ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1982

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXV, № 6, 1982 Механика

О СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, ПОРОЖДЕННОГО ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ НА ДВУХ ИНТЕРВАЛАХ, И ИХ ПРИЛОЖЕНИИ К КОНТАКТНЫМ ЗАДАЧАМ

МХИТАРЯН С. М.

Ряд спектральных соотношений для интегральных операторов, встречающихся в разнообразных задачах теории упругости и математической физики, установлен в работах Г. Я. Попова [1—3], а также в других работах этого автора, подробная библиография которых приведена в [4]. Эти соотношения, содержащие ортогональные многочлены, позволяют получить эффективное решение обширного класса контактных и смешанных задач механики деформируемого тела. Применению аппарата ортогональных многочленов посвящена и работа [5].

В настоящей работе методами теории логарифмического потенциала устанавливается спектральное соотношение, дающее нечетные собственные функции логарифмического ядра в случае двух симметрических интервалов. Приводятся также четные собственные функции. Обе они являются многочленами Чебышева с видоизмененными аргументами. При помощи экспоненциальной замены переменных найдены также собственные функции родственного логарифмического ядра. В качестве приложения полученных результатов построено решение контактной задачи о вдавливании двух одинаковых кососимметрически нагруженных штампов в упругую полуплоскость.

Нечетные собственные функции логарифмического ядра в случае двух симметрических интервалов, как представляется автору, здесь приводятся впервые.

1. Введем в рассмотрение логарифмический потенциал

$$V(x, y) = \int\limits_L \ln \frac{1}{\sqrt{(x-s)^2 + y^2}}\, \varphi(s)\, ds \tag{1.1}$$

где $L = \{x : b \leqslant |x| \leqslant a\}$. При этом предполагается, что плотность источников обладает конечной мощностью, то есть

$$P = \int\limits_L \varphi(s)\, ds < \infty$$

Легко видеть, что при $r \to \infty$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$

$$V(x, y) = P \ln \frac{1}{r}$$

Чтобы получить затухающий на бесконечности потенциал, перейдем к функции

$$U(x, y) = V(x, y) + P \ln \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.2}$$

Тогда интегральное уравнение

$$\int_L \ln \frac{1}{|x - s|} \varphi(s)\, ds = f(x) \tag{1.3}$$

эквивалентно следующей внешней краевой задаче Дирихле:

$$\left|\begin{array}{l} \Delta U = 0 \quad (x, y) \in L \qquad (x^2 + y^2 \neq 0) \\ U(x, y)\big|_{y=0} = f(x) + P \ln |x| \quad (b < |x| < a) \\ U(x, y) \to 0, \quad x^2 + y^2 \to \infty \end{array}\right. \tag{1.4}$$

После того как построено решение задачи (1.4), плотность источников будет определяться по формуле

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{y \to +0} \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \quad (b < |x| < a) \tag{1.5}$$

Решение задачи (1.4) построим методом конформного отображения. С этой целью заметим, что функция ([6], стр. 720)

$$z = b\,\mathrm{sn}\left(\frac{K'}{\pi} \ln \zeta,\ k\right) \tag{1.6}$$

комплексную плоскость $z = x + iy$, разрезанную вдоль двух симметрических отрезков вещественной оси $[-a, -b]$ и $[b, a]$, совокупность которых обозначена через L, отображает на круговое кольцо

$$q_0 < \rho \leqslant 1/q_0 \qquad q_0 = \exp\left(-\pi \frac{K}{K'}\right)$$

комплексной плоскости $\zeta = \rho e^{i\tau} = \xi + i\eta$. Здесь $\mathrm{sn}(u, k)$ — эллиптическая функция Якоби [6, 7] модуля $k = b/a$,

$$K = K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}$$

полный эллиптический интеграл первого рода*, а

$$K' = K(k') = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k'^2 t^2)}} = \int_0^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1)(1 - k^2 t^2)}}$$

---

* Здесь и далее для простоты модуль k часто не записывается.

где $k' = \sqrt{1-k^2}$ — дополнительный модуль. Отметим, что при конформном отображении (1.6) верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ отображается на верхнее полукольцо $\{q_0 < \rho < 1/q_0;\ 0 < \varphi < \pi\}$, нижняя полуплоскость, следовательно, на нижнее полукольцо $\{q_0 < \rho < 1/q_0,\ -\pi < \varphi < 0\}$, а бесконечно удаленная точка плоскости z переходит в точку $\zeta = -1$ плоскости ζ. Кроме того, верхний берег разреза по отрезку $[b, a]$ переходит в верхнюю полуокружность внешней окружности $\rho = 1/q_0$ кольца, а нижний берег — в нижнюю полуокружность этой же окружности. Что касается разреза по отрезку $[-a, -b]$, то его верхний берег переходит в верхнюю полуокружность внутренней окружности $\rho = q_0$ кольца, а нижний берег — в нижнюю полуокружность этой же окружности.

Далее, удобно ввести функцию

$$w = u + iv = \frac{K'}{\pi} \ln \zeta \tag{1.7}$$

отображающую прямоугольник $\{-K \leqslant u \leqslant K;\ -K' \leqslant v \leqslant K'\}$ на упомянутое круговое кольцо. Отделяя в (1.7) действительную и мнимую части, будем иметь

$$\begin{gathered} u = \frac{K'}{\pi} \ln \rho, \quad v = \frac{K'}{\pi} \varphi \\ (q_0 \leqslant \rho \leqslant 1/q_0; \quad -\pi < \varphi \leqslant \pi) \end{gathered} \tag{1.8}$$

Теперь с учетом (1.7) функцию (1.6) можем записать в виде

$$z = b \operatorname{sn}(u + iv,\ k) \tag{1.9}$$

откуда

$$\begin{gathered} x = b\, \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn}(iv) \operatorname{dn}(iv)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(iv)} \\ y = -ib\, \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn}(iv) \operatorname{sn}(iv)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(iv)} \end{gathered} \tag{1.10}$$

где $\operatorname{cn}(u, k)$ и $\operatorname{dn}(u, k)$ — также эллиптические функции Якоби [6, 7], а u и v даются формулами (1.8).

Легко обнаружить, что координатной линии $u = -K$ соответствует дважды покрываемый отрезок $[-a, -b]$ или, согласно сказанному выше, внутренняя окружность $\rho = q_0$ кольца, а координатной линии $u = K$ — дважды покрываемый отрезок $[b, a]$ или внешняя окружность $\rho = 1/q_0$ кольца. Так как $\operatorname{sn}(K, k) = 1$, то на координатной линии $u = K$ по первой формуле (1.10) будем иметь

$$x = b \frac{\operatorname{cn}(iv) \operatorname{dn}(iv)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(iv)} \quad (-K' \leqslant v \leqslant K')$$

Воспользовавшись формулами преобразования эллиптических функций Якоби с чисто мнимыми аргументами ([7], стр. 395), отсюда получим

$$x = \frac{b}{\mathrm{dn}\,(v,\ k')}\ (-K' \leqslant v \leqslant K') \tag{1.11}$$

С другой стороны, приняв во внимание выражение функции $\mathrm{dn}\,(v,\ k')$ через эллиптический интеграл ([7], стр. 378), после простых операций находим

$$v = \int\limits_1^{x/b} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k'^2t^2)}} \quad (b \leqslant x \leqslant a) \tag{1.12}$$

Для $-a \leqslant x \leqslant -b$ эта формула должна нечетно продолжаться. Из (1.12) очевидным образом вытекает, что когда x возрастает от b до a, то v возрастает от 0 до K' и, следовательно, ею дается зависимость между переменными v и x.

Далее, исходя из (1.11) и (1.8), положим

$$\left.\begin{aligned} f_1(\varphi) &= f\left[-\frac{b}{\mathrm{dn}\,((K'/\pi)\,\varphi,\ k')}\right] \\ f_2(\varphi) &= f\left[\frac{b}{\mathrm{dn}\,((K'/\pi)\,\varphi,\ k')}\right] \end{aligned}\right\} \quad (-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi) \tag{1.13}$$

Очевидно, что функция $f_1(\varphi)$ определена на внутренней окружности $\rho = q_0$ кольца, а функция $f_2(\varphi)$ — на внешней окружности $\rho = 1/q_0$ этого же кольца. Обе они четные функции от φ. Теперь легко видеть, что краевая задача (1.4) для плоскости z с разрезом по L после конформного отображения (1.6) переходит в следующую краевую задачу для кругового кольца в плоскости ζ:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 W}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2} = 0 \quad (q_0 < \rho < 1/q_0) \\ &W(\rho,\ \varphi)\big|_{\rho=q_0} = f_1(\varphi) - P\ln\left|\frac{\mathrm{dn}\,((K'/\pi)\,\varphi,\ k')}{b}\right| \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi) \\ &W(\rho,\ \varphi)\big|_{\rho=1/q_0} = f_2(\varphi) - P\ln\left|\frac{\mathrm{dn}\,((K'/\pi)\,\varphi,\ k')}{b}\right| \\ &W(1,\ \pm\pi) = 0 \end{aligned}\right. \tag{1.14}$$

где $W(\rho,\ \varphi) = U(x,\ y)$, а связь между переменными ρ, φ и x, y, осуществляется посредством формул (1.8) и (1.10).

Формулу (1.5) также преобразуем к новым переменным, для чего запишем

$$\frac{\pi\rho}{K'}\frac{\partial W}{\partial\rho} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\pi}{K'}\frac{\partial W}{\partial \varphi}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Отсюда

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\pi}{K'\Delta_0}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial u}-\rho\frac{\partial W}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

где

$$\Delta_0=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2$$

Но из (1.9) и (1.10) будем иметь

$$\Delta_0=b^2\,|\operatorname{cn}(u+iv)\operatorname{dn}(u+iv)|^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=b\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u\operatorname{cn}(iv)\operatorname{dn}(iv)\frac{1+k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2(iv)}{[1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2(iv)]^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{ib\operatorname{sn}u\operatorname{sn}(iv)}{[1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2(iv)]^2}\left\{2k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{cn}^2(iv)\operatorname{dn}^2(iv)-\right.$$

$$\left.-[\operatorname{dn}^2(iv)+k^2\operatorname{cn}^2(iv)][1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2(iv)]\right\}$$

Поскольку $\partial x/\partial u|_{u=\pm K}=0$, то (1.5) примет вид

$$\varphi(x)=\frac{i\operatorname{sn}(iv)}{bK'\,|\operatorname{cn}(K+iv)\operatorname{dn}(K+iv)|^2}\left|\rho\frac{\partial W}{\partial \rho}\right|_{u=\pm K}\times$$

$$\times\frac{2k^2\operatorname{cn}^2(iv)\operatorname{dn}^2(iv)-[\operatorname{dn}^2(iv)+k^2\operatorname{cn}^2(iv)]\,[1-k^2\operatorname{sn}^2(iv)]}{[1-k^2\operatorname{sn}^2(iv)]^2}$$

$$(0<v<K';\ b<|x|<a)$$

После некоторых несложных преобразований получим

$$\varphi(x)=\frac{\operatorname{dn}^2(v,\,k')}{bK'k'^2\operatorname{sn}(v,\,k')\operatorname{cn}(v,\,k')}\left|\rho\frac{\partial W}{\partial \rho}\right|_{u=\pm K}\qquad(0<v<K';\ b<|x|<a)$$

С другой стороны, из (1.11)

$$\frac{dx}{dv}=\frac{bk'^2\operatorname{sn}(v,\,k')\operatorname{cn}(v,\,k')}{\operatorname{dn}^2(v,\,k')}$$

с учетом чего можем записать

$$\varphi(x)=\frac{1}{K'}\frac{dv}{dx}\left|\rho\frac{\partial W}{\partial \rho}\right|_{u=\pm K}\qquad(0<v<K';\ b<|x|<a)$$

В дальнейшем, ограничиваясь четной или нечетной функцией $f(x)$ в исходном интегральном уравнении (1.3) и приняв во внимание (1.12), формулу вычисления плотности источников окончательно можем представить в виде

$$\varphi(x) = \frac{a}{K' \sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} \left[\rho \frac{\partial W}{\partial \rho} \right]_{\rho=1/q_0} \quad (b < x < a) \tag{1.15}$$

2. Приступим к решению задачи (1.14). Метод разделения переменных в разбираемом случае даст ([8], стр. 387—388)

$$W(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \rho^n + \frac{B_n}{\rho^n} \right] \cos n\varphi + C \ln \rho + D \tag{2.1}$$

$$(q_0 < \rho < 1/q_0, \quad -\pi < \varphi \leqslant \pi)$$

Для определения неизвестных коэффициентов A_n, B_n, C и D положим

$$f_k(\varphi) = f_0^{(k)} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)} \cos n\varphi \quad (k = 1, 2)$$

$$\ln \left[\mathrm{dn}\left(\frac{K'}{\pi} \varphi, \ k' \right) \right] = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\varphi \quad (-\pi < \varphi < \pi) \tag{2.2}$$

Тогда из второго и третьего условий задачи (1.14) при помощи (2.1) и (2.2) находим

$$A_n = \frac{(f_n^{(1)} - P\alpha_n) q_0^n - (f_n^{(2)} - P\alpha_n) q_0^{-n}}{q_0^{2n} - q_0^{-2n}}$$

$$B_n = \frac{(f_n^{(2)} - P\alpha_n) q_0^n - (f_n^{(1)} - P\alpha_n) q_0^{-n}}{q_0^{2n} - q_0^{-2n}} \tag{2.3}$$

$$C = \frac{f_0^{(1)} - f_0^{(2)}}{2 \ln q_0}, \quad D = \frac{f_0^{(1)} + f_0^{(2)}}{2} + P \ln b - \alpha_0 P$$

Далее отдельно рассмотрим симметрический и кососимметрический случаи.

В симметрическом случае $f_1(\varphi) = f_2(\varphi)$ и, следовательно, можно положить

$$f_n^{(1)} = f_n^{(2)} = g_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

с учетом чего из (2.3) будем иметь

$$A_n = B_n = \frac{g_n - P\alpha_n}{q_0^n + q_0^{-n}} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$C = 0, \quad D = g_0 + P(\ln b - \alpha_0)$$

Подставляя эти выражения коэффициентов в (2.1), получим

$$W(\rho, \varphi) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n - P\alpha_n}{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi n K}{K'} \right)} (\rho^n + \rho^{-n}) \cos n\varphi + P(\ln b - \alpha_0) + g_0 \tag{2.4}$$

$$(q_0 < \rho < 1/q_0; \ -\pi < \varphi \leqslant \pi)$$

Наконец, удовлетворяя последнему условию краевой задачи (1.14), определим неизвестную до сих пор величину P:

$$P = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n g_n}{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi n K}{K'}\right)}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n}{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi n K}{K'}\right)} - \ln b} \qquad (2.5)$$

Итак, решение краевой задачи (1.14) в симметрическом случае дается формулами (2.4), (2.5).

Решение же интегрального уравнения (1.3) в разбираемом случае согласно (1.15) и (2.4) будет выражаться формулой

$$\varphi(x) = \frac{a}{K'\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} \sum_{n=1}^{\infty} (g_n - P\alpha_n)\, n\, \mathrm{th}\left(\frac{\pi n K}{K'}\right) T_n(X) \qquad (2.6)$$

$$(b < x < a)$$

где $T_n(X)$ — многочлены Чебышева первого рода, а

$$X = \cos\varphi, \quad \varphi = \frac{\pi}{K'} \int_1^{a/b} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k'^2t^2)}} \quad (b < x < a) \qquad (2.7)$$

Здесь учтено (1.12) и второе соотношение (1.8).

Займемся определением коффициентов α_n. С этой целью воспользуемся известным разложением ([9], стр. 926, ф. (22))

$$\ln[\mathrm{dn}(u, k)] = -8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}} \sin^2\left[(2n-1)\frac{\pi u}{2K}\right] \qquad (2.8)$$

где $q = \exp(-\pi(K'/K))$, а ряд сходится в полосе

$$\left|\mathrm{Im}\left(\frac{\pi u}{2K}\right)\right| < \frac{\pi}{2}\frac{K'}{K}$$

После простых преобразований (2.8) переходит в следующее:

$$\ln[\mathrm{dn}(v, k')] = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_0^{2n-1}}{(2n-1)[1-q_0^{2(2n-1)}]} +$$

$$+ 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_0^{2n-1}}{(2n-1)[1-q_0^{2(2n-1)}]} \cos\left[(2n-1)\frac{\pi v}{K'}\right]$$

С другой стороны, положив в (2.8) $u = K$, будем иметь

$$\frac{1}{2}\ln k' = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{(2n-1)[1-q^{2(2n-1)}]}$$

Если в этом разложении заменим k на k', то окончательно можем записать

$$\ln\left[\mathrm{dn}\left(\frac{K'}{\pi}\varphi,\ k'\right)\right]=\frac{1}{2}\ln k+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_0^{2n-1}}{(2n-1)\left[1-q_0^{2(2n-1)}\right]}\cos(2n-1)\varphi$$

$$(-\pi<\varphi<\pi)$$

$$\left(q_0=\exp\left(-\pi\frac{K}{K'}\right)\right)$$

Отсюда непосредственно вытекает, что

$$\alpha_0=\ln\sqrt{k},\ \alpha_{2n}=0;\ \alpha_{2n-1}=\frac{4q_0^{2n-1}}{(2n-1)\left[1-q_0^{2(2n-1)}\right]}\quad(n=1,\ 2,\ldots)\qquad(2.9)$$

Итак, коэффициенты второго разложения (2.2) выражаются формулами (2.9).

Следует отметить, что, поскольку отдельные гармоники в (2.4) не удовлетворяют последнему условию задачи (1.14), то разложения (2.4) и (2.6) в конечном итоге не приводят к спектральному соотношению, дающему четные собственные функции логарифмического ядра в случае двух симметрических интервалов. Тем не менее, они представляют самостоятельный интерес и более того, что важно, при их помощи построено решение интегрального уравнения (1.3).

Но с другой стороны, исходя из известных соотношений

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|\xi-\eta|}\frac{T_n(\eta)\,d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}=\begin{cases}(1/n)\ T_n(\xi) & (n=1,\ 2,\ldots)\\ \ln 2 & (n=0)\end{cases}$$

при помощи замены переменных*

$$\xi=\frac{2x^2-1-k^2}{1-k^2};\qquad \eta=\frac{2s^2-1-k^2}{1-k^2}$$

придем к следующему:

$$\frac{1}{\pi}\int_L\ln\frac{1}{|x-s|}\,\frac{T_n\left(\dfrac{2s^2-b^2-a^2}{a^2-b^2}\right)|s|\,ds}{\sqrt{(a^2-s^2)(s^2-b^2)}}=\begin{cases}\dfrac{1}{2n}\,T_n\left(\dfrac{2x^2-b^2-a^2}{a^2-b^2}\right) & (n=1,\ 2,\ldots)\\ \ln\dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} & (n=0)\end{cases}\qquad(2.10)$$

---

* Это преобразование использовано в работе [10] при построении системы ортогональных многочленов на двух симметрических интервалах.

Соотношением (2.10) даются четные собственные функции. Сопоставление (2.6) и (2.10) показывает, что входящие в них весовые функции разные.

Обращаясь теперь к кососимметрическому случаю, когда $f_1(\varphi) = -f_2(\varphi)$, в первом разложении (2.2) положим

$$f_n^{(1)} = -f_n^{(2)} = -h_n \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

В разбираемом случае $P = 0$, что автоматически обеспечивает условие затухания исходного логарифмического потенциала $V(x,\ y)$ на бесконечности.

Тогда из (2.3) будем иметь

$$A_n = -B_n = \frac{h_n}{2\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{\pi n K}{K'}\right)} \quad (n = 1,\ 2, \ldots)$$

$$C = -\frac{h_0}{\ln q_0} = \frac{h_0 K'}{\pi K}; \quad D = 0$$

Подставляя эти выражения коэффициентов в (2.1), получим

$$W(\rho,\ \varphi) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\mathrm{sh}\left(\dfrac{\pi n K}{K'}\right)} (\rho^n - \rho^{-n}) \cos n\varphi + \frac{h_0 K'}{\pi K} \ln \rho \tag{2.11}$$

$$(q_0 < \rho < 1/q_0;\ -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi)$$

Очевидно, что функция $W(\rho,\ \varphi)$ из (2.11), а также любая ее гармоника удовлетворяют последнему условию задачи (1.14). Соответствующая потенциалу (2.11) плотность источников согласно (1.15) будет выражаться формулой

$$\nu(x) = \frac{a}{K'\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n h_n \,\mathrm{cth}\left(\frac{\pi n K}{K'}\right) T_n(X) + \frac{h_0 K'}{\pi K} \right] \tag{2.12}$$

$$(b < x < a)$$

где опять приняты обозначения (2.7).

Пусть теперь, в частности,

$$h_m = 0 \quad (m \neq n); \quad h_n = 1 \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

Тогда каждое из разложений (2.11) и (2.12) будет содержать только одну гармонику. Подставляя эти гармоники в (1.1) и принимая во внимание, что в (1.2) $P = 0$, придем к следующему спектральному соотношению:

$$\int_b^a \ln \frac{x + s}{|x - s|} \frac{T_n(S)\,ds}{\sqrt{(a^2 - s^2)(s^2 - b^2)}} = \lambda_n T_n(X) \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots) \tag{2.13}$$

где

$$S = \cos\vartheta; \quad \vartheta = \frac{\pi}{K'}\int\limits_1^{s/b} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} \qquad (b < s < a)$$

$$\lambda_n = \frac{K'}{an}\, th\left(\frac{\pi nK}{K'}\right), \quad \lambda_0 = \frac{\pi K}{a}$$

Соотношением (2.13) даются нечетные собственные функции логарифмического ядра в случае двух симметрических интервалов.

На основе (2.11) и (2.12) можно установить также родственное с (2.13) соотношение, имеющее место на вещественной оси Ox вне L, точнее на положительной полуоси вне интервала $b < x < a$. С этой целью заметим, что из (1.10) при $v = 0$

$$x = b \operatorname{sn} u, \quad y = 0 \quad (-K \leqslant u \leqslant K)$$

то есть координатная линия $v = 0$ представляет собой отрезок $-b \leqslant x \leqslant b$ вещественной оси Ox. С другой стороны, приняв во внимание известные представления эллиптических функций Якоби в окрестности точки ik' ([7], стр. 392) и положив $v = v' - K'$, можем записать

$$\operatorname{sn}(iv' - iK') \simeq -\frac{i}{kv'}; \quad \operatorname{cn}(iv' - iK') \simeq \frac{1}{kv'}; \quad \operatorname{dn}(iv' - iK') \simeq \frac{1}{v'}$$

$$(v' \to 0)$$

Отсюда и из (1.10) вытекает, что при $v = K'$

$$x = \frac{a}{\operatorname{sn} u}, \quad y = 0 \quad (-K \leqslant u \leqslant K)$$

то есть координатная линия $v = K'$ представляет собой два луча вещественной оси $|x| > a$. Чтобы иметь дело только с отрезками положительной полуоси, будем считать $0 \leqslant u \leqslant K$.

Тогда в каждом из разложений (2.11) и (2.12) опять удерживая только по одной гармонике, соответствующих друг другу, а затем подставляя их выражения в (1.1), после несложных выкладок придем к интегральным соотношениям

$$\int\limits_b^a \ln\frac{x+s}{|x-s|}\, \frac{T_n(S)\, ds}{\sqrt{(a^2-s^2)(s^2-b^2)}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{K'}{an \operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi nK}{K'}\right)} \operatorname{sh}\left(\dfrac{\pi nu}{K'}\right) & (0 < x < b) \\[2ex] \dfrac{(-1)^n K'}{an \operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi nK}{K'}\right)} \operatorname{sh}\left(\dfrac{\pi nu}{K'}\right) & (x > a) \\[2ex] (n = 1, 2, \ldots) & \end{cases}$$

$$\int_b^a \ln \frac{x+s}{|x-s|} \frac{ds}{\sqrt{(a^2-s^2)(s^2-b^2)}} = \frac{\pi}{a} u \quad (0 < x < b; \quad x > a)$$

где

$$u = \int_0^{x/b} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (0 < x < b)$$

$$u = \int_0^{a/x} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (x > a)$$

Здесь учтено, что согласно первой формуле (1.8) $\rho = \exp(\pi u/K')$. Очевидно, что случай $n = 0$ исчерпывается предельным переходом $n \to 0$ так как

$$\lim_{n \to 0} \frac{\operatorname{sh} \dfrac{\pi n u}{K'}}{n} = \frac{\pi u}{K'}$$

Последнее обстоятельство дает возможность объединять все эти формулы. Окончательно получим

$$\begin{gathered}\int_b^a \ln \frac{x+s}{|x-s|} \frac{T_n(s)\,ds}{\sqrt{(a^2-s^2)(s^2-b^2)}} = \frac{K'}{an \operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi n K}{K'}\right)} \times \\ \times [H(b-x) + (-1)^n H(x-a)] \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n u}{K'}\right) \\ (n = 0, 1, 2, \ldots, \quad 0 < x < b; \quad x > a)\end{gathered} \tag{2.14}$$

где $H(x)$ — известная функция Хевисайда, а

$$u = \int_0^{c(x)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad c(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{b} & (0 < x < b) \\ \dfrac{a}{x} & (x > a) \end{cases} \tag{2.15}$$

Соотношение (2.14) вместе с (2.13) определяет значение входящего в их левую часть интеграла на положительной полуоси и, следовательно, на всей вещественной оси.

Далее, в (2.13) положим

$$a = e^{\alpha/2}, \quad b = e^{-\alpha/2} \ (\alpha > 0); \quad x = e^{\xi/2}, \quad s = e^{\eta/2}$$

После простых выкладок получим

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln \left| \operatorname{cth} \frac{\xi-\eta}{4} \right| \frac{T_n(S)\, ds}{\sqrt{(a^2-s^2)(s^2-b^2)}} = \mu_n T_n(X) \qquad (2.16)$$

$$(n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

где

$$\mu_n = 2\lambda_n \ (n = 1, 2, \ldots), \quad \mu_0 = 2\lambda_0 = 2\pi \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right) K(\exp(-\alpha))$$

$$S = \cos\theta; \quad \theta = \frac{\pi \exp\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2K'} \int_{-\alpha}^{\eta} \frac{d\tau}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}\tau)}}$$

$$X = \cos\varphi; \qquad \varphi = \frac{\pi \exp\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2K'} \int_{-\alpha}^{\xi} \frac{d\tau}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}\tau)}}$$

Спектральным соотношением (2.14) даются собственные функции ядра

$$\ln \left| \operatorname{cth} \frac{\xi-\eta}{4} \right| \quad (-\alpha < \xi,\ \eta < \alpha)$$

Совершенно аналогичным образом, как выше, можно получить родственное с (2.16) соотношение, справедливое при $|\xi| > \alpha$. Однако, на этом останавливаться не будем.

В заключение пункта отметим, что вопрос о возможности предельного перехода $b \to 0$ ($a = \mathrm{const}$) или $k \to 0$ в полученных результатах связан с определенными трудностями и здесь не обсуждается.

3. В качестве примера приложения полученных результатов рассмотрим контактную задачу о вдавливании двух одинаковых штампов в упругую полуплоскость без учета сил трения и сцепления. Пусть они соединены между собой абсолютно жестким стержнем и под действием вертикальной силы P, приложенной в середине стержня, и опрокидывающего момента M система штампов вдавливается в упругую полуплоскость, вследствие чего, появляется контактная зона вдоль L. Тогда определение нормального давления $p(x)$ под штампами сводится к решению интегрального уравнения [11, 12]

$$\int_L \ln \frac{1}{|x-s|} p(s)\, ds = \frac{\delta + \gamma x - f(x)}{\vartheta_0} \qquad (3.1)$$

$$\left(\vartheta_0 = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}, \quad x \in L \right)$$

где δ — осадка штампов, γ — угол их поворота, а $f(x)$ — характеризующая основание штампов функция, ν и E — упругие константы полуплоскости. Представляя функцию $f(x)$ в виде суммы четного и нечетного компонентов

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x) \quad (f_\pm(-x) = \pm f_\pm(x))$$

уравнение (3.1) в свою очередь сведем к следующим:

$$\int\limits_b^a \ln \frac{1}{|x^2 - s^2|} p_+(s)\, ds = \frac{\delta - f_+(x)}{\theta_0} \tag{3.2}$$

$$(b < x < a)$$

$$\int\limits_b^a \ln \frac{x + s}{|x - s|} p_-(s)\, ds = \frac{\gamma x - f_-(x)}{\theta_0} \tag{3.3}$$

Уравнением (3.2) описывается симметрический случай нагружения штампов, а уравнением (3.3) — кососимметрический случай.

Решение уравнений (3.2) и (3.3) можно построить методом М. Г. Крейна [13, 14], притом решения этих уравнений при правой части, равной единице, непосредственно получаются из (2.10) и (2.13), когда $n=0$.

Здесь ограничимся обсуждением кососимметрического случая и к уравнению (3.3) применим изложенные выше результаты. С этой целью положим

$$p_-(x) = \frac{1}{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} p_n T_n(X) \tag{3.4}$$

$$(b < x < a)$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n T_n(X); \quad g(x) = \frac{1}{\theta_0} [\gamma x - f_-(x)]$$

Подставляя (3.4) в (3.3) и используя (2.13), легко находим неизвестные коэффициенты p_n:

$$p_n = \frac{g_n}{\mu_n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Далее запишем моментные условия равновесия штампов

$$M = 2 \int\limits_b^a x p_-(x)\, dx$$

Внося сюда выражение $p_-(x)$ из (3.4), будем иметь

$$M = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_n \frac{g_n}{\mu_n}$$

где

$$J_n = \int\limits_b^a \frac{x T_n(X)\, dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

С учетом (1.11) и (2.7) этот интеграл преобразуется к следующему:

$$J_n = \frac{kK'}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos n\varphi\, d\varphi}{\operatorname{dn}\left(\frac{K'}{\pi}\varphi,\ k'\right)} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

С другой стороны, приняв во внимание разложение 8.146.7 ([9], стр. 925), можем записать

$$\frac{1}{\operatorname{dn}\left(\frac{K'}{\pi}\varphi,\ k'\right)} = \frac{\pi}{2kK'}\left[1 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q_0^n}{1+q_0^{2n}}\cos n\varphi\right]$$

$$\left(0 < \varphi < \pi; \quad q_0 = \exp\left(-\pi\frac{K}{K'}\right)\right)$$

откуда непосредственно вытекает, что

$$J_n = \frac{(-1)^n\pi}{2\operatorname{ch}\left(\frac{\pi nK}{K'}\right)} \quad (n = 0,\ 1,\ 2\ldots) \tag{3.5}$$

С учетом последнего равенства получим

$$M = \pi\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{g_n}{\mu_n\operatorname{ch}\left(\frac{\pi nK}{K'}\right)} \tag{3.6}$$

Теперь воспользуемся условиями ортогональности

$$\int_b^a T_n(X)\,T_m(X)\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} = \begin{cases} \frac{K'}{a} & (n = m = 0)\\ \frac{K'}{2a} & (n = m \neq 0)\\ 0 & n \neq m\end{cases}$$

которые дают

$$g_0 = \frac{a}{\vartheta_0 K'}(\gamma J_0 - f_0), \quad g_n = \frac{2a}{\vartheta_0 K'}(\gamma J_n - f_n) \quad (n = 1,\ 2,\ldots) \tag{3.7}$$

Для определения γ остается (3.7) подставить в (3.6) и учесть (3.5). Опуская промежуточные простые выкладки, приведем окончательный результат:

$$\gamma = \frac{2\vartheta_0 KK'}{\pi a^2}\,\frac{M + \frac{a^2}{\vartheta_0 K'}\left[\frac{f_0}{K} + \frac{2\pi}{K'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n f_n}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi nK}{K'}\right)}\right]}{1 + \frac{4\pi K}{K'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi nK}{K'}\right)}} \tag{3.8}$$

В случае штампов с плоскими основаниями $f_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ и, следовательно, (3.8) принимает вид

$$\gamma = \frac{2\theta_0 K K'}{\pi a^2} \frac{M}{1 + \dfrac{4\pi K}{K'} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\mathrm{sh}\left(\dfrac{\pi n K}{K'}\right)}} \tag{3.9}$$

Заметим, что входящий в (3.9) ряд сходится с довольно большой скоростью. Можем найти также вертикальные перемещения граничных точек упругой полуплоскости вне штампов. Согласно (2.14) они будут выражаться формулой

$$v(x) = \frac{K'}{a} \sum_{n=0}^{\infty} [H(b-x) + (-1)^n H(x-a)] \frac{g_n \,\mathrm{sh}\left(\dfrac{\pi n u}{K'}\right)}{n\mu_n \,\mathrm{ch}\left(\dfrac{\pi n K}{K'}\right)}$$

$$(0 < x < b;\ x > a)$$

где коэффициенты g_n даются формулами (3.7) и (3.9), а переменная u — формулами (2.15).

В заключение отметим, что изложенные здесь результаты могут применяться к разнообразным смешанным задачам теории упругости, в частности, к задачам контактного взаимодействия стрингеров и тонкостенных включений с массивными телами.

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

ԵՐԿՈՒ ԻՆՏԵՐՎԱԼՆԵՐԻ ՎՐԱ ԼՈԳԱՐԻԹՄԱԿԱՆ ԿՈՐԻԶՈՎ ԾՆՎՈՂ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԵՎ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ՆՐԱՆՑ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Լոգարիթմական պոտենցիալի տեսության մեթոդների օգնությամբ արտածվում է մի սպեկտրալ առնչություն, որը տալիս է երկու համաչափ միջակայքերի դեպքում լոգարիթմական կորիզի կենտ սեփական ֆունկցիաները։ Աշխատանքում բերվում են նաև զույգ սեփական ֆունկցիաները։ Այդ երկու տիպի ֆունկցիաներն էլ իրենցից ներկայացնում են ձևափոխված արգումենտներով Չեբիշևի բազմանդամներ։ Որպես ստացված արդյունքների կիրառություն կառուցված է շեղ-համաչափ կերպով բեռնավորված երկու միատեսակ դրոշմների՝ առաձգական կիսահարթությանը սեղմելու կոնտակտային խնդրի լուծումը։

ON THE EIGENFUNCTIONS OF THE INTEGRAL OPERATOR PRODUCED BY THE LOGARITHMIC NUCLEUS AT TWO INTERVALS AND THEIR APPLICATION TO THE CONTACT PROBLEMS

S. M. MKHITARIAN

S u m m a r y

By the methods of the theory of logarithmic potential a new spectral correlation has been established which yields odd eigenfunctions of the logarithmic nucleus in the case of two symmetric intervals. Even eigenfunctions are also reduced. The skew symmetric contact problem, in the case of two stamps, is considered as an application.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Г. Я.* Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам.— ПММ, 1963, т. 27, № 5.
2. *Попов Г. Я.* Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения.— ПММ, 1966, т. 30, № 3.
3. *Попов Г. Я.* О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости.— ПММ, 1969, т. 33, № 3.
4. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976.
5. *Александров В. М., Кучеров В. А.* О методе ортогональных полиномов в плоских смешанных задачах теории упругости.— ПММ, 1970, т. 34, № 4.
6. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
7. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж.* Курс современного анализа. Ч. II. М.: Физматгиз, 1963.
8. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
10. *Барков Г. И.* О некоторых системах многочленов, ортогональных на двух симметрических интервалах.— Изв. ВУЗов, Математика, 1960, № 4 (17).
11. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.—Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.
12. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980.
13. *Крейн М. Г.* Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода.— Докл. АН СССР, 1955, т. 100, № 3.
14. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила в редакцию
4. V. 1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXV, № 6, 1982 Механика

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ, НАГРЕВАЕМОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПО ТОРЦЕВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ОБЛАСТЬЮ НАГРЕВА

КОЛЯНО Ю. М., ПРЫЙМАК В. И.

Рассмотрим тонкую ортотропную полубесконечную пластинку $x \geqslant 0$ толщиной 2δ, главные направления упругости которой совпадают с осями прямоугольной системы координат x, y, z. Поверхность пластинки $x = 0$ нагревается по узкой зоне ширины $2h$ $(h < \delta)$ внешней средой температуры $t_0 = \mathrm{const}$, движущейся с постоянной скоростью v в положительном направлении оси ординат. Через поверхности $z = \pm\delta$ и $x = 0$ осуществляется конвективный теплообмен с внешней средой соответственно нулевой температуры и температуры $t_c(y_1) = t_1 + (t_0 - t_1) N(y_1)$. Здесь $y_1 = y - v\tau$; t_1 — температура среды, омывающей части поверхности $x = 0$ пластинки вне области нагрева; τ — время; $N(y_1) = S_-(y_1 + h) - S_+(y_1 - h)$;

$$S_\pm(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 1/2 \mp 1/2, & \xi = 0, \\ 0, & \xi < 0 \end{cases} \text{— асимметричные единичные функции.}$$

Необходимо определить термонапряженное состояние пластинки.

§ 1. *Температурное поле*

Для определения возникающего в пластинке квазистационарного температурного поля имеем уравнение теплопроводности [1]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y_1^2} - \varkappa^2 T + 2\omega \frac{\partial T}{\partial y_1} = 0 \tag{1.1}$$

и граничные условия [2]

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = [h_1 + (h_0 - h_1) N(y_1)] [T|_{x_1=0} - t_c(y_1)] \tag{1.2}$$

$$T|_{x_1\to\infty} = 0 \tag{1.3}$$

$$T|_{|y_1|\to\infty} \neq \infty \tag{1.4}$$

где $x_1 = x$; $y_1 = y - v\tau$; $k_y = \lambda_y/\lambda_x$; $\varkappa^2 = \alpha_z/\lambda_x\delta$; $\omega = v/2a_x$; $h_i = \alpha_i/\lambda_x$ $(i = 0, 1)$; λ_x, λ_y — коэффициенты теплопроводности вдоль координатвых осей x и y; α_z — коэффициент теплоотдачи с боковых поверхностей $z = \pm \delta$ пластинки; a_x — коэффициент температуропроводности; α_0, α_1 — коэффициенты теплоотдачи соответственно с области нагрева поверхности $x = 0$ и вне ее.

Вводя интегральную характеристику

$$\vartheta = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} T(0, y_1)\, dy_1 \tag{1.5}$$

условия (1.2) сведем к виду

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = h_1 T|_{x_1=0} - QN(y_1) - h_1 t_1 \tag{1.6}$$

где

$$Q = h_0 t_0 - h_1 t_1 - (h_0 - h_1)\,\vartheta \tag{1.7}$$

Такой подход вполне оправдан для узкозонального нагрева [3].

Применяя к (1.1), (1.3), (1.6) интегральное преобразование Фурье по y_1, с учетом условий (1.4) соответственно получим

$$\frac{d^2\overline{T}}{dx_1^2} - \gamma^2\overline{T} = 0 \tag{1.8}$$

$$\left.\frac{d\overline{T}}{dx_1}\right|_{x_1=0} = h_1\overline{T}|_{x_1=0} - \frac{2Q\sin\eta h}{\sqrt{2\pi}\,\eta} - \sqrt{2\pi}h_1 t_1\delta(\eta) \tag{1.9}$$

$$\overline{T}|_{x_1\to\infty} = 0 \tag{1.10}$$

где

$$\overline{T} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} T e^{i\eta y_1}\, dy_1; \qquad \gamma = \sqrt{\zeta + 2i\omega\eta}; \quad \zeta = k_y\eta^2 + \varkappa^2$$

$\delta(\eta)$ — дельта-функция Дирака.

Решение краевой задачи (1.8) — (1.10) запишется в виде

$$\overline{T} = \frac{2Q\sin\eta h}{\sqrt{2\pi}\,(\gamma + h_1)\,\eta} e^{-\gamma x_1} + \frac{\sqrt{2\pi}\,h_1 t_1\delta(\eta)}{\varkappa + h_1} e^{-\varkappa x_1} \tag{1.11}$$

Перейдя в (1.11) к оригиналу, получим

$$T = \frac{2Q}{\pi} f(x_1, y_1) + \frac{h_1 t_1}{\varkappa + h_1} e^{-\varkappa x_1} \tag{1.12}$$

где

$$f(x_1, y_1) =$$

$$= \int_0^\infty \frac{(\gamma_+ + h_1)\cos(\gamma_- x_1 + \eta y_1) - \gamma_- \sin(\gamma_- x_1 + \eta y_1)}{\eta[(\gamma_+ + h_1)^2 + \gamma_-^2]} \sin \eta h \, e^{-\gamma_+ x_1} d\eta$$

$$\gamma_\pm^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\zeta^2 + 4\omega^2\eta^2} \pm \zeta\right)$$

Использовав (1.12), из (1.5) находим

$$\theta = \frac{(\varkappa + h_1)(h_0 t_0 - h_1 t_1) I + h_1 t_1}{(\varkappa + h_1)[1 + (h_0 - h_1) I]} \tag{1.13}$$

где

$$I = \frac{2}{\pi h} \int_0^\infty \frac{(\gamma_+ + h_1)\sin^2 \eta h}{\eta^2[(\gamma_+ + h_1)^2 + \gamma_-^2]} d\eta$$

Подставляя (1.13) в (1.7), для Q получаем выражение

$$Q = \frac{h_0 t_0 (\varkappa + h_1) - h_1 t_1 (\varkappa + h_0)}{(\varkappa + h_1)[1 + (h_0 - h_1) I]} \tag{1.14}$$

Таким образом, решение уравнения (1.1) определяется формулами (1.12), (1.14).

§ 2. *Определение температурных напряжений*

Для определения напряжений, вызываемых температурным полем (1.12), воспользуемся формулами [1, 4]

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}; \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1} \tag{2.1}$$

где функция напряжений F удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4} + 2p\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial y_1^2} + q\frac{\partial^4 F}{\partial y_1^4} = -\alpha^*_{ty}\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} - \alpha^*_{tx}\frac{\partial^2 T}{\partial y_1^2} \tag{2.2}$$

Здесь $p = E_y(1/G - 2\nu_x/E_x)/2$; $q = E_y/E_x$; $\alpha^*_{tx} = \alpha^t_x E_y$; $\alpha^*_{ty} = \alpha^t_y E_y$; E_x, E_y — модули Юнга для растяжения (сжатия) вдоль главных направлений упругости x, y; ν_x — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении y при растяжении в направлении x; G — модуль сдвига; α^t_x, α^t_y — температурные коэффициенты линейного расширения в направлении x и y.

Предположим, что пластинка свободна от внешней нагрузки, то есть

$$\sigma_{xx}\big|_{x_1=0} = \sigma_{xy}\big|_{x_1=0} = 0, \quad \sigma_{xx}\big|_{x_1, |y_1| \to \infty} = \sigma_{xy}\big|_{x_1, |y_1| \to \infty} = 0 \tag{2.3}$$

$$\bar{\sigma}_{xx} = -\eta^2 \bar{F}, \quad \bar{\sigma}_{yy} = \frac{d^2 \bar{F}}{dx_1^2}, \quad \bar{\sigma}_{xy} = i\eta \frac{d\bar{F}}{dx_1} \tag{2.4}$$

$$\frac{d^4 \bar{F}}{dx_1^4} - 2p\eta^2 \frac{d^2 \bar{F}}{dx_1^2} + q\eta^4 \bar{F} = a^{\bullet}_{tx} \eta^2 \bar{T} - a^{\bullet}_{ty} \frac{d^2 \bar{T}}{dx_1^2} \tag{2.5}$$

$$\bar{\sigma}_{xx}\big|_{x_1=0} = \bar{\sigma}_{xy}\big|_{x_1=0} = 0, \quad \bar{\sigma}_{xx}\big|_{x_1=\infty} = \bar{\sigma}_{xy}\big|_{x_1=\infty} = 0 \tag{2.6}$$

Используя (1.8), частное решение $\bar{F}_r$ уравнения (2.5) находим в виде

$$\bar{F}_r = \frac{a^{\bullet}_{tx}\eta^2 - a^{\bullet}_{ty}\gamma^2}{\gamma^4 - 2p\eta^2\gamma^2 + q\eta^4} \bar{\bar{T}}$$

Общее решение $\bar{F}_0$ однородного уравнения (2.5) в зависимости от корней характеристического уравнения [1, 4]

$$\mu^4 - 2p\mu^2 + q = 0 \tag{2.7}$$

будет следующее:

1) корни уравнения (2.7) вещественные и неравные ($\pm\mu_1$, $\pm\mu_2$, $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$)

$$\bar{F}_0 = Ae^{-\eta_1 x_1} + Be^{\eta_1 x_1} + Ce^{-\eta_2 x_1} + De^{\eta_2 x_1}$$

2) корни вещественные и попарно равные ($\pm\mu_0$, $\mu_0 > 0$)

$$\bar{F}_0 = (A + Bx_1)e^{-\eta_0 x_1} + (C + Dx_1)e^{\eta_0 x_1}$$

3) корни комплексные ($\mu \pm ri$, $-\mu \pm ri$, $\mu > 0$, $r > 0$)

$$\bar{F}_0 = (A\cos\eta_r x_1 + B\sin\eta_r x_1)e^{-\eta_\mu x_1} + (C\cos\eta_r x_1 + D\sin\eta_r x_1)e^{\eta_\mu x_1},$$

где $\eta_i = \mu_i|\eta|$, $i = 0, 1, 2$; $\eta_r = r|\eta|$; $\eta_\mu = \mu|\eta|$.

Величины A, B, C, D, входящие в выражения для $\bar{F}_0$, определяются из граничных условий (2.6). Используя (2.4), по формулам обращения находим выражения температурных напряжений. В безразмерных величинах их можно записать в виде:

случай первый —

$$\sigma_x = \frac{-s}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^\infty P[d_2 e^{-\eta_1 X} - d_1 e^{-\eta_2 X} + (\eta_2 - \eta_1) R_1] d\eta$$

$$\sigma_y = \frac{s}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^\infty P\left(d_2 e^{-\eta_1 X} - d_1 e^{-\eta_2 X} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\eta} R_2\right) d\eta - \varphi(X) \tag{2.8}$$

$$\tau_{xy} = \frac{s}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^\infty P[d_2 \mu_1 e^{-\eta_1 X} - d_1 \mu_2 e^{-\eta_2 X} + (\mu_1 - \mu_2) R_3] d\eta$$

случай второй —

$$\sigma_x = -s\int_0^\infty P\eta\left[\left(d_0^+ X - l^+\right)e^{-\eta_0 X} + R_1\right]d\eta$$

$$\sigma_y = s\int_0^\infty \frac{P}{\eta}\left\{\left[d_0^+\left(\eta_0^2 X - 2\eta_0\right) - l^+\eta_0^2\right]e^{-\eta_0 X} + R_2\right\}d\eta - \varphi(X) \qquad (2.9)$$

$$\tau_{xy} = s\int_0^\infty P\left\{\left[d_0^+\left(\eta_0 X - 1\right) + l^+\eta_0^2\right]e^{-\eta_0 X} - R_3\right\}d\eta$$

случай третий —

$$\sigma_x = -s\int_0^\infty P\eta\left[\left(\frac{d_\mu^+}{\eta_r}\sin\eta_i X - l^+\cos\eta_i X\right)e^{-\eta_r X} + R_1\right]d\eta$$

$$\sigma_y = s\int_0^\infty \frac{P}{\eta}\left\{\left[\left(\frac{\eta_\mu^2 - \eta_r^2}{\eta_r}d_\mu^- - 2\eta_r\eta_\mu l^+\right)\sin\eta_i X + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\eta_r^2 l^+ - \eta_\mu^2 l^+ - 2\eta_\mu d_\mu\right)\cos\eta_i X\right]e^{-\eta_r X} + R_2\right\}d\eta - \varphi(X) \qquad (2.10)$$

$$\tau_{xy} = s\int_0^\infty P\left\{\left[\left(\frac{\eta_\mu}{\eta_r}d_\mu^- + \eta_\mu l^-\right)\sin\eta_i X + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\eta_\mu l^- - d_\mu^-\right)\cos\eta_i X\right]e^{-\eta_r X} - R_3\right\}d\eta$$

Здесь введены обозначения:

$$\sigma_j = \frac{\sigma_{jj}}{\alpha_{t}^* t_0}\quad (j = x,\ y),\quad \tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\alpha_{t}^* t_0},\qquad P = \frac{\sin\eta H}{\left[(G_+ + \mathrm{Bi}_1)^2 + G_-^2\right]\left(D_+^2 + D_-^2\right)}$$

$$s = \frac{2\left[\mathrm{Bi}_0\left(\sqrt{\mathrm{Bi}} + \mathrm{Bi}_1\right) - \mathrm{Bi}_1\theta\left(\sqrt{\mathrm{Bi}} + \mathrm{Bi}_0\right)\right]}{\pi\left(\sqrt{\mathrm{Bi}} + \mathrm{Bi}_1\right)\left[1 + (\mathrm{Bi}_0 - \mathrm{Bi}_1)L\right]},\qquad \theta = \frac{t_1}{t_0}$$

$$d_i^\pm = m_i^\pm\cos\eta Y \pm m_i^\mp\sin\eta Y,\quad m_i^\pm = G_- P_\mp \pm (G_+ - \eta_i)P_\pm$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2,\ \mu)$$

$$P_\pm = D_\pm\left[(\eta^2 - \varepsilon\xi)(G_+ + \mathrm{Bi}_1) - 2\varepsilon\eta\xi\,\mathrm{Pe}\right] \mp D_\mp\left[(\eta^2 - \varepsilon\xi)G_- + \right.$$

$$\left. + 2\varepsilon\eta\,\mathrm{Pe}\,(G_+ + \mathrm{Bi}_1)\right]$$

$$D_+ = \xi^2 - 4\eta^2\,\mathrm{Pe} - 2p\eta^2\xi + q\eta^4,\quad D_- = 4\eta\,\mathrm{Pe}\,(\xi - p\eta^2)$$

$$\xi = k_g\eta^2 + \mathrm{Bi}, \quad G_\pm^* = \left(\sqrt{\xi^2 + 4\eta^2\mathrm{Pe}^2} \pm \xi\right)/2, \quad \mathrm{Pe} = \omega\delta$$

$$R_n = Q_n e^{-G_+ X} \quad (n = 1, 2, 3), \quad Q_1 = P_+ \cos\beta - P_- \sin\beta$$

$$Q_2 = (\xi P_+ + 2\eta\,\mathrm{Pe}\,P_-)\cos\beta + (2\eta\,\mathrm{Pe}\,P_+ - G_\pm P_-)\sin\beta$$

$$Q_3 = (G_+ P_- - G_- P_+)\cos\beta + (G_+ P_- + G_- P_+)\sin\beta, \; \beta = G_- X + \eta Y$$

$$\varphi(X) = \frac{\theta\varepsilon\,\mathrm{Bi}_1}{\sqrt{\mathrm{Bi}} + \mathrm{Bi}_1} e^{-\sqrt{\mathrm{Bi}}\,X}, \quad X = \frac{x_1}{\delta}, \quad Y = \frac{y_1}{\delta}$$

$$\mathrm{Bi}_k = h_k\delta \; (k = 0, 1), \quad \mathrm{Bi} = \varkappa^2\delta^2, \quad P^\pm = P_+ \cos\eta Y \mp P_- \sin\eta Y$$

$$L = \frac{2}{\pi H}\int\limits_0^\infty \frac{(G_+ + \mathrm{Bi}_1)\sin^2\eta H}{\eta^2[(G_+ + \mathrm{Bi}_1)^2 + G_-^2]}\,d\eta, \quad H = \frac{h}{\delta}, \quad \tau = \frac{\tau'_\varphi}{\theta'_\varphi}$$

§ 3. *Исследование температурных напряжений*

В качестве примера рассмотрим пластинку, изготовленную из стеклотекстолита КАСТ-В. Вычисленные в работе [5] для такой пластинки корни уравнения (2.7) — вещественные и неравные: $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0{,}83$. В этом случае температурные напряжения в пластинке определяются выражениями (2.8), которые при $X = 0$; $Y = 0$ соответственно принимают вид:

$$\sigma_y = \frac{s}{\mu_2 - \mu_1}\int\limits_0^\infty P\left(d_2^+ - d_1^+ + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\eta} G_2\right) d\eta - \frac{\theta\varepsilon\mathrm{Bi}_1}{\sqrt{\mathrm{Bi}} + \mathrm{Bi}_1} \tag{3.1}$$

$$\sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0$$

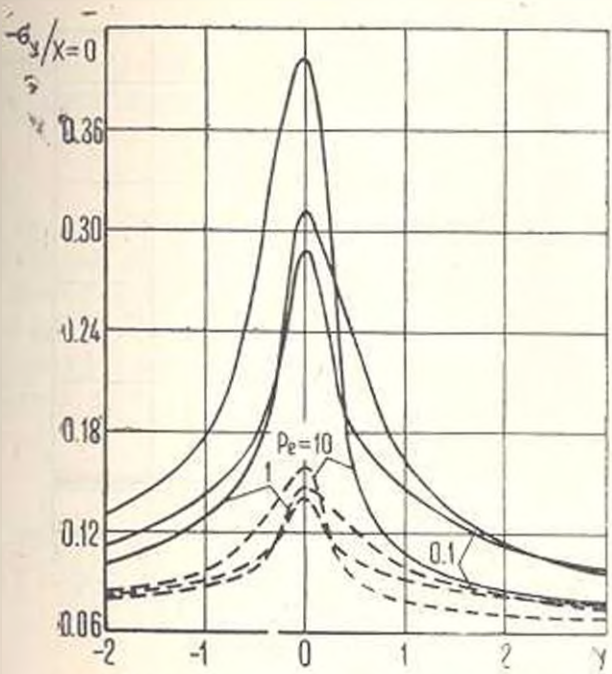
$$\sigma_x = \frac{-s}{\mu_2 - \mu_1}\int\limits_0^\infty P[m_2^- e^{-\gamma_{i2} X} - m_1^+ e^{-\gamma_{i1} X} + (\gamma_{i2} - \gamma_{i1}) L_1 e^{-G_+ X}]\,d\eta$$

$$\sigma_y = \frac{s}{\mu_2 - \mu_1}\int\limits_0^\infty P[m_2^+ e^{-\eta_{i2} X} - m_1^+ e^{-\gamma_{i1} X} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\eta} L_2 e^{-G_+ X}]\,d\eta - \varphi(X)$$

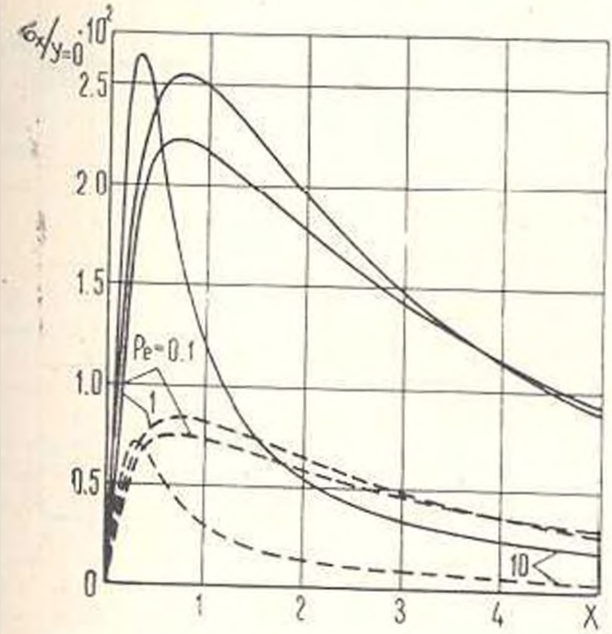
$$\tau_{xy} = \frac{s}{\mu_2 - \mu_1}\int\limits_0^\infty P[m_2^- \mu_1 e^{-\gamma_{i1} X} - m_1^- \mu_2 e^{-\gamma_{i2} X} + (\mu_1 - \mu_2) L_3 e^{-G_+ X}]\,d\eta \tag{3.2}$$

где $G_2 = Q_2|_{\beta = \eta Y}$; $L_n = Q_n\big|_{\beta = G_- X}$ $(n = 1, 2, 3)$.

По формулам (3.1), (3.2) на ЭВМ проведены расчеты распределения температурных напряжений вдоль координатных осей пластинки в зависимости от различных значений скорости движения области нагрева и теплоотдачи с части торцевой поверхности, подвергаемой нагреву, которые представлены в виде графиков на фиг. 1—4. При этом принято, что

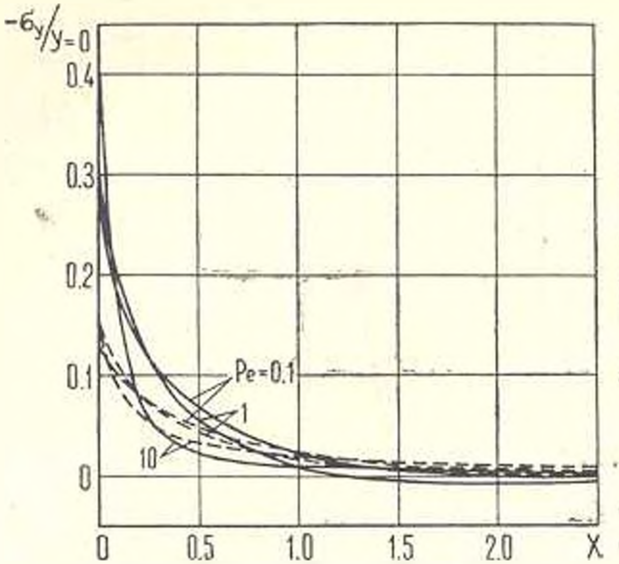


Фиг. 1. Распределение напряжений σ_y по оси $У$.

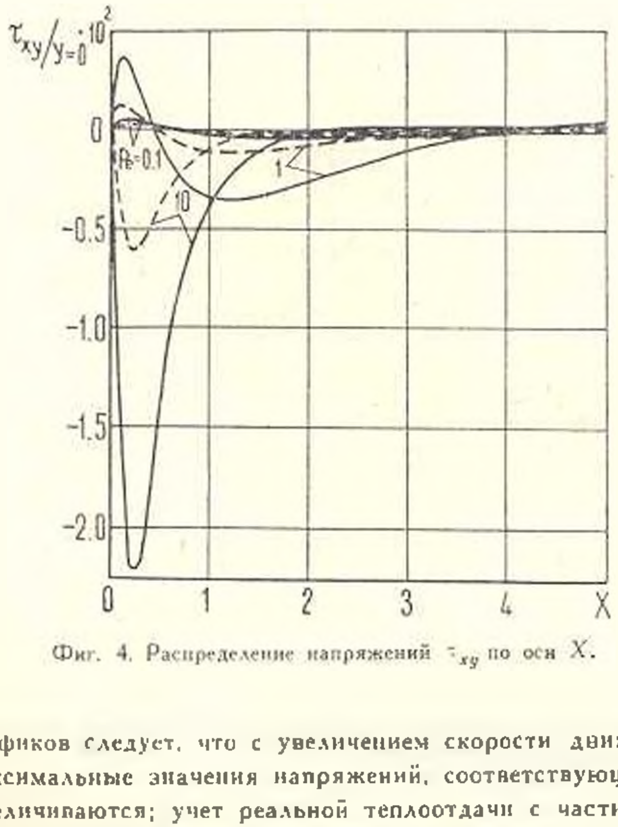


Фиг. 2. Распределение напряжений σ_x по оси X.

$H = 0{,}2$; $\theta = 0.1$; $Bi = 1$; $Bi_t = 1$. На этих фигурах сплошной линией показаны напряжения, вычисленные при $Bi_н = 5$ (реальный случай), а штриховой — при $Bi = 1$.



Фиг. 3. Распределение напряжений σ_y по оси X.



Фиг. 4. Распределение напряжений τ_{xy} по оси X.

Из графиков следует, что с увеличением скорости движения области нагрева максимальные значения напряжений, соответствующих реальному случаю, увеличиваются; учет реальной теплоотдачи с части торцевой поверхности, подвергаемой нагреву, приводит к увеличению напряжений.

ՅՈՒ. Մ. ԿՈԼՅԱՆՈ, Վ. Ի. ՊՐԻՅՄԱԿ

ՀԻՄՔԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՎՐԱՅՈՎ ՇԱՐԺՎՈՂ ՏԱՔԱՑՄԱՆ ՏԻՐՈՒՅԹՈՎ ՏԱՔԱՑՎՈՂ ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՍԱԼԻ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Որոշվել են քվազիստացիոնար ջերմային դաշտը և նրանով պայմանավորված լարումները կիսաանվերջ օրթոտրոպ սալում, որը տաքացվում է հիմքային մակերևույթի վրա բարակ դոտիով հաստատուն արագությամբ շարժվող ջերմային աղբյուրով։ Ուսումնասիրվել է տաքացման տիրույթի շարժման արագության և հիմքային մակերևույթից ջերմատվության կամ ոչ հաստատուն գործակցի մեծության ազդեցությունը սալում լարումների բաշխման վրա։

THE TEMPERATURE STRESSES IN A SEMI-INFINITE ORTHOTROPICAL PLATE HEATED BY MOVING ALONG END FACE HEATING AREA

Yu. M. KOLYANO, V. I. PRIYMAK

S u m m a r y

Quasi-stationary temperature field and stress in an orthotropical semi-infinite plate heated by convectional heat exchange caused by moving along end face heating area is determined. Stress dependence on motion speed of heating area and variable convective heat exchange is studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. К.: Наукова думка, 1972, 308 с.
2. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Громовык В. И., Лозбень В. Л.* Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи. К.: Наукова думка, 1977. 158 с.
3. *Грицько Е. Г.* Температурные поля и напряжения в ортотропной полубесконечной пластинке при кусочно-постоянном коэффициенте теплоотдачи с торцевой поверхности. В кн.: Термомеханические процессы в кусочно-однородных элементах конструкций. К.: Наукова думка, 1978, с. 173—178.
4. *Саркисян В. С.* Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд-во Ереванского ун-та, 1976, 536 с.
5. *Амбарцумян С. А., Дургарьян С. М.* Некоторые нестационарные температурные задачи для ортотропной пластинки.— Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 3, с. 120—127.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР
Львовский ордена Ленина государственный университет им. И. Франко

Поступила в редакцию 16. 1. 1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXV, № 6, 1982 Механика

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЧАСТИЧНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ С ИСТОЧНИКОМ И СТОКОМ ТЕПЛА

ХАНЖОВ А. Д.

Получено решение плоской стационарной задачи о распределении температуры и напряжений, возникающих в полубесконечной ортотропной пластинке под влиянием точечного источника и стока тепла при смешанных механических условиях на границе.

1. Рассмотрим теплоизолированную по боковым поверхностям и границе тонкую пластинку, отнесенную к прямоугольной системе координат x, y (фиг. 1).

Пусть в точке с координатами $x = c$, $y = b$ помещен точечный источник тепла, а в точке с координатами $x = -c$, $y = b$ — сток тепла. На свободном участке $|x| < a$ границы равны нулю нормальные напряжения σ_y, а на закрепленном участке $|x| > a$ — нормальные перемещения v. Касательные напряжения на всей границе пластинки отсутствуют.

Полагаем, что материал пластинки однороден и ортотропен в отношении упругих и тепловых свойств: главные направления упругой и тепловой симметрии совпадают с осями координат; тепловые и механические характеристики материала от температуры не зависят.

Задача термоупругости для ортотропной пластинки сводится к решению системы уравнений [1]

$$k_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -W[\delta(x-c) - \delta(x+c)]\delta(y-b) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + \alpha_1 T) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + \alpha_2 T) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} a_{66}\tau_{xy} \tag{1.2}$$

со следующими граничными условиями:

$$\frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0$$
$$\sigma_y(x, 0) = 0 \quad (|x| < a), \quad v(x, 0) = 0 \quad (|x| > a) \tag{1.3}$$

Здесь T — температура, W — интенсивность точечного источника и стока тепла, δ — символ функции Дирака, k_1, k_2 и α_1, α_2 — коэффициенты теплопроводности и температурные коэффициенты линейного расширения в направлении осей x, y. Другие обозначения являются общепринятыми [2], [7].

Применяя к уравнениям (1.1), (1.2) интегральное преобразование Фурье [3] по переменной x и предполагая, что температура, напряжения и производные от этих величин на бесконечности равны нулю, находим выражения для трансформант температуры и напряжений [4]

$$\overline{T}(\xi, y) = \frac{Qi\sin c\xi}{s_1|\xi|} e^{-s_1|y-b||\xi|} + Ae^{-s_1(y-b)|\xi|} \tag{1.4}$$

$$\bar{\sigma}_y(\xi, y) = Be^{-ys_2|\xi|} + Ce^{-ys_3|\xi|} + \frac{Qi\sin c\xi}{|\xi|}\sum_{n=1}^{3} G_n e^{-s_n|y-b||\xi|} + G_1 s_1 A e^{-s_1(y-b)|\xi|} \tag{1.5}$$

$$\bar{\tau}_{xy}(\xi, y) = \frac{1}{i\xi}\frac{d\bar{\sigma}_y(\xi, y)}{dy}, \quad \bar{\sigma}_x(\xi, y) = -\frac{1}{\xi^2}\frac{d^2\bar{\sigma}_y(\xi, y)}{dy^2} \tag{1.6}$$

Здесь

$$Q = \frac{W}{\sqrt{2\pi}\,k_2}, \quad G_n = \frac{\alpha_1 s_n^2 - \alpha_2}{a_{11}(s_j^2 - s_n^2)(s_k^2 - s_n^2)s_n}$$

$$n = 1, 2, 3 \quad \begin{cases} j = 2, \ k = 3 \ \text{при} \ n = 1 \\ j = 3, \ k = 1 \ \text{при} \ n = 2 \\ j = 1, \ k = 2 \ \text{при} \ n = 3 \end{cases}$$

$$s_1 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}, \quad s_2, s_3 = \left\{(2a_{11})^{-1}\left[(2a_{12} + a_{66}) \pm \sqrt{(2a_{12} + a_{66})^2 - 4a_{11}a_{22}}\right]\right\}^{1/2}$$

причем $(2a_{12} + a_{66})^2 > 4a_{11}a_{22}$.

Удовлетворяя первым двум интегрально преобразованным граничным условиям

$$\frac{d\overline{T}(\xi, 0)}{dy} = 0, \quad \bar{\tau}_{xy}(\xi, 0) = 0$$

из выражений (1.4), (1.5), (1.6) находим постоянные интегрирования A и C

$$A = \frac{Qi\sin c\xi}{s_1|\xi|} e^{-2bs_1|\xi|} \tag{1.7}$$

$$C = -\frac{s_2}{s_3}B - G_1\frac{s_1^2}{s_3}Ae^{s_1b|\xi|} + \frac{Qi\sin c\xi}{s_3|\xi|}\sum_{n=1}^{3} G_n s_n e^{-s_n b|\xi|} \tag{1.8}$$

Для определения постоянной B воспользуемся соотношениями [2]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + \alpha_1 T, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_{66}\tau_{xy}$$

из которых после применения интегральных преобразований к ним получим

$$\bar{v} = \frac{a_{12} + a_{66}}{\xi^2} \frac{d\bar{\sigma}_y}{dy} - \frac{a_{11}}{\xi^4} \frac{d^3\bar{\sigma}_y}{dy^3} + \frac{\alpha_1}{\xi^2} \frac{d\bar{T}}{dy} \tag{1.9}$$

Применяя теорему обращения для преобразования Фурье к выражениям (1.5), (1.9), удовлетворим последним двум граничным условиям (1.3).

Таким образом, учитывая нечетность функций $\bar{\sigma}_y$ и $\bar{v}$ по переменной ξ, приходим к парным интегральным уравнениям

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \bar{\sigma}_y(\xi, 0) \sin x\xi \, d\xi = 0, \qquad 0 < x < a \\ &\int_0^\infty \bar{v}(\xi, 0) \sin x\xi \, d\xi = 0, \qquad x > a \end{aligned} \tag{1.10}$$

Здесь

$$\bar{\sigma}_y(\xi, 0) = \frac{s_3 - s_2}{s_1} \left| B - G_1 s_1 \frac{s_1 - s_3}{s_3 - s_2} A e^{bs_1\xi} + \right.$$

$$\left. + \frac{Qi \sin c\xi}{(s_3 - s_2)\xi} \sum_{n=1}^{3} G_n (s_n + s_3) e^{-bs_n\xi} \right|$$

$$\bar{v}(\xi, 0) = \frac{a_{11}}{\xi} (s_2^2 - s_3^2) s_2 \left| B - G_2 s_1 A e^{bs_1\xi} + \right.$$

$$\left. + G_2 \frac{Qi \sin c\xi}{\xi} \left(e^{-bs_1\xi} - e^{-bs_2\xi}\right) \right|$$

Если ввести новые переменные $\lambda = x/a$, $z = a\xi$, то уравнения (1.10) с учетом (1.7) и соотношения

$$\sin x\xi = \sqrt{\frac{\pi x\xi}{2}} J_{1/2}(x\xi)$$

можно записать в таком виде

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty z f(z) J_{1/2}(\lambda z) \, dz = F(\lambda), \qquad 0 < \lambda < 1 \\ &\int_0^\infty f(z) J_{1/2}(\lambda z) \, dz = 0, \qquad \lambda > 1 \end{aligned} \tag{1.11}$$

где

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \left[B - G_2 \frac{Qi \sin z/a}{z/a} e^{[illegible]} \right| \tag{1.12}$$

$$F(\lambda) = -\frac{2Qis_1}{s_1 - s_2}\sum_{n=1}^{3} G_n \int_0^\infty \frac{\sin z/a}{z/a} e^{-m_n z} J_{1/2}(\lambda z)\sqrt{z}\, dz \tag{1.13}$$

$J_{1/2}(\lambda z)$ — функция Бесселя первого рода, $m_n = bs_n/a$.

Решением уравнений (1.11) является функция [3]

$$f(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}}\int_0^1 \mu^{3/2} J_1(z\mu)\, d\mu \int_0^1 F(\mu\varphi)\,\varphi^{3/2}(1-\varphi^2)^{-1/2}\, d\varphi \tag{1.14}$$

Возвращаясь к старым переменным и принимая во внимание значение интеграла [5]

$$\int_0^1 \varphi(1-\varphi^2)^{-1/2}\sin \mu a\xi\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2} J_1(\mu a\xi)$$

из формул (1.12), (1.13), (1.14) находим

$$B = \frac{Qi\sin c\xi}{\xi} G_2 e^{-bs_2\xi} -$$

$$-\frac{2Qia^2s_2\xi}{s_1 - s_2}\sum_{n=1}^{3} G_n \int_0^1 \mu J_1(a\xi\mu)\, d\mu \int_0^\infty \frac{\sin c\xi}{\xi} e^{-bs_n\xi} J_1(\mu a\xi)\, d\xi$$

Подставляя значения A, B и C в выражения (1.4), (1.5), (1.6) и пользуясь теоремой обращения для преобразования Фурье, находим распределение температуры и напряжений в пластинке

$$T(x, y) = \frac{W}{4\pi k_2 s_1}\ln\frac{h_1 p_1}{t_1 q_1}$$

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{W}{4\pi k_2}\sum_{n=1}^{3} G_n s_n^2 \ln\frac{h_n p_n}{t_n q_n} -$$

$$-\frac{2Wa^2 s_1 s_2}{\pi k_2(s_1 - s_2)}\sum_{n=1}^{3} G_n \int_0^1 L_n(\mu)\left[\frac{s_2}{(r_2\rho_2)^{3/2}}\sin\frac{3}{2}(\theta_2 + \varphi_2) -\right.$$

$$\left.-\frac{s_3}{(r_3\rho_3)^{3/2}}\sin\frac{3}{2}(\theta_3 + \varphi_3)\right]\mu\, d\mu$$

$$\sigma_y(x, y) = \frac{W}{4\pi k_2}\sum_{n=1}^{3} G_n \ln\frac{h_n p_n}{t_n q_n} +$$

$$+\frac{2Wa^2}{\pi k_2(s_1 - s_2)}\sum_{n=1}^{3} G_n \int_0^1 L_n(\mu)\left[\frac{s_3}{(r_2\rho_2)^{3/2}}\sin\frac{3}{2}(\theta_2 + \varphi_2) -\right.$$

$$\left.-\frac{s_2}{(r_3\rho_3)^{3/2}}\sin\frac{3}{2}(\theta_3 + \varphi_3)\right]\mu\, d\mu$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{W}{2\pi k_2}\sum_{n=1}^{2} G_n s_n \left[\operatorname{arctg}\frac{x+c}{(y+b)s_n} - \right.$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{x-c}{(y+b)s_n} + \operatorname{arctg}\frac{x+c}{(y-b)s_n} - \left.\operatorname{arctg}\frac{x-c}{(y-b)s_n}\right] -$$

$$-\frac{2Wa^2 s_3 s_2}{\pi k_2 (s_3 - s_2)}\sum_{n=1}^{3} G_n \int_0^1 L_n(\mu)\left[\frac{1}{(r_2\rho_2)^{3/2}}\sin\frac{3}{2}(\theta_2+\varphi_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(r_3\rho_3)^{3/2}}\sin\frac{3}{2}(\theta_3+\varphi_3)\right]\mu d\mu$$

Здесь $h_n = (y+b)^2 s_n^2 + (x+c)^2,\quad t_n = (y+b)^2 s_n^2 + (x-c)^2$

$$p_n = (y-b)^2 s_n^2 + (x+c)^2,\quad q_n = (y-b)^2 s_n^2 + (x-c)^2$$

$$r_n = \sqrt{y^2 s_n^2 + (x-a\mu)^2},\qquad \rho_n = \sqrt{y^2 s_n^2 + (x+a\mu)^2}$$

$$\sin\theta_n = \frac{x-a\mu}{r_n},\quad \sin\varphi_n = \frac{x+a\mu}{\rho_n},\quad \cos\theta_n = \frac{ys_n}{r_n},\quad \cos\varphi_n = \frac{ys_n}{\rho_n}$$

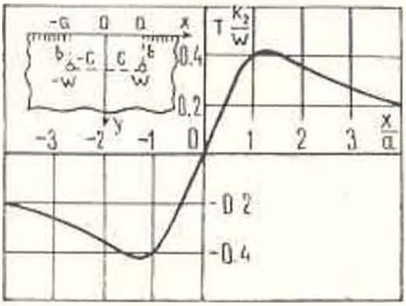
$$L_n(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{(b^2 s_n^2 + a^2\mu^2 - c^2)^2 + 4b^2 s_n^2 c^2} - (b^2 s_n^2 + a^2\mu^2 - c^2)\right]^{1/2} - c$$

$$n = 1, 2, 3$$

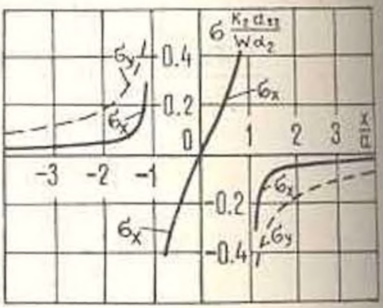
2. На фиг. 1.2 приведены графики распределения безразмерных температур и напряжений вдоль прямолинейной границы пластинки. Численный расчет проводился для пластинки, изготовленной из стеклотекстолита КАСТ-В, для которого постоянные равны [6]

$$a_{11} = 4{,}69\cdot 10^{-11}\ \text{м}^2/\text{Н},\quad a_{22} = 8{,}26\cdot 10^{-11}\ \text{м}^2/\text{Н},\quad a_{12} = -0{,}898\cdot 10^{-11}\ \text{м}^2/\text{Н}$$

$$a_{66} = 49\cdot 10^{-11}\ \text{м}^2/\text{Н},\quad \frac{k_1}{k_2} = \frac{5}{8},\quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{3}{4}$$



Фиг. 1. Распределение температуры вдоль границы пластинки



Фиг. 2. Распределение напряжений вдоль границы пластинки

Значения температур и напряжений найдены по вышеприведенным формулам при $y = 0$ для случая $b = c = a$. При переходе через точки $|x| = a$ наблюдается бесконечный разрыв напряжений.

Ա. Դ. ԽԱՆԺՈՎ

ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԱՂԲՅՈՒՐՈՎ ԵՎ ՀՈՍՔՈՎ ՄԱՍՆԱԿԻՈՐԵՆ ԱՄՐԱՑՎԱԾ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՍԱԼՈՒՄ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Ամփոփում

Ստացված է ջերմաառաձգականության հարթ ստացիոնար խնդրի լուծումը ջերմության կետային աղբյուրով և հոսքով կիսաանվերջ օրթոտրոպ սալի համար ջերմամեկուսացված եզրի վրա խառը մեխանիկական պայմանների դեպքում։

Օգտագործված է Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդը, որը թույլ է տվել ջերմային լարումների որոշման խնդիրը բերել «զույգ» ինտեգրալ հավասարումների, որոնք ունեն հայտնի լուծում։

TEMPERATURE STRESSES IN A PARTLY FIXED ORTHOTROPIC PLATE WITH A SOURCE AND FLOW OF HEAT

A. D. KHANZHOV

Summary

A plane stationary problem of thermoelasticity for a semi-infinite orthotropic plate is solved with a concentrated source and flow of heat and mixed mechanic conditions on the heat-insulated boundary.

By means of the Fourier integral transformation method the problem of the field temperature determination is reduced to the dual integral equation having a known solution.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. М.: АН СССР, 1962.
2. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957.
3. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. М.: ИЛ, 1955.
4. *Уздалов А. И.* Температурные напряжения в пластинках, ограниченных двухсвязным контуром. Изд. Саратовского университета, 1975.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, суммы, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
6. *Уздалов А. И.* Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Изд. Саратовского университета, 1967.
7. *Бантурия Р. Д.* Первая основная задача кусочно-однородной ортотропной плоскости с разрезом, перпендикулярным прямой раздела.— Сообщ. АН Груз.ССР, 1978, т. 91, № 3.

Тамбовское высшее военное авиационное инженерное училище им. Ф. Э. Дзержинского

Поступила в редакцию 20. II. 1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXV, № 6, 1982 Механика

К ПОСТРОЕНИЮ ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ МАГНИТОУПРУГОСТИ

САРКИСЯН С. О.

При помощи асимптотического метода интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных получены двумерные динамические уравнения колебаний пластинки как результат нулевого приближения асимптотического интегрирования трехмерных уравнений магнитоупругости для тонкой пластинки, включая также внешнюю задачу электродинамики.

Асимптотический метод построения двумерных уравнений пластин развит в работах [1—5]. Динамические двумерные уравнения колебаний тонкой пластинки получены в [6—7].

Впервые вопросу о построении двумерных уравнений колебаний проводящей пластинки в магнитном поле посвящены работы [8—10], где асимптотическому анализу подвергались электродинамические уравнения для внутренней задачи и сформулированы гипотезы магнитоупругости.

1. Рассматривается изотропная упругая пластинка конечной длины и постоянной толщины $2h$, изготовленная из материала с конечной электропроводностью и находящаяся во внешнем магнитном поле с заданным вектором напряженности

$$H_0 = (H_1, H_2, H_3) \tag{1.1}$$

Введем декартовую систему координат (x, y, z) так, чтобы срединная плоскость пластинки совпала с координатной плоскостью xy.

Для простоты принимается, что магнитные и диэлектрические проницаемости пластинки равны единице.

В уравнениях Ламе с учетом массовых сил электромагнитного происхождения [8] и во внутренних уравнениях электродинамики для движущейся пластинки [8] перейдем к безразмерным величинам и выполним замену переменных [6]

$$v_x = \frac{u}{h}, \quad v_y = \frac{v}{h}, \quad v_z = \frac{w}{h} \tag{1.2}$$

$$\bar{H}_i = \frac{H_i}{\sqrt{E}}, \quad (1; 2; 3), \qquad \frac{h_x}{\sqrt{E}} = \bar{h}_x, \ (x, y, z) \tag{1.3}$$

$$\frac{c}{c_0}\frac{E_x}{\sqrt{E}} = \bar{E}_x, \qquad (x, y, z), \quad \frac{c}{c_0}\frac{h\rho}{\sqrt{E}} = \bar{\rho} \tag{1.4}$$

$$\xi = \varepsilon^{-r} \frac{x}{l}, \quad \eta = \varepsilon^{-r} \frac{y}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad \tau = \frac{t}{t_0} \tag{1.5}$$

где

$$t_0 = \varepsilon^{\omega - 1} \frac{l}{c_0}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \tag{1.6}$$

Величина ω характеризует изменяемость процесса во времени, $r = p/q$ (p, q — целые числа) характеризует изменяемость по координатам, при $r = 0$ ($q = 1$, $p = 0$) изменяемость такова, что характерный размер рисунка возмущений совпадает с характерным геометрическим размером l пластинки, $\varepsilon = h/l$ — малый параметр. В дальнейшем черточки в (1.3), (1.4) опускаются. Напряженность внешнего магнитного поля представим в виде

$$H_1 = \varepsilon^{\varkappa} \sum \lambda^s H_1^{(s)}, \ (1; 2), \quad H_3 = \varepsilon^{\varkappa - 1 + r} \sum \lambda^s H_3^{(s)}, \text{ где } \lambda = \varepsilon^{1/q} \tag{1.7}$$

Символ (x, y, z) или $(1; 2; 3)$ означает, что имеет место второе или третье соотношение, которое получается из приведенных заменой x на y и z или 1 на 2 и 3.

2. Решение системы уравнений Ламе и электродинамики для внутренней задачи [8] после перехода к новым переменным ищем в виде асимптотических рядов по малому параметру λ:

$$v_x = \varepsilon^{a+1-r} \sum \lambda^s v_x^{(s)}, \ (x, y), \quad v_z = \varepsilon^{a} \sum \lambda^s v_z^{(s)} \tag{2.1}$$

$$E_x = \varepsilon^{\varkappa_1} \sum \lambda^s E_x^{(s)}, \ (x, y), \quad E_z = \varepsilon^{\varkappa_1 + 1 - r} \sum \lambda^s E_z^{(s)} \tag{2.2}$$

$$h_z = \varepsilon^{\varkappa_1 - 1 + r} \sum \lambda^s h_z^{(s)}, \quad h_x = \varepsilon^{\varkappa_1} \sum \lambda^s h_x^{(s)}, \ (x, y) \tag{2.3}$$

$$\varphi = \varepsilon^{\varkappa_1 + 1 - r} \sum \lambda^s \varphi^{(s)} \tag{2.4}$$

Значения для a, $\varkappa$, $\varkappa_1$ и ω определяются из условий, чтобы в нулевом приближении получились взаимосвязанные электромагнитоупругие уравнения и чтобы инерционные члены входили в систему уравнений нулевого приближения.

Таким образом, имеем

$$a = 1 - r, \quad \varkappa = -1 + r, \quad \varkappa_1 = 2 - 2r, \quad \omega = 2r \tag{2.5}$$

Подставляя (2.1)—(2.4) в уравнения Ламе и во внутренние уравнения электродинамики [8] и приравнивая коэффициенты при равных степенях λ в левых и правых частях каждого отдельно взятого уравнения, получаем последовательность систем уравнений для определения коэффициентов разложений (2.1)—(2.4).

Ввиду громоздкости последовательность систем уравнений не приводится.

В нулевом приближении

$$v_x^{(0)} = v_{x0}^{(0)}(\xi, \eta, \tau) - \zeta \frac{\partial v_{z0}^{(0)}}{\partial \xi}, \quad (x, y) \tag{2.6}$$

$$v_z^{(0)} = v_{z0}^{(0)}(\xi, \eta, \tau), \qquad E_z^{(0)} = E_{z0}^{(0)}(\xi, \eta, \tau), \quad (x, y) \tag{2.7}$$

$$h_z^{(0)} = h_{z0}^{(0)}(\xi, \eta, \tau) \tag{2.8}$$

Соотношения (2.6)—(2.8) представляют собой выражения известных гипотез магнитоупругости [8].

Относительно основных величин в нулевом приближении получаются уравнения:

$$\frac{1}{3(1-\nu^2)}\Delta\Delta v_{z0}^{(0)} + \frac{\partial^2 v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau^2} = R_m\left(b_{11} + b_{22} + \frac{\partial l_{13}}{\partial\xi} + \frac{\partial l_{23}}{\partial\eta}\right)\frac{\partial v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau} +$$

$$+ R_m\left(b_2 + \frac{\partial l_3}{\partial\eta}\right)E_{x0}^{(0)} - R_m\left(b_1 + \frac{\partial l_3}{\partial\xi}\right)E_{y0}^{(0)} + R_m l_3\left(\frac{\partial E_{y0}^{(0)}}{\partial\xi} - \frac{\partial E_{x0}^{(0)}}{\partial\eta}\right) -$$

$$- R_m\left(b_{13} + \frac{\partial l_{33}}{\partial\xi}\right)\frac{\partial v_{x0}^{(0)}}{\partial\tau} - R_m\left(b_{23} + \frac{\partial l_{33}}{\partial\eta}\right)\frac{\partial v_{y0}^{(0)}}{\partial\tau} - \tag{2.9}$$

$$- R_m\left(l_{13} + c_{13} - \frac{\partial N_{33}}{\partial\xi}\right)\frac{\partial^2 v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau\partial\xi} + R_m\left(l_{23} + c_{23} - \frac{\partial N_{33}}{\partial\eta}\right)\frac{\partial^2 v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau\partial\eta} -$$

$$- R_m l_{33}\frac{\partial\Delta v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau} + R_m l_{23}\frac{\partial^2 v_{x0}^{(0)}}{\partial\tau\partial\xi} + R_m l_{33}\frac{\partial^2 v_{y0}^{(0)}}{\partial\tau\partial\eta}$$

$$\frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial v_{x0}^{(0)}}{\partial\eta} - \frac{\partial v_{y0}^{(0)}}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial v_{x0}^{(0)}}{\partial\xi} + \frac{\partial v_{y0}^{(0)}}{\partial\eta}\right) -$$

$$- R_m b_{33}\frac{\partial v_{x0}^{(0)}}{\partial\tau} + R_m c_{33}\frac{\partial^2 v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau\partial\xi} + R_m\left(b_3 E_{y0}^{(0)} + b_{13}\frac{\partial v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau}\right) = 0, \ (x, y) \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial h_{z0}^{(0)}}{\partial\eta} - 4\pi R_m\left|E_{x0}^{(0)} - \frac{1}{2}\left(b_2\frac{\partial v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau} - b_3\frac{\partial v_{y0}^{(0)}}{\partial\tau} + c_3\frac{\partial^2 v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau\partial\eta}\right)\right| =$$

$$= \frac{h_y^{(0)+} - h_y^{(0)-}}{2}; \quad (x, y) \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial E_{y0}^{(0)}}{\partial\xi} - \frac{\partial E_{x0}^{(0)}}{\partial\eta} = -\frac{\partial h_{z0}^{(0)}}{\partial\tau} \tag{2.12}$$

Обозначения коэффициентов взяты из [8].

Для определения остальных величин в нулевом приближении будем иметь

$$h_y^{(0)} = \zeta\frac{\partial h_{z0}^{(0)}}{\partial\eta} - 4\pi R_m\left(\zeta E_{x0}^{(0)} - a_1\frac{\partial v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau} - a_3\frac{\partial v_{y0}^{(0)}}{\partial\tau} + d_3\frac{\partial^2 v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau\partial\eta}\right) +$$

$$+ \frac{h_y^{(0)+} + h_y^{(0)-}}{2}; \quad (x, y) \tag{2.13}$$

$$4\pi\rho^{(0)} = -\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(H_{30}\frac{\partial v_y^{(0)}}{\partial\tau} - H_{20}\frac{\partial v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(H_{10}\frac{\partial v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau} - H_{30}\frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial\tau}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(H_{20}\frac{\partial v_{x0}^{(0)}}{\partial\tau} - H_{20}\zeta\frac{\partial^2 v_{z0}}{\partial\tau\partial\xi} - H_{10}\frac{\partial v_{y0}^{(0)}}{\partial\tau} + H_{10}\zeta\frac{\partial^2 v_{z0}^{(0)}}{\partial\tau\partial\eta}\right)\right] \tag{2.14}$$

$$4\pi R_m E_z^{(0)} = \frac{\partial h_y^{(0)}}{\partial \xi} - \frac{\partial h_x^{(0)}}{\partial \eta} + H_{20}\zeta \frac{\partial^2 v_{x0}^{(0)}}{\partial \tau \partial \xi} - H_{20} \frac{\partial v_{x0}^{(0)}}{\partial \tau} +$$

$$+ H_{10}\zeta \frac{\partial^2 v_{y0}^{(0)}}{\partial \tau \partial \eta} - H_{10} \frac{\partial v_{y0}^{(0)}}{\partial \tau} \qquad (2.15)$$

где

$$R_m = \frac{\sigma h}{c} \frac{c_0}{c}$$

Напряжения в пластинке определяются соответствующими формулами.

3. Рассмотрим теперь внешнюю задачу электродинамики вне области, занимаемой пластинкой, в вакууме.

Предполагается, что во внешней области электромагнитное поле в трех направлениях имеет одну и ту же изменяемость, а по времени—такую же изменяемость, как и для внутренней задачи.

Во внешних уравнениях электродинамики произведем замену переменных

$$\xi = \varepsilon^{-r} \frac{x}{l}, \quad \eta = \varepsilon^{-r} \frac{y}{l}, \quad \zeta_1 = \varepsilon^{-r} \frac{z}{l}, \quad \tau = \frac{t}{t_0} \qquad (3.1)$$

где t_0 определяется по формуле (1.6), считая $\omega = 2r$. В дальнейшем принимается $r = 0$, то есть характерный размер рисунка возмущений совпадает с характерным геометрическим размером l пластинки.

Решение внешней задачи разыскиваем в виде асимптотических рядов

$$h_{x(e)} = \varepsilon \sum \lambda^s h_{x(e)}^{(s)} \quad (x,\ y,\ z) \qquad (3.2)$$

$$E_{x(e)} = \varepsilon^2 \sum \lambda^s E_{x(e)}^{(s)}, \quad (x,\ y) \qquad (3.3)$$

$$E_{z(e)} = \varepsilon^2 \sum \lambda^s E_{z(e)}^{(s)} \qquad (3.4)$$

После подстановки (3.2)—(3.4) во внешние уравнения электродинамики и приравнивания коэффициентов при равных степенях λ в левых и правых частях каждого отдельно взятого уравнения получается последовательность систем уравнений для определения коэффициентов разложения (3.2)—(3.4). В нулевом приближении

$$\frac{\partial h_{z(e)}^{(0)}}{\partial \eta} - \frac{\partial h_{y(e)}^{(0)}}{\partial \zeta_1} = 0, \quad (x,\ y,\ z) \qquad (3.5)$$

$$\frac{\partial h_{x(e)}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial h_{y(e)}^{(0)}}{\partial \eta} + \frac{\partial h_{z(e)}^{(0)}}{\partial \zeta_1} = 0 \qquad (3.6)$$

$$\frac{\partial E_{y(e)}^{(0)}}{\partial \zeta_1} = \frac{\partial h_{x(e)}^{(0)}}{\partial \tau} + \frac{\partial E_{z(e)}^{(0)}}{\partial \eta}, \quad (x,\ y) \qquad (3.7)$$

$$\frac{\partial E_{y(e)}^{(0)}}{\partial \xi} - \frac{\partial E_{x(e)}^{(0)}}{\partial \eta} = -\frac{\partial h_{z(e)}^{(0)}}{\partial \tau} \qquad (3.8)$$

$$\frac{\partial E_{x(e)}^{(0)}}{\partial \xi}+\frac{\partial E_{y(e)}^{(0)}}{\partial \eta}+\frac{\partial E_{z(e)}^{(0)}}{\partial \zeta_1}=0 \tag{3.9}$$

Плоскости $z=\pm h$ во внешней системе координат выражаются уравнениями $\zeta_1=\pm\varepsilon$, в нулевом приближении $\varepsilon\to 0$ и указанные плоскости выражаются как $\zeta_1=\pm 0$, то есть пластинка во внешней системе координат в нулевом приближении проявляется как математический разрез. Такое явление наблюдается и в исследованиях [11—16].

Итак, уравнения (3.5)—(3.9) можно рассматривать как уравнения во всем пространстве с источниками на плоскости $\zeta_1=0$. Источники в данном случае из себя представляют токи на плоскости $\zeta_1=0$ и поверхностные заряды.

Таким образом, в нулевом приближении с учетом граничных условий на лицевых плоскостях пластинки задача в целом приводится к решению уравнений

$$\frac{\partial h_{z(e)}^{(0)}}{\partial \eta}-\frac{\partial h_{y(e)}^{(0)}}{\partial \zeta_1}=\delta(\zeta_1)\,\theta(a\leqslant\xi\leqslant b)\,\theta(c\leqslant\eta\leqslant d)\,\psi^{(0)} \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial h_{x(e)}^{(0)}}{\partial \zeta_1}-\frac{\partial h_{z(e)}^{(0)}}{\partial \xi}=\delta(\zeta_1)\,\theta(a\leqslant\xi\leqslant b)\,\theta(c\leqslant\eta\leqslant d)\,\varphi^{(0)} \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial h_{y(e)}^{(0)}}{\partial \xi}-\frac{\partial h_{x(e)}^{(0)}}{\partial \eta}=0 \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial h_{x(e)}^{(0)}}{\partial \xi}+\frac{\partial h_{y(e)}^{(0)}}{\partial \eta}+\frac{\partial h_{z(e)}^{(0)}}{\partial \zeta_1}=0 \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial E_{y(e)}^{(0)}}{\partial \zeta_1}=\frac{\partial h_{x(e)}^{(0)}}{\partial \tau}+\frac{\partial E_{z(e)}^{(0)}}{\partial \eta} \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial E_{x(e)}^{(0)}}{\partial \zeta_1}=-\frac{\partial h_{y(e)}^{(0)}}{\partial \tau}+\frac{\partial E_{z(e)}^{(0)}}{\partial \xi} \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial E_{y(e)}^{(0)}}{\partial \xi}-\frac{\partial E_{x(e)}^{(0)}}{\partial \eta}=-\frac{\partial h_{z(e)}^{(0)}}{\partial \tau} \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial E_{x(e)}^{(0)}}{\partial \xi}+\frac{\partial E_{y(e)}^{(0)}}{\partial \eta}+\frac{\partial E_{z(e)}^{(0)}}{\partial \zeta_1}=\delta(\zeta_1)\,\theta(a\leqslant\xi\leqslant b)\,\theta(c\leqslant\eta\leqslant d)F^{(0)} \tag{3.17}$$

Здесь $\delta(\zeta_1)$ — дельта функция Дирака, $\theta(a\leqslant\xi\leqslant b)$ и $\theta(c\leqslant\eta\leqslant d)$ — функции Хевисайда; $a\leqslant\xi\leqslant b$, $c\leqslant\eta\leqslant d$ — безразмерная область, занимаемая пластинкой в плане. $\psi^{(0)}$, $\varphi^{(0)}$ и $F^{(0)}$ соответственно из себя представляют скачок величин $h_y^{(0)}$, $h_x^{(0)}$ и $\rho^{(0)}$ на разрезе $\zeta_1=\pm 0$.

Представляя решения (3.10)—(3.17) в виде

$$h_{x(e)}^{(0)}=e^{i\omega t}\,h_{x(e)}^{*}\quad(x,\ y,\ z) \tag{3.18}$$

$$E_{x(e)}^{(0)}=e^{i\omega t}\,E_{x(e)}^{*}\quad(x,\ y,\ z) \tag{3.19}$$

$$v_{z0}^{(0)} = e^{-i\omega t} v_{z0}^{*}, \quad (x,\ y,\ z) \tag{3.20}$$

Применяя двумерное интегральное преобразование Фурье [16, 17], с учетом (2.11), решения уравнений (3.10)—(3.17) приводятся к решению систем интегро-дифференциальных уравнений на суженной области:

$$E_x^{*}(\xi,\eta,0) = -\frac{\omega}{\pi}\int_a^b\int_c^d \frac{1}{\sqrt{(\xi_0-\xi)^2+(\eta_0-\eta)^2}}\left\{\frac{\partial h_z^{*}(\xi_0,\eta_0,0)}{\partial\eta_0} - \right.$$

$$\left.-4\pi R_m\left[E_x^{*}(\xi_0,\eta_0,0) - \frac{\omega}{2}\left(b_2 v_{z0}^{*} - b_3 v_{x0}^{*} + c_3\frac{\partial v_{z0}^{*}}{\partial\eta_0}\right)\right]\right\} d\xi_0 d\eta_0 \tag{3.21}$$

$$E_y^{*}(\xi,\eta,0) = \frac{\omega}{\pi}\int_a^b\int_c^d \frac{1}{\sqrt{(\xi_0-\xi)^2+(\eta_0-\eta)^2}}\left\{\frac{\partial h_z^{*}(\xi_0,\eta_0,0)}{\partial\xi_0} + \right.$$

$$\left.+4\pi R_m\left[E_y^{*}(\xi_0,\eta_0,0) + \frac{\omega}{2}\left(b_1 v_{z0}^{*} - b_3 v_{z0}^{*} + c_3\frac{\partial v_{z0}^{*}}{\partial\xi_0}\right)\right]\right\} d\xi_0 d\eta_0 \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial E_x^{*}(\xi,\eta,0)}{\partial\xi} - \frac{\partial E_y^{*}(\xi,\eta,0)}{\partial\eta} = -\omega h_z^{*}(\xi,\eta,0) \tag{3.23}$$

$$\frac{1}{3(1-\nu^2)}\Delta\Delta v_{z0}^{*} + \omega^2 v_{z0}^{*} = R_m\omega\left(b_{11}+b_{22}+\frac{\partial l_{31}}{\partial\xi_0}+\frac{\partial l_{23}}{\partial\eta_0}\right)v_{z0}^{*} +$$

$$+R_m\left(b_2+\frac{\partial l_3}{\partial\eta_0}\right)E_x^{*} - R_m\left(b_1+\frac{\partial l_3}{\partial\xi_0}\right)E_y^{*} + R_m l_3\left(\frac{\partial E_y^{*}}{\partial\xi_0} - \frac{\partial E_x^{(0)}}{\partial\eta_0}\right) -$$

$$-R_m\omega\left(b_{13}+\frac{\partial l_{33}}{\partial\xi_0}\right)v_{x0}^{*} - R_m\left(b_{23}+\frac{\partial l_{33}}{\partial\eta_0}\right)v_{y0}^{*} -$$

$$-R_m\omega\left(l_{13}+c_{13}-\frac{\partial N_{33}}{\partial\xi_0}\right)\frac{\partial v_{z0}^{*}}{\partial\xi_0} + R_m\omega\left(l_{23}+c_{23}-\frac{\partial N_{33}}{\partial\eta_0}\right)\frac{\partial v_{z0}^{*}}{\partial\eta_0} -$$

$$-R_m l_{33}\omega\Delta v_{z0}^{*} + R_m l_{33}\omega\frac{\partial v_{x0}^{*}}{\partial\xi_0} + R_m l_{33}\omega\frac{\partial v_{y0}^{*}}{\partial\eta_0} \tag{3.24}$$

$$\frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\partial}{\partial\eta_0}\left(\frac{\partial v_{x0}^{*}}{\partial\eta_0} - \frac{\partial v_{y0}^{*}}{\partial\xi_0}\right) + \frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial\xi_0}\left(\frac{\partial v_{x0}^{*}}{\partial\xi_0} + \frac{\partial v_{y0}^{*}}{\partial\eta_0}\right) -$$

$$-R_m b_{33}\omega v_{x0}^{*} + R_m c_{33}\omega\frac{\partial v_{z0}^{*}}{\partial\xi_0} + R_m(b_3 E_y^{*} + b_{13}\omega v_{z0}^{*}) = 0, \quad (x,\ y)$$

$$\frac{\partial E_y^{*}(\xi,\eta,0)}{\partial\xi} - \frac{\partial E_x^{*}(\xi,\eta,0)}{\partial\eta} = -\omega h_z^{*}(\xi,\eta,0) \tag{3.25}$$

Здесь (ξ,η) принадлежит плоскости $\zeta_1 = 0$, а (ξ_0,η_0) принадлежит части плоскости $\zeta_1 = 0$, занимаемой срединной плоскостью пластинки, $a \leqslant \xi_0 \leqslant b$, $c \leqslant \eta_0 \leqslant d$.

К системе интегро-дифференциальных уравнений (3.21)—(3.25) необходимо присоединить только условия закрепления краев пластинки.

В частном случае колебаний пластинки с цилиндрической поверхностью в магнитном поле, параллельном оси ох, уравнения (3.11)—(3.25) принимают вид

$$E_y^*(\xi, 0) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln \frac{1}{\xi_0 - \xi}\left[\frac{\partial h_z^*(\xi_0, 0)}{\partial \xi_0} + 4\pi R_m \left(E_y^*(\xi_0, 0) + b_1 \omega v_z^*\right)\right] d\xi_0 \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial E_x^*(\xi, 0)}{\partial \xi} = -\omega h_z^*(\xi, 0) \tag{3.27}$$

$$\frac{1}{3(1-\nu^2)}\frac{d^4 v_{z0}^*}{d\xi_0^4} + (\omega^2 + R_m b_{11}\omega) v_{z0}^* + R_m b_1 E_y^* = 0 \tag{3.28}$$

здесь $\xi \in (-\infty, \infty)$, а $\xi_0 \in (-1, 1)$.

Для полноты теории необходимо рассматривать погранслои у боковых поверхностей пластинки и по времени. Рассмотрению этих вопросов будут посвящены отдельные исследования.

4. Для иллюстрации применим изложенный выше метод к решению задачи о колебании по цилиндрической поверхности бесконечной пластинки при наличии внешнего магнитного поля с вектором напряженности, параллельным оси ox.

В этом случае система уравнений (3.25), (3.27) в безразмерном виде принимает форму

$$h_z(x, 0, t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\partial h_z(\xi, 0, t)}{\partial \xi} + \frac{4\pi\sigma}{c}\left[E_y(\xi, 0, t) + \frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right]\right\}\frac{d\xi}{x-\xi} \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial E_y(x, 0, t)}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial h_z(x, 0, t)}{\partial t} \tag{4.2}$$

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\rho_0 h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2\sigma h}{c}B_{01}\left[E_y(x, 0, t) + \frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right] = 0 \tag{4.3}$$

$$x, \xi \in (-\infty, \infty)$$

Решения уравнений (4.1)—(4.3) будем искать в виде волн, распространяющихся вдоль оси x

$$w = w_0 e^{i(\omega t - kx)}; \quad E_y(x, 0, t) = E_{y0} e^{i(\omega t - kx)} \tag{4.4}$$

$$h_z(x, 0, t) = h_{z0} e^{i(\omega t - kx)} \tag{4.5}$$

Подставляя значения w, $E_y(x, 0, t)$, $h_x(x, 0, t)$ из (4.4), (4.5) в систему уравнений (4.1)—(4.3), получим однородную систему алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов w_0, E_{y0} и h_{x0}; приравнивая нулю определитель этой однородной системы, получим характеристическое уравнение для определения частоты колебаний

$$\alpha_0\Omega^3 + \beta\Omega^2 + \alpha_0(1 + \alpha\beta)\Omega + \beta = 0 \tag{4.6}$$

где

$$\alpha_0 = \frac{4\pi\sigma}{\Omega_0}, \quad \beta = \frac{(1 + k)\, c^2}{kV_0^2}, \quad \alpha = \frac{V_A^2}{c^2} \tag{4.7}$$

$$V_0 = \frac{\Omega_0}{k}, \quad V_A^2 = \frac{B_{01}^2}{4\pi\rho_0}, \quad \Omega = \frac{i\omega}{\Omega_0} \tag{4.8}$$

$$\Omega_0^2 = \frac{Dk^4}{2\rho_0 h} \tag{4.9}$$

В (4.7)—(4.9) Ω_0 — собственная частота колебания пластинки в отсутствие магнитного поля, V_A — скорость распространения волн Альвена, V_0 — фазовая скорость распространения упругих волн в пластинке.

Сравнивая (4.6) с соответствующим уравнением (2.24) из книги [8], легко убедиться, что при $\mu = 1$ они полностью совпадают.

В заключение автор выражает искренную благодарность Амбарцумяну С. А. за постановку задачи и за ценные указания.

Ս. Հ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ԻՆՏԵԳՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՄԲ ՀԱՂՈՐԴՈՂ ԲԱՐԱԿ ՍԱԼԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԵՐԿՉԱՓ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է մագնիսական դաշտում վերջավոր հաղորդականության և վերջավոր չափեր ունեցող բարակ սալի տատանումների եռաչափ հավասարումները: Մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդի կիրառմամբ ստացված է սալի տատանումների ինտեգրոդիֆերենցիալ երկչափ հավասարումների համակարգը որպես ասիմպտոտիկ ինտեգրման առաջին մոտավորության արդյունք: Ասիմպտոտիկ ինտեգրման են ենթարկվում ոչ միայն սալի ներքին խնդրի մագնիսաառաձգականության հավասարումները, այլ նաև էլեկտրադինամիկայի արտաքին խնդիրը:

THE CONSTRUCTION OF TWO-DIMENTIONAL VIBRATION THEORY OF FINITE LENGTH THIN PLATE BY MEANS OF ASYMPTOTIC INTEGRATION OF MAGNETOELASTICITY EQUATIONS

S. O. SARKISIAN

S u m m a r y

The three-dimensional equations of magnetoelastic vibrations are considered for a thin plate of finite length. By means of the asymptotic method concerning the integration of differential equations, the two-dimensional integro-differential equations of magnetoelasticity for thin plates are obtained. This result is the first approximation of asymptotic integration of the three-dimensional magnetoelasticity equations for a thin plate including also the external electrodynamic problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.— ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
2. *Гольденвейзер А. Л., Колос А. В.* К построению двумерных уравнений теории упругих тонких пластинок.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 1
3. *Колос А. В.* Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
4. *Агаловян Л. А.* К теории изгиба ортотропных пластин. Инж. жур. МТТ, № 6, 1966
5. *Агаловян Л. А.* О погранслое ортотропных пластинок.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1973, т. 26, № 2.
6. *Гусейн-Заде М. И.* Асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений тонкой пластинки.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 6.
7. *Гусейн-Заде М. И.* Асимптотический анализ граничных и начальных условий в динамике тонких пластинок.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 5.
8. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Изд. Наука, 1977.
9. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругости колебаний пластинки.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
10. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Об уравнениях магнитоупругих колебаний тонких пластин.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
11. *Черепанов Г. П.* Метод внешних и внутренних разложений в теории упругости. Сб. статей: Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Изд. Машиностроение, 1975.
12. *Ван-Дейк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Изд. Мир, 1967.
13. *Колмогоров А. Н., Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С.* Об одной вероятностной задаче оптимального управления.— Докл. АН СССР, 1962, 145, № 5.
14. *Ильин А. М.* Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью.— Математический сборник, 1976, т. 99 (141), № 4.
15. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеновский Б. А.* Об асимптотике решений задачи Дирихле в трехмерной области с вырезанным тонким телом.— Докл. АН СССР, 1981, т. 256, № 1.

16. *Федорюк М. В.* Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра.— Изв. АН СССР, сер. математическая, 1981, т. 45, № 1.
17. *Попов Г. Я.* Об одном способе решения задач механики для областей с разрезами или тонкими включениями.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 1.
18. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. М.: Изд. ИЛ. 1955.

Лениниканский филиал
ЕрПИ им. К. Маркса

Поступила в редакцию
7. VII. 1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXV, № 6, 1982 Механика

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СЛОИСТЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ

МАЙБОРОДА В. П., ТРОЯНОВСКИЙ И. Е.

В [1] динамические задачи для слоистых, в том числе и вязкоупругих, конструкций ставятся и решаются в рамках теории многослойных оболочек. В настоящей работе задачи динамической устойчивости слоистых вязкоупругих конструкций ставятся и решаются с привлечением трехмерных уравнений движения линейной теории вязкоупругости.

1. Рассматривается составное тело, занимающее объем $V=\sum\limits_{n=1}^{N} V_n$, ограниченный поверхностью $\Sigma=\Sigma_u+\Sigma_p$. Каждый из N объемов V_n заполнен вязкоупругой средой, свойства которой зависят от номера n. На тело действуют массовые силы

$$f_i=f_{i0}(\bar{x})+q_{ij}(\bar{x})u_j+h_{ij}(\bar{x})\frac{\partial u_j}{\partial t}$$

на части Σ_u поверхности заданы нулевые смещения, на Σ_p — поверхностные силы

$$p_i=p_{i0}(\bar{x})+q_{ij}(\bar{x})u_j+r_{ij}(\bar{x})\frac{\partial u_j}{\partial t}$$

Здесь $i, j=1, 2, 3$, f_{0i}, q_{ij}, h_{ij}, p_{0i}, q_{ij}, r_{ij} — заданные функции радиуса-вектора $\bar{x}=(x_1, x_2, x_3)$. На границах раздела непрерывны перемещения и нормальные и касательные к поверхности раздела напряжения. Подлежат определению частоты и показатели демпфирования малых колебаний системы около положения равновесия.

Физические свойства n-го тела описываются соотношениями [2]

$$\sigma_{ij}=\tilde{\lambda}_n\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2\tilde{\mu}_n\varepsilon_{ij} \tag{1.1}$$

$$i, j, k=1, 2, 3, \quad n=1, \dots, N$$

где σ_{ij}, ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций, $\tilde{\lambda}_n$, $\tilde{\mu}_n$ — операторы Вольтерра,

$$\bar{\lambda}_n\varphi = \lambda_n\left[\varphi(t) - \int_0^t R_{\lambda n}(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\right]$$

$$\bar{\mu}_n\varphi = \mu_n\left[\varphi(t) - \int_0^t R_{\mu n}(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\right] \quad (1.2)$$

λ_n, μ_n, $R_{\lambda n}$, $R_{\mu n}$ — параметры Ламе и ядра релаксации среды, занимающий объем V_n, φ — произвольная функция времени. Предполагается малость интегральных членов в (1.2).

Пусть функция φ в (1.2) имеет вид

$$\varphi(t) = \psi(t)\,e^{-i\omega_R t}$$

где ω_R — действительная константа, ψ — медленно меняющаяся функция времени, i — мнимая единица. С помощью метода замораживания [3] вместо (1.2) можно записать приближенные соотношения

$$\lambda_n\varphi \approx \bar{\lambda}_n\varphi = \lambda_n[1 - \Gamma^c_{\lambda n}(\omega_R) - i\Gamma^s_{\lambda n}(\omega_R)]\varphi$$

$$\Gamma^c_{\lambda n}(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\lambda n}(\tau)\cos\omega_R\tau\,d\tau, \qquad \Gamma^s_{\lambda n}(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\lambda n}(\tau)\sin\omega_R\tau\,d\tau$$

второе из соотношений (1.2) преобразуется аналогично.

Постановка математической задачи о малых колебаниях системы около положения равновесия существенно зависит от наличия свободных членов f_{i0}, p_{i0} в выражениях для массовых и поверхностных сил. Если эти величины равны нулю, то положение равновесия достигается при нулевых перемещениях и напряжениях. В этом случае искомые перемещения u_i задачи о собственных колебаниях должны удовлетворять уравнениям движения

$$\bar{x}\in V_n:\quad \bar{\mu}_n\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j} + (\bar{\lambda}_n + \bar{\mu}_n)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\partial x_j} - \rho_n\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + q_{ij}u_j + h_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t} = 0 \quad (1.3)$$

и граничным условиям

$$\bar{x}\in \textstyle\sum_u:\quad u_i = 0$$

$$\bar{x}\in \textstyle\sum_p:\quad \left[\bar{\lambda}_n\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \bar{\mu}_n\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]\nu_j - q_{ij}u_j - r_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t} = 0 \quad (1.4)$$

$$i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3;\quad n = 1, \ldots, N;$$

кроме того, перемещения u_i должны иметь вид

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = \vartheta_i(x_1, x_2, x_3)\,e^{-i\omega t} \quad (1.5)$$

Здесь ϑ_j — компоненты нормали к поверхности, $\omega = \omega_R + i\omega_I$ — искомая комплексная собственная частота, ϑ_i — искомая комплексная собственная форма колебаний, ρ_n — плотность материала n-го тела. Физически ω_R представляет собой частоту, ω_I — коэффициент демпфирования собственных колебаний.

Подстановка (1.5) в (1.3), (1.4) приводит к однородной краевой задаче вида

$$\vec{x} \in V_n: \quad \bar{\mu}_n(\omega_R)\frac{\partial^2\vartheta_i}{\partial x_j \partial x_j} + [\bar{\lambda}_n(\omega_R) + \bar{\mu}_n(\omega_R)]\frac{\partial^2\vartheta_j}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+ \rho_n\omega^2\vartheta_i + q_{ij}\vartheta_j - i\omega h_{ij}\vartheta_j = 0$$

$$\vec{x} \in \sum\nolimits_n: \quad \vartheta_i = 0 \tag{1.6}$$

$$\vec{x} \in \sum\nolimits_n: \quad \left[\bar{\lambda}_n(\omega_R)\frac{\partial\vartheta_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \bar{\mu}_n(\omega_R)\left(\frac{\partial\vartheta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\vartheta_j}{\partial x_i}\right)\right]\vartheta_j - q_{ij}\vartheta_j + i\omega r_{ij}\vartheta_j = 0$$

Это — задача о собственных значениях с нелинейно входящим комплексным параметром.

В случае, когда некоторые из функций f_{i0}, p_{i0} отличны от нуля, положение равновесия не совпадает с начальным состоянием системы. В этом случае к постановке задачи устойчивости необходимо привлекать соотношения геометрически нелинейной теории вязкоупругости. Такое обобщение связано с принципиальными трудностями: физические соотношения вязкоупругости при конечных деформациях исследованы в настоящее время недостаточно. Поэтому в настоящей работе мы ограничимся постановкой и решением частной задачи динамической устойчивости. А именно, предполагается несжимаемость всех элементов системы. Кроме того, предполагается, что в положении равновесия равны нулю все компоненты вектора перемещений и, следовательно, девиаторов напряжений и деформаций, а отлично от нуля лишь среднее нормальное напряжение. Тогда при рассмотрении малых колебаний около положения равновесия можно использовать соотношения линейной теории; необходимо учесть лишь, что метрики деформированной и недеформированной систем не совпадают.

Задача о малых колебаниях системы ставится так:

$$\vec{x} \in V_n: \quad \mu_n\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial s}{\partial x_i} + q_{ij}u_j + h_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t} - \rho_n\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\vec{x} \in \sum\nolimits_n: \quad u_i = 0 \tag{1.7}$$

$$\vec{x} \in \sum\nolimits_n: \quad \left[s\delta_{ij} + \bar{\mu}_n\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]\vartheta_j - g_{ij}u_j - r_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t} +$$

$$+ \frac{\partial s_0}{\partial x_j}u_j\vartheta_i - s_0\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \vartheta_i\vartheta_k\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\vartheta_j = 0$$

Здесь σ_0 — среднее напряжение в положении равновесия, σ — его отклонение при колебаниях. Задача (1.7) записана в эйлеровой системе координат. Подчеркнутые члены, отличающие задачу (1.7) от (1.3), (1.4), появились вследствие учета того обстоятельства, что границы деформированной и недеформированной систем не совпадают.

Замена (1.5) сводит задачу (1.7) к задаче о собственных значениях. Вопрос об устойчивости положения равновесия системы в зависимости от знаков мнимых частей собственных значений параметра ω. Положение равновесия устойчиво, если мнимые части всех собственных значений отрицательны, и неустойчиво, если мнимая часть одного из собственных значений положительна.

2. Рассматривается бесконечный цилиндр, состоящий из касательных слоев. Внутренняя поверхность соединена с абсолютно жестким сердечником, вращающимся с постоянной угловой скоростью Ω, внешняя поверхность свободна от нагрузок. Все слои несжимаемы, предполагается плоское деформированное состояние (осевые смещения равны нулю). Вводится цилиндрическая система координат, вращающаяся вместе с сердечником с угловой скоростью Ω.

Под действием центробежной силы инерции в положении относительного равновесия возникает напряженное состояние, рассмотренное выше: все перемещения и касательные напряжения равны нулю, нормальные напряжения в положении относительного равновесия определяются формулой

$$\sigma_{0rr} = \sigma_{0\varphi\varphi} = \sigma_{0zz} = \sigma_0 = \Omega^2 \int_r^{r_N} r\rho(r)\,dr$$

где r_N — внешний радиус цилиндра, ρ — плотность, являющаяся ступенчатой функцией текущего радиуса r: $\rho = \rho_n$ при $r_{n-1} < r < r_n$, r_{n-1}, r_n — внутренний и внешний радиусы n-го слоя.

В задаче об устойчивости положения равновесия в качестве искомых функций принимаются перемещения u_r, u_φ, касательное напряжение $\sigma_{r\varphi}$ и отклонение σ_{rr} нормального радиального напряжения от равновесного значения σ_{0rr}. В учетом сил инерции Кориолиса задача устойчивости принимает вид

$$r_{n-1} < r < r_n, \quad n = 1, \ldots, N:$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = -\left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\right)$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi}{r} + \frac{3}{\bar{E}_n}\sigma_{r\varphi}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{4\bar{E}_n}{3r}\left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\right) + \rho_n\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - 2\rho_n\Omega\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \qquad (2.1)$$

$$
\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{dr}=-\frac{4\bar{E}_n}{3r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial\varphi}-\frac{2}{r}\sigma_{r\varphi}+
$$

$$
+\rho_n\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\rho_n\Omega\frac{\partial u_r}{\partial t}
$$

$$
r=r_0:\quad u_r=u_\varphi=0
$$

$$
r=r_N:\quad \sigma_{rr}-r_N\rho_N\Omega^2 u_r=0,\quad \sigma_{r\varphi}=0
$$

На окружностях $r=r_n$, $n=1,\ldots,N-1$ непрерывны u_r, u_φ, $\sigma_{rr}-2\rho(r)\Omega^2 u_r$, $\sigma_{r\varphi}$. Здесь r_0 — внутренний радиус цилиндра, $\bar{E}_n=3\bar{\mu}_n$. Задача (2.1) записана в эйлеровых координатах. Первое из уравнений (2.1) представляет собой уравнение несжимаемости, следующие три получены путем исключения деформаций и окружного σ_φ и среднего σ напряжений из соотношений Коши, закона Гука и уравнений равновесия для возмущений. Подчеркнутое слагаемое в граничном условии возникло в результате переноса этого условия с деформированной на недеформированную внешнюю поверхность.

Решение задачи устойчивости ищется в виде

$$
(u_r,\ u_\varphi,\ \sigma_{rr},\ \sigma_{r\varphi})=(\vartheta_r,\ i\vartheta_\varphi,\ \tau_{rr},\ i\tau_{r\varphi})\exp(-im\varphi-i\omega t) \tag{2.2}
$$

Подстановка (2.2) в (2.1) приводит к задаче на собственные значения вида

$$
r_{n-1}<r<r_n:
$$

$$
\frac{d\vartheta_r}{dr}=-\left(\frac{\vartheta_r}{r}+\frac{m}{r}\vartheta_\varphi\right)
$$

$$
\frac{d\vartheta_\varphi}{dr}=\frac{m}{r}\vartheta_r+\frac{\vartheta_\varphi}{r}+\frac{3}{\bar{E}_n}\tau_{r\varphi}
$$

$$
\frac{d\tau_{rr}}{dr}=-\frac{m}{r}\tau_{r\varphi}+\frac{4\bar{E}_n}{3r}\left(\frac{\vartheta_r}{r}+\frac{m}{r}\vartheta_\varphi\right)-\rho_n\omega^2\vartheta_r-2\rho_n\omega\Omega\vartheta_\varphi
$$

$$
\frac{d\tau_{r\varphi}}{dr}=\frac{4\bar{E}_n m}{3r}\left(\frac{\vartheta_r}{r}+\frac{m}{r}\vartheta_\varphi\right)+\frac{m}{r}\tau_{rr}-\frac{2}{r}\tau_{r\varphi}-\rho_n\omega^2\vartheta_\varphi-2\rho_n\omega\Omega\vartheta_r
$$

$$
r=r_0:\quad \vartheta_r=\vartheta_\varphi=0
$$

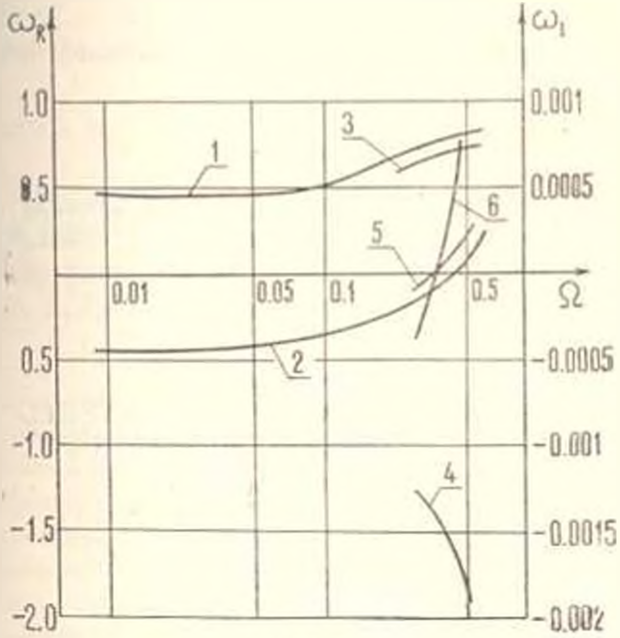
$$
r=r_N:\quad \tau_{rr}-\rho_N\Omega^2 r_N\vartheta_r=0,\quad \tau_{r\varphi}=0
$$

$$
r=r_n,\ n=1,\ldots,N-1:\ \text{непрерывность}\ \vartheta_r,\ \vartheta_\varphi,
$$

$$
\tau_{rr}-\rho(r)\Omega^2 r\vartheta_r,\ \tau_{r\varphi}
$$

Характеристическое уравнение задачи о собственных значениях строилось методом ортогональной прогонки [4], корни этого уравнения разыскивались с помощью метода парабол [4].

В качестве примера рассмотрена задача об устойчивости 10-слойного цилиндра (5 упругих слоев чередуются с пятью вязкоупругими слоями). Прослежена зависимость двух первых собственных частот от угловой скорости Ω. Предварительно такая зависимость построена для цилиндра, состоящего из упругих слоев. При $\Omega = 0$ собственные частоты ω_1, ω_1^-, действительны, имеют равные модули и противоположные знаки.



Фиг. 1

Эволюцию указанных собственных частот описывают кривые 1, 2 на фиг. 1. С ростом угловой скорости отрицательная собственная частота убывает по модулю (кривая 2) и при $\Omega \approx 1.1\ \omega_1^-$ (ω_1^- — первая собственная частота при $\Omega = 0$) обращается в нуль, после чего становится положительной. Мнимые части собственных частот равны нулю при всех рассмотренных значениях Ω. Согласно известной теореме Ляпунова из этого факта нельзя сделать вывод об устойчивости либо о неустойчивости вращательного движения.

Кривые 3—6 на фиг. 1 описывают эволюцию комплексных собственных значений с ростом Ω неоднородного цилиндра с пятью вязкоупругими и пятью упругими слоями. Кривые построены в окрестности точки смены знака собственной частоты упругого цилиндра. Кривые, соответствующие первой собственной частоте с положительной действительной частью при $\Omega = 0$, не имеют особенностей: действительная часть остается положительной, мнимая — отрицательной во всем рассмотренном диапазоне изменения угловых скоростей (кривые 3, 4 на фиг. 1).

Действительная часть второй собственной частоты (кривая 5) меняет знак при достижении угловой скоростью критического значения, причем смена знака происходит при несколько меньшем значении Ω, чем в случае упругого цилиндра. Одновременно со сменой знака действительной части происходит смена знака мнимой части (кривая 6). Таким образом, угловая скорость, при которой происходит смена знака собственного значения, является критической в смысле потери устойчивости.

Վ. Պ. ՄԱՅԲՈՐՈԴԱ, Ի. Ե. ՏՐՈՅԱՆՈՎՍԿԻ

ՇԵՐՏԱՎՈՐ ԱՌԱՁԳԱՄԱԾՈՒՑԻԿ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔՆԵՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Շերտավոր առաձգամածուցիկ կառուցվածքների դինամիկ կայունության խնդիրը լուծվում է առաձգամածուցիկության գծային տեսության շարժման եռաչափ հավասարումների ներգրավմամբ։ Որպես օրինակ դիտարկվել է 10 շերտանի անհամասեռ առաձգամածուցիկ գլանի կայունության մասին խնդիրը։

THE DYNAMIC STABILITY OF LAYERED VISCOELASTIC CONSTRUCTIONS

V. P. MAIBORODA, I. E. TROYANOVSKI

Summary

This paper formulates the problem of the dynamic stability of piecewise nonuniform viscoelastic body subjected to nonconservative forces. The problem of the dynamic stability of a rotating multilayer cylinder is solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 373 с.
2. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
3. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений. Ташкент: ФАН, 1974. 216 с.
4. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. М.: Наука, 1975. 627 с.

Московский институт электронного машиностроения

Поступила в редакцию 20. V. 198

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXV, № 6, 1982 Механика

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

ЛАПАИДЗЕ З. Г., ОГАНЕСЯН Э. К., ПОГОСЯН М. З., ТОНОЯН В. С.

В работе рассматривается несимметричная деформация двухслойного в радиальном направлении полого цилиндра конечной длины, когда один торец цилиндра полностью закреплен, боковые поверхности и другой торец цилиндра свободны от напряжений и цилиндр деформируется только под действием собственного веса, действующего перпендикулярно к оси цилиндра.

Для исследования напряженно-деформированного состояния этого цилиндра используется метод конечных элементов с кольцевыми элементами треугольного сечения.

О возможности применения кольцевых элементов треугольного сечения для исследования деформации тел вращения, находящихся под действием несимметричной нагрузки, отмечается в работе Вильсона [1]. В этой работе методом конечных элементов численные результаты получены только для нескольких осесимметричных задач.

Теория и техника применения метода конечных элементов для решения различных задач механики деформируемой среды дается в работах [2—9].

Решению пространственных задач теории упругости методом конечных элементов посвящены также работы [10—11] и другие.

1. *Постановка задачи и основные уравнения.* Допускается, что при несимметричной деформации тела вращения деформации остаются симметричными относительно некоторой плоскости, проходящей через ось вращения. Тогда перемещения и напряжения могут быть представлены в виде рядов Фурье и в цилиндрической системе координат (r, z, θ) будем иметь

$$u_r(r, z, \theta) = \sum_n u^{(n)}(r, z)\cos n\theta$$

$$u_z(r, z, \theta) = \sum_n v^{(n)}(r, z)\cos n\theta \qquad (1.1)$$

$$u_\theta(r, z, \theta) = \sum_n w^{(n)}(r, z)\sin n\theta$$

$$\sigma_r(r, z, \theta) = \sum_n \sigma_r^{(n)}(r, z) \cos n\theta$$

$$\sigma_z(r, z, \theta) = \sum_n \sigma_z^{(n)}(r, z) \cos n\theta \qquad (1.2)$$

$$\sigma_\theta(r, z, \theta) = \sum_n \sigma_\theta^{(n)}(r, z) \cos n\theta$$

$$\tau_{rz}(r, z, \theta) = \sum_n \tau_{rz}^{(n)}(r, z) \cos n\theta$$

$$\tau_{r\theta}(r, z, \theta) = \sum_n \tau_{r\theta}^{(n)}(r, z) \sin n\theta \qquad (1.3)$$

$$\tau_{z\theta}(r, z, \theta) = \sum_n \tau_{z\theta}^{(n)}(r, z) \sin n\theta$$

Отметим, что для рассмотрения задачи об изгибе слоистого полого цилиндра конечной длины под действием только собственного веса, достаточно пользоваться в выражениях (1.1)—(1.3) только первыми гармониками.

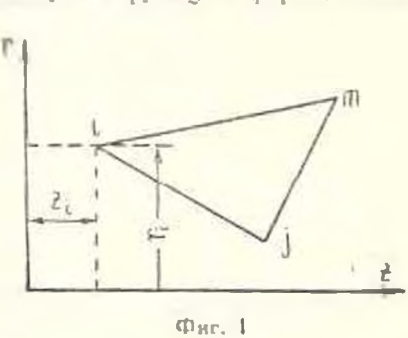
Для применения метода конечных элементов коэффициенты разложений n-ой гармоники для перемещений представляются в виде

$$u^{(n)}(r, z) = \sum_s N_s^{(n)} u_s$$

$$v^{(n)}(r, z) = \sum_s N_s^{(n)} v_s \qquad (1.4)$$

$$w^{(n)}(r, z) = \sum_s N_s^{(n)} w_s$$

где $N_s^{(n)}$ — функции формы сечения кольцевого элемента $(s = i, j, m)$ с треугольным сечением (фиг. 1)



Фиг. 1

$$N_i^{(n)} = \frac{a_i + b_i z + c_i r}{2\Delta} \qquad (1.5)$$

$N_j^{(n)}$ и $N_m^{(n)}$ определяются аналогичными выражениями.

В (1.5) a_i, b_i и c_i имеют следующие значения:

$$a_i = z_j r_m - z_m r_j$$

$$b_i = r_j - r_m \qquad (1.6)$$

$$c_i = z_m - z_j$$

$$2\Delta = z_i(r_j - r_m) + z_j(r_m - r_i) + z_m(r_i - r_j) = z_i b_i + z_j b_j + z_m b_m \qquad (1.7)$$

коэффициенты a_j, b_j, c_j и a_m, b_m, c_m определяются по выражениям (1.6) с заменой индексов в циклическом порядке.

Используя обозначения

$[N]=[N_i,\ N_j,\ N_m]$ — функция формы,

$\{\delta_i\}=\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}$ — смещения узловой точки i-го треугольного элемента,

$\{\delta\}^e=\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix}^e$ — вектор перемещения треугольного элемента с номером e и узловыми точками $i,\ j,\ m$,

$\{f^{(n)}\}^e=\begin{Bmatrix} u^{(n)} \\ v^{(n)} \\ w^{(n)} \end{Bmatrix}^e$ — вектор перемещения произвольной точки элемента e,

будем вместо (1.4) иметь формулу

$$\{f^{(n)}\}^e=[N^{(n)}]^e\{\delta^{(n)}\}^e \tag{1.8}$$

Деформации в цилиндрической системе координат $(r,\ z,\ \theta)$ определяются соотношениями

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{z\theta} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \\ \dfrac{u_r}{r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial u_r}{\partial z}+\dfrac{\partial u_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta}+\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}-\dfrac{u_\theta}{r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial\theta}+\dfrac{\partial u_\theta}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{1.9}$$

Используя матричную форму записи и введя обозначения

$[B]=[B_i^{(n)},\ B_j^{(n)},\ B_m^{(n)}]$ — матрица деформаций

где

$$[B_i^{(n)}] = \begin{vmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r}\cos n\theta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z}\cos n\theta & 0 \\ \frac{N_i}{r}\cos n\theta & 0 & \frac{nN_i}{r}\cos n\theta \\ \frac{\partial N_i}{\partial z}\cos n\theta & \frac{\partial N_i}{\partial r}\cos n\theta & 0 \\ -\frac{nN_i}{r}\sin n\theta & 0 & \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} - \frac{N_i}{r}\right)\sin n\theta \\ 0 & -\frac{nN_i}{r}\sin n\theta & \frac{\partial N_i}{\partial z}\sin n\theta \end{vmatrix} \tag{1.10}$$

$[B_j^{(n)}]$ и $[B_m^{(n)}]$ записываются аналогично, для деформаций элемента „e" будем иметь

$$\{\varepsilon\}^e = [B]^e \{\delta\}^e \tag{1.11}$$

Далее напряжения будут определены по формуле

$$\{\sigma\}^e = [D][B]\{\delta\}^e \tag{1.12}$$

где

$[D]$ — матрица упругости материала

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

Уравнения равновесия узловых окружностей приводятся к виду

$$[K'']\{\delta^{(1)}\} + \{F_p^{(1)}\} = 0 \tag{1.14}$$

где $[K'']$ — матрица жесткости общей системы для первой гармоники,

$\{F_i^{(2)}\}$ — узловые силы от собственного веса,

$$[K^r]^r = \begin{bmatrix} K_{ii}^r & K_{ij}^r & K_{im}^r \\ K_{ji}^r & K_{jj}^r & K_{jm}^r \\ K_{mi}^r & K_{mj}^r & K_{mm}^r \end{bmatrix} \text{— матрица жесткости треугольного элемента,} \tag{1.15}$$

где

$$[K_{ij}^r]^r = \pi \int\int_{\Delta} \{[\bar{B}_i^{(1)}]^T [D][\bar{B}_j^{(1)}] + [\bar{\bar{B}}_i^{(1)}]^T [D][\bar{\bar{B}}_j^{(1)}]\} \, r dr dz \tag{1.16}$$

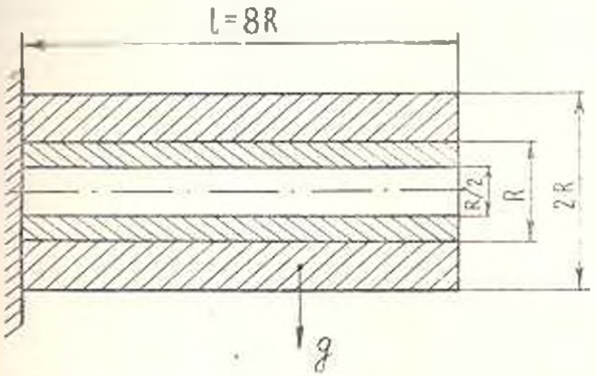
Здесь использовано обозначение

$$[B_i^{(1)}] = [\bar{B}_i^{(1)}] \sin \theta + [\bar{\bar{B}}_i^{(1)}] \cos \theta$$

$[B]^T$ — транспонированная матрица.

Значения интегралов типа (1.16) для матрицы (1.15) найдены численным интегрированием.

2. *Численный пример.* В качестве численного примера рассмотрена несимметричная деформация двухслойного полого цилиндра конечной длины (фиг. 2), который изгибается только под действием собственного веса.



Фиг. 2

Геометрические параметры даются на фиг. 2, а физико-механические параметры составных материалов приводятся в табл. 1.

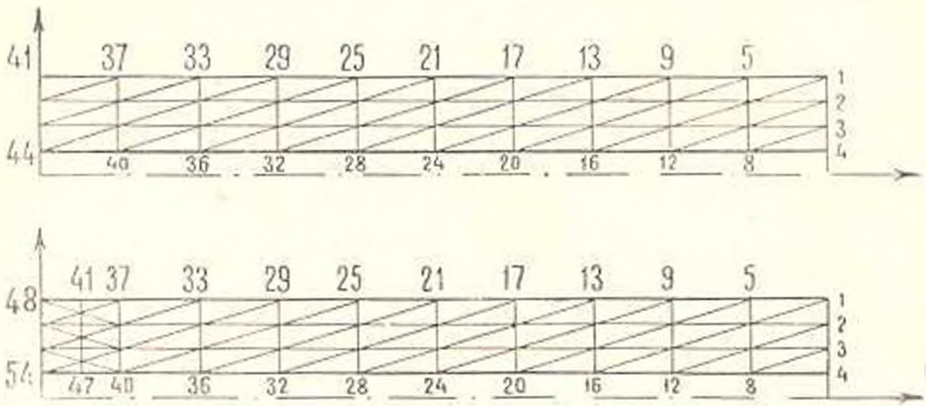
Таблица 1

Слой	Материал	Модуль упругости E кг/см²	ν	Удельный вес γ кг/см³
I	сталь	$2\cdot10^6$	0,3	$7{,}8\cdot10^{-3}$
II	стекло	$0{,}7\cdot10^6$	0,22	$2{,}48\cdot10^{-3}$

Схема разбиения осевого сечения двухслойного полого цилиндра конечной длины на треугольные элементы показана на фиг. 3, при этом разбиение представлено в двух вариантах.

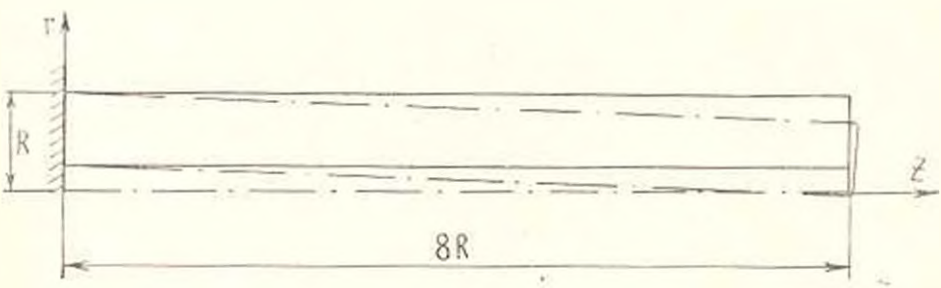
В одном варианте осевое сечение полого цилиндра содержит 60 треугольных элементов с 44 узловыми точками. Во втором варианте сечение содержит 75 треугольных элементов с 54 узловыми точками.

При помощи ЭВМ определены смещения точек осевого сечения цилиндра и компоненты напряжения.



Фиг. 3

Искривление осевого сечения при $\varphi = 0$ показано на фиг. 4. Следует отметить, что вычисления по двум различным вариантам разбиения отличаются незначительно.



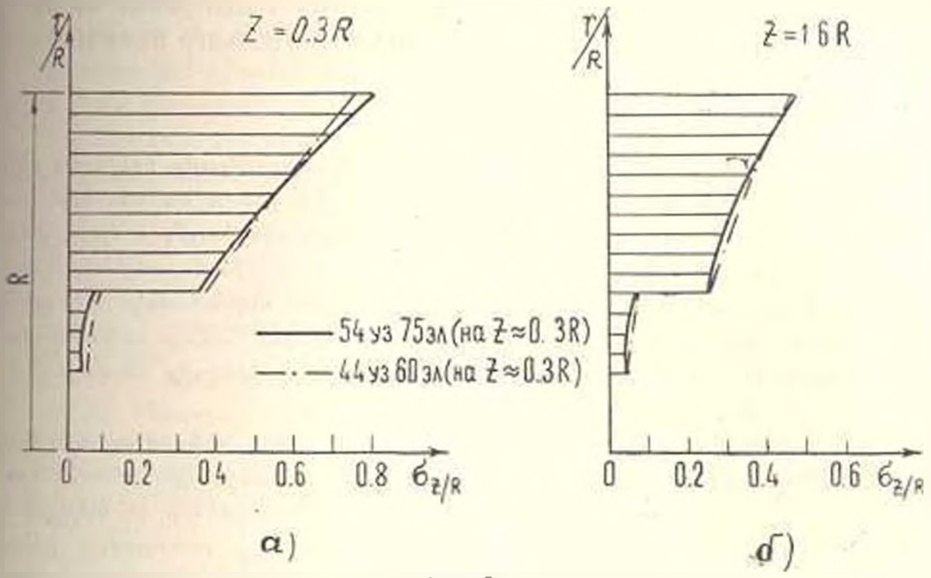
Фиг. 4

Вычисления показывают также, что деформации поперечных сечений деформируемого только под действием собственного веса полого цилиндра конечной длины (фиг. 2) незначительны и формы этих сечений почти не отличаются от двуслойного кругового кольца.

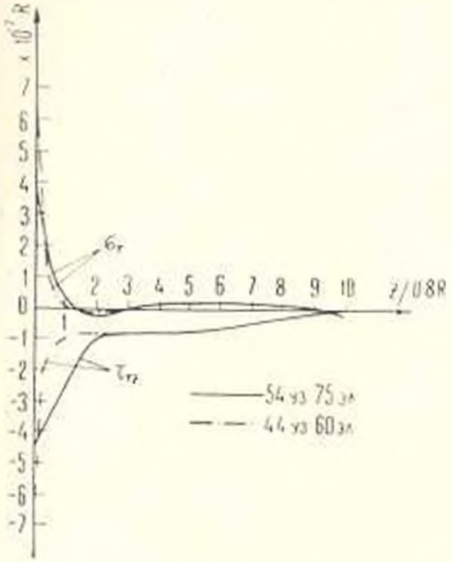
Распределение напряжений σ_z на двух участках $z = z_1$ и $z = 1{,}6R$ осевого сечения при $\varphi = 0$ приводится на фиг. 5. В первом варианте $z = z_1 \approx 0{,}3\ R$, а во втором варианте $z = z_1 \approx 0{,}14\ R$.

Характер распределения нормальных напряжений σ_z по другим участкам $z = \text{const} > 2R$ осевого сечения остается таким же, как указывается на фиг. 5, однако интенсивность распределения этих напряжений по мере увеличения расстояния от закрепленного основания уменьшается.

При $z > 2R$ вычисления, произведенные по двум вариантам разбиения, друг от друга почти не отличаются.



Фиг. 5



Фиг. 6

Наконец, на фиг. 6 для двух вариантов разбиения осевого сечения приводятся распределения нормальных напряжений σ_r и касательных напряжений τ_{rz} на контактной поверхности составных материалов полого цилиндра при $\varphi = 0$.

Զ. Գ. ԱԼՓԱԻՁԵ, Է. Կ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ,
Մ. Զ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ, Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՄԲ ԵՐԿՇԵՐՏ ՍՆԱՄԵՋ ԳԼԱՆԻ ՀԱՄԱՐ ՄԻ ՈՉ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԷԼԵՄԵՆՏՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴՈՎ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկված է շառավղային ուղղությամբ երկշերտ, վերջավոր երկարությամբ սնամեջ գլանի ոչ սիմետրիկ դեֆորմացիան, երբ գլանի մի հիմքը լրիվ ամրակցված է, իսկ կողմնային մակերևույթը և մյուս հիմքը ազատ են լարումներից։ Գլանը դեֆորմացվում է միայն սեփական կշռի ազդեցության տակ, որն ազդում է գլանի առանցքին ուղղահայաց։ Այդ գլանի լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակը ուսումնասիրելու համար օգտագործված է վերջավոր էլեմենտների մեթոդը, երբ էլեմենտները իրենցից ներկայացնում են եռանկյան կտրվածքով օղակաձև էլեմենտներ։

Ենթադրվում է, որ պտտման մարմնի ոչ սիմետրիկ դեֆորմացիայի դեպքում, դեֆորմացիան մնում է սիմետրիկ որևէ առանցքային հարթության նկատմամբ։ Այդ պատճառով տեղափոխությունները և լարումները ներկայացվում են Ֆուրյեի սինուս կամ կոսինուս շարքերով։ Նշենք որ դիտարկված խնդրի դեպքում վերջնական հավասարումների համախումբը անհրաժեշտ է լուծել միայն առաջին հարմոնիկի համար։ Կատարված է թվային հաշվարկ կոնկրետ նյութերի համար և առանցքային հատույթի վերջավոր էլեմենտների տրոհման երկու տարբերակների դեպքում։ Երկու տարբերակների համար էլ կառուցված են լարումների և տեղափոխությունների համար գրաֆիկներ։

SOLUTION OF A NON-SYMMETRIC PROBLEM FOR A DOUBLE-LAYERED HOLLOW CYLINDER OF FINITE LENGTH BY THE METHOD OF FINITE ELEMENTS

Z. G. ALPAIDZE, E. K. OGANESSIAN, M. Z. POGOSSIAN, V. S. TONOYAN

Summary

In this paper the authors have considered the non-symmetric deformation of a double-layered hollow cylinder of finite length in the radial direction, when one end of the cylinder is fully fixed, the side surfaces and the other end of the cylinder are free of stress and the cylinder is deformed only under the action of its own weight, acting perpendicularly to the axis of the cylinder.

In order to investigate the stress deformed state of this cylinder, the method of finite elements with circular elements of triangular section is used.

It is assumed that in non-symmetric deformation of the body rotation, the deformations remain symmetric in relation to any plane which passes through the axis of the rotation. Then the displacements

and the stresses may be represented in the form of Fourie's sine or cosine rows.

In the considered problems the equations of the assemblies are solved only for the first harmony.

A numerical calculation for concrete materials and for two versions of the finite elements division of the axial section is reduced.

For the two versions of the division, corresponding diagrams for the stress and the displacement are constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вильсон (E. L. Wilson)*. Расчет на прочность осесимметричных тел.—Ракетная техника и космонавтика (AIAA Journal) 1965, т. 3, № 12 (русский перевод), с. 124—131.
2. *Розин Л. А.* Метод конечных элементов. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ, «Энергия», Ленинградское отделение, 1971, 214 с.
3. *Зенкевич О., Чанг И.* Метод конечных элементов в теории сооружений и механике сплошных сред. М.: Недра (перевод с английского) 1974, 238 с.
4. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. Перевод с английского. М.: Мир, 1975, 541 с.
5. *Постнов В. А., Хархурин И. Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974, 344 с.
6. *Розин Л. А.* Метод конечных элементов в применении к упругим системам. М.: Стройиздат, 1977, 128 с.
7. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М.: перевод с английского, Мир, 1977, 349 с.
8. *Морозов Е. М., Никишков Г. П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. М.: Наука, 1980, 254 с.
9. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: перевод с английского, Мир, 1980, 512 с.
10. *Solecki J. S., Swedlow J. L.* Elastic stress analysis of constrained cylinders by a special finite element method.—Intern. Journ. Solids and Struct. 1980, vol. 16, No. 11, 959—968.
11. *Blackburn W. S., Hellen T. K.* Determination of stress intensity factors for Battele Benchmark geometries.—Int. J. of Fracture, 1980, vol. 16, No. 5, 411—429.

Московский институт теплотехники
Институт механики АН Арм. ССР

Поступила в редакцию
8. IX. 1981