ISSN 0321 — 1339

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

LXXVI, № 3
1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ ЕРЕВАН

Доклады Академии наук Армянской ССР, 1983, т. № 3, с. 9д—144.

Основан в 1944 г.
Периодичность—10 номеров в год.
На русском языке

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

Индекс **77730**

CONTENTS

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л.

Сдано в набор 25.03. 1983. Подписано к печати 26.04. 1983. ВФ 05256.
Бумага № 1, 70×108¹/₁₆. Плоскопечать. Печ. лист 3,0. Усл. печ. лист. 4,2.
Учет.-изд. 3,36. Тираж 420. Заказ 258. Издат. 5896.
Адр. ред.: 375019, Ереван, Барекамутян, 24г, II эт., 1 к.

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван, Барекамутян, 24г.
Типография Издательства Академий наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXVI 1983 3

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

В. С. Виденский

О приближении функций многочленами по произвольной полной системе

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 14/II 1982)

Будем говорить, что последовательность линейных операторов $\{L_n\}$ из $C[0,1]$ в $C[0,1]$ является аппроксимирующей, если

$$\forall f \in C[0,1] \quad \lim_{n\to\infty} \|L_n f - f\|_{C[0,1]} = 0.$$

Класс таких последовательностей будем обозначать через $\mathcal{A}$ и писать $\{L_n\} \in \mathcal{A}$.

В настоящей заметке доказывается, что для каждой полной в $C[0,1]$ системы функций можно построить аппроксимирующую последовательность линейных положительных операторов (кратко л. п. о.) типа многочленов Бернштейна.

Теорема. *Если* $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\varphi_0=1$,—*полная в* $C[0,1]$ *система функций, то существуют такие многочлены* $\{u_{nk}\}_{k=0}^{n}$ *по системе функций* $\{\varphi_k\}_{k=0}^{n}$, *что*

$$u_{nk}(x) \geqslant 0, \qquad \sum_{k=0}^{n} u_{nk}(x) = 1,$$

и линейные положительные операторы

$$U_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) u_{nk}(x) \tag{1}$$

образуют аппроксимирующую последовательность.

Доказательство. 1°. Обозначим через λ_{nk} функцию, линейную на каждом отрезке $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ и такую, что $\lambda_{nk}\left(\frac{i}{n}\right)=\delta_{ki}$ ($\delta_{ki}=0$ при $k\neq i$, $\delta_{ii}=1$). Тогда ломаная, интерполирующая функцию $f \in C[0,1]$ в узлах $\frac{k}{n}$, запишется в виде

$$\Lambda_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \lambda_{nk}(x).$$

Очевидно, Λ_n—л. п. о., причем $\{\Lambda_n\} \in \mathcal{A}$. Для линейной функции f имеем $\Lambda_n f = f$, в частности, $\Lambda_n(1, x)=1$, $\Lambda_n(t, x)=x$.

2°. При фиксированном n приблизим функции λ_{nk} многочленами по системе $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m_n}$. Пусть $\varepsilon_n \downarrow 0$. Введем функции $\{\mu_{nk}\}_{k=0}^{n}$, линейные на отрезках $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ и такие, что

$$\mu_{nk}\left(\frac{i}{n}\right)=\begin{cases} \frac{\varepsilon_n}{3n^2} & \text{при } i \neq k, \\ 1-\frac{\varepsilon_n}{3n} & \text{при } i=k. \end{cases}$$

Так как μ_{nk}—ломаная с вершинами в точках $\frac{i}{n}$ и так как $\sum_{k=0}^{n}\mu_{nk}\left(\frac{i}{n}\right)=1$, то $\sum_{k=0}^{n}\mu_{nk}(x)=1$. Мы имеем

$$\|\lambda_{nk}-\mu_{nk}\|=\frac{\varepsilon_n}{3n}, \quad k=0,1,\ldots,n.$$

Выберем m_n столь большим, чтобы существовали многочлены $\{q_{nk}\}_{k=0}^{n-1}$ по системе $\{\varphi_n\}_{k=0}^{m_n}$, которые удовлетворяют неравенствам

$$\|\mu_{nk}-q_{nk}\|<\frac{\varepsilon_n}{6n^3} \quad \text{при} \quad k=0, 1, \ldots, n-1.$$

Положим $q_{nn}(x)=\sum_{k=0}^{n-1} q_{nk}(x)$, тогда

$$\|\mu_{nn}-q_{nn}\|<\frac{\varepsilon_n}{6n^2}.$$

Ясно, что все $q_{nk}(x)\geqslant 0$ и что

$$\|\lambda_{nk}-q_{nk}\|<\frac{\varepsilon_n}{2n}, \quad k=0,1,\ldots,n.$$

Построим последовательность л. п. о. $\{Q_{m_n}\}$ по формулам

$$Q_{m_n}(f, x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)q_{nk}(x).$$

Мы имеем $Q_{m_n}(1, x)=1$, и так как

$$\|Q_{m_n}f-\Lambda_n f\|\leqslant\|f\|\varepsilon_n,$$

то $\{Q_{m_n}\}\in\mathcal{A}$.

3°. При $m_l\leqslant n<m_{l+1}$ определим многочлены $\{u_{nk}\}$ по системе $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m_l}$ равенствами

$$u_{nk}=Q_{m_l}(\lambda_{nk}, x),$$

а л. п. о. U_n по формуле (1). Проверим, что $\{U_n\}\in\mathcal{A}$. Действительно, мы имеем

$$\|U_n f-Q_{m_l}f\|=\|Q_{m_l}(\Lambda_n f-f)\|\leqslant\|\Lambda_n f-f\|,$$

и остается заметить, что $\{Q_{m_l}\}\in\mathcal{A}$, $\{\Lambda_n\}\in\mathcal{A}$. Таким образом, наша теорема доказана.

Замечание 1. Равноотстоящие узлы $\frac{k}{n}$ в формуле (1) можно заменить любыми точками $0=\xi_{n0}<\xi_{n1}<\ldots<\xi_{nn}=1$, для которых $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(\xi_{nk}-\xi_{n,k-1})\to 0$ при $n\to\infty$. Для этого достаточно вместо $\Lambda_n f$ рассмотреть ломаные $\Lambda_n^* f$, интерполирующие f в узлах $\{\xi_{nk}\}_{k=0}^n$.

Замечание 2. Многочлены (1)—обобщение классических многочленов Бернштейна

$$B_n(f, x)=\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)p_{nk}(x), \quad p_{nk}(x)=C_n^k x^k(1-x)^{n-k}.$$

Функции $\{p_{nk}\}_{k=0}^n$ являются D^*-базисом алгебраической системы $\{x^k\}_{k=0}^n$. Это означает, что выполняются условия

$$p_{nk}(x)\geqslant 0, \quad \lim_{x\to 0}\frac{p_{nk}(x)}{p_{n,k-1}(x)}=0, \quad \lim_{x\to 1}\frac{p_{nk}(x)}{p_{n,k-1}(x)}=\infty. \qquad (2)$$

Из (2) следует, что многочлены $P_n(x)=\sum_{k=0}^n c_k p_{nk}(x)$ удовлетворяют правилу знаков Декарта в интервале $]0,1[$. Многие замечательные свойства $B_n f$ связаны с тем, что $\{p_{nk}\}_{k=0}^n$ есть D^*-базис.

В заметках ([1]) и ([2]) были построены аналогичные многочлены по рациональным дробям с данной матрицей вещественных полюсов

$$\{x_{nk}\}_{k=1}^n, \quad x_{nk}\in\mathbf{R}\setminus[0,1], \quad n\in\mathbf{N},$$

$$A_n(f, x)=\sum_{k=0}^n f(\tau_{nk})a_{nk}(x),$$

где $\{a_{nk}\}_{k=0}^n$—D^*-базис системы $\{1, (x-x_{nk})^{-1}\}_{k=1}^n$.

В ([1,2]) указано условие, необходимое и достаточное, чтобы $\{A_n\}\in\mathcal{A}$. Это условие более ограничительно, чем условие, обеспечивающее полноту системы рациональных дробей

$$\{1, (x-x_{nk})^{-1}\}_{k=1}^n, \quad n\in\mathbf{N}.$$

Таким образом, в общем случае, который рассматривается в настоящей заметке, многочлены $\{u_{nk}\}_{k=0}^n$, вообще говоря, не являются D^*-базисом системы $\{\varphi_k\}_{k=0}^n$.

Ленинградский государственный
педагогический институт им. А. И. Герцена

Վ. Ս. ՎԻԴԵՆՍԿԻ

Ֆունկցիաների մոտարկումների մասին կամայական լրիվ սիստեմով կազմված բազմանդամներով

$C[0; 1]$-ը իր մեջ արտապատկերող գծային օպերատորների $\{L_n\}_0^\infty$ հաջորդականությունը կոչվում է մոտարկող հաջորդականություն, *եթե ինչպիսին էլ լինի f ֆունկցիան $C[0; 1]$-ից*

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n f-f\|_{C[0;1]}=0:$$

Հոդվածում ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ։ Եթե ֆունկցիաների $\{\varphi_k\}_0^\infty$ ($\varphi_0=1$) սիստեմը լրիվ է $C[0;1]$ում, ապա գոյություն ունեն $\{\bar{\varphi_k}\}_0^n$ ($n=0, 1, 2, \ldots$) սիստեմով կազմված այնպիսի $\{u_{nk}\}_{k=0}^n$ բազմանդամներ, որ $u_{nk}(x)\geqslant 0$, $\sum\limits_{k=0}^n u_{nk}(x)=1$, և

$$U_n(f;x)=\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)u_{nk}(x)$$

դրական գծային օպերատորները կազմում են մոտարկող հաջորդականություն։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. С. Виденский*, Изв. АН БССР, сер. физ.-мат., № 1, 1979. [2] *В. С. Виденский*, ДАН АрмССР, т. 70, № 3 (1980).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 3

УДК 517.984.5

МАТЕМАТИКА

И. Г. Хачатрян

Изучение точечного спектра обыкновенного сингулярного дифференциального оператора

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 12/IV 1982)

Рассмотрим на полуоси $(0, \infty)$ дифференциальное выражение

$$l(y) \equiv (-1)^n y^{(2n)} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k [p_{2k} y^{(k)}]^{(k)} -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{i}{2} \left\{ [p_{2k+1} y^{(k)}]^{(k+1)} + [p_{2k+1} y^{(k+1)}]^{(k)} \right\}, \tag{1}$$

с вещественными коэффициентами $p_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, 2n-2)$. Обозначим через L_0 минимальный замкнутый симметрический оператор [1], порожденный дифференциальным выражением (1) в пространстве $L^2(0, \infty)$.

При $p_{2k+1}(x) \equiv 0$ $(k=0, 1, \ldots, n-2)$ исследованию спектра самосопряженных расширений оператора L_0 в зависимости от поведения коэффициентов $p_{2k}(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ посвящена монография [2].

В настоящей заметке предполагается, что функции $p_k(x)$ при некотором $a (0 \leqslant a \leqslant \infty)$ удовлетворяют условиям

$$\int_0^a x^{2n-1-k} |p_k(x)| dx + \int_a^\infty |p_k(x)| dx < \infty, \quad k=0, 1, \ldots, 2n-2. \tag{2}$$

При условиях (2) индекс дефекта оператора L_0 есть (n, n).

Для формулировки результатов введем на полуоси $(0, \infty)$ функцию

$$Q(\xi) = \sum_{k=0}^{2n-2} A \left\{ B_k^{-1} \int_0^{\xi b_k} x^{2n-1-k} |p_k(x)| dx + \xi^{2n-1-k} \int_{\xi b_k}^\infty |p_k(x)| dx \right\},$$

где

$$B_{2s} = (n-s)!(n-1-s)!, \quad B_{2s+1} = [(n-s-1)!]^2,$$

$$b_{2s} = b_{2s+1} = [(n-s)!]^{\frac{1}{n-s}}, \quad s=0, 1, \ldots, n-1,$$

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \sum_{k,j=0}^{n-1} |A_{kj}|,$$

а матрица $\|A_{kj}\|_{k,j=0}^{n-1}$ определяется по формуле

$$\|A_{kj}\| = \|\omega_{n+k}^j\| \|\omega_k^j\|^{-1},$$

причем

$$\omega_k = \exp\left(i\frac{\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, 2n-1.$$

Очевидно, что $Q(+0) = 0$. Учитывая неравенство $b_{2k} = b_{2k+1} \leqslant n-k$, легко убедиться, что $Q'(\xi) \geqslant 0$. Поэтому $Q(\xi)$ является неубывающей функцией.

Теорема. *Справедливы следующие утверждения*:

1°. *Непрерывный спектр всякого самосопряженного расширения L оператора L_0 совпадает с полуосью $[0, \infty)$. Точечный спектр оператора L ограничен снизу и не имеет отличной от нуля конечной точки сгущения. Кратность неположительных собственных значений не превосходит n, а кратность положительных собственных значений не превосходит $n-1$. При этом множество положительных собственных значений кратности $n-1$ $(n>1)$ ограничено.*

2°. *Точечный спектр определяемого краевыми условиями*

$$y^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

самосопряженного расширения L оператора L_0 заключается в интервале $(-\xi_0^{-2n}, \xi_0^{-2n})$, где ξ_0 есть наибольший корень уравнения $Q(\xi) = 1$ при $Q(\infty) > 1$ и $\xi_0 = \infty$ при $Q(\infty) \leqslant 1$. Следовательно, точечный спектр оператора L ограничен, причем при выполнении неравенства $Q(\infty) \leqslant 1$, эквивалентного

$$\sum_{k=0}^{2n-2} AB_k^{-1} \int_0^\infty x^{2n-1-k} |p_k(x)| dx \leqslant 1,$$

оператор L не имеет точечного спектра.

3°. *Если условия* (2) *выполняются при $a = 0$, то точечный спектр любого самосопряженного расширения L оператора L_0 ограничен.*

4°. *Если условия* (2) *выполняются при $a = \infty$, то точечный спектр всякого самосопряженного расширения L оператора L_0 не содержит точку нуль. Кроме того, число отрицательных собственных значений, а также положительных собственных значений кратности $n-1$ $(n>1)$ оператора L конечно. Для монотонных последовательностей $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$ собственных значений, где $0 < \lambda_k < 1$ и $\mu_k > 1$, имеют место неравенства*

$$\sum_k \sqrt{\lambda_k} < \infty, \quad \sum_k \frac{1}{\sqrt{\mu_k}} < \infty.$$

Отметим, что в случае $n = 1$ в этой теореме нуждается в доказательстве только утверждение 2° при $Q(\infty) > 1$; остальные утверждения известны ([3–5]).

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ի. Դ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Սովորական սինգուլյար դիֆերենցիալ օպերատորի կետային սպեկտրի ուսումնասիրություն

Դիտարկվում է $L^2(0, \infty)$ տարածությունում կամայական զույգ կարգի ինքնահամալուծ դիֆերենցիալ L օպերատորը։ L օպերատորի գործակիցների վրա նշվում են պայմաններ, որոնց դեպքում այդ օպերատորի սպեկտրի բացասական մասը բաղկացած է վերջավոր թվով կետերից։ Մեկ այլ պայմանների դեպքում ապացուցվում է L օպերատորի կետային սպեկտրի սահմանափակությունը։ Նշվում է նաև մի պայման, որի դեպքում L օպերատորը կետային սպեկտր չունի։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. А. Наймарк,* Линейные дифференциальные операторы, Наука, М., 1969. [2] И. М. *Глазман,* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. Физматгиз, М., 1963. [3] *В. А. Марченко,* Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения, Наукова думка, Киев, 1977. [4] *Т. Като,* Теория возмущений линейных операторов, Мир, М., 1972. [5] *Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон,* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М, 1958.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 3

УДК 517.544

МАТЕМАТИКА

А. А. Шагинян

Об аппроксимации непрерывных векторных полей потенциальными

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 12/V 1982)

Во многих пространственных задачах приходится сталкиваться с необходимостью приближения непрерывных векторных полей градиентами гармонических функций. Аналогичная задача возникает также в теории оптимизации ([1]). Легко усмотреть связь задачи о градиентной аппроксимации на плоскости с задачей о приближении непрерывных комплексных функций на плоскости аналитическими. Общая задача об аппроксимации градиентами гармонических функций включает в себя вопросы приближения градиентов гладких функций градиентами гармонических и приближение непрерывных векторных полей градиентами гладких функций. В работе ([2]) был получен следующий результат о возможности равномерной аппроксимации непрерывных векторных полей градиентами гармонических функций. Для удобства сформулируем эту теорему в несколько более удобном виде.

Теорема 1. *Пусть $E\subset R^3$ компакт. Для того чтобы для любого непрерывного векторного поля $f: E\to R^3$ и $\varepsilon>0$ существовала гладкая в R^3 функция $g(P)$ (имеющая непрерывные частные производные) такая, что $\|f(P)-\text{grad}\, g(P)\|\leqslant\varepsilon$ при $P\in E$, где $\|\cdot\|$ евклидова норма в R^3, необходимо, чтобы E не содержал кусочно-гладкой замкнутой кривой (гомеоморфа окружности). Если E является объединением конечного числа кусочно-гладких кривых и не содержит ни одной замкнутой кривой, то для всякого $\varepsilon>0$ существует гармоническая в R^3 функция $H(P)$ такая, что $\|f(P)-\text{grad}\, H(P)\|\leqslant\varepsilon$ при $P\in E$.*

Замечание. С точки зрения градиентных аппроксимаций условие связности дополнения множества в теореме С. Н. Мергеляна о полиномиальных приближениях на плоскости является общим выражением того факта, что для возможности градиентного приближения множество не должно содержать замкнутых кривых.

В работе ([3]) Рао показал, что на компактных множествах меры нуль из R^3 градиент любой гладкой функции можно равномерно приблизить градиентом гармонической функции. В настоящей заметке мы приводим описание множеств положительной меры, на которых такая аппроксимация возможна.

Пусть E произвольный компакт из R^3. Обозначим через $\mathfrak{M}_2(E)$ распределения $\{\mu\}$ (положительные меры) на E такие, что

$$U_2^{\mu}(P)=\int_E \frac{d\mu(Q)}{r^2(P;Q)}\leqslant 1 \qquad \text{при } P\in R^3/E,$$

где $r(\cdot,\cdot)$ евклидово расстояние. Тогда емкость Рисса относительно ядра $\frac{1}{r^2}$ определяется как $C_2(E)=\sup\limits_{\mu\in\mathfrak{m}(E)}\mu(E)$. Определим также $\mathfrak{M}_g(E)$ как распределения $\{\mu\}$ на E такие, что $\left\|\operatorname{grad}\int\limits_E \frac{d\mu(Q)}{r(P;Q)}\right\|\leqslant 1$ при $\mu\in\mathfrak{M}_g$ и $P\in R^3\setminus E$. Емкость $C_{1,g}$ определяем как $C_{1,g}(E)=\sup\limits_{\mu\in\mathfrak{m}_g(E)}\mu(E)$.

Пусть далее $\mathfrak{M}_{g,1}(E)$ распределения $\{\mu\}$ на E такие, что $\int \frac{d\mu(Q)}{r(P;Q)}\leqslant 1$ и $\left\|\operatorname{grad}\int\limits_E \frac{d\mu(Q)}{r(P;Q)}\right\|\leqslant 1$ вне E. Емкость $C_{1,g}$ определяем, полагая $C_{1,g}(E)=\sup\limits_{\mu\in\mathfrak{m}_{g,1}(E)}\mu(E)$.

Теорема 2. *Если для всякого $P\in R^3$ и шара $K(P;\delta)$ радиуса δ с центром в точке P $C_{1,g}(K(P;\delta)\setminus E)=C_{1,g}(K(P;\delta))$, то для всякой гладкой в окрестности E функции $f(P)$ (имеющей непрерывные первые прозводные) и $\varepsilon>0$ существует гармоническая на E функция $g(P)$ такая, что*

$$|f(P)-g(P)|+\|\operatorname{grad}f(P)-\operatorname{grad}g(P)\|\leqslant\varepsilon \text{ при } P\in E.$$

Следствие. Если для всякого $P\in R^3$ и $1>\delta>0$ $C_2(K(P;\delta)\setminus E)=\delta^2$, то для всякой гладкой в окрестности E функции $f(P)$ и $\varepsilon>0$ существует гармоническая на E функция $g(P)$ такая, что

$$|f(P)-g(P)|+\|\operatorname{grad}f(P)-\operatorname{grad}g(P)\|\leqslant\varepsilon \quad \text{при } P\in E.$$

Теорема 3. *Если для всякого $P\in R^3$ и $1>\delta>0$ $C_g(K(P;\delta)\setminus E)=\delta^2$, то для всякой гладкой на E функции $f(P)$ и $\varepsilon>0$ существует гармоническая на E функция $g(P)$ такая, что $\|\operatorname{grad}f(P)-\operatorname{grad}g(P)\|\leqslant\varepsilon$* при $P\in E$.

Основные результаты данной заметки получены по аналогии с известными результатами С. Н. Мергеляна, А. Г. Витушкина и А. А. Гончара.

Ереванский государственный университет

Ա. Ա. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

Անընդհատ վեկտորական դաշտերի մոտարկումը պոտենցիալ դաշտերով

Դիցուք $E\subset R^3$ *կոմպակտ է։*

Թեորեմ 1. Որպեսզի կամայական անընդհատ $f: E\to R^3$ և $\varepsilon>0$ համար գոյություն ունենա որոշ $g(P)$ ֆունկցիա R^3-ում այնպես, որ $\|f(P)-\operatorname{grad}g(P)\|\leqslant\varepsilon$, երբ $P\in E$ անհրաժեշտ է, որ E-ն չընդգրկի կտոր առ կտոր ողորկ փակ կոր։ Եթե E-ն վերջավոր հատ կտոր առ կտոր ողորկ կորերի միացում է և չի ընդգրկում ոչ մի հատ փակ կոր, ապա մոտարկումը նախորդ իմաստով հնարավոր է, ուր $g(P)$-ն կարելի է վերցնել հարմոնիկ R^3-ում։ Բացի դրանից ներմուծվում է C_g ունակությունը, որի միջոցով ձևակերպվում է հետևյալ արդյունքը՝

Թեորեմ 3. Եթե կամայական $P \in R^3$ և $1 > \delta > 0$-ի համար $C_g(K(P; \delta) \setminus E) = \delta^2$, ուր $K(P; \delta)$-ն P կենտրոնով և δ շառավղով գունդ է, ապա կամայական E-ի վրա ողորկ $f(P)$ ֆունկցիայի և $\varepsilon > 0$ համար գոյություն ունի E-ի վրա հարմոնիկ $g(P)$ այնպիսի ֆունկցիա, որ $\|\mathrm{grad} f(P) - \mathrm{grad} g(P)\| \leqslant \varepsilon$, երբ $P \in E$։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Goor*, Jour. of approxim. theory, v. 12, p. 385—395 (1974). [2] *А. А. Шагинян*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 6, №2—3 (1971). [3] *N. V. Rao*, Jour. of approxim. theory, v. 12, p. 52—60 (1974).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 3

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Шамоян

Теплицевые операторы и деление на внутреннюю функцию в некоторых пространствах аналитических функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 14/VII 1982)

1. Пусть D—единичный круг на комплексной плоскости, Г—его граница, H^p—класс Харди с обычной L^p-нормой. Предположим $f \in H^p$, тогда f допускает каноническую факторизацию

$$f(z)=cz^n \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{z_k-z}{1-\bar{z}_k z} \frac{\bar{z}_k}{|z_k|} \exp\left\{-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} d\mu(\theta)\right\} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \ln|f(e^{i\theta})| d\theta\right\} =$$

$$= B_f(z) S_f(z) Q_f(z), \quad z \in \mathrm{D},$$

где $\{z_k\}_1^\infty$—множество нулей функций f в D, $d\mu$—неотрицательная сингулярная мера. Следуя А. Берлингу (см. [1]), будем называть $J_f = B_f S_f$ внутренней частью, а Q_f—внешней частью функций f. Внутренняя функция $\tilde{J} = \tilde{B}\tilde{S}$ называется делителем функции $f \in H^p$, если $B_f S_f \tilde{J}^{-1}$ является внутренней.

Пусть X—некоторое пространство аналитических функций, $X \subset \subset H^1$. В различных вопросах анализа важную роль играют утверждения, устанавливающие, что если $f \in X$ и $\tilde{J}$ делитель функции f, то $f\tilde{J}^{-1}$ принадлежит классу X (см., например, [2]). Подробный обзор о состоянии вопроса см. в [2-4]. В работах [3,4] для некоторых пространств аналитических функций установлено, что для произвольного $h \in H^\infty$ функция

$$g(z) = P(\bar{h}f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)\bar{h}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \qquad z \in \mathrm{D}$$

не хуже в смысле гладкости, чем функция f. Отметим, что изучение указанных теплицевых операторов в пространствах, аналитических в круге и гладких вплоть до его границы, имеет и другие интересные приложения (см. [3]). Цель настоящей заметки показать, что операторы $T_h(f) = P(\bar{h}, f)$ ограничены в следующих пространствах аналитических функций.

а) *Пространства функций с производными из классов М. М. Джрбашяна.* Следуя М. М. Джрбашяну (см. [5,6]), обозначим через $H^p(\alpha)$, $-1 < \alpha < +\infty$, $0 < p < +\infty$, класс голоморфных в круге функций f, для которых

$$\|f\|_{H^p(\alpha)}=\left(\frac{\alpha+1}{\pi}\int_D (1-|\zeta|^2)^\alpha |f(\zeta)|^p d\sigma_2(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty.$$

Систематическое изучение этих пространств начато в указанных выше работах ([5]) и ([6]). Далее, символом $H^p_n(\alpha)$, где n — натуральное число, обозначим класс функций f, n-ая производная которых принадлежит классу $H^p(\alpha)$. Легко видеть, что при $1\leqslant p<+\infty$ пространство $H^p_n(\alpha)$ относительно нормы

$$\|f\|_{H^p_n(\alpha)}=\max_{0\leqslant k\leqslant n}\|f^{(k)}\|_{H^p(\alpha)}$$

является банаховым. При $n>\dfrac{\alpha+1}{p}$ имеет место вложение $H^p_n(\alpha)\subset \subset H^1$, при этом оператор вложения непрерывен.

б) *Голоморфные функции с граничными значениями из классов Бесова.* Пусть $1\leqslant p$, $q<+\infty$, $0<\alpha<1$, обозначим через $\Lambda^{p,q}_{n,\alpha}$ класс голоморфных функций $f\in H^1$, для которых

$$|f|_{\Lambda^{p,q}_{n,\alpha}}=\max_{0\leqslant h\leqslant n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|t|^{1+\alpha q}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f^{(k)}(e^{i(\theta+t)})-f^{(k)}(e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}}dt\right)^{\frac{1}{q}}<+\infty$$

в) *Функции с производными из классов BMOA.* И, наконец, символом $BMOA_n$ будем обозначать класс голоморфных функций f, для которых имеет место представление

$$f^{(n)}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\psi(e^{i\theta})d\theta,\quad z\in \mathrm{D},\quad \psi\in L^\infty,\qquad n\geqslant 0;$$

в классе $BMOA_n$ вводим соответствующую BMO норму, относительно которой $BMOA_n$ будет банаховым пространством.

Теорема 1. *Пусть X совпадает с одним из вышеуказанных пространств, $h\in H^\infty$, тогда оператор*

$$T_h(f)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)\overline{h(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta,\quad z\in\mathrm{D}$$

действует ограниченно в пространстве X. При этом

$$\|T_h(f)\|_X\leqslant \mathrm{const}\|h\|_\infty\cdot\|f\|_X,\quad f\in X.$$

Доказательство этой теоремы при $X=H^p_n(\alpha)$ основано на следующем вспомогательном утверждении. Пусть f — голоморфная функция в D $f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k z^k$ и $\alpha>-1$.

Определим оператор

$$D^\alpha f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1+k)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}a_k z^k.$$

Лемма 1. *Пусть Φ — линейный непрерывный функционал на $H^p(\alpha)$, $1<p<+\infty$ и*

$$\delta_z(\zeta)=\frac{1}{1-\zeta z},\quad \zeta,\, z\in D.$$

Тогда функция $g(z)=\Phi(\delta_z)$ *является голоморфной функцией в* D, $D^{\alpha+1}g\in H^q(\alpha)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *и для любого* $f\in H^p(\alpha)$

$$\Phi(f)=\lim_{\rho\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\theta})g(e^{-i\theta})d\theta. \tag{2}$$

Кроме того, существуют положительные числа C_1, C_2 *такие, что*

$$C_1\|D^{\alpha+1}g\|_{H^q(\alpha)}\leqslant\|\Phi\|\leqslant C_2\|D^{\alpha+1}g\|_{H^q(\alpha)}. \tag{3}$$

И обратно, каждая голоморфная функция g: $D^{\alpha+1}g\in H^q(\alpha)$ *порождает линейный непрерывный функционал на* $H^p(\alpha)$ *по* (2), *для которого справедливы оценки* (3).

При $X=\Lambda^{p,q}_{n,\alpha}$ используются соображения, приведенные в ([4]).

Ниже мы докажем, что принадлежность $h\in H^\infty$ в известном смысле является необходимой.

2. Пусть ω—функция типа модуля непрерывности. Символом $H^1(\omega,\alpha)$, $\alpha\geqslant 0$, обозначим класс голоморфных в D функций f, для которых

$$\|f\|_{H^1(\omega,\alpha)}=\int_D |f(z)|\omega(1-|z|)(1-|z|)^{\alpha-1}d\sigma_2(z)<+\infty.$$

Пусть, как и выше, $H_n(\omega,\alpha)$—класс функций f: $f^{(n)}\in H(\omega,\alpha)$, при этом

$$\|f\|_{H^1_n(\omega,\alpha)}=\max_{0\leqslant k\leqslant n}\left(\int_D |f^{(k)}(z)|(1-|z|)^{\alpha-1}\omega(1-|z|)d\sigma_2(z)\right).$$

Теорема 2. *Пусть* $n>\alpha+1$, $h\in L^1(\Gamma)$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) T_h *является ограниченным оператором в* $H^1_n(\omega,\alpha)$;

2) h *можно представить в виде*

$$h(e^{i\theta})=\overline{h_1(e^{i\theta})}+h_2(e^{i\theta}),\quad \theta\in[-\pi,\pi],$$

где $h_1\in H_n(\omega,\alpha)$, $h_2\in H^\infty$.

При $n=\alpha+1$ имеет место

Теорема 3. *Пусть* $h\in H^\infty$, *тогда* 1) *следующие два утверждения равносильны:*

а) T_h *является ограниченным оператором в* $H^1_n(\omega,n-1)$;

б) $B_\omega(h)=\sup_{z\in D}\left\{|h'(z)|\frac{(1-|z|)^2}{\omega(1-|z|)}\int_{1-|z|}^{1}\frac{\omega(t)}{t^2}dt\right\}<+\infty.$

2) *Если* $h\in H^\infty$ *и* $B_\omega(h)=+\infty$, *то существует множество* M *второй категории в* $H(\omega,n-1)$ *такое, что для любой функции* $f\in M$ *и*

$$J_n(f)(z)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^z (z-t)^{n-1}f(t)\,dt.$$

Функция $T_h(J_n(f))$ не принадлежит классу $H_n^1(\omega,\ n-1)$.

Отметим, что при $\omega(t)=t$ теорема 3 ранее была установлена автором в (7).

Из теорем 1—3 следует

Теорема 4. *Пусть X совпадает с одним из вышеуказанных пространств, при этом, когда $X\Rightarrow H_n^1(\omega,\ \alpha)$, будем предполагать, что $n>\alpha+1$.*

Предположим, что $f\in X$ и J внутренняя функция, которая делит f, тогда fJ^{-1} принадлежит классу X.

3. *Голоморфные функции с модулем граничных значений из класса* $W_n^p(\Gamma)$. Приведенные результаты о делении на внутреннюю функцию показывают, что если функция f голоморфна в единичном круге и „гладка" в замкнутом круге в том или ином смысле, то функция

$$Q_f(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta\right\}$$

тоже обладает той же „гладкостью", что и функция f, по крайней мере, если слово „гладкость" означает принадлежность функций указанным классам.

Поскольку функция Q_f непосредственно определяется при помощи $|f(e^{i\theta})|$, то здесь естественно возникает следующая задача. Пусть $h(x)\geqslant 0$, $x\in[-\pi,\ \pi]$, $\lg h\in L^1$ и h является „гладкой" в определенном смысле, что можно сказать о гладкости внешней функции $Q_h: |Q_h(e^{i\theta})|=h(\theta)$, $\theta\in[-\pi,\ \pi]$ в замкнутом круге? Оказывается, что в такой постановке внешняя функция Q_h, вообще говоря, вдвое „хуже" функции h в отношении гладкости, если слово „гладкость", например, означает, принадлежность к какому-нибудь липшицевому классу α.

В работе (8) установлено, что если $h\in \mathrm{lip}\,\alpha$, $0<\alpha<1$, то внешняя функция $Q_h\in \mathrm{lip}(\overline{D},\ \alpha/2)$ и указанный порядок нельзя улучшить. В дальнейшем В. П. Хавин (9) распространил указанный результат на произвольные модули непрерывности $\omega(t)$ со свойством $\int_0 \frac{\omega(t)}{t}\,dt<+\infty$ (см. также (10,11)). Здесь мы приводим утверждение, из которого видно, что аналогичное явление имеет место и для других шкал гладких функций.

Теорема 5. *Пусть $h(x)\geqslant 0$, $\log h(x)\in L^1(-\pi,\ \pi)$, $h\in W_{2n}^p(\Gamma)$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$.*

Положим

$$Q(z)=\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log h(\theta)\,d\theta\right),\quad z\in D,$$

тогда $Q^{(n)}\in H^p$, *при этом существует функция* $h\in W^p_2(\Gamma)$ *такая, что* $Q'\notin H^{p_1}$ *для любого* $p_1: p_1>p$.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ

Տյոպլիցյան օպերատորներ և բաժանելիություն ներքին ֆունկցիայի վրա անալիտիկ ֆունկցիաների մի քանի տարածություններում

Միավոր շրջանում անալիտիկ և սահմանափակ h-ֆունկցիայի համար, հոդվածում դիտարկվում է

$$T_h(f)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)\overline{h(\zeta)}}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad |z|<1$$

օպերատորի սահմանափակությունը, շրջանում անալիտիկ և փակ շրջանում ողորկ ֆունկցիաների մի քանի տարածություններում։ Ապացուցվում է նաև, որ նշված տարածություններում միշտ հնարավոր է ֆունկցիան բաժանել իր ներքին մասի վրա։ Հոդվածի վերջին մասում ուսումնասիրվում է արտաքին ֆունկցիայի ողորկության կապը կախված նրա մոդուլի ողորկությունից շրջանագծի վրա։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *К. Гофман*, Банаховы пространства аналитических функций, ИЛ, М., 1963. [2] *В. Пеллер, С. Хрущев*, УМН, т. 37, вып. 1 (223) (1982). [3] *В. П. Хавин*, Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, т. 22 (1971). [4] *Ф. А. Шамоян*, там же. [5] *М. М. Джрбашян*, ДАН АрмССР, т. 3, № 1 (1945). [6] *М. М. Джрбашян*, Сообщ. Ин-та математики АН АрмССР, вып. 2, 1948. [7] *Ф. А. Шамоян*, Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, т. 39 (1974). [8] *В. П. Хавин, Ф. А. Шамоян*, там же, т. 19 (1970). [9] *В. П. Хавин*, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 6, № 2—3 (1971). [10] *Н. А. Широков*, Тр. мат. ин-та им. Стеклова, т. 150 (1978). [11] *I. E. Brennan*, Ark Math., vol. 15, № 1 (1977.)

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 3

УДК 62.50.19

КИБЕРНЕТИКА

Ю. М. Гаспарян, Н. А. Назарян

К оценке надежности систем со сложной структурой

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Атояном 14/VI 1982)

В теории надежности особое место занимают системы, исследование надежностных характеристик которых адекватно описывается булевыми моделями. В этом случае предполагается, что исследуемая система состоит из конечного числа элементов, каждый из которых может находиться в одном из двух состояний — полной работоспособности и полного отказа. Точно так же предполагается, что система может находиться в одном из двух указанных для элемента состояний. Если состояние i-го элемента обозначить через x_i, а состояние системы $-f$, то

$$x_i=\begin{cases}1, \text{ если } i\text{-й элемент находится в работоспособном состоянии}\\ 0, \text{ если } i\text{-й элемент отказал}\end{cases}$$

и

$$f=\begin{cases}1, \text{ если система находится в работоспособном состоянии}\\ Q, \text{ если система отказала.}\end{cases}$$

Предполагается, что система вполне определенным образом зависит от состояния элементов, т. е. $f=f(x_1, \ldots, x_n)$. Функцию $f(\tilde{x})$ назовем структурной функцией надежности системы. Очевидно, что структурная функция надежности представляет собой функцию алгебры логики, которая во многих случаях является монотонной функцией.

Отметим, что в настоящее время отсутствует приемлемый для практики способ определения структурной функции надежности систем и вычисления вероятности события $f(\tilde{x})=1$, что дает вероятность безотказной работы системы, если только исследуемая система имеет сложную структуру. В данной работе рассматривается метод оценки надежности систем со сложной структурой с использованием понятия активности аргументов булевых функций ([1]). Получены некоторые оценки вероятности безотказной работы.

Определение 1. Нормой булевой функции $f(\tilde{x})$ называется число

$$\|f(\tilde{x})\|=\sum_{\tilde{\alpha}\in E^n} P(\tilde{\alpha})\, f(\tilde{\alpha}), \qquad (1)$$

где $P(\tilde{\alpha})$—вероятность появления набора $\tilde{\alpha}=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\tilde{\alpha}\in E^n$,

$\sum\limits_{\tilde{\alpha}\in E^n} P(\tilde{\alpha})=1.$

Если аргументы функции $f(\tilde{x})$ статистически независимы, то

$$\|f(\tilde{x})\|=\sum_{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)\in E^n} P_1^{\alpha_1} \ldots P_n^{\alpha_n} f(\tilde{\alpha}),$$

где

$$P_i^{\alpha_i}=\begin{cases} P_i, & \text{если } \alpha_i=1 \\ 1-P_i, & \text{если } \alpha_i=0, \end{cases}$$

$P_i=\|x_i\|$—вероятность того, что x_i принимает значение 1. В дальнейшем, если не будут сделаны специальные оговорки, будем предполагать, что аргументы функции $f(\tilde{x})$ статистически независимы.

Легко доказываются следующие свойства нормы булевой функции:

1. Для булевых функций $f_1(\tilde{x})$ и $f_2(\tilde{x})$

$$\|f_1(\tilde{x})f_2(\tilde{x})\|=\|f_1(\tilde{x})\|\,\|f_2(\tilde{x})\|,$$

если $f_1(\tilde{x})$ и $f_2(\tilde{x})$ не имеют общих существенных аргументов;

2. $\|f_1(\tilde{x})\vee f_2(\tilde{x})\|=\|f_1(\tilde{x})\|+\|f_2(\tilde{x})\|-\|f_1(\tilde{x})f_2(\tilde{x})\|;$

3. $\|f_1(\tilde{x})\oplus f_2(\tilde{x})\|=\|f_1(\tilde{x})\|+\|f_2(\tilde{x})\|-2\|f_1(\tilde{x})f_2(\tilde{x})\|;$

4. $\|\bar{f}(\tilde{x})\|=1-\|f(\tilde{x})\|.$

Обозначение 1. Функцию, полученную из $f(\tilde{x})$ подстановкой вместо переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} (1\leqslant i_1< i_2< \ldots < i_k\leqslant n)$ соответственно констант $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$, обозначим через $f^{i_1,\ldots,i_k}_{\sigma_1,\ldots,\sigma_k}(\tilde{x})$ и назовем подфункцией функции $f(\tilde{x})$.

Определение 2. Производной булевой функции $f(\tilde{x})$ по совокупности аргументов $\tilde{x}_{i_1,\ldots,i_k}=\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$; $(1\leqslant i_1< \ldots < i_k\leqslant n)$ называется функция

$$\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_{i_1,\ldots,i_k}}=f(\tilde{x})\oplus f(x_1, \ldots, \bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_k}, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Определение 3. Активностью функции $f(\tilde{x})$ по совокупности аргументов $\tilde{x}_{i_1,\ldots,i_k}$; $(1\leqslant i_1< \ldots < i_k\leqslant n)$ называется норма производной этой функции по совокупности аргументов $\tilde{x}_{i_1,\ldots,i_k}$ (1), т. е.

$$\omega^{f(\tilde{x})}_{i_1,\ldots,i_k}=\left\|\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_{i_1,\ldots,i_k}}\right\|. \tag{3}$$

Пусть $f(\tilde{x})$ является монотонной функцией. Тогда можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 1.

$$\|f(\tilde{x})\|=\|x_i\|_{\omega_i^{f(\tilde{x})}}+\|f_0^i(\tilde{x})\|. \tag{4}$$

Доказательство. Легко получить следующее представление булевой функции по аргументу x_i; $i=\overline{1, n}$:

$$f(\tilde{x})=x_i \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} \oplus f_0^i(\tilde{x}). \tag{5}$$

Применив свойство 3 нормы булевой функции на (5), получим

$$\|f(\tilde{x})\|=\left\|x_i \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i}\right\|+\|f_0^i(\tilde{x})\|-2\left\|x_i \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} \cdot f_0^i(\tilde{x})\right\|. \tag{6}$$

Можно показать, что для монотонной функции $f(\tilde{x})$ $\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} f_0^i(\tilde{x}) \equiv 0$, для любого i; $i=\overline{1, n}$.

В самом деле, известно ([1]), что

$$\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i}=f_0^i(\tilde{x}) \oplus f_1^i(\tilde{x}). \tag{7}$$

Тогда

$$\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} f_0^i(\tilde{x}) \equiv f_0^i(\tilde{x}) \oplus f_0^i(\tilde{x}) f_1^i(\tilde{x}) \equiv f_0^i(\tilde{x}) \oplus f_0^i(\tilde{x}) \equiv 0, \quad i=\overline{1, n}. \tag{8}$$

Здесь использовано свойство монотонной функции

$$f_0^i(\tilde{x}) f_1^i(\tilde{x}) \equiv f_0^i(\tilde{x}), \quad i=\overline{1, n}. \tag{9}$$

Учитывая (8) и свойство 1 нормы функции $f(\tilde{x})$, из (6) получим

$$\|f(\tilde{x})\|=\|x_i\|_{\omega_i^{f(\tilde{x})}}+\|f_0^i(\tilde{x})\|, \quad i=\overline{1, n},$$

что и требовалось доказать.

Используя (4), в общем случае для некоторой последовательности аргументов $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n)$ норму монотонной функции $f(\tilde{x})$ можно представить в следующей форме:

$$\|f(\tilde{x})\|=\|x_{i_1}\|_{\omega_{i_1}^{f(\tilde{x})}}+\|x_{i_2}\|_{\omega_{i_2}^{f_0^{i_1}(\tilde{x})}}+\ldots+\|x_{i_k}\|_{\omega_{i_k}^{f_{0,\ldots,0}^{i_1,\ldots,i_{k-1}}(\tilde{x})}}+$$
$$+\|f_{0,\ldots,0}^{i_1,\ldots,i_k}(\tilde{x})\|=\sum_{j=1}^{k}\|x_{i_j}\|_{\omega_{i_j}^{f_{0,\ldots,0}^{i_1,\ldots,i_{j-1}}(\tilde{x})}}+\|f_{0,\ldots,0}^{i_1,\ldots,i_k}(\tilde{x})\|. \tag{10}$$

Пусть $f(\tilde{x}) \not\equiv \sigma$, $\sigma \in \{0, 1\}$ и конъюнкция $x_{i_1} \ldots x_{i_k}$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n)$ является простой импликантой функции $\bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$. Тогда из (10) и с учетом того, что

$$\|f_{0,\ldots,0}^{i_1,\ldots,i_k}(\tilde{x})\|=0,$$

можно написать

$$\|f(\tilde{x})\|=\sum_{j=1}^{n}\|x_{i_j}\|_{\omega_{i_j}^{f_{0,\ldots,0}^{i_1,\ldots,i_{j-1}}(\tilde{x})}}, \tag{11}$$

При записи (10) и (11) использовано обозначение $f_0^{i_0}(\tilde{x}) \equiv f(\tilde{x})$. При $f(\tilde{x}) \neq 1$ для последовательности $x_1, \ldots, x_n$ из (10) получим

$$\|f(\tilde{x})\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \omega_i^{f_{0,\ldots,0}^{1,\ldots,i-1}(\tilde{x})}, \quad f_0^0(\tilde{x}) \equiv f(\tilde{x}). \tag{12}$$

Лемма 1. *Для того чтобы функция $f(\tilde{x})$ была монотонной, необходимо и достаточно, чтобы* $\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} f_0^i(\tilde{x}) \equiv 0$ для всех $i = \overline{1, n}$.

Лемма 2. *Для того чтобы $f(\tilde{x})$ была монотонной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|x_i\| \omega_i^{f(\tilde{x})} + \|f_0^i(\tilde{x})\| = \|f(\tilde{x})\|; \quad i = \overline{1, n}. \tag{13}$$

Предполагается, что $\|x_i\| > 0$.

Следствие 1. Для монотонных функций, и только для них, выполняется равенство

$$\|x_i\| \omega_i^{f(\tilde{x})} - \|x_j\| \omega_j^{f(\tilde{x})} = \|f_0^j(\tilde{x})\| - \|f_0^i(\tilde{x})\| \tag{14}$$

для любого i, j; $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$.

Теперь, используя известное представление булевой функции по аргументу x_i, $i = \overline{1, n}$

$$f(\tilde{x}) = \bar{x}_i \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} \oplus f_1^i(\tilde{x}) \tag{15}$$

и свойство 3 нормы булевой функции, можно написать

$$\|f(\tilde{x})\| = \left\| \bar{x}_i \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} \right\| + \|f_1^i(\tilde{x})\| - 2 \left\| \bar{x}_i \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} f_1^i(\tilde{x}) \right\|. \tag{16}$$

Аналогично доказательству (4) из (16) можно получить

$$\|f(\tilde{x})\| = \|f_1^i(\tilde{x})\| - (1 - \|x_i\|) \omega_i^{f(\tilde{x})}; \quad i = \overline{1, n}. \tag{17}$$

В общем случае для некоторой выбранной последовательности переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n)$ из (17) получим

$$\|f(\tilde{x})\| = \|f_{1,\ldots,1}^{i_1,\ldots,i_k}(\tilde{x})\| - (1 - \|x_{i_1}\|) \omega_{i_1}^{f(\tilde{x})} - \ldots -)1 - \|x_{i_k}\|) \omega_{i_k}^{f_{1,\ldots,1}^{i_1,\ldots,i_{k-1}}(\tilde{x})}. \tag{18}$$

Пусть $x_{i_1} \ldots x_{i_m}$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n)$ является простой импликантой функции $f(\tilde{x})$. Тогда из (17) и с учетом того, что

$$\|f_{1,\ldots,1}^{i_1,\ldots,i_m}(\tilde{x})\| = 1$$

получим

$$\|f(\tilde{x})\| = 1 - \sum_{j=1}^{m} (1 - \|x_{i_j}\|) \omega_{i_j}^{f_{1,\ldots,1}^{i_1,\ldots,i_{j-1}}(\tilde{x})}. \tag{19}$$

В (17) и (18) принято обозначение

$$f_1^{i_0}(\tilde{x}) \equiv f(\tilde{x}).$$

При $f(\tilde{x}) \not\equiv 0$ для последовательности переменных $x_1, \ldots, x_n$ можно написать

$$\|f(\tilde{x})\| = 1 - \sum_{i=1}^{n} (1 - \|x_i\|) \omega_i^{f_{1,\ldots,1}^{1,\ldots,i-1}(\tilde{x})}; \quad f_1^0(\tilde{x}) \equiv f(\tilde{x}). \tag{20}$$

Лемма 3. *Для того чтобы функция $f(\tilde{x})$ была монотонной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} f_1^i(\tilde{x}) \equiv \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} \text{ для любого } i, \; i = \overline{1, n}. \tag{21}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы (1).

Лемма 4. *Для того чтобы функция $f(\tilde{x})$ была монотонной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|f_1^i(\tilde{x})\| - (1 - \|\tilde{x}_i\|) \omega_i^{f(\tilde{x})} = \|f(\tilde{x})\|, \quad i = \overline{1, n}. \tag{22}$$

Для выяснения физической сущности активности аргумента булевой функции $f(\tilde{x})$ поступим следующим образом. Из (4) можно написать

$$\|f_0^i(\tilde{x})\| + \|x_i\| \omega_i^{f(\tilde{x})} = \|x_i\| \|f_1^i(\tilde{x})\| + (1 - \|x_i\|) \|f_0^i(\tilde{x})\|; \quad i = \overline{1, n},$$

отсюда

$$\omega_i^{f(\tilde{x})} = \|f_1^i(\tilde{x})\| - \|f_0^i(\tilde{x})\|. \tag{23}$$

Учитывая (23) и (4), получим

$$\frac{\partial \|f(\tilde{x})\|}{\partial \|x_i\|} = \|f_1^i(\tilde{x})\| - \|f_0^i(\tilde{x})\| = \omega_i^{f(\tilde{x})}, \tag{24}$$

т. е. активность функции $f(\tilde{x})$ относительно переменной x_i представляет собой чувствительность $f(\tilde{x})$ по аргументу x_i.

Из (12) можно получить

$$\omega_1^{f(\tilde{x})} = \frac{\partial \|f(\tilde{x})\|}{\partial \|x_1\|};$$

$$\omega_2^{f(\tilde{x})} = \frac{\partial \|f(\tilde{x})\|}{\partial \|x_2\|} = \|x_1\| \frac{\partial \omega_1^{f(\tilde{x})}}{\partial \|x_2\|} + \omega_2^{f_0^1(\tilde{x})};$$

. . . .

$$\omega_n^{f(\tilde{x})} = \frac{\partial \|f(\tilde{x})\|}{\partial \|x_n\|} = \|x_1\| \frac{\partial \omega_1^{f(\tilde{x})}}{\partial \|x_n\|} + \|x_2\| \frac{\partial \omega_2^{f_0^1(\tilde{x})}}{\partial \|x_n\|} +$$

$$\ldots + \|x_{n-1}\| \frac{\partial \omega_{n-1}^{f_{0,\ldots,0}^{1,\ldots,n-2}(\tilde{x})}}{\partial \|x_n\|} + \omega_n^{f_{0,\ldots,0}^{1,\ldots,n-1}(\tilde{x})}. \tag{25}$$

Из (12) и (25) можно получить следующее равенство:

$$\|f(\tilde{x})\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \omega_i^{f(\tilde{x})} - \|x_1\| \sum_{i=2}^{n} \|x_i\| \frac{\partial \omega_1^{f(\tilde{x})}}{\partial \|x_i\|} -$$

$$-\|x_2\|\sum_{i=3}^{n}\|x_i\|\frac{\partial\omega_{f_{0}}^{\;1}{}_{2}(\tilde{x})}{\partial\|x_i\|}-\ldots-\|x_{n-1}\|\|x_n\|\frac{\partial\omega_{f_{0,\ldots,0}}^{\;1,\ldots,n-1}{}_{n-1}(\tilde{x})}{\partial\|x_n\|}. \tag{26}$$

В заключение отметим, что равенства (12) и (18) можно использовать для точного вычисления вероятности безотказной работы системы со сложной структурой, когда известны вероятности безотказной работы элементов. Активности, участвующие в этих равенствах, показывают чувствительность надежности системы со сложной структурой относительно надежности элементов. Знание величин активностей позволяет решить задачи по оптимальному резервированию систем со сложной структурой.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

ՅՈՒ. Մ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ, Ն. Հ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ

Բարդ համակարգերի հուսալիության գնահատման մասին

Աշխատանքում բերված են մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների նորմաների ներկայացումներ, որոնք հնարավորություն են տալիս հաշվելու բարդ կառուցվածք ունեցող համակարգերի հուսալիությունը։ Ստացված ներկայացումներում մասնակցում են մեծություններ, որոնք բնորոշում են առանձին էլեմենտների կշիռը համակարգի հուսալիության մեջ։ Ունենալով էլեմենտների կշիռները, կարելի է լուծել օպտիմալ պահեստավորման խնդիրներ բարդ համակարգերի համար։

Ստացված են բուլյան ֆունկցիաների մոնոտոն լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ։

Աշխատանքում ստացված արդյունքները հնարավորություն են ստեղծում լուծելու բարդ համակարգերի օպտիմալ կառուցվածքներ ստանալու խնդիրը, որը մեծ նշանակություն ունի ժամանակակից էլեկտրոնային հաշվիչ մեքենաների և նրանցից բաղկացած համակարգերի նախագծման համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ш. Е. Бозоян*, Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, № 5, 1975. [2] *К. Райншке*, Модели надежности и чувствительности систем, Мир, М., 1979.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 3

УДК 532.546

МЕХАНИКА

Р. М. Барсегян

Осесимметричная задача теории фильтрации в неоднородных деформируемых грунтах

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 5/V 1982)

Сильносжимаемые водонасыщенные грунты широко распространены, поэтому их использование в качестве оснований сооружений становится актуальной проблемой. Осадка сооружений над сильносжимаемыми грунтами достигает больших величин (до 2,5 м), а ее стабилизация длится до нескольких десятилетий [1].

Распространим идею об учете изменений соотношений между жидкой и твердой фазами грунта в процессе фильтрации [2] на случай осесимметричной фильтрации. С этой целью введем следующую гипотезу: деформация водонасыщенного грунта под действием внешней нагрузки происходит в основном по направлению действия силы и деформациями в других направлениях можно пренебречь относительно деформации грунта по направлению действующей нагрузки.

Вывод основных уравнений осесимметричной фильтрации базируется на следующих зависимостях:

1. закон Дарси—Герсеванова, учитывающий движение жидкости относительно движущегося скелета деформируемого грунта

$$U_z-\varepsilon V_z=-K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}, \tag{1}$$

где U_z и V_z—проекции скорости воды и скелета соответственно на ось oz; ε—коэффициент пористости; $K_z(H)$—коэффициент фильтрации по направлению z; H—напор;

2. закон Дарси

$$U_r=-K_r(H)\frac{\partial H}{\partial r}, \tag{2}$$

где $K_r(H)$—коэффициент фильтрации; U_r—проекция скорости воды по направлению r;

3. уравнение неразрывности жидкой фазы, которое с учётом сжимаемости воды (по закону Гука) имеет вид

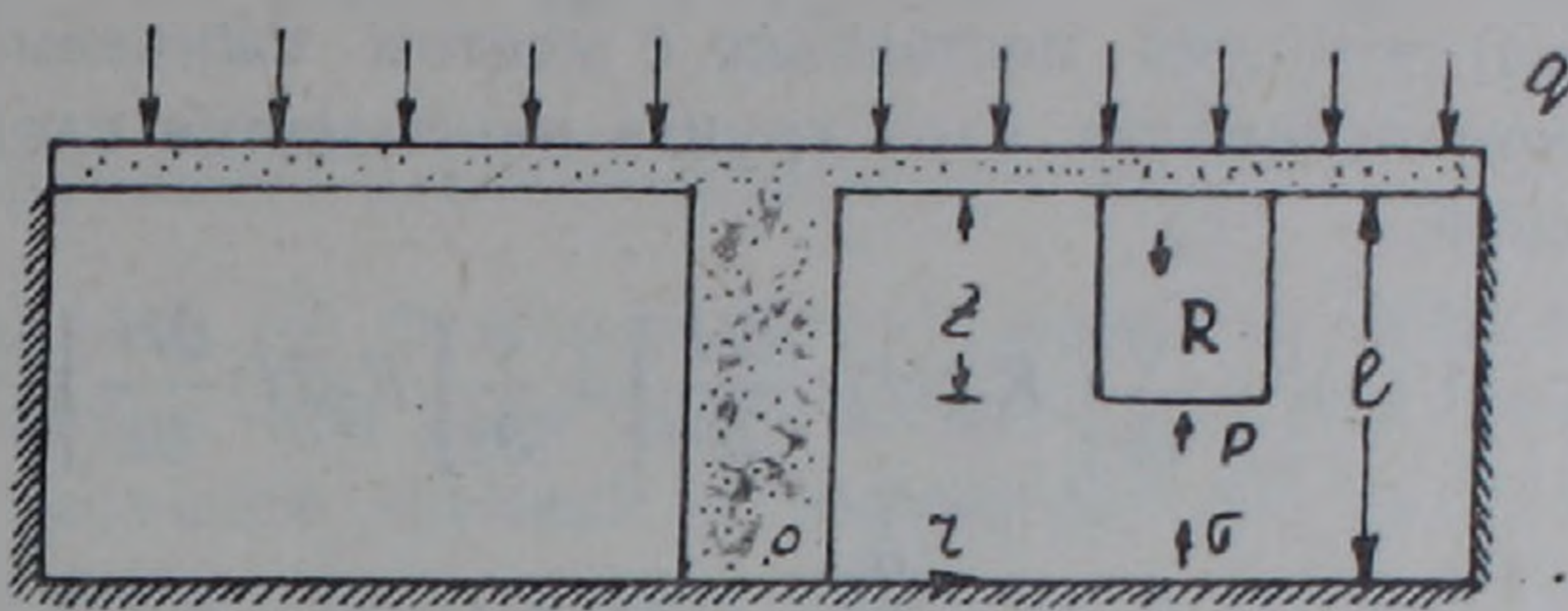
$$\frac{\partial(\gamma n)}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\gamma r U_r)}{\partial r}+\frac{\partial(\gamma U_z)}{\partial z}=0, \tag{3}$$

где γ—объемный вес воды; n—пористость;

4. уравнение неразрывности для твердой фазы

$$\frac{\partial V_z}{\partial z}+\frac{\partial m}{\partial t}=0 \qquad (m+n=1); \tag{4}$$

5. уравнение равновесия, учитывающее изменение соотношений между фазами грунта в любой момент времени ([2,3]) (рисунок)



$$q+R=q+\int\limits_{S(t)}^{z}\left(\gamma\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}+\frac{\gamma_s}{1+\varepsilon}\right)dz=\sigma+P, \tag{5}$$

где q—внешняя нагрузка; γ_s—удельный вес скелета; $S(t)$—осадка слоя деформируемого грунта мощностью l в момент времени t; σ—напряжение в скелете; P—давление в воде;

$$R=\int\limits_{S(t)}^{z}\frac{\gamma\varepsilon+\gamma_s}{1+\varepsilon}\,dz \tag{6}$$

есть масса водонасыщенного грунта в пределах призмы высотой z и с площадью сечения основания, равной единице.

В теории фильтрационной консолидации Терцаги—Флорина ([4]) выражение R в (5) является постоянной величиной $R=\gamma_{\text{нас}}z$ на весь период фильтрации. Поэтому изменение характеристик грунта в процессе фильтрации не учитывается, тогда как рассмотрение величины R в интегральной форме в уравнении (5) учитывает изменение соотношений между фазами грунта в виде изменений параметров грунта в процессе фильтрации.

О необходимости рассмотрения величины R в виде функции от z и t по (6) свидетельствует следующая простая оценка:

$$\frac{R_{\text{п}}-R_{\text{к}}}{R_{\text{п}}}>\frac{S_\infty}{l}, \tag{7}$$

где $R_{\text{п}}$ и $R_{\text{к}}$—соответственно первоначальное и конечное значения массы R, S_∞—конечная осадка слоя грунта мощностью l;

6. компрессионная зависимость

$$\varepsilon=f(\sigma), \tag{8}$$

в частности для линейно-деформируемых сред $f(\sigma)=-a\sigma+\text{const}$, где a—коэффициент уплотнения;

7. зависимость напора и давления

$$H=\frac{1}{\gamma}P+z. \tag{9}$$

С помощью зависимостей (1)—(5), (8) и (9) обычным способом находим, что осесимметричная фильтрация в деформируемом слое грунта под действием внешней нагрузки (или под действием собственного веса) в общей постановке с учетом сжимаемости воды и переменной проницаемости слоя грунта описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=(1+\varepsilon)\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[K_r(H)r\frac{\partial H}{\partial r}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right]\right\}-$$

$$-\frac{\gamma\varepsilon+\gamma_s}{1+\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\sigma}\int\limits_{S(t)}^{z}\frac{\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}}{(1+\varepsilon)^2}dz+\frac{\varepsilon\gamma}{E_B}\frac{\partial H}{\partial t}; \tag{10}$$

$$q+\int\limits_{S(t)}^{z}\frac{\gamma\varepsilon+\gamma_s}{1+\varepsilon}dz=\sigma+P;$$

$\varepsilon=f(\sigma)$; $H=\frac{1}{\gamma}P+z$; E_B — модуль объемного сжатия воды.

Из (10) в частности для линейно-деформируемых сред получим следующее уравнение осесимметричной фильтрации в деформируемых грунтах:

$$\left(\frac{\varepsilon}{E_B}+a\right)\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{a}{\gamma}\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{1+\varepsilon}{\gamma}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[K_r(H)r\frac{\partial H}{\partial r}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right]\right\}+$$

$$+\frac{a(\gamma-\gamma_s)}{\gamma}\int\limits_{S(t)}^{z}\frac{1}{1+\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right]dz+\frac{aS'(t)}{\gamma}\frac{\gamma\varepsilon(S(t);t)+\gamma_s}{1+\varepsilon(S(t);t)}. \tag{11}$$

Коэффициент пористости ε в уравнениях фильтрации обычно осредняют. Вопрос о возможности такого осреднения исследован в ([2]). Для осредненного $\varepsilon_{ср}$ из (11) получим основное уравнение фильтрации в деформируемых грунтах

$$\eta^*\frac{\partial H}{\partial t}=\eta_1\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[K_rH(r)\frac{\partial H}{\partial r}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right]+$$

$$+\eta_2\left[K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right]\Bigg|_{S(t)}^{z}+\eta_3, \tag{12}$$

где

$$\eta^*=\frac{\gamma}{1+\varepsilon_{ср}}\left(a+\frac{\varepsilon_{ср}}{E_B}\right);\quad \eta_1=\frac{a}{1+\varepsilon_{ср}};\quad \eta_2=\frac{a(\gamma-\gamma_s)}{(1+\varepsilon_{ср})^2};$$

$$\eta_3=\frac{aS'(t)(\gamma\varepsilon_{ср}+\gamma_s)}{(1+\varepsilon_{ср})^2}.$$

Если $q=\mathrm{const}$ и $K_r(H)=K_z(H)=K(H)$, то из (12) имеем

$$\eta^* \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[K(H) r \frac{\partial H}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[K(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right] + \eta_2\left[K(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right]\Bigg|_{S(t)}^{z} + \eta_3. \quad (13)$$

При $K=\text{const}$ из (13) следует уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^*\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right] + \eta_2 a^* \frac{\partial H}{\partial z}\Bigg|_{S(t)}^{z} + \frac{\eta_3}{\eta^*}, \quad (14)$$

где a^* — коэффициент пьезопроводности $a^* = \dfrac{K}{\eta_1^*}$.

В выражение (6) функцию $\varepsilon(z, t)$ можно осреднять по z, относительная ошибка при этом будет меньше, чем $\Delta\varepsilon$. Действительно, для любого момента времени t выражение (6) по оценкам определенного интервала удовлетворяет следующим неравенствам:

$$R_{\min} \leqslant R_l \leqslant R_{\max},$$

где

$$R_{\min} = [l - S(t)]\left(\gamma + \frac{\gamma_T}{1+\varepsilon^*}\right); \quad R_l = \int\limits_{S(t)}^{l}\left(\gamma + \frac{\gamma_T}{1+\varepsilon}\right)dz;$$

$$R_{\max} = [l - S(t)]\left(\gamma + \frac{\gamma_T}{1+\varepsilon^{**}}\right); \quad \varepsilon^* = \max_z \varepsilon(z, t); \quad \varepsilon^{**} = \min_z \varepsilon(z, t);$$

$$\gamma_T = \gamma_s - \gamma.$$

Поэтому

$$\frac{R_{\max} - R_{\min}}{R_{\max}} = \frac{\gamma_T(\varepsilon^* - \varepsilon^{**})}{(1+\varepsilon^*)[\gamma(1+\varepsilon^{**}) + \gamma_T]} < \varepsilon^* - \varepsilon^{**} = \Delta\varepsilon.$$

Для осредненного по z коэффициента пористости ε уравнение равновесия (5) заменяется следующим уравнением ([2]):

$$q + R = q + z\frac{\gamma\varepsilon + \gamma_s}{1+\varepsilon} = \sigma + P.$$

Тогда вместо основных дифференциальных уравнений (10)—(14) получим более простые уравнения. Так например, система уравнений (10) для этого случая получит вид (при $K_z = K_r = K(H)$)

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{E_B \dfrac{d\varepsilon}{d\sigma}}\right)\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{1 + \varepsilon(H) - [z - S(t)]\dfrac{\gamma - \gamma_s}{1+\varepsilon(H)}\dfrac{d\varepsilon}{d\sigma}}{\gamma\dfrac{d\varepsilon}{d\sigma}}\frac{\partial}{\partial z}\left[K(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right] -$$

$$- \frac{1+\varepsilon(H)}{\gamma\dfrac{d\varepsilon}{d\sigma}}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[K(H) r\frac{\partial H}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[K(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right]\right\}. \quad (15)$$

Уравнение, соответствующее (11), будет

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{aE_B}\right)\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1 + \varepsilon(H) + [z - S(t)]\dfrac{\gamma - \gamma_s}{1+\varepsilon(H)}a}{\gamma a}\frac{\partial}{\partial z}\left[K(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right] +$$

$$+ \frac{1+\varepsilon(H)}{\gamma a}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[K(H) r\frac{\partial H}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[K(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right]\right\}. \quad (16)$$

Аналогичные относительно (12)—(14) уравнения имеют вид соответственно:

$$\eta^* \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left[K_r(H) r \frac{\partial H}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(H) \frac{\partial H}{\partial z} \right] +$$

$$+ (1+\eta_4) \frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(H) \frac{\partial H}{\partial z} \right] + \eta_1 \frac{\partial q}{\partial t}; \tag{17}$$

$$\eta^* \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(K r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial H}{\partial z} \right)(1+\eta_4); \tag{18}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^* \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right] + a_0^* \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}, \tag{19}$$

где

$$\eta_4 = \frac{[z - S(t)](\gamma - \gamma_s) a}{(1+\varepsilon_{cp})^2}; \quad a_0^* = \frac{K\eta_4}{\eta^*} + a^*.$$

Из полученных выше уравнений, в частности (16)—(19), как частные случаи следуют уравнения фильтрационной консолидации грунтов и уравнения упругого режима осесимметричной фильтрации. Принимая в уравнении равновесия (6) $R = \text{const}$, приходим к основным уравнениям фильтрационной консолидации грунтов. При $R = R(t)$ (для осредненного ε по z), считая грунт линейно-деформируемой средой, приходим к уравнениям упругого режима осесимметричной фильтрации. Таким образом полученные новые уравнения являются более общими, нежели существующие в настоящее время уравнения осесимметричной фильтрации, и учитывают деформируемость грунта в процессе фильтрации.

Граничные условия должны учитывать переменность мощности слоя в процессе фильтрации ([2]). Начальное условие ставится в зависимости от того, принимается движущаяся в порах грунта жидкость сжимаемой или несжимаемой.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ռ. Մ. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

Սեղմելի անհամասեռ գրունտներում ֆիլտրացիայի տեսության առանցքային սիմետրիկ խնդիր

Աշխատանքում արտածվում են առանցքային սիմետրիա ունեցող ֆիլտրացիայի հիմնական դիֆերենցիալ հավասարումները ջրահագեցած գրունտներում։ Այդ հավասարումները հաշվի են առնում ֆիլտրացիայի ընթացքում կարծրի և հեղուկ ֆազերի փոփոխությունները՝ կախված հողաշերտի սեղմվելու հետ։ Նման մոտեցում նախկինում առաջին անգամ կիրառվում է մեր կողմից անհամասեռ միջավայրում հեղուկի հարթ շարժումները դիտարկելիս։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. А. Цытович* и др., Прогноз скорости осадок оснований сооружений, Изд. лит. по строительству, М., 1967. [2] *Р. М. Барсегян*, Методы решения задач теории фильтрации в неоднородных средах, Изд. Ереванского ун-та, Ереван, 1977. [3] *Р. М. Барсегян*, ДАН СССР, т. 214, № 4 (1974). [4] *В. А. Флорин*, Основы механики грунтов, т. 2, Госстройиздат, Л., 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 3

УДК 531.36

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

В. Т. Аванян

Некоторые теоремы к теории устойчивости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 1/VI 1982)

В работе рассматривается задача об устойчивости процесса на заданном бесконечном интервале времени в постановке К. А. Абгаряна (1).

В (2) доказаны общие теоремы о K_Δ^ω-устойчивости и асимптотической устойчивости, а в этой работе приведены две общие теоремы о неустойчивости, а также одна обобщенная теорема о K_Δ^ω-устойчивости неавтономной нелинейной системы по линейному приближению.

1. По известной схеме, через построение функций Ляпунова нетрудно доказать следующие две общие теоремы о неустойчивости:

Теорема 1.1. *Если при любой матрице* $G(t)\in K_\Delta^\omega$ *для полной производной по* t $\dot V(t, x)$ *функции*

$$V(t, x)=(G^{-1}(t)x(t), \quad G^{-1}(t)x(t))$$

в силу уравнения возмущенного процесса при некотором $t_0>a$ *в любой окрестности* $\|x\|<b$ $(b>0)$ *найдется точка* $(t_0, x(t_0))$, *где*

$$\dot V(t_0, x(t_0))>0,$$

то невозмущенный процесс неустойчив на $\Delta=[t_0, \infty)$.

Теорема 1.2. *Если полная производная по* t *любой положительно определенной эрмитовой формы*

$$V(t, x)=(H(t)x, x),$$

у которой

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i^{-1}(t)=\omega^2(t)$$

($\mu_i(t)$—*собственные значения эрмитовой матрицы* $H(t)$) *в силу уравнения возмущенного процесса в области* $\|x(t)\|\leqslant h<\infty$ *имеет вид*

$$\dot V(t, x)=\lambda V(t, x)+W(t, x),$$

где λ—*положительная постоянная, а* $W(t, x)$ *или тождественно обращается в нуль, или знакоположительная функция, то невозмущенный процесс неустойчив на* $\Delta=[t_0, \infty)$.

2. Условия K_Δ^ω-устойчивости невозмущенного процесса, описы-

ваемого неавтономной нелинейной системой ([4,5]), основаны на теореме о диагонализации линейной системы (теорема 2.2, гл. XV, § 2 ([1])). Эта теорема определяет общий вид матрицы преобразования линейной системы к диагональному виду. Однако чтобы воспользоваться этим преобразованием, нужно располагать фундаментальной матрицей $X(t)$ линейной системы. В некоторых случаях определение $X(t)$, а также и матрицы преобразования линейной системы к диагональному виду не представляет труда. Но все же случаи, когда могут быть найдены точные выражения для $X(t)$ в конечном виде, исключены. В то же время имеется возможность построения матрицы преобразования линейной дифференциальной системы к системе, „близкой" к диагональной. В связи с этим представляется целесообразным построение достаточных условий $K^{\bullet}_{\Delta}$-устойчивости, основанных на преобразованиях такого рода.

Допустим, что $K(t)=(K_1(t), \ldots, K_n(t))$—матрица Ляпунова, столбцы которой имеют одинаковую эрмитову норму (см. ([5])), а именно на $[a, \infty)$

$$\|K_j(t)\|=\omega \ (j=1, \ldots, n) \text{ и } \dot{K}(t)=AK-K\Lambda+N,$$

где $\Lambda=\operatorname{diag}\{\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)\}$, а N—некоторая квадратная матрица порядка n, ограниченная по норме.

Пусть возмущенный процесс описывается уравнением

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+h(t, x), \tag{2.1}$$

где $A(t)$—$n\times n$—матрица, непрерывная на $[a, \infty)$, $\|A(t)\|\leqslant a_0<\infty$, и такая, что каждое решение $x(t)$ уравнения

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)$$

ограничено на $[a, \infty)$; $h(t, x)$—$n\times 1$—матрица, элементы которой (нелинейные функции отклонений x_s) таковы, что равномерно по t на $[a, \infty)$ выполняется соотношение

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{h(t, x)}{\|x\|}=0.$$

Замена переменных $x=K(t)y$ приводит уравнение (2.1) к виду

$$\dot{y}(t)=\Lambda(t)y-K^{-1}(t)N(t)y+K^{-1}(t)h(t, Ky).$$

Полная производная от положительно определенной эрмитовой функции

$$V(t, x)=(K^{-1}(t)x, K^{-1}(t)x)\equiv\|y\|^2$$

по t в силу уравнения (2.1) в данном случае представляется в виде,

$$\dot{V}(t, x)=2\|y\|^2\varphi(t, y(t))+2\operatorname{Re}(y^*K^{-1}h), \tag{2.2}$$

где

$$\varphi(t, y(t))=\sum_{\sigma=1}^{n}\operatorname{Re}\lambda_\sigma\frac{|y_\sigma|^2}{\|y\|^2}+\frac{y^*Py}{\|y\|^2};$$

$$P=-\frac{1}{2}(K^{-1}N+N^*K^{-1*}).$$

Из (2.2) имеем

$$V(t,\ x)=V(t_0,\ x_0)\left\{1+\left[\exp\int_{t_0}^{t}2\varphi(t',\ y(t'))dt'-1\right]+(t-t_0)\psi(t,\ y)\right\},$$

где

$$\psi(t,\ y)=\frac{2}{(t-t_0)\|y_0\|^2}\int_{t_0}^{t}\exp 2\int_{t'}^{t}\varphi(\tau,\ y)d\tau\,\mathrm{Re}(y^*K^{-1}h)dt'.$$

Нетрудно показать, что равномерно по t на $[t_0,\ \infty)$

$$\lim_{y\to 0}\psi(t,\ y)=0.$$

Обозначив $\mu_0(t)=\max\limits_{\sigma}\mathrm{Re}\lambda_\sigma(t)$, $\nu_{max}(t)$—максимальное собственное значение эрмитовой матрицы P, можно доказать следующую теорему.

Теорема. *Если для всех* $t\in[t_0,\ \infty)$

$$\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}[\mu_0(\tau)+\nu_{max}(\tau)]d\tau\leqslant-b<0,$$

то невозмущенный процесс K_Δ^ω*-устойчив.*

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Վ. Տ. ԱՎԱՆՅԱՆ

Մի քանի թեորեմներ կայունության տեսության մասին

Կ. Ա. Աբգարյանի տեսությամբ ապացուցված են երկու թեորեմներ ոչ կայունության մասին և մեկ ընդհանրացված թեորեմ՝ ոչ ավտոնոմ սիստեմի գծային մոտարկումով կայունության մասին։

Ոչ ավտոնոմ սիստեմի ուսումնասիրության համար նրա առաջին մոտավորության հավասարումը բերվում է «համարյա» անկյունագծային տեսքի, որի միջոցով պարզվում է այդ սիստեմի կայունության հարցը։

Ոչ կայունության մասին թեորեմներն ապացուցված են Լյապունովի երկրորդ եղանակով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *К. А. Абгарян*, в кн.: Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем, М., Наука, 1973. [2] *К. А. Абгарян, В. Т. Аванян*, Тр. Моск. авиационного ин-та, вып. 339 (1975). [3] *К. А. Абгарян*, ПММ, т. 39, вып. 5 (1975). [4] *К. А. Абгарян, В. Т. Аванян*, ПММ, т. 41, вып. 5 (1977). [5] *В. Т. Аванян*, Изв. АН АрмССР, Механика, т. 31, № 4 (1978).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 3

УДК 536.531

ФИЗИКА

Т. С. Золян

Проводимость на переменном токе системы V—O—P

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. М. Авакянцем 25/VIII 1981)

Имеется ряд данных по электрофизическим свойствам пятиокиси ванадия, позволяющих полагать, что механизм проводимости в ней осуществляется при высоких температурах путем движения поляронов малого радиуса посредством случайных перескоков между разновалентными ионами переходного металла ([1-8]).

Одним из обоснований такого заключения является и исследование частотной зависимости неупорядоченного состояния, которое характерно для пятиокиси ванадия в жидкой фазе или с сильной стеклообразующей примесью типа пятиокиси фосфора, приводящей при 20%-ной добавке к V_2O_5 к образованию ванадий-фосфатного стекла типа $(V_2O_5)_{0.8} \cdot (P_2O_5)_{0.2}$ ([8,10]).

Непосредственное измерение пятиокиси ванадия в жидкой фазе при температуре около 730° показало, что до 40 кГц проводимость изменяется практически незначительно по сравнению с проводимостью на постоянном токе, тогда как при 200 кГц проводимость увеличивается почти вдвое.

Более сильная зависимость наблюдается в случае стеклообразных соединений в системе V—O—P, в частности $(V_2O_5)_{0.8} \cdot (P_2O_5)_{0.2}$.

Для приготовления стекол указанного состава навески в виде 80% V_2O_5 и 20% P_2O_5 засыпали в кварцевые ампулы, нагревали до жидкого состояния и в течение 50—60 мин приводили в равновесное состояние путем интенсивной вибрации в воздушной среде.

Приготовленные таким образом вещества имели типичный для стекол блеск и черный цвет, были непрозрачны и легко вытягивались при температуре размягчения стекла.

Для проведения частотных измерений изготовлялся образец в виде монолитной пленки (пластинки) состава $(V_2O_5)_{0.8} \cdot (P_2O_5)_{0.2}$ толщиной 0,1 мм с вплавленными платиновыми электродами, расположенными по торцам пластинки размером $(10 \times 10 \times 0,1)$ мм. Температуру измеряли градуированными платино-платинородиевыми термопарами диаметром 0,1 мм и контролировали газовым термометром. Погрешность измерений температуры оценивали в $\pm 3°$. Охлаждение образца производили жидким азотом и гелием. Измерения частотной зависимости проводимости на переменном токе указанных составов проводили в диапазоне до 2.10^5 Гц на мостовой схеме с использованием осциллографического индикатора-нуля.

На рис. 1 показаны полученные кривые зависимости электросопротивления образца указанного состава для 100 К и при комнатной температуре 300 К. Полученные кривые сильно отличаются друг от друга. Так, при низких температурах —100 К для 19 Гц сопротивление образца составляло около 1,25 МОм, а для 24 кГц— лишь 15 КОм при тех же внешних условиях; при 300 К эта разница уже много меньше (около одного порядка).

Аналогичные зависимости получены до 100 кГц, причем полученные зависимости близки к известным литературным данным (рис. 2) и показывают возможность осуществления своеобразных селектив-

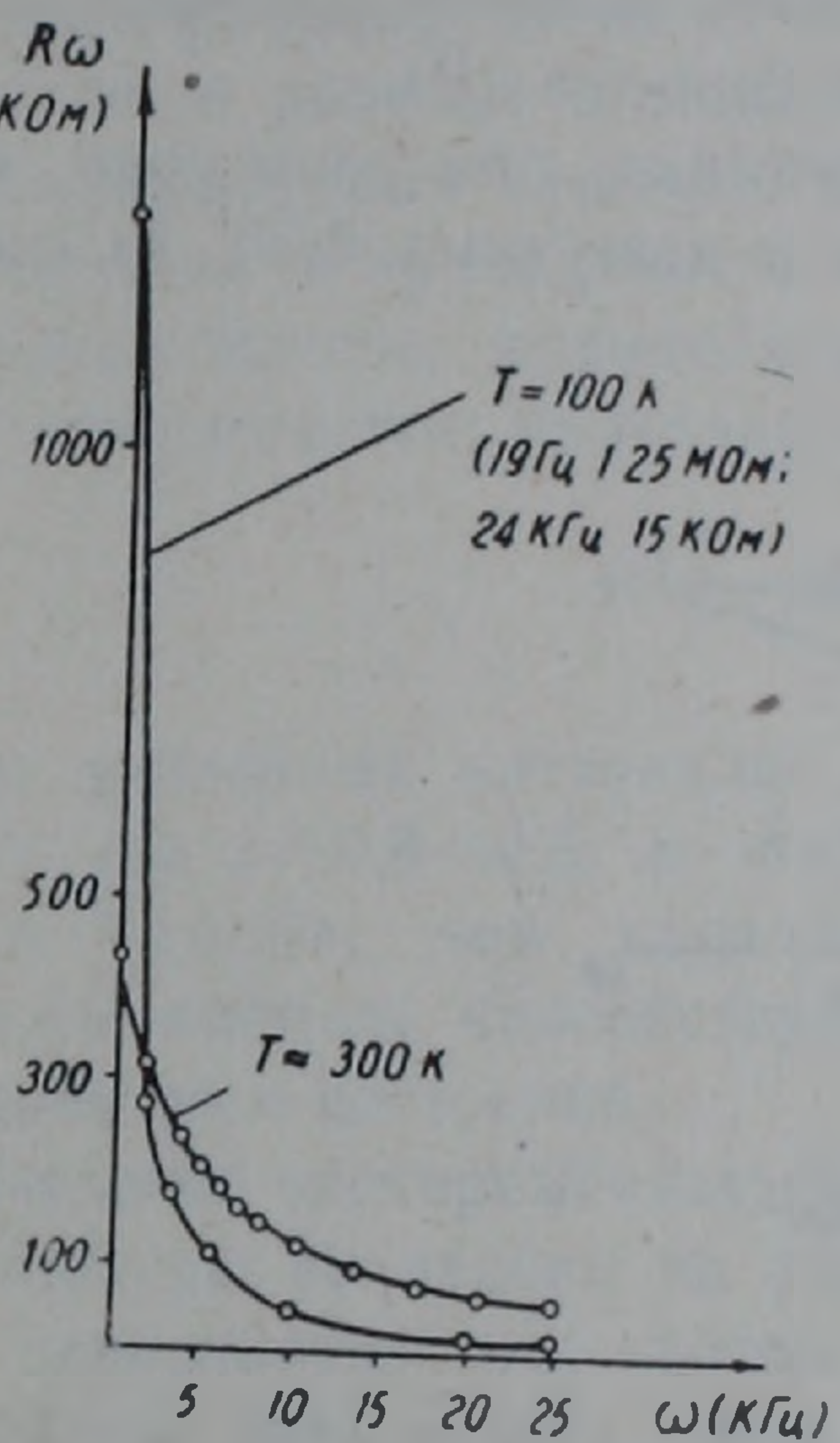


Рис. 1. Зависимость электросопротивления образца состава $(V_2O_5)_{0,8}$ $(P_2O_5)_{0,2}$ от частоты

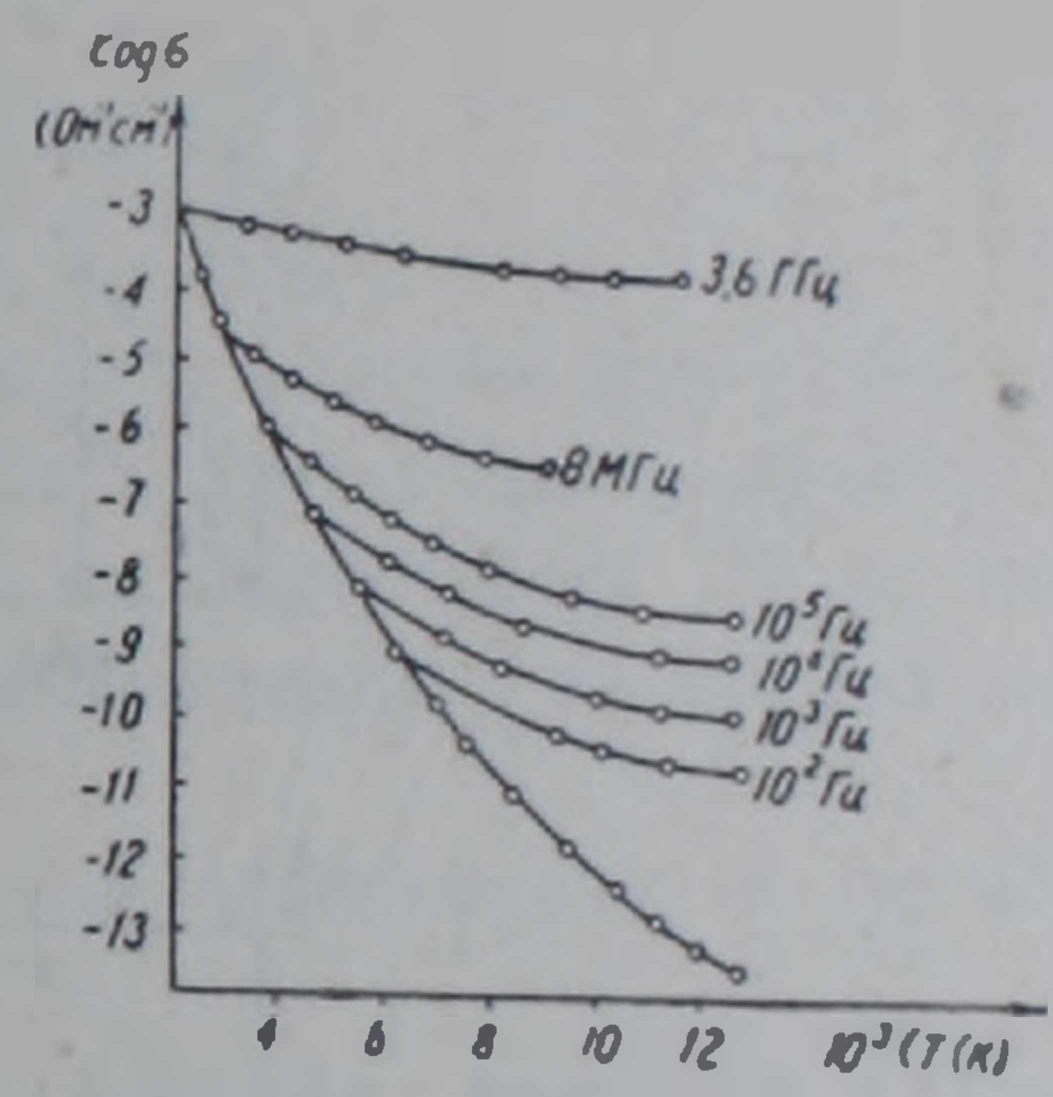


Рис. 2. Зависимость электропроводности образцов состава $(V_2O_5)_{0,8}$ $(P_2O_5)_{0,2}$ в сравнении с литературными данными [9—11]

ных электрических фильтров на основе $V_2O_5—P_2O_5$, поскольку, как видно из графика, отношение проводимостей на разных частотах для одного и того же образца состава 80% V_2O_5—20% P_2O_5 может быть больше 10-и порядков [9—11]. Действительно, известно, что фильтры RC-типа широко применяются на практике благодаря своей простоте, миниатюризации и технологичности. Они характеризуются коэффициентом электрической передачи напряжения $\dot{K}=\dot{U}_{2m}:\dot{U}_{1m}$, где $\dot{U}_{1m}$ и $\dot{U}_{2m}$—амплитуды соответственно приложенного и выходного напряжений, причем этому коэффициенту соответствует модуль

$$K=1/\sqrt{1+1/(\omega RC)^2},$$

зависимость которого от частоты, называемая амплитудно-частотной характеристикой —АЧХ, для предлагаемого фильтра и известного фильтра RC-типа изображена на рис. 3. Как видно из рисунка, известные фильтры высокой частоты (ФВЧ) RC-типа характеризуются величиной затухания в 6 дБ/окт [12—14] и величина RC в них предопределяет лишь граничную частоту фильтра $\omega_{гр}=1/RC$ [13]. Изготовление ФВЧ RC-типа в наиболее совершенном виде — так называемых RC-структур с распределенными параметрами в виде поликерамического основания с выводными электродами, причем с использованием в качестве резистивного слоя окислов металлов, достаточно сложно; кроме того при низких температурах он неработоспособен, так как обычно для снижения габаритов этой RC-структуры в качестве диэлектрика применяются материалы на основе титанатов бария и т. п. металлов, которые при низких температурах резко и необратимо изменяют свои диэлектрические свойства ([15,16]).

Поскольку стеклообразный материал на основе V_2O_5—P_2O_5 обладает наиболее четко выраженной частотной зависимостью именно при низких температурах, то целесообразно было предложить его в качестве материала для электрического фильтра ([11]).

Амплитудно-частотная характеристика предлагаемого фильтра обладает лучшими показателями, чем у известных ФВЧ RC-типа, как это видно из рис. 3.

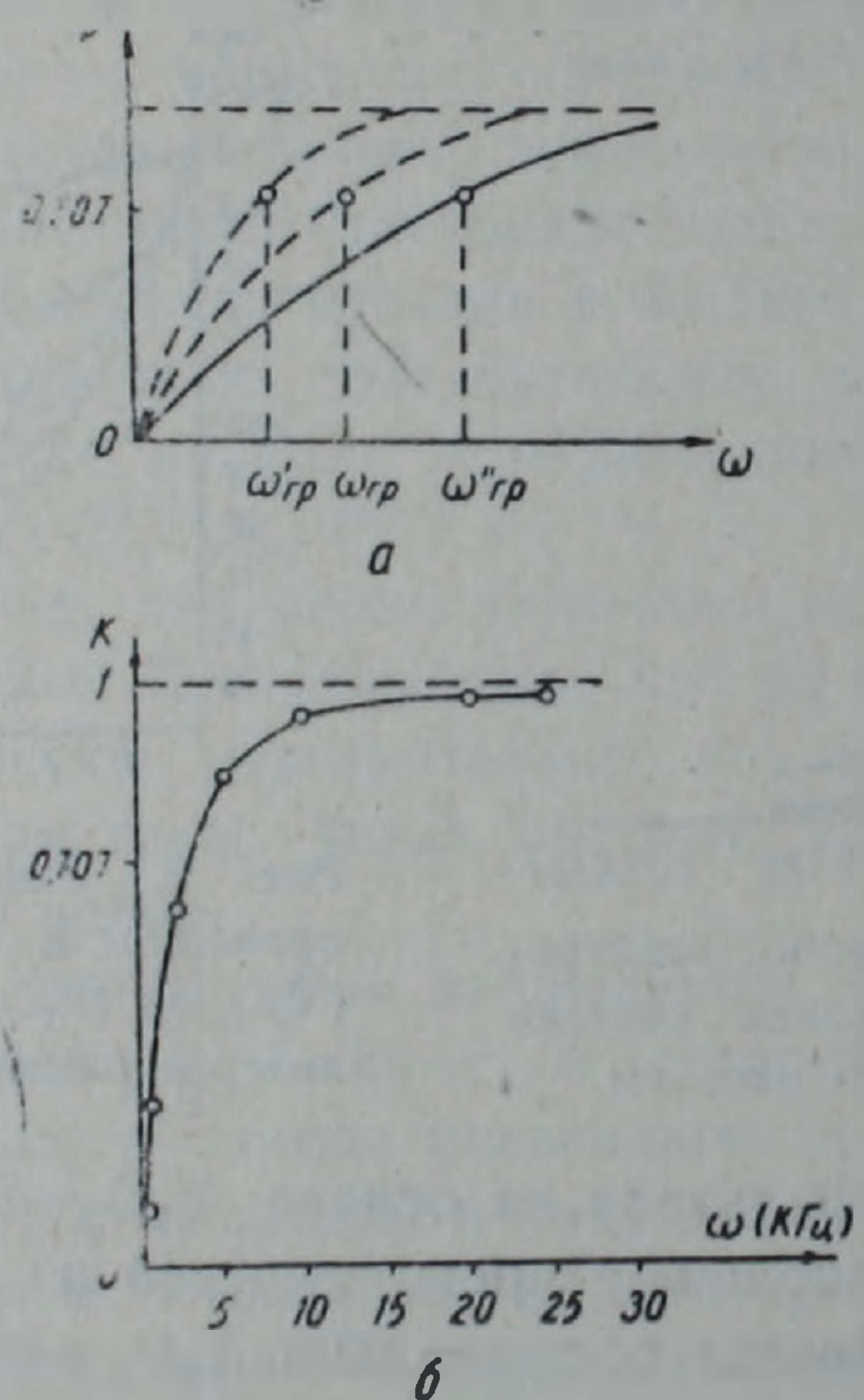


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика ФВЧ RC-типа (*а*) и предлагаемого фильтра (*б*)

Действительно, обеспечивая работоспособность при низких температурах, недоступных известным ФВЧ, предлагаемый фильтр по величине затухания — важнейшей характеристике электрического фильтра — почти вдвое превосходит его (соответственно 10 дБ/окт и 6 дБ/окт). Электрическое сопротивление опытного образца предлагаемого фильтра при 100 К на частоте 19 Гц равно 1,25 МОм, а на частоте 25 кГц только 15 КОм.

Таким образом применение указанного материала основано на эквивалентных физических свойствах фильтров RC-типа и предлагаемого фильтра.

Это хорошо видно из сравнения типичных АЧХ предлагаемого фильтра при 100 К с АЧХ известного ФВЧ RC-типа (рис. 3). Обе кривые аналогичны по форме и при малых ω имеют К, близкое к нулю; по мере увеличения ω видно, что K стремится к 1, что типично для ФВЧ RC-типа. При этом предлагаемый фильтр при низких температурах имеет затухание порядка 10 дБ/окт (так, например, при отношении частот $f_2/f_1=10/5$ КГц $U_1:U_2=3{,}16$, что соответствует затуханию в 10 дБ/окт).

Применение указанного стеклообразного полупроводника в качестве активного элемента электрического фильтра основано на теоретически предсказанной и экспериментально обнаруженной зависимости электропроводности на переменном токе от частоты ([9,10,17,18]). Согласно этим работам механизм, определяющий эту зависимость σ для рассматриваемых веществ, характеризуется участием добавочных носителей тока в проводимости стеклообразного полупроводника при увеличении частоты, определяемой перескоковым механизмом носителей с зависимостью проводимости $\sigma(\omega)$ от частоты ω:

$$\sigma(\omega)=K\omega\left[\ln\left(\frac{\nu_{\text{фон}}}{\omega}\right)\right]^4,$$

что для указанных материалов приводит к зависимости вида $\sigma(\omega)\approx$ $\approx A\cdot\omega^s$, где $s=0{,}8\div0{,}9$, А—постоянная. Здесь проводимость σ значительно больше, чем проводимость на постоянном токе, так как увеличение частоты способствует освобождению носителей тока из локализованных состояний.

Типичные экспериментальные кривые зависимости σ от частоты и температуры приведены на рис. 2.

В зависимости от способа подключения выводов фильтра в фильтруемую цепь можно либо пропускать, либо задерживать требуемые частоты. Так например, при параллельном подключении пропускаются низкие частоты и задерживаются высокие, при последовательном соединении пропускаются ВЧ, задерживаются НЧ, при смешанном соединении нескольких фильтров (например T-образно) можно пропускать желаемую из возможных комбинаций НЧ и ВЧ.

Сравнительные испытания заявленного и известного фильтров подтвердили преимущество предлагаемого фильтра. Он имеет лучшую амплитудно-частотную характеристику (большая крутизна), обладает работоспособностью при низких температурах, что делает его перспективным для использования в космической технике, имеет коэффициент затухания, почти вдвое превышающий известные, и весьма простую конструкцию, причем использование объемных свойств в предлагаемом фильтре вместо поверхностных намного уменьшает его габариты.

Все сказанное приводит к тому, что стоимость этого фильтра весьма низка, что позволяет надеяться на его широкое техническое применение.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук Армянской ССР

Տ. Ս. ԶՈԼՅԱՆ

V—O—P համակարգի հաղորդականությունը փոփոխական հոսանքի դեպքում

Աշխատանքում հետազոտված է V—O—P համակարգի կիսահաղորդիչների փոփոխական հոսանքի դեպքում ունեցած հաղորդականությունը և ցույց է տրված նրա ուժեղ կախվածությունը հաճախականությունից ցածր ջերմաստիճանների տիրույթում։ Դիտարկված համակարգը առաջարկված է կիրառել որպես նյութ էլեկտրական ֆիլտրերի համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. А. Иоффе, И. Б. Патрина*, ФТТ, т. 6, 3045, 3227 (1964). [2] *T. Allersma*, e. a., J. Chem. Phys, vol. 46, 154 (1967). [3] *A. R. Tourky, Z. Hanafi*, Z. Phys Chem., vol. 242, 305 (1969). [4] *D. A. Patony, K. J. Vasy*, Inorg. Nucl. Chem. vol. 30, 2 (1968). [5] *Д. С. Волженский, М. В. Пашковский*, ФТТ, 11, т. 1167 (1969). [6] *Э. А. Пастухов, В. Л. Лисин, И. А. Ватолин*, Труды 6-ой международной конференции по аморфным и жидким полупроводникам, Наука, М., 1976. [7] *J. Huemers*, e. a., Phys. Status Soldi, vol. 20 (a), 381 (1973). [8] *А. А. Виноградов, А. И. Шелых*, ФТТ, т. 13, 3310 (1971). [9] *M. Sayer* e. a., J. Appl. Phys., vol. 42, 2857 (1971). [10] *M. Sayer* e. a., J. Non-Cryst. Solids, vol. 18, 265 (1975). [11] *Т. С. Золян*, Заявка на изобретение № 3002572/18 от 10.09.80 г., по которой имеется положительное решение. [12] *Г. Б. Белоцерковский*, Основы радиотехники и антенны, Сов. радио, М., 1969. [13] Справочник по элементам радиоэлектронных устройств, ГЭИ, М., 1977. [14] *Р. Ленди* и др., Справочник радиоинженера, ГЭИ, М., 1961. [15] Авторское свидетельство СССР № 333829, Кл. Н01 С 7/00. [16] *Ч. Киттел*, Введение в физику твердого тела, Наука, М., 1978. [17] *Н. Ф. Мотт, Э. Девис*, Электронные процессы в некристаллических веществах, Мир, 1974. [18] *M. Pollak, T. H. Geballe*, Phys. Rev., vol. 122, 1742 (1961).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 3

УДК 53 50/08

ФИЗИКА

В. И. Луценко, И. В. Луценко, В. М. Тер-Антонян

Критерий относительной корреляции признаков в многомерных статистических системах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. С. Саакяном 11/VI 1982)

В ([1]) нами было показано, что для определения меры неоднородности одномерных статистических систем необходимо наряду с плотностью распределения $\gamma(\beta)$ элементов системы по концентрации признака β учитывать также инклюзивную функцию извлечения $\varepsilon(\beta)$, описывающую распределение признака по собственной концентрации. Покажем, что распространение такого подхода на многомерные системы позволяет внести ясность в вопрос о зависимости между признаками и единым образом описать как неоднородность этих систем, так и скоррелированность признаков в ней.

Для количественного определения меры скоррелированности признаков в статистической системе обычно пытаются тем или иным способом выявить отход эксклюзивной плотности распределения $\gamma(\beta_1, \beta_2)$ от произведения инклюзивных плотностей $\gamma^{(1)}(\beta_1)$ и $\gamma^{(2)}(\beta_2)$ ([2]). В результате получаются критерии, характеризующие меру „абсолютной" взаимосвязи между признаками. При таком подходе остается открытым вопрос об относительной зависимости одного признака от другого. Чтобы убедиться в состоятельности такого вопроса, рассмотрим следующий пример. Пусть в элементах системы с фиксированным значением концентрации признака β_1 встречается только одно определенное значение концентрации β_2, а элементы с фиксированным значением β_2 содержат разные значения концентрации β_1 первого признака. Очевидно, в такой системе второй признак максимально скоррелирован с первым, тогда как зависимость первого признака от второго слабее. Итак, признаки в системе могут зависеть друг от друга в разной степени.

Исследуем этот вопрос подробнее. Введем эксклюзивные по двум исследуемым признакам функции извлечения $\varepsilon^{(1)}(\beta_1, \beta_2)$ и $\varepsilon^{(2)}(\beta_1, \beta_2)$, представляющие собой плотности распределения первого и второго признака по концентрациям β_1 и β_2. Легко показать, что

$$\varepsilon^{(i)}(\beta_1, \beta_2) = \frac{\beta_i}{\bar{\beta}_i} \gamma(\beta_1, \beta_2), \tag{1}$$

где $i = 1, 2$, $\bar{\beta}_1$ и $\bar{\beta}_2$—средние концентрации, а $\gamma(\beta_1, \beta_2)$—эксклюзивная плотность распределения элементов системы по концентрациям β_1 и β_2. Интегрируя обе части соотношения (1) по β_1 и β_2, приходим к инклюзивной матрице извлечения $\varepsilon^{(i)}(\beta_k)$, в которой диагональные элементы совпадают с введенными ранее в работе ([1]) функциями извлечения

$$\varepsilon^{(i)}(\beta_i) = \frac{\beta_i}{\bar{\beta}_i} \gamma^{(i)}(\beta_i),$$

а недиагональные элементы $(i \neq k)$

$$\varepsilon^{(i)}(\beta_k) = \int_0^1 \frac{\beta_i}{\bar{\beta}_i} \gamma(\beta_i, \beta_k) d\beta_i$$

указывают, какая часть i-го признака сосредоточена в элементах системы с фиксированным значением k-го признака, т. е. имеют смысл функций сопутствующих извлечений.

Выразим функции сопутствующего извлечения через соответствующие им инклюзивные плотности $\gamma^{(k)}(\beta_k)$:

$$\varepsilon^{(i)}(\beta_k) = \frac{\bar{\beta}_i(\beta_k)}{\bar{\beta}_i} \gamma^{(k)}(\beta_k).$$

В последней формуле

$$\bar{\beta}_i(\beta_k) = \int_0^1 \beta_i \gamma(\beta_i/\beta_k) d\beta_i$$

и означает среднюю концентрацию i-го признака в элементах системы с фиксированной концентрацией k-го, а $\gamma(\beta_i/\beta_k)$ — соответствующая плотность условной вероятности.

Из смысла функции $\bar{\beta}_i(\beta_k)$ ясно, что i-ый признак независим от k-го, если

$$\bar{\beta}_i(\beta_k) = \bar{\beta}_i, \tag{2}$$

или на языке γ- и ε-распределений $(i \neq k)$

$$\varepsilon^{(i)}(\beta_k) = \gamma^{(k)}(\beta_k). \tag{3}$$

Условия (2) и (3) автоматически выполняются, если исследуемые признаки независимы в обычном смысле, т. е. если

$$\gamma(\beta_1, \beta_2) = \gamma^{(1)}(\beta_1)\gamma^{(2)}(\beta_2). \tag{4}$$

Рассмотрим таблицу, для которой верхнее число в каждой клетке означает концентрацию первого признака, нижнее — концентрацию второго. Элементами такой системы являются клетки. Простые вычисления показывают, что в приведенном примере условия (2) и (3) соблюдаются, а условие (4) нарушается. Итак, при общей скоррелированности признаков, т. е. нарушении условия (4), может оказаться, что i-ый признак не зависит от k-го и вместе с этим k-ый признак не зависит от i-го. Из сказанного следует, что условия (2) и (3) являются условиями относительной независимости двух признаков в многомерной статистической системе. При нарушении этих условий за меру относительной зависимости признаков естественно принять следующий критерий ($i \neq k$):

$$L_k^i = \int\limits_{\Delta k} [\gamma^{(k)}(\beta_k) - \varepsilon^{(i)}(\beta_k)] d\beta_k. \tag{5}$$

Здесь интегрирование ведется по области Δ_k, в которой подынтегральное выражение положительно. Если формально принять $i=k$, то (5) переходит во введенный в работе ([1]) критерий неоднородности

$$L^i = \int\limits_0^{\bar{\beta}_i} [\gamma^{(i)}(\beta_i) - \varepsilon^{(i)}(\beta_i)] d\beta_i.$$

0,1 0,01	0,2 0,01	0,1 0,02	0,2 0,04	0,3 0,02	0,1 0,01	0,4 0,01	0,1 0,03
0,2 0,01	0,4 0,03	0,1 0,01	0,4 0,01	0,2 0,01	0,4 0,02	0,2 0,01	0,1 0,01
0,2 0,04	0,1 0,01	0,3 0,01	0,2 0,01	0,1 0,02	0,2 0,02	0,2 0,01	0,1 0,04
0,1 0,03	0,3 0,01	0,2 0,01	0,3 0,04	0,1 0,01	0,4 0,02	0,2 0,01	0,1 0,02
0,1 0,01	0,3 0,01	0,1 0,02	0,1 0,02	0,2 0,01	0,2 0,03	0,2 0,04	0,2 0,01

Легко показать, что при $i \neq k$

$$0 \leqslant L_k^i \leqslant L^i,$$

причем нижний предел соответствует случаям, когда выполняется хотя бы одно из условий (3), а верхний предел достигается в системах, i-ый признак которых является однозначной функцией k-го.

В заключение отметим следующее:

1. Условие абсолютной независимости признаков (4) весьма чувствительно к ограничениям, не влияющим на „динамическую" структуру исследуемой системы. Так, любое ограничение кинематического характера (например, сохранение энергии-импульса в процессах множественного рождения) приводит к нарушению условия (4), и если иметь в виду только это нарушение, то легко сделать ошибочный вывод о мере зависимости между признаками.

2. Выяснение меры относительной скоррелированности признаков может оказаться важным и в чисто прикладных задачах, например, в задаче об извлечении признака из системы. Так, если технически легче извлечь первый признак, то, имея критерий (5), легко

решить вопрос о целесообразности извлечения второго признака за счет извлечения первого.

Мы признательны Г. С. Саакяну и А. Г. Худавердяну за интересные обсуждения.

Ереванский государственный университет

Ի. Վ. ԼՈՒՑԵՆԿՈ, Վ. Ի. ԼՈՒՑԵՆԿՈ, Վ. Մ. ՏԵՐ-ԱՆՏՈՆՅԱՆ

Բազմաչափ վիճակագրական սիստեմների հատկանիշների միջև հարաբերական կոռելյացիայի հայտանիշը

Վիճակագրական սիստեմի հատկանիշների փոխկոռելացման չափը որակական որոշման համար սովորաբար փորձում են այս կամ այն կերպ զանազանել էքսկլյուզիվ խորությունները ինկլյուզիվ խորությունների արտադրյալից։ Արդյունքում ստացվում է հատկանիշների միջև գործող «բացարձակ» փոխադարձ կապի «բացարձակ» հայտանիշ, և բաց է մնում մի հատկանիշի հարաբերական կապի հարցը մյուս հատկանիշի հետ, մի հարց, որն անկասկած հետաքրքիր է, քանի որ սիստեմում հատկանիշները կարող են տարբեր աստիճանի կախվածություն ունենալ միմյանցից։ Այս հոդվածի նպատակն է գտնել այն հայտանիշը, որը քանակապես կորոշի տարբեր հատկանիշների հարաբերական փոխկոռելացման աստիճանը։ Ստացված են (2) և (3) հարաբերական անկախության պայմանները և պարզվել է, որ այդ պայմաններին բավարարելու դեպքում հատկանիշները սիստեմում հանդիսանում են դինամիկորեն անկախ։

Առաջարկված է L_k^l *հայտանիշը, որը միաժամանակ նկարագրում է վիճակագրական սիստեմի անհամասեռությունը և նրանում հատկանիշների փոխկոռելյացիան։ Պարզաբանվել են հարաբերական կախվածության հայտանիշի փոփոխության սահմանները և բերված է մի սիստեմի օրինակ, որում հատկանիշները հարաբերականորեն անկախ են նրանց ընդհանուր նկատելի փոխկոռելացման դեպքում։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. И. Луценко* и др., ДАН АрмССР, т. 74, № 5 (1982). [2] *Г. Крамер*, Математические методы статистики, Мир, М., 1975.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 3

УДК 624.159.1

ИНЖЕНЕРНАЯ СЕЙСМОЛОГИЯ

А. Г. Мазманян

Восстановление сейсмического поля в слое грунта по инструментальной записи

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. И. Тер-Степаняном 17/VI 1982)

Для определения напряженно-деформированного состояния грунта и сооружения и выявления степени их надежности СНиП II—7—81 рекомендует также проведение расчетов на основе акселерограмм (сейсмограмм) землетрясений с учетом основных факторов, влияющих на состояние и поведение сооружений при действии сейсмических нагрузок.

Для расчета сооружения на сейсмическое воздействие необходимо иметь сейсмограмму, зависящую не только от времени, но и от координаты по глубине слоя. Здесь предлагается приближенная оценка сейсмического воздействия.

Примем, что сейсмограмма задается в некотором сечении слоя грунта в виде $f(t, y)$ (рис. 1). Однако в действительности нам всегда бывает известна только инструментальная запись на поверхности слоя грунта в виде функции $f(t, h)$.

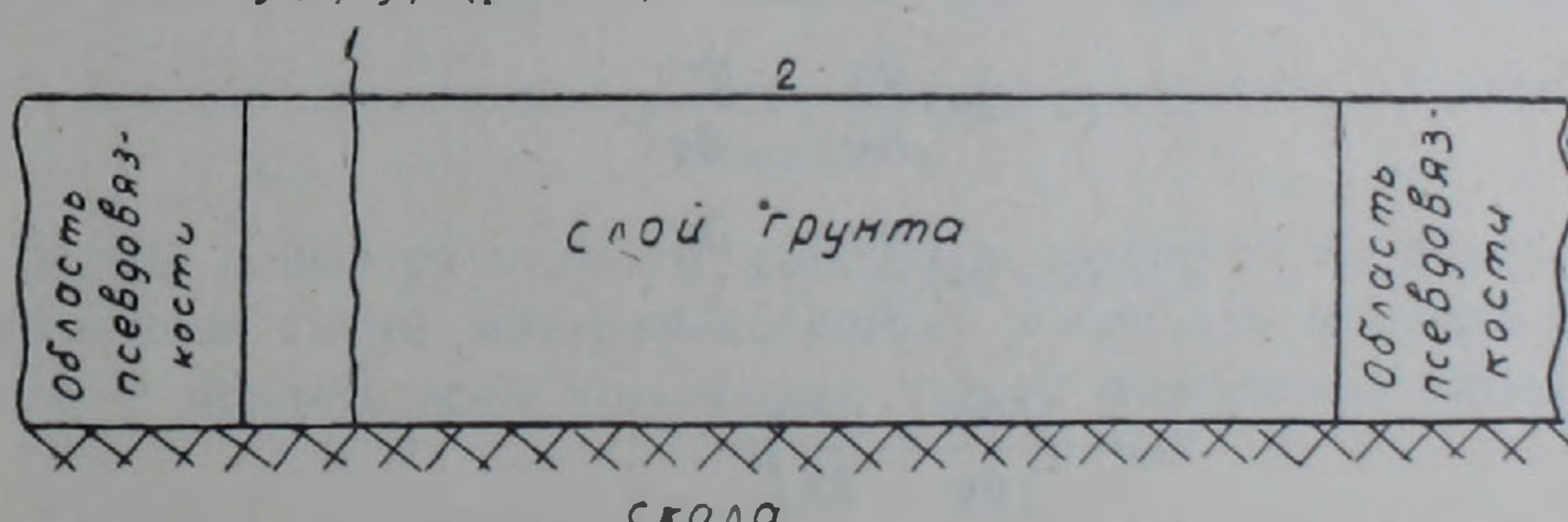


Рис. 1. Расчетная схема: *1*—сечение слоя задания сейсмограммы; *2*—определение расчетной сейсмограммы

Поэтому задаемся подбором закона изменения функции $f_2(y)$ в зависимости от глубины.

Будем предполагать, что $f(t, y)=f_1(t)\cdot f_2(y)$, причем $f_1(t)=f(t, h)$, а в качестве $f_2(y)$ можно задать различные функции с их уточнениями методом подбора;

1) $f_2(y)=\dfrac{y}{h}$ —линейный закон смещения частицы по глубине;

2) $f_2(y)=\left(\dfrac{y}{h}\right)^2$ —квадратичный закон смещения частицы по глубине;

3) $f_2(y)=\dfrac{1-e^{a\frac{y}{h}}}{1-e^{a}}$ —экспоненциальный закон смещения частицы по глубине;

h—толщина слоя грунта;

a—некоторая безразмерная константа, определяющая степень (скорость) затухания.

Таким образом, решение задачи сводится к отысканию функции $f_2(y)$ и восстановлению сейсмического поля в слое грунта для получения расчетной сейсмограммы в точке на поверхности слоя. По данным расчетной сейсмограммы вычисляем амплитудно-частотный спектр Фурье. Сопоставление полученных спектров со спектром инструментальной записи дает наглядное представление о том, насколько точно нам удалось подобрать функцию $f_2(y)$ для восстановления сейсмического поля слоя грунта.

Задача рассматривается в условиях плоской деформации. Предполагается, что скальное основание имеет значительно больший модуль упругости, чем рассматриваемый слой грунта, так что скальное основание можно считать абсолютно жестким.

Перемещения частиц грунта в слое описываются уравнениями Ламе ([1]):

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$
$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2};\qquad(1)$$

$$\sigma_x=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial v}{\partial y};$$
$$\sigma_y=(\lambda+2\mu)\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda\frac{\partial u}{\partial x};\qquad(2)$$
$$\tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right);$$

ρ—плотность грунта; λ, μ—коэффициенты Ламе.

На границе со скальным основанием задан закон равенства перемещений частиц грунта и основания (условие прилипания).

В принципе можно задать и более сложные граничные условия, но для этого необходимо знать закон взаимодействия частиц грунта со скальным основанием.

Чтобы исключить отражение от левой и правой границ расчетной области, в уравнения движения (1) вводится „псевдовязкость“, по мере приближения к границам возрастающая по экспоненциальному закону до величины, соответствующей наискорейшему затуханию колебаний, т. е. уравнения (1) вблизи границ примут вид:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\varphi_u(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial t};$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\varphi_v(x,\ y)\frac{\partial v}{\partial t}, \tag{3}$$

где $\varphi_u(x,\ y)$ и $\varphi_v(x,\ y)$—коэффициенты „псевдовязкости“.

Пластические деформации в слое грунта учитываются по теории Мора—Кулона [2]. Предельная поверхность задается в виде $\sqrt{J}+k\sigma-c=0$, где J—второй инвариант тензора напряжений, равный $J=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau^2$, где k и c—параметры прочности грунта, угол внутреннего трения и сцепления.

Для решения поставленной задачи использованы следующие исходные данные: модуль упругости грунта 8000 т/м², удельный вес грунта 1,5 т/м³, коэффициент Пуассона 0,33, сцепление грунта 1,5 т/м², угол внутреннего трения 0,5.

В качестве внешнего воздействия использована сейсмограмма землетрясения „Паркфилд“ от 2. 09. 1971 г. (рис. 2).

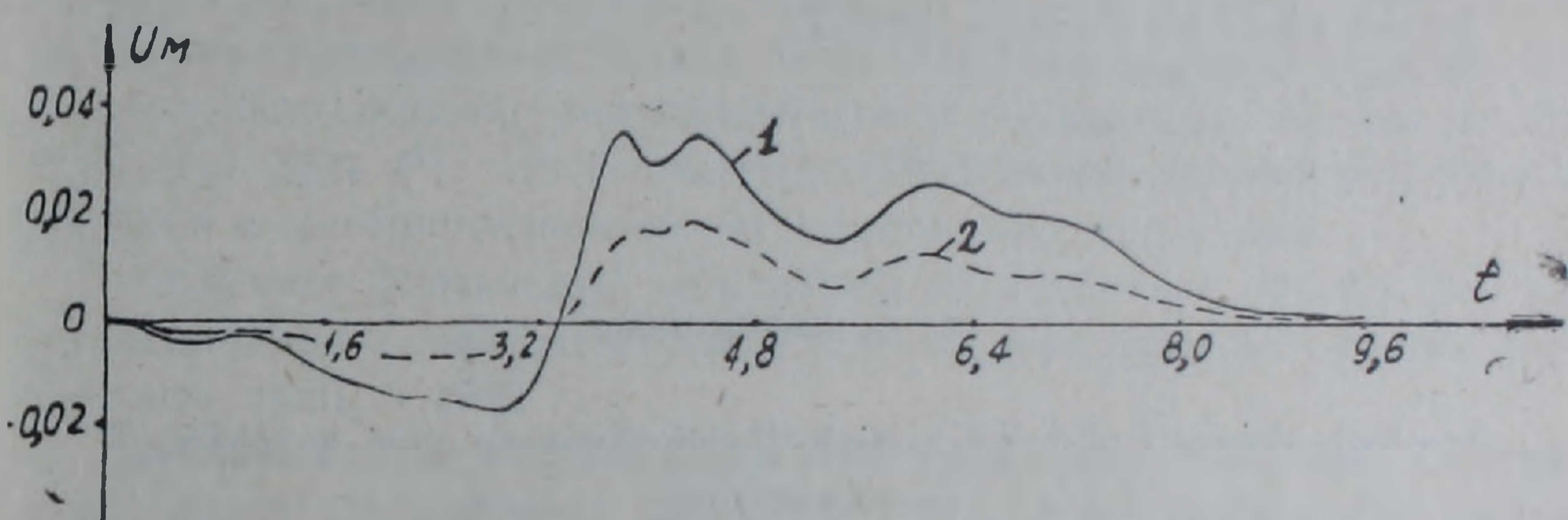


Рис. 2. Заданная сейсмограмма: 1—горизонтальная компонента; 2—вертикальная компонента

Задача решается методом конечных разностей по явной конечно-разностной схеме, которая позволяет увеличить точность аппроксимации и придать всем уравнениям четкий физический смысл [3].

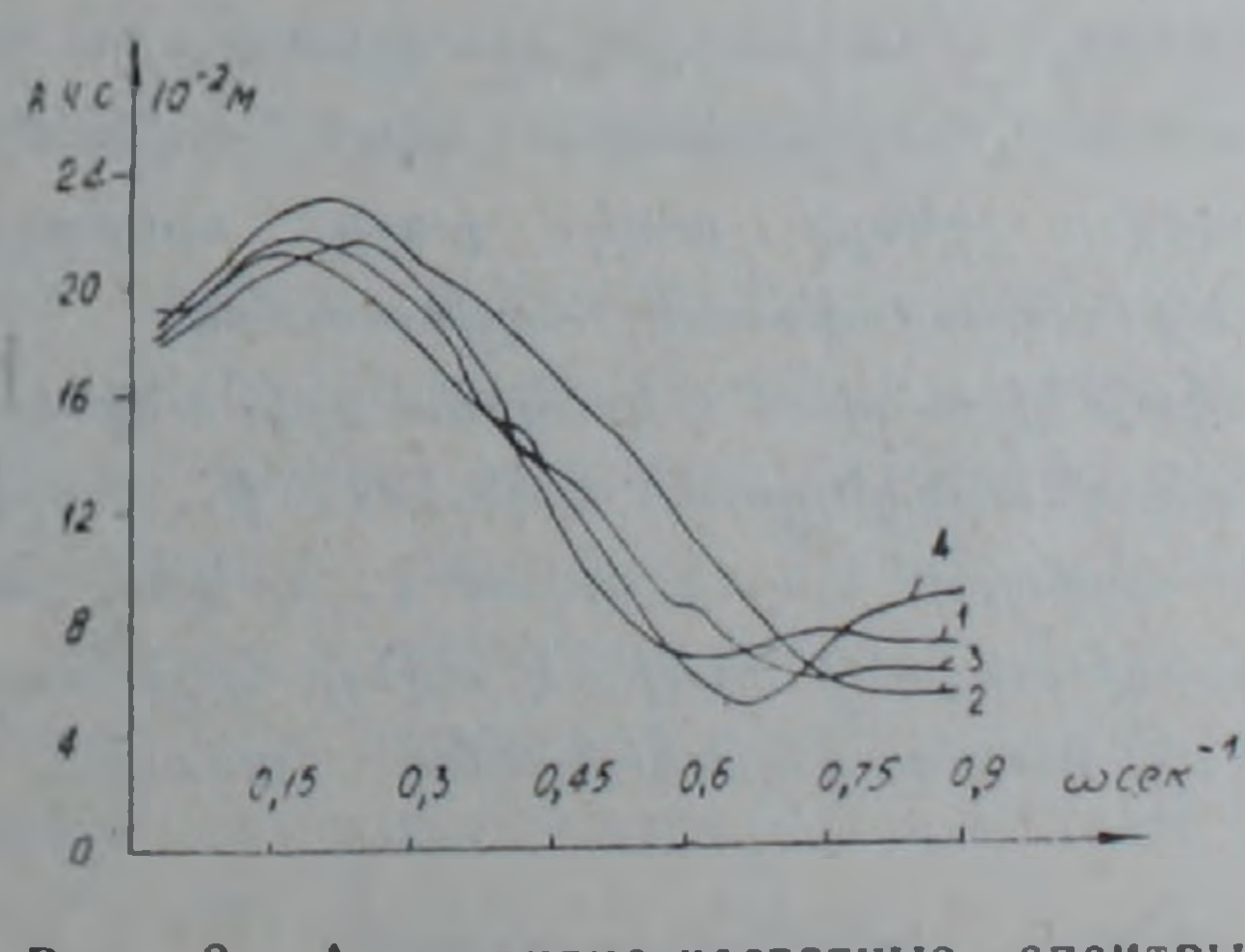


Рис. 3. Амплитудно-частотные спектры расчетных сейсмограмм при разных видах функции: 1—инструментальная запись; 2—линейный закон; 3—параболический закон; 4—экспоненциальный закон

На первом этапе решается статическая задача методом установления. Определяется поле статических напряжений в слое, возникающих от веса грунта.

На втором этапе вводится сейсмограмма, определяются поля: динамических напряжений, смещений, скоростей, ускорений в любой точке расчетной области в функции от времени.

На поверхности слоя в заданной точке определяются расчетные сейсмограммы в зависимости от заданных функций $f_2(y)$. По результатам расчетных сейсмограмм вычисляем амплитудно-частотные спектры Фурье.

На рис. 3 изображены расчетные амплитудно-частотные спектры и амплитудно-частотный спектр, вычисленный по данным инструментальной записи. Из рисунка видно, что экспоненциальный закон затухания по глубине слоя позволяет более точно восстановить сейсмическое поле в слое грунта, чем линейный или параболический закон смещения частиц грунта по глубине.

Ордена Трудового Красного Знамени
Институт геофизики и
инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ՄԱՋՄԱՆՅԱՆ

Գրունտի շերտում սեյսմիկ դաշտի վերականգնումը ըստ գործիքային գրանցումների

Դիտարկվում է ըստ գրունտային շերտի խորության սեյսմագրամի փոփոխման օրենքի ընտրության մեթոդիկա։ Գրունտային շերտի մեջ խորացված կառույցի սեյսմակայունության հաշվման համար անհրաժեշտ է ունենալ ոչ միայն սեյսմագրամ կախված ժամանակից, այլև նրա փոփոխությունը ըստ կոորդինատի։ Ցույց է տրված, որ գրունտային շերտի կտրվածքով սեյսմագրամի փոփոխման օրենքի ճիշտ ընտրությունը տալիս է հնարավորություն վերականգնելու սեյսմիկական դաշտը գրունտային շերտում, որը հնարավոր է դարձնում որոշել հաշվարկային ակսելերոգրամը (սեյսմագրամը) անմիջապես նախագծվող շենքի տակ, քաշի, երկրաչափական չափերի և շենքի հիմքի խորացման աստիճանի հաշվառումով։

Բերված մեթոդիկան կիրառված է կոնկրետ օրինակի վրա ըստ երկրաշարժի հայտնի գրանցման «Պարկֆիլդում» 2.09.1971 թ., հաշվարկային ակսելերոգրամ ստանալու համար։ Ապացուցված է, որ ըստ խորության էքսպոնենցիալ օրենքով փոփոխությունը տալիս է ավելի ճիշտ արդյունք գրունտային շերտում սեյսմիկական դաշտը վերականգնելու համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. П. Тимошенко, Р. Ж. Гудьер,* Теория упругости, Наука, М., 1975. [2] *Л. С. Лейбензон,* Курс теории упругости, ОГИЗ—Гостехиздат, М., 1947. [3] *В. Н. Ломбардо,* Изв. Всесоюзного н.-и. ин-та «Гидротехника», т. 103, Л., 1973.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 3

УДК 633.11 : 582 : 001.4

ГЕНЕТИКА РАСТЕНИЙ

П. А. Гандилян, Ж. О. Шакарян, Э. А. Петросян

Новый межродовой амфидиплоид Aegilops tauschii Cosson ×Triticum urartu Thum. ex Gandil.

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. О. Казаряном 16/XI 1982)

Нами впервые в 1976 г. были проведены скрещивания между Aegilops tauschii Cosson (носитель генома Д группы хлебопекарной пшеницы) и Triticum urartu Thum. ex Gandil. (носитель генома А или В) и получены гибридные зерновки. В дальнейшем выяснилось, что удача скрещиваемости этих отдаленных диплоидных ($2n=14$) видов довольно высока: завязываемость зерновок в наших опытах доходила до 35% ([1]). Из гибридных зерновок выращены нормальные растения с многочисленными, но стерильными колосьями.

Получить фертильный тетраплоид из указанных отдаленных видов диплоидов—идея заманчивая. Однако этот замысел удалось осуществить лишь в 1982 г.

Первоначально определили число хромосом. Оно, как и следовало ожидать, в кончиках корешков проростков полученных гибридов оказалось равным 14, т. е. первое поколение (F_1) этого гибрида является настоящим амфигаплоидом со свойственной ему стерильностью. Во время кущения у отдельных клонов F_1 было удвоено число хромосом с помощью колхицина и в колосьях завязывались нормальные зерновки. Полученные зерновки проросли, в основном, нормально, и в кончиках корешков их проростков число хромосом оказалось равным 28. Таким образом, нам удалось удвоить число хромосом амфигаплоида ($2n=14$) и превратить его в амфидиплоид ($2n=28$).

Вегетативные органы и колосья как амфигаплоида (F_1), так и амфидиплоида (C_1), несут промежуточные морфологические признаки родительских видов. Колос гибрида сходен с колосом современной культурной гексаплоидной пшеницы T. spelta L. ($2n=42$, геномный состав АВД), но меньших размеров (рис. 1, 2).

Особый интерес представляет следующий факт. Оба родительских вида являются дикорастущими и проявляют типичные свойства самосева „дикарей". Их колосья в зрелом и даже в полузрелом состоянии спонтанно ломаются, распадаются на колоски с члениками стержня и осыпаются, вследствие чего происходит самосев колосков, зерновки которых плотно заключены в чешуи. Гибридные же колосья, наподобие колосьев культурной пшеницы T. spelta, в зрелом состоянии самостоятельно не ломаются, лишь при надавливании распадаются на колоски с члениками стержня (рис. 2).

По всей вероятности, в далеком прошлом Ae. tauschii и T. urartu в природе могли спонтанно скрещиваться и давать двухгеном-

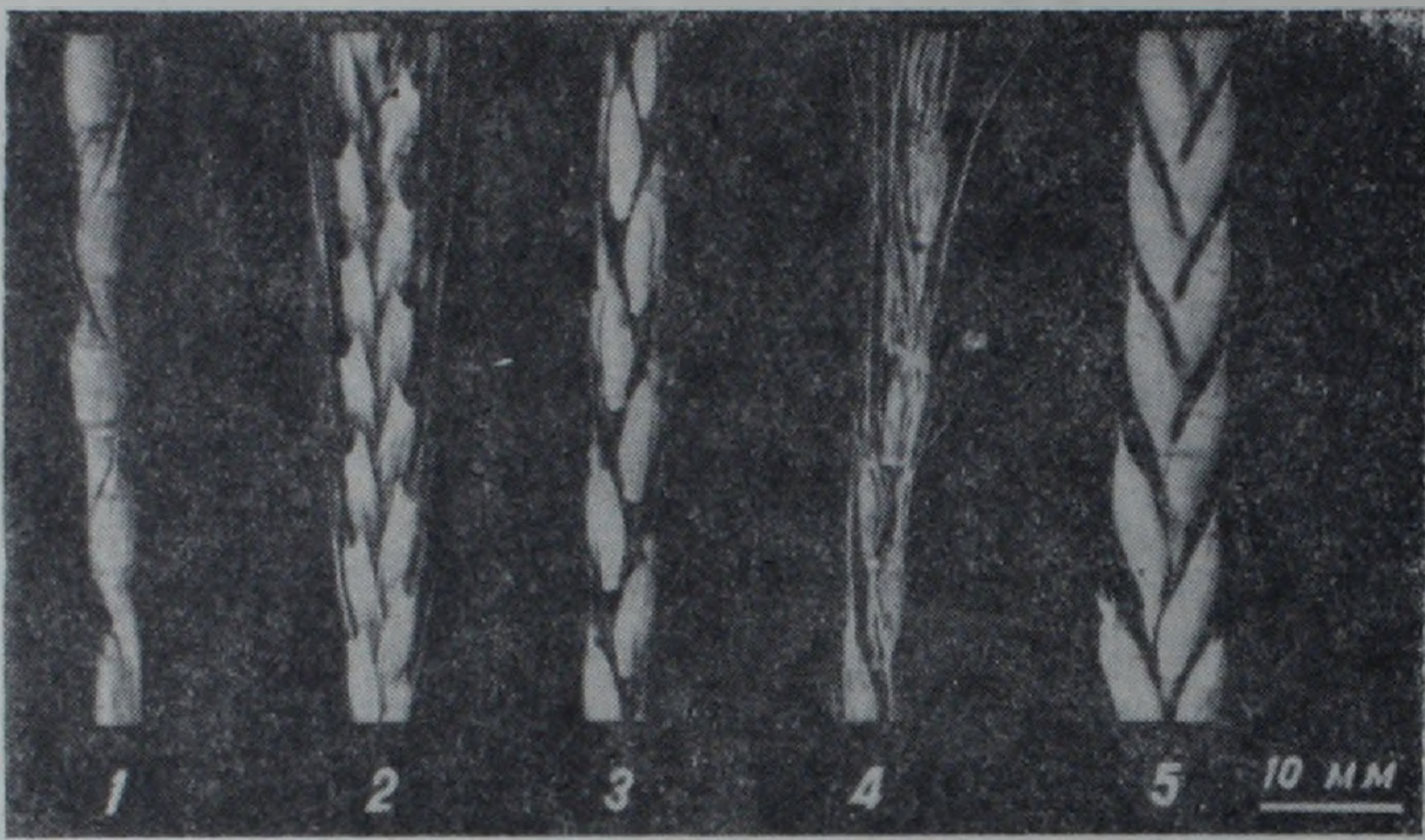


Рис. 1. Колосья: *1*—Ae. tauschii (Ae. squarrosa); *2*—T. urartu; *3*—амфигаплоид (F_1, стерильный, 2n=14); *4*—амфидиплоид (C_1, фертильный, 2n=28); *5*—T. spelta (2n=42)

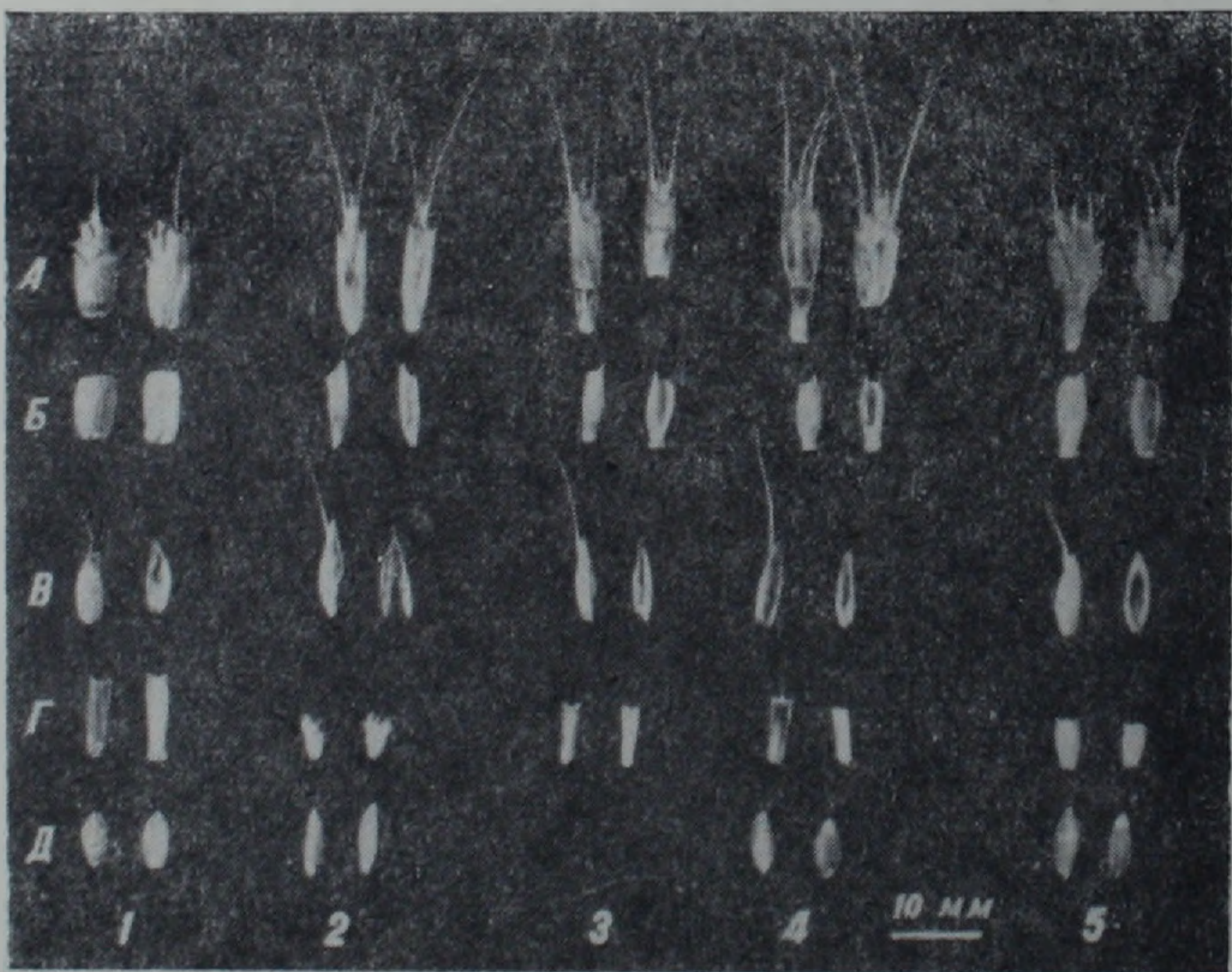


Рис. 2. Части колосьев: *1*—Ae. tauschii (Ae. squarrosa); *2*—T. urartu; *3*—амфигаплоид (F_1, 2n=14); *4*—амфидиплоид (C_1, 2n=28); *5*—T. spelta (2n=42). *А*—колоски; *Б*—колосковые чешуи; *В*—цветковые чешуи; *Г*—членики стержня колоса; *Д*—зерновки

ный фертильный тетраплоид в большей мере, чем другие вероятные доноры современных тетраплоидных и гексаплоидных видов пшеницы. Возникает вопрос: почему не сохранились в диком состоянии двухгеномные виды тетраплоидов типа нашего амфидиплоида (с геномным составом АД или ВД), тогда как другие двухгеномные виды, как T. dicoccoides (AB) и T. araraticum (AG) растут как „дикари".

Причина, по нашему мнению, заключается в спонтанной неломкости колосьев амфидиплоида с геномным составом АД (или ВД). Если их колосья самостоятельно не ломаются, значит, самосева не происходит. Поэтому такие формы в диком состоянии долго не могут сохраниться и выбывают из ценоза под действием естественного отбора. Лучше они могут сохраниться в культуре. Очень вероятно, что древние земледельцы наряду с другими неосыпающимися диплоидными и тетраплоидными видами (T. monococcum—геном А, T. dicoccum—AB) одомашнивали и тетраплоид спельтоидного типа (АД).

Кстати, пшеницы с геномами А и АВ и сейчас выращивают, в основном, в качестве крупяной культуры. Возможно, что пшеницы с геномным составом АД (или ВД) возделывались, в основном, как хлебопекарные. Считается, что геном Д, носителем которого является Ae. tauschii, внес в культурную пшеницу хорошие хлебопекарные свойства и озимый тип вегетации (2). В дальнейшем возникновение трехгеномного гексаплоида (АВД) позволило народной селекции увеличить число зерен в колосе (3) и выращивать более продуктивную пшеницу типа T. spelta или T. aestivum. Тогда, естественно, искусственным отбором вытеснились из культуры двухгеномные хлебопекарные пшеницы типа нашего амфидиплоида.

К сожалению, по археологическому материалу — обуглившимся зерновкам трудно судить о плоидности древних хлебопекарных пшениц. Среди них, возможно, были и тетраплоиды с геномной формулой АД (или ВД), которые постепенно вытеснялись, и их место целиком заняли более продуктивные гексаплоиды (АВД). А как произошла гексаплоидная хлебопекарная пшеница, каково происхождение генома В? Этот вопрос пока дискутируется в научной литературе. Например, ряд отечественных ученых (2,3,4) донорами генома В считают представителей секции Sitopsis рода Aegilops-а, а американский ученый Джонсон (5) —T. urartu (поэтому геномный состав нашего амфидиплоида мы обозначаем АД или ВД).

Надеемся, что разностороннее исследование синтезированного нами нового амфидиплоида даст возможность вплотную подойти к решению вопроса происхождения гексаплоидной пшеницы с геномным составом АВД.

Армянский сельскохозяйственный институт
Институт земледелия МСХ Армянской ССР

Պ. Ա. ՂԱՆԴԻԼՅԱՆ, Ժ. Օ. ՇԱՔԱՐՅԱՆ, Է. Ա. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Նոր միջցեղային ամֆիդիպլոիդ—Aegilops tauschii Cosson × Triticum urartu Thum. ex Gandil.

Տարբեր ցեղերի պատկանող երկու դիպլոիդ (2n=14) *տեսակներ՝* Ae. tauschii *և* T. urartu-*ի տրամախաչումից ստացված ամֆիհապլոիդի առաջին* F_1 *ստերիլ սերնդի քրոմոսոմների թիվը կոլխիցինի օգնությամբ կրկնապատկելով հնարավոր է եղել ստանալ ֆերտիլ տետրապլոիդ* (2n=28)։ *Նոր ֆերտիլ հիբրիդը, որի գենոմային կազմն է* AD *կամ* BD (A *կամ* B—T. urartu, D—Ae. tauschii), *հիշեցնում է ժամանակակից մշակովի հեքսապլոիդ* (2n=42) *ցորենին* (T. spelta L.):

Հույս է հայտնվում, որ նոր սինթեզված ամֆիդիպլոիդի հետագա բազմակողմանի ուսումնասիրությունը հնարավորություն կտա ընդհուպ մոտենալու հացաթխման ցորենի ծագման խնդրի լուծմանը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *П. А. Гандилян, Э. А. Петросян,* Биологический журн. Армении, т. 35, № 4 (1982). [2] *П. М. Жуковский,* Культурные растения и их сородичи, Колос, Л., 1971. [3] *В. Ф. Дорофеев, Э. Ф. Мигушова,* Вестник с.-х. наук, № 2, 1979. [4] *А. В. Конарев* и др., Докл. ВАСХНИЛ, № 6 (1974). [5] *B. L. Johnson,* Can. j. genet and cyt ol №17 (1975).