есть $\dot{u}_i'' = 0$. Для соприкасающихся шероховатых поверхностей $\dot{u}_i$ — скорость смещения поверхности, ограничивающей объем, по отношению к которому нормаль является внешней; $\dot{u}_i''$ — скорость смещения соприкасающейся поверхности; $\Delta\dot{u}_i$ — разность этих величин (скорость взаимных смещений соприкасающихся поверхностей). При разупрочнении на контакте $\dot{\sigma}_{ni2}\Delta\dot{u}_i > 0$*. Зависимость $\dot{\sigma}_{ni2}(\Delta\dot{u}_i)$ отражается диаграммой взаимодействия поверхностей [12].

Использование (4.1) предполагает задание произвольных $\Delta\dot{u}_i$, определение $\dot{\sigma}_{ni2}$ непосредственно по диаграмме взаимодействия, подсчет $\dot{\sigma}_{ni1}$ путем решения соответствующей задачи при заданных разрывах $\Delta\dot{u}_i$ на Σ и неизменных условиях вне Σ, вычисление интеграла I по (4.1) и определение его знака. Если $I < 0$ для любых $\Delta\dot{u}_i$, то состояние устойчиво. В противном случае оно неустойчиво.

Точно также выражение для I_2 приводится к виду

$$I_2 = \int\limits_{\Sigma} \dot{\sigma}_{ni}(\Delta\dot{u}_{i1} - \Delta\dot{u}_{i2})dS$$

где $\dot{\sigma}_{ni}$ — произвольные скорости напряжений на Σ; $\Delta\dot{u}_{i2}$ — отвечающие $\dot{\sigma}_{ni}$ скорости взаимных смещений поверхностей, определяемые по диаграмме их взаимодействия; $\Delta\dot{u}_{i1}$ — скорости взаимных смещений, получаемые в результате решения соответствующей задачи при заданных на Σ' скоростях напряжений $\dot{\sigma}_{ni}$, на Σ'' — скоростях напряжений $-\dot{\sigma}_{ni}$ (нормаль направлена от Σ' к Σ'') и неизменных условиях вне Σ. Как и в предыдущем пункте, если для любого поля $\dot{\sigma}_{ni}$ функционал I_2 отрицателен, то состояние устойчиво. Выполнение условия $I_2 \geqslant 0$ является необходимым условием неустойчивости.

При упрочнении на контактах $\dot{\sigma}_{ni2}\Delta\dot{u}_i < 0$. Тогда, поскольку при обычных в теории упругости условиях на внешних границах интеграл по Σ от $\dot{\sigma}_{ni1}\Delta\dot{u}_i$ положителен в силу положительной определенности потенциала скоростей деформаций, из (4.1) следует, что $I < 0$, то есть состояние равновесия устойчиво в смысле принятого определения. Отсюда вытекает, что в важном частном случае упрочнения на контактах, когда векторы скоростей проскальзывания $(-\Delta\dot{u}_\tau)$ и касательного напряжения $(\dot{\sigma}_{\tau 2})$ сонаправлены $(-\Delta\dot{u}_\tau\dot{\sigma}_{\tau 2} > 0)$, а нормальные смещения непрерывны $(\Delta\dot{u}_n = 0)$, имеет место устойчивость. Этот ре-

* В дальнейшем для краткости формулировок обсуждается лишь случай взаимодействующих шероховатых поверхностей. Все заключения остаются в силе и для участков внешних границ, на которых задана связь напряжений и смещений, причем на них в соответствии со сделанным замечанием следует считать $\dot{u}_i^{+} = 0$, то есть $\Delta\dot{u}_i = \dot{u}_i$.

зультат сохраняется также при $\Delta u_n \neq 0$, если вектор скоростей нормальных смещений $(-\Delta \dot{u}_n)$ сонаправлен вектору скоростей нормальных напряжений $\dot{\sigma}_n$ $(-\Delta \dot{u}_n \dot{\sigma}_{n} > 0)$. При линейной связи $\dot{\sigma}_{ni} = a_{ij} \Delta \dot{u}_j$ и отрицательно определенной матрице с коэффициентами a_{ij} те же соображения, которые приводят к неравенству $I < 0$, будучи использованы для разности решений, свидетельствуют о единственности решения соответствующей задачи теории упругости. Если указанная связь относится к внешней границе, то легко устанавливается и теорема существования решения [22].

5. Нетрудно получить условие неустойчивости в большом, если повторить рассуждения, приводящие к (4.1), исходя из схемы для этого случая, использованной в [17]. Это условие для конечных приращений на контактирующих поверхностях имеет вид

$$-\Delta Э \geqslant \int_{\Sigma} g\,dS \tag{5.1}$$

где $-\Delta Э$ — освобождаемая энергия, равная взятому со знаком минус изменению потенциальной энергии; из рассуждений, приведенных в [17], следует равенство

$$-\Delta Э = -\int_{\Sigma} \left| \int_{\Delta u_{i0}}^{\Delta u_i} \sigma_{ni}\, d(\Delta u_i) \right| dS$$

g — поглощение энергии на единице поверхности Σ, определяемое по диаграмме взаимодействия поверхностей:

$$g = -\int_{\Delta u_{i0}}^{\Delta u_i} \sigma_{ni}\, d(\Delta u_i)$$

Δu_{i0} — разность смещений соприкасающихся вдоль Σ поверхностей в исследуемом состоянии равновесия; Δu_i — разность смещений соприкасающихся вдоль Σ поверхностей, получаемая добавлением к Δu_{i0} произвольных приращений.

Использование (5.1) упрощает оценки устойчивости, особенно в случаях, когда Δu_i принимает значение, отвечающее переходу к остаточному сцеплению на контактах. Тогда начальное Δu_{i0} и конечное Δu_i значения разности смещений на Σ оказываются фиксированными, и в каждой точке Σ можно по диаграммам взаимодействия поверхностей выбрать путь перехода от Δu_{i0} к Δu_i таким образом, чтобы значение g было минимальным. Минимальным окажется и значение правой части (5.1). Левая же часть (5.1) для упругой среды не зависит от пути перехода и может быть найдена методами теории упругости. В частности, если в линейно упругой среде совершается переход от полного сцепления на контактах к такому состоянию, что составляющие усилий, отвечающие разрывным компонентам смещений, обращаются в нуль (например, происходит проскальзывание с обращением в нуль касательных напряжений на Σ), то

$$-\Delta Э = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma} \sigma_{ni0}\Delta u_i \, dS \tag{5.2}$$

Здесь σ_{ni0} — напряжения в исходном состоянии полного сцепления; Δu_i — разности смещений u_i^{+} и u_i^{-} соприкасающихся поверхностей Σ^{+} и Σ^{-} в конечном состоянии ($\Delta u_i = u_i^{+} - u_i^{-}$); нормаль, как и выше, считается направленной от Σ^{-} к Σ^{+}. Формула (5.2) позволяет легко подсчитать приток энергии при рассмотрении проскальзывания на контактах слоев — достаточно решить две задачи теории упругости (при полном сцеплении и гладком контакте).

Рассмотрение перехода от полного сцепления к полному проскальзыванию рельефно обнаруживает общую важную особенность задач о потере устойчивости из-за разупрочнения на контактах — наличие сильного масштабного эффекта, если контактные условия остаются неизменными. Действительно, с пропорциональным ростом всех размеров напряжения остаются неизменными, а $-\Delta Э$ согласно (5.2) увеличивается пропорционально кубу характерного размера. Поскольку значения g при неизменных диаграммах взаимодействия не изменяются, правая часть (5.1) увеличивается пропорционально квадрату характерного размера*. Поэтому с увеличением линейного масштаба неизбежно достигается критический размер, при котором происходит потеря устойчивости при разупрочнении. Заметим, однако, что, хотя общая выделяющаяся энергия увеличивается, энергия, рассчитанная на единицу объема, остается неизменной. Наличие сильного масштабного эффекта в связи с рассмотрением устойчивости глинистых откосов отмечалась в [11].

В (5.1) можно принять g минимальным значением g_*. Тогда получается необходимое условие неустойчивости в большом

$$-\Delta Э/\Delta S \geqslant g_* \tag{5.3}$$

где ΔS — площадь поверхности Σ. Если площадь ΔS мала по сравнению с характерными размерами, то (5.3) принимает вид условия неустойчивости Гриффитса $-dЭ/dS \geqslant g_*$.

6. Задачи, связанные с разупрочнением сплошной среды, редко решаются в замкнутой форме и требуют применения численных методов. Последние зачастую приводят к разбиению границы на конечное число участков и замене континуума граничных значений скоростей напряжений и смещений дискретной системой обобщенных скоростей усилий $\mathbf{P}$ и смещений $\mathbf{\Delta u}$ в m узловых точках (здесь и ниже используются векторные

* Для плоской задачи $-\Delta Э$ растет пропорционально квадрату, а правая часть (5.1) — первой степени характерного размера.

обозначения; индекс α относится к номеру узла на границе; $\alpha = 1, \ldots, m$). Подобная дискретизация имеет, например, место при использовании метода конечных элементов и основных вариантов метода граничных интегральных уравнений.

Для каждого из узлов связь величин $P_{\alpha 2}$ и $\Delta u_{\alpha 2}$, характеризующая свойства контакта, непосредственно следует из зависимости между σ_{n2} и Δu_i. Связь $P_{\alpha 1}$ и $\Delta u_{\alpha 1}$ получается в результате решения задачи для рассматриваемого объема V. Тогда равенства $P_{\alpha 2} = P_{\alpha 1}$, $\Delta u_{\alpha 2} = \Delta u_{\alpha 1}$ дают конечную систему уравнений для нахождения приближенного решения исходной задачи при заданных скоростях внешних сил или смещений границы.

Остановимся, прежде всего, на зависимости $\Delta u_{\alpha 2}(P_{\alpha 2})$ для узла α. В достаточно общем случае она, как и исходная зависимость $\Delta u_2(\sigma_{n2})$ может быть выражена соотношением вида [6]

$$-\Delta u_{\alpha 2} = B_\alpha P_{\alpha 2} + \sum_{k=1}^{n} V_{\alpha k} \lambda_{\alpha k} \tag{6.1}$$

где первый член в правой части отвечает обратимой (упругой) составляющей скорости смещений; B_α — положительно определенная матрица упругих податливостей; второй член характеризует необратимые скорости смещений; $V_{\alpha k}$ — вектор, который определяет направление течения, соответствующее k-той моде течения; $\lambda_{\alpha k}$ — множитель, отвечающий k-той моде; поскольку направление течения определено вектором $V_{\alpha k}$, можно считать, что $\lambda_{\alpha k} \geqslant 0$; $\Delta u_{\alpha 2}$, $P_{\alpha 2}$, $V_{\alpha k}$ — векторы-столбцы.

При использовании соотношений типа (6.1) предполагается, что определяющие соотношения для контактных условий в узле α представляются в пространстве обобщенных усилий $P_{\alpha 2}$ кусочно гладкой поверхностью нагружения, которая является совокупностью M гладких поверхностей $\varphi_{\alpha k} = 0$ ($k = 1, \ldots, M$). Знак функций $\varphi_{\alpha k}$ всегда можно выбрать так, чтобы упругая область, отвечающая достигнутому состоянию, в пространстве $P_{\alpha 2}$ занимала область, в которой $\varphi_{\alpha k} < 0$ ($k = 1, \ldots, M$). Число мод n определяется числом поверхностей $\varphi_{\alpha k} = 0$, которые пересекаются в достигнутой точке поверхности нагружения (если эта точка не является точкой пересечения, то $n = 1$). Вектор-столбец внешней нормали к $\varphi_{\alpha k} = 0$ обозначается $N_{\alpha k}$. Каждый из векторов $V_{\alpha k}$ также связан с поверхностью $\varphi_{\alpha k} = 0$ и считается направленным вне упругой области, то есть $V_{\alpha k}^{*} N_{\alpha k} > 0$ (верхняя звездочка здесь и ниже означает транспонирование). При ассоциированном законе течения $V_{\alpha k} = N_{\alpha k}$ — течение происходит по нормали к поверхности $\varphi_{\alpha k} = 0$ вне упругой области. Тот факт, что в общем случае каждая из функций $\varphi_{\alpha k}(P_{\alpha 2})$ содержит параметры, зависящие от всех активированных мод, может быть выражен равенством [6]

$$\dot{\varphi}_{sk} = N_{sk}^{*} \dot{P}_{s2} - \sum_{j=1}^{n} H_{skj} \dot{\lambda}_{sj} \quad (k = 1, \dots, n) \tag{6.2}$$

где H_{skj} — коэффициенты квадратной $n \times n$ матрицы, характеризующие влияние на k-тую поверхность $\varphi_{sk} = 0$ моды течения j, связанной с поверхностью $\varphi_{sj} = 0$; при упрочнении на контактах H_s — неотрицательно определенная матрица; при разупрочнении диагональные члены отрицательны, чему соответствует перемещение поверхности нагружения внутрь упругой зоны в пространстве P_{s2}.

Соотношения (6.1), (6.2) линейны. Однако, зависимость между φ_{sk} и λ_k нелинейна: $\varphi_{sk}\dot{\lambda}_k = 0$ ($k = 1, \dots, n$). Это соотношение выражает тот факт, что, если пластическое течение по моде k не происходит, то $\dot{\lambda}_k = 0$, а, если оно имеет место, то изображающая точка остается на поверхности $\varphi_{sk} = 0$ в процессе течения ($\dot{\varphi}_{sk} = 0$).

Вводя векторы $\dot{\lambda}_s^{*} = [\dot{\lambda}_{s1} \dots \dot{\lambda}_{sn}]$, $\dot{\varphi}_s^{*} = [\dot{\varphi}_{s1} \dots \dot{\varphi}_{sn}]$ и матрицы $N_s = [N_{s1} \dots N_{sn}]$, $V_s = [V_{s1} \dots V_{sn}]$, предыдущие соотношения можно записать в виде

$$-\Delta \dot{u}_{s2} = B_s \dot{P}_{s2} + V_s \dot{\lambda}_s$$

$$\dot{\varphi}_s = N_s^{*} \dot{P}_{s2} - H_s \dot{\lambda}_s, \quad \dot{\lambda}_s \geqslant 0, \quad \varphi_s \leqslant 0, \quad \varphi_s^{*} \dot{\lambda}_s = 0$$

Для системы всех m узлов можно ввести векторы $\Delta \dot{u}_2^{*} = [\Delta \dot{u}_{12} \dots \Delta \dot{u}_{m2}]$, $\dot{\lambda}^{*} = [\dot{\lambda}_1^{*} \dots \dot{\lambda}_m^{*}]$, $\varphi_1^{*} = [\varphi_1^{*} \dots \varphi_m^{*}]$, $\dot{P}_2^{*} = [\dot{P}_{12} \dots \dot{P}_{m2}]$ и матрицы

$$B = \begin{vmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & B_m \end{vmatrix}; \quad V = \begin{vmatrix} V_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & V_m \end{vmatrix}; \quad N = \begin{vmatrix} N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & N_m \end{vmatrix}; \quad H = \begin{vmatrix} H_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & H_m \end{vmatrix}$$

Тогда обобщенная зависимость скоростей узловых смещений от скоростей узловых сил на поверхности взаимодействия выражается соотношениями

$$-\Delta \dot{u}_2 = B \dot{P}_2 + V \dot{\lambda}$$

$$\dot{\varphi} = N^{*} \dot{P}_2 - H \dot{\lambda}, \quad \dot{\lambda} \geqslant 0, \quad \varphi \leqslant 0, \quad \varphi^{*} \dot{\lambda} = 0 \tag{6.3}$$

Уравнения вида (6.3), содержащие среди неизвестных вектор $\dot{\lambda}$, подробно изучены при задании вектора $\dot{P}_2$ или $\Delta \dot{u}_2$ [5, 23, 24]. Однако в (6.3) эти величины заранее неизвестны. Они могут быть найдены только после присоединения дополнительных соотношений, получающихся из решения задачи для объема V. При заданных вне поверхности взаимодействия Σ граничных условиях и произвольном векторе скоростей узловых усилий $\dot{P}_1$ на Σ, решая дискретизированную задачу для V, получаем зависимость

$$\Delta \dot{u}_1 = A \dot{P}_1 - \Delta \dot{U} \tag{6.4}$$

где A и ΔU — матрица и вектор, зависящие только от координат узловых точек на Σ и условий задачи вне поверхности Σ. Для линейно-упругой среды матрица A в большинстве случаев задания условий вне Σ является положительно определенной. Поскольку должно быть $P_1 = P_2 = P$, $\Delta u_1 = \Delta u_2$ (6.3), (6.4) дают окончательную систему

$$\Delta U = S^{-1}P + V\lambda$$

$$\varphi = N^*P - H\lambda,\ \lambda \geqslant 0,\quad \varphi \leqslant 0,\quad \varphi^*\lambda = 0 \tag{6.5}$$

где $S^{-1} = A + B$ — симметричная положительно определенная матрица.

Система уравнений (6.5) относительно P и λ аналогична по виду (6.3), но в отличие от (6.3) в ней роль обобщенных скоростей смещений играет известный вектор ΔU. Это позволяет очевидным образом распространить все важные заключения работ [5, 23, 24], касающиеся устойчивости и связи с квадратичным программированием, на рассматриваемые в этом пункте задачи, которые получаются при дискретизации поверхности взаимодействия и переходе к обобщенным узловым усилиям и смещениям. Не останавливаясь на этом, обратимся к другому аспекту дискретизации. А именно, используя результаты теории квадратичного программирования, можно сравнить дискретный аналог условия неустойчивости (2.3) с условиями разрешимости соответствующих математических задач.

7. Для определенности рассмотрим дискретизированную систему (6.5) предыдущего пункта при ассоциированном течении ($V = N$). Решая первое из уравнений (6.5) относительно P и подставляя в выражение для φ, можно записать систему (6.5) в несколько более удобном для последующего анализа виде

$$-\varphi = D\lambda - N^*S\Delta U,\quad -\varphi \geqslant 0,\ \lambda \geqslant 0,\quad \varphi^*\lambda = 0 \tag{7.1}$$

где $D = H + N^*SN$.

По определению (4.1) функционал I в рассматриваемом дискретном случае равен $(P_2 - P_1)^*\Delta u$. Выражение для него получается из (6.3), (6.4) при $\Delta u_1 = \Delta u_2 = \Delta u$, $\Delta U = 0$. Оно имеет вид

$$I = -\lambda^*D\lambda - (P_2 - P_1)^*\frac{AB}{A+B}(P_2 - P_1) \tag{7.2}$$

причем по одному из условий (7.1) $\lambda \geqslant 0$.

Согласно теории квадратичного программирования положительной определенности матрицы D необходимо и достаточно, чтобы задача (7.1) имела единственное решение при любом ΔU (например, [25]). В силу положительной определенности A и B из (7.2) следует, что этого условия достаточно также для отрицательной определенности функционала I. Таким образом, однозначной разрешимости задачи (7.1) достаточно, чтобы функционал I был отрицательно определенным и, тем самым, гарантировалась устойчивость в смысле определения [17].

Можно доказать и в известном смысле обратное утверждение, касающееся необходимого условия. Если при некотором не равном нулю неотрицательном векторе λ_1 выполняется неравенство

$$\lambda_1^* D \lambda_1 \leqslant 0 \qquad (7.3)$$

то существует такое $\Delta\dot{u}$, что $I \geqslant 0$, то есть имеет место неустойчивость в смысле определения [17].

Это утверждение в соответствии с существом рассматриваемой проблемы ниже доказывается при условии, что матрица $H + N^*B^{-1}N$ положительно определенная (противоположному случаю отвечает, так называемое, закритическое разупрочнение элементов механической системы, а на практике происходит их саморазрушение).

Доказательство основано на другом выражении для I, легко следующем из (6.3), (6.4) при

$$\Delta\dot{u}_1 = \Delta\dot{u}_2 = \Delta\dot{u}, \ \Delta\dot{U} = 0$$

$$I = -\Delta\dot{u}^* (A^{-1} + B^{-1}) \Delta\dot{u} + \lambda^* (H + N^*B^{-1}N)\lambda \qquad (7.4)$$

При этом из (6.3) вытекает, что входящий в (7.4) вектор λ является решением задачи

$$-\dot{\varphi} = (H + N^*B^{-1}N)\dot{\lambda} + N^*B^{-1}\Delta\dot{u}, \quad -\dot{\varphi} \geqslant 0, \quad \dot{\lambda} \geqslant 0, \quad \dot{\varphi}^* \dot{\lambda} = 0 \quad (7.5)$$

Из положительной определенности матрицы $H + N^*B^{-1}N$ следует, что к (7.5) применима теорема Куна-Таккера. Согласно этой теореме [25] вектор $\dot{\lambda}$ является решением задачи

$$\max \{\Psi = -\mu^* (H + N^*B^{-1}N)\mu - 2\mu^* N^*B^{-1}\Delta\dot{u} \mid \mu \geqslant 0\}$$

причем, если $\mu = \lambda$ — решение, то $\max\Psi = \Psi_0 = \lambda^*(H + N^*B^{-1}N)\lambda$. Тогда представление (7.4) в виде $I = -\Delta\dot{u}^*(A^{-1} + B^{-1})\Delta\dot{u} + \Psi_0$ и замена Ψ_0 на заведомо не большее значение, равное Ψ при произвольном неотрицательном μ, дает

$$I \geqslant -\Delta\dot{u}^*(A^{-1} + B^{-1})\Delta\dot{u} - \mu^*(H + N^*B^{-1}N)\mu - 2\mu^* N^*B^{-1}\Delta\dot{u}\Big|_{\mu\geqslant 0} \qquad (7.6)$$

Вектор $\Delta\dot{u}$ произволен. Поэтому можно, например, при любом $\mu \geqslant 0$ положить $\Delta\dot{u} = -ASN\mu$. Тогда из (7.6) следует $I \geqslant -\mu^* D\mu$, и, взяв в качестве μ вектор λ_1, фигурирующий в условии теоремы, получаем $I \geqslant -\lambda_1^* D\lambda_1$ что с учетом (7.3) дает доказываемое неравенство $I \geqslant 0$.

Особое место занимает случай, когда матрица D не является положительно определенной, но (7.3) выполняется только на таких векторах λ_1, которые не удовлетворяют условию $\lambda_1 \geqslant 0$. Функционал I при этом согласно (7.2) отрицателен. Однако, единственное решение

(7.1) существует не при любом ΔU. Пример задачи с системой (7.1), включающий такой случай, рассмотрен в [26]. Оказывается, что решение существует при любых внешних воздействиях ΔU, но при некоторых из них оно теряет единственность, испытывая разветвление, причем однородная задача не имеет отличных от нуля решений и малым ΔU на каждой ветви отвечают малые λ, φ, P. Согласно критериям работ [14, 17] ситуация устойчива. По-видимому, такая ее оценка отвечает реальности, поскольку энергия не выделяется, деформирование требует ее притока извне и на практике без динамических эффектов осуществляется та ветвь, для которой затраты внешней энергии минимальны.

ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐԸ ԱՄՐԱՊՆԴՄԱՆ ՎԵՐԱՑՄԱՆ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա. Մ. ԼԻՆԿՈՎ

Ամփոփում

Ամրապնդումը կորցնող էլեմենտներ պարունակող միջավայրերի համար ուսումնասիրվել են հայտնի և ստացվել են նոր կայունության բավարար պայմանները։ Տրվել է արտաքին սահմանի և շփվող միջավայրերի կոնտակտի վրա ամրապնդման վերացման հետ կապված խնդիրների համար տեսության ընդհանրացումը։

Ցույց է տրված, որ համազդեցության մակերևույթի դիսկրետ էլեմենտների տրոհման դեպքում խնդիրը կարող է բերվել քառակուսային ծրագրավորման (Ք. Ծ) հայտնի խնդրին։ Սահմանվել է ֆիզիկական անկայունության հայտանիշի կապը ՔԾ խնդրի լուծելիության պայմանների հետ։ Աշխատանքի արդյունքները առաջարկվում է օգտագործել ափերի փոխազդեցություններով ճաքերի տարածման, մեծադյուս լեռնտեսակների զանգվածների կայունության, լեռնային հարվածների և երկրաշարժերի ուսումնասիրության ժամանակ։

THE PROBLEM OF STABILITY WITH ALLOWANCE FOR SOFTENING

A. M. LINKOV

Summary

The known sufficient conditions of stability for the media containing softening elements are investigated and new ones are developed. The theory is generalized for the problems concerning softening on the contacts of the bodies and on their exterior boundaries. It is shown that by dividing the contact surface on discrete elements the problem

may be reduced to the known one in the theory of quadratic programming (QP). The connection between the physical stability and solubility conditions for the problem of QP is stated. The results are supposed to be applied in the following fields: the growth of cracks with interacting surfaces, the stability of the rock massif consisting of the system of blocks, the mechanics of rock bursts and earthquakes.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Palmer A. C., Maier G., Drucker D. C.* Normality relations and convexity of yield surfaces for unstable materials or structural elements.— J. Appl. Mech., 1966, vol. 31, No. 2, p. 464—470. (Русск. перев.: Пальмер А., Майер Д., Друкер Д. Соотношение нормальности и выпуклости поверхностей текучести для неустойчивых материалов или элементов конструкций.— Прикладная механика, серия E, ИИЛ, 1967, № 2).
2. *Ибрагимов В. А., Клюшников В. Д.* Некоторые задачи для сред с падающей диаграммой.— Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 4.
3. *Линьков А. М.* Об учете запредельных деформаций при решении задач горной геомеханики.— Тр. ВНИМИ, сб. 103, 1977, с. 71—76.
4. *Maier G., Hueckel T.* Nonassociated and coupled flow rules of elastoplasticity for rock-like materials.— Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., 1979, vol. 16, No. 2, p. 77—92.
5. *Maier G.* Behavior of elastic-plastic trusses with unstable bars.— J. Engin. Mech. Div. Proc. ASCE, 1966, vol. 92, EM 3, p. 67—91.
6. *Maier G.* "Linear" flow-laws of elastoplasticity: a unified general approach.— Accademia Nazionale dei Lincei. Estratto dai Rendiconti della Classe di Sienza fisiche, matematiche e naturali. Serie VIII, 1969, vol. 47, No. 5, p. 132—142.
7. *Salamon M. D. G.* Stability, instability and design of pillar workings.—Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 1970, vol. 7, No. 6, p. 613—631.
8. *Линьков А. М., Петухов И. М.* Проектирование целиков с учетом опасности горных ударов.— Тр. ВНИМИ, сб. 113, 1979.
9. *Леонов М. Я., Панасюк В. В.* Развиток найдрібніших тріщин в твердому тілі.— Прикладна механіка, 1959, т. 5, № 4.
10. *Dugdale D. S.* Yielding of steel sheets containing slits.— J. Mech. Phys. Solids, 1969, vol. 8, No. 2, p. 100—104.
11. *Palmer A. C., Rice J. R.* The growth of slip in progressive failure of over-consolidated clay.— Proc. Roy. Soc. London, A. 332, 1973, p. 527—548.
12. *Линьков А. М.* О механике блочного массива горных пород.— Физ.-техн. проблемы разраб. полезных ископ., 1979, № 4, с. 3—9.
13. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.
14. *Maier G.* On elastic-plastic structures with associated stress-strain relations allowing for work softening.—Mechanica, 1967, vol. 2, No. 1, p. 55—64.
15. *Maier G.* Extremum theorems for the analysis of elastic-plastic structures containing unstable elements.— Mechanica, 1967, vol. 2, No. 4, p. 235—242.
16. *Maier G.* On structural instability due to strainsoftening. In: "Instability of Continuous Systems IUTAM Symposium Herrenalb 1969". Editor H. Leipholz, Berlin-Heidelberg-New-York, Springer-Verlag, 1971, p. 411—417.
17. *Линьков А. М.* Об условиях устойчивости в механике разрушения.— Доклады АН СССР, 1977, т. 233, № 1, с. 45—48.
18. *Petuckhov I. M., Linkov A. M.* The theory of post-failure deformations and the problem of stability in rock mechanics.— Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., 1979, vol. 16, No. 2, p. 57—76.

19. *Новожилов В. В.* О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности.— ПММ, 1969, т. 33, № 2, с. 212—222.

20. *Andersson H., Bergkvist H.* Analysis of a non-linear crack model.— J. Mech. Phys. Solids, 1970, vol. 18, No. 1, p. 1—28.

21. *Линьков А. М.* О критерии типа Друкера в теории трещин. В сб. «Исследования по упругости и пластичности», сб. 10. Ленинград, изд. Ленинградского университета, 1974, с. 47—65.

22. *Линьков А. М.* Об одном интегральном соотношении в плоской задаче теории упругости.— Изв. АН СССР, МТТ, 1975, № 6, с. 82—85.

23. *Maier G.* A quadratic programming approach for certain nonlinear structural problems.—Meccanica, 1968, vol. 3, No. 2, p. 121—130.

24. *Maier G.* Some theorems for plastic strain rates and plastic strains.—Journal de Mécanique, 1969, vol. 8, No. 1, p. 5—19.

25. *Зангвилл У. И.* Нелинейное программирование. М.: «Советское радио», 1973, 312 с.

26. *Maier G., Zavelani A., Dotreppe J.-C.* Equilibrium branching due to flexural softening.— J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, 1973, vol. 99, No. EM4, p. 897—901.

ВНИИ горной геомеханики
и маркшейдерского дела

Поступила в редакцию
16. III. 1981