

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
 Д О К Л А Д Ы

LXXVI, № 4

1983

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. քեկնածու (պատ. ֆառտուղար), Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Թ. ԲԱԲԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐՐԻՆԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդր. անդամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդր. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Վ. Գ. ՄԻՒԹԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդր. անդամ, Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Օ. Մ. ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդր. անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՖԱՆԱՐՁՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս:

Редакционная коллегия

Վ. Ա. ԱՄԲԱՐՇՄՅԱՆ, ակադեմիկ, Գ. Ա. ԱՐՅՄԱՆՅԱՆ, կանդ. տեխ. ռաւկ (ոտւ. սեկրետար), Յ. Գ. ԱՓՐԻԿՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Ա. Կ. ԵԱԵԱՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Ա. Ա. ԴԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Վ. Օ. ԿԱՅԱՐՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՏՏՐ (զաւ. ոտւ. ռեդաւկտոր), Վ. Դ. ՄԻԿԻՏԱՐՅԱՆ, շլ.-կորր. ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Դ. Տ. ՏԱԿՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Օ. Մ. ՏԱՓՈՆԺՅԱՆ, շլ.-կորր. ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Ա. Ա. ՏԱԼԱԼՅԱՆ, շլ.-կորր. ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Վ. Մ. ՏԱՐԱՅԱՆ, շլ.-կորր. ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Վ. Վ. ՓԱՆԱՐԺՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ ԱրմՏՏՐ:

Բ Ո Վ Ա Ն Գ Ա Կ Ո Ի Թ Յ Ո Ի Ն

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Վ. Կ. Լեոնտև, Գ. Գ. Մարտիրոսյան—Մաշման ենթակա համակարգերի փոխարինման օպտիմիզացիայի մասին	147
Ա. Գ. Թունիկ—Ընդհանրացված մասնակի-նորմալ լուծումը և նրա հատկությունները	151
Ա. Հ. Բաբայան—Վիներ—Հոպֆի համասեռ ինտեգրալ հավասարման հատուկ դեպք	155
Բ. Լ. Կոլիբնիկ—Մի էքստրեմալ խնդրի մասին և Կակեյայի թեորեմը	160
Ա. Ս. Փարսադանյան—Օպերատորների ունիտար համախմբություններ և նրանց անալիտիկ բնութագրությունը $L_2(a, b)$ -ում	165

ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Ե. Միրզոյան, Ս. Մ. Մխիրաբյան—Սողքի պայմաններում գտնվող բարակապատ վերջավոր երկարության ներդրակի և հարթության կոնտակտային փոխազդեցության խնդրի մասին	171
---	-----

ԲԻՈՔԻՄԻԱ

Ջ. Վ. Ղարիբյան, Հ. Մ. Ստեփանյան, Ի. Ս. Դանիելյան, Յու. Ս. Բաբայան, Բ. Տ. Ղարիբջանյան, Վ. Մ. Ասլանյան—Դեքսամետազոնի ազդեցությունը ուսուցքային հյուսվածքի ԴՆԹ-ի վրա	178
---	-----

ԲՈՒՅՍԵՐԻ ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Վ. Հ. Ղազարյան, Գ. Ս. Ավագյան, Ա. Ա. Աուլիջանյան—Տերևների արմատաապահովվածության վրա տնկարկների խտության ազդեցության հարցի շուրջը	184
--	-----

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Գ. Թ. Ոսկանյան—Նեոստրիատումի վրա ուղեղիկի ֆիլոգենետիկ տարրեր բաժինների ազդեցության համեմատական վերլուծությունը	189
--	-----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

	Стр.
<i>В. К. Леонтьев, Г. Г. Мартиросян</i> —Об оптимизации замен для систем с износом	147
<i>А. Д. Туниев</i> —Обобщенное частично-нормальное решение и его свойства.	151
<i>А. О. Бабаян</i> —Особый случай однородного уравнения Винера—Холфа.	155
<i>Б. Л. Голинский</i> —Об одной экстремальной задаче и теорема Какейя.	160
<i>А. С. Парсаданян</i> —Унитарные совокупности операторов и их аналитическая характеристика в пространстве $L_2(a, b)$	165

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

<i>С. Е. Мирзоян, С. М. Мхитарян</i> —К задаче контактного взаимодействия между тонкостенным включением конечной длины и плоскостью, находящимися в условиях ползучести	171
---	-----

БИОХИМИЯ

<i>Дж. В. Гарибян, Г. М. Степанян, И. С. Даниелян, Ю. С. Бабаян, Б. Т. Гарибджанян, В. М. Асланян</i> —Влияние дексаметазона на ДНК опухолевой ткани	178
--	-----

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

<i>В. О. Казарян, Г. С. Авакян, А. А. Кулиджанян</i> —К вопросу о влиянии густоты насаждений на корнеобеспеченность листьев	184
---	-----

ФИЗИОЛОГИЯ

<i>Г. Р. Восканян</i> —Сравнительный анализ влияний филогенетически разных отделов мозжечка на неостриатум	189
--	-----

C O N T E N T S

MATHEMATICS	P.
<i>V. K. Leontyev, H. G. Martirossian</i> —Replacement optimisation for the system with wear.	147
<i>A. D. Tuniev</i> —Generalized partial — normal solution and its property	151
<i>A. O. Babayan</i> —Special case of homogeneous Wiener-Hopf equation	155
<i>B. L. Golinsky</i> —On one extreme problem and the Kakeya theorem	160
<i>A. S. Parsadanian</i> —Unitary totalities of operators and their analytical characteristics in $L_2(a, b)$ space	165
THEORY OF CREEP	
<i>S. E. Mirzoyan, S. M. Mchitarian</i> —On the problem of contact interaction between thin-walled inclusion of finite length and plane, in creep conditions	171
BIOCHEMISTRY	
<i>J. V. Gharibian, G. M. Stepanian, I. S. Danielian, Yu. S. Babayan, B. T. Gharibjanian, V. M. Aslanian</i> —The influence of dexamethasone on DNA of tumour tissue	17
PLANT PHYSIOLOGY	
<i>V. O. Kazarian, G. S. Avakian, A. A. Kulidjanian</i> —On the question of influence of forestation thickness on the root security of leaves	184
PHYSIOLOGY	
<i>G. V. Voskanian</i> —Comparative analysis of influences of phylogenetically different parts of the cerebellum on the neostriatum	189

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л.

Сдано в набор 21.04. 1983. Подписано к печати 6.06. 1983. ВФ 05948.
 Бумага № 1, 70×108¹/₁₆. Плоскопечать. Печ. лист 3,0. Усл. печ. лист. 4,2.
 Учет.-изд. 3,41. Тираж 420. Заказ 358. Издат. 5927,
 Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24г, II эт., I к.

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван,
 пр. Маршала Баграмяна, 24-г.
 Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин

УДК 519.876.3

МАТЕМАТИКА

В. К. Леонтьев, Г. Г. Мартиросян

Об оптимизации замен для систем с износом

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 14/III 1983)

Пусть в некотором механизме на местах A_1, A_2, \dots, A_n работают n одинаковых деталей, которые изнашиваются в ходе работы. Время работы каждой детали на фиксированном месте до ее полного износа задается числом a_i . Механизм выходит из строя в тот момент времени, когда выходит из строя хотя бы одна из этих n деталей. Предполагается, что в любой момент времени детали можно менять местами. Требуется найти расписание „замен“, максимизирующее время работы механизма. В случае $n=2$ (обычный автомобиль, у которого степень износа шины зависит лишь от того, на каком мосту она работает: на переднем или заднем) нетрудно видеть, что максимальное время работы $T = \frac{2a_1 \cdot a_2}{a_1 + a_2}$, причем перестановка колес должна быть произведена один раз через время $T_0 = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2}$ после начала работы.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть n деталей распределены определенным образом по n местам и пусть, для определенности, выполняется цепочка неравенств $a_1 < a_2 < \dots < a_n, n=2, 3, 4, \dots, a_1 > 0$

Определение. Набор чисел $(\beta_1^1, \dots, \beta_n^1, t_1, \dots, \beta_1^s, \dots, \beta_n^s, t_s)$ называется расписанием, если выполнены следующие условия:

- 1) $\beta_j^i \in \{1, 2, \dots, n\}$ при $i = \overline{1, s} \quad j = \overline{1, n}$;
- 2) все компоненты набора $\beta_i = \{\beta_1^i, \dots, \beta_n^i\}$ различны;
- 3) справедливы неравенства

$$z_1(\rho) \equiv 1 - \sum_{i=1}^s \frac{t_i}{a_{\beta_1^i}} \geq 0 \tag{1}$$

$$z_n(\rho) \equiv 1 - \sum_{i=1}^s \frac{t_i}{a_{\beta_n^i}} \geq 0;$$

$$4) t_i \geq 0. \quad i = \overline{1, s} \quad s = 1, 2, \dots, \dots$$

Здесь β_j^i является номером места, на котором работает j -ая деталь в промежутке от $T_{i-1} = \sum_{k=0}^{i-1} t_k$ до $T_i = \sum_{k=0}^i t_k$, а неравенства (1) означают, что при работе по расписанию ρ ни одна из деталей не выйдет из строя до момента времени $T(\rho) = \sum_{i=1}^s t_i$. Пусть множество всех расписаний обозначено через P . Задачу можно сформулировать так:

$$\begin{cases} T(\rho) \rightarrow \max \\ \rho \in P \end{cases} \quad (2)$$

Теорема 1. Расписание $\rho_0 = 1, 2, \dots, n, \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}, 2, \dots, n, 1, \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}, \dots, n, 1, \dots, (n-1), \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}$ является оптимальным для задачи (2).

Доказательство. Ясно, что $T(\rho_0) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}$

Для произвольного расписания ρ обозначим коэффициент при $\frac{1}{a_i}$ в выражении для $z_l(\rho)$ через $t_l^i(\rho)$. Для всякого расписания ρ имеем $z_l(\rho) \geq 0$ при любом l . Отсюда $\sum_{i=1}^n z_l(\rho) \geq 0$ и, принимая во внимание, что $\sum_{i=1}^n t_l^i(\rho) = T(\rho)$, получим $T(\rho) \leq \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}$

Следовательно, расписание ρ_0 является оптимальным.

Определение. Число $s-1$ называется числом перестановок расписания ρ . Ясно, что число перестановок расписания ρ_0 есть $(n-1)$. Интересно выяснить, является ли это число минимальным для оптимальных расписаний. Для ответа на этот вопрос получен следующий результат:

Лемма 1. Пусть ρ_0 — оптимальное расписание для задачи (2). Тогда для $l = 1, 2, \dots, n$ выполняются соотношения: $z_l(\rho_0) = 0$

Теорема 2. Если для величин a_1, a_2, \dots, a_n выполняется неравенство $a_2 a_n + (n-2) a_1 a_2 - (n-1) a_1 a_n > 0$, то всякое расписание ρ с числом перестановок меньшим $n-1$ не является оптимальным.

Доказательство. Пусть ρ — расписание с числом перестановок меньшим $(n-1)$. И пусть детали занумерованы произвольным образом. Легко видеть, что существует деталь с некоторым номером

i_0 такая, что время ее работы на месте A_1 больше, чем $\frac{1}{n-1} \cdot T(\rho)$, и деталь (с номером i_0), которая вообще не работает на месте A_1 . После несложных выкладок получаем $z_{i_0}(\rho) > z_{j_0}(\rho)$, что противоречит лемме 1.

Следовательно, расписание ρ не является оптимальным.

Рассмотрим теперь следующее обобщение задачи (2).

Пусть для каждого места A_i задана функция $b_i(t)$, характеризующая скорость износа. Естественно полагать, что $b_i(t)$ определены, непрерывны, положительны и строго возрастают на $[0, \infty)$. Будем считать, для определенности, что

$$b_1(t) > b_2(t) > \dots > b_n(t)$$

при всех $t \in [0, \infty)$. Определение расписания сохраняет свою силу с той лишь разницей, что теперь

$$z_i(\rho) = 1 - \sum_{i=1}^s \int_{T_{i-1}}^{T_i} b_{\beta_i}(t) dt$$

Как и прежде требуется максимизировать время работы механизма по множеству всех расписаний P^* .

Для этой задачи получены следующие результаты:

Теорема 3. При $n=2$ существует оптимальное расписание, число перестановок которого равно единице.

Теорема 4. Если $b_i(t) = c_i t + d_i$ $i = \overline{1, n}$, то

$$\max_{\rho \in P^*} T(\rho) = \frac{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n d_i\right)^2 + 2n \sum_{i=1}^n c_i - \sum_{i=1}^n d_i}}{\sum_{i=1}^n c_i}$$

Рассмотрим другое обобщение задачи (2). На n местах работают m_1 деталь I типа и m_2 деталь II типа ($m_1 + m_2 = n$). Время работы детали I типа на месте A_i до полного износа задается величиной $r_1 a_i$, а детали II типа $-r_2 a_i$. Пусть вначале деталям I типа в произвольном порядке присвоены номера с 1 по m_1 , а деталям II типа с $(m_1 + 1)$ -го до n -го. Будем предполагать, что $r_1 < r_2$. Как и в задаче (2) требуется максимизировать время работы механизма.

Для этой задачи получены следующие результаты:

$$\text{если } \frac{m_1 r_1}{\sum_{i=m_2+1}^n \frac{1}{a_i}} \leq \frac{m_2 r_2}{\sum_{i=1}^{m_2} \frac{1}{a_i}}, \text{ то}$$

максимальное время работы механизма

$$T_{\max} = \frac{m_1 r_1}{\sum_{i=m_2+1}^n \frac{1}{a_i}}, \text{ при этом}$$

Հողվածում ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ: Եթե ֆունկցիաների $\{\varphi_k\}_0^\infty$ ($\varphi_0=1$) սիստեմը լրիվ է $C[0; 1]$ ում, ապա գոյություն ունեն $\{\varphi_k^n\}_0^n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) սիստեմով կազմված այնպիսի $\{u_{nk}\}_{k=0}^n$ բազմանդամներ, որ $u_{nk}(x) \geq 0$, $\sum_{k=0}^n u_{nk}(x) = 1$, և

$$U_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) u_{nk}(x)$$

դրական գծային օպերատորները կազմում են մոտարկող հաջորդականություն:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В. С. Виденский, Изв. АН БССР, сер. физ.-мат., № 1, 1979. ² В. С. Виденский, ДАН АрмССР, т. 70, № 3 (1980).

УДК 512.86

МАТЕМАТИКА

А. Д. Туниев

Обобщенное частично-нормальное решение и его свойства

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 10/V 1982)

В работе вводится понятие обобщенного частично-нормального решения (частично-нормального псевдорешения) линейных алгебраических систем, которое является обобщением известного понятия нормального псевдорешения. Алгебраической основой вводимого понятия, выявления их свойств и вычислений является обобщенный метод полного исключения Жордана—Гаусса ⁽¹⁾.

Приведем необходимые обозначения из ⁽²⁾. Вектор $x = \{x_i\}$, где i пробегает множество N , будем обозначать $x[N]$. Если $K \subset N$, то соответствующий „кусоч“ вектора будем обозначать $x[K]$. $a[M, N] = \{a_{ij}\}$ будет обозначать матрицу, индексы строк и столбцов которой пробегают соответственно множества M и N . $0[M, N]$ — нулевая матрица. Две матрицы $a[M, N]$ и $b[K, L]$ можно помножить тогда и только тогда, когда $N=K$.

Пусть $M = \{1, 2, \dots, m\}$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$ и ранг $a[M, N]$ равен r . Рассмотрим систему линейных уравнений

$$a[M, N]x[N] = a[M, 0], \quad (1)$$

где $x[N]$ неизвестный столбец.

Как известно, обобщенное решение системы (1) (по принципу наименьших квадратов) есть обычное решение нормальной системы

$$b[N, N]x[N] = b[N, 0], \quad (2)$$

где

$$b[N, N] = (a[M, N])^T a[M, N],$$

$$b[N, 0] = (a[M, N])^T a[M, 0]$$

Применим к системе (2) обобщенный метод полного исключения, каждая итерация которого состоит из малого шага, когда относительно выбранной системы векторов идет процесс частичной ортогонализации, и большого шага, когда процесс частичной ортогонализации закончен и преобразованию подлежат все остальные элементы системы.

Первая итерация. 1. Обозначим $N' = \{0, N\}$, и пусть $K_1 \subset N$. Полагаем

$$b^{(1)}[1, N'] = \frac{b[1, N']}{\|b[1, K_1]\|},$$

где $\|b[1, K_1]\|$ норма вектора $b[1, K_1] \neq 0[K_1]$.

2. Для $s \geq 2$ полагаем

$$b^{(1)}[s, N'] = \frac{\bar{b}^{(1)}[s, N']}{\|\bar{b}^{(1)}[s, K_1]\|},$$

где

$$\bar{b}^{(1)}[s, N'] = b[s, N'] + \sum_{i=1}^{s-1} \alpha_i^{(1)} b^{(1)}[i, N']$$

$$\alpha_i^{(1)} = \alpha_i^{(1)}(K_1) = -b[s, K_1] b^{(1)}[i, K_1], \quad (i=1, 2, \dots, s-1).$$

3. Если $s=r_1$, где r_1 ранг матрицы $b[N, K_1]^*$, то считая малый шаг законченным, переходим к п. 4, в противном случае переходим к п. 2, где вместо s берем $(s+1)$.

4. Обозначим $R_1 = \{1, 2, \dots, r_1\}$, $N_1 = N \setminus K_1$, $\tilde{N}_1 = N \setminus R_1$. Полагаем

$$b^{(1)}[s, N'] = b[s, N'] + \sum_{i \in R_1} \alpha_i^{(1)} b^{(1)}[i, N'], \quad s \in \tilde{N}_1,$$

где

$$\alpha_i^{(1)} = \alpha_i^{(1)}(K_1) = -b[s, K_1] b^{(1)}[i, K_1], \quad i \in R_1,$$

и считаем большой шаг законченным. После первой итерации получим эквивалентную систему вида

$$\begin{cases} b^{(1)}[R_1, K_1]x[K_1] + b^{(1)}[R_1, N_1]x[N_1] = b^{(1)}[R_1, 0], \\ b^{(1)}[\tilde{N}_1, N_1]x[N_1] = b^{(1)}[\tilde{N}_1, 0], \end{cases}$$

в которой система строк матрицы $b^{(1)}[R_1, K_1]$ ортогональна. Отметим, что $b^{(1)}[\tilde{N}_1, K_1] = 0[\tilde{N}_1, K_1]$.

Вторая итерация. Пусть $K_2 \subset N_1$ и ранг $b^{(1)}[\tilde{N}_1, N_1]$ равен $r_2 - r_1$. Тогда, построив, как и ранее, $R_2 = \{r_1+1, r_1+2, \dots, r_2\}$, $N_2 = N_1 \setminus K_2$, $\tilde{N}_2 = \tilde{N}_1 \setminus R_2$, получим систему вида

$$\begin{cases} b^{(2)}[R_1, K_1]x[K_1] + b^{(2)}[R_1, K_2]x[K_2] + b^{(2)}[R_1, N_2]x[N_2] = b^{(2)}[R_1, 0], \\ b^{(2)}[R_2, K_2]x[K_2] + b^{(2)}[R_2, N_2]x[N_2] = b^{(2)}[R_2, 0], \\ b^{(2)}[\tilde{N}_2, N_2]x[N_2] = b^{(2)}[\tilde{N}_2, 0], \end{cases}$$

в которой система строк матрицы $b^{(2)}[R_2, K_2]$ также ортогональна.

Продолжив эту процедуру, через τ ($\tau \leq r$) итераций получим систему вида

$$\sum_{j=1}^{\tau} b^{(j)}[R_s, K_j]x[K_j] = b^{(j)}[R_s, 0], \quad s=1, 2, \dots, \tau,$$

где K_s и R_s имеют тот же смысл, что и при $s=1, 2$.

Здесь считаем, что $r_\tau = r$, $N = \bigcup_{s=1}^{\tau} K_s$.

Обозначив

$$p[K_s, K_j] = (b^{(j)}[R_s, K_s])^T b^{(j)}[R_s, K_j], \quad (j=1, 2, \dots, \tau),$$

* Так как относительно системы векторов $\{b[l, K_1]\}_{l \in N}$ идет процесс ортогонализации, то ранг $b[N, K_1]$ определяется в ходе ортогонализации, кроме того, здесь предполагаем, что первые r_1 строк матрицы $b[N, K_1]$ линейно-независимы. r_2 ранг $b^{(1)}[N, K_1 \cup K_2]$.

$$x^0[K_s] = (b^{(\tau)}[R_s, K_s])^T b^{(\tau)}[R_s, 0], \quad (s=1, 2, \dots, \tau),$$

окончательно получаем

$$\sum_{j=1}^{\tau} p[K_s, K_j] x[K_j] = x^0[K_s], \quad s=1, 2, \dots, \tau. \quad (3)$$

Теорема 1. Пусть $N=K$. Обозначим

$$p[N, N] = \begin{bmatrix} p[K_1, K_1], p[K_1, K_2], \dots, p[K_1, K_\tau] \\ 0[K_2, K_1], p[K_2, K_2], \dots, p[K_2, K_\tau] \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0[K_\tau, K_1], 0[K_\tau, K_2], \dots, p[K_\tau, K_\tau] \end{bmatrix} \quad (4)$$

Тогда

(а) ядро матрицы $a[M, N]$ представимо в виде

$$Y = (p[N, N] - e[N, N])z[N],$$

где $e[N, N]$ единичная матрица, $z[N]$ — произвольный вектор;

(б) множество обобщенных решений представимо в виде

$$X = x^0[N] + Y;$$

(в) $x^0[K_s]$ ортогонален ядру Y_{K_s} подматрицы $a[M, K_s]$ ($s=1, 2, \dots, \tau$);

(г) вектор $x^0[N]$ имеет наименьшую длину среди всех векторов, принадлежащих линейному многообразию

$$X_K = x^0[N] + Y_K; \quad Y_K = \{Y_{K_1}, Y_{K_2}, \dots, Y_{K_\tau}\};$$

(д) при заданном разбиении $K = \{K_1, K_2, \dots, K_\tau\}$ вектор $x^0[N, 0] = p[N, N]x^0[N]$ является единственным.

Доказательство теоремы основывается на эквивалентности систем (2) и (4) и процессе частичной ортогонализации.

При $K_1 = N$ $x^0[N]$ нормальное псевдорешение, поэтому при $K = \{K_1, K_2, \dots, K_\tau\}$ естественно $x^0[N]$ называть обобщенным частично-нормальным решением (частично-нормальным псевдорешением) системы (1).

Следствие. Пусть

$$K = \{K_1, K_2, \dots, K_\tau\}; \quad K_i \cap K_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

$$N = \bigcup_{s=1}^{\tau} K_s; \quad K' = \{K'_{d_1}, K'_{d_2}, \dots, K'_{d_l}\}, \quad \text{где}$$

$$K'_{d_s} = \{K_{d_{s-1}+1}, K_{d_{s-1}+2}, \dots, K_{d_s}\}, \quad (s=1, 2, \dots, l);$$

при $s=1, l$, $K_{d_0} = K_1$, $K_{d_l} = K_\tau$. Тогда если при K и K' , соответственно, $x^0[N]$ и $x'[N]$ частично-нормальные псевдорешения, то при $l < \tau$ $\|x^0[N]\| \geq \|x'[N]\|$, при этом знак строгого неравенства имеет место, если $Y_K \subset Y_{K'}$, где

$$Y_{K'} = \{Y_{K'_{d_1}}, Y_{K'_{d_2}}, \dots, Y_{K'_{d_l}}\}.$$

Здесь $Y_{K'_{d_s}}$ ядро матрицы $a[M, K'_{d_s}]$ ($s=1, 2, \dots, l$).

Ընդհանրացված մասնակի-նորմալ լուծումը և նրա հատկությունները

Աշխատանքում ներմուծվում է գծային հանրահաշվական համակարգերի մասնակի-նորմալ լուծման (մասնակի-նորմալ պսևդոհակադարձման) գաղափարը, որը հանդիսանում է նորմալ պսևդոհակադարձման հայտնի գաղափարի ընդհանրացումը:

Ներմուծվող գաղափարի, նրա հատկությունների և հաշվումների բացահայտման հանրահաշվական հիմքը հանդիսանում է Ժորդան-Գաուսի լրիվ բացառման ընդհանրացված մեթոդը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. Д. Туниев, ДАН АрмССР, т. 71, № 3 (1980). ² И. В. Романовский, Алгоритмы решения экстремальных задач, Наука, М., 1977.

УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

А. О. Бабаян

Особый случай однородного уравнения Винера—Хопфа

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 10/VI 1982)

В работе рассматривается однородное уравнение

$$\varphi(t) - \int_0^{\infty} k(t-s)\varphi(s)ds = 0, \quad t > 0. \quad (1)$$

Здесь $k \in L^1(-\infty, \infty)$, φ ищется в классе $L^p(0, \infty)$, $1 \leq p \leq \infty$. Предполагается, что $\int_{-\infty}^{\infty} k(t)dt = 1$ и символ уравнения имеет следующий вид:

$$1 - K(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} k(t)e^{it\lambda}dt = \theta(\lambda)(1 - H(\lambda)); \quad (*)$$

$H(\lambda)$ —преобразование Фурье функции $h \in L^1(-\infty, \infty)$, $1 - H(\lambda) \neq 0$ для всех λ , $\theta(\lambda)$ имеет вид:

$$\theta(\lambda) = 1, \quad |\lambda| > 2\varepsilon; \quad \theta(\lambda) = \begin{cases} a|\lambda|^{\alpha_1}, & 0 < \lambda < \varepsilon \\ b|\lambda|^{\alpha_2}, & -\varepsilon < \lambda < 0; \end{cases} \quad (2)$$

$\theta(\lambda)$ бесконечно дифференцируема везде, кроме точки нуль; α_1 и α_2 , вообще говоря, комплексные числа, такие, что $\text{Re}\alpha_1 > 0$, $\text{Re}\alpha_2 > 0$. Также будем предполагать, что $\text{Im}(\alpha_1 - \alpha_2) \neq 0$ (случай, когда $\text{Im}(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$ рассматривался ранее, см. (1,2)). Следует различать два случая: 1) $\text{Im}(\alpha_1 - \alpha_2) > 0$, 2) $\text{Im}(\alpha_1 - \alpha_2) < 0$.

Используя рассуждения, в результате которых получается факторизация символа в (*), можно получить такие представления символа:

а) если $\text{Im}(\alpha_1 - \alpha_2) > 0$, то

$$1 - K(\lambda) = \frac{g_0^+(\lambda)}{g_0^-(\lambda)} \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i} \right)^\gamma \frac{\Phi_0^+(\lambda)}{\Phi_0^-(\lambda)}, \quad (3)$$

где

$$g_0^\pm(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda \pm i} \right)^{\alpha_\pm} \exp \left[\beta \left(\log \frac{\lambda}{\lambda \pm i} + i \frac{\pi}{2} \right)^\gamma \right],$$

$\text{Re}\beta < 0$, $\text{Re}\alpha_+ > 0$, $0 < \text{Re}\alpha_- \leq 1$, γ —целое число, $\Phi_0^\pm(\lambda)$, $g_0^\pm(\lambda)$ допускают

аналитические продолжения в D^\pm ($D^+ = \{z : \text{Im}z > 0\}$, $D^- = \{z : \text{Im}z < 0\}$), $\Phi_0^\pm(\lambda) \neq 0$ для всех $\lambda \in \overline{D^\pm}$;

б) при $\text{Im}(\alpha_1 - \alpha_2) < 0$

$$1 - K(\lambda) = \frac{g_1^-(\lambda)}{g_1^+(\lambda)} \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i} \right)^{\gamma_1} \frac{\Phi_1^-(\lambda)}{\Phi_1^+(\lambda)}, \quad (4)$$

где

$$g_1^\pm(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda \pm i} \right)^{\bar{\alpha}_\pm} \exp \left[\bar{\beta} \left(\log \frac{\lambda}{\lambda \pm i} + i \frac{\pi}{2} \right)^2 \right].$$

Здесь $\text{Re}\bar{\beta} < 0$, $\text{Re}\bar{\alpha}_+ > 0$, $0 < \text{Re}\bar{\alpha}_- \leq 1$, γ_1 — целое число, $\Phi_1^\pm(\lambda)$, $g_1^\pm(\lambda)$ допускают аналитические продолжения в D^\pm и $\Phi_1^\pm(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \in \overline{D^\pm}$.

Для случая, когда $\text{Im}(\alpha_1 - \alpha_2) > 0$, с помощью представления (3) сразу получается следующий результат:

Теорема 1. При $\text{Im}(\alpha_1 - \alpha_2) > 0$ уравнение (1) в классах $L^p(0, \infty)$, $1 \leq p \leq \infty$, не имеет нетривиальных решений.

Пусть теперь $\text{Im}(\alpha_1 - \alpha_2) < 0$. В этом случае справедливы следующие утверждения:

Теорема 2. При $\text{Im}(\alpha_1 - \alpha_2) < 0$ уравнение (1) в классах $L^p(0, \infty)$, $1 \leq p \leq \infty$, имеет бесконечное множество решений.

Базис в пространстве решений образуют функции $\varphi_{m,k}$ ($m=0$, $k=\gamma_1+1, \gamma_1+2, \dots$ при $\gamma_1 \geq 0$ и $m=0, 1, \dots, -\gamma_1$; $k=0, 1, 2, \dots$; $m^2 + k^2 \neq 0$ при $\gamma_1 < 0$) такие, что при $\gamma_1 \geq 0$ $\hat{\varphi}_{m,k} = [g_1^+(\lambda)(\lambda+i)^{\gamma_1} \Phi_1^+(\lambda)]/\lambda^k$, а при $\gamma_1 < 0$ $\hat{\varphi}_{m,k} = [g_1^+(\lambda)\Phi_1^+(\lambda)]/[(\lambda+i)^m \lambda^k]$. Здесь \hat{f} — преобразование Фурье функции f .

Теорема 3. В условиях теоремы 2 для того, чтобы функция

$$\varphi = \sum_m \sum_{k=1}^{\infty} c_{m,k} \varphi_{m,k},$$

где $c_{m,k}$ — постоянные, являлась решением уравнения (1) в классе $L^p(0, \infty)$, $1 \leq p \leq \infty$:

а) при $\text{Im}\bar{\beta} > 0$ необходимо, чтобы коэффициенты $c_{m,k}$ допускали оценку

$$|c_{m,k}| \leq \exp \left[\frac{(k - \text{Re}\bar{\alpha}_+ + 2\pi \text{Im}\bar{\beta} - 1 + p^{-1})^2}{4\text{Re}\bar{\beta}} \right], \quad k > N,$$

и достаточно требовать, чтобы

$$|c_{m,k}| \leq \exp \left[\frac{(k - \text{Re}\bar{\alpha}_+ + 2\pi \text{Im}\bar{\beta} - 1 + p^{-1} + \varepsilon)^2}{4\text{Re}\bar{\beta}} \right], \quad k > N_1,$$

для произвольного $\varepsilon > 0$;

б) при $\text{Im}\bar{\beta} < 0$ необходимо, чтобы $c_{m,k}$ допускали оценку

$$|c_{m,k}| \leq \exp \left[\frac{(k - \text{Re}\bar{\alpha}_+ - 1 + p^{-1})^2}{4\text{Re}\bar{\beta}} \right], \quad k > N_2,$$

и достаточно требовать, чтобы

$$|c_{m,k}| \leq \exp \left[\frac{(k - \text{Re}\bar{\alpha}_+ - 1 + p^{-1} + \varepsilon)^2}{4\text{Re}\bar{\beta}} \right], \quad \varepsilon > 0, \quad k > N_3.$$

Доказательство теорем 2 и 3. Достаточно рассмотреть случай $\gamma_1 = 0$. В этом случае (1) эквивалентно следующему уравнению:

$$\frac{g_1^-(\lambda)}{g_1^+(\lambda)} \frac{\Phi_1^-(\lambda)}{\Phi_1^+(\lambda)} \Phi^+(\lambda) = \Phi^-(\lambda). \quad (5)$$

Здесь $\Phi^+(\lambda)$ образ Фурье функции φ , $\Phi^-(\lambda)$ — образ Фурье функции $b(t)$: $b(t) = 0$ при $t \geq 0$, $b(t) = -\int_0^\infty k(t-s)\varphi(s)ds$ при $t < 0$. $\Phi_\pm^+(\lambda)$ допускают аналитические продолжения в D^\pm соответственно.

Когда $\varphi \in L^p(0, \infty)$, $2 < p < \infty$, $\Phi^+(\lambda)$ и $\Phi^-(\lambda)$ — обобщенные функции. Умножение в (5) означает следующее:

$$(\widehat{f} \widehat{g}, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) \widehat{\psi}(t) dt, \quad \psi \in S,$$

где $f \in L^1$, $g \in L^p$.

Уравнение (5) можно переписать в виде

$$\frac{g_1^-(\lambda)}{g_1^+(\lambda)} \widetilde{\Phi}^+(\lambda) = \widetilde{\Phi}^-(\lambda), \quad (6)$$

где $\widetilde{\Phi}^\pm(\lambda) = \Phi^\pm(\lambda) [\Phi_\pm^+(\lambda)]^{-1}$. Пусть

$$\Omega(z) = \begin{cases} \Omega_+(z), & \text{Im}z > 0 \\ \Omega_-(z), & \text{Im}z < 0, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$\Omega_+(z) = \widetilde{\Phi}^+(z) [g_1^+(z)]^{-1}, \quad \text{Im}z > 0; \quad \Omega_-(z) = \widetilde{\Phi}^-(z) [g_1^-(z)]^{-1}, \quad \text{Im}z < 0. \quad (8)$$

Докажем, что $\Omega(z)$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Из (6) следует, что для любой функции $\varphi \in S$ такой, что $\text{supp} \varphi \neq \emptyset$, справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Omega_+(x+iy) - \Omega_-(x-iy)| \varphi(x) dx \rightarrow 0; \quad y \rightarrow 0, \quad y > 0. \quad (9)$$

Так как пределов функций $\Omega_\pm(x \pm iy)$ в пространстве D' при $y \rightarrow 0$ не существует, из (9) не сразу следует аналитичность функции (7) в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поэтому введем функции

$$\omega^+(z) = \int_a^z \Omega_+(\zeta) d\zeta, \quad \text{Im}z > 0; \quad \omega^-(z) = \int_b^z \Omega_-(\zeta) d\zeta, \quad \text{Im}z < 0,$$

где a и b фиксированные числа такие, что $\text{Im}a > 0$, $\text{Im}b < 0$. Для функции $\omega^+(z)$, используя (8), можно получить следующее соотношение:

$$\omega^+(z) = \int_a^z \frac{\widetilde{\Phi}^+(\zeta)}{g_1^+(\zeta)} d\zeta = \frac{1}{g_1^+(z)} \int_a^z \widetilde{\Phi}^+(\zeta) d\zeta + \int_a^z \frac{(g_1^+(\zeta))'}{(g_1^+(\zeta))^2} \int_a^\zeta \widetilde{\Phi}^+(\eta) d\eta d\zeta.$$

Функции $g_1^+(\zeta)$ и $(g_1^+(\zeta))'$ непрерывны в $\overline{D^+} \setminus \{0\}$, а так как $\tilde{\Phi}^+(\eta)$ — преобразование Фурье функции из $L^p(0, \infty)$, $1 \leq p \leq \infty$, то $\int_a^\zeta \tilde{\Phi}^+(\eta) d\eta \in$

$L^2(-\infty, \infty)$. Следовательно, для почти всех $x \in R$ существует конечный предел $\omega^+(x+iy)$ при $y \rightarrow 0$. Аналогично $\omega^-(x-iy)$ имеет пределы при $y \rightarrow 0$ п. в. на R . Оценим разность $\omega^+(x+iy) - \omega^-(x-iy)$ при $y \rightarrow 0$. Пусть сначала $x > 0$. Если $a_1 > 0$ такое число, для которого $\omega^+(x+iy) - \omega^-(x-iy) \rightarrow c_1$, то используя аналитичность $\Omega_\pm(z)$ в D^\pm и соотношение (9), получим следующее:

$$\begin{aligned} \omega^+(x+iy) - \omega^-(x-iy) &= \int_a^{a_1+iy} \Omega_+(z) dz + \int_{a_1+iy}^{x+iy} \Omega_+(z) dz - \int_b^{a_1-iy} \Omega_-(z) dz - \\ &- \int_{a_1-iy}^{x-iy} \Omega_-(z) dz = \int_a^x [\Omega_+(\xi+iy) - \Omega_-(\xi-iy)] d\xi + \\ &+ \omega^+(a_1+iy) - \omega^-(a_1-iy) \rightarrow c_1, \quad y \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Аналогично $\omega^+(x+iy) - \omega^-(x-iy) \rightarrow c_2$ при $y \rightarrow 0$, $x < 0$, где c_1 и c_2 не зависят от x . Из этих соотношений следует аналитичность $\Omega(z)$ в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Следовательно, если $\Phi^+(\lambda)$ — образ Фурье решения уравнения (1), то

$$\Phi^+(\lambda) = \Phi_1^+(\lambda) g_1^+(\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda^{-k}, \quad (10)$$

что и доказывает теорему 2.

Для доказательства теоремы 3 заметим, что при $\text{Im} \tilde{\beta} < 0$ для того, чтобы (10) являлась образом Фурье функции из L^p , $1 \leq p \leq \infty$, необходимо, чтобы функция $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda^{-k}$ удовлетворяла оценке

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda^k} \right| \leq \exp \left[-\text{Re} \tilde{\beta} \log^2 |\lambda| - \left(\text{Re} \tilde{\alpha}_+ + 1 - \frac{1}{p} \right) \log |\lambda| \right], \quad (11)$$

и достаточно, чтобы

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda^k} \right| \leq \exp \left[-\text{Re} \tilde{\beta} \log^2 |\lambda| - \left(\text{Re} \tilde{\alpha}_+ + 1 - \frac{1}{p} - \epsilon \right) \log |\lambda| \right], \quad \epsilon > 0 \quad (12)$$

(оценки (11) и (12) следуют из характера поведения функции $g_1^+(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$). Из (11) и (12) оценки для коэффициентов c_k получаются аналогично оценкам для коэффициентов ряда Тейлора целой функции конечного ненулевого порядка и конечного типа.

При $\text{Im} \tilde{\beta} > 0$ рассуждения аналогичны.

Обзор работ, посвященных уравнениям Винера—Хопфа, см. в (2,3).

Վիներ—Հոպֆի համասեռ ինտեգրալ հավասարման հատուկ դեպք

Աշխատանքում դիտարկվում է (1) հավասարումը այն պայմանով, որ սիմվոլը ունի (*) տեսք:

. Ֆուրյեի ձևափոխման միջոցով (1) հավասարումը բերվում է Ռիմանի սահմանային խնդրին, որը լուծվում է կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության մեթոդներով:

Նկարագրված է (1) հավասարման լուծումների տարածության բազիսը: Գտնված են այն պայմանները, որոնց կատարման դեպքում բազիսի էլեմենտների անվերջ գծային կոմբինացիան պատկանում է $L^p(0, \infty)$, $1 \leq p \leq \infty$ տարածությանը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ М. И. Хайкин, Изв. вузов, матем., № 8, 1978. ² А. О. Бабаян, Изв. АН АрмССР, сер. матем., т. 17, № 5 (1982). ³ З. Пресдорф, Некоторые классы сингулярных уравнений, Мир, М., 1979.

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

А. С. Парсаданян

Унитарные совокупности операторов и их аналитическая характеристика в пространстве $L_2(a, b)$.

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашьяном 17/VI 1982)

В работе (1) М. М. Джрбашьяном введено понятие унитарной пары операторов в абстрактном гильбертовом пространстве H , которое является качественно новым обобщением понятия унитарного оператора. Там же дана их аналитическая характеристика в гильбертовом пространстве функций $L_2(a, b)$, и в качестве специального случая известная теорема Бохнера.

В настоящей работе получены аналогичные результаты для унитарной совокупности операторов.

1. Пусть в абстрактном гильбертовом пространстве H определены n линейных ограниченных операторов U_1, U_2, \dots, U_n с областями значений $\Delta_k = U_k H \subseteq H$ ($k=1, 2, \dots, n$) и пусть $U_1^*, U_2^*, \dots, U_n^*$ — соответствующие сопряженные операторы.

Конечное множество операторов $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ назовем унитарной совокупностью, если для произвольных f и g из H выполняются условия

$$(U_k^* f, U_j^* g) = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ (f, g), & k = j \end{cases} \quad (k, j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (n \geq 2); \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n (U_k f, U_k g) = (f, g), \quad (2)$$

где (f, g) — скалярное произведение пространства H .

Класс всех таких унитарных совокупностей обозначим через $U^{(n)}(H)$. Легко видеть, что условия (1) и (2) соответственно эквивалентны следующим:

$$U_k U_j^* = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases} \quad (k, j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (n \geq 2); \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n U_k^* U_k = I, \quad (4)$$

где 0 — нулевой, а I — единичный операторы H .

Докажем следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $\{U_1, U_2, \dots, U_n\} \in U^{(n)}(H)$. Тогда

1°) операторы $P_k = U_k^* U_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) осуществляют проек-

тирование пространства H на подпространства $H_k (k=1, 2, \dots, n)$, так что

$$\sum_{k=1}^n \oplus H_k = H;$$

2°) для любых элементов f и g из $\Delta_n = U_n H$ справедливо равенство

$$(U_n^* f, U_n^* g) = (f, g).$$

Доказательство. В самом деле, по (3) имеем

$$P_k^* = P_k (k=1, 2, \dots, n), \quad P_k P_j = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases} \quad (k, j=1, 2, \dots, n-1), \quad (5)$$

т. е. $P_k (k=1, 2, \dots, n-1)$ — ортопроекторы, отображающие пространство H на некоторые подпространства $H_k (k=1, 2, \dots, n-1)$. В силу (5) подпространства $H_k (k=1, 2, \dots, n-1)$ попарно ортогональны и, следовательно, оператор $\sum_{k=1}^{n-1} P_k$ проектирует пространство H на под-

пространство $\sum_{k=1}^{n-1} \oplus H_k$ (см. (*), с. 285—289).

Оператор $P_n = I - \sum_{k=1}^{n-1} P_k$ — также проекционный и отображает пространство H на подпространство $H_n = H \ominus \sum_{k=1}^{n-1} \oplus H_k$ и, следовательно, пункт 1° доказан.

Так как $I = \sum_{k=1}^n P_k$, то, имея в виду (5), для произвольных элементов F и G из H имеем

$$(F, G) = \left(\sum_{k=1}^n P_k F, \sum_{k=1}^n P_k G \right) = \sum_{k=1}^n (P_k F, P_k G).$$

Пользуясь (1) и (2), получим

$$(U_n^* U_n F, U_n^* U_n G) = (U_n F, U_n G),$$

и так как $f = U_n F \in \Delta_n$, $g = U_n G \in \Delta_n$ произвольны, то наше утверждение доказано.

Лемма 2. Пусть линейные ограниченные операторы $U_k (k=1, 2, \dots, n-1)$ удовлетворяют условиям (1). Тогда существует линейный ограниченный оператор U_n (единственный среди положительных и самосопряженных операторов) такой, что $\{U_1, U_2, \dots, U_n\} \in U^{(n)}(H)$.

Доказательство. Действительно, при условии (3) операторы

$$P_k = U_k^* U_k (k=1, 2, \dots, n-1), \quad P_n = I - \sum_{k=1}^{n-1} P_k$$

являются попарно ортогональными проекционными операторами. Следовательно

$$P_n^2 = P_n, \quad P_n^* = P_n, \quad (P_n f, f) = (P_n^2 f, f) = (P_n f, P_n f) \geq 0,$$

т. е. оператор P_n самосопряженный и положительный. А это значит, что существует единственный положительный самосопряженный квадратный корень $U_n = P_n^{\frac{1}{2}}$ (см. (2), с. 284). Оператор U_n будет искомым.

Таким образом, если операторы $U_k (k=1, 2, \dots, n-1)$ не унитарны, то при условии (3) допускают „пополнение“ в совокупности посредством другого оператора U_n , составляющего совместно с ними унитарную совокупность.

2. Обозначим через $L_2(a, b)$ пространство всех измеримых и суммируемых с квадратом модуля на (a, b) функций, где $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Для пары функций $f(x)$ и $g(x)$ из $L_2(a, b)$ определим скалярное произведение

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

и норму $\|f\|$ элемента $f \in L_2(a, b)$ как $\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}}$.

Известно, что множество функций $L_2(a, b)$ с принятым нами определением скалярного произведения представляет собой полное сепарабельное гильбертово пространство.

Определим функцию $l_\zeta(x)$, зависящую от параметра $\zeta \neq 0$, следующим образом:

$$l_\zeta(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \zeta) \\ 0, & x \notin [0, \zeta) \end{cases} \quad \zeta > 0, \quad l_\zeta(x) = \begin{cases} -1, & x \in [\zeta, 0) \\ 0, & x \notin [\zeta, 0) \end{cases} \quad \zeta < 0, \quad (6)$$

и с целью упрощения формулировок предположим, что $x=0$ есть внутренняя или граничная точка интервала (a, b) .

В следующей теореме дается аналитическая характеристика унитарных совокупностей операторов, действующих в пространстве $L_2(a, b)$.

Теорема 1. Любой унитарной совокупности операторов $\{U_1, U_2, \dots, U_n\} \in U^{(n)}(H)$, действующей в пространстве $H = L_2(a, b)$ соответствуют $2n$ функций

$$K_k(\zeta, x) = U_k l_\zeta(x), \quad K_k^*(\zeta, x) = U_k^* l_\zeta(x), \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

принадлежащих этому пространству при каждом фиксированном $\zeta \in (a, b)$ и обладающих тем свойством, что соответствие

$$g_k = U_k f \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad f = \sum_{k=1}^n U_k^* g_k \quad (8)$$

осуществляется посредством формул

$$\int_0^\zeta g_k(x) dx = \int_a^b \overline{K_k^*(\zeta, x)} f(x) dx \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (9)$$

$$\int_0^\zeta f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_a^b \overline{K_k(\zeta, x)} g_k(x) dx. \quad (10)$$

Кроме того, функции (7) удовлетворяют условиям:

$$а) \sum_{k=1}^n \int_a^b \overline{K_k(\zeta, x)} K_k(\eta, x) dx = \int_a^b l_\zeta(x) l_\eta(x) dx = \begin{cases} \min(|\zeta|, |\eta|), & \zeta \eta \geq 0; \\ 0, & \zeta \eta < 0; \end{cases}$$

$$б) \int_a^b K_k^*(\zeta, x) K_j^*(\eta, x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ \int_a^b l_\zeta(x) l_\eta(x) dx, & k = j \end{cases} \quad (k, j = 1, 2, \dots, n-1);$$

$$в) \int_0^\eta K_k(\zeta, x) dx = \int_0^\zeta \overline{K_k^*(\eta, x)} dx \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Обратно, всякие $2n$ функций $K_k(\zeta, x)$, $K_k^*(\zeta, x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), обладающие свойствами а), б) и в), порождают согласно формулам (9) и (10) некоторую унитарную совокупность операторов $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$, связанную с этими функциями формулами (7).

Доказательство первой половины теоремы. Пусть справедливы (7) и (8). Тогда легко видеть, что

$$(g_k, l_\zeta) = (U_k f, l_\zeta) = (f, U_k^* l_\zeta) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

$$(f, l_\zeta) = \left(\sum_{k=1}^n U_k^* g_k, l_\zeta \right) = \sum_{k=1}^n (U_k^* g_k, l_\zeta) = \sum_{k=1}^n (g_k, U_k l_\zeta),$$

из которых следует формула (9) и (10).

Докажем, что функции (7) удовлетворяют также условиям а), б) и в). Пусть $f = l_\eta$, тогда $g_k = U_k l_\eta$ ($k = 1, 2, \dots, n$). В силу (2) и (8) можем написать

$$\begin{aligned} (l_\eta, l_\zeta) &= (f, l_\zeta) = \left(\sum_{k=1}^n U_k^* g_k, l_\zeta \right) = \sum_{k=1}^n (U_k^* g_k, l_\zeta) = \\ &= \sum_{k=1}^n (g_k, U_k l_\zeta) = \sum_{k=1}^n (U_k l_\eta, U_k l_\zeta) \end{aligned}$$

и, пользуясь обозначениями (7), убедимся в истинности а).

Подставляя в (1) $f = l_\eta$, $g = l_\zeta$, будем иметь

$$(U_k^* l_\eta, U_j^* l_\zeta) = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ (l_\eta, l_\zeta) & k = j \end{cases} \quad (k, j = 1, 2, \dots, n-1).$$

Пользуясь обозначениями (7), получаем б).

Из определения сопряженного оператора имеем, что

$$(U_k l_\zeta, l_\eta) = (l_\zeta, U_k^* l_\eta) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

и имея в виду также (7), получаем в).

Доказательство второй половины теоремы. Определим операторы U_k и V_k ($k = 1, 2, \dots, n$) следующим образом:

$$K_k(\zeta, x) = U_k l_\zeta(x), \quad K_k^*(\zeta, x) = U_k^* l_\zeta(x) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Условия а), б) и в) нам дают

$$a') \sum_{k=1}^n (U_k l_\eta, U_k l_\zeta) = (l_\eta, l_\zeta);$$

$$б') (V_k l_\eta, V_j l_\zeta) = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ (l_\eta, l_\zeta), & k = j \end{cases} \quad (k, j = 1, 2, \dots, n-1);$$

$$в') (U_k l_\zeta, l_\eta) = (l_\zeta, V_k l_\eta) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Пусть теперь $f(x)$ — какая-нибудь ступенчатая функция. Ее можно представить, причем единственным образом, в виде линейной комбинации функции $l_\zeta(x)$. Тогда $U_k f$ и $V_k f$ можно будет определить как линейные комбинации соответствующих $U_k l_\zeta$ и $V_k l_\zeta$, взятых с теми же коэффициентами. Соотношения а'), б') и в') распространяются при этом на произвольные ступенчатые функции f и g :

$$a'') \sum_{k=1}^n (U_k f, U_k g) = (f, g);$$

$$б'') (V_k f, V_j g) = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ (f, g), & k = j \end{cases} \quad (k, j = 1, 2, \dots, n-1);$$

$$в'') (U_k f, g) = (f, V_k g) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Поскольку $L_2(a, b)$ полно и множество ступенчатых функций плотно в $L_2(a, b)$, то с помощью а''), б'') и в'') операторы U_k и V_k можно единственным образом распространить на все $L_2(a, b)$. В силу непрерывности скалярного произведения на $L_2(a, b)$ сохраняются формулы а), б) и в). Известно (см. (3)), что если функция $R(\zeta, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_a^b \overline{R(\zeta, x)} R(\eta, x) dx = \int_a^b l_\zeta(x) l_\eta(x) dx, \quad \zeta, \eta \in (a, b)$$

и кроме того полна, т. е. из

$$\int_a^b R(\zeta, x) \overline{f(x)} dx = 0, \quad \zeta \in (a, b),$$

где $f(x) \in L_2(a, b)$, следует, что $f(x) \equiv 0$, то $R(\zeta, x)$ является ядром некоторого унитарного оператора.

При снятии условия полноты ядер $K_k^*(\zeta, x) (k = 1, 2, \dots, n-1)$ из утверждения б) согласно теореме 1 следует:

Теорема 2. Пусть функции $K_k^*(\zeta, x) (k = 1, 2, \dots, n-1)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\int_a^b \overline{K_k^*(\zeta, x)} K_j^*(\eta, x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ \int_a^b l_\zeta(x) l_\eta(x) dx, & k = j \end{cases} \quad (k, j = 1, 2, \dots, n-1).$$

Тогда существуют единственные функции $K_k(\zeta, x) (k = 1, 2, \dots, n-1)$ и функции $K_n(\zeta, x), K_n^*(\zeta, x)$, которые совместно с функциями $K_k^*(\zeta, x) (k = 1, 2, \dots, n-1)$ удовлетворяют условиям а) и в) теоре-

мы 1, порождая, таким образом, некоторую унитарную совокупность операторов $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ в $L_2(a, b)$, согласно формулам (9) и (10).

Функции $K_n(\zeta, x)$ и $K_n^*(\zeta, x)$ также единственны при условии

$$K_n^*(\zeta, x) \equiv K_n(\zeta, x).$$

Эту теорему можно рассматривать как решение вопроса о дополнении в совокупности конечного числа неполных попарно ортогональных ядер.

В заключение выражаю благодарность академику АН АрмССР М. М. Джрбашяну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Кафанский отдел Вычислительного центра
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ս. ՓԱՐՍԱԴԱՆՅԱՆ

Օպերատորների ունիտար համախմբություններ և նրանց անալիտիկ բնութագրությունը $L_2(a, b)$ -ում

Ներկա աշխատանքում մտցվում է օպերատորների ունիտար համախմբություն հասկացությունը հիլբերտյան տարածություններում: Ստացված են ունիտար զույգերի $L_2(a, b)$ -ում անալիտիկ բնութագրության վերաբերյալ Մ. Ս. Ջրբաշյանի թեորեմին անալոգ արդյունքներ ունիտար համախմբությունների համար: Ապացուցված է նաև թեորեմ, որով լուծվում է վերջավոր թվով ոչ լրիվ, զույգ առ զույգ օրթոգոնալ կորիզների ըստ համախմբության լրիվացման հարցը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ М. М. Джрбашян, ДАН СССР, т. 141, № 2 (1961). ² Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, Мир, М., 1979. ³ М. М. Джрбашян, Р. М. Мартиросян, ДАН СССР, т. 132, № 5 (1960).

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Б. Л. Голинский

Об одной экстремальной задаче и теорема Какейя

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 11/VI 1978)

Сформулируем теорему Какейя.

Существует единственный многочлен $R(z)$ степени $\leq 2n$, удовлетворяющий следующим условиям: 1) он допускает представление $R(z) = Cr^2(z)\tau(z)\tau^*(z)$, C — пост., $r(z) = \prod_{k=1}^m (1 - \bar{a}_k z)$,

$$\tau(z) = \prod_{l=1}^v (z - \beta_l), \{ |a_k| \}_1^m < 1, \{ |\beta_l| \}_1^v \leq 1, \tau^*(z) = z^v \bar{\tau}\left(\frac{1}{z}\right), v = n - m, \quad (1)$$

т. е. некоторые его корни симметричны относительно окружности Γ единичного радиуса с центром в точке $z=0$, остальные лежат вне Γ и в этом случае имеют четную кратность; 2) он подчинен одному из условий: 2.1) заданы его значения в точках $\{\gamma_k\}_0^n$ области $|z| < 1$, т. е. $R(\gamma_k) = \delta_k$, $\{ |\gamma_k| \}_0^n < 1$; 2.2) заданы его младшие коэффициенты $\{\mu_k\}_0^n$, т. е.

$$R(z) = \mu_0 + \mu_1 z + \dots + \mu_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots + a_{2n} z^{2n}.$$

В формуле (1) фигурирует $n+1$ неизвестных величин: C , $\{a_k\}_1^m$, $\{\beta_l\}_1^v$, для нахождения которых имеем $n+1$ условий 2.1) или 2.2). Отсюда, однако, не следует, что эта система $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными (в общем случае нелинейная) допускает решение, и притом единственное.

Эта чисто алгебраическая теорема была впервые доказана С. Какейя (1) весьма сложно (с применением топологических методов). Непрямое доказательство теоремы Какейя при условии 2.2) дано Ф. Риссом (2), С. Такенака (3), Г. М. Голузиным (4). В настоящей заметке приведен также не прямой метод доказательства теоремы Какейя, однако один для обоих случаев 2.1) и 2.2) и, как нам кажется, проще вышеуказанных, а леммы 1, 2 и экстремальная задача, из которой следует теорема Какейя, представляют самостоятельный интерес.

1. Обозначим через S и H классы функций $\varphi(z)$ и $f(z)$, регулярные в области $|z| < 1$ и удовлетворяющие в ней соответственно

условиям: $|\varphi(re^{i\theta})| < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi; \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta < \text{пост.}$ для всех $r < 1$.

Пусть $f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s z^s$, $L(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |f(\zeta)| |d\zeta| = L(c_0, c_1, \dots)$, $\overline{\arg f(\zeta)} =$
 $= \begin{cases} |f(\zeta)| : f(\zeta) = \overline{f(\zeta)} : |f(\zeta)| & \text{при } f(\zeta) \neq 0 \\ 0 & \text{при } f(\zeta) = 0. \end{cases}$

Лемма 1. Если $F(z) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s z^s \in H$, то граничное условие $\zeta^n \overline{\arg F(\zeta)} := \varphi(\zeta)$, $\varphi(z) \in S$ эквивалентно тому, что $F(z)$ — многочлен степени $\leq 2n$, $|z| < 1$.

Доказательство. Пусть $F(z)$ имеет представление (1). Тогда

$$\overline{\arg F(\zeta)} = \frac{|C|}{C} \frac{\overline{r(\zeta)} \overline{\tau(\zeta)}}{r(\zeta) \tau^*(\zeta)} = \frac{|C|}{C} \frac{r^*(\zeta)}{\zeta^n r(\zeta)}.$$

Так как $r^*(z)/r(z) \in S$ при $|z| < 1$, то $\zeta^n \overline{\arg F(\zeta)} = \frac{|C|}{C} \frac{r^*(\zeta)}{r(\zeta)}$, $\varphi(z) =$
 $= \frac{|C|}{C} \frac{r^*(z)}{r(z)} \in S$. Необходимость условия (1) доказана. Докажем его

достаточность. Имеем $\zeta^n \overline{\arg F(\zeta)} = \zeta^n |F(\zeta)| |F^{-1}(\zeta)| = \varphi(\zeta)$, $\zeta^n |F(\zeta)| = F(\zeta) \varphi(\zeta)$. Ясно, что $\lambda(z) := F(z) \varphi(z) \in H$ и $\lambda(\zeta) = F(\zeta) \varphi(\zeta)$ должно удовлетворять условию (см. (5), с. 157): $\int_{\Gamma} \lambda(\zeta) \zeta^s d\zeta = \int_{\Gamma} \zeta^{n+s} |F(\zeta)| d\zeta = 0$, ($s=0, 1, \dots$).

Отсюда вытекает, что при $\rho \geq n+1$ имеем $\int_0^{2\pi} |F(e^{i\theta})| e^{i\rho\theta} d\theta = 0$, $\rho = n+1,$

$n+2, \dots$, т. е. $|F(e^{i\theta})|$ — неотрицательная тригонометрическая сумма порядка $\leq n$. По теореме Фейера $|F(\zeta)| = |t(\zeta)|^2$, где $t(z)$ — многочлен степени $\leq n$, $t(z) \neq 0$ при $|z| < 1$. Мы имеем таким образом почти всюду (п. в.) на Γ

$$\zeta^n |F(\zeta)| = \zeta^n |t(\zeta)|^2 = t(\zeta) t^*(\zeta) = \lambda(\zeta) = F(\zeta) \varphi(\zeta). \quad (2)$$

Так как функции $t(z) t^*(z) \in H$, $\lambda(z) \in H$, то они выражаются через свои граничные значения интегралом Коши (см. (5), с. 97) и равенство (2) справедливо в $|z| \leq 1$. По известному представлению В. И. Смирнова (6) имеем при $|z| < 1$

$$F(z) = B_1(z) t^2(z) \psi_1(z), \quad \varphi(z) = B_2(z) \psi_2(z), \quad (3)$$

где

$$\psi_j(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\sigma_j(\theta) \right\}, \quad j=1, 2,$$

а $B_j(z)$ — произведение Бляшке, $\sigma_j(\theta)$ — невозрастающие на $[0, 2\pi]$ функции, причем $\sigma_j'(\theta) = 0$ п. в. в $[0, 2\pi]$.

Мы имеем по (2) и (3) при $|z| < 1$

$$\lambda(z) = t(z) t^*(z) = t^2(z) B(z) \psi(z), \quad B(z) = B_1(z) B_2(z), \quad \psi(z) = \psi_1(z) \psi_2(z).$$

Отсюда следует, что $\psi(z) \equiv 1$, $d\sigma_1(\theta) + d\sigma_2(\theta) = 0$, $\sigma_j(\theta) = \text{пост.}$, $j=1, 2$.

Значит

$$F(z) = t(z)t^*(z)\varphi^{-1}(z) = t(z)t^*(z)B_2^{-1}(z). \quad (4)$$

Так как функция $F(z)$ регулярна в $|z| < 1$, то каждый нуль функции $B_2(z)$ должен быть одновременно нулем не меньшей кратности многочлена $t^*(z)$. Положим $B_2(z) = C_1 \prod_{k=1}^m \frac{z - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k z}$, $t^*(z) = \prod_{k=1}^m (z - \alpha_k) \prod_{i=1}^v (z - \beta_i)$.

Тогда из (4) получим

$$F(z) = C \prod_{k=1}^m (z - \alpha_k)(1 - \bar{\alpha}_k z) \prod_{i=1}^v (1 - \bar{\beta}_i z)(z - \beta_i) \prod_{k=1}^m \frac{1 - \bar{\alpha}_k z}{z - \alpha_k} = Cr^2(z)\tau(z)\tau^*(z) = \\ = R(z),$$

т. е. представление (1).

Лемма 2. Имеют место равенства

$$\frac{\partial L}{\partial b_s} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \overline{\arg F(\zeta) \zeta^s} |d\zeta|, \quad s=0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Доказательство. Применим метод Ф. Рисса ⁽²⁾. Для этого рассмотрим функцию $F_1(z) = F(z) + \Delta b_s z^s \in H(|z| < 1)$. П. в. на Γ $F_1(\zeta) = F(\zeta) + \Delta b_s \zeta^s$. Положим $b_s = g_s + ih_s$ и рассмотрим сперва вещественные значения $\Delta b_s = \Delta g_s$. Обозначим $v_s(\theta) = \{|F_1(\zeta)| - |F(\zeta)|\} : \Delta g_s$. Тогда

$$\frac{\partial L(F)}{\partial b_s} = \lim_{\Delta g_s \rightarrow 0} \frac{L(F_1) - L(F)}{\Delta g_s} = \lim_{\Delta g_s \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_s(\theta) d\theta. \quad (6)$$

Очевидно

$$v_s(\theta) = \frac{|F(\zeta) + \Delta g_s \zeta^s|^2 - |F(\zeta)|^2}{\Delta g_s \{|F(\zeta) + \Delta g_s \zeta^s| + |F(\zeta)|\}} = \frac{\Delta g_s + 2\operatorname{Re}\{\overline{F(\zeta)} \zeta^s\}}{|F(\zeta) + \Delta g_s \zeta^s| + |F(\zeta)|}$$

и

$$\lim_{\Delta g_s \rightarrow 0} v_s(\theta) = \frac{\operatorname{Re}\{\overline{F(\zeta)} \zeta^s\}}{|F(\zeta)|}, \quad |v_s(\theta)| \leq \left| \frac{F_1(\zeta) - F(\zeta)}{\Delta g_s} \right| = 1. \quad (7)$$

Применяя теорему Лебега о предельном переходе, (6) и (7), получим

$$\lim_{\Delta g_s \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_s(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{Re}\{\overline{F(\zeta)} \zeta^s\}}{|F(\zeta)|} |d\zeta| = \frac{\partial L(F)}{\partial b_s}. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь функцию $F_2(z) = -F(z)$ с коэффициентами $b_s^{(2)} = h_s - ig_s$. Имеем по (8)

$$\frac{\partial L(F_2)}{\partial h_s} = \frac{\partial L(F)}{\partial h_s} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{Re}\{\overline{F_2(\zeta)} \zeta^s\}}{|F_2(\zeta)|} |d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{Re}\{i\overline{F(\zeta)} \zeta^s\}}{|F(\zeta)|} |d\zeta|. \quad (9)$$

Так как $g_s = \frac{b_s + \bar{b}_s}{2}$, $h_s = \frac{b_s - \bar{b}_s}{2i}$, то из (8) и (9) следует (5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial b_s} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial L(F)}{\partial g_s} - i \frac{\partial L(F)}{\partial h_s} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{Re}\{\overline{F(\zeta)}\zeta^s\} - i \operatorname{Re}\{i\overline{F(\zeta)}\zeta^s\}}{2|F(\zeta)|} |d\zeta| = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\overline{F(\zeta)}}{|F(\zeta)|} \zeta^s |d\zeta| = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \overline{\arg F(\zeta)} \zeta^s |d\zeta|. \end{aligned}$$

2. Найти функцию $F(z) \in H$, минимизирующую функционал $L(F)$ при условии, что $F(z)$ удовлетворяет условиям 2.1) или 2.2).

Решение. Рассмотрим сначала условия 2.1). Введем многочлены

$$P(z) = \prod_{k=1}^n (z - \gamma_k), \quad Q(z) = P(z) \prod_{k=0}^n \frac{\Delta_k}{P'(\gamma_k)(z - \gamma_k)}, \quad \Delta_k = F(\gamma_k), \quad \{|\gamma_k|\}_0^n < 1.$$

Очевидно $Q(\gamma_k) = \Delta_k$. Пусть $f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s z^s \in H$, $c_s = p_s + iq_s$, $F(z) = Q(z) + P(z)f(z)$. Имеем

$$L(F) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |Q(\zeta) + P(\zeta)f(\zeta)| |d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(\zeta)| \left| \frac{Q(\zeta)}{P(\zeta)} + f(\zeta) \right| d\theta, \quad \zeta = e^{i\theta}.$$

Известно (7), что существует единственная экстремальная функция $\tilde{f}(z) \in H$, осуществляющая в метрике пространства $L^1(0, 2\pi)$ наилучшее взвешенное с весом $|P(\zeta)|$ приближение заданной функции $-Q(\zeta)/P(\zeta)$. Введенная функция $F(z)$ минимизирует $L(F)$. Необходимые условия экстремума $L(F)$ таковы: $\frac{\partial L(F)}{\partial p_s} = \frac{\partial L(F)}{\partial q_s} = 0$. Эти условия в силу (5)

эквивалентны условиям:

$$\frac{\partial L(F)}{\partial c_s} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \overline{\arg F(\zeta)} P(\zeta) \zeta^s |d\zeta| = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда следует (см. (5), с. 97, 100), что п. в. на Γ

$$\zeta^{-1} \overline{\arg F(\zeta)} P(\zeta) := \varphi(\zeta) \in H.$$

Для функции $R(z) = F(z)[P^*(z)]^2 \in H$ будем иметь при $\zeta \in \Gamma$

$$\overline{\arg R(\zeta)} = \overline{\arg F(\zeta)} \frac{|P^*(\zeta)|^2}{|P^*(\zeta)|^2} = \zeta^{-n-1} \overline{\arg F(\zeta)} \frac{P(\zeta)}{P^*(\zeta)}, \quad \zeta^n \overline{\arg R(\zeta)} = \zeta^{-1} \frac{P(\zeta)}{P^*(\zeta)} \overline{\arg F(\zeta)}.$$

Так как $\varphi(z) \in H$, $|P^*(z)| \geq C_0 > 0$ при $|z| \leq 1$, то $\frac{\varphi(z)}{P^*(z)} \in H$ и даже

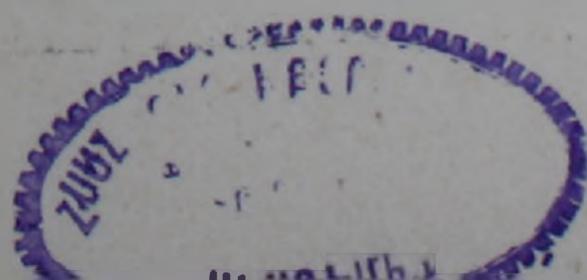
$\frac{\varphi(z)}{P^*(z)} \in S$, ибо п. в. на Γ $1 = |\zeta^n \overline{\arg R(\zeta)}| = |\varphi(\zeta)/P^*(\zeta)|$. По лемме 1 имеем

для $|z| < 1$

$$R(z) = Cr^2(z)\tau(z)\tau^*(z), \quad F(z) = \frac{R(z)}{[P^*(z)]^2} = C \left[\frac{r(z)}{P^*(z)} \right]^2 \tau(z)\tau^*(z), \quad (10)$$

причем $R(\gamma_k) = F(\gamma_k)[P^*(\gamma_k)]^2 = \Delta_k [P^*(\gamma_k)]^2 = \delta_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Таким образом решение поставленной экстремальной задачи существует.



ует, оно единственное, (10) — его необходимая форма; следовательно, существует единственный многочлен $R(z)$ степени $\leq 2n$, имеющий форму (1) и удовлетворяющий условиям 2.1).

Для решения экстремальной задачи при условии 2.2) введем многочлены $P(z) = z^{n+1}$, $Q(z) = \sum_{k=0}^n \mu_k z^k$, величины $\{\mu_k\}_0^n$ заданы. Рассмотрим и теперь прежний вид функции $F(z)$. Повторяем прежние рассуждения и приходим к решению задачи Какейя при условии 2.2).

Приведенный метод доказательства теоремы Какейя представляет, как нам кажется, интерес также потому, что он устанавливает тождественность между многочленами определенного вида и видом экстремальных функций из класса H , на которых реализуется мини-

мум функционала $L(F) = \int_0^{2\pi} |F(e^{i\theta})| d\theta$ при условиях 2.1) и 2.2).

Харьковский ордена В. И. Ленина
авиационный институт им. Н. Е. Жуковского

Р. Л. ԳՈՒԻՆՍԿԻ

Մի էքստրեմալ խնդրի մասին և Կակեյայի թեորեմը

Ապացուցված է հետևյալ թեորեմը: Գոյութիւն ունի $2n$ -ից ոչ ավել աստիճանի միակ $R(z)$ բազմանդամ, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

1. $R(z)$ -ը թույլ է տալիս հետևյալ ներկայացումը
 $R(z) = \text{const}^2(z) \tau(z) \tau^*(z)$, որտեղ՝

$$r(z) = \prod_{k=1}^m (1 - \bar{\alpha}_k z), \quad \{|\alpha_k|\}_1^m < 1,$$

$$\tau(z) = \prod_{i=1}^{\nu} (z - \beta_i), \quad \{|\beta_i|\}_1^{\nu} \leq 1, \quad \tau^*(z) = z^{\nu} \bar{\tau}\left(\frac{1}{z}\right), \quad m + \nu = n:$$

2. $R(z)$ -ը բավարարում է հետևյալ պայմաններից մեկին՝

- 2.1) $R(\gamma_k) = \delta_k$ $|\gamma_k| < 1$, γ_k և δ_k -ն ($k=0, 1, \dots, n$) տված են

- 2.2) $R(z) = \mu_0 + \mu_1 z + \dots + \mu_n z^n + \alpha^{n+1} z^{n+1} + \dots + \alpha_{2n} z^{2n}$

μ_k — գործակիցները տված են:

Այս թեորեմը առաջին անգամ տոպոլոգիական մեթոդով ապացուցել է Կակեյան: 2.2) պայմանի դեպքում այս թեորեմի ոչ ուղիղ ապացույց տրված է Ֆ. Ռիսի, Ս. Տակենակի, Գ. Մ. Գոլուզինի և ուրիշների կողմից:

Հոդվածում ևս բերված է այս թեորեմի ոչ ուղիղ ապացույցի մի մեթոդ, որը սակայն նույնն է 2.1) և 2.2) դեպքերի համար և, ինչպես մեզ թվում է, պարզ է վերևում նշված հեղինակների մեթոդներից:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ S. Kakaya, Trans. Amer. Math. Soc., v. 22, 489—504 (1922). ² F. Riesz, Acta Math., B. 42, 145—171 (1920). ³ S. Takenaka, Jap. Journ. of Math, v. 11, 47—50 (1925). ⁴ Г. М. Голузин, Мат. сб., т. 16 (58), 295—305 (1945). ⁵ И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, Гонти, М.—Л., 1950. ⁶ В. И. Смирнов, Журн. Ленинград. физ-мат. о-ва, т. 2 (2), 22—37 (1928). ⁷ С. Я. Хавинсон, Уч. зап. МГУ, вып. 148, Математика, т. IV, 133—143 (1951).

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

А. С. Парсаданян

Унитарные совокупности операторов и их аналитическая характеристика в пространстве $L_2(a, b)$.

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 17/VI 1982)

В работе (1) М. М. Джрбашяном введено понятие унитарной пары операторов в абстрактном гильбертовом пространстве H , которое является качественно новым обобщением понятия унитарного оператора. Там же дана их аналитическая характеристика в гильбертовом пространстве функций $L_2(a, b)$, и в качестве специального случая известная теорема Бохнера.

В настоящей работе получены аналогичные результаты для унитарной совокупности операторов.

1. Пусть в абстрактном гильбертовом пространстве H определены n линейных ограниченных операторов U_1, U_2, \dots, U_n с областями значений $\Delta_k = U_k H \subseteq H$ ($k=1, 2, \dots, n$) и пусть $U_1^*, U_2^*, \dots, U_n^*$ — соответствующие сопряженные операторы.

Конечное множество операторов $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ назовем унитарной совокупностью, если для произвольных f и g из H выполняются условия

$$(U_k^* f, U_j^* g) = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ (f, g), & k = j \end{cases} \quad (k, j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (n \geq 2); \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n (U_k f, U_k g) = (f, g), \quad (2)$$

где (f, g) — скалярное произведение пространства H .

Класс всех таких унитарных совокупностей обозначим через $U^{(n)}(H)$. Легко видеть, что условия (1) и (2) соответственно эквивалентны следующим:

$$U_k U_j^* = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases} \quad (k, j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (n \geq 2); \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n U_k^* U_k = I, \quad (4)$$

где 0 — нулевой, а I — единичный операторы H .

Докажем следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $\{U_1, U_2, \dots, U_n\} \in U^{(n)}(H)$. Тогда

1°) операторы $P_k = U_k^* U_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) осуществляют проек-

тирование пространства H на подпространства $H_k (k=1, 2, \dots, n)$, так что

$$\sum_{k=1}^n \oplus H_k = H;$$

2°) для любых элементов f и g из $\Delta_n = U_n H$ справедливо равенство

$$(U_n^* f, U_n^* g) = (f, g).$$

Доказательство. В самом деле, по (3) имеем

$$P_k^* = P_k (k=1, 2, \dots, n), \quad P_k P_j = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases} \quad (k, j=1, 2, \dots, n-1), \quad (5)$$

т. е. $P_k (k=1, 2, \dots, n-1)$ — ортопроекторы, отображающие пространство H на некоторые подпространства $H_k (k=1, 2, \dots, n-1)$. В силу (5) подпространства $H_k (k=1, 2, \dots, n-1)$ попарно ортогональны и, следовательно, оператор $\sum_{k=1}^{n-1} P_k$ проектирует пространство H на под-

пространство $\sum_{k=1}^{n-1} \oplus H_k$ (см. (*), с. 285—289).

Оператор $P_n = I - \sum_{k=1}^{n-1} P_k$ — также проекционный и отображает пространство H на подпространство $H_n = H \ominus \sum_{k=1}^{n-1} \oplus H_k$ и, следовательно, пункт 1° доказан.

Так как $I = \sum_{k=1}^n P_k$, то, имея в виду (5), для произвольных элементов F и G из H имеем

$$(F, G) = \left(\sum_{k=1}^n P_k F, \sum_{k=1}^n P_k G \right) = \sum_{k=1}^n (P_k F, P_k G).$$

Пользуясь (1) и (2), получим

$$(U_n^* U_n F, U_n^* U_n G) = (U_n F, U_n G),$$

и так как $f = U_n F \in \Delta_n$, $g = U_n G \in \Delta_n$ произвольны, то наше утверждение доказано.

Лемма 2. Пусть линейные ограниченные операторы $U_k (k=1, 2, \dots, n-1)$ удовлетворяют условиям (1). Тогда существует линейный ограниченный оператор U_n (единственный среди положительных и самосопряженных операторов) такой, что $\{U_1, U_2, \dots, U_n\} \in U^{(n)}(H)$.

Доказательство. Действительно, при условии (3) операторы

$$P_k = U_k^* U_k (k=1, 2, \dots, n-1), \quad P_n = I - \sum_{k=1}^{n-1} P_k$$

являются попарно ортогональными проекционными операторами. Следовательно

$$P_n^2 = P_n, \quad P_n^* = P_n, \quad (P_n f, f) = (P_n^2 f, f) = (P_n f, P_n f) \geq 0,$$

т. е. оператор P_n самосопряженный и положительный. А это значит, что существует единственный положительный самосопряженный квадратный корень $U_n = P_n^{\frac{1}{2}}$ (см. (2), с. 284). Оператор U_n будет искомым.

Таким образом, если операторы $U_k (k=1, 2, \dots, n-1)$ не унитарны, то при условии (3) допускают „пополнение“ в совокупности посредством другого оператора U_n , составляющего совместно с ними унитарную совокупность.

2. Обозначим через $L_2(a, b)$ пространство всех измеримых и суммируемых с квадратом модуля на (a, b) функций, где $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Для пары функций $f(x)$ и $g(x)$ из $L_2(a, b)$ определим скалярное произведение

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

и норму $\|f\|$ элемента $f \in L_2(a, b)$ как $\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}}$.

Известно, что множество функций $L_2(a, b)$ с принятым нами определением скалярного произведения представляет собой полное сепарабельное гильбертово пространство.

Определим функцию $l_\zeta(x)$, зависящую от параметра $\zeta \neq 0$, следующим образом:

$$l_\zeta(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \zeta) \\ 0, & x \notin [0, \zeta) \end{cases} \quad \zeta > 0, \quad l_\zeta(x) = \begin{cases} -1, & x \in [\zeta, 0) \\ 0, & x \notin [\zeta, 0) \end{cases} \quad \zeta < 0, \quad (6)$$

и с целью упрощения формулировок предположим, что $x=0$ есть внутренняя или граничная точка интервала (a, b) .

В следующей теореме дается аналитическая характеристика унитарных совокупностей операторов, действующих в пространстве $L_2(a, b)$.

Теорема 1. Любой унитарной совокупности операторов $\{U_1, U_2, \dots, U_n\} \in U^{(n)}(H)$, действующей в пространстве $H = L_2(a, b)$ соответствуют $2n$ функций

$$K_k(\zeta, x) = U_k l_\zeta(x), \quad K_k^*(\zeta, x) = U_k^* l_\zeta(x), \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

принадлежащих этому пространству при каждом фиксированном $\zeta \in (a, b)$ и обладающих тем свойством, что соответствие

$$g_k = U_k f \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad f = \sum_{k=1}^n U_k^* g_k \quad (8)$$

осуществляется посредством формул

$$\int_0^\zeta g_k(x) dx = \int_a^b \overline{K_k^*(\zeta, x)} f(x) dx \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (9)$$

$$\int_0^\zeta f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_a^b \overline{K_k(\zeta, x)} g_k(x) dx. \quad (10)$$

Кроме того, функции (7) удовлетворяют условиям:

$$а) \sum_{k=1}^n \int_a^b \overline{K_k(\zeta, x)} K_k(\eta, x) dx = \int_a^b l_\zeta(x) l_\eta(x) dx = \begin{cases} \min(|\zeta|, |\eta|), & \zeta\eta \geq 0; \\ 0, & \zeta\eta < 0; \end{cases}$$

$$б) \int_a^b K_k^*(\zeta, x) K_j^*(\eta, x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ \int_a^b l_\zeta(x) l_\eta(x) dx, & k = j \end{cases} \quad (k, j = 1, 2, \dots, n-1);$$

$$в) \int_0^\eta K_k(\zeta, x) dx = \int_0^\zeta \overline{K_k^*(\eta, x)} dx \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Обратно, всякие $2n$ функций $K_k(\zeta, x)$, $K_k^*(\zeta, x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), обладающие свойствами а), б) и в), порождают согласно формулам (9) и (10) некоторую унитарную совокупность операторов $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$, связанную с этими функциями формулами (7).

Доказательство первой половины теоремы. Пусть справедливы (7) и (8). Тогда легко видеть, что

$$(g_k, l_\zeta) = (U_k f, l_\zeta) = (f, U_k^* l_\zeta) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

$$(f, l_\zeta) = \left(\sum_{k=1}^n U_k^* g_k, l_\zeta \right) = \sum_{k=1}^n (U_k^* g_k, l_\zeta) = \sum_{k=1}^n (g_k, U_k l_\zeta),$$

из которых следует формула (9) и (10).

Докажем, что функции (7) удовлетворяют также условиям а), б) и в). Пусть $f = l_\eta$, тогда $g_k = U_k l_\eta$ ($k = 1, 2, \dots, n$). В силу (2) и (8) можем написать

$$\begin{aligned} (l_\eta, l_\zeta) &= (f, l_\zeta) = \left(\sum_{k=1}^n U_k^* g_k, l_\zeta \right) = \sum_{k=1}^n (U_k^* g_k, l_\zeta) = \\ &= \sum_{k=1}^n (g_k, U_k l_\zeta) = \sum_{k=1}^n (U_k l_\eta, U_k l_\zeta) \end{aligned}$$

и, пользуясь обозначениями (7), убедимся в истинности а).

Подставляя в (1) $f = l_\eta$, $g = l_\zeta$, будем иметь

$$(U_k^* l_\eta, U_j^* l_\zeta) = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ (l_\eta, l_\zeta) & k = j \end{cases} \quad (k, j = 1, 2, \dots, n-1).$$

Пользуясь обозначениями (7), получаем б).

Из определения сопряженного оператора имеем, что

$$(U_k l_\zeta, l_\eta) = (l_\zeta, U_k^* l_\eta) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

и имея в виду также (7), получаем в).

Доказательство второй половины теоремы. Определим операторы U_k и V_k ($k = 1, 2, \dots, n$) следующим образом:

$$K_k(\zeta, x) = U_k l_\zeta(x), \quad K_k^*(\zeta, x) = U_k^* l_\zeta(x) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Условия а), б) и в) нам дают

$$a') \sum_{k=1}^n (U_k l_\eta, U_k l_\zeta) = (l_\eta, l_\zeta);$$

$$б') (V_k l_\eta, V_j l_\zeta) = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ (l_\eta, l_\zeta), & k = j \end{cases} \quad (k, j = 1, 2, \dots, n-1);$$

$$в') (U_k l_\zeta, l_\eta) = (l_\zeta, V_k l_\eta) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Пусть теперь $f(x)$ — какая-нибудь ступенчатая функция. Ее можно представить, причем единственным образом, в виде линейной комбинации функции $l_\zeta(x)$. Тогда $U_k f$ и $V_k f$ можно будет определить как линейные комбинации соответствующих $U_k l_\zeta$ и $V_k l_\zeta$, взятых с теми же коэффициентами. Соотношения а'), б') и в') распространяются при этом на произвольные ступенчатые функции f и g :

$$a'') \sum_{k=1}^n (U_k f, U_k g) = (f, g);$$

$$б'') (V_k f, V_j g) = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ (f, g), & k = j \end{cases} \quad (k, j = 1, 2, \dots, n-1);$$

$$в'') (U_k f, g) = (f, V_k g) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Поскольку $L_2(a, b)$ полно и множество ступенчатых функций плотно в $L_2(a, b)$, то с помощью а''), б'') и в'') операторы U_k и V_k можно единственным образом распространить на все $L_2(a, b)$. В силу непрерывности скалярного произведения на $L_2(a, b)$ сохраняются формулы а), б) и в). Известно (см. (3)), что если функция $R(\zeta, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_a^b \overline{R(\zeta, x)} R(\eta, x) dx = \int_a^b l_\zeta(x) l_\eta(x) dx, \quad \zeta, \eta \in (a, b)$$

и кроме того полна, т. е. из

$$\int_a^b R(\zeta, x) \overline{f(x)} dx = 0, \quad \zeta \in (a, b),$$

где $f(x) \in L_2(a, b)$, следует, что $f(x) \equiv 0$, то $R(\zeta, x)$ является ядром некоторого унитарного оператора.

При снятии условия полноты ядер $K_k^*(\zeta, x)$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) из утверждения б) согласно теореме 1 следует:

Теорема 2. Пусть функции $K_k^*(\zeta, x)$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\int_a^b \overline{K_k^*(\zeta, x)} K_j^*(\eta, x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ \int_a^b l_\zeta(x) l_\eta(x) dx, & k = j \end{cases} \quad (k, j = 1, 2, \dots, n-1).$$

Тогда существуют единственные функции $K_k(\zeta, x)$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) и функции $K_n(\zeta, x)$, $K_n^*(\zeta, x)$, которые совместно с функциями $K_k^*(\zeta, x)$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) удовлетворяют условиям а) и в) теоре-

мы 1, порождая, таким образом, некоторую унитарную совокупность операторов $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ в $L_2(a, b)$, согласно формулам (9) и (10).

Функции $K_n(\zeta, x)$ и $K_n^*(\zeta, x)$ также единственны при условии

$$K_n^*(\zeta, x) \equiv K_n(\zeta, x).$$

Эту теорему можно рассматривать как решение вопроса о дополнении в совокупности конечного числа неполных попарно ортогональных ядер.

В заключение выражаю благодарность академику АН АрмССР М. М. Джрбашяну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Кафанский отдел Вычислительного центра
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ս. ՓԱՐՍԱԴԱՆՅԱՆ

Օպերատորների ունիտար համախմբություններ և նրանց անալիտիկ բնութագրությունը $L_2(a, b)$ -ում

Ներկա աշխատանքում մտցվում է օպերատորների ունիտար համախմբություն հասկացությունը հիլբերտյան տարածություններում: Ստացված են ունիտար զույգերի $L_2(a, b)$ -ում անալիտիկ բնութագրության վերաբերյալ Մ. Ս. Ջրբաշյանի թեորեմին անալոգ արդյունքներ ունիտար համախմբությունների համար: Ապացուցված է նաև թեորեմ, որով լուծվում է վերջավոր թվով ոչ լրիվ, զույգ առ զույգ օրթոգոնալ կորիզների ըստ համախմբության լրիվացման հարցը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ М. М. Джрбашян, ДАН СССР, т. 141, № 2 (1961). ² Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, Мир, М., 1979. ³ М. М. Джрбашян, Р. М. Мартиросян, ДАН СССР, т. 132, № 5 (1960).

УДК 539.376

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

С. Е. Мирзоян, С. М. Мхитарян

К задаче контактного взаимодействия между тонкостенным включением конечной длины и плоскостью, находящимися в условиях ползучести

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 24/VI 1982)

Контактные задачи о взаимодействии тонкостенных включений с массивными телами довольно хорошо изучены ⁽¹⁾. Исследование таких задач в постановке теории ползучести с учетом фактора неоднородного старения материалов контактирующих пар сопряжено с значительными трудностями аналитического и вычислительного характера.

В настоящей работе в постановке теории ползучести неоднородно стареющих сред ^(2,3) рассматривается задача о контактном взаимодействии между тонкостенным включением конечной длины и плоскостью, материалы которых разновозрастны и обладают различными вязкоупругими характеристиками. Дана постановка задачи и выведены основные уравнения. При этом использованы результаты работ ^(4,5).

1. Пусть однородная плоскость на конечном отрезке оси Ox $[-a, a]$ усилена включением малой толщины h и в точках $z_k = x_k + iy_k$ ($k=1, 2, \dots, N, z_k \neq \pm a$) действуют сосредоточенные силы $P_k = X_k + iY_k$ и, кроме того, на бесконечности в направлениях осей Ox и Oy действуют сжимающие силы интенсивности p и q соответственно. В условиях плоской деформации требуется определить контактные напряжения на участке соединения включения с плоскостью и осевые усилия на концах включения, если включение и плоскость имеют разные вязкоупругие характеристики и возрасты.

Включение будем трактовать как стержень или тонкую пластину, причем согласно ⁽⁶⁾ примем $1 + h^2/a^2 \approx 1$. Принимаем также, что жесткость включения на изгиб пренебрежимо мала, но ее жесткость на растяжение $E_s(t)$ — величина конечная.

При этих предположениях для включения получим

$$\varepsilon_x^{(1)}(x, t) = \frac{1}{E_s(t)} \left[N_1(t) - \int_{-a}^x \tau_s(s, t) ds \right] \quad (-a < x < a); \quad (1.1)$$

$$\tau_s(x, t) = \tau_+(x, t) - \tau_-(x, t), \quad E_s(t) = E_1(t)h/(1 - \nu_1^2).$$

Условие равновесия включения имеет вид

$$\int_{-a}^a \tau_s(s, t) ds = N_1(t) - N_2(t), \quad (1.2)$$

где $N_1(t)$ и $N_2(t)$ неизвестные осевые усилия на концах включения. Для перемещений точек берегов включения имеем ⁽⁷⁾

$$u_1\left(x, \pm \frac{h}{2}\right) = u_1(x, 0) \mp \frac{h}{2} \frac{dv_1(x, 0)}{dx}, \quad v_1\left(x, \pm \frac{h}{2}\right) = v_1(x, 0), \quad |x| < a, \quad (1.3)$$

где $u_1(x, 0)$ и $v_1(x, 0)$ перемещения точек срединной линии включения.

В задаче принимается условие совместности горизонтальных деформаций включения и однородной плоскости с щелью $[-a, a]$, нагруженной по берегам щели нормальными и горизонтальными силами интенсивностей $-q_{\pm}(x, t)$ и $-\tau_{\pm}(x, t)$, исходными сосредоточенными силами и силами на бесконечности. Отметим, что величины с индексом $+$ и $-$ относятся к верхней и нижней полуплоскостям соответственно.

Перемещения же граничных точек верхней и нижней полуплоскостей согласно ⁽⁸⁾ имеют вид

$$u_{\pm}^{\pm}(x, t) = \mp \frac{x+1}{4\pi\mu_2(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{|x-s|} \tau_{\pm}(s, t) ds - \frac{x-1}{8\mu_2(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x-s) q_{\pm}(s, t) ds \mp f_{\pm}(x, t) \quad (1.4)$$

$$v_{\pm}^{\pm}(x, t) = \pm \frac{x+1}{4\pi\mu_2(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{|x-s|} q_{\pm}(s, t) ds - \frac{x-1}{8\mu_2(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x-s) \tau_{\pm}(s, t) ds \mp g_{\pm}(x, t) \\ (-\infty < x < \infty).$$

Здесь $f_{\pm}(x, t)$ и $g_{\pm}(x, t)$ перемещения граничных точек полуплоскостей от приложенных к ним сосредоточенных сил и сил на бесконечности.

Условия непрерывности компонентов перемещений берегов включения и плоскости с учетом ползучести имеют вид:

$$(1-L_1)u_1\left(x, \pm \frac{h}{2}\right) = (1-L_2)u_{\pm}^{\pm}(x, 0) \\ (1-L_1)v_1\left(x, \pm \frac{h}{2}\right) = (1-L_2)v_{\pm}^{\pm}(x, 0) \quad (-a < x < a). \quad (1.5)$$

Здесь

$$L_i | Y(t) | = \int_{\tau_0}^t E_i^*(u) K_i(t + \rho_i, u + \rho_i) Y(u) du; \\ K(t, u) = \frac{\partial}{\partial u} \left[E^{-1}(u) + \varphi(u) (1 - e^{-\tau(t-u)}) \right]; \quad (1.6)$$

$$\varphi(u) = C_0 + \frac{A_1}{u}, \quad E_i^*(t) = E_i(t + \rho_i), \quad \rho_i = \tau_i - \tau_0, \quad (i=1, 2);$$

$\tau_i (i=1, 2)$ — возрасты включения и плоскости соответственно.

Из условия (1.5) с учетом (1.1) — (1.4) после некоторых несложных преобразований относительно скачка тангенциальных напряжений на берегах включения получим сингулярное интегро-дифференциальное уравнение следующего вида:

$$(1-L_2) \frac{1}{\pi E_2^*(t)} \int_{-1}^1 \frac{\varphi'(\eta, t) d\eta}{\eta - \xi} = \lambda(1-L_1) \frac{\varphi(\xi, t)}{E_1^*(t)} + h_0(\xi, t), \quad (|\xi| < 1) \quad (1.7)$$

$$\int_{-1}^1 \tau(\eta, t) d\eta = N_1(t) - N_2(t), \quad (1.8)$$

где

$$\varphi(\xi, t) = \int_{-1}^{\xi} \tau(\eta, t) d\eta = \int_{-1}^{\xi} a\tau_s(a\eta, t) d\eta,$$

$$h_0(\xi, t) = -\lambda(1-L_1) \frac{N_1(t)}{E_1^*(t)} - \frac{(x-1)a}{2\pi(1+\nu_2)x} (1-L_2)G(a\xi, t) + \\ + \frac{(x+1)a}{x(1+\nu_2)} (1-L_2)f'(a\xi, t),$$

$$G(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g'(s, t) ds}{s-x}, \quad g'(x, t) = \frac{d}{dx} [g_+(x, t) - g_-(x, t)],$$

$$f'(x, t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [f_+(x, t) + f_-(x, t)], \quad \lambda = \frac{(1-\nu_1^2)(x+1)a}{(1+\nu_2)xh}, \quad x = 3-4\nu_2$$

Отметим, что после того, как решено (1.7) — (1.8), нормальные контактные напряжения на берегах включения определяются по формуле

$$\bar{q}(\xi, t) = -\bar{\lambda}(t)(1+R_2)(1-L_1) \frac{\varphi(\xi, t) - N_1(t)}{E_1^*(t)} + \bar{\mu}(t)G(a\xi, t) - \bar{\nu}(t)f'(a\xi, t), \quad (|\xi| < 1) \quad (1.9)$$

где

$$\bar{\lambda}(t) = \frac{(x-1)(1-\nu_1^2)aE_2^*(t)}{2x(1+\nu_2)h}, \quad \bar{\mu}(t) = \frac{(x+1)a\mu_2^*(t)}{2\pi x}, \quad \bar{\nu}(t) = \frac{a\mu_2^*(t)(x-1)}{x},$$

$$\bar{q}(\xi, t) = aq(a\xi, t), \quad \mu_2^*(t) = \mu_2(t + \rho_2), \quad \mu_2(t) = \frac{E_2(t)}{2(1+\nu_2)},$$

а на всей вещественной оси — формулой

$$\bar{q}(\xi, t) = -\frac{x-1}{2\pi(x+1)} \int_{-1}^1 \frac{\tau(\eta, t) d\eta}{\eta - \xi} + \frac{2\mu_2^*(t)a}{\pi(x+1)} G(a\xi, t), \quad (|\xi| < \infty), \quad (1.10)$$

так как $q_+(x, t) = q_-(x, t) = q(x, t)$ при $-\infty < x < \infty$.

В результате сопоставления определяющих соотношений (1.1)–(1.5) получим еще одно сингулярное интегро-дифференциальное уравнение, откуда определяется скачок $\varphi_*(x, t)$ горизонтальных перемещений берегов щели по отрезку $[-a, a]$ в однородной плоскости

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Psi'(\eta, t) d\eta}{\eta - \xi} = \lambda_* \Psi(\xi, t) + F_*(\xi, t) \quad (|\xi| < 1), \quad (1.11)$$

$$\Psi(-1, t) = \Psi(1, t) = 0, \quad (1.12)$$

где

$$\Psi(\xi, t) = \int_{-1}^{\xi} \varphi'_*(a\eta, t) d\eta, \quad F_*(\xi, t) = F(a\xi, t), \quad \lambda_* = \frac{2a(x+1)}{(x-1)h},$$

$$F(x, t) = (1 - L_2) \left[\frac{2(x+1)}{x-1} g'_0(x, t) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'_0(s, t) ds}{s-x} \right],$$

$$g'_0(x, t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [g_+(x, t) + g_-(x, t)], \quad f'_0(x, t) = \frac{d}{dx} [f_+(x, t) - f_-(x, t)].$$

После решения (1.11)–(1.12) сумма тангенциальных контактных напряжений определится по формуле

$$T(x, t) = T(a\xi, t) = \frac{8\mu_2^*(t)a}{(x-1)h} (1 + R_2) \Psi(\xi, t) + \frac{8\mu_2^*(t)}{x-1} g'_0(a\xi, t), \quad (|\xi| < 1), \quad (1.13)$$

на вещественной оси — формулой

$$T(a\xi, t) = \frac{4\mu_2^*(t)}{\pi(x+1)} (1 + R_2) \int_{-1}^1 \frac{\varphi'_*(a\eta, t) d\eta}{\eta - \xi} - \frac{4\mu_2^*(t)}{\pi(x+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'_0(a\eta, t) d\eta}{\eta - \xi}, \quad (|\xi| < \infty), \quad (1.14)$$

где $R_2(t + \rho_2, u + \rho_2)$ — резольвента ядра $E_2^*(u)K_2(t + \rho_2, u + \rho_2)$.

Неизвестные осевые усилия $N_1(t)$ и $N_2(t)$ определяются из условия

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(-a, y) dy = -N_1(t), \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(a, y) dy = -N_2(t), \quad (1.15)$$

где $\sigma_x(x, y)$ — горизонтальный компонент поля напряжений в плоскости с щелью $[-a, a]$, вызванного силами $P_k, p, q, -q_{\pm}(x, t), -\tau_{\pm}(x, t)$.

Отметим, что в изложенной постановке задачи существенно использовано свойство тонкостенности включения. А именно, поскольку $h^2/a^2 \ll 1$, то, как в (6), условия непрерывности перемещений и напряжений на длинных сторонах включения удовлетворяются точно, а на его коротких сторонах — лишь интегрально. Последнее и приводит к условиям (1.15), откуда определяются осевые усилия на концах включения.

2. Решение уравнения (1.7)–(1.8) ищем в виде

$$\tau(\xi, t) = \varphi'(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) T_n(\xi), \quad (|\xi| < 1). \quad (2.1)$$

Далее известным способом получим бесконечную систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$(1-L_2)y_m(t) + (1-L_1) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_0(t) K_{m,n} y_n(t) = (1-L_1) \lambda_0(t) y_0(t) b_m(t) + H_{0,m}(t), \quad (m=1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

где

$$K_{m,n} = \frac{2}{\pi n} \int_{-1}^1 (1-\xi^2) U_{m-1}(\xi) U_{n-1}(\xi) d\xi, \quad b_m = \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{2}{\pi} \arcsin \xi \right) \sqrt{1-\xi^2} U_{m-1}(\xi) d\xi$$

$$H_{0,m}(t) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2} U_{m-1}(\xi) h_0(\xi, t) d\xi, \quad y_m(t) = \frac{x_m(t)}{E_2^*(t)}, \quad y_0(t) = \frac{N_1(t) - N_2(t)}{\pi E_2^*(t)}$$

$$\lambda_0(t) = \lambda \frac{E_2^*(t)}{E_1^*(t)}.$$

Аналогичным образом из (1.11)—(1.12) получим бесконечную систему следующего вида

$$z_m(t) + \lambda_* \sum_{n=1}^{\infty} K_{m,n} z_n(t) = a_m(t), \quad z_0(t) = 0, \quad (2.3)$$

где

$$a_m(t) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 F_*(\xi, t) \sqrt{1-\xi^2} U_{m-1}(\xi) d\xi, \quad (m=1, 2, \dots).$$

3. Исследуем теперь регулярность бесконечных систем (2.2) и (2.3). Введем в рассмотрение вещественное пространство всех ограниченных последовательностей непрерывных функций m_e , определенных на отрезке $[\tau_0, T]$, т. е.

$$y(t) = \{y_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \in m_e, \quad \text{если } |y_n(t)| \leq M_x, \quad \text{при всех } n \text{ и } t$$

Расстояние между двумя точками m_e введем формулой

$$\rho(x, y) = \sup_t \sup_n |x_n(t) - y_n(t)|.$$

Можно доказать, что определенное таким образом расстояние существует и удовлетворяет всем аксиомам метрики, а m_e — полное метрическое пространство ⁽⁹⁾, в котором применительно к данному случаю можно провести принцип неподвижной точки Банаха.

Опуская промежуточные выкладки, запишем условие сжимаемости соответствующего оператора или условие полной регулярности системы (2.2), которое имеет следующий вид ⁽⁹⁾:

$$\sup_m \sum_{n=1}^{\infty} |K_{m,n}| \sup_t \left[\lambda_0(t) + \int_{\tau_0}^t |R_2(t+\rho_2, u+\rho_2)| \lambda_0(u) du \right] + \quad (3.2)$$

$$+ \lambda \sup_m \sup_t \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_0}^t [|G_{m,n}(t, u)| + |R_{m,n}(t, u)|] E_2^*(u) du < 1,$$

где

$$G_{m,n}(t, u) = K_{m,n} \cdot K_1(t+\rho_1, u+\rho_1), \quad R_{m,n} = \int_u^t R_2(t+\rho_2, v+\rho_2) G_{m,n}(v, u) dv.$$

Легко доказать, что при условии $\lambda_* < \sqrt{6}/\pi$ бесконечная система (2.3) будет вполне регулярной.

4. Для определения $N_1(t)$ и $N_2(t)$ имеем систему (1.15), которую после некоторых преобразований можно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a q(s, t) \sqrt{\frac{a+s}{a-s}} ds + \frac{3\tau_s^*(a, t)}{4} + c_1(t) + c_0 a = -N_2(t) \sqrt{a}/\sqrt{2h}; \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a q(s, t) \sqrt{\frac{a-s}{a+s}} ds - \frac{3\tau_s^*(-a, t)}{4} - c_1(t) + c_0 a = -N_1(t) \sqrt{a}/\sqrt{2h},$$

где

$$c_0 = -q/2, \quad c_1(t) = -\frac{(x-1)[N_1(t) - N_2(t)]}{4\pi(x+1)}, \quad \tau_s^*(\pm a, t) = \lim_{\xi \rightarrow \pm 1} \sqrt{1-\xi^2} \varphi'(\xi, t).$$

Подставляя значения $q(x, t)$ и $\tau_s^*(\pm a, t)$ из (1.9) и (2.1) в (4.1), получим систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода, откуда и определяются неизвестные $N_1(t)$ и $N_2(t)$.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ե. ՄԻՐԶՈՅԱՆ, Ս. Մ. ՄԵԻՔԱՐՅԱՆ

Սողի պայմաններում գտնվող բարակապատ վերջավոր երկարության ներդրակի և համասեռ հարթության կոնտակտային փոխազդեցության խնդրի մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է բարակապատ վերջավոր երկարության ներդրակի և համասեռ հարթության կոնտակտային փոխազդեցության խնդիրը, երբ ներդրակը և հարթությունը օժտված են տարբեր առաձգամածուցիկ հատկություններով և ունեն տարբեր հասակներ:

Անհայտ շոշափող լարումների թռիչքի նկատմամբ ստացված է սինգուլյար ինտեգրալ-դիֆերենցիալ և Վոլտերայի ինտեգրալ հավասարումներ: Զերիչևի օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդի օգնությամբ վերջինս բերված է

Վոլտերայի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների անվերջ սիստեմի և հետազոտված է այդ սիստեմի ռեզոլյարուիթյան հարցը: Ստացված է նաև հավասարումների սիստեմ, որտեղից որոշվում են ներդրակի ժայրակետերում առաջացող անհայտ ճիգերը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Развитие теории контактных задач в СССР, Наука, М., 1976. ² Н. Х. Арутюнян, МТТ, № 3 (1976). ³ Н. Х. Арутюнян, Теория ползучести неоднородно-стареющих тел, Изд. ИПМ АН СССР, препринт № 170, М., 1981. ⁴ С. Е. Мирзоян, С. М. Мхитарян, Изв. АН АрмССР. Механика, № 5 (1981). ⁵ С. Е. Мирзоян, в сб.: Исследования по механике твердого деформируемого тела, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1981. ⁶ А. И. Лурье, Теория упругости, Наука, М., 1970. ⁷ В. В. Новожилов, Теория тонких оболочек, Судпромгиз, 1962. ⁸ Н. И. Мухелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Наука, М., 1966. ⁹ Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, Наука, М., 1965.

УДК 547.963.32

БИОХИМИЯ

Дж. В. Гарибян, Г. М. Степанян, И. С. Даниелян,
Ю. С. Бабаян, Б. Т. Гарибджанян, В. М. Асланян**Влияние дексаметазона на ДНК опухолевой ткани**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Галояном 3/III 1982)

К основным признакам, отличающим злокачественно трансформированные клетки от нормальных, относят их дедифференцировку или измененную способность к дифференцировке (^{1,2}). А ведущими регуляторами роста и деления клеток в организме служат, как известно, гормоны, причем они способны стимулировать (или подавлять—в зависимости от концентрации) рост и размножение клеток, усиливать противоопухолевый эффект цитостатиков, а также индуцировать процессы опухолеобразования у животных (^{3,4}). Изменение уровня метилирования ДНК в онтогенезе, выраженные тканевые различия в содержании 5-метилцитозина в ДНК, резкое возрастание минорного основания при опухолеродной трансформации, а также гормональная пост-репликативная индукция (^{1,5-7}) у животных указывают на участие метилирования в клеточной дифференцировке.

Исходя из вышеизложенного мы задались целью выяснить: имеются ли отличия в нуклеотидном составе ДНК двух экспериментальных опухолей, характеризующихся разными морфологическими и биологическими свойствами (карциносаркома Уокера 256, саркома 45) и влияет ли глюкокортикоид дексаметазона на рост, а также на первичную и вторичную структуру ДНК изучаемых штаммов опухолей.

В работе использовали белых беспородных крыс-самцов с начальной массой 90—100 г, которым перевивали вышеуказанные экспериментальные опухоли в асептических условиях стандартными методами путем подкожного введения крысам 5×10^6 клеток. Скорость роста опухолей регистрировали путем ежедневного измерения их объема, а также взвешивания удаленных опухолей у забитых животных. Суспензию дексаметазона, приготовленную на 0,9% NaCl, содержащем твин-80—0,4%, карбоксиметилцеллюлозу—0,5%, бензилалкоголь—0,5%, вводили крысам внутрибрюшинно, начиная с 5-х суток после перевивки опухолей из расчета 25 мкг на 100 г веса животного (всего 8 инъекций). Животных забивали на пятнадцатые сутки после перевивки опухолей. Препараты ДНК выделяли по модифицированному методу Мармура (⁸). Основания разделяли с помощью двукратной восходящей хроматографии на бумаге в системе (бутанол—вода—аммиак 60 : 10 : 0,1) и определяли их количества спектрофотометрически (⁹).

Плавление ДНК проводили по известной методике (10). Кривые плавления получены на спектрофотометре Unicam-SP-8000 (Англия). Кроме того, был осуществлен также переход к дифференциальным кривым плавления (ДКП). Для расчетов использовали ЭВМ ЕС-1022 и ЕС-1030.

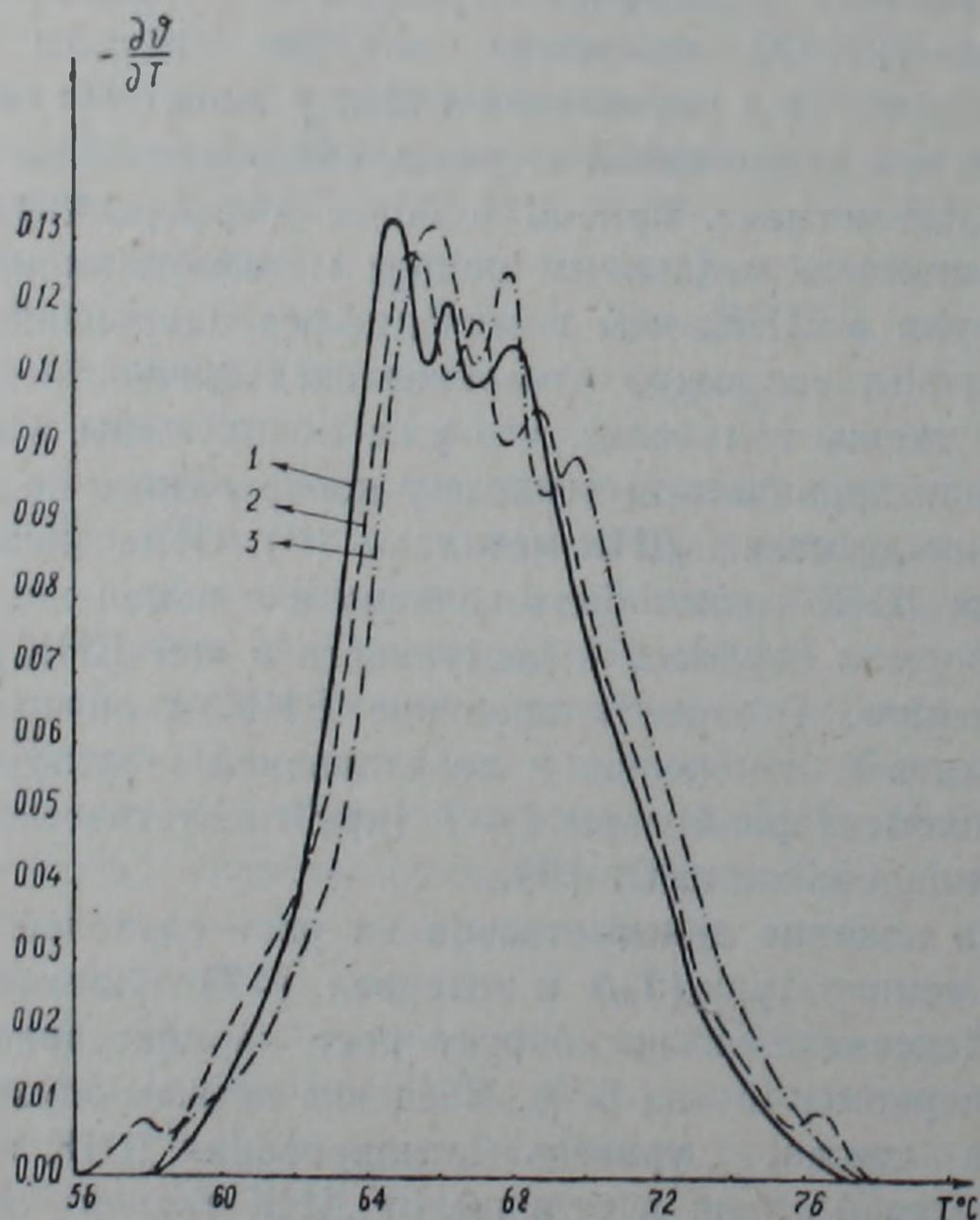
В таблице приведены данные по содержанию известных оснований и 5-метилцитозина в ДНК исследованных опухолей. Эти значения являются средними величинами из 5—9 определений для каждого препарата ДНК. Из таблицы видно, что нуклеотидный состав препаратов ДНК соответствует правилам Чаргаффа. Изученные ДНК принадлежат к АТ-типу, количество (Г+Ц+МЦ) в них составляет 44,1—46,0%.

Содержание ГЦ-пар оснований в препаратах ДНК, выделенных из изученных штаммов опухолей, практически одинаково. Четкое различие между образцами ДНК, полученными из исследованных штаммов опухолей, обнаруживается по содержанию 5-метилцитозина. При рассмотрении изменений в уровне метилирования двух штаммов опухолей привлекает внимание тот факт, что опухоль, отличающаяся более высокой степенью дифференцировки (саркома 45), характеризуется большим содержанием 5-метилцитозина. Выявленные нами изменения степени метилирования двух разных экспериментальных штаммов опухолей могут лежать в основе индуцированного искажения клеточной дифференцировки и быть одной из причин трансформации клеток при разных формах опухолей, так как имеются данные, указывающие на связь метилирования с дифференцировкой и функциональной активностью клеток (11). К сожалению, истинные причины возрастания уровня метилирования в опухолевой ткани у животных еще не известны. Не исключено, что, с одной стороны, оно обусловлено повышением активности ДНК-метиلاз, причем в более дифференцированных опухолях с относительно медленным ростом метилазы включают больше метильных групп в ДНК, чем в малодифференцированных опухолях. С другой стороны, возможно изменение специфичности ДНК-метилаз в опухолевой ткани, тем более, что уже обнаружены в ядре лимфоцитов крови при хроническом лейкозе у коров разные по активности и специфическому действию ДНК-метилазы (11). Отмеченное увеличение метилирования ДНК может быть связано и с изменением хроматина при разных формах опухолей и доступности в нем ДНК для соответствующих метилаз. Гиперметилирование ДНК в опухолевой ткани может приводить к изменению и во вторичной структуре, к образованию некомплементарной пары Г—Т (при гипотетическом ферментативном дезаминировании m^5C) (12).

Изучалось влияние дексаметазона на рост опухолей, уровень метилирования, температуру (T_m) и интервал (ΔT) плавления исследуемых ДНК. Дексаметазон ингибирует рост карциносаркомы Уокера 256 на 82%, саркомы 45—на 57%. Введение крысам-опухоленосителям дексаметазона снижает уровень метилирования ДНК как в печени, так и в опухолевой ткани в отличие от ДНК тканей здоровых животных, у которых наблюдается увеличение содержания 5-метилцитозина при гормональной индукции (таблица), что, по-видимому, можно объяснить тем, что в составе хроматина животной клетки ДНК

потенциально не дометилированы и они могут быть дометилированы *in vivo* под влиянием гормонов (13). Карциносаркома Уокера 256 и саркома 45, имеющие разную степень дифференцировки, реагируют на дексаметазон по-разному. При карциносаркоме Уокера 256 уровень метилирования ДНК снижен в печени меньше ($1,75 \pm 0,015$), чем при саркоме 45 ($1,52 \pm 0,018$), а в самой опухолевой ткани имеется даже повышение степени метилирования под влиянием дексаметазона, что, по-видимому, говорит о чувствительности этого штамма (карциносаркома Уокера 256) к гормонам, так как первоначально опухоль произошла от спонтанно возникшей опухоли молочной железы крысы. Поскольку гормоны проникают в клетку, их влияние на процесс метилирования может быть обусловлен наряду с опосредованным действием также и прямым воздействием на метилазу, ДНК или хроматин, причем, как видно, в гормонозависимых опухолях существует обратная зависимость между уровнем метилирования и угнетением роста опухоли. При саркоме 45 дексаметазон резко ингибирует уровень метилирования ДНК печени и особенно в опухолевой ткани. Таким образом, не исключено, что у животных имеются множественные ДНК-метилазы, обладающие разной активностью и специфичностью действия при разных формах опухолей, и гормоны могут контролировать метилирование ДНК.

Температура (T_m) и интервал (ΔT) плавления исследуемых ДНК



Дифференциальные кривые плавления ДНК: печени (1) здоровых животных, опухоли саркомы 45 (2), карциносаркомы Уокера (3) после воздействия дексаметазона

Нуклеотидный состав ДНК из тканей здоровых и опухоленосящих животных до и после воздействия дексаметазона

Условия опыта	Источник ДНК	Число опреде- лений	Содержание оснований в ДНК, мол. %					Г+Ц+МЦ
			Г	Ц	А	Т	МЦ	
Норма	Печень	6	22,4	20,9	28,1	28,1	1,02±0,022	44,3
Норма: введен дексаметазон	Печень	8	22,5	20,3	27,8	27,5	2,19±0,021	44,9
Животные с КСУ—256	Печень	6	22,5	20,7	28,0	27,9	1,07±0,011	44,2
Животные с КСУ—256:	Опухоль	9	22,9	20,9	28,0	27,8	1,14±0,038	44,9
введен дексаметазон	Печень	6	21,6	20,8	28,2	28,0	1,75±0,015	44,1
	Опухоль	8	22,6	20,9	28,0	27,5	1,49±0,024	44,9
Животные с С—45	Печень	8	22,4	21,0	27,6	27,6	1,39±0,021	44,7
	Опухоль	9	22,9	21,7	28,3	28,8	1,45±0,060	46,0
Животные с С—45:	Печень	5	22,1	20,5	28,1	27,8	1,52±0,018	44,1
введен дексаметазон	Опухоль	7	22,7	21,4	28,3	28,3	1,21±0,024	45,3

Примечание. Различия между средними значениями 5МЦ в идентичных тканях контрольных и опухоленосящих крыс, получивших и не получивших дексаметазон, статистически достоверны ($p < 0,05$).

находятся в интервале $T_m = 66,8 - 67,3^\circ$ и $\Delta T = 6,1 - 6,2^\circ$ соответственно. Заметно отличается интервал плавления для ДНК из карциносаркомы Уокера 256 под действием дексаметазона ($\Delta T = 6,8$), что, по-видимому, указывает на наличие в данной ДНК повышенного количества дефектных участков, содержащих несколько десятков пар оснований.

ДКП исследуемых ДНК состоят из трех хорошо выраженных пиков. Вид ДКП практически одинаков для всех изученных ДНК (рисунки). Как следует из рисунка и таблицы, метилирование приводит к дестабилизации (ДНК сдвигается в сторону низких температур) причем тем сильнее, чем больше содержание m^5C . Одновременно под действием дексаметазона в саркоме 45 почти полностью исчезает характерное для опухолевой ДНК плечо в области $56 - 60^\circ$ (10), тогда как в случае карциносаркомы Уокера 256 это происходит только частично. Вполне возможно, что частичное исчезновение низкотемпературного плеча обусловлено разницей в метилировании этих ДНК. Следовательно, в ДНК опухоли возрастает количество минорного основания 5-метилцитозина и это аномальное метилирование обратимо под влиянием гормона, в частности дексаметазона. Кроме того, частично восстанавливаются характеристики кривой плавления этих ДНК. Установленный факт контроля метилирования ДНК гормонами представляет существенный интерес, так как эта ферментная модификация в итоге может приводить к ошибкам в репликации транскрипции и трансляции, т. е. гибели или злокачественной трансформации клеток.

Институт тонкой органической химии
Академии наук Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Ջ. Վ. ՂԱՐԻՔՅԱՆ, Հ. Մ. ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ, Ի. Ս. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ, ՅՈՒ. Ս. ԲԱԲԱՅԱՆ,
Բ. Տ. ՂԱՐԻՔՂԱՆՅԱՆ, Վ. Մ. ԱՍԼԱՆՅԱՆ

Դեֆսամետազոնի ազդեցությունը ուռուցքային հյուսվածքի ԴՆԹ-ի վրա

Ուսումնասիրվել է տարբեր մորֆոլոգիական և կենսաբանական հատկություն ունեցող երկու փորձնական ուռուցքների (Ուտկերի կարցինոսարկոմա և սարկոմա 45) ԴՆԹ-ների նուկլեոտիդային կազմը, ինչպես նաև դեֆսամետազոնի ազդեցությունը նշված ուռուցքների աճի և նրանց ԴՆԹ-ների առաջնային ու երկրորդային կառույցի վրա:

Հաստատվել է, որ երկու ուռուցքային շտամներից անչատված ԴՆԹ-ների պրեպարատներում պարունակվող հիմքերի ԳՑ-զույգերը գործնականորեն միատեսակ են: Դիտվում է միայն 5-մեթիլցիտոզինի պարունակության տարբերություն:

Պարզվել է նաև, որ դեֆսամետազոնը 250 մկգ/կգ դոզայով ճնշում է Ուտկերի կարցինոսարկոմայի աճը 82, իսկ սարկոմա 45-ինը՝ 57 տոկոսով: Ուտկերի կարցինոսարկոմայի ուռուցքի ԴՆԹ-ի մեթիլացման մակարդակը դեֆսամետազոնի ազդեցության տակ ավելանում է, մինչդեռ սարկոմա 45-ի դեպքում զգալի ճնշվում է ինչպես լյարդի, այնպես էլ ուռուցքի ԴՆԹ-ի մեթիլացման մակարդակը: Դեֆսամետազոնը տարբեր ձևով է ազդում նաև հետազոտվող ԴՆԹ-ների երկրորդային կառույցի վրա:

Հորմոնի ազդեցության տակ ԴՆԹ-ի մեթիլացման մակարդակի փոփոխության հաստատված փաստը էական հետաքրքրություն է ներկայացնում այն առումով, որ այդ ֆերմենտային մոդիֆիկացիան արդյունքում կարող է բերել տրանսկրիպցիայի ռեպրիկացիայի և տրանսլյացիայի սխալների՝ բր-ջիջների մահացման, կամ նրանց շարորակ տրանսֆորմացիայի:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ E. Scarano, M. Iaccarino, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1957, 1394 (1967). ² K. H. Ibsen, W. H. Elishman, Blochim. et biophys. acta, 560, 2, 243 (1979). ³ G. M. Badger, L. A. Elson, A. Haddow e. a., Proc. Roy. Soc. B. 130, 860, 255 (1942). ⁴ O. И. Епифанова, в кн.: Гормоны и размножение клеток, Наука, М., 1965. ⁵ B. F. Vanyushin, A. L. Masin, V. K. Vasillev e. a., Blochim. et biophys. acta, 299, 397 (1973). ⁶ B. F. Vanyushin, L. E. Nemirovsky, V. V. Klimenko e. a., Gerontologia, 19, 138 (1973). ⁷ Г. А. Романов, Б. Ф. Ванюшин, Молекулярная биология, т. 14, 357 (1980). ⁸ J. Margit, J. Mol. Biol., 3, 208 (1961). ⁹ Б. Ф. Ванюшин, в кн.: Совр. методы биохимии, Медицина, М., 1964. ¹⁰ Д. В. Гарибян, Г. М. Степанян, И. С. Даниелян и др., Биохимия, т. 45, 11, 2028 (1980). ¹¹ Н. Н. Бурцева, Н. П. Демидкина, Ю. М. Азизов и др., Биохимия, т. 43, 2028 (1978). ¹² T. W. Sneider, V. R. Potter, J. Mol. Biol., 42, 271 (1969). ¹³ В. Г. Смирнов, Г. А. Романов, Б. Ф. Ванюшин, ДАН СССР, т. 232, 961 (1977). ¹⁴ Г. А. Романов, Б. Ф. Ванюшин, Н.уч. докл. высшей школы, биол. н., 11, 5 (1980).

УДК 581.144

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

Академик АН Армянской ССР В. О. Казарян,
Г. С. Авакян, А. А. КулиджанянК вопросу о влиянии густоты насаждений на корнеобеспеченность
листьев

(Представлено 14/V 1982)

По мере развития насаждений и увеличения их густоты уменьшается жизненное пространство каждого индивида, и это отрицательнее всего отражается на развитии фотосинтетического аппарата и корневой системы тех особей, жизнедеятельность которых подавлена в наибольшей степени (1).

Специальные опыты с пятилетними культурами ореха грецкого выявили существенную разницу в корнеобеспеченности листьев в зависимости от освещенности (2). Растения высаживали в восемь рядов, из которых два крайних (восточный и западный), расположенные в непосредственной близости от крупных деревьев, находились в худших в отношении освещенности условиях (высота растений не превышала 0,5 м), тогда как средние ряды были освещены и деревья на них росли сравнительно энергичнее (высота составляла 2,5 м). Определение корнеобеспеченности этих культур показало, что общая листовая поверхность у особей восточного ряда оказалось меньше в 4, а сухой вес активных корней—в 22,2 раза, чем у особей среднего ряда, что по сути дела явилось причиной их слабого роста. Данные о влиянии интенсивности освещения на рост корней приводятся другими авторами (1,3).

Исходя из этих результатов мы вправе допустить, что высокая густота лесокультур помимо влияния на дендрометрические показатели влияет и на корнеобеспеченность листьев, которая в сущности является главным внутренним фактором, определяющим энергию роста растений (4). Для экспериментальной иллюстрации этого предположения нами проведены опыты с разновозрастными культурами дуба восточного (*Quercus macranthera* Fisch. et C. A. Mey.) в насаждениях различной густоты. При этом мы одновременно преследовали цель выявить оптимальные объемы рубок, при которых обеспечиваются наиболее интенсивный рост и продуктивность лесокультур различных возрастных классов.

Подсчеты некоторых средних показателей сухого веса надземных органов и корней (табл. 1) наглядно показывают, что по мере увеличения числа деревьев ускоряется рост надземных органов по сравнению с корневой системой. Если в 12-летнем возрасте отставание роста корней почти незаметно, то уже в 23- и 33-летнем возрасте разница в

сухих весах надземных и подземных органов I и V вариантов достигает величины порядка 0,7, что обуславливается ослаблением освещенности лесокультур (5). Подобное положение подтверждено результатами опытов Н. А. Максимова и сотрудников, показавшими, что у травянистых представителей отношение побег/корень значительно увеличивается, когда растения больше времени находятся в тени (3). Световые условия способствуют увеличению и общей площади листьев.

Отставание роста корней с увеличением густоты насаждений приводит к уменьшению общей фотосинтетической поверхности растений. Основная масса листьев перемещается к терминальным ярусам для наиболее энергичного поглощения физиологически активной радиации. Увеличение корнелистового расстояния способствует ослаблению обмена веществ между корнями и листьями, что в свою очередь ослабляет рост растения. Так например, если общая масса надземных частей и корней у 12-летних деревьев при густоте 1350 шт./га составляет 3,256 кг, то при густоте 8790 шт./га—1,609 кг, т. е. в 2,02 раза меньше. Эти показатели у 33-летних деревьев составляют 139, 979 и 32,159 кг.

Интересные данные получены в отношении изменения поверхности листьев по мере увеличения возраста и густоты насаждений. Соотношение поверхностей листьев растений крайних по густоте вариантов у 12-летних деревьев составляет 2, у 23-летних деревьев—4,8, а у 33-летних—5,5. Имеет место также уменьшение площади каждого листа с увеличением возраста и густоты насаждений, что более выражено проявилось у 33-летних деревьев.

Отставание роста корней в целом происходит более плавно и слабо с увеличением возраста и густоты насаждений. Однако следует учесть, что тут приводятся данные, относящиеся к корневой системе в целом, тогда как для общей жизнедеятельности растений существенное значение имеют всасывающие разветвления, выполняющие поглотительную и метаболическую функции и определяющие степень корнеобеспеченности листьев. Исходя из этого положения мы определили корнеобеспеченность листьев методом, использованным нами ранее (4).

Для подсчета всех активных корней у 33-летних деревьев (7230 деревьев на 1 га) требовалось тщательно раскопать все корни (до 1 мм толщины) нескольких деревьев, окружающих опытное, срезать активные корни и высушить до абсолютно сухого веса. Кроме того, мы удаляли все листья того же дерева и методом высечек (6) определили общую их площадь.

Полученные данные (табл. 2) показывают, что корнеобеспеченность листьев наибольшая у 23-летних деревьев, наименьшая у 33-летних. С увеличением густоты величина этого показателя существенно уменьшается вне зависимости от их возраста. Именно этот показатель определяет как активность роста, так и фотосинтетическую продуктивность растений (4).

Весьма примечательны данные, относящиеся к динамике изменения общей массы растений и веса активных корней в связи с возрас-

Таблица 1

Средние данные о некоторых дендрологических и морфологических показателях дуба при различной густоте произрастания

Возраст, лет	Число деревьев, шт/га (вариант)	Масса надземной части, кг	Масса подземной части, кг	Отношение масс подземной и надземной частей	Число листьев, шт.	Масса листьев, кг	Общая площадь листьев, кв. м.	Площадь одного листа, кв. см
12	1350	2,288±0,2	0,968±0,1	0,42	852±58	0,352±0,03	2,21±0,18	26,8±2,7
	2420	2,177±0,1	0,903±0,1	0,41	725±51	0,317±0,03	1,98±0,19	27,3±3,0
	3310	1,848±0,1	0,787±0,05	0,42	665±60	0,271±0,02	1,79±0,17	26,9±2,8
	5370	1,537±0,1	0,616±0,04	0,40	557±43	0,219±0,02	1,46±0,14	26,2±2,5
	8790	1,152±0,1	0,457±0,03	0,39	436±39	0,159±0,01	1,09±0,10	25,0±2,4
23	1070	19,674±0,9	6,662±0,6	0,34	3420±291	1,534±0,15	9,85±0,9	28,8±3,0
	2340	16,023±0,8	5,212±0,4	0,33	2655±203	1,164±0,11	7,09±0,7	26,7±2,6
	3100	13,181±0,8	4,187±0,3	0,32	2185±184	0,798±0,07	5,68±0,6	26,0±2,6
	5220	9,296±0,6	2,680±0,2	0,29	1410±103	0,553±0,05	3,51±0,3	24,9±1,9
	8340	5,473±0,4	1,486±0,1	0,27	872±76	0,298±0,03	2,04±0,2	23,4±2,0
33	850	113,786±2,9	26,193±1,9	0,24	9693±498	5,852±0,5	32,57±3,0	33,6±3,0
	2070	87,779±2,4	19,320±1,7	0,22	7280±375	4,085±0,4	23,15±2,4	31,8±3,0
	3160	58,405±1,8	12,226±1,5	0,21	5507±370	2,531±0,2	16,08±1,7	29,2±3,0
	4680	40,679±1,8	8,224±0,7	0,20	4022±296	1,315±0,1	10,70±1,1	29,6±2,6
	7230	27,418±1,7	4,741±0,4	0,17	2521±188	0,716±0,07	5,95±0,5	23,6±2,6

том и густотой насаждений и свидетельствующие, что отставание роста проводящих корней было больше, нежели активных. Это, видимо, объясняется тем, что при высокой густоте древостоя растение старается формировать больше активных корней для поддержания общей жизнедеятельности растений.

Таблица 2

Корнеобеспеченность листьев у деревьев дуба восточного в зависимости от густоты и возраста насаждений

Возраст, лет	Число деревьев, шт./га (варианты)	Листья			Активные корни, г	Корнеобеспеченность листьев (отношение веса корней к листовой площади, г/дм ²)
		вес, кг	число, шт.	площадь, кв. дм		
12	1350	0,352	852	221	69,35	0,31
	2420	0,317	725	198	61,10	0,31
	3310	0,271	665	179	53,75	0,30
	5370	0,219	557	146	41,59	0,28
	8790	0,159	436	109	28,14	0,26
23	1070	1,534	3420	985	360,71	0,37
	2340	1,164	2655	709	258,57	0,36
	3100	0,798	2195	568	203,85	0,36
	5220	0,553	1410	351	113,34	0,32
	8340	0,298	872	204	52,26	0,26
33	850	5,852	9693	3257	1039,31	0,32
	2070	4,085	7280	2315	716,03	0,31
	3160	2,531	5507	1608	390,58	0,24
	4680	1,315	4022	1070	217,21	0,20
	7230	0,716	2521	595	94,37	0,10

Столь же интересным оказался ход изменения листовой поверхности и массы активных корней в опытных насаждениях. С увеличением густоты насаждений, как правило, имело место подавление роста растений в целом. Однако наблюдение роста активных корней и общей поверхности листьев осуществлялось неравномерно. Отставание роста первых оказалось более заметным, чем листовой поверхности, что привело к прогрессивному увеличению корневой недостаточности листьев. Это рассматривается как показатель старения растений (4). С этой точки зрения увеличение густоты является одним из существенных факторов раннего старения растений и падения продуктивности насаждений.

Институт ботаники
Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Գ. Ս. ԱՎԱԳՅԱՆ, Ա. Ա. ՂՈՒԼԻԶԱՆՅԱՆ

Տերևների արմատաապահովվածության վրա տնկարկների խտության ազդեցության հարցի շուրջը

Անտառային համակեցությունը խորը ազդեցություն է թողնում նրա բոլոր անհատների մորֆոլոգիայի և ֆիզիոլոգիայի վրա: Առաջին հերթին փոխվում է ծառերի ասիմիլյացիոն օրգանների բանակը և զանգվածը: Սակայն

մենք տվյալներ չունենք այդ օրգանների մասնակի փոփոխության վերաբերյալ՝ կապված տնկարկների խտության և հասակի հետ: Այս ուղղությամբ արևելյան կաղնու 12, 23, 33 տարեկան տարբեր խտության տնկարկների հետ կատարված փորձերը ցույց են տվել, որ խիտ տնկարկներում աճման էներգիայի թուլացումը կապված է ակտիվ արմատների և տերևների մասսայի փոքրացման հետ: Հստ որում, բույսը ձգտում է պահել բարձր մակարդակի վրա ակտիվ արմատների մասսան սահմանափակ թվով տերևների կենսագործունեության ապահովման համար:

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ Ю. В. Титов, Эффект группы у растений, Наука, М., 1978. ² П. А. Хуршудян, Г. С. Авакян, ДАН АрмССР, т. 44, № 3 (1968). ³ Н. А. Максимов и др. Изв. Гл. бот. сада, т. 23, № 1 (1924). ⁴ В. О. Казарян, Старение высших растений, Наука, М., 1969. ⁵ Т. Т. Kozłowski, Ecol. Mon., 19 (1949). ⁶ А. А. Ничипорович и др., Фотосинтетическая деятельность растений, Наука, М., 1961.

УДК 612.827:612.826

ФИЗИОЛОГИЯ

Г. Р. Восканян

**Сравнительный анализ влияний филогенетически
разных отделов мозжечка на неостриатум**(Представлено академиком АН Армянской ССР
В. В. Фанарджяном 28/VII 1982)

Базальные ганглии и мозжечок — две структуры, вовлеченные в контроль сенсомоторной интеграции. Недавними электрофизиологическими исследованиями показано существование элементов общей иннервации этих структур со стороны коры мозга (1,2). В ряде электрофизиологических и нейроанатомических работ показана таламическая конвергенция импульсаций, поступающих со стороны базальных узлов и мозжечка (3-9). Эти и некоторые другие данные позволяют предположить существование определенного взаимодействия между базальными ганглиями и мозжечком. Исследование этого вопроса в отношении нисходящих связей базальных узлов, в частности хвостатого ядра (N. Caudatus), с мозжечком привело к положительным результатам (10-12). Данные, касающиеся обратных связей, немногочисленны и противоречивы (13-15).

В задачу настоящей работы входило исследование влияния раздражения филогенетически разных отделов мозжечка — его зубчатого или латерального (N. Dentatus), промежуточного (N. Interpositus) и фасцигиального или медиального (N. Fastigius) ядер на нейронную активность хвостатого ядра. Эксперименты проводились на кошках, наркотизированных смесью хлоралозы и нембутала (45 и 15 мг/кг соответственно внутривенно) и обездвиживаемых (дитилин — 1%-ный раствор, 1,0—1,5 мг/кг) в процессе эксперимента. Биполярные раздражающие электроды вводились в ядра мозжечка контралатеральной стороны. Применялась пачка прямоугольных стимулов с частотой 400 гц (2—3 имп. в пачке). Регистрация экстраклеточных потенциалов производилась вольфрамовыми микроэлектродами с диаметром кончика 1,0—1,5 мкм. Анализ активности нейронов осуществляли путем построения постстимульных гистограмм и накопительного частотного распределения на анализаторе NTA—1024 (ВНР).

Зарегистрирована активность 142 нейронов хвостатого ядра, отвечающих на раздражение ядер мозжечка. Эффекты последних были, как правило, возбуждательными. Значительно реже обнаруживались тормозные эффекты, причем только в ответ на раздражение зубчатого ядра мозжечка (рис. 1, В). Ответы проявлялись в виде импульсных разрядов с непостоянным числом импульсов в ответе.

На рис. 1 представлены постстимульные гистограммы и накопительное частотное распределение ответов нейронов хвостатого ядра на раздражение зубчатого (А—В), промежуточного (Г—Е) и фастигиального (Ж—И) ядер мозжечка. На рис. 1 (А, Г) даны ответы ней-

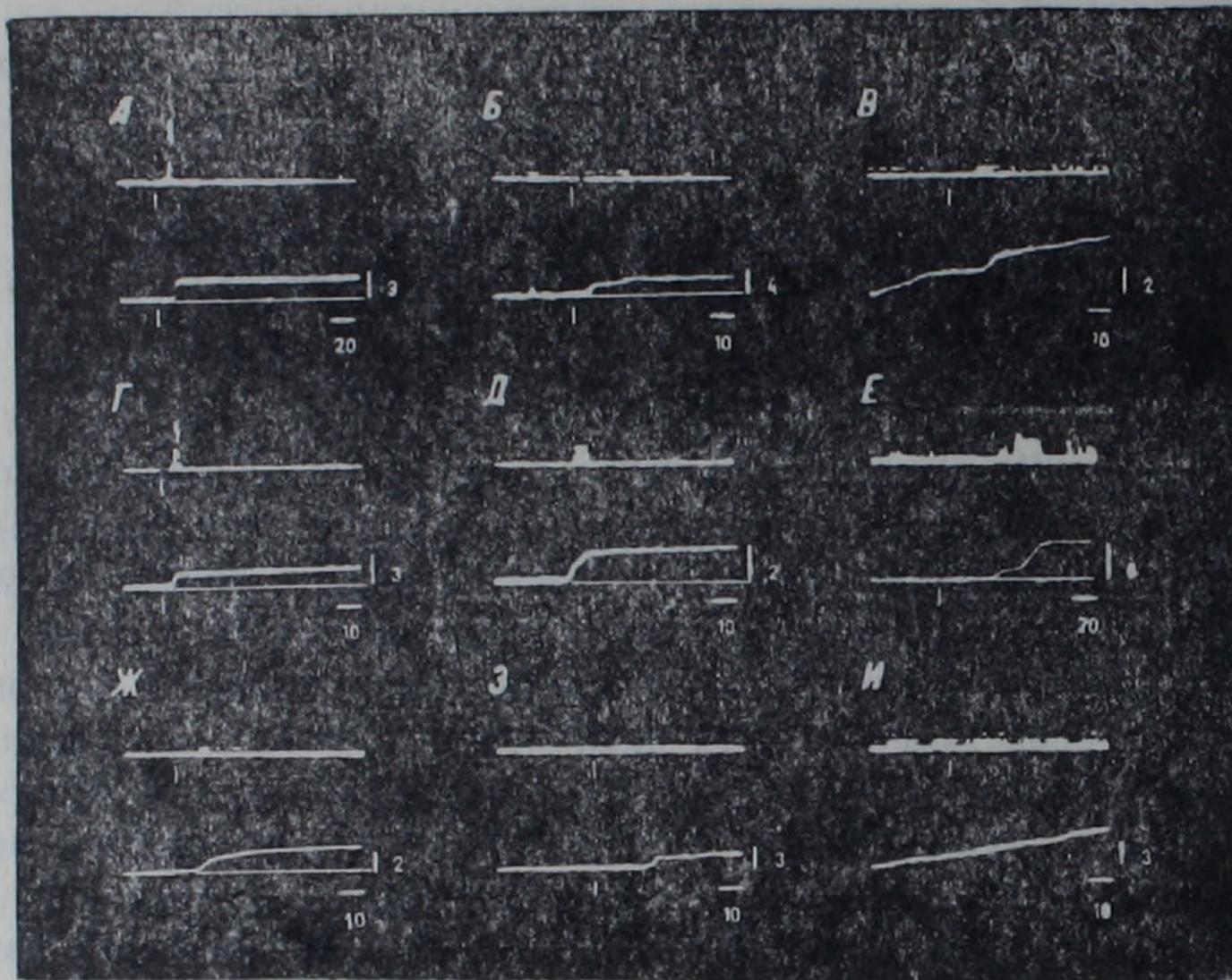


Рис. 1. Влияние раздражения зубчатого (А—В), промежуточного (Г—Е) и фастигиального (Ж—И) ядер мозжечка на импульсную активность нейронов хвостатого ядра. Верхние записи — постстимульные гистограммы активности нейрона. Нижние записи — гистограммы накопительного частотного распределения, полученные интегрированием постстимульных гистограмм. Прерывистые линии экстраполированы от уровня фоновой импульсной активности нейрона. Стрелками показаны моменты нанесения стимула. Горизонтальная калибровка дана в мс; вертикальная калибровка представляет количество импульсов, приведенное к одиночному наложению (имп./раздр.). Для всех гистограмм — наложение 50 ответов. Бин — 0,1 мс (для Б, В, Д, Ж, З, И) и 0,2 мс (для А, Г, Е); количество бинов — 1024

ронов, не обладающих фоновой активностью. Часто регистрировались ответы, состоящие из более чем одного компонента, о чем свидетельствуют разные углы наклона на кривой накопительного частотного распределения (рис. 1. Б, В, Д, Е, З). На рис. 1, И приведен пример нейрона, не реагирующего на раздражение мозжечка. О флюктуации скрытого периода можно судить по углу наклона на кривой накопительного частотного распределения. На рис. 1, А, Г представлены ответы с довольно постоянным скрытым периодом, на рис. 1, Б, В, Д, Е, З скрытые периоды ответов подвержены значительной изменчивости. Сравнительный анализ эффектов трех ядер мозжечка показал, что 83% из всех исследованных клеток отвечали на раздражение зубчатого ядра мозжечка, 63% — на раздражение

промежуточного ядра и 53% — на раздражение фастигиального ядра. Гистограммы распределения скрытых периодов исследованных ответов приведены на рис. 2. Как видно, ответы с наиболее короткими скрытыми периодами обнаруживались на раздражение зубчато-

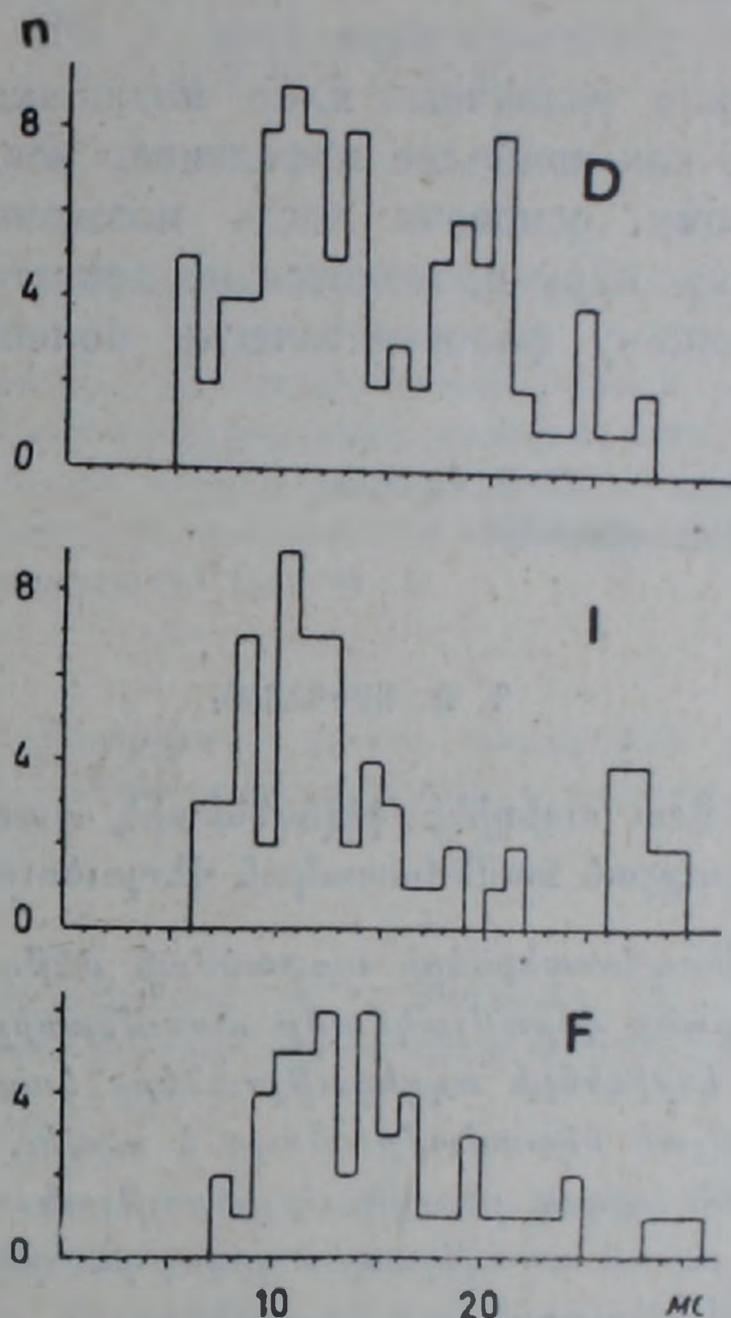


Рис. 2. Гистограмма распределения скрытых периодов ответов нейронов хвостатого ядра на раздражение зубчатого (*D*), промежуточного (*I*) и фастигиального (*F*) ядер мозжечка. По оси абсцисс — время, мс; по оси ординат — количество нейронов, *n*

го ядра мозжечка (4,7—6,4 мс); раздражение промежуточного ядра приводило к возникновению коротколатентных ответов, охватывающих 6,0—7,0 мс; минимальные скрытые периоды ответов, возникающих на раздражение фастигиального ядра, составляли 7,0 мс. Представляет интерес тот факт, что пик гистограммы распределения скрытых периодов ответов на раздражение всех трех ядер мозжечка охватывает период от 9 до 14 мс; для эффектов раздражения зубчатого ядра мозжечка было характерно наличие на гистограмме и второго пика, охватывающего период 17—21 мс. Было обнаружено, что 63% из всех исследованных клеток отвечали на раздражение более чем одного ядра мозжечка: 26% отвечали на раздражение двух ядер и 37% — на раздражение всех трех ядер мозжечка. Отмеченный факт согласуется с данными о широкой конвергенции афферентных импульсов, поступающих от различных образований к нейронным элементам хвостатого ядра (^{16,17}).

Относительно большие значения скрытых периодов исследованных ответов, их непостоянство позволяют предположить, что мозжечковые восходящие влияния к хвостатому ядру проводятся по полисинаптическим путям. Указанные влияния имели возбудительный характер. Исключение составили лишь несколько ответов, возникающих на раздражение зубчатого ядра (рис. 1, В). Сопоставление результатов раздражения различных ядер мозжечка позволяет выделить зубчатое ядро как наиболее эффективно воздействующее образование. По-видимому, основная часть мозжечковых восходящих влияний к хвостатому ядру проводится по дентато-каудатному пути, структурно включающему филогенетически более молодые образования.

Институт физиологии им. Л. А. Орбели
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ռ. ՈՍԿԱՆՅԱՆ

Նեոստրիատումի վրա ուղեղիկի ֆիլոգենետիկ տարբեր բաժինների ազդեցության համեմատական վերլուծությունը

Արտաբջջային կենսահոսանքների արտաժաման մեթոդով և էլեկտրոնային մեքենայի միջոցով նրանց վերամշակմամբ ուսումնասիրվել են ատամնավոր միջակա և վրանաձև կորիզների ազդեցությունները կատվի պոչավոր կորիզի նեյրոնային ակտիվության նկատմամբ: Ցույց է տրվել, որ միջակա և վրանաձև կորիզները ունեն դրդող բնույթի ազդեցություն: Ատամնավոր կորիզը նույնպես, հանդես է բերում առավելապես դրդող բնույթի ազդեցություն, սակայն պոչավոր կորիզի հետազոտված նեյրոնների մի մասում հրահրվում են նաև արգելակման էֆեկտներ: Ցույց է տրված ուղեղիկի կորիզների պոչավոր կորիզի նեյրոնների նկատմամբ վերընթաց ազդեցություններում լայն համամիտման փաստը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ H. Oka, K. Jinnai, Exp. Brain Res., 31, 31—42 (1978). ² K. Jinnai, Y. Matsuda, Neuroscience Letters, 13, 121—126 (1979). ³ D. Cohen, W. W. Chambers, J. M. Sprague, J. Comp. Neurol., 109, 233—259 (1958). ⁴ T. N. Johnson, C. D. Clemente, J. Comp. Neurol., 113, 83—101 (1959). ⁵ W. J. Nauta, W. R. Mehler, Brain Res., 1, 3—42 (1966). ⁶ D. P. Purpura, T. L. Frigyesi, J. G. McMurtry, e. a., in: The Thalamus (eds. D. P. Purpura, M. D. Yahr) N.—York, Columbia Univ. Press (1966). ⁷ H. Sakata, T. Ishijima, Y. Toyoda, Jap. J. Physiol., 16, 42—60 (1966). ⁸ T. Destraju, D. P. Purpura, Brain Res., 15, 544—547 (1969). ⁹ M. Uno, M. Yoshida, I. Hirota, Exp. Brain Res., 10, 121—139 (1970). ¹⁰ M. A. Fox, T. D. Williams, J. Physiol. (Lond.) 198, 435—450 (1968). ¹¹ M. A. Fox, T. D. Williams, Brain Res., 20, 140—144 (1970). ¹² M. A. Gresty, D. H. Paul, J. Physiol. (Lond.), 245, 655—665 (1975). ¹³ M. M. Flanagan, C. H. Kreider, J. Werthan e. a., Confin. Neurol., 28, 335—347 (1966). ¹⁴ R. A. Ratcheson, Chon-Luh Li, Exp. Neurology, 25, 268—281 (1969). ¹⁵ Գ. Բ. Восканян, Журн. exper. и клинич. медицины АН АрмССР, т. 19, 45—50 (1979). ¹⁶ N. A. Buchwald, D. D. Price, L. Vernon, e. a., Exp. Neurology, 38, 311—323 (1973). ¹⁷ J. D. Kocsis, M. Sugimori, S. T. Kltai, Brain Res., 124, 403—413 (1977).

