ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1982

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXV, № 4, 1982 Механика

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ВОЛН В ТЕРМОУПРУГОЙ ЛИНЕЙНОВЯЗКОЙ СРЕДЕ

БАГДОЕВ А. Г., ШЕКОЯН А. В.

Распространение нелинейных волн в разных диссипативных и недиссипативных средах изучено в работах [1, 3—5, 7—12, 13]. Вопросы лучевого решения и дифракции рассмотрены в линейной постановке в работах [2, 6].

Поглощение упругой волны приводит к нагреванию среды, что в свою очередь изменяет объем среды (обычно при нагревании среда расширяется). Эти факторы могут приводить к новым эффектам, например, к фиксированию акустической волны.

Целью настоящей статьи является получение нелинейных уравнении для амплитуды и фазы квазимонохроматической волны в диссипативной среде, рассмотрение устойчивости, фокусирование узких пучков.

1. *Вывод уравнений для медленно меняющихся амплитуд и фаз.* Пусть упругая волна распространяется в полубесконечной нелинейной вязкой теплопроводящей изотропной среде в направлении $x_3 > 0$. Ортогональная координатная система выбрана так, чтобы плоскость $x_3 = 0$ совпала с поверхностью среды. Предполагается, что в плоскости $x_3 = 0$ $u_1 = u_2 = 0$, а в ограниченной ее части $u_3 \neq 0$.

Свободная энергия единицы объема, разложенная в ряд по малым степеням тензора деформаций u_{ik} и разности температур $\theta = T_0 - T$, с учетом первых нелинейных членов имеет вид

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2} u_{ll}^2 + \mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right)^2 + \frac{1}{3} A u_{ik} u_{il} u_{kl} + B u_{ik}^2 u_{ll} +$$

$$+ \frac{C}{3} u_{ll}^2 - \gamma\theta u_{ll} + \frac{\nu_2}{2}\theta\left(u_{ll}^2 - u_{ik}^2\right) + \nu_3\theta^2 u_{ll} - \frac{c\theta}{T} + \nu_4\theta^3 \tag{1.1}$$

где λ и μ — модули всестороннего сжатия и сдвига, A, B, C, ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 — нелинейные коэффициенты, c — теплоемкость среды, γ — линейный термический коэффициент, T и T_0 — начальная (однородная) и текущая температуры среды, F_0 — свободная энергия недеформированной среды,

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)$$

Воспользовавшись обычным способом [3, 4, 7], можно получить нелинейные уравнения движения среды и теплопроводности, имеющие соответственно следующий вид:

$$
\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\mu\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\lambda+\mu/3)\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right]+\gamma\frac{\partial\theta}{\partial x_i}-\eta\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k^2\partial t}-
$$

$$
-\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\frac{\partial^3 u_l}{\partial x_i\partial x_l\partial t}=\left(\mu+\frac{A}{4}\right)\left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k^2}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}+\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k^2}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}+2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)+
$$

$$
+\left(\lambda+\frac{\mu}{4}+\frac{A}{4}+B\right)\left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}+\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\right)+
$$

$$
+\left(\lambda-\frac{2}{3}\mu+B\right)\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+\left(B+\frac{A}{4}\right)\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_l}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}+\right.
$$

$$
\left.+\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right)+(B+2C)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}-
$$

$$
-\frac{\nu_2}{2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\theta\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}+\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\theta\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_k}\right)+
$$

$$
+(\nu_1+\nu_2)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+\theta\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i\partial x_l}\right)+2\nu_3\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_i}-\gamma\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+\theta\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_l\partial x_i}\right)
\tag{1.2}
$$

$$
\left[2\nu_3 T\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+\left(6\nu_4 T-\frac{c}{T}\right)\theta-c\right]\frac{\partial\theta}{\partial t}-\gamma T\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_l\partial t}+
$$

$$
+\left[(\nu_1+\nu_2-\gamma)T\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+\theta(2T\nu_3-\gamma)\right]\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_l\partial t}-
$$

$$
-\frac{\nu_2}{4}T\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\partial t}+\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial t}\right)=-\varkappa\Delta\theta
\tag{1.3}
$$

где u_i — смещение, ρ — плотность среды, η и ζ — коэффициенты вязкости, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности.

Упростим систему уравнений (1.2), (1.3), считая, что нижеуказанные величины имеют порядки

$$
\frac{u_1}{L},\quad \eta,\ \zeta,\ \varkappa\sim\delta^2,\quad \frac{u_2}{L},\quad \frac{u_3}{L}\sim\delta^{5/2},\quad \frac{\theta}{T}\sim\delta,\quad L\frac{\partial}{\partial x_1},\quad \frac{L}{v}\frac{\partial}{\partial t}\sim\delta^{-1}
$$

$$
L\frac{\partial}{\partial x_2},\quad L\frac{\partial}{\partial x_3}\sim\delta^{1/2}
$$

где L — характерная длина, v — скорость волны. Порядки поперечных координат берутся, как в задачах дифракции волн [12], а η, ζ, $\varkappa$ берутся, как в теории коротких волн [5], а в слагаемых более высокого порядка, следует отбрасывать диссипативные или нелинейные члены.

Тогда уравнения (1.2) и (1.3) примут следующий вид:

$$\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - a\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - \mu\Delta_{\perp} u_3 - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) +$$

$$+ \gamma\frac{\partial\theta}{\partial x_3} - b\frac{\partial^3 u_3}{\partial t\partial x_3^2} = P\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + (\nu_1 - \gamma)\frac{\partial\theta}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} +$$

$$+ (\nu_1 - \gamma)\theta\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + 2\nu_2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_3} \tag{1.4}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - d\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_3} + \gamma\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = 0 \tag{1.5}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} - d\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2\partial x_3} + \gamma\frac{\partial\theta}{\partial x_2} = 0 \tag{1.6}$$

$$\left[2\nu_3 T\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \left(6\nu_4 T - \frac{c}{T}\right)\theta - c\right]\frac{\partial\theta}{\partial t} - \gamma T\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) +$$

$$+ \left[(\nu_1 - \gamma)T\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \theta(2T\nu_3 - \gamma)\right]\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3\partial t} = -\varkappa\frac{\partial^2\theta}{\partial x_3^2} \tag{1.7}$$

где $a = \lambda + 4\mu/3$, $d = \lambda + \mu/3$, $b = \zeta + 4\eta/3$, $P = 4\mu + 2A + 6B + 3\lambda + 2C$, $\Delta_{\perp} \equiv \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$. Вначале для простоты предположим, что среда однородная. В уравнениях (1.4) и (1.7) пренебрежены члены, имеющие порядок выше δ, а в (1.5) и (1.6) — выше $\delta^{3/2}$.

Решение системы уравнений (1.4)—(1.6) ищем в виде [8]

$$(u_i, \theta) = \frac{1}{2}\{[u_{0i}(x_1, x_2, x_3), \theta_0(x_1, x_2, x_3)]\exp[i(\omega_1 t - kx_3)] +$$

$$+ [u'_{0i}(x_1, x_2, x_3), \theta'_0(x_1, x_2, x_3)]\exp[2i(\omega_1 t - kx_3)] +$$

$$+ [u''_{0i}(x_1, x_2, x_3), \theta''_0(x_1, x_2, x_3)] + \text{к. с.}\} \tag{1.8}$$

где u_{0i}, θ_0 — амплитуды первой гармоники, величины с одним штрихом — амплитуды второй гармоники, а величины с двумя штрихами — свободные члены, обусловленные возникающими течениями вследствие упругой волны, ω_1 — комплексная частота $\omega_1 = \omega + i\alpha$, а k — волновое число. Все амплитуды — медленно меняющиеся.

Хотя нелинейность в уравнениях (1.4)—(1.7) — квадратичная, однако, наличие вязкости и теплопроводности дает возможность искать решение этой системы в виде (1.8).

Подставляя (1.8) в систему (1.4)—(1.7) и приравнивая нулю коэффициенты у экспонент, получим новую систему для амплитуд. Упростим эту систему, учитывая порядки следующих величин:

$$k_1\omega_1 \sim \delta^{-1},\quad u_{03},\quad u'_{03},\quad \theta'_0 \sim \delta^2,\quad u_{01},\quad u_{02} \sim \delta^{3/2},\quad u''_{03},\quad u''_{03},\quad \theta''_0 \sim \delta^3$$

Уравнения для амплитуд после упрощений примут следующий вид:

$$-2ik(-a-i\omega_1 b)\frac{\partial u_{03}}{\partial x_3}-\mu\triangle_{\perp}u_{03}+ikd\left(\frac{\partial u_{01}}{\partial x_1}+\frac{\partial u_{02}}{\partial x_2}\right)+\gamma\frac{\partial\theta_0}{\partial x_3}=$$

$$=\left[-ik^3Pu_{03}u_{03}^{*}+\frac{k^2(\nu_1-\gamma)}{2}\theta' u_{03}^{*}-k^2(\nu_1-\gamma)\theta_0^{*}u_{03}-ik\nu_2\theta_0\theta_0^{*}\right] \qquad (1.9)$$

$$4(-\omega_1^2\rho+ak^2+2ik^2\omega_1 b)u_{03}-2ik\gamma\theta_0=-\frac{i}{2}k^3Pu_{03}^2-$$

$$-k^2(\nu_1-\gamma)\theta_0u_{03}-ik\nu_2\theta_0^2 \qquad (1.10)$$

$$ic\omega_1\theta_0-k\gamma T\omega_1u_{03}=k^2\varkappa\theta_0' \qquad (1.11)$$

$$\nu_3Tk\omega_1u_{03}\theta_0+\frac{i\omega_1}{2}\left(6\nu_4T-\frac{c}{T}\right)\theta_0^2-2ik\omega_1\theta_0+$$

$$+\frac{\omega_1k}{2}\left[-ikT(\nu_1-\gamma)u_{03}^2+(2T\nu_3-\gamma)u_{03}\theta_0\right]=0 \qquad (1.12)$$

$$u_{01}=\frac{1}{k^2\mu-\omega_1^2\rho}\left(ikd\frac{\partial u_{03}}{\partial x_1}+\gamma\frac{\partial\theta_0}{\partial x_1}\right) \qquad (1.13)$$

$$u_{02}=\frac{1}{k^2\mu-\omega_1^2\rho}\left(ikd\frac{\partial u_{03}}{\partial x_2}+\gamma\frac{\partial\theta_0}{\partial x_2}\right) \qquad (1.14)$$

где $\partial u_{03}/\partial x_3$, $\partial\theta_0/\partial x_3$ имеют порядки u_{03} и θ_0.

В уравнениях (1.9)—(1.14) выражения, содержащие свободные члены, оказались малыми, поэтому они были отброшены. В используемом приближении они не влияют на устойчивость и фокусирование или дефокусирование упругих волн. Уравнения для свободных членов и для комплексно сопряженных амплитуд не выписаны, так как в дальнейшем они не понадобятся.

Последовательно исключая все амплитуды, причем в нелинейных членах θ_0 и θ_0^{*} исключаются посредством уравнения (1.11), пренебрежением правых частей для амплитуды u_{03} получим следующее уравнение:

$$(A_1+iA_2)\triangle_{\perp}u_{03}-2ik\frac{\partial u_{03}}{\partial x_3}=(C_1+C_2)u_{03}|u_{03}|^2 \qquad (1.15)$$

Если в уравнении (1.15) полагать $A_1=1$, $A_2=C_2=0$, то оно совпадает с уравнением нелинейной оптики [11].

При выводе уравнений (1.15) было приравнено нулю выражение u_{03}, которое дает следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega_1^2\rho-ik^2\omega_1 b-\frac{ik^2\omega_1\gamma^2T}{c(k^2\varkappa+i\omega_1)}-ak^2=0 \qquad (1.16)$$

Уравнение (1.16) решаем относительно ω_1 методом последовательного приближения, считая $\omega_1=\omega+\omega'$. В качестве нулевого приближения берем решение, когда $\chi = \varkappa/c = b = 0$. Тогда для ω и α, сохраняя только первые порядки χ и b, получим:

$$\omega^2 = k^2 \frac{a + \gamma^2 T/c}{\rho} = k^2 v^2, \quad \omega' = i\alpha, \quad \alpha = \frac{\omega^2 b + k^2 \chi \gamma^2 T/c}{2(a + \gamma^2 T/c)} \quad (1.17)$$

Сохраняя только первые порядки χ, b для A_1, A_2, C_1 и C_2, получим следующие выражения:

$$A_1 = \frac{a\omega (d + \gamma^2 T/c) + k^2 d\chi \gamma^2 T/c}{\omega (d + \gamma^2 T/c)(a + \gamma^2 T/2c)} \quad (1.18)$$

$$A_2 = -\frac{(a + \gamma^2 T/2c)^{-1}}{(a + \gamma^2 T/c)} \left[\frac{\omega d\rho (\omega^2 b + k^2 \chi \gamma^2 T/c)}{k^2 (d + \gamma^2 T/c)} + \right.$$

$$\left. + \frac{a}{2\omega} (2\omega^2 b + k^2 \chi \gamma^2 T/c) \right] \quad (1.19)$$

$$C_1 = \frac{k^4 T \gamma c^{-2\alpha t}}{4c^2 (a + \gamma^2 T/2c)} \left(\frac{\nu_1 - \gamma}{2} - \frac{\nu_3 \gamma T}{c} \right) \left(4\nu_3 T - \frac{6\gamma T^2 \nu_4}{c} - \frac{c\nu_1}{\gamma} + c \right) \quad (1.20)$$

$$C_2 = -k^4 \omega e^{-2\alpha t} \left[P + \frac{2T\gamma}{c} \left(\nu_1 - \gamma - \frac{\nu_3 \gamma T}{c} \right) \right] \left[8 \left(\omega^2 b + \frac{k^2 \chi \gamma^2 T}{c} \right) \right]^{-1} (a +$$

$$+ \gamma^2 T/2c)^{-1} \left\{ \frac{P}{2} + \frac{3\gamma T}{c^2} \left[\frac{c}{2} (\nu_1 - \gamma) - \gamma T \left(\nu_2 - \frac{\gamma T \nu_4}{c} \right) \right] \right\} \quad (1.21)$$

Для дальнейших исследований важен знак A_1, A_2, C_1, C_2. Так как мало известно о коэффициентах ν_1, ν_2, ν_4, сказать определенно о знаке C_1 и C_2 трудно. Поэтому, для сравнения отдельно вычислены C_1 и C_2, когда в исходных уравнениях пренебрежено всеми термоупругими и термическими нелинейностями. Тогда $C_1 \geqslant 0$, а $C_2 < 0$. В твердых телах $G = \gamma T/c$ обычно мал [6], поэтому для $G = 0$ отдельно сделаны выкладки, причем в выражении (1.8) для θ оставлены лишь свободные члены. Для $G = 0$ и $G \neq 0$ проделаны вычисления, когда правые части уравнения (1.12) и (1.11) не нули, тогда $C_1 > 0$ и имеет вид

$$C_1 = \frac{k^4 P^2 e^{-2\alpha t}}{16 (a + \gamma^2 T/2c)^2}$$

в противоположном случае $C_1 = 0$. Выражение для C_2 легко получить из (1.21) подстановкой $\gamma = \nu_1 = \nu_1 = \nu_2 = 0$. Когда $G = 0$, температура не влияет на поведение упругой волны.

2. *Устойчивость*. Решение уравнения (1.15) будем искать в виде [11]

$$u_{03} = a \exp[-ikS] \quad (2.1)$$

где a_0 — действительная амплитуда, S — эйконал. После подстановок (2.1) в (1.15), отделив мнимые и действительные части, получим

$$A_1\Delta_\perp a_0 - k^2 a_0 A_1 (\nabla_\perp S)^2 + 2kA_2(\nabla_\perp a)(\nabla_\perp S) + a_0 A_2 k \Delta_\perp S -$$

$$-2k^2 a_0 \frac{\partial S}{\partial x_3} = C_1 a_0^3 \qquad (2.2)$$

$$A_2\Delta_\perp a_0 - A_2 k^2 a_0 (\nabla_\perp S)^2 - 2kA_1(\nabla_\perp a_0)(\nabla_\perp S) + A_1 k a_0 \Delta_\perp S -$$

$$-2k \frac{\partial a_0}{\partial x_3} = C_2 a_0^3 \qquad (2.3)$$

где $\nabla_\perp$ — градиент по координатам x_1 и x_2.

Решение этой системы ищем в виде

$$a_0 = a_1(x_3) + a_2(x_1, x_2, x_3), \quad S = S_0(x_3) + S_1(x_1, x_2, x_3) \qquad (2.4)$$

где a_1 и S_0 — медленно меняющиеся амплитуда и эйконал одномерной нелинейной невозмущенной квазимонохроматической волны. В силу того, что $|\omega_1 t - kx_3| \ll kx_3, \omega_1 t$, в выражениях (1.18)—(1.21) в малом слагаемом αt в экспоненте можно полагать $t \approx x_3/v$. Уравнение (1.15) имеет переменные коэффициенты, которые по предположению мало меняются по длине волны.

Подставляя (2.4) в (2.2), (2.3), исключая S, линеаризуя уравнения, получим систему уравнений

$$A_1\Delta_\perp a_2 + A_2 k a_1 \Delta_\perp S_1 - 2k^2 a_1 \frac{\partial S_1}{\partial x_3} - 2C_1 a_1^2 a_2 = 0 \qquad (2.5)$$

$$A_2\Delta_\perp a_2 - A_1 a_1 \Delta_\perp S_1 - 2k \frac{\partial a_2}{\partial x_3} - 3C_2 a_1^2 a_2 = 0 \qquad (2.6)$$

Поскольку функции a_0, C_2 и C_1 медленно меняются по длине возмущенной волны $2\pi/k_3$, решения уравнений (2.5), (2.6) имеют вид

$$\begin{aligned} a_2 &= a_2 \exp[i(k_3 x_3 + k_2 x_2 + k_1 x_1)] \\ S_1 &= S_1 \exp[i(k_3 x_3 + k_2 x_2 + k_1 x_1)] \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.5) и (2.6), получим систему алгебраических уравнений относительно a_2 и S_1, которые имеют ненулевое решение, если определитель равен нулю. Отсюда находим k_3 в виде

$$k_3 = \frac{1}{4\pi}\{i(2A_2k_\perp^2 + 3a_1^2C_2) \pm \{-(2A_2k_\perp^2 + 3a_1^2C_2)^2 +$$

$$+ 4k_\perp^2 [k_\perp^2 (A_1^2 + A_2^2) + a_1^2(3A_2C_2 + 2A_1C_1)]\}^{1/2}\}$$

где $k_\perp^2 = (k_1)^2 + (k_2)^2$.

Условие устойчивости волны имеет вид: $\operatorname{Im} k_3 > 0$, $(x_3 > 0)$. Так как $A_2 < 0$, волна неустойчива при $C_2 < 0$, а также при $C_2 > 0$, $|2A_2k_\perp^2| > 3a_1^2C_2$. Когда $2A_2k_\perp^2 + 3a_1^2C_2 > 0$, то имеет место устойчивость при $k^2(A_1^2+A_2^2)+a_1^2(3A_2C_2+2A_1C_1)>0$, при обратном знаке имеется неустойчивость. Так как при $G=0$, а также, когда в исходных уравнениях исключены все термоупругие и термические нелинейности $C_2<0$, волна всегда неустойчива.

3. *Узкие пучки.* Из выражения (1.19) видно, что A_2 пропорционально малым коэффициентам b и χ, поэтому в (1.15) можно пренебрегать величиной A_2 относительно A_1, в выражении которого пренебрегаем членом, содержащим χ. Учитывая это обстоятельство, для плоского и аксиально симметричного случая, для которого вводятся цилиндрические координаты, уравнения (2.3) и (2.4), следует записать в виде:

$$2\frac{\partial S}{\partial z}+A_1\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2-\frac{A_1}{a_0k^2}\left(\frac{\partial^2 a_0}{\partial r^2}+\frac{m}{r}\frac{\partial a_0}{\partial r}\right)=-\frac{C_1}{k^2}a_0^2 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial a_0^2}{\partial z^2}+A_1\left(\frac{\partial a_0^2}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)+a_0^2A_1\left(\frac{\partial^2 S}{\partial r^2}+\frac{m}{r}\frac{\partial S}{\partial r}\right)=-\frac{C_2a_0^4}{k} \tag{3.2}$$

где $m=0$ соответствует плоскому случаю, а $m=1$ — аксиально симметричному.

Следуя [11], решение (3.1) и (3.2) ищем в виде

$$S=\frac{r^2\beta(z)}{2}+\varphi(z),\qquad a_0^2=\frac{E_0^2}{f^{m+1}}\exp\left|-\frac{r^2}{r_0^2f^2}\right| \tag{3.3}$$

где $f(z)$ и r_0 — безразмерная и начальная ширина пучка, β^{-1} — радиус кривизны. Подставляя (3.3) в (3.1) и (3.2), нетрудно убедиться, что при $m=0$ выражения (3.3) для действительных f непригодны, так как приводят к противоречию, а для аксиально-симметричного пучка пригодны, противоречие не имеет места. Тогда для приосевых лучей получаем следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$2\,d\varphi/dz+2A_1/k^2f^2=-C_1E_0^2/k^2f^2$$

$$\beta=-\frac{C_2E_0^2}{2kA_1f^2}+\frac{1}{A_1f}\frac{df}{dZ} \tag{3.4}$$

$$\frac{d^2f}{dz^2}=\left(\frac{4A_1^2}{R_д^2}-\frac{1}{R_{нл}^2}\right)\frac{1}{f^3} \tag{3.5}$$

где

$$R_д=r_0^2k/2,\quad R_{нл}^{-2}=-\frac{C_1A_1E_0^2}{k^2r_0^2}+\frac{C_2^2E_0^4}{4k^2} \tag{3.6}$$

После интегрирования уравнения (3.5) для f^2 получается выражение

$$f^2=\left(\frac{A_1^2}{R^2}+\frac{C_2E_0^2A_1}{kR}+\frac{A_1C_1E_0^2}{k^2r_0^2}+\frac{4A_1}{R_д^2}\right)z^2+2\left(\frac{A_1}{R}+\frac{C_2E_0^2}{2k}\right)z+1 \tag{3.7}$$

При выводе (3.6) были учтены граничные условия: $\beta(0)=1/R$, R —

радиус кривизны начального волнового фронта. $f(0) = 1$ и в отличие от [11]

$$\frac{df(0)}{dz} = \frac{A_1}{R} + \frac{C_1E_0^2}{2k} \tag{3.8}$$

Граничное условие (3.8) приводит к тому, что даже при сравнительно простом случае плоского начального фронта ($R \to \infty$), в выражении (3.7) остаются члены с z, что приводит к более сложному поведению пучка, чем в нелинейной оптике.

Выражение (3.7) при $f = 0$ определяет фокальные точки:

$$z_{\phi 1,2}^{-1} = -\left(\frac{A_1}{R} + \frac{C_1E_0^2}{2k}\right) \pm (R_{**}^2 - 4A_1 R_*^2)^{1/2} \tag{3.9}$$

Из (3.9) видно, что при $R_{**}^{-2} > 4A_1^2 R_*^{-2}$, корни действительные. По крайней мере, один $z_{\phi} > 0$, если $-C_1E_0^2/2k > A_1R^{-1}$. Если $C_1 > 0$, то неравенство может выполняться при $R < 0$. Отметим, что при выполнении первых двух условий $z_{\phi 1,2} > 0$, если в (3.7) коэффициент при z^2 положителен. Для двухмерного случая, а также для аксиально-симметричного пучка с произвольным профилем можно воспользоваться приближенным уравнением, которое получается из (1.15) отбрасыванием в нем C_1 по сравнению с C_2, так как из выражений (1.20) и (1.21) видно, что $|C_2| \gg |C_1|$. Тогда правая часть уравнения (3.1) будет равняться нулю. Пренебрежем также в (3.1) членом, обуславливающим дифракцию. После этих упрощений, деля уравнение (3.2) на a_0^2 и вводя обозначения $u = \partial S/\partial r$, $\psi = a_0^{-2}$, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + A_1 u \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{3.10}$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial z} - A_1 u \frac{\partial \psi}{\partial r} + A_1\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{m}{r} u\right)\psi + \frac{C_2}{k} = 0 \tag{3.11}$$

Уравнение (3.10) будем решать методом характеристик [8]. Решение уравнения (3.10) при условии $z = 0$, $u = F(r)$ имеет вид

$$r = A_1F(y)z + y, \quad u = F(y) \tag{3.12}$$

Вдоль характеристики уравнение (3.11) можно написать в таком виде:

$$-\frac{d\psi}{dz} + A_1\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{m}{r} u\right)\psi + \frac{C_2}{k} = 0 \tag{3.13}$$

где u определяется из (3.12). Интегрирующий множитель уравнения (3.13) имеет вид

$$\mu_1 = (1 + A_1F'z)^{-1} (y + A_1Fz)^{-m} \tag{3.14}$$

Рассмотрим сперва случай $m = 1$. Тогда согласно (3.14) общее решение (3.13) будет

$$\psi = \frac{C_2}{\mu_1 A_1 F'(y - F/F')} \ln\left(\frac{1 + A_1 F' z}{y + A_1 F z}\right) + \frac{\chi_1(y)}{\mu_1} \tag{3.15}$$

где χ_1 — постоянная интегрирования. Однако для частного случая сферической волны $F(y) = r/R$ на прямой $r = y$ и $z = 0$ выражение ψ содержит неопределенность. Поэтому необходимо значение $F(y)$ в виде сферической волны подставить в (3.13), а потом интегрировать, тогда получим следующее выражение:

$$\psi = -\frac{C_2 R}{A_1}\left(1 + \frac{A_1 z}{R}\right) + \chi_1(y)\, y\left(1 + \frac{A_1 z}{R}\right)^2$$

Если при

$$z = 0 \quad \psi = E_0^{-2} \exp(y^2/r_0^2) \tag{3.16}$$

то

$$\psi = C_2(1 + A_1 z/R)\, z + (1 + A_1 z/R)^2 E_0^{-2} \exp(y^2/r_0) \tag{3.17}$$

Для приосевых лучей, когда ψ и U имеют вид (3.3), нетрудно убедиться, что (3.17) переходит в (3.7), если в последнем подставить $C_1 = 0$.

При $m = 0$ решение (3.13) имеет вид

$$\psi = (1 + A_1 F' z)\left[\frac{C_2}{A_1 F'} \ln(1 + A_1 F' z) + \chi_1(y)\right] \tag{3.18}$$

Если $F = r/R$ и выполняются условия (3.16), то (3.18) принимает вид

$$\psi = \left(1 + \frac{A_1 z}{R}\right)\left[\frac{C_2 R}{A_1} \ln\left(1 + \frac{A_1 z}{R}\right) + E_0^2 \exp(y^2/r_0^2)\right]$$

Условие для огибающей получается, если продифференцируем первое уравнение в (3.12) по r и приравняем нулю, тогда получим $F'(y) = -(A_1 z)^{-1} < 0$. Отсюда следует, что огибающая имеется при $R^{-1} < 0$, то есть для вогнутой волны. Значение y определяется из первого уравнения (3.12) и имеет вид:

$$y = rR(R + A_1 z)^{-1}$$

Для неоднородной среды, ограничиваясь использованным выше приближением, достаточно считать ρ и c_{ijkl} переменными. Проводя выкладки подобно [2], можно получить для неоднородной среды уравнение модуляции в следующем виде:

$$(A_1 + iA_2) \triangle_{\perp} U_0 - 2ik \frac{\partial U_0}{\partial x_3} = (C_1 + iC_2)\, \tau_2^2 |U_0|^2 U_0$$

где $u_{00} = \tau_2 U_0$, τ_2 — лучевое решение для u_{03}, даваемое законом сохранения энергии волны в виде $\rho c_2^2 \sum v = \text{const}$, $\sum$ — площадь волнового фронта внутри элементарной лучевой трубки.

Считая, что $C_1\varphi_2^2$ и $C_2\varphi_2^2$ медленно меняются по длине волны возмущения, результаты, полученные для устойчивости волны, остаются в силе.

В конце оценим фокальные расстояния z_{ϕ}, когда волна распространяется в железе. Предполагаем, что исходный фронт волны плоский ($R \to \infty$). Тогда при $T = 500^\circ$ К, $b \approx 10^6$ кг/мс, $\omega = 10^2$ с$^{-1}$, $r_0 = 10^{-2}$ м и $E_0 = 9 \cdot 10^{-4}$ м $v \approx 3 \cdot 10^3$ м/с, $\alpha^{-1} \approx 10^{-3}$ м, $z_{\phi_1} \approx 3 \cdot 10^{-3}$ м. Когда $T = 1000^\circ$ К, $b = 10^3$ кг/мс, $v \approx 2 \cdot 10^3$ м/с, $\omega = 10^5$ с$^{-1}$, $r_0 = 4 \cdot 10^{-2}$ м, и $E_0 = 8 \cdot 10^{-4}$ м, $\alpha^{-1} \approx 1$ м, $z_{\phi_1} \approx 3 \cdot 10^{-2}$ м.

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՔՎԱԶԻՄՈՆՈՔՐՈՄԱՏԻԿ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ ՋԵՐՄԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԳԾԱՅԻՆ ՄԱԾՈՒՑԻԿ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Ա. Վ. ՇԵԿՈՅԱՆ

Ամփոփում

Արտածված են ոչ գծային հավասարումները ցրող միջավայրում քվազի-մոնոքրոմատիկ ալիքների ամպլիտուդայի և փուլի համար։ Քննարկված են ալիքի կայունությունը և նրա նեղ փնջերի ֆոկուսացումը։

THE PROPOGATION OF NON-LINEAR QUASIMONOCHROMATIC WAVES IN THERMOELASTIC LINEARLY VISCOUS MEDIUM

A. G. BAGDOEV, A. V. SHEKOYAN

Summary

The derivation of non-linear equations for the amplitude and phase of quasimonochromatic waves in dissipative medium is given. The stability of waves and focusing of beams are considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г.* Уравнение линейной вязкотермомагнитоупругой среды вблизи фронтов волн.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1974, т. 27, № 1.
2. *Бабич В. М.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в случае упругой неоднородной анизотропной среды. В сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Изд. ЛГУ, 1961.
3. *Заремба Л. К., Красильников В. А.* Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах.— Успехи физ. н., 1970, т. 102, № 4.
4. *Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные и линейные переходные волновые процессы. Таллин: Изд. АН Эст.ССР, 1972.
5. *Рыжов О. С.* О нелинейной акустике химически активных сред.— ПММ, 197[illegible], т. 35, № 6.

6. *Селезов И. Г., Яковлев В. В.* Дифракция волн на симметричных неоднородностях. Киев: Наукова думка, 1978.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965.
8. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
9. *Бленд Д.* Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972.
10. *Melkumyan G. H., Shekoyan A. V.* On the theory of self-aktion of ultrasonic and hypersonic waves. Phys. stat. sol. (a), 1978, v. 48, p. 23.
11. *Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.* Самофокусировка и дифракция в нелинейной среде.— Успехи физ. н., 1967, т. 93, № 1.
12. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
13. Сагомонян А. Я. Проникание. М.: Изд. МГУ, 1974.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
19. III. 1981

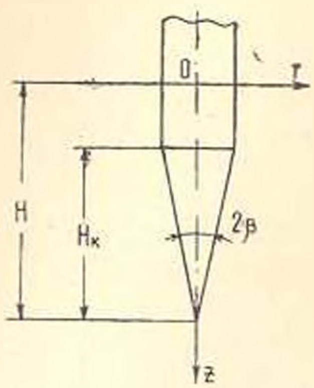
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXV, № 4, 1982 Механика

ПРОНИКАНИЕ В ВЕСОМУЮ ЖИДКОСТЬ ТОНКОГО КОНУСА, ПЕРЕХОДЯЩЕГО В ТОНКИЙ ЦИЛИНДР

АВАГЯН С. Г.

§ 1. Рассматривается задача о проникании тонкого конуса, переходящего в тонкий цилиндр, в весомую жидкость. Получены давление на конусе и сила сопротивления жидкости прониканию. Рассматривается также свободное проникание тонкого конечного конуса в жидкость.

При такой постановке задачи особый интерес представляет тот случай, когда тело уже погружено на глубину $H > H_k$ (фиг. 1). При $H \leq H_k$ решение совпадает с решением для бесконечного конуса [4]. Потенциал скоростей φ удовлетворяет уравнению



Фиг. 1.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0 \qquad (1.1)$$

Цилиндрическая система координат выбрана, как показано на фиг. 1. Решение задачи ищем методом источников, распределенных по конической части тела. Начальные условия

$$\varphi=0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \qquad \text{при } t=0 \qquad (1.2)$$

На свободной поверхности имеет место условие

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-g\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$$

Граничное условие на теле имеет вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\begin{cases} -H\dfrac{\partial r_1}{\partial z} & \text{при } H-H_k<z<H \\ 0 & \text{при } 0<z<H-H_k,\ z>H \end{cases} \qquad (1.3)$$

где H — скорость проникания, r_k — уравнение образующей конуса $r_1=\beta(H-z)$, β — угол полураствора конуса. Можно полагать

$$\varphi=\varphi_0+\varphi_1 \qquad (1.4)$$

где φ_0 соответствует решению задачи о движении тела в безграничной среде $-\infty<z<\infty$, а φ_1 — отражению от свободной поверхности. φ_0 ищем в виде

$$\varphi_0 = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{H-H_k}^{H}\frac{q(z_1, t)\,dz_1}{\sqrt{(z_1-z)^2+r^2}} \tag{1.5}$$

где $q(z_1, t)$ — интенсивность источника. Для малых r имеем

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r\to 0} = \frac{1}{2\pi}\frac{q(z, t)}{r} \tag{1.6}$$

Из граничного условия (1.3) и (1.6) получим, что

$$q(z_1, t) = \begin{cases} 2\pi\beta^2 H(H-z_1) & H-H_k < z_1 < H \\ 0 & 0 < z_1 < H-H_k, \quad z_1 > H \end{cases} \tag{1.7}$$

Для удобства рассмотрим решение φ^0 от действия отдельных источников, где

$$\varphi = \int\limits_0^\infty \varphi^0 dz_1 \tag{1.8}$$

Для φ_0^0 получится

$$\varphi_0^0 = -\frac{q(z_1, t)}{4\pi\sqrt{(z_1-z)^2+r^2}} = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty e^{-k(z_1-z)}J_0(kr)\,q(z_1, t)\,dk \tag{1.9}$$

Тогда отраженные волны φ_1^0 можно искать в виде

$$\varphi_1^0 = \int\limits_0^\infty e^{-k(z_1+z)}J_0(kr)\,A(k, t)\,dk \tag{1.10}$$

Обозначим

$$c = -\frac{q(z_1, t)}{4\pi}\,h(H-z_1)\,h(z_1-H+H_k)$$

где h — единичная функция

$$h(H-z_1)\,h(z_1-H+H_k) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad H-H_k < z_1 < H \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Из граничного условия на поверхности жидкости $z = 0$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - g\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

из (1.10) и (1.9) после преобразований по Лапласу по t получим

$$A = \frac{gk - s^2}{gk + s^2}\bar{c} \tag{1.11}$$

где $\bar{c}$ обозначает преобразование Лапласа.

Тогда для $\bar{\varphi}_1^0$ имеем

$$\bar{\varphi}_1^0 = \int_0^\infty e^{-k(z_1+z)} J_0(kr) \frac{gk - s^2}{gk + s^2} c\,dk \tag{1.12}$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, найдем

$$\varphi_1^0 = -\frac{c}{\sqrt{(z_1+z)^2+r^2}} +$$

$$+ \int_0^\infty 2e^{-k(z_1+z)} J_0(kr) \sqrt{gk} \left[\int_0^{t-z_1/V_0} \frac{q(z_1, t-t')}{4\pi} \sin\sqrt{gk}t'\,dt' \right] dk \tag{1.13}$$

Исходя из (1.8), получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \int_{H-H_k}^{H} \frac{\partial\varphi^0}{\partial t}\,dz_1 \tag{1.14}$$

Согласно (1.4)

$$\frac{\partial\varphi^0}{\partial t} = \frac{\partial\varphi_0^0}{\partial t} + \frac{\partial\varphi_1^0}{\partial t}$$

Для простоты рассмотрим тот случай, когда проникание происходит с постоянной скоростью, то есть $H = V_0 t$. Из (1.9) и (1.13) получим

$$\frac{\partial\varphi^0}{\partial t} = \frac{\beta^2 V_0^2 h(z_1 - V_0 t + H_k) h(V_0 t - z_1)}{2\sqrt{(z_1+z)^2+r^2}} -$$

$$-\frac{\beta^2 V_0^3 (t - z_1/V_0) \delta(z_1 - V_0 t + H_k) h(V_0 t - z_1)}{2\sqrt{(z_1+z)^2+r^2}} +$$

$$+\frac{\beta^2 V_0^3 (t - z_1/V_0) \delta(V_0 t - z_1) h(z_1 - V_0 t + H_k)}{2\sqrt{(z_1+z)^2+r^2}} -$$

$$-\frac{\beta^2 V_0^2 h(z_1 - V_0 t + H_k) h(V_0 t - z_1)}{2\sqrt{(z_1-z)^2+r^2}} +$$

$$+\frac{\beta^2 V_0^3 (t - z_1/V_0) \delta(z_1 - V_0 t + H_k) h(V_0 t - z_1)}{2\sqrt{(z_1-z)^2+r^2}} -$$

$$-\frac{\beta^2 V_0^3 (t - z_1/V_0) \delta(V_0 t - z_1) h(z_1 - V_0 t + H_k)}{2\sqrt{(z_1-z)^2+r^2}} -$$

$$-\int_0^\infty e^{-k(z_1+z)} J_0(kr) \beta^2 V_0^2 \left[1 - \cos\sqrt{gk}\left(t - \frac{z_1}{V_0}\right)\right] dk \tag{1.15}$$

где δ — импульсная функция. После разложения подынтегрального выражения по степеням g до первого порядка дает вычисление интеграла в (1.14)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{\beta^2V_0^2}{2}\ln\frac{V_0t-z+\sqrt{(V_0t-z)^2+r^2}}{V_0t-H_k-z+\sqrt{(V_0t-H_k-z)^2+r^2}}+$$

$$+\frac{\beta^2V_0^2}{2}\ln\frac{V_0t+z+\sqrt{(V_0t+z)^2+r^2}}{V_0t-H_k+z+\sqrt{(V_0t-H_k+z)^2+r^2}}+$$

$$+\frac{\beta^2V_0^2H_k}{2\sqrt{(V_0t-H_k-z)^2+r^2}}-\frac{\beta^2V_0^2H_k}{2\sqrt{(V_0t-H_k+z)^2+r^2}}-$$

$$-\frac{g\beta^2}{2}\Bigg[\frac{H_k^2}{\sqrt{(V_0t-H_k+z)^2+r^2}}-$$

$$-2(V_0t+z)\ln\frac{V_0t+z+\sqrt{(V_0t+z)^2+r^2}}{V_0t-H_k+z+\sqrt{(V_0t-H_k+z)^2+r^2}}+$$

$$+2\left(\sqrt{(z+V_0t)^2+r^2}-\sqrt{(V_0t-H_k+z)^2+r^2}\right)\Bigg] \tag{1.16}$$

Давление внутри жидкости вычисляется по формуле

$$\frac{p}{\rho_0}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+gz+\frac{p_0}{\rho_0}-\frac{V^2}{2} \tag{1.17}$$

График зависимости $P=2(p-p_0)/(\rho_0\beta^2V_0^2)$ от $\xi=z/V_0t$ дан на фиг. 2. Из графика видно, что давление принимает также и отрицательные значения, что наименьшее давление имеет место у основания конуса. Следует отметить, что при проникании бесконечного конуса всюду давление имеет положительное значение. Сила сопротивления со стороны жидкости на конус вычисляется по формуле

$$Q=-2\pi\rho_0\beta^2\int\limits_{V_0t-H_k}^{V_0t}(V_0t-z)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}-gz+\frac{\beta^2V_0^2}{2}\right)dz \tag{1.18}$$

После подстановки значения $\partial\varphi/\partial t$ из (1.16) и вычисления интеграла получим

$$F=\frac{\lambda^2}{4}\left(\ln\frac{4}{\beta^2}-1\right)-(\lambda-1)\ln\frac{2-\lambda}{2(1-\lambda)}+\ln\frac{2-\lambda}{2}-$$

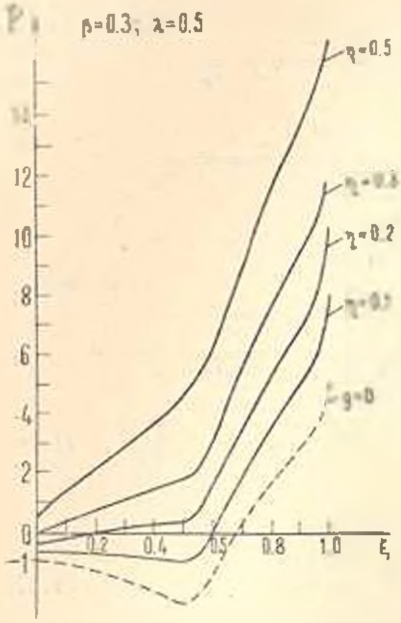
$$-\frac{\lambda}{2}(2-\lambda)\ln\frac{2(2-\lambda)}{2(1-\lambda)+\sqrt{4(1-\lambda)^2+\beta^2}}+$$

$$+\frac{\lambda^2}{2}\ln\frac{2}{\beta\lambda}+\frac{\eta\lambda^2}{2\beta^2}\left(1-\frac{2}{3}\lambda\right)-$$

$$-\frac{\eta}{2}\left[-\lambda^2(2-\lambda)\ln\frac{2(2-\lambda)}{2(1-\lambda)+\sqrt{4(1-\lambda)^2+\beta^2}}+\frac{8}{3}\ln\frac{2}{2-\lambda}+\right.$$

$$+\frac{2}{3}\lambda^3-\frac{1}{3}\lambda^3+2(1-\lambda)\ln\frac{2(1-\lambda)}{2-\lambda}+\frac{2}{3}(1-\lambda)^3\ln\frac{2-\lambda}{2(1-\lambda)}+$$

$$\left.+\frac{4}{3}(1-\lambda^3)\ln\frac{2(1-\lambda)}{2-\lambda}\right| \qquad (1.19)$$



Фиг. 2

где

$$F=\frac{Q}{2\pi\rho_0\beta^2V_0^4t^2},\quad \lambda=\frac{H_k}{V_0t},\quad \eta=\frac{gt}{V_0}$$

Анализ (1.19) показывает, что сила сопротивления по сравнению с бесконечным конусом получается меньше. При $\lambda=1$ получится выражение

$$F=-\frac{1+\ln 4\beta^2}{4}+$$

$$+\frac{\eta}{2}\left(\ln\frac{2}{\beta}-\frac{8}{3}\ln 2-\frac{1}{3}+\frac{1}{3\beta^2}\right)$$

которое совпадает с результатом решения для бесконечного конуса.

§ 2. *Свободное проникание конечного тонкого конуса в несжимаемую жидкость.*

В этой задаче тоже важен тот случай, когда тело проникает на глубину $H\geqslant H_k$, где H_k — высота конуса. Когда глубина проникания получается меньше высоты конуса, задача уже решена [5] и доказано, что при таком условии получается колебательное движение. Граничное условие на теле будет

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\begin{cases}\dot{H}\beta & \text{при}\quad H-H_k<z<H\\ 0 & \text{при}\quad 0<z<H-H_k,\quad z>H\end{cases}$$

где H — глубина проникания, $\dot{H}$ — скорость проникания. Здесь не учитывается кавитация. Проделав соответствующие выкладки, как и в § 1, и сохраняя члены, содержащие первую степень g, получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{\beta^2\ddot{H}}{2}\left|(H-z)\ln\frac{4(z+H_k-H)}{\beta^2(H-z)}-(H+z)\ln\frac{H+z}{H-H_k+z}\right|-$$

$$-\frac{\beta^2\dot{H}^2H_k}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{(H-H_k+z)^2+r^2}}-\frac{1}{\sqrt{(H-H_k-z)^2+r^2}}\right)-$$

$$-\frac{\beta^2\dot{H}^2}{2}\left(\ln\frac{4(z+H_k-H)}{\beta^2(H-z)}-\ln\frac{H+z}{H-H_k+z}\right)+$$

$$+\frac{\beta^2 g}{2}\left|2(z+H)\ln\frac{H+z}{H-H_k+z}-2H_k-\frac{H_k^2}{\sqrt{(H-H_k+z)^2+r^2}}\right|$$

Силу сопротивления вычислим по формуле

$$Q=-2\pi\rho_0\beta^2\int\limits_{H-H_k}^{H}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}-gz+\frac{\dot{H}^2\beta^2}{2}\right)(H-z)\,dz \tag{2.1}$$

Исходя из закона Ньютона

$$m\ddot{H}=mg-Q$$

и учитывая (2.1), найдем скорость проникания

$$\dot{H}=\pm\sqrt{M}$$

$$M=e^{-2\int\limits_{H_k}^{H}\frac{a_2}{a_1}dH}\int\limits_{H_k}^{H}\frac{2a_3}{a_1}e^{2\int\limits_{H_k}^{H}\frac{a_2}{a_1}dH}dH+$$

$$+\frac{mV_0^2+2g\left(mH_k-\frac{H_k^4}{4}\Delta\right)}{m+\alpha H_k^3}e^{-2\int\limits_{H_k}^{H}\frac{a_2}{a_1}dH}$$

Отсюда найдем ту глубину H_1, где тело останавливается. Имеем

$$\int\limits_{H_k}^{H_1}\frac{2a_3}{a_1}e^{2\int\limits_{H_k}^{H}\frac{a_2}{a_1}dH}dH+\frac{mV_0^2+2g\left(mH_k-\frac{H_k^4}{4}\Delta\right)}{m+\alpha H_k^3}=0$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 — функции, зависящие от H, а α, Δ — постоянные. Качественный анализ показывает, что такая глубина реально существует и для этого необходимо, чтобы было $\lambda>\sqrt{\frac{m}{\pi\rho_0\beta^3}}$. Значит, свободно проникающее в весомую жидкость тело всегда останавливается при указанном условии.

В заключение автор выражает благодарность А. Г. Багдоеву за внимание к работе и ее полезное обсуждение.

ԲԱՐԱԿ ԳԼԱՆԻ ՓՈԽԱՆՑՎՈՂ ԲԱՐԱԿ ԿՈՆԻ ԹԱՓԱՆՑՈՒՄԸ ԿՇԻՌ ՈՒՆԵՑՈՂ ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԵՋ

Ս. Գ. ԱՎԱԳՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է կշիռ ունեցող հեղուկի մեջ բարակ գլանի փոխանցվող բարակ կոնի թափանցման խնդիրը։

Որոշվում են ճնշումը կոնի վրա և թափանցմանը հեղուկի դիմադրության ուժը։ Դիտարկվում է նաև բարակ կոնի ազատ թափանցումը հեղուկի մեջ։

THE PENETRATION IN PONDERABLE FLUID OF A THIN CONE PASSING INTO A THIN CYLINDER

S. G. AVAGIAN

S u m m a r y

The pressure on the cone and the resistance force of fluid to penetration are obtained. The free penetration of a thin finite cone in fluid is also considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван, изд-во АН Арм.ССР, 1961.
2. *Сагомонян А. Я.* Проникание. Изд-во Моск. ун-та, 1974.
3. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М., Изд-во «Наука», 1965.
4. *Авагян С. Г., Багдоев А. Г.* Некоторые задачи проникания тел в весомую жидкость. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1980, т. XXXIII, № 4.
5. Исследования по механике твердого деформируемого тела. Ереван: Изд-во АН Арм.ССР, 1981, с. 10—16.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
10. IV. 1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXV, № 4, 1982 Механика

КРУГЛАЯ ПЛАСТИНКА МИНИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА ИЗ ИДЕАЛЬНО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА, РАБОТАЮЩАЯ В ПОЛЕ ДЕЙСТВИЯ ОБЪЕМНЫХ СИЛ

МИНАСЯН В. Н.

Использованием достаточных условий Друкера-Шилда [1] определение толщины однослойной идеально-пластической ортотропной пластинки минимального объема, работающей в поле действия объемных сил, сводится к решению краевой задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения относительно скорости прогиба пластинки. Отыскивается пластинка гладкой формы. Следуя А. А. Ильюшину, путем введения неизвестной постоянной и специальных обозначений эта краевая задача сводится к задаче Коши для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно безразмерных функций. Выясняется асимптотическое поведение решения вблизи центра пластинки. Приводятся примеры решения с необходимыми иллюстрациями.

1. Пусть круглая однослойная пластинка радиуса R несет равномерно распределенную поперечную нагрузку интенсивности q и находится в поле действия объемных сил плотности γ. Материал пластинки обладает свойством цилиндрической ортотропии и его поведение за пределами упругости описывается законом течения, ассоциированным с поверхностью Мизеса-Хилла [2]. Целью работы является определение толщины гладкой пластинки $2h$, которая при данной нагрузке и плотности объемных сил в предельном состоянии обеспечивает минимальный объем.

Известно [5, 6, 7, 8], что однослойная пластинка наименьшего объема без особых ограничений вырождается в систему очень тонких и высоких ребер, объем которой равен нулю. Можно путем соответствующих ограничений получить реальную ребристую конструкцию.

В настоящей статье оптимальная пластинка отыскивается в классе «безреберных» пластинок.

Начало цилиндрической системы координат r, θ, z выберем в центре срединной плоскости пластинки, а ось z направим вертикально вниз.

Основные положения классической теории изгиба упругих тонких пластин считаются справедливыми и при пластическом изгибе.

Дифференциальное уравнение равновесия элемента пластинки имеет вид [3]:

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} + \frac{qr}{2} + \frac{2\gamma}{r}\int_0^r hr\,dr = 0 \tag{1.1}$$

где

$$M_r = \int_{-h}^{h} \sigma_r z dz, \quad M_\theta = \int_{-h}^{h} \sigma_\theta z dz \tag{1.2}$$

изгибающие моменты в сечениях $r = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$. Компоненты скоростей деформации в радиальном и кольцевом направлениях определяются формулами [3]

$$\xi_r = z\varkappa_r, \quad \xi_\theta = z\varkappa_\theta \tag{1.3}$$

где

$$\varkappa_r = -\frac{d^2 w}{dr}, \quad \varkappa_\theta = -\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} \tag{1.4}$$

— скорости изменения радиальной и кольцевой кривизны соответственно, w — скорость прогиба пластинки.

Считая, что материал — идеально-пластический и в каждой точке пластинки имеются три главных направления анизотропии, совпадающие с направлениями координатных линий, условие текучести в пространстве изгибающих моментов представим в виде [2]

$$f = (G+H)M_r^2 - 2HM_r M_\theta + (F+H)M_\theta^2 - h^4 = 0 \tag{1.5}$$

С помощью ассоциированного закона течения и условия текучести (1.5) для скоростей кривизн и изгибающих моментов пластинки получим

$$\begin{aligned} \varkappa_r &= \mu \frac{\partial f}{\partial M_r}, \qquad M_r = \frac{1}{\mu}\frac{(F+H)\varkappa_r + H\varkappa_\theta}{FG+GH+HF} \\ \varkappa_\theta &= \mu \frac{\partial f}{\partial M_\theta}, \qquad M_\theta = \frac{1}{\mu}\frac{(G+H)\varkappa_\theta + H\varkappa_r}{FG+GH+HF} \end{aligned} \tag{1.6}$$

где

$$\mu = \frac{1}{h^2}\sqrt{\frac{(F+H)\varkappa_r^2 + 2H\varkappa_r\varkappa_\theta + (G+H)\varkappa_\theta^2}{FG+GH+HF}} \tag{1.7}$$

Известно [1], что если при заданных нагрузках и плотности объемных сил пластинка находится в предельном состоянии и существует такое поле кинематически допустимых скоростей обобщенных деформаций, связанных с обобщенными усилиями ассоциированным законом течения, при котором производная скорости модифицированной диссипации удельной энергии по толщине принимает постоянное положительное значение во всей пластинке, то такая пластинка имеет минимальный объем.

Вышеупомянутое условие в случае осесимметричного поперечного изгиба пластинки можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial h} - \gamma w = k = \text{const} > 0 \tag{1.8}$$

где k — положительная постоянная, D — скорость диссипации энергии единичной площади срединной плоскости пластинки

$$D = M_r \varkappa_r + M_\theta \varkappa_\theta \tag{1.9}$$

С учетом (1.6) из (1.9) можно записать

$$D = \mu\left[(G+H)M_r^2 - 2HM_rM_\theta + (F+H)M_\theta^2\right] \tag{1.10}$$

Далее, из (1.5) и (1.10) следует, что

$$D = \mu h^4 \tag{1.11}$$

Подставляя из (1.7) значение μ в (1.11), для скорости диссипации энергии получим следующее выражение через скорости кривизн $\varkappa_r$ и $\varkappa_\theta$:

$$D = h^2 \sqrt{\frac{(F+H)\varkappa_r^2 + 2H\varkappa_r\varkappa_\theta + (G+H)\varkappa_\theta^2}{FG+GH+HF}} \tag{1.12}$$

Для полутолщины пластинки h с учетом (1.8) и (1.12) получим

$$h = (k+\gamma w)\frac{\sqrt{FG+GH+HF}}{\sqrt{(F+H)\varkappa_r^2 + 2H\varkappa_r\varkappa_\theta + (G+H)\varkappa_\theta^2}} \tag{1.13}$$

Из (1.7) и (1.13) следует

$$\mu = \frac{1}{(k+\gamma w)^2}\left|\frac{(F+H)\varkappa_r^2 + 2H\varkappa_r\varkappa_\theta + (G+H)\varkappa_\theta^2}{FG+GH+HF}\right|^{3/2} \tag{1.14}$$

Введем следующие обозначения:

$$\alpha_1 = \frac{F+H}{\sqrt{FG+GH+HF}}, \qquad \alpha_2 = \frac{G+H}{\sqrt{FG+GH+HF}} \tag{1.15}$$

$$\alpha_3 = \frac{H}{\sqrt{FG+GH+HF}}, \qquad \alpha = (FG+GH+HF)^{1/4}$$

С учетом этих обозначений имеем

$$M_r = \alpha(k+\gamma w)^2 \frac{\alpha_1\varkappa_r + \alpha_3\varkappa_\theta}{(\alpha_1\varkappa_r^2 + 2\alpha_3\varkappa_r\varkappa_\theta + \alpha_2\varkappa_\theta^2)^{1/2}}$$

$$M_\theta = \alpha(k+\gamma w)^2 \frac{\alpha_2\varkappa_\theta + \alpha_3\varkappa_r}{(\alpha_1\varkappa_r^2 + 2\alpha_3\varkappa_r\varkappa_\theta + \alpha_2\varkappa_\theta^2)^{1/2}} \tag{1.16}$$

$$h = \alpha(k+\gamma w)\frac{1}{(\alpha_1\varkappa_r^2 + 2\alpha_3\varkappa_r\varkappa_\theta + \alpha_2\varkappa_\theta^2)^{1/2}} \tag{1.17}$$

Подставляя выражения изгибающих моментов (1.16) и толщины пластинки (1.17) в дифференциальное уравнение равновесия (1.1), после некоторых выкладок получим

$$
\left[(\alpha_1\alpha_2 - 3\alpha_3^2)\varkappa_\theta^2 - 4\alpha_1\alpha_3\varkappa_r\varkappa_\theta - 2\alpha_1^2\varkappa_r^2\right]\frac{d\varkappa_r}{dr} - \left[2\alpha_1\alpha_3\varkappa_r^2 + (\alpha_3^2 + 3\alpha_1\alpha_2)\varkappa_r\varkappa_\theta + \right.
$$

$$
\left. + 2\alpha_2\alpha_3\varkappa_\theta^2\right]\frac{d\varkappa_\theta}{dr} + \frac{1}{r}\left[(\alpha_1 - \alpha_3)\varkappa_r + (\alpha_3 - \alpha_2)\varkappa_\theta\right](\alpha_1\varkappa_r^2 + 2\alpha_3\varkappa_r\varkappa_\theta + \alpha_2\varkappa_\theta^2) -
$$

$$
- \frac{2\gamma r\varkappa_\theta}{k + \gamma w}(\alpha_1\varkappa_r + \alpha_3\varkappa_\theta)(\alpha_1\varkappa_r^2 + 2\alpha_3\varkappa_r\varkappa_\theta + \alpha_2\varkappa_\theta^2) + \tag{1.18}
$$

$$
+ \frac{(\alpha_1\varkappa_r^2 + 2\alpha_3\varkappa_r\varkappa_\theta + \alpha_2\varkappa_\theta^2)^{3/2}}{(k + \gamma w)^2}\left[\frac{qr}{2} + \frac{2\gamma}{r}\int_0^r \frac{(k + \gamma w)\,r\,dr}{\sqrt{\alpha_1\varkappa_r^2 + 2\alpha_3\varkappa_r\varkappa_\theta + \alpha_2\varkappa_\theta^2}}\right] = 0
$$

К этому уравнению следует добавить ограниченность скорости прогиба в центре пластинки и граничные условия, которые имеют вид:

а) при шарнирном опирании

$$
w\big|_{r=R} = M_r\big|_{r=R} = 0 \tag{1.19}
$$

б) при защемлении

$$
w\big|_{r=R} = \frac{dw}{dr}\bigg|_{r=R} = 0 \tag{1.20}
$$

Таким образом, задача определения толщины ортотропной идеально-пластической однослойной пластинки минимального объема, работающей в поле действия объемных сил, при гладкой поверхности текучести материала свелась к краевой задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка относительно скорости прогиба (1.18) с соответствующими граничными условиями (1.19) или (1.20).

2. Решение полученной выше краевой задачи связано с большими трудностями. Пользуясь осесимметричностью, можно задачу свести к задаче Коши, которая решается существенно проще. С этой целью, следуя [3], введем обозначения

$$
r = ce^{\rho}, \quad \bar{w} = \frac{w}{\alpha kR}, \quad \bar{q} = \frac{\alpha q}{2}\frac{R^2}{c^2}, \quad \bar{\gamma} = \alpha R\gamma \tag{2.1}
$$

где ρ — новая безразмерная переменная, c — неизвестная постоянная.

С учетом (2.1) уравнение (1.18) запишем в виде системы

$$
\frac{d\bar{w}}{d\rho} = \varkappa, \quad \frac{d\varkappa}{d\rho} = v
$$

$$
\frac{dv}{d\rho} = -2\varkappa - 3v + \frac{1}{\alpha_1 B - 3B_1^2}\left\{\frac{2\bar{\gamma}BB_1\varkappa}{1 + \bar{\gamma}\bar{w}} + B(B_2 - B_1) + \right. \tag{2.2}
$$

$$
\left. + (\alpha_3 B - 3B_1B_2)(2\varkappa + v) - \frac{B^{5/2}e^{2\rho}}{(1 + \bar{\gamma}\bar{w})^2}\left[\bar{q} - 2\bar{\gamma}e^{2\rho}\int_{-\infty}^{\rho}\frac{(1 + \bar{\gamma}\bar{w})e^{-4\rho}}{B^{1/2}}\,d\rho\right]\right\}
$$

где приняты обозначения

$$B = \alpha_1 (\varkappa + v)^2 - 2\alpha_2 \varkappa (\varkappa + v) + \alpha_3 \varkappa^2$$
$$B_1 = \alpha_2 \varkappa - \alpha_1 (\varkappa + v), \quad B_2 = \alpha_3 \varkappa - \alpha_2 (\varkappa + v) \tag{2.3}$$

Граничные условия в новых обозначениях примут вид:

а) при шарнирном опирании

$$\bar{w}\Big|_{\rho=\rho_a} = 0, \qquad B_1 B^{-3/2}\Big|_{\rho=\rho_a} = 0 \tag{2.4}$$

б) при защемлении

$$\bar{w}\Big|_{\rho=\rho_a} = 0, \qquad \frac{d\bar{w}}{d\rho}\Big|_{\rho=\rho_a} = 0 \tag{2.5}$$

Полутолщина и объем пластинки определяются формулами

$$\frac{h}{R} = \frac{1+\bar{\gamma}\bar{w}}{B^{1/2}}\, e^{2(\rho_a-\rho)}, \qquad \frac{V}{4\pi R^3} = e^{4\rho_a}\int\limits_{\rho_a}^{\infty}(1+\bar{\gamma}\bar{w})B^{-1/2}e^{-4\rho}\,d\rho \tag{2.6}$$

где ρ_a — значение аргумента, при котором удовлетворяются соответствующие граничные условия.

Так как в силу введения неизвестной постоянной c внешняя кромка пластинки становится неизвестной, то для системы (2.2) можно решить задачу Коши. В качестве начальных условий служат значения искомых функций в центре пластинки $\bar{w}$, $\varkappa$ и v. Численное интегрирование системы (2.2) продолжается до того значения аргумента ρ_a, при котором одновременно удовлетворяются соответствующие граничные условия. В отличие от случая отсутствия объемных сил для этого необходимо повторить численное интегрирование при разных начальных значениях для $\bar{w}$. Так как безразмерная нагрузка $\bar{q}$ в себе содержит неизвестную постоянную $c = Re^{\rho_a}$, то после определения ρ_a можно вычислить значения действительной нагрузки q. Так как центру пластинки соответствует бесконечно большое значение аргумента $\rho = \infty$, то для реализации численного интегрирования необходимо предварительно выяснить асимптотическое поведение решения при стремлении ρ к бесконечности и определить значения $\bar{w}$, $\varkappa$ и v для конечного, достаточно большого ρ_0. Безразмерную скорость прогиба $\bar{w}$ для больших ρ ищем в виде

$$\bar{w} = \bar{w}_0 (1 - e^{-\lambda\rho}) \tag{2.7}$$

Подставляя это выражение в систему уравнений (2.2), замечаем, что для ее удовлетворения при $\rho \to \infty$ необходимо выполнение неравенства

$$1 < \varkappa < \frac{7}{3} \tag{2.8}$$

Имея ввиду это условие, приходим к следующему алгебраическому уравнению четвертой степени относительно x:

$$
\begin{aligned}
2\alpha_1^2 x^4 &+ (7\alpha_1\alpha_2 - 11\alpha_1^2)\, x^3 + (21\alpha_1^2 + 6\alpha_3^2 + 3\alpha_1\alpha_2 - 30\alpha_1\alpha_3)\, x^2 + \\
&+ (39\,\alpha_1\alpha_3 + 5\alpha_2\alpha_3 - 9\,\alpha_1\alpha_2 - 17\,\alpha_1^2 - 18\,\alpha_3^2)\, x + \\
&+ 5\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 12\,\alpha_3^2 + 6\,\alpha_1\alpha_2 - 16\,\alpha_1\alpha_3 - 8\,\alpha_2\alpha_3 = 0
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Следует заметить, что в это уравнение не входит плотность объемных сил γ, в результате чего асимптотическое поведение решения вблизи центра пластинки зависит только от характера анизотропии материала. Система уравнений (2.2) удовлетворяется для любого значения $\overline{w}_0$. Это естественно, так как значение $\overline{w}_0$ зависит также от граничных условий.

С целью определения $\overline{w}_0$ необходимо повторить численное интегрирование для разных $\overline{w}_0$ пока одновременно не удовлетворятся граничные условия задачи.

3. Рассмотрим следующие конкретные примеры:

а) $\sigma_{вr}/\sigma_{вz} = 3/2$, $\sigma_{в\theta}/\sigma_{вz} = 2/3$

б) изотропный материал

в) $\sigma_{вr}/\sigma_{вz} = 2/3$, $\sigma_{в\theta}/\sigma_{вz} = 1$

Вычисляя из (1.15) α_1, α_2, α_3 и подставляя их значения в характеристическое уравнение (2.9), получим

$$
\text{а)}\ x = 2.2951; \quad \text{б)}\ x = 2; \quad \text{в)}\ x = 1.6621
$$

Остальные три корня для всех перечисленных случаев не удовлетворяют условию (2.8), поэтому отбрасываются. Из (2.7) для поведения решений системы (2.2) в окрестности центра пластинки имеем

$$
\begin{aligned}
&\text{а)}\quad \overline{w} = \overline{w}_0 (1 - e^{-2.2951\rho}), \quad \varkappa = 2.2951\, \overline{w}_0 e^{-2.2951\rho}, \quad v = -2.2951\, \varkappa \\
&\text{б)}\quad \overline{w} = \overline{w}_0 (1 - e^{-2\rho}), \quad \varkappa = 2\overline{w}_0 e^{-2\rho}, \quad v = -4\overline{w}_0 e^{-2\rho} \\
&\text{в)}\quad \overline{w} = \overline{w}_0 (1 - e^{-1.6621\rho}), \quad \varkappa = 1.6621\overline{w}_0 e^{-1.6621\rho}, \quad v = -1.6621\, \varkappa
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

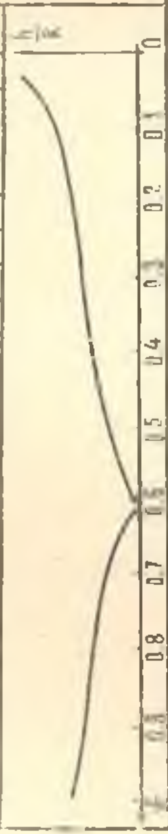
Имея в виду (2.7), (3.1) и (2.6), заметим, что в случае а) толщина пластинки в центре становится бесконечно большой, в случае б) принимает определенное ограниченное значение, а в случае в) превращается в нуль.

В табл. 1 приведены некоторые результаты решения задачи защемленной по контуру пластинки, несущей равномерно распределенную нагрузку и находящейся под действием объемных сил данной плотности. В последних столбцах таблицы представлены соответствующие графики изменения безразмерной полутолщины пластинки.

Вычисления были проведены также для случая отсутствия объемных сил. Результаты совпали с ранее полученными результатами [4]. В табл. 2

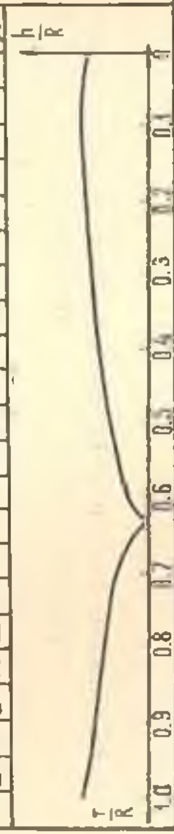
$\sigma_{sR}/\sigma_{st} = \frac{3}{2}$; $\sigma_{s\theta}/\sigma_{st} = \frac{2}{3}$
$\gamma R/\sigma_{st} = 0.05$, $q/\sigma_{st} = 0.1495$
$V/4\pi R^3 = 0.02806$

r/R	$\bar{W}$	χ	V	$10^2 h/R$
0	1.51	0	0	∞
0.05	1.51	0.006	-0.01	13.16
0.1	1.5	0.03	-0.06	10.71
0.15	1.48	0.07	-0.17	9.42
0.2	1.45	0.14	-0.33	8.52
0.25	1.41	0.24	-0.55	7.78
0.3	1.36	0.36	-0.86	7.11
0.35	1.29	0.53	-1.28	6.46
0.4	1.2	0.73	-1.85	5.79
0.45	1.1	0.99	-2.63	5.05
0.5	0.98	1.33	-3.82	4.18
0.55	0.84	1.78	-6.04	3.06
0.6	0.65	2.59	-18.3	1.07
0.607	0.62	2.93	$-\infty$ / $+\infty$	0
0.65	0.46	2.11	6.38	2.71
0.7	0.32	1.7	4.94	4.0
0.75	0.21	1.37	4.64	5.0
0.8	0.13	1.07	4.65	5.87
0.85	0.08	0.79	4.8	6.65
0.9	0.04	0.51	5.03	7.37
0.95	0.02	0.23	5.3	8.06
1.0	0	0	5.55	8.61



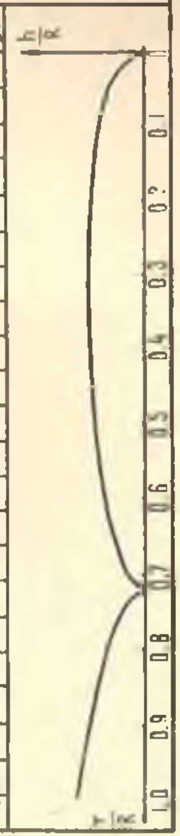
Изотропная пластинка
$\gamma R/\sigma_s = 0.05$, $q/\sigma_s = 0.0592$
$V/4\pi R^3 = 0.02797$

r/R	$\bar{W}$	χ	V	$10^2 h/R$
0	2.84	0	0	7.36
0.05	2.83	0.02	-0.04	8.31
0.1	2.81	0.07	-0.15	8.24
0.15	2.76	0.17	-0.34	8.08
0.2	2.7	0.3	-0.61	7.87
0.25	2.61	0.47	-0.99	7.59
0.3	2.51	0.7	-1.49	7.23
0.35	2.38	0.97	-2.15	6.8
0.4	2.23	1.32	-3.02	6.27
0.45	2.05	1.73	-4.21	5.64
0.5	1.84	2.26	-5.95	4.85
0.55	1.59	2.95	-8.89	3.86
0.6	1.3	3.98	-16.2	2.43
0.632	1.06	5.46	$-\infty$ / $+\infty$	0
0.65	0.92	4.52	19.8	1.83
0.7	0.63	3.49	11.1	3.55
0.75	0.41	2.78	9.72	4.69
0.8	0.26	2.16	9.47	5.62
0.85	0.14	1.59	9.62	6.44
0.9	0.07	1.03	9.94	7.21
0.95	0.03	0.48	10.3	7.94
1.0	0	0	10.7	8.57



$\sigma_{sR}/\sigma_{st} = \frac{2}{3}$; $\sigma_{s\theta}/\sigma_{st} = 1$
$\gamma R/\sigma_{st} = 0.05$; $q/\sigma_{st} = 0.06085$
$V/4\pi R^3 = 0.02927$

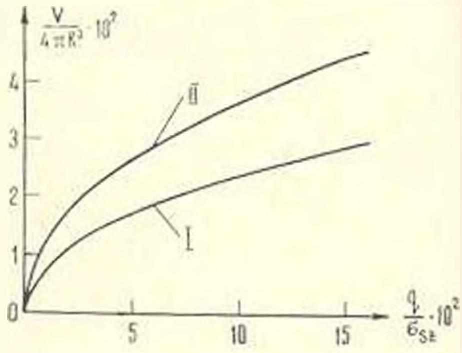
r/R	$\bar{W}$	χ	V	$10^2 h/R$
0	2.5	0	0	0
0.05	2.49	0.03	-0.05	5.03
0.1	2.45	0.09	-0.15	6.21
0.15	2.4	0.17	-0.3	6.9
0.2	2.33	0.29	-0.5	7.32
0.25	2.26	0.42	-0.76	7.56
0.3	2.16	0.59	-1.09	7.63
0.35	2.06	0.79	-1.5	7.57
0.4	1.94	1.02	-2.01	7.38
0.45	1.8	1.29	-2.68	7.05
0.5	1.65	1.62	-3.57	6.58
0.55	1.48	2.01	-4.82	5.94
0.6	1.28	2.51	-6.76	5.08
0.65	1.06	3.18	-10.5	3.9
0.7	0.79	4.32	-25.4	1.93
0.715	0.69	5.19	$-\infty$ / $+\infty$	0
0.75	0.48	3.65	19.3	2.99
0.8	0.28	2.62	13.9	4.67
0.85	0.15	1.83	12.3	5.94
0.9	0.05	1.15	11.6	7.04
0.95	0.02	0.53	11.2	8.04
1.0	0	0	11.1	8.95



представлены некоторые значения объема пластинки в зависимости от нагрузки при фиксированном значении $\gamma R/\sigma_{sz}$. На основе этих данных на фиг. 1 построены графики зависимости безразмерного объема пластинки $V/4\pi R^3$ от величины безразмерной интенсивности нагрузки q/σ_{sz}, где I кривая соответствует случаю а), II — случаю б).

Таблица 2

$\sigma_{sr}/\sigma_{sz}=3/2$, $\sigma_{s\theta}/\sigma_{sz}=2/3$, $\gamma R/\sigma_{sz}=0.05$		Изотропная пластинка $\gamma R/\sigma_s=0.05$	
$10^2 q/\sigma_{sz}$	$10^2\ V/4\pi R^3$	$10^2 q/\sigma_s$	$10^2 V/4\pi R^3$
0	0	0	0
0.98	0.79	1.09	1.32
4.39	1.60	4.40	2.49
7.39	2.05	7.45	3.20
11.92	2.60	12.05	4.01
14.95	2.89	15.13	4.49



Фиг. 1.

ԾԱՎԱԼԱՅԻՆ ՈՒԺԵՐԻ ԴԱՇՏՈՒՄ ԱՇԽԱՏՈՂ ԻԴԵԱԼԱԿԱՆ-ՊԼԱՍՏԻԿ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՆՅՈՒԹԻՑ ՄԻՆԻՄԱԼ ԾԱՎԱԼԻ ԿԼՈՐ ՍԱԼԸ

Վ. Ն. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Ամփոփում

Որոշվում է ծավալային ուժերի դաշտում աշխատող, իդեալական-պլաստիկ օրթոտրոպ նյութից պատրաստված, մինիմալ ծավալի կլոր սալի հաստությունը։

Խնդիրը բերվում է սալի ճկվածքի փոփոխման արագության նկատմամբ ոչ գծային ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման համար եզրային խնդրի լուծմանը։

ROUND PLATE OF MINIMUM VOLUME MADE OF AN IDEAL PLASTIC ORTHOTROPIC MATERIAL OPERATING IN THE FIELD OF ACTION OF VOLUMETRIC FORCES

V. N. MINASIAN

Summary

The variable thickness of a minimum volume round plate, made of an ideal plastic orthotropic material, operating in the field of volumetric force is defined.

The problem is reduced to the solution of boundary problem for the nonlinear integrodifferential equation in relation to the velocity of deflection of the plate.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шилд Р.* Методы оптимального проектирования конструкций.— Сб. Механика. 1962. 2 (72), с. 148—159.
2. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: ГИТТЛ, 1967.
3. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.—Л.: Гостехиздат, 1948.
4. *Киракосян Р. М., Минасян В. Н., Саркисян М. С.* О проектировании однослойной круглой ортотропной пластинки наименьшего объема в стадии предельного равновесия. Всесоюзная конференция «Проблемы оптимизации и надежности в строительной механике», Тезисы докладов, Вильнюс, май 1979, с. 70—71.
5. *Лурье К. А., Черкаев А. В.* О применении теоремы Прагера к задаче оптимального проектирования тонких пластин.— Изв. АН СССР. МТТ. 1976, № 6, с. 157—159.
6. *Рейтман М. И., Шапиро Г. С.* Оптимальное проектирование деформируемых твердых тел. Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. № 12, М.: ВИНИТИ, 1978.
7. *Арман Ж.-Л. П.* Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. М.: Мир, 1977.
8. *Megarefs G. J.* Method for minimal design of axisymmetric plates.— ASCE, 1966, v. 92, No. 6, p. 79—99.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
25. VI. 1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXV, № 4, 1982 Механика

ИЗМЕНЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ИНТЕНСИВНОСТИ ПРИ РАЗРУШЕНИИ ПЕРЕМЫЧКИ МЕЖДУ ДВУМЯ КОЛЛИНЕАРНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

НАЗАРОВ С. А., РОМАШЕВ Ю. А.

В настоящей работе рассматривается плоская задача классической теории упругости для области Ω, ослабленной двумя разрезами, расположенными на одной прямой, и находящейся под действием произвольной внешней нагрузки. Предполагается, что длина $2h$ перемычки между этими трещинами мала. При помощи решений задачи в области Ω с разрезом, образованным слиянием двух первоначальных трещин, и задачи на плоскости R^2, ослабленной двумя полубесконечными разрезами, конструируется асимптотика решения исходной задачи. Исследуется аналитическая зависимость от h коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещин, имеющая вид $d_1 + d_2(\log h + C)^{-1} + O(h)$ в дальних концах и $d_3 h^{-1/2}(\log h + C)^{-1} + O(h^{1/2})$ в ближних. Такая зависимость от h связана с неразрешимостью в классе убывающих функций предельной задачи для внутреннего разложения. Поэтому для сращивания асимптотик необходимо [1, 2] привлечь логарифмически растущие решения однородных предельных задач. Указанные решения и приводят к возникновению $\log h$ в представлении приближенного решения задачи.

1. *Постановка задачи.* Пусть Ω — либо плоскость R^2, либо подобласть R^2 с гладкой (класса C^∞) границей, содержащая отрезок $M = \{x = (x_1, x_2) \in R^2: x_2 = 0, x_1 \in [-b, a]\}$, где a, b — положительные числа. Допустим, что a и b имеют порядок $O(1)$, характерный размер l области Ω масштабированием также сведен к единице. Обозначим через Ω_0 область $\Omega \setminus M$, а через Ω_h при $h \in (0, 1)$ область $\Omega_0 \cup \{x \in R^2: x_2 = 0, x_1 \in (-h, h)\}$. В области Ω_h рассмотрим задачу классической теории упругости*

Фиг. 1.

$$\Delta u^h + (1 - 2\nu)^{-1} \nabla \nabla \cdot u^h = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_h \qquad (1.1)$$

$$\sigma_{ns}(u^h) = T_s, \quad \sigma_{nn}(u^h) = T_n \quad \text{на} \quad \partial\Omega_h \qquad (1.2)$$

где u — вектор смещения, $\|\sigma_{ij}(u)\|$ — тензор напряжений; T — вектор

* Если область Ω не ограничена, то условия на бесконечности понимаются в смысле принадлежности энергетическому классу.

внешней нагрузки, n — внутренняя нормаль, s — координата на $\partial\Omega$. Предположим, что главный вектор и главный момент внешней нагрузки равен нулю при любом h. Тогда существует решение u^h задачи (1.1), (1.2), единственное с точностью до смещений и поворота Ω_h как жесткого тела. Построим асимптотику решения u^h при $h \to 0$. Для этого будет использован алгоритм работы [1], в которой изучена асимптотика решений эллиптических в смысле А. Дуглиса — Л. Ниренберга краевых задач в областях с нерегулярно возмущенной границей.

2. *Построение асимптотики.* В качестве основного приближения к u^h естественно выбрать решение u^0 задачи

$$\Delta u^0 + (1-2\nu)^{-1}\nabla\nabla\cdot u^0 = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_0 \tag{2.1}$$

$$\sigma_{ns}(u^0) = T_s, \quad \sigma_{nn}(u^0) = T_n \quad \text{на} \quad \partial\Omega_0 \tag{2.2}$$

Вектор-функция u^0 не принадлежит, вообще говоря, пространству $C(\Omega_h)$ при $h>0$, то есть $u^0(0, +0) \neq u^0(0, -0)$. Поэтому вблизи точки (0, 0) поведение вектора u^h описывается при помощи решения другой задачи. Сделаем замену координат $x \to \xi = h^{-1}x$. Область при этой замене и последующем переходе к $h = 0$ трансформируется в плоскость с двумя полубесконечными разрезами $\Pi = R^2 \setminus \{\xi \in R^2\colon \xi_2 = 0, \xi_1 \overline{\in}(-1, 1)\}$. Для использования метода сращиваемых асимптотических разложений [3] необходимо построить векторное поле w, удовлетворяющее однородным уравнениям равновесия в Π, граничным условиям $\sigma_{12}(w) = \sigma_{22}(w) = 0$ на $\partial\Pi$ и условиям на бесконечности

$$\begin{aligned} w(\xi) &\to u^+ = u^0(0, +0) \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty, \quad \xi_2 > 0 \\ w(\xi) &\to u^- = u^0(0, -0) \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty, \quad \xi_2 < 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Нетрудно проверить, что при $u^+ \neq u^-$ такого поля не существует. Дело в том, что для векторного поля w с нечетной (по ξ_2) первой компонентой (или нечетной второй компонентой), удовлетворяющего перечисленным выше условиям и допускающего оценку $O(1)$ при $|\xi| \to \infty$, справедливы равенства $w_1 = 0$, $w_2 = \text{const}$ (или соответственно $w_1 = \text{const}$, $w_2 = 0$). Однако существуют вектор-функции Γ^1 и Γ^2 такие, что

$$\Delta\Gamma^j + (1-2\nu)^{-1}\nabla\nabla\cdot\Gamma^j = 0 \quad \text{в} \quad \Pi$$

$$\sigma_{12}(\Gamma^j) = \sigma_{22}(\Gamma^j) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Pi \tag{2.4}$$

$$\Gamma^j_k(\xi_1, \xi_2) = (-1)^{\delta_{jk}}\Gamma^j_k(\xi_1, -\xi_2), \; \xi \in \Pi, \; j, k = 1, 2$$

и растущие на бесконечности не быстрее любой положительной степени $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$. Матрица $\Gamma = \|\Gamma^j_k\|$ отличается постоянным множителем от матрицы Грина для задачи классической теории упругости, полюсы расположены в точках $(\infty, +\infty)$ и $(\infty, -\infty)$, и допускает при $\xi_2 > 0$, $\rho \to +\infty$ асимптотическое представление

$$\Gamma(\xi) = (1-\nu)^{-1}\bar{T}(\rho, \theta)/2 + \gamma + O(\rho^{-1}) \tag{2.5}$$

Здесь θ — полярный угол из интервала $(-\pi, \pi)$, $\gamma = \|\gamma_k^j\|$ — постоянная матрица,

$$\bar{T}(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} 2(1-\nu)\log\rho + \sin^2\theta, & -(1-2\nu)\theta - \sin\theta\cos\theta \\ (1-2\nu)\theta - \sin\theta\cos\theta, & 2(1-\nu)\log\rho + \cos^2\theta \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Асимптотику вектор-функции u^h в $\sqrt{h}$-окрестности точки $(0, 0)$ будем искать в виде

$$u^h(x) \sim A_1\Gamma^1(h^{-1}x) + A_2\Gamma^2(h^{-1}x) + (B_1, B_2) \tag{2.7}$$

где A_j и B_j — некоторые постоянные, подлежащие определению. Так как правая часть формулы (2.7) содержит логарифмически растущее слагаемое, то для описания асимптотики u^h вне $\sqrt{h}$-окрестности точки $(0, 0)$ вектора u недостаточно. Введем матрицу G, каждый столбец которой удовлетворяет однородным уравнениям (2.1) в $\Omega_0 \setminus \{(0, 0)\}$ и однородным граничным условиям (2.2) на $\partial\Omega_0 \setminus \{(0, 0)\}$. Пусть еще G допускает асимптотическое представление

$$G(x) = \pm(1-\nu)^{-1}\bar{T}(r, \theta)/2 + g^{\pm} + O(r), \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 \to 0, \quad \pm x_2 > 0 \tag{2.8}$$

Столбец G^2 реализуется как векторное поле смещений в Ω_0 под действием симметричных нормальных сосредоточенных в точках $(0, +0)$ и $(0, -0)$ нагрузок, а G^1 — как векторное поле смещений в Ω_0 под действием антисимметричных касательных сосредоточенных нагрузок, приложенных к точкам $(0, +0)$ и $(0, -0)$.

Вне $\sqrt{h}$-окрестности точки $(0, 0)$ асимптотику вектор-функции u^h будем искать в виде

$$u^h(x) \sim D_1G^1(x) + D_2G^2(x) + u(x) \tag{2.9}$$

Найдем постоянные A_j, B_j и D_j, $j = 1, 2$, из условия совпадения асимптотик (2.7) и (2.9) вектора u^h в зоне $r \sim \sqrt{h}$. Рассмотрим, например, компоненту u_1^h при $x_2 > 0$. Правая часть выражения (2.9) принимает вид

$$u_1^+ + D_1(\log r + (1-\nu)^{-1}\sin^2\theta/2) - D_2(1-\nu)^{-1}[(1-2\nu)\theta + \\ + \sin\theta\cos\theta]/2 + D_1g_1^{1+} + D_2g_1^{2+} + O(\sqrt{h}) \tag{2.10}$$

а правая часть (2.7) — вид

$$B_1 + A_1(\log r + (1-\nu)^{-1}\sin^2\theta/2) - A_2(1-\nu)^{-1}[(1-2\nu)\theta + \\ + \sin\theta\cos\theta]/2 + A_1(\gamma_1^1 - \log h) + A_2\gamma_1^2 + O(\sqrt{h}) \tag{2.11}$$

Необходимым условием совпадения главных членов в (2.10) и (2.11) являются равенства $A_j = D_j$, $j = 1, 2$. Приравнивая оставшиеся постоянные, получим уравнение

$$A_1(-\log h + \gamma_1^1 - g_1^{1,+}) + A_2(\gamma_1^2 - g_1^{2,+}) + B_1 = u_1^+ \tag{2.12}$$

Аналогично, рассматривая $u_1^{\pm}$ при $x_2 < 0$ и $u_2^{\pm}$ при $x_2 > 0$ или при $x_2 < 0$, имеем

$$\begin{gathered} A_1(\log h - \gamma_1^1 - g_1^{1,-}) + A_2(\gamma_1^2 - g_1^{2,-}) + B_1 = u_1^- \\ A_1(\gamma_2^1 - g_2^{1,+}) + A_2(-\log h + \gamma_2^2 - g_2^{2,+}) + B_2 = u_2^+ \\ A_1(\gamma_2^1 - g_2^{1,-}) + A_2(\log h - \gamma_2^2 - g_2^{2,-}) + B_2 = u_2^- \end{gathered} \tag{2.13}$$

Решением алгебраической системы (2.12), (2.13) являются постоянные

$$\begin{gathered} A_1 = \{(u_1^- - u_1^+) P_2(h) - (u_2^- - u_2^+) Q_1\} (P_1(h) P_2(h) - Q_1 Q_2)^{-1} \\ A_2 = \{(u_2^- - u_2^+) P_1(h) - (u_1^- - u_1^+) Q_2\} (P_1(h) P_2(h) - Q_1 Q_2)^{-1} \\ B_1 = \{u_1^+ + u_1^- + (g_1^{1,+} + g_1^{1,-}) A_1 + (g_1^{2,+} + g_1^{2,-} - 2\gamma_1^2) A_2\}/2 \\ B_2 = \{u_2^+ + u_2^- + (g_2^{1,+} + g_2^{1,-} - 2\gamma_2^1) A_1 + (g_2^{2,+} + g_2^{2,-}) A_2\}/2 \end{gathered} \tag{2.14}$$

где

$$\begin{gathered} P_1(h) = 2\log h - 2\gamma_1^1 + g_1^{1,+} - g_1^{1,-}, \quad Q_1 = g_1^{2,+} - g_1^{2,-} \\ P_2(h) = 2\log h - 2\gamma_2^2 + g_2^{2,+} - g_2^{2,-}, \quad Q_2 = g_2^{1,+} - g_2^{1,-} \end{gathered} \tag{2.15}$$

3. *Асимптотика смещений u^h.* Выберем в качестве асимптотического решения задачи (1.1), (1.2) вектор-функцию U^h, определяемую равенствами

$$\begin{gathered} U^h(x) = \chi_1(rh^{-1})[u^0(x) + A_1 G^1(x) + A_2 G^2(x)] + \\ + \chi_2(r)[(B_1, B_2) + A_1 \Gamma^1(xh^{-1}) + A_2 \Gamma^2(xh^{-1})] - \\ - \chi_1\left(\frac{r}{h}\right) \chi_2(r) \begin{cases} M_1 \\ M_2 \end{cases} \end{gathered} \tag{3.1}$$

где

$$M_1 = (1 - \nu)\{A_1 \bar{T}^1(r, 0) + A_2 \bar{T}^2(r, 0)\}/2 + A_1 g^{1,+} + A_2 g^{2,+} + u^+$$

при $x_2 > 0$

$$M_2 = (\nu - 1)\{A_1 \bar{T}^1(r, -0) + A_2 \bar{T}^2(r, -0)\}/2 + A_1 g^{1,-} + A_2 g^{2,-} + u^-$$

при $x_2 < 0$

Здесь χ_1 и χ_2 — срезающие функции из $C^\infty(R^1)$ такие, что

$$\chi_1(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t > 4, \\ 0 \text{ при } t < 2, \end{cases} \quad \chi_2\left(\frac{t}{\min(a, b)}\right) = \begin{cases} 0 \text{ при } t > 1/2 \\ 1 \text{ при } t < 1/4 \end{cases}$$

Из результатов работ [1], [4] вытекает

Теорема 1. *а) Справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Omega_h} \varepsilon_{ij}(u^h - U^h)\,\varepsilon_{ij}(u^h - U^h)\,dx < ch^2$$

в котором постоянная c не зависит от h, а u^h — любое решение задачи (1.1), (1.2).

б) Выполняется оценка

$$\max |R_h^\delta(x)\,\sigma_{ij}(u^h - U^h)| \leqslant c(\delta)\,h,\ ij = 1, 2 \tag{3.2}$$

где $R_h^\delta(x) = \min\{1,\ d_1^{(1+\delta)/2},\ d_2^{(1+\delta)/2},\ h + r,\ [hd_3(h)]^{(1+\delta)/2},\ [hd_4(h)]^{(1+\delta)/2}\}$, d_1, d_2, r, $d_3(h)$, $d_4(h)$ — *расстояния от точки x до точек* $(-b, 0)$, $(a, 0)$, $(0, 0)$, $(-h, 0)$ *и* $(h, 0)$ *соответственно;* δ — *произвольное положительное число; постоянная $c(\delta)$ зависит от δ, но не от h.*

в) Предположим, что векторы u^h и U^h подчинены условиям

$$\int\limits_{\Omega_h} (u^h - U^h)\,dx = 0, \qquad \int\limits_{\Omega_h} \operatorname{rot}(u^h - U^h)\,dx = 0 \tag{3.3}$$

Тогда имеет место формула

$$\max |u^h - U^h| \leqslant ch$$

Здесь постоянная c не зависит от h.

Отметим, что неравенство (3.2) означает, что вне фиксированных окрестностей точек $(0, 0)$, $(-b, 0)$ и $(a, 0)$ модуль разности напряжений, построенных по векторам u^h и U^h есть величина $O(h)$.

Формула (3.1) содержит рациональные функции от $\log h$. Асимптотические разложения такого вида в задачах о малых возмущениях границы области возникали в работах [5], [2]. Асимптотика решений эллиптических систем в областях с малыми локальными возмущениями границы получена в [1].

4. *Асимптотика коэффициентов интенсивности.* Выведем из формулы (3.1) для приближенного решения U^h задачи (1.1), (1.2) асимптотику по h коэффициентов интенсивности смещений u^h в вершинах трещин. Достаточно рассмотреть лишь правую трещину, то есть точки $(a, 0)$ и $(h, 0)$.

Обозначим через $K_a^j(V)$, $j = 1, 2$, коэффициенты в асимптотике вектора смещений

$$V(x) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + K_a^1(V)\,\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{d}{2\pi}}\begin{pmatrix} \cos(\varphi/2)\,(1 - 2\nu + \sin^2(\varphi/2)) \\ \sin(\varphi/2)\,(2 - 2\nu - \cos^2(\varphi/2)) \end{pmatrix} +$$

$$+ K_a^2(V)\,\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{d}{2\pi}}\begin{pmatrix} \sin(\varphi/2)\,(2 - 2\nu + \cos^2(\varphi/2)) \\ \cos(\varphi/2)\,(1 - 2\nu + \sin^2(\varphi/2)) \end{pmatrix} + O(d),\quad d \to 0 \tag{4.1}$$

где $c_j = \mathrm{const}$, (d, φ) — полярная система координат с центром в точке $(a, 0)$ такая, что берега разреза M задаются уравнениями $\varphi = \pm \pi$.

Обозначим коэффициенты в разложении V вида (4.1) вблизи точки $(h, 0)$ через $K_h^1(V)$ и $K_h^2(V)$. Еще понадобятся коэффициенты $\bar{K}_1^j(\Gamma^i)$ для векторов $\Gamma^1(\zeta)$ и $\Gamma^2(\zeta)$ в точке $(1, 0)$.

Следствием теоремы 1 является

Теорема 2. *Справедливы формулы*

$$K_a^j(u^h) = K_a^j(U^h) + A_1 K_a^j(G^1) + A_2 K_a^j(G^2) + O(h)$$

$$K_h^j(u^h) = h^{-1/2}\{A_1 \bar{K}_1^j(\Gamma^1) + A_2 \bar{K}_1^j(\Gamma^2)\} + O(h^{1/2})$$

Здесь $j = 1, 2$; постоянные A_1 и A_2 определены равенствами (2.14), (2.15).

Аналогичные формулы имеют место и для коэффициентов интенсивности в точках $(-b, 0)$ и $(-h, 0)$. Для того, чтобы получить их из (4.2) нужно заменить $\bar{K}_1^j$ на $\bar{K}_{-1}^j$, а индекс a на $-b$.

5. *Построение матрицы* Γ. В этом разделе будет найдена матрица Γ, столбцы которой являются решениями задач (2.4), и числовая матрица γ из формулы (2.5). При этом используется метод построения однородных решений задач теории упругости, приведенный в [6]. А именно, рассматривается задача

$$\varphi(z) + \overline{z\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = iN\Theta(x_1), \quad z \in \partial\Pi \tag{5.1}$$

где $z = x_1 + ix_2$, φ, ψ — функции Гурса, Θ — функция Хевисайда, а N — некоторая комплексная постоянная. При помощи преобразования Жуковского $2z = \zeta + \zeta^{-1}$ перейдем* из области Π в верхнюю полуплоскость C^+ комплексной переменной $\zeta \in C$. Задача (5.1) в переменных $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$ перепишется в виде

$$\varphi_*(\zeta) + \overline{\psi_*(\zeta)} = \begin{cases} iN, & \zeta_1 > 0, \quad \zeta_2 = 0 \\ 0, & \zeta_1 < 0, \quad \zeta_2 = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Здесь

$$\begin{gathered} \varphi_*(\zeta) = \varphi(z(\zeta)), \\ \psi_*(\zeta) = \psi(z(\zeta)) + \varphi_*'(\zeta)(\zeta^2 + 1)(\zeta^2 - 1)^{-1}\zeta \end{gathered} \tag{5.3}$$

Решением задачи (5.2) являются функции

$$\varphi_*(\zeta) = -\frac{N}{2\pi}\log\zeta + S_1, \quad \psi_*(\zeta) = \frac{\bar{N}}{2\pi}\log\zeta + S_2 \tag{5.4}$$

где S_1, S_2 — произвольные комплексные постоянные такие, что $S_1 + \bar{S}_2 = iN$. Из (5.3) и (5.4) следует

* При этом нижний берег разреза $\{x \in R^2: x_2 = 0, x_1 > 1\}$ трансформируется в отрезок $\{\zeta \in C: \zeta_2 = 0, \zeta_1 \in (0, 1)\}$, а верхний переходит в себя.

$$\varphi(z) = -(2\pi)^{-1} N \log(z + \sqrt{z^2-1}) + S_1$$

$$\psi(z) = \frac{\overline{N}}{2\pi} \log(z+\sqrt{z^2-1}) + \frac{Nz}{2\pi\sqrt{z^2-1}} + S_2$$

Используя соотношения между компонентами смещений W_1, W_2 и функциями Гурса, получим

$$W_1 = \frac{1}{4\pi\mu}\Big\{-(1+\varkappa) N_1 \log|z+\sqrt{z^2-1}| + 2N_1 x_2 \operatorname{Im}\frac{1}{\sqrt{z^2-1}} + 2N_2 x_2 \operatorname{Re}\frac{1}{\sqrt{z^2-1}} + N_2(\varkappa-1)\arg(z+\sqrt{z^2-1})\Big\} + \frac{1}{2\mu}(\varkappa \operatorname{Re} S_1 - \operatorname{Re} S_2)$$

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\mu}\Big\{-(1+\varkappa) N_2 \log|z+\sqrt{z^2-1}| - 2N_2 x_2 \operatorname{Im}\frac{1}{\sqrt{z^2-1}} + 2N_1 x_2 \operatorname{Re}\frac{1}{\sqrt{z^2-1}} - N_1(\varkappa-1)\arg(z+\sqrt{z^2-1})\Big\} + \frac{1}{2\mu}(\varkappa \operatorname{Im} S_1 + \operatorname{Im} S_2) \tag{5.5}$$

где μ — коэффициент Ламе, $\varkappa = 3-4\nu$. Правые части выражений (5.5) зависят от трех комплексных постоянных: $N = N_1 + iN_2$, S_1 и S_2. Выбирая их надлежащим образом, получим выражения для компонент матрицы Γ:

$$(\Gamma_1^1, \Gamma_2^1) = (W_1, W_2) \text{ при } N = -\frac{\pi\mu}{1-\nu}, \quad S_1 = -\frac{i\pi\mu}{(1-\nu)(\varkappa+1)}, \quad S_2 = \frac{i\pi\mu\varkappa}{(1-\nu)(\varkappa+1)}$$

$$(\Gamma_1^2, \Gamma_2^2) = (W_1, W_2) \text{ при } N = -\frac{i\pi\mu}{1-\nu}, \quad S_1 = \frac{\pi\mu}{(1-\nu)(\varkappa+1)}, \quad S_2 = \frac{\pi\mu\varkappa}{(1-\nu)(\varkappa+1)} \tag{5.6}$$

Сравнивая (5.6) с асимптотической формулой (2.5), получим

$$\gamma_1^1 = \log 2; \quad \gamma_1^2 = \gamma_2^1 = 0; \quad \gamma_2^2 = \log 2 - 1/2(1-\nu) \tag{5.7}$$

Кроме того, вычисляя коэффициенты интенсивности $\widetilde{K}_1^j(\Gamma^j)$ векторов Γ^1 и Γ^2 в точке (1, 0), имеем

$$\widetilde{K}_1^2(\Gamma^1) = \widetilde{K}_2^1(\Gamma^2) = \frac{\sqrt{\pi}\,\mu}{1-\nu}; \quad \widetilde{K}_1^1(\Gamma^1) = \widetilde{K}_1^2(\Gamma^2) = 0 \tag{5.8}$$

6. *Две трещины в плоскости.* Пусть Ω — плоскость R^2. При помощи формул, приведенных в книге [7] § 2, гл. XI, построим матрицу G (см. п. 2 и (2.8)). Ее столбец G^1 (или G^2) является решением задачи о трещине M под действием касательных антисимметричных (или нормальных симметричных) нагрузок, сосредоточенных в точке 0. Введем функции комплексного аргумента z:

$$Z(z) = -\mu\sqrt{ab}\,(1-\nu)^{-1} z^{-1} (z^2 - z(a-b) - ab)^{-1/2}$$

$$Z^0(z) = -\frac{i\mu}{1-\nu}\Big\{-\log z - \log(a+b) + i\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt{ab}}{a-b} +$$

$$+ \log\big[-2\sqrt{ab}\sqrt{ab+(a-b)z-z^2} + 2ab + z(a-b)\big]\Big\} \qquad (6.1)$$

Эти функции исчезают на бесконечности и связаны соотношением $Z = dZ^0/dz$. Положим

$$G = \frac{1}{2\mu}\begin{pmatrix} 2(1-\nu)\,\mathrm{Im}\,Z^0 + y\,\mathrm{Re}\,Z, & (1-2\nu)\,\mathrm{Re}\,Z^0 - y\,\mathrm{Im}\,Z \\ -(1-2\nu)\,\mathrm{Re}\,Z^0 - y\,\mathrm{Im}\,Z & 2(1-\nu)\,\mathrm{Im}\,Z^0 - y\,\mathrm{Re}\,Z \end{pmatrix} \qquad (6.2)$$

Сопоставляя формулы (6.1), (6.2) с асимптотическим представлением (2.8) матрицы G, получим, что компоненты числовых матриц $g^{\pm}$ задаются равенствами

$$g_1^{1,+} = -g_1^{1,-} = -\log\frac{4ab}{a+b}, \quad g_2^{2,+} = -g_2^{2,-} = -\log\frac{4ab}{a+b} - \frac{1}{2(1-\nu)}$$

$$g_2^{1,+} = -g_1^{2,-} = -g_1^{2,+} = g_2^{1,-} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt{ab}}{a-b} \qquad (6.3)$$

Кроме того, вычисляя коэффициенты интенсивности $K_a^j(G^p)$ векторов G^1 и G^2 в точке $(a, 0)$, имеем

$$K_a^2(G^1) = K_a^1(G^2) = -\frac{\mu}{1-\nu}\sqrt{\frac{2\pi b}{a(a+b)}}, \quad K_a^1(G^1) = K_a^2(G^2) = 0 \qquad (6.4)$$

Итак, для того, чтобы воспользоваться формулами (3.1) и (4.2) для асимптотики решения и коэффициентов интенсивности напряжений, необходимо найти значения $u^{\pm}$ (см. формулы (2.3), (2.14), (2.15)). Для определенности рассмотрим задачу о растяжении трещин $[-b, -h]$ и $[h, a]$ нормальной симметричной нагрузкой $q \in C([-b, a])$. Тогда [7] справедливо представление

$$u = \frac{1}{2\mu}\begin{pmatrix} (1-2\nu)\,\mathrm{Re}\,\widetilde{Z}^0 - y\,\mathrm{Im}\,\widetilde{Z} \\ 2(1-\nu)\,\mathrm{Im}\,\widetilde{Z}^0 - y\,\mathrm{Re}\,\widetilde{Z} \end{pmatrix} \qquad (6.5)$$

где

$$\tilde{Z}(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{(z-a)(z+b)}} \int_{-b}^{a} \frac{q(\xi)\sqrt{(a-\xi)(b+\xi)}}{z-\xi}\, d\xi$$

$$\tilde{Z}^{0}(z) = \frac{i}{\pi}\int_{-b}^{a} q(\xi)\Big[\log h \Big\{\frac{2(a-\xi)(\xi+b)}{z-\xi} - 2\xi + a - b -$$

$$-2\left((a-\xi)(b+\xi)\left((a-\xi)(b+\xi)(z-\xi)^{-2} - (2\xi+b-a)(z-\xi)^{-1} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 1\right)\right)^{1/2}\Big\} - \log\left\{-2i\sqrt{(a-\xi)(b+\xi)} - 2\xi + a - b\right\}\Big]\, d\xi$$

Вектор $u^{\pm}$ вычисляется как предел правой части равенства (6.4), при $z \to \pm i0$. Отметим, что $u_2^{-} = u_1^{+}$.

Приведем, наконец, выражение для коэффициентов интенсивности в вершинах трещин $[h, a]$ и $[-b, -h]$ и при постоянной нагрузке $q(x) = q^0$. Из формул (2.14), (2.15), (4.2), (5.7), (5.8), (6.3) и (6.4) получим

$$K_a^1 = q^0\sqrt{\pi\frac{a+b}{2}}\left\{1 + \frac{2b}{a+b}\left(\log\frac{8ab}{h(a+b)}\right)^{-1}\right\} + O(h) \qquad (6.6)$$

$$K_h^1 = q^0\sqrt{\pi\frac{ab}{h}}\left(\log\frac{8ab}{h(a+b)}\right)^{-1} + O(\sqrt{h}) \qquad (6.7)$$

$$K_{-b}^1 = q^0\sqrt{\pi\frac{a+b}{2}}\left\{1 + \frac{2a}{a+b}\left(\log\frac{8ab}{h(a+b)}\right)^{-1}\right\} + O(h) \qquad (6.8)$$

$$K_{-h}^1 = q^0\sqrt{\pi\frac{ab}{h}}\left(\log\frac{8ab}{h(a+b)}\right)^{-1} + O(\sqrt{h}) \qquad (6.9)$$

7. ***Некоторые замечания:***

i) В случае $\Omega = R^2$ и трещин одинаковой длины (то есть $a = b$) известны [8], [9] точные формулы для коэффициентов интенсивности

$$K_a^1 = q^0\sqrt{\frac{\pi a}{s}}\left(1 - \frac{E(s)}{K(s)}\right) \qquad (7.1)$$

$$K_h^1 = q^0\sqrt{\frac{\pi}{h}}\,\frac{a^2E(s)K(s)^{-1} - h^2}{\sqrt{a^2-h^2}} \qquad (7.2)$$

где $s = \sqrt{1 - ha^{-2}}$; K, E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Используя асимптотические представления [10], с. 919, для этих интегралов, находим

$$\frac{E(s)}{K(s)} = \frac{1}{\log(4ah^{-1})} + O(h^2|\log h|)$$

Отсюда видно, что выражения в (6.6) и (6.7) являются асимптотиками величин (7.1) и (7.2) даже с повышенными точностями $O(h^2|\log h|)$ и

$O(h^{3/2}|\log h|)$, соответственно. Отметим, что в случае несимметричной области Ω оценки $O(h)$ и $O(\sqrt{h})$ в формулах (6.6)—(6.9) точны.

ii) При определении асимптотик существенно использовалась удаленность трещин от внешнего контура на конечное (независящее от h) расстояние. В случае, когда расстояние от вершин $(-b, 0)$ и $(a, 0)$ трещины имеет порядок $O(h)$, то в их окрестности необходимо использовать аналогичную схему сращивания. Для задачи кручения цилиндрической области с продольной трещиной, близко расположенной к границе, асимптотика решения найдена в [11]. Общая схема построения асимптотических разложений приведена в [1].

ԵՐԿՈՒ ԿՈԼԻՆԵԱՐ ՃԱՔԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ՄԻՋՆՈՐՄԻ ՔԱՅՔԱՅՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ ԻՆՏԵՆՍԻՎՈՒԹՅԱՆ ԳՈՐԾԱԿՑԻ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ս. Ա. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՅՈՒ. Ա. ՌՈՄԱՇԵՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է երկու կոլինեար ճաքերով թուլացված Ω տիրույթի համար դասական առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը, երբ ճաքերի միջև միջնորմները բարակ են։ Կառուցվում է խնդրի համար ասիմպտոտական լուծում (երբ $h \to 0$)։ Ուսումնասիրվում է ճաքերի գագաթներում գործակիցների ինտենսիվության անալիտիկ կապը h-ից։ Երբ $\Omega = R^2$ այդ դեպքում լուծման և գործակիցների համար ստացվել են ակնհայտ բանաձևեր։

THE CHANGING OF STRESS INTENSITY FACTORS BY THE RUPTURE OF A BRIDLE BETWEEN TWO COLLINEAR CRACKS

S. A. NAZAROV, Ju. A. ROMASHEV

S u m m a r y

The classical plane elasticity problem for an area Ω, weakened by two collinear cracks, is considered in this paper. The width $2h$ of the bridle vanishes. An asymptotical (as $h \to 0$) solution of the problem is constructed. The stress intensity factors are investigated as functions of h. The formulae for the solutions and the factors are given in explicit form for $\Omega = R^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Об асимптотике решений эллиптических краевых задач при нерегулярном возмущении области.— Проблемы математического анализа. 1981. № 8, с. 72—153.

2. *Ильин А. М.* Краевая задача эллиптического уравнения второго порядка в области с щелью. 2. Область с малым отверстием.— Мат. сборник, 1977, т. 103, № 2, с. 265—284.

3. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
4. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда—Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе.— Mathematiche Nachrichten, 1978, Bd. 81, s. 25—82.
5. *Лебедев Н. Н., Скальская И. П.* Применение парных интегральных уравнений к электростатическим задачам для полого проводящего цилиндра конечной длины.— ЖТФ, 1973, т. 43, в. 1, с. 44—51.
6. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
7. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 2. М.: Наука, 1976.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
9. *Парис П., Си Дж.* Анализ напряженного состояния около трещин. Сб. «Вязкость разрушения». М.: Мир, 1968, с. 64—142.
10. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
11. *Агаларян О. Б., Назаров С. А.* Об изменении коэффициентов интенсивности при запайке продольной трещины в призматическом стержне.— Докл. АН АрмССР, 1981, т. 72, № 1, с. 18—21.

Ленинградский государственный
университет им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию
8.II.198?

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXV, № 4, 1982 Механика

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗЛУЧЕНИЯ ВИБРИРУЮЩЕГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ, КОНТАКТИРУЮЩЕГО С ПЛАСТИНОЙ, ПОКРЫВАЮЩЕЙ СЛОЙ ЖИДКОСТИ

БОЕВ С. И., КОВАЛЕНКО Е. В.

В настоящее время акустические методы являются одними из основных и эффективных способов изучения фундаментальных физико-механических свойств различных объектов. Возбуждая колебания и анализируя закономерности их распространения, можно получать данные о структуре различных тел, об их механических характеристиках, их строении, исследовать механизмы, вызывающие затухание и изменения скоростей распространения акустических волн.

Объектом исследования данной работы является система, состоящая из вязкоупругой пластинки, покрывающей слой идеальной сжимаемой жидкости, и упругого стержня, жестко сцепленного с пластинкой и возбуждаемого периодически меняющейся во времени силой.

С помощью интегрального преобразования Фурье по продольной координате задача приведена к определению амплитуды давления под стержнем из интегрального уравнения первого рода типа свертки на конечном интервале с гладким ядром, корректно разрешимым лишь в пространстве обобщенных функций медленного роста.

Построены графики характерных виброакустических величин.

1. Рассмотрим следующую задачу о протекании идеальной сжимаемой жидкости в бесконечном плоском трубопроводе, изображенном на фиг. 1. Пусть с деформируемой стенкой трубопровода сцеплен упругий стержень длины l и ширины $2a$, подверженный действию периодически изменяющейся во времени нагрузки $Pe^{-i\omega t}$, эксцентриситет приложения которой e. Будем считать, что в процессе колебаний стержня не происходит отслоения стенки трубопровода от жидкости.

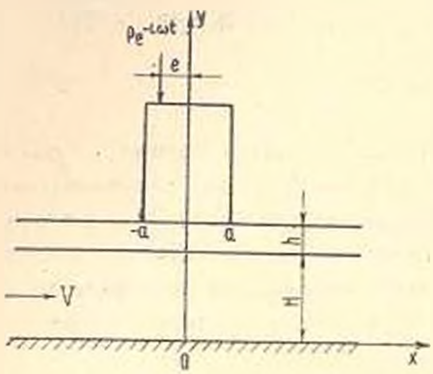
В качестве физико-механической модели деформируемой стенки трубопровода взята модель вязкоупругой (линейный закон наследственности) тонкой пластинки Кирхгофа--Лява [1]

$$Dv^{(4)} + \rho^* h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t) - q(x, t) + \int\limits_{-\infty}^{t} v^{(4)}(x, \tau) K(t-\tau)\, d\tau, \quad D = Gh^3[6(1-\nu)]^{-1} \qquad (1.1)$$

Здесь v — перемещение точек срединной плоскости по оси y, $p(x, t)$ —

реактивное давление, действующее на пластинку со стороны жидкости, $q(x, t)$ — контактное давление, отличное от нуля лишь при $|x| \leqslant a$, h — толщина пластинки, ρ^*, G, $\nu = \mathrm{const}$ — плотность, мгновенный модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала стенки, $K(t-\tau)$ — ядро релаксации, вид которого будет указан ниже.

Физико-механические свойства жидкости описываются линеаризованными относительно основного потока уравнениями идеальной жидкости при малых числах Маха [2]



Фиг. 1

$$\Delta\varphi - 2\frac{M}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

$$p = -\rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + V\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \qquad (1.2)$$

$$v_x = V + \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad M = \frac{V}{c}$$

где $\varphi(x, y, t)$ — потенциал возмущенных скоростей, $p(x, y, t)$ — давление в жидкости, V — скорость основного потока, c — скорость звука в жидкости, v_x, v_y — проекции скорости частиц жидкости на оси координат.

Заметим, что к уравнениям (1.2) необходимо добавить граничные условия

$$\begin{aligned} y = H:&\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + V\frac{\partial v}{\partial x} \\ y = 0:&\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \end{aligned} \qquad (1.3)$$

также линеаризованные относительно основного потока.

Уравнения продольных и поперечных колебаний стержня соответственно имеют вид

$$E_c\frac{\partial^2 v_c}{\partial y^2} = \rho_c\frac{\partial^2 v_c}{\partial t^2}, \qquad E_c J_c\frac{\partial^4 u_c}{\partial x^4} + \rho_c S_c\frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.4)$$

E_c, ρ_c — модуль Юнга и плотность материала стержня, S_c — площадь поперечного сечения стержня, J_c — центральный момент площади его поперечного сечения, v_c, u_c — перемещения точек стержня вдоль осей y и x. Граничные условия для (1.4) запишутся в форме

$$\begin{gathered} y = H + h + l:\quad -Pe^{-i\omega t} = 2aE_c\frac{\partial v_c}{\partial y}, \quad u_c''' = 0 \\ u_c' = Pe(E_c J_c)^{-1}\exp(-i\omega t) \\ y = H + h:\quad v_c = -e, \quad u_c' = 0, \quad u_c'' = 0 \end{gathered} \qquad (1.5)$$

где $-\varepsilon(t)$ — неизвестное перемещение нижнего основания стержня. Кроме того, при $|x| \leqslant a$ в силу условий контакта стержня со стенкой будем иметь

$$v = v_c \tag{1.6}$$

С учетом относительной малости толщины стенки снесем условие (1.1) со срединной плоскости на границу слоя жидкости $y = H$. Разделяя далее в (1.1)—(1.5) временную и пространственные переменные, полагая $f(x, y, t) = \bar{f}(x, y)\, e^{-i\omega t}$ для всех функций, входящих в указанные соотношения, получим, опуская штрихи

$$D^* v^{(4)} - \rho^* h\omega^2 v = p(x) - q(x) \tag{1.7}$$

$$\Delta\varphi + 2kiM\frac{\partial\varphi}{\partial x} + k^2\varphi = 0, \quad p = -\rho\left(-i\omega\varphi + V\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=H} = -i\omega v + V\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad v = -\varepsilon, \quad k = \omega c^{-1}$$

$$D^* = D - \int\limits_0^\infty K(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

$$v_c = \frac{1}{\cos(lk_c)}\left[\frac{P}{2aE_ck_c}\sin k_c(H + h - y) - \varepsilon\cos k_c(H + h + l - y)\right]$$

$$u_c = \frac{P_e}{\lambda_c E_c J_c \Delta^*}\left[\operatorname{ch}\lambda_c(H + h - y)\sin\lambda_c l - \operatorname{sh}\lambda_c l\cos(H + h - y)\right]$$

$$k_c = \omega\sqrt{E_c\rho_c^{-1}}, \quad \lambda_c = \sqrt[4]{\frac{\rho_c S_c}{E_c J_c}\,\omega^2}, \qquad \Delta^* = \operatorname{sh}\lambda_c l\cos\lambda_c l + \operatorname{ch}\lambda_c l\sin\lambda_c l$$

Применяя к (1.7) интегральное преобразование Фурье по координате x и используя условие отсутствия возмущений в жидкости на бесконечности, получим следующее выражение для амплитуды перемещений v при $y = H$:

$$v(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-a}^{a} q(\xi)\, d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma\operatorname{sh}(\gamma H)\, e^{-i\alpha(\xi - x)}\, d\alpha}{(D^*\alpha^4 - \rho^* h\omega^2)\gamma\operatorname{sh}(\gamma H) - \rho(V\alpha + \omega)^2\operatorname{ch}(\gamma H)}$$

$$\gamma = \gamma(\alpha) = (\alpha^2 - 2kM\alpha - k^2)^{1/2} \tag{1.8}$$

Используя теперь условие контакта штампа со стенкой (1.6), получим интегральное уравнение относительно закона распределения контактных давлений $q(x)$. В безразмерных переменных с учетом обозначений

$$\xi' = \xi a^{-1}, \quad x' = xa^{-1}, \quad \lambda = Ha^{-1}, \quad \varepsilon' = \varepsilon a^{-1}, \quad e' = ea^{-1}, \quad u = \alpha H$$

$$\varphi(x') = q(ax') H^3 (D^*)^{-1}, \quad A = \rho^* \omega^2 h H^4 (D^*)^{-1}, \quad B = \rho \omega^2 H^5 (D^*)^{-1}$$

$$w(x') = v(ax') a^{-1}, \quad \beta = \omega H V^{-1}, \quad \gamma(u) = (u^2 - 2\beta M^2 u - \beta^2 M^2)^{1/2}$$

оно будет иметь вид (штрихи далее будем опускать)

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K\left(\frac{x - \xi}{\lambda}\right) d\xi = \pi\varepsilon \quad (|x| \leqslant 1) \tag{1.9}$$

$$K(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} L(u) e^{-iuz} du \quad \left(z = \frac{x - \xi}{\lambda}\right)$$

$$L(u) = \frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma}{(u^4 - A)\gamma \operatorname{sh} \gamma - B(1 + \beta^{-1} u)^2 \operatorname{ch} \gamma}$$

Заметим, что $L(\zeta)$ является мероморфной в комплексной плоскости $\zeta = u + iv$ функцией, имеет нули в точках

$$z_n^{\pm} = \beta M^2 \pm \sqrt{\beta^2 M^2 (1 + M^2) - \pi^2 n^2} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

и полюса, не лежащие на вещественной оси, имеющие асимптотическое представление

$$\zeta_n^{\pm} = z_n^{\pm} + O(n^{-2}) \quad (|\zeta_n^{\pm}| \leqslant |\zeta_{n+1}^{\pm}|) \quad (n \to \infty)$$

если $A_1 = A\beta M \sin \beta M - B \cos \beta M \neq 0$.

В противном случае функция $L(u)$ будет иметь действительный однократный полюс $u = 0$ при $V \neq 0$. Контур интегрирования во второй формуле (1.9) выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения и совпадает всюду с вещественной осью, отклоняясь от нее лишь при обходе полюса $u = 0$ сверху при $\beta M > BA^{-1}\sqrt{1 + AB^{-1}}$ и снизу при обратном неравенстве. Этот случай будет исследован в конце работы. При $V = 0$, $u = 0$ имеется двукратный полюс. Этот вариант задачи может быть полностью изучен методами работы [4].

К уравнению (1.9) необходимо еще добавить условия статики

$$\int_{-1}^{1} \varphi(x)\, dx = \frac{H^3}{aD^* \cos(lk_c)} (P + 2a^2 E_c k_c \varepsilon \sin lk_c)$$

$$\int_{-1}^{1} x\varphi(x)\, dx = \frac{P_e H^3}{D^* a^2 \lambda^*} (\operatorname{sh} \lambda_c l + \sin \lambda_c l) \tag{1.10}$$

Отметим также, что по физическому смыслу поставленной задачи будем требовать, чтобы $w'(x) \in C(-R, R)$ (R — сколь угодно большое число). Здесь $C(-R, R)$ — пространство непрерывных на интервале $(-R, R)$ функций.

Кроме того, следует заметить, что результаты работы [5, 6] дают основание утверждать, что контактные усилия, возникающие между штампом и стенкой трубопровода будут складываться из распределенной нагрузки, а также сосредоточенных сил и моментов, действующих на краях линии контакта.

2. Исследуем теперь поставленную задачу с помощью полученного выше интегрального уравнения (1.9). Для этого изучим свойства его ядра и структуру решения. С учетом асимптотического поведения трансформанты Фурье ядра интегрального уравнения (1.9)

$$L(u) = E + O(u) \quad (u \to 0), \quad E = A_0 A_1^{-1}, \quad A_0 = \beta M \sin \beta M, \quad A_1 \neq 0$$

$$L(u) = u^{-1} + O(u^{-2}) \quad (u \to \infty)$$

докажем лемму.

Лемма. При всех значениях z из интервала $(-R, R)$, где R — любое, сколь угодно большое число, справедливо представление

$$K(z) = \frac{\pi}{12} |z|^3 + F(z), \quad F(z) \in B_\mu^1(-R, R) \qquad (2.1)$$

$$F(z) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1-(uz)^2/2}{u^4} - \frac{1}{u^4} \frac{A\gamma \operatorname{sh} \gamma + B(1+\beta^{-1} u)^2 \operatorname{ch} \gamma}{(u^4 - A)\gamma \operatorname{sh} \gamma - B(1+\beta^{-1} u)^2 \operatorname{ch} \gamma} e^{-iuz} \right] du$$

$B_\mu^n(-R, R)$ — пространство функций, n-е производные которых удовлетворяют условию Гельдера на сегменте $[-R, R]$ с показателем $0 < \mu < 1$.

Доказательство леммы использует следующие интегралы:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-iuz}}{u^2} du = \frac{\pi}{2} |z|, \qquad \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iuz} - 1 + (uz)^2/2}{u^4} du = \frac{\pi}{12} |z|^3$$

Изучим теперь структуру решения интегрального уравнения (1.9), для чего рассмотрим

$$\int_{-1}^{1} |x-\xi|^3 \varphi(\xi) \, d\xi = 12 f(x) \quad (|x| \leqslant 1) \qquad (2.2)$$

Согласно замечаниям п. 1, решение $\varphi(x)$ интегрального уравнения (2.2) должно содержать в виде слагаемых дельта-функции и их первые производные в точках $x = \pm 1$, которые бы отражали появление в контактных усилиях сосредоточенных сил и моментов на краях линии контакта. Вместе с тем, по физическому смыслу рассматриваемой задачи, как отмечалось ранее, $\omega'(x) \in C(-R, R)$. Это условие накладывает ограничение на порядок обобщенной функции $\varphi(x)$. С учетом сказанного сформулируем теорему.

Теорема 1. Если $f^{(4)}(x) \in C(-R, R)$, то решение интегрального уравнения (2.2) в пространстве обобщенных функций медленного роста Φ [7] существует, единственно и имеет вид

$$\varphi(x) = f^{(4)}(x) + P_1\delta(x+1) + P_2\delta(x-1) + M_1\delta'(x+1) + M_2\delta'(x-1) \tag{2.3}$$

причем постоянные P_j, M_j ($j = 1, 2$) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
&-f'''(-1) - f'''(1) + P_1 - P_2 = 0\\
&-f''(-1) + f''(1) - f'(-1) - f'(1) + M_1 + M_2 = 0\\
&-f'''(-1) + f'''(1) - f''(-1) - f''(1) + P_1 + P_2 + M_1 - M_2 = 0\\
&f''(-1) + f''(1) + 3f'(-1) - 3f'(1) + 3f(-1) + 3f(1) - M_1 + M_2 = 0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь $\delta(x)$, $\delta'(x)$ — дельта-функция Дирака и ее первая производная, определяемые следующим образом:

$$\int_a^b g(\xi)\,\delta^{(j)}(\xi - x)\,d\xi = \begin{cases} 0 & (x < a,\ x > b)\\ (-1)^j g^{(j)}(x+0) & (x = a)\\ (-1)^j g^{(j)}(x-0) & (x = b)\\ 1/2\,(-1)^j\,[g^{(j)}(x-0) + g^{(j)}(x+0)] & (a < x < b) \end{cases} \tag{2.5}$$

$g(x)$ — произвольная функция такая, что существуют односторонние производные $g^{(j)}(x+0)$ и $g^{(j)}(x-0)$.

Для доказательства теоремы проверим, что функция $\varphi(x)$ вида (2.3) удовлетворяет уравнению (2.2). Действительно, подставляя ее в (2.2), используя формулу (2.5), приходим к выводу, что интегральное уравнение (2.2) обращается в тождество, если выполнены условия (2.4). Единственность полученного решения (2.3) следует из теоремы, приведенной в [7] на стр. 158.

Перепишем теперь интегральное уравнение (1.9) с учетом представления (2.1) в виде

$$\begin{gathered}
\int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\,|x - \xi|^3\,d\xi = 12 f(x) \qquad (|x| < 1)\\
f(x) = \lambda^3\varepsilon - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\,F\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)d\xi
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Предположим, что функция $\varphi(x) \in \Phi$ (с порядком равным единице). Тогда в силу свойств функции $F(z)$, указанных в лемме, будем иметь $f^{(4)}(x) \in C(-R, R)$. Отсюда с учетом теоремы 1 следует

Теорема 2. Если решение интегрального уравнения (2.6) существует в пространстве обобщенных функций медленного роста Φ, то оно имеет вид

$$\varphi(x) = \varphi^*(x) + P_1\delta(x+1) + P_2\delta(x-1) + M_1\delta'(x+1) + M_2\delta'(x-1) \tag{2.7}$$

Функция $\varphi^*(x) \in C(-1, 1)$ и удовлетворяет следующему уравнению:

$$\varphi^*(x) + \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-1}^{1} \varphi^*(\xi) F^{(4)}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) d\xi = -\frac{1}{\pi\lambda}\left[P_1 F^{(4)}\left(\frac{x+1}{\lambda}\right) + P_2 F^{(4)}\left(\frac{x-1}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda} M_1 F^{(5)}\left(\frac{x+1}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda} M_2 F^{(5)}\left(\frac{x-1}{\lambda}\right)\right] \tag{2.8}$$

Постоянные P_j и M_j ($j = 1, 2$) даются формулами (2.4).

Для доказательства теоремы, считая функцию $f(x)$ (2.6) временно известной, обратим интегральный оператор в (2.6) с ядром $|x-\xi|^3$. Согласно формуле (2.3) получим относительно $\varphi(x)$ следующее интегральное уравнение

$$\varphi(x) + \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) F^{(4)}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) d\xi = P_1\delta(x+1) + P_2\delta(x-1) + M_1\delta'(x+1) + M_2\delta'(x-1) \tag{2.9}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде (2.7). Подставляя (2.7) в (2.9) и используя свойства дельта-функции (2.5), придем к интегральному уравнению (2.8). Отметим, что последнее является уравнением Фредгольма второго рода с непрерывным ядром и непрерывным свободным членом. Если уравнение (2.8) разрешимо при заданном значении параметра $\lambda \in (0, \infty)$, то функция $\varphi^*(x) \in C(-1, 1)$. При этом также однозначно разрешимо исходное интегральное уравнение (2.6).

Теорема 3. В классе функций $\varphi^*(x) \in C(-1, 1) \cap V(-1, 1)$ однородное уравнение (2.8)

$$\varphi^*(x) - \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-1}^{1} \varphi^*(\xi)\, T\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) d\xi = 0 \quad (|x| < 1) \tag{2.10}$$

$$T(z) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A\gamma \operatorname{sh}\gamma + B(1+\beta^{-1}u)^2 \operatorname{ch}\gamma}{(u^4 - A)\gamma \operatorname{sh}\gamma - B(1+\beta^{-1}u)^2 \operatorname{ch}\gamma} e^{-iuz} du \tag{2.11}$$

не имеет положительных собственных значений. Здесь $V(-1, 1)$ — пространство функций, имеющих на сегменте $[-1, 1]$ конечное изменение.

Доказательство. Введем в рассмотрение трансформанту Фурье функции $\varphi^*(x)$

$$\Phi^*(u) = \int_{-1}^{1} \varphi^*(\xi) e^{iu\xi} d\xi \tag{2.12}$$

и с учетом (2.11) перепишем однородное уравнение (2.10) следующим образом:

$$\varphi^*(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A\gamma^* \operatorname{sh} \gamma^* + B(1+\beta^{-1}u\lambda)^2 \operatorname{ch} \gamma^*}{(u^4\lambda^4 - A)\gamma^* \operatorname{sh} \gamma^* - B(1+\beta^{-1}u\lambda)^2 \operatorname{ch} \gamma^*} \Phi^*(u) e^{-iux} du$$

$$|x| \leqslant 1, \quad \gamma^* = \gamma(u\lambda) \tag{2.13}$$

В силу свойств функции $\varphi^*(x)$, указанных в условии теоремы, представление (2.12) правомерно, функция $\Phi^*(u)$, по меньшей мере, непрерывна и имеет место оценка [8]

$$\Phi^*(u) = O(u^{-1}) \quad (|u| \to \infty) \tag{2.14}$$

Умножим скалярно обе части (2.13) на $\varphi^*(x)$. С учетом равенства Парсеваля [7] получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi^*(u)|^2 \frac{u^4\gamma^* \operatorname{sh} \gamma^* du}{(u^4\lambda^4 - A)\gamma^* \operatorname{sh} \gamma^* - B(1+\beta^{-1}u\lambda)^2 \operatorname{ch} \gamma^*} = 0 \tag{2.15}$$

Из формулы (2.14) следует, что интеграл в (2.15) сходится. Разделив в (2.15) действительную и мнимую части, можно показать, что мнимая часть ядра не меняет знака на действительной оси, откуда $\Phi^*(u) = 0$ и $\varphi^*(x) = 0$. Теорема доказана.

3. Перейдем теперь к построению приближенного решения интегрального уравнения (1.9). Используя идею метода приближенной факторизации [4], аппроксимируем функцию $L(\zeta)$ выражением

$$L^*(\zeta) = \frac{1}{z^+(\zeta) z^-(\zeta)} \prod_{n=1}^{N} \frac{(\zeta - z_n^+)(\zeta - z_n^-)}{(\zeta - \zeta_n^+)(\zeta - \zeta_n^-)}$$

$$z^{\pm}(\zeta) = (\zeta - \zeta_{\pm 1}^{\pm})(\zeta - \zeta_0^{\pm}) \tag{3.1}$$

где $\zeta_{\pm 1, 0}^{\pm}$ — четыре полюса $L(\zeta)$, имеющих наибольшую по модулю действительную часть.

Подставляя (3.1) во вторую формулу (1.9), получим

$$K^*(z) = \frac{1}{2} \begin{cases} \sum\limits_{n=-1}^{N} R_n^+ \exp(-i\zeta_n^+ z) & (z < 0) \\ \sum\limits_{n=-1}^{N} R_n^- \exp(-i\zeta_n^- z) & (z > 0) \end{cases} \tag{3.2}$$

$$R_n^+ = 2\pi i \operatorname{Res}[L^*(\zeta), \zeta_n^+], \quad R_n^- = -2\pi i \operatorname{Res}[L^*(\zeta), \zeta_n^-]$$

С учетом представления (3.2) перепишем интегральное уравнение (1.9) в виде

$$\int_{-1}^{x} \varphi(\xi) \sum_{n=-1}^{N} R_n^- \exp\left[-i\zeta_n^-\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)\right] d\xi +$$

$$+ \int_{x}^{1} \varphi(\xi) \sum_{n=-1}^{N} R_n^+ \exp\left[-i\zeta_n^+\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)\right] d\xi = 2\pi\varepsilon \quad (|x| < 1) \tag{3.3}$$

и будем искать его решение в соответствии с теоремой 2 и результатами работы [9] в форме

$$\varphi(x) = T_0 + \sum_{n=1}^{N} T_n^+ \exp\left(-iz_n^+ \frac{x}{\lambda}\right) + \sum_{n=1}^{N} T_n^- \exp\left(-iz_n^- \frac{x}{\lambda}\right) +$$

$$+ P_1\delta(x+1) + P_2\delta(x-1) + M_1\delta'(x+1) + M_2\delta'(x-1) \tag{3.4}$$

Произвольные постоянные $T_n^\pm$ и коэффициенты P_j, M_j ($j = 1, 2$) и T_0 определяются подстановкой (3.4) в (3.3), а именно

$$T_0 = 2\pi i\varepsilon\lambda^{-1}\left\{\sum_{n=-1}^{N}[R_n^+(\zeta_n^+)^{-1} - R_n^-(\zeta_n^-)^{-1}]\right\}^{-1} \tag{3.5}$$

$$\sum_{m=1}^{N}\left[T_m^+ \exp\left(-i\frac{z_m^+}{\lambda}\right)\frac{1}{\zeta_n^+ - z_m^+}\frac{1}{\sigma^+(z_m^+)} + T_m^- \exp\left(-i\frac{z_m^-}{\lambda}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{\zeta_n^+ - z_m^-}\frac{1}{\sigma^+(z_m^-)}\right] = -T_0(\zeta_n^+\zeta_0^+\zeta_{-1}^+)^{-1}$$

$$\sum_{m=1}^{N}\left[T_m^+ \exp\left(i\frac{z_m^+}{\lambda}\right)\frac{1}{\zeta_n^- - z_m^+}\frac{1}{\sigma^-(z_m^+)} + T_m^- \exp\left(i\frac{z_m^-}{\lambda}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{\zeta_n^- - z_m^-}\frac{1}{\sigma^-(z_m^-)}\right] = -T_0(\zeta_n^-\zeta_0^-\zeta_{-1}^-)^{-1}$$

$$n = 1, 2, \ldots, N$$

$$P_1 = -i\lambda\left\{T_0\frac{\zeta_{-1}^- + \zeta_0^-}{\zeta_{-1}^-\zeta_0^-} + \sum_{m=1}^{N}\left[T_m^+ \exp\left(i\frac{z_m^+}{\lambda}\right)\frac{\zeta_{-1}^- + \zeta_0^- - z_m^+}{\sigma^-(z_m^+)} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+ T_m^- \exp\left(i\frac{z_m^-}{\lambda}\right)\frac{\zeta_{-1}^- + \zeta_0^- - z_m^-}{\sigma^-(z_m^-)}\right]\right\} \tag{3.6}$$

$$M_1 = -\lambda^2\left\{T_0\frac{1}{\zeta_{-1}^-\zeta_0^-} + \sum_{m=1}^{N}\left[T_m^+ \exp\left(i\frac{z_m^+}{\lambda}\right)\frac{1}{\sigma^-(z_m^+)} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+ T_m^- \exp\left(i\frac{z_m^-}{\lambda}\right)\frac{1}{\sigma^-(z_m^-)}\right]\right\}$$

$$P_2 = i\lambda \left\{ T_0 \frac{\zeta_{-1}^{+} + \zeta_0^{+}}{\zeta_{-1}^{+} \zeta_0^{+}} + \sum_{m=1}^{N} \left[T_m^{+} \exp\left(-i \frac{z_m^{+}}{\lambda}\right) \frac{\zeta_{-1}^{+} + \zeta_0^{+} - z_m^{+}}{\sigma^{+}(z_m^{+})} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + T_m^{-} \exp\left(-i \frac{z_m^{-}}{\lambda}\right) \frac{\zeta_{-1}^{+} + \zeta_0^{+} - z_m^{-}}{\sigma^{+}(z_m^{-})} \right]\right\}$$

$$M_2 = \lambda^2 \left\{ T_0 \frac{1}{\zeta_{-1}^{+} \zeta_0^{+}} + \sum_{m=1}^{N} \left[T_m^{+} \exp\left(-i \frac{z_m^{+}}{\lambda}\right) \frac{1}{\sigma^{+}(z_m^{+})} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + T_m^{-} \exp\left(-i \frac{z_m^{-}}{\lambda}\right) \frac{1}{\sigma^{+}(z_m^{-})} \right]\right\}$$

Введем обозначения

$$t_{2n} = T_n^{+} \exp\left(-i \frac{z_n^{+}}{\lambda}\right) \frac{1}{\sigma^{+}(z_n^{+})(\zeta_n^{+} - z_n^{+})}$$

$$t_{2n-1} = T_n^{-} \exp\left(i \frac{z_n^{-}}{\lambda}\right) \frac{1}{\sigma^{-}(z_n^{-})(\zeta_n^{-} - z_n^{-})}$$

$$b_{2n} = -T_0 (\zeta_n^{+} \zeta_0^{+} \zeta_{-1}^{+})^{-1}, \qquad b_{2n-1} = -T_0 (\zeta_n^{-} \zeta_0^{-} \zeta_{-1}^{-})^{-1}$$

с учетом которых перепишем систему (3.5) в нормальном виде

$$t_j + \sum_{m=1}^{2N} a_{jm} t_m = b_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, 2N) \tag{3.7}$$

$$a_{2n,\,2n} = a_{2n-1,\,2n-1} = 0$$

$$a_{2n,\,2m} = \frac{\zeta_m^{+} - z_m^{+}}{\zeta_n^{+} - z_m^{+}}, \qquad a_{2n-1,\,2m-1} = \frac{\zeta_m^{-} - z_m^{-}}{\zeta_n^{-} - z_m^{-}} \qquad (n \neq m)$$

$$a_{2n,\,2m-1} = \frac{(\zeta_m^{-} - z_m^{-})\,\sigma^{-}(z_m^{-})}{(\zeta_n^{+} - z_m^{-})\,\sigma^{+}(z_m^{-})} \exp\left(-2i \frac{z_m^{-}}{\lambda}\right)$$

$$a_{2n-1,\,2m} = \frac{(\zeta_m^{+} - z_m^{+})\,\sigma^{+}(z_m^{+})}{(\zeta_n^{-} - z_m^{+})\,\sigma^{-}(z_m^{+})} \exp\left(2i \frac{z_m^{+}}{\lambda}\right)$$

Для коэффициентов a_{ij} при достаточно больших i и j имеет место следующая асимптотика, которая следует из поведения нулей и полюсов функции $L(\zeta)$ при больших номерах:

$$\left.\begin{aligned} a_{2n,\,2m},\ a_{2n-1,\,2m-1} &= O(n^{-1} m^{-1}) \\ a_{2n,\,2m-1},\ a_{2n-1,\,2m} &= O\left(n^{-1} m^{-2} e^{-\frac{2\pi m}{\lambda}}\right) \end{aligned}\right\} \quad (m,\, n \to \infty) \tag{3.8}$$

Тогда с учетом (3.8) можно утверждать, что решение системы (3.7) при достаточно больших N будет близко к решению аналогичной бесконечной системы ($N = \infty$) по норме пространства l_1 [10].

Решив линейную алгебраическую систему (3.7), найдем функцию $\varphi(x)$ по формулам (3.4)—(3.6). Заметим, что форма решения интегрального уравнения (1.9)—(3.4) не изменится в случае наличия у функции $L(\zeta)$ кратных полюсов и примет вид

$$\varphi(x) = T_0 + (T_2^- x + T_2)\exp\left(-iz_2\frac{x}{\lambda}\right) + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq 2}}^{N}\left[T_n^+ \exp\left(-iz_n^+\frac{x}{\lambda}\right) + T_n^- \exp\left(-iz_n^-\frac{x}{\lambda}\right)\right] + P_1\delta(x+1) + P_2\delta(x-1) + M_1\delta'(x+1) + M_2\delta'(x-1)$$

в случае $z_2^- = z_2^+ = z_2$. При этом соответствующим образом изменится вид системы (3.7).

Поведение поверхности вне штампа $|x| > 1$ описывается функциями

$$\begin{aligned} w_0^-(x) &= i\lambda\sum_{n=-1}^{N} A_n^- \exp\left(-i\zeta_n^+\frac{x+1}{\lambda}\right) \quad (x < -1)\\ w_0^+(x) &= -i\lambda\sum_{n=-1}^{N} A_n^+ \exp\left(-i\zeta_n^-\frac{x-1}{\lambda}\right) \quad (x > 1) \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$A_n^\pm = R_n^\pm \sigma^\pm(\zeta_n^\mp)\left\{T_0(\zeta_n^\mp \zeta_{-1}^\pm \zeta_0^\pm)^{-1} + \sum_{m=1}^{N}\left[T_m^+ \exp\left(\mp i\frac{z_m^+}{\lambda}\right)\frac{1}{\sigma^\pm(z_m^+)(\zeta_n^\mp - z_m^+)} + T_m^- \exp\left(\mp i\frac{z_m^-}{\lambda}\right)\frac{1}{\sigma^\pm(z_m^-)(\zeta_n^\mp - z_m^-)}\right]\right\}$$

Формула (3.9) позволяет выявить характер волн на поверхности пластинки, а также даст возможность рассчитывать их амплитудные значения. В рассмотренном случае от штампа удаляется N волн с быстро (порядка экспоненты) затухающей амплитудой.

Выражения, аналогичные (3.9) с точностью до множителей вида $\mathrm{ch}[\gamma(\zeta_n^\mp)y]$ могут быть получены и для акустического поля в жидкости. Отметим также, что действительные части $\zeta_n^\mp$ характеризуют фазовые скорости волн, а мнимые — затухание амплитуды волн. Групповые скорости пропорциональны действительной части величины $(d\zeta_n^\pm/d\omega)^{-1}$. Выражения энергетических характеристик акустического поля имеют такой же вид, как и в случае, когда в жидкости нет потока [11]. Следует также отметить, что волна с параметром распространения $\zeta_n^\mp = 0$ (случай $A_1 = 0$) не переносит энергии.

Если $\zeta_{-1}^+ = \zeta_0^-$, то

$$w_1^-(x) = R_{-1}^+(A_0^- x + B_0)\exp\left(-i\zeta_0^+\frac{x+1}{\lambda}\right) + w_0^-(x) \quad (x < -1) \tag{3.10}$$

$$w_1^+(x) = w_0^+(x) \quad (x > 1)$$

$$B_0 = i\lambda \Big\{ T_0[(\zeta_0 \zeta_{-1})^{-1} - (\zeta_0^{+})^{-2}] -$$

$$- \sum_{m=1}^{N} \Big[T_m^{+} \exp\left(i \frac{z_m}{\lambda}\right) \frac{\Delta^{-}(z_m) - (\zeta_0 - z_m^{+})^2}{\Delta^{-}(z_m)(\zeta_0 - z_m)^2} +$$

$$+ T_m \exp\left(i \frac{z_m}{\lambda}\right) \frac{\Delta^{+}(z_m) - (\zeta_0 - z_m)^2}{\Delta^{+}(z_m)(\zeta_0 - z_m)^2} \Big] \Big\}$$

Исследуем теперь случай $A_1 = A\beta M \sin\beta M + B\cos\beta M = 0$. Как отмечалось ранее, положим $\zeta_2 = 0$ при $\beta M < BA^{-1}\sqrt{1 + AB^{-1}}$ (либо $\zeta_3 = 0$ при $\beta M > BA^{-1}\sqrt{1 + AB^{-1}}$) и будем искать решение интегрального уравнения (3.3) в виде (3.4) при $T_0 = 0$. Для определения t_j получим систему (3.7) при $b_4 = 2\pi i (R_2 \zeta_{-1}\zeta_0)^{-1}$ и $b_j = 0$ $(j \neq 4)$. Из (3.9) следует, что при $\zeta_2 = 0$

$$w_0^{\mp}(x) = \pm i\lambda \left[A_2 + \sum_{n=-1}^{N} A_n \exp\left(-i\zeta_n \frac{x \pm 1}{\lambda}\right)\right]$$

то есть с течением времени форма поверхности пластинки вне штампа колеблется с незатухающей при удалении от штампа амплитудой.

4. В качестве числового примера приведено решение задачи о колебании под действием единичной силы стального стержня на поверхности слоя льда, покрывающего гидравлическое основание. При этом[1]

$$G = 1.1 \cdot 10^9\ н/м^2;\ \rho^* = 880\ кг/м^3,\ \nu = 0.34,\ \rho = 1000\ кг/м^3$$

$$c = 1500\ м/сек,\ h = 0.3\ м,\ H = 10\ м,\ M = 0.002$$

$$K(t-\tau) = E_1 e^{-(t-\tau)/\tau_1} + E_2 e^{-(t-\tau)/\tau_2},\quad E_1 = 4.0 \cdot 10^5\ н/м^2$$

$$E_2 = 3.9 \cdot 10^5\ н/м^2,\ \tau_1 = 2439.0\ сек,\ \tau_2 = 5882.0\ сек$$

На фиг. 2 изображены зависимости ζ_{-1} и ζ_0 от частоты (кривая (1) — $\mathrm{Re}\,\zeta_{-1}$, (2) — $\mathrm{Im}\,\zeta_{-1}$, (3) — $\mathrm{Re}\,\zeta_0$, (4) — $\mathrm{Im}\,\zeta_0$).[2]

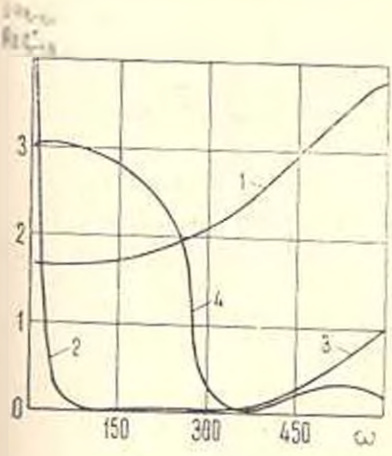
Как следует из оценок, приведенных в п. 1, $\mathrm{Im}\,\zeta_j \sim \pi$ при $j \to \infty$. Поэтому, почти во всем спектре частот поля виброакустических характеристик вдали от источника колебаний определяются полюсами $\zeta_{\pm 1}$, имеющими наибольшую действительную и наименьшую мнимую часть (за исключением окрестности точек, где $A_1 = 0$). Заметим, что с увеличением частоты колебаний от 10 гц до 100 гц величина $\mathrm{Im}\,\zeta_{-1}$, характеризующая затухание волны, уменьшается на два порядка, то есть если двигаться с групповой скоростью данной волны, то ее декремент затухания на

[1] Эти экспериментальные данные любезно предоставлены авторам В. Н. Епифановым.

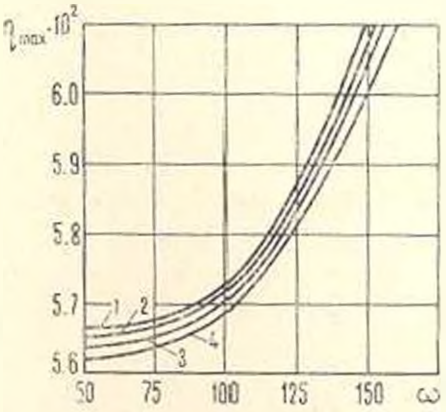
[2] Для полюсов ζ_j $(j = -1, 0)$ имеет место довольно близкая картина (расхождение составляет менее 1% при $M < 0.01$).

частоте 100 гц будет на два порядка меньше, чем декремент затухания на частоте 10 гц.

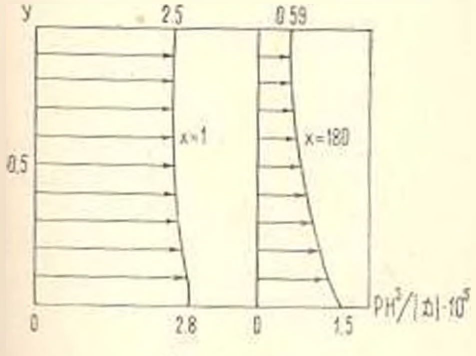
На фиг. 3 даны графики изменения максимума амплитуды контактного давления ((1) — $\lambda=200$, (2) — $\lambda=100$, (3) — $\lambda=66{,}7$, (4) — $\lambda=50$) в зависимости от частоты колебаний стержня. Видно, что при одной и той же частоте максимальное контактное давление будет тем больше, чем меньше λ.



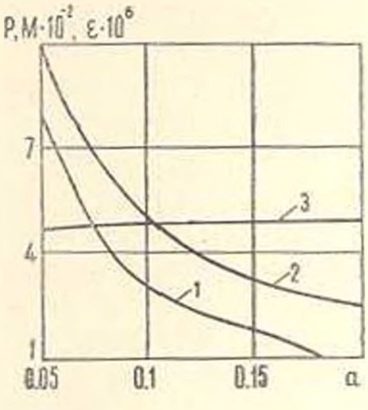
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Эпюры амплитуд давлений в жидкости при $x=1$ и $x=180$ представлены на фиг. 4. Можно заметить, что если вблизи от источника колебаний амплитуда давления незначительно меняется по глубине (около 10%), то при значительном удалении от источника колебаний амплитуда давления у дна почти в три раза превосходит амплитуду давления у поверхности ($\omega=100$ гц, $a=0{,}2$ м).

На фиг. 5 даны графики при $\omega=100$ гц изменения $M_1\cdot 10^{-}$ — кривая (1), P_1 — (2), $\varepsilon\cdot 20^6$ — (3) в зависимости от a. Отметим также, что $P_1\approx P_2$, $M_1\approx -M_2$ с точностью до 5%, что обусловлено малостью M

Авторы выражают благодарность В. М. Александрову за вниманиe к работе.

ՀԻԴՐԱՎԼԻԿ ՀԻՄՔԸ ԾԱԾԿՈՂ ԹԻԹԵՂԻ ՀԵՏ ԿՈՆՏԱԿՏ ՈՒՆԵՑՈՂ ԹՐԹՌԱՑՈՂ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՁՈՂԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒՄԸ

Ս. Ի. ԲՈՅԵՎ, Ե. Վ. ԿՈՎԱԼԵՆԿՈ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրվում է իդեալական սեղմվող հեղուկի շերտը ծածկող առաձգամածուցիկ թիթեղից և նրան կոշտ ամրակցված առաձգական ձողից կազմված սիստեմը, որը գրգռվում է ժամանակի ընթացքում պարբերաբար փոփոխվող ուժով։

Ըստ երկայնական կոորդինատի Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ խնդրի լուծումը բերվել է վերջավոր ինտերվալի վրա ողորկ կորիզով փաթեթի տիպի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարումից ձողի տակ ճնշման լայնույթի որոշմանը։

Այդ հավասարումը առանց սխալի լուծելի է միայն դանդաղ աճ ունեցող ընդհանրացված ֆունկցիաների տարածությունում։

THE INVESTIGATION OF THE CHARACTERISTICS OF RADIATION OF A VIBRATING ELASTIC BAR CONTACTED WITH A PLATE COVERING THE HYDRAVLIC FOUNDATION

S. I. BOYEV, E. V. KOVALENKO

S u m m a r y

A system is investigated consisting of a viscoelastic plate, covering the layer of ideal compressed liquid and elastic bar, rigidly coupled to the plate and excited by a force periodically changing in time.

By means of the Fourier integral transform, along the longitudinal coordinate, the problem is brought to the definition of the amplitude of pressure under the bar from the integral equation of the first kind of package type at the finite interval with a smooth kernel: correctly solved only in the space of generalized functions of show increase.

Graphs of characteristic vibroacoustic values are constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.
2. *Taylor K.* A transformation of the acoustic equation with implications for wind-tunnel and low-speed flight tests. Proc. Roy. Soc. A, 1978, vol. 363, n. 1713.
3. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
4. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
5. *Александров В. М.* Некоторые контактные задачи для балок, пластинок и оболочек.— Инж. ж., 1965, т. 5, в. 4.

6. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Движение штампа по границе упругой полуплоскости с тонким усиливающим покрытием. В сб. «Механика сплошной среды». Изд. Ростовского ун-та, 1981.
7. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
8. *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье. М.: ФМ, 1962.
9. *Забрейко П. П.* и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
10. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.—Л.: Физматгиз, 1962.
11. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981.

Институт проблем механики АН СССР
Институт машиноведения АН СССР
им. А. А. Благонравова

Поступила в редакцию
19. X. 1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXV, № 4, 1982 Механика

ПРОЧНОСТЬ И ДЕФОРМАЦИИ РАЗЛИЧНЫХ ЗОН СЕЧЕНИЯ БЕТОННОГО ЦИЛИНДРА ПРИ СЖАТИИ

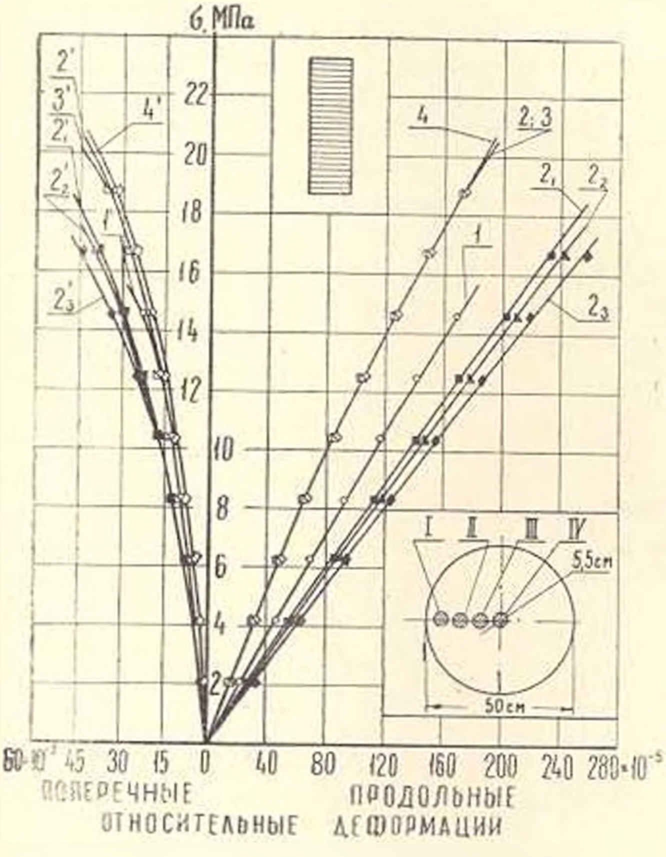
КАРАПЕТЯН К. С., КАРАПЕТЯН К. А.

Физико-механические свойства бетона существенно зависят от влажности среды и чем ниже влажность, тем меньше прочность и больше деформации. Низкая влажность среды приводит к обезвоживанию бетона и тем самым к приостанавливанию процесса его твердения. Однако отрицательное влияние испарения на прочность бетона не ограничивается только этим. К. С. Карапетян исследованиями анизотропных свойств бетона установил и другой механизм отрицательного влияния испарения на прочность и деформативность бетона [11]. Как известно, при укладке и уплотнении бетона излишняя вода, отжимаясь наверх, по пути частично задерживается под зернами заполнителя в виде прослоек. Согласно К. С. Карапетяну, с испарением этих прослоек оставшиеся на их местах пустоты (дефекты) приводят к снижению прочности и увеличению деформаций бетона, а при водонасыщении бетона имеет место обратное явление [8, 11]. Специально поставленные опыты авторов данной статьи еще раз полностью подтвердили это [13]. Отметим, что указанные направленные дефекты являются причиной также неодинаковости свойств бетонов в различных направлениях и, как показал К. С. Карапетян, их отрицательное влияние зависит от направления сжимающей и растягивающей нагрузок по отношению к слоям бетонирования и более существенно в том случае, когда образцы испытываются перпендикулярно слоям бетонирования, так как в этом случае ослабление сечения образцов дефектами получается наибольшее [5, 6].

Отрицательное влияние испарения и исчезновения водных прослоек на физико-механические свойства бетона существенно зависит от размеров поперечного сечения бетонного элемента [7, 13]. Если рассматривать приготовленные из одного и того же бетона два цилиндра различных диаметров, то в результате высыхания цилиндр малого диаметра может высохнуть полностью и поэтому его прочность будет относительно меньше, чем прочность большого цилиндра, так как сечение последнего высохнет частично. Высыхание наружных слоев большого цилиндра приведет к тому, что прочность бетона в этой части будет значительно меньше, чем в его невысохшей ядровой части. Все сказанное в полной мере относится и к модулю деформации бетона.

Для установления как изменяется прочность бетона от наружных слоев в глубь бетонного элемента и количественной оценки роли испарения водных прослоек в снижении прочности и модуля деформации бетона нами по специальной методике были поставлены опыты, результаты которых и приводятся в данной работе.

Испытанию подвергали малые цилиндрические образцы диаметром 5,5 см, высотой 18 см, которые выбуривали из большого цилиндра ($d = 50$ см, $h = 140$ см). Большой цилиндр был изготовлен К. С. Карапетяном в 1954 г. из туфобетона состава 1 : 1,80 : 2,25, В/Ц = 1,43, Ц = 261 кг/м^3. После изготовления первые 3 года большой цилиндр хра-



1 и 1' — зона I, 2 и 2' — зона II, 3 и 3' — зона III, 4 и 4' — зона IV
2_1 и $2'_1$, 2_2 и $2'_2$, 2_3 и $2'_3$ — образцы высыхали соответственно 4, 6 и 12 мес

Фиг. 1.

нился в помещении лаборатории во влажных условиях, а далее до момента выбуривания из него в возрасте 23 лет малых цилиндрических образцов — под открытым небом.

Для установления закономерности изменения прочности и модуля деформации бетона по поперечному сечению большого цилиндра в радиальных направлениях с наружных слоев до оси малые цилиндрические образцы выбуривали из 4-х зон (I, II, III и IV). При этом ось малого цилиндра, выбуренного из зон IV, совпадала с осью большого цилиндра (фиг. 1). Образцы из указанных зон испытывали сразу после их выбуривания. Кроме этого, для исследования влияния испарения водных прослоек на прочность и деформации бетона при сжатии некоторое количество образцов, выбуренных из зоны II, было испытано после разных сроков высыхания (4, 8 и 12 месяцев) в обычных лабораторных условиях.

Испытание образцов производилось однократным ступенчатым повышением сжимающей нагрузки с выдержкой под каждой ступенью лишь на время, необходимое для взятия отсчетов по микронным индикаторам, которыми измерялись продольные и поперечные деформации. Ввиду ограниченного количества образцов в каждом случае испытывались по 2—3 образца. В опытах с образцами, выбуренными из зон I, II, III и IV максимальный разброс прочности при испытании 2-х образцов составил ±0,4%, а 3-х образцов — +0,8 и —0,4%. В опытах же с высыхающими образцами, выбуренными из зоны II, максимальный разброс по прочности при испытании 2-х образцов составил ± 0,4%, а при испытании 3-х образцов — +7,3 и —4,6%. Прочности, касательные модули деформации и коэффициенты Пуассона всех испытанных образцов по данным этих опытов приведены в табл. 1 и 2, а кривые деформаций — на фиг. 1. Причем, модули деформации и коэффициенты Пуассона приведены при различных напряжениях для того, чтобы показать четко их изменение в зависимости от величины напряжения. Отметим также, что в табл. 1 и 2 над чертами указаны абсолютные значения рассматриваемых характеристик, а под чертами они выражены в процентах. При этом, в табл. 1 за 100% приняты значения характеристик зоны I, а в табл. 2 — значения характеристик тех образцов, которые были выбурены из зоны II и испытаны сразу без предварительного высыхания.

Таблица 1

Характеристики бетона по данным испытания образцов, выбуренных из различных зон цилиндра

Зоны выбуривания образцов	Объемная масса бетона в кг/м³	Цилиндрическая прочность в МПа	Модуль деформации в МПа×10⁻² при напряжении (МПа)					Коэффициент Пуассона при напряжении (МПа)			
			0	5	10	15	20	5	10	15	20
I	1628	19.1	93	88	84	79	—	0.068	0.092	0.143	—
	96.7	74	65	70	76	83	—	58	70	95	—
II	1683	24.1	142	124	108	92	78	0.136	0.152	0.174	0.210
	100	93	99	98	98	97	76	115	115	112	109
III	1683	24.9	143	125	109	93	79	0.150	0.162	0.179	0.204
	100	96	100	99	99	98	98	127	123	115	106
IV	1683	25.8	143	126	110	95	81	0.118	0.132	0.155	0.193
	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

По данным табл. 1 в результате высыхания объемная масса зоны I на 3,3% меньше, чем объемная масса остальных зон, а прочность бетона в зоне I оказалась на 26% ниже прочности бетона в зоне IV. Некоторое незначительное, но закономерное снижение прочности бетона наблюдается и в зонах II и III. Качественно аналогичная закономерность имеет место и с изменением модуля деформации бетона по глубине цилиндра с той лишь разницей, что отрицательное влияние высыхания на модуль деформации бетона в зоне I оказалось более существенным и зависит от величины сжимающего напряжения — при изменении напряжения от 0 до 15 МПа спад модуля деформации составляет 35—17%. Кроме этого, при одном и том же напряжении модуль деформации образцов, выбуренных из зон II, III и IV практически одинаков.

Таблица 2

Характеристики бетона по данным образцов, выбуренных из зоны II цилиндра, испытанных после различных сроков высыхания

Продолжительность высыхания образцов в мес.	Объемная масса бетона в кг/м³	Цилиндрическая прочность в МПа	Модуль деформации в МПа·10^{-3} при напряжении (МПа)					Коэффициент Пуассона при напряжении (МПа)			
			0	5	10	15	20	5	10	15	20
0	1683/100	24.1/100	142/100	124/100	108/100	92/100	78/100	0.136/100	0.152/100	0.174/100	0.210/100
4	1547/92	23.4/97	77/54	74/60	72/67	69/75	67/86	0.100/74	0.120/79	0.150/86	0.204/97
8	1530/91	21.9/91	72/51	70/56	69/64	67/73	66/85	0.093/68	0.114/75	0.148/85	0.214/102
12	1519/90	19.8/82	69/49	67/54	66/61	64/70	—	0.080/59	0.112/74	0.158/91	—/—

Высыхание зоны I оказало существенное влияние и на коэффициент Пуассона (табл. 1). Как видим, при невысоких напряжениях коэффициент Пуассона образцов, выбуренных из зоны I, заметно меньше, чем образцов, выбуренных из остальных трех зон, однако с увеличением напряжения эта разница практически стирается.

Таким образом, высыхание наружного слоя большого бетонного цилиндра привело к существенному снижению его прочности, модуля деформации и коэффициента Пуассона, что могло явиться следствием следующих причин.

1. Обезвоживание наружных слоев бетонного цилиндра и в связи с этим преждевременное прекращение процесса твердения;

2. Микротрещинообразование из-за внутренних напряжений, вызванных неравномерной усадкой сечения большого цилиндра. По мере высыхания наружного слоя, усадка которого гораздо больше, чем более глубоких слоев, микротрещинообразование постепенно охватывает более глубокие слои. Чем меньше влажность среды, тем больше глубина высыхания, а следовательно, и степень разуплотнения бетона микротрещинами;

3. Испарение образовавшихся под зернами заполнителя водных прослоек и в связи с этим отрицательное влияние оставшихся на их местах пустот (дефектов).

Отрицательное влияние перечисленных факторов на прочность и модуль деформации бетона при его высыхании в большинстве случаев происходит одновременно и поэтому для количественной оценки влияния интересующего нас фактора опыты необходимо было поставить по такой методике, которая позволила бы по возможности исключить влияние остальных факторов. Как будет показано ниже, проведенные нами исследования над весьма старым бетоном позволяют количественно оценить снижение прочности и модуля деформации бетона, вызванное отрицательным влиянием испарения водных прослоек.

Из анализа наших опытных данных следует, что, поскольку большой бетонный цилиндр, из которого были выбурены малые цилиндры, первые 3 года после изготовления хранился во влажных условиях, то в течение этого времени он нормально твердел и приобрел максимально возможную прочность. Учитывая это, нужно утверждать, что в данном случае недобор прочности из-за нарушения процесса нормального твердения не имел места. Из-за высокой влажности среды за это время снижение прочности и модуля деформации не могло произойти и за счет остальных двух факторов: неравномерной усадки, а также испарения водных прослоек.

Таким образом, наблюдаемое в наших опытах снижение прочности и модуля деформации бетона зоны I большого бетонного цилиндра, в основном, произошло в течение последующих 20 лет, когда этот бетонный цилиндр находился под открытым небом. За эти 20 лет вызванное климатическими условиями попеременное увлажнение и высыхание, несомненно, привели к многократному набуханию и усадке бетона наружного слоя и тем самым к его разуплотнению. Об этом свидетельствует то, что большинство малых цилиндров, которые были выбурены из зоны I, оказались непригодными для испытаний. Однако, это еще не является достаточным основанием, чтобы правильно судить, что являлось основной причиной снижения прочности и модуля деформации бетона в зоне I, вызванное нераномерным набуханием и усадкой, микротрещинообразование или испарение водных прослоек. Чтобы сделать по данному вопросу правильное заключение, нами были поставлены специальные опыты с высыхающими образцами, выбуренными из зоны II в возрасте 23 лет и испытанными через 4, 8 и 12 мес. высыхания в обычных лабораторных условиях (табл. 2).

Как видно из табл. 2, высыхание образцов, выбуренных из зоны II, привело к устойчивому снижению их прочности, модуля деформации и коэффициента Пуассона. В результате 12-месячного высыхания прочность уменьшилась на 18%, а модуль деформации в зависимости от напряжения — на 51—30%. При этом, спад модуля деформации тем больше, чем ниже сжимающее напряжение. Такая же закономерность имеет место и со снижением коэффициента Пуассона — увеличение напряжения от 5 до 15 МПа привело к снижению этого коэффициента на 35,3—9,2%. Из данных табл. 2 также следует, что основная часть снижения модуля деформации и коэффициента Пуассона произошла за первые 4 мес. высыхания. Из фиг. 1 ясно видно как незначительна расходимость кривых как поперечных, так и продольных деформаций образцов, которые высыхали 4, 8 и 12 месяцев.

Таким образом, существенное снижение прочности, модуля деформации и коэффициента Пуассона за короткое время высыхания свидетельствует о том, что основной причиной всего этого является отрицательное влияние тех пустот (дефектов), которые остаются на местах водных прослоек после их испарения.

По данным табл. 1 после 20-летнего нахождения большого цилиндра под открытым небом прочность бетона зоны I по сравнению с прочностью бетона в зоне II снизилась на 20,8%, а соответствующее снижение модуля деформации (при $\sigma = 10$ МПа) составило 22,3%. Между тем, по данным табл. 2 после 12-месячного высыхания образцов, выбуренных из зоны II снижение прочности достигло 18%, а модуль деформации при том же напряжении — 39%. Эти данные показывают, что снижение прочностей в обоих этих случаях практически одинаково, а снижение модуля деформации в первом случае значительно меньше. Указанные данные как будто противоречат друг другу, так как казалось, что снижение прочности и модуля деформации бетона в зоне I большого цилиндра должно было получиться гораздо больше, чем тех образцов, которые были выбурены из зоны II и испытаны после 12-месячного высыхания. Однако, здесь никаких противоречий нет, так как все это зависит от условий опытов. При длительном хранении образцов под открытым небом, а в наших опытах это продолжалось 20 лет, весьма важным является время года, когда из большого цилиндра были выбурены и испытаны образцы. Если это сделано в летний период и благодаря невысокой влажности водные прослойки успели уже испариться, то снижение прочности и модуля деформации будет максимальным, а если это сделано весной или осенью, то есть при высокой влажности среды, и водные прослойки сохранились или испарились частично, то это снижение будет незначительным. Конкретно в вышеописанных наших опытах образцы были выбурены из большого цилиндра осенью, и именно поэтому объемная масса бетона в зоне I (1628 кг/м^3) мало отличается от объемной массы зоны II. (1683 кг/м^3). Между тем, объемная масса образцов, взятых из зоны II после 12-месячного высыхания с 1683 кг/м^3 снизилась до 1519 кг/м^3. Тот факт, что объемная масса зоны I по вышеуказанной причине оказалась незначительно ниже объемной массы зоны II до высыхания, а прочность и модуль деформации существенно снизились, позволяет сделать весьма важный вывод — снижение прочности и особенно модуля деформации, вызванное испарением водных прослоек, существенно и тогда, когда имеет место их частичное испарение. Объясняется это тем, что если водные прослойки частично испарились, то уже они не могут в полной мере способствовать восприятию и распределению нагрузки и улучшению напряженного состояния скелета бетона.

Таким образом, испарение водных прослоек приводит к прочностной и деформационной неоднородности бетона, а следовательно, и к неоднородному напряженному состоянию сечений элементов железобетонных конструкций в процессе их эксплуатации. Следует отметить, что сразу после изготовления бетонного элемента, пока испарение водных прослоек не началось, то бетон однороден, а в дальнейшем в зависимости от влажности среды и размеров поперечного сечения элемента бетон может остаться однородным, стать неоднородным и, наконец, стать сперва неоднородным, а в дальнейшем вновь однородным. Для ясности более подробно остановимся на трех указанных случаях.

1. Бетонный элемент сначала однороден и остается таким в дальнейшем. Сказанное имеет место в том случае, когда влажность среды высокая и поэтому испарение водных прослоек не имеет места. То же самое имеет место и тогда, когда испарение из элемента исключено путем изоляции наружной поверхности. В обоих этих случаях влияние масштабного фактора на однородность бетона отпадает.

2. Бетонный элемент сначала однороден, а в дальнейшем по мере высыхания и испарения водных прослоек становится неоднородным. Сказанное имеет место в том случае, когда размеры поперечного сечения элемента большие, влажность среды невысокая и поэтому испарение водных прослоек происходит частично, то есть из части сечения.

3. Бетонный элемент сначала однороден, а в дальнейшем по мере высыхания сперва становится неоднородным и в итоге вновь однородным. Сказанное имеет место в том случае, когда размеры поперечного сечения элемента небольшие, влажность среды невысокая и по этой причине испарение постепенно охватывает все сечение.

По данным табл. 1 прочность бетона в зоне I большого бетонного цилиндра составляет 19,1 МПа, а усредненная прочность бетона остальных трех зон, прочности которых друг от друга отличаются весьма незначительно, составляет 24,9 МПа, то есть прочность бетона в ядровой части цилиндра на 30% выше, чем прочность бетона в наружном слое (зона I). Если учесть, что толщина наружного слоя в радиальном направлении составляла 9 см, то ее площадь составляет 59% от общей площади цилиндра диаметром 50 см. Тогда несущая способность такого цилиндра по усредненной прочности ядровой части составляет 488 т, а с учетом пониженной прочности наружного слоя — 411 т, то есть из-за испарения водных прослоек в пределах зоны I несущая способность такого элемента снизилась на 16%. Вполне понятно, что при цилиндре меньшего диаметра несущая способность уменьшилась бы еще больше и в пределе для цилиндра диаметром 18 см (учитывая испарение водных прослоек по всему сечению) уже составила бы 23%.

Исходя из современных представлений о механизме ползучести бетона, вполне понятно, что ползучесть бетона в наружном слое бетонного цилиндра будет намного больше, чем в ядровой части. Она будет больше, и потому, что снижение прочности и модуля деформации в процессе испарения водных прослоек приведет к накоплению упругих деформаций по мере спада модуля деформации. Если такой бетонный цилиндр загрузить длительной сжимающей нагрузкой, то в момент загружения упруго-мгновенная деформация по всему сечению будет одна и та же, а напряжение в более жесткой ядровой части окажется гораздо больше, чем в более податливом наружном слое. После этого, благодаря большей ползучести наружного слоя, начнется перераспределение напряжений во времени и в результате этого напряжение в ядровой части существенно возрастет, а в наружном слое, наоборот, уменьшится. Продолжение процесса перераспределения напряжений в конечном итоге приведет к тому, что наступит, наконец, такой момент, когда напряжение от непосредственного действия вертикальной нагрузки в наружном слое может исчезнуть и в последующем этот слой будет нести нагрузку лишь постольку, поскольку он является частью общего элемента, имеющего прочный контакт с ядровой частью. С указанного момента наружный слой, в основном, будет играть роль обоймы и защитного слоя ядровой части, исключающего испарение водных прослоек, а следовательно, и снижение прочности и модуля деформации бетона этой части. При наличии арматуры напряженно-деформированное состояние такого элемента еще более сложно. В этом случае, благодаря неоднородной ползучести по сечению, перераспределение напряжений приведет к увеличению напряжения в арматуре и, наоборот, к уменьшению напряжения в бетоне, причем более чувствительно в наружном слое, чем в ядровой части.

Таким образом, мы рассмотрели влияние неоднородности бетона на напряженно-деформированное состояние бетонного и железобетонного элемента при сжатии. Однако, вполне понятно, что влияние неоднородности бетона отрицательно сказывается на работе элементов и при других напряженных состояниях.

Установленный нами тот факт, что прочность наружных слоев большего цилиндра существенно меньше, чем прочность его ядровой части, указывает на необходимость учета этого фактора при проектировании бетонных и железобетонных конструкций. Для этого необходимо в СН и П предусмотреть специальный коэффициент условий работы, который должен быть установлен в зависимости от размеров поперечного сечения элементов конструкций, влажности среды и положения элементов конструкций при бетонировании.

Указанный факт заставляет обратить внимание еще на один важный вопрос. Как известно, существуют стандартные неразрушающие методы определения прочности бетона на сжатие в конструкциях приборами механического действия путем определения косвенных характеристик прочности бетона — величины отскока, размера отпечатка, усилия скалывания ребра конструкции, условного напряжения при отрыве. При этом все эти характеристики определяются на поверхности элементов конструкций. Учитывая результаты наших опытов, приходим к выводу, что полученную такими методами прочность бетона можно отнести ко всему сечению элемента конструкции независимо от размеров их сечений тогда, когда влажность среды высокая, и еще тогда, когда размеры сечения элемента небольшие, а влажность среды невысокая. При большом сечении элемента и невысокой влажности среды этого делать нельзя, так как прочность его наружных слоев существенно меньше, чем прочность ядровой части. Для учета повышенной прочности ядровой части, площадь которой может оказаться существенной частью общей площади сечения элемента конструкции, необходимо ввести специальный поправочный коэффициент.

Результаты вышеописанных опытов и прежние исследования авторов [5—13] приводят к выводу, что, если влажность среды невысокая, то отрицательное влияние испарения и исчезновение водных прослоек, которые проявляются с самого начала изготовления бетонного элемента, накладывается на положительный эффект, вызванный процессом твердения бетона. Поэтому обычно определяемая кривая нарастания прочности бетона во времени не является только следствием продолжительного эффекта процесса твердения. Так как испарение водных прослоек приводит к потере существенной доли прочности бетона и увеличению его деформативности, необходимо в зависимости от характеристик материалов, применяемых для приготовления бетона, условий производства работ и условий работы бетонных и железобетонных конструкций принять все меры, чтобы уменьшить, а если возможно, полностью исключить отрицательное влияние этого явления. Мы уже отмечали, что и анизотропия бетона обусловлена указанными водными прослойками и, как показали многочисленные опыты [5—13], все те факторы, которые приводят к уменьшению количества и размеров водных прослоек, а следовательно, и оставшихся на их местах после испарения пустот (дефектов), тем самым уменьшают степень анизотропии по прочности и деформациям. Поэтому эти исследования являются направляющими для уменьшения потери доли прочности, вызванной испарением водных прослоек.

Как уже было показано, в большинстве случаев бетонные элементы являются неоднородно наследственно-стареющими телами, свойства которых изменяются во времени в зависимости от координат. Теория ползучести для однородно-стареющих сред разработана Н. Х. Арутюняном [1—4].

Основные выводы

1. Испарение водных прослоек, которые образуются под зернами заполнителя вследствие отжатия излишней воды наверх при укладке и уплотнении бетона, оказывает отрицательное влияние на физико-механические свойства бетона при сжатии. Спад прочности и модуля деформации бетона, в основном, является следствием тех пустот (дефектов), которые остаются на местах водных прослоек по мере их испарения.

2. Вызванное испарением водных прослоек снижение прочности и модуля деформации бетона существенно зависит от влажности среды и масштабного фактора. С увеличением влажности среды и размеров поперечного сечения бетонного элемента отрицательное влияние испарения уменьшается, а в водной среде, независимо от масштабного фактора, исключается.

3. В результате испарения водных прослоек прочность наружных слоев бетонного элемента может оказаться существенно меньше, а деформации больше, чем его ядровой части. С увеличением влажности среды эта разница уменьшается, а с увеличением размеров поперечного сечения бетонного элемента — возрастает.

4. Испарение водных прослоек из наружных слоев бетонного элемента приводит к его прочностной и деформационной неоднородности по сечению и тем самым к неоднородному напряженному состоянию элементов железобетонных конструкций.

5. С момента изготовления бетонного элемента на положительный процесс его упрочнения накладывается отрицательное влияние тех пустот (дефектов), которые остаются на местах водных прослоек по мере их испарения. Потеря доли прочности бетона и увеличение деформативности, вызванное этим отрицательным явлением, зависят от различных факторов и во многих случаях могут оказаться весьма значительными. Учитывая это, необходимо в зависимости от характеристик материалов, применяемых для приготовления бетона, условий производства работ и условий работы бетонных и железобетонных конструкций принять все необходимые меры, чтобы уменьшить, а если возможно, полностью исключить образование в бетоне водных прослоек. Все те факторы, которые уменьшают количество и размеры водных прослоек, а следовательно, и пустот (дефектов), тем самым уменьшают потерю доли прочности и деформации бетона.

6. Для учета отрицательного влияния испарения водных прослоек на прочность и модуль деформации бетона необходимо в СН и П предусмотреть специальный коэффициент условий работы, который, хотя бы на первых порах, должен быть установлен в зависимости от влажности среды, размеров поперечного сечения элемента конструкции и его положения при бетонировании.

7. Поскольку в результате испарения водных прослоек прочность наружных слоев бетонного элемента может оказаться существенно меньше, а деформации больше, чем его ядровой части, существующие неразрушающие методы оценки прочности бетона путем определения косвенных показателей на поверхности для элементов конструкций большого сечения неприемлемы. Этими методами невозможно также оценить прочность бетона в конструкциях в зависимости от направления сжимающей нагрузки по отношению к слоям бетонирования. Для учета повышенной прочности ядровой части бетонного элемента, а также его положения при бетонировании необходимо установить специальные поправочные коэффициенты.

ԲԵՏՈՆԵ ԳԼԱՆԻ ՀԱՏՈՒՅԹԻ ՏԱՐԲԵՐ ԳՈՏԻՆԵՐԻ ԱՄՐՈՒԹՅՈՒՆՆ ՈՒ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԸ ՍԵՂՄՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Կ. Ս. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ, Կ. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում բերվում են շատ մեծ գլանաձև բետոնե էլեմենտի հատույթի տարբեր մասերի ամրության և դեֆորմացիաների մեծությունների ուսումնասիրության փորձարարական արդյունքները սեղմման դեպքում։

Հաստատված է, որ մեծ բետոնե գլանի արտաքին շերտերի ամրությունը և դեֆորմացիաների մոդուլը էապես փոքր են նրա միջուկի ամրությունից և

դեֆորմացիաների մոդուլից։ Բետոնի անհամասեռությունն ըստ ամրության և դեֆորմացիաների մոդուլի բացատրվում է նրա տեղադրման և խտացման ժամանակ էլեմենտի արտաքին մասում լցոնի հատիկների տակ հավաքված ջրային շերտերից ջրի գոլորշացման բացասական ազդեցությամբ։ Բետոնե էլեմենտի միջուկի բարձր ամրությունն ու դեֆորմացիաների մոդուլը հաշվի առնելու համար առաջարկվում է ՇՆ և Կ (СН и П)*-ում նախատեսնել աշխատանքի պայմանների հաշվի առնող հատուկ գործակից, ինչպես նաև գոյություն ունեցող կառուցվածքները չքայքայող ձևերով բետոնի ամրության գնահատման մեթոդներով մտցնել համապատասխան ուղղման գործակիցներ։*

STRENGTH AND DEFORMATION OF DIFFERENT SECTION ZONES OF A CONCRETE CYLINDER UPON COMPRESSION

K. S. KARAPETIAN, K. A. KARAPETIAN

S u m m a r y

The paper deals with the results of experimental investigations of strength and deformation of different section zones of a very old concrete cylinder upon compression.

It has been established that the strength and modulus of deformation of the external cylinder layer are considerably less than the strength and modulus of deformation of its kernel.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* О теории ползучести для неоднородных наследственно-стареющих сред.— Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 3.
2. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел.— Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 3.
3. *Арутюнян Н. Х.* Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела.— ПММ, 1977, т. 41, № 5.
4. *Арутюнян Н. Х.* Теория ползучести неоднородно-стареющих тел. М.: Изд. Института проблем механики АН СССР, 1981.
5. *Карапетян К. С.* Об одном существенном факторе в прочностных и деформативных свойствах бетона.— Докл. АН АрмССР, 1957, т. 24, № 4.
6. *Карапетян К. С.* Влияние анизотропии на ползучесть бетона.— Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 1957, т. 10, № 6.
7. *Карапетян К. С.* Влияние анизотропии на ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от масштабного фактора.— Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 1964, т. 17, № 4.
8. *Карапетян К. С.* Влияние анизотропии на ползучесть бетона в зависимости от влажности среды.— Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 1965, т. 18, № 2.
9. *Карапетян К. С.* Влияние анизотропии на прочность и ползучесть бетона в зависимости от расхода цемента.— Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 1965, т. 18, № 5.
10. *Карапетян К. С.* Влияние анизотропии на ползучесть бетона в зависимости от возраста бетона к моменту загружения.— Докл. АН АрмССР, 1965, т. 41, № 5.
11. *Карапетян К. С.* О вторичном твердении и изменении анизотропных свойств бетона при его водонасыщении.— Докл. АН АрмССР, 1973, т. 57, № 3.

12. *Карапетян К. С., Котикян Р. А., Карапетян К. А.* Исследование анизотропии прочности и модуля деформации весьма старого бетона. Третий национальный конгресс по теоретической и прикладной механике. Болгария, Варна: Доклады, книга 1, 1977.
13. *Карапетян К. С., Карапетян К. А.* Исследование изменения прочности, модуля деформации и степени анизотропии весьма старого туфобетона при сжатии вследствие водонасыщения и высыхания.— Изв. АН АрмССР, сер. Механика, 1981, т. 34, № 4.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
3. XII. 1981