

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
 АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
 ДОКЛАДЫ

LXXVI, № 2

1983

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. ֆաբրոլար), Է. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Թ. ԲԱՐԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐՐԻՆՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Վ. Գ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Օ. Մ. ՍԱՊՈՆԴՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՁՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, А. А. ГАБРИЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН, академик АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, академик АН АрмССР.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ

ЕРЕВАН

Доклады Академии наук Армянской ССР, 1983, т. 76, № 2, с. 49—96.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ս. Խ. Դաբրիճյան—Թոմասենի մի հիպոթեզի հերքումը	51
Յու. Մ. Մովսիսյան—Երեք երկարության հավասարակշռված գերնույնություններ	55
Ե. Ս. Մառության—Կոնտինուում մասնակիցներով կոոպերատիվ խաղերի գումարի կորիզի մասին	61

ԳՐՈՒՆՏՆԵՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ս. Ռ. Մեսչյան—Սկզբնական բնական խոնավություն ունեցող կավային գետնահողերի միաչափ խտացման սողքի որոշման եղանակ	65
---	----

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Վ. Գ. Մխիթարյան—Օրթոգոնալ ինտեգրալ մի առնչության և առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիրներում նրա կիրառության մասին	71
Կ. Գ. Ղուլյան, Է. Ա. Զապունյան—Առաձգական ամրացումներով կլոր սկավառակի համար երկու կոնտակտային խնդիրների մասին	77

ՖԻԶԻԿԱ

Գ. Գ. Դեմիրխանյան, Ֆ. Պ. Սաֆարյան—Խառնուրդային լազերային գծերի ինտենսիվության դերայ—Ուղղերի ֆակտորի հաշվարկը	83
--	----

ԷԼԵԿՏՐԱԴԻՆԱՄԻԿԱ

Ռ. Գ. Զանգիրյան, Ֆ. Ա. Կոստանյան—Մագնիսահիդրոդինամիկական ալիքների անցումային ճառագայթումը	89
---	----

ՄԻՋԱՏԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Մ. Յաբլովով-Խնձորյան—Տերևակեր բզեզների նոր տեսակ <i>Տաջիկստանից</i> (Coleoptera, Chrysomelidae)	94
--	----

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

МАТЕМАТИКА

С. Х. Дарбинян—Опровержение одной гипотезы Томассена	51
Ю. М. Мовсисян—Уравновешенные сверхтождества длины три	55
Е. С. Марутян—О p -ядре суммы кооперативных игр с континуумом участников	61

МЕХАНИКА ГРУНТОВ

С. Р. Месчян—Методика определения ползучести одномерного уплотнения набухающих глинистых грунтов при начальной природной влажности	65
--	----

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. Г. Мхитарян—Об одном ортогональном интегральном соотношении и его приложении к контактным задачам теории упругости	71
К. Г. Гулян, Э. А. Запунян—О двух контактных задачах для круглого диска с упругими креплениями	77

ФИЗИКА

Г. Г. Демирханян, Ф. П. Сафарян—Вычисление фактора Дебая—Валлера примесных лазерных кристаллов	83
--	----

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Р. Г. Джангирян, Ф. А. Костанян—Переходное излучение магнитогидродинамических волн	89
--	----

ЭНТОМОЛОГИЯ

С. М. Яблоков-Хнзорян—Новый листоед из Таджикистана (Coleoptera, Chrysomelidae)	94
---	----

C O N T E N T S

MATHEMATICS	P.
<i>S. Kh. Darbinian</i> —Disproof of a conjecture of Thomassen	51
<i>Yu. M. Movsisian</i> —Balanced hyperidentities of length three	55
<i>Y. S. Marutian</i> —On the nucleus of the sum of cooperative games with continuum of players	61
SOIL MECHANICS	
<i>S. R. Meschian</i> —The method of creep determination and one-dimensional compression of swelling clay soils under initial natural humidity	65
THEORY OF ELASTICITY	
<i>V. G. Mkhitarian</i> —On orthogonal integral relation and its application to contact problems of the theory of elasticity	71
<i>K. G. Gulian, E. A. Zapounian</i> —On two contact problems for a round disk with elastic stiffeners.	77
PHYSICS	
<i>G. G. Demirkhanian, E. P. Safariun</i> —Calculation of the Debye-Waller factor in the intensivity of spectral lines of impurity laser crystals.	83
ELECTRODYNAMICS	
<i>R. G. Jangirian, F. A. Kostanian</i> —Transition radiation of hydromagnetic waves	89
ENTOMOLOGY	
<i>S. M. Iablokoff—Khinzorian</i> —A new species of Chrysomelid-beetles from Tadzhikistan	94

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 18.02. 1983 г. Подписано к печати 23.03. 1983 г. ВФ 05855.
Бумага № 1,70×108 1/16. Высокая печать. Печ. лист. 3,0. Усл. печ. лист. 4,2
Учет.-изд. 3,43. Тираж 430. Заказ 154. Издат. 5865.

Адр. ред.: 375019, Ереван, Барекамутян, 24 г. II эт., 1 к.

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван, Барекамутян 24 г.
Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин.

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. Х. Дарбинян

Опровержение одной гипотезы Томассена

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 20/V 1982)

Рассматриваются конечные ориентированные графы (орграфы) без петель и кратных дуг. Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в ⁽¹⁾. Бонди ⁽²⁾ высказал гипотезу: каждый $(n-1)$ -регулярный сильно связный орграф с n вершинами, кроме D_5 и D_7 , является гамильтоновым (орграфы D_5 и D_7 изображены на рис. 1). Напомним, что орграф G называется m -регулярным, если для любой его вершины x имеет место $d(x) = \text{ld}(x) + \text{od}(x) = m$. Орграф G называется k -связным, если для любых двух его вершин x и y существует k вершинно-непересекающихся путей из вершины x в вершину y . Томассен в ⁽³⁾ построил примеры орграфов, для которых предположение Бонди не верно. Все эти построенные орграфы являются односвязными; Томассеном ⁽³⁾ (см. также ⁽⁴⁾), гипотеза 1. 4. 1) была выдвинута гипотеза: любой 2-связный $(n-1)$ -регулярный орграф с n вершинами, кроме D_5 и D_7 , является гамильтоновым.

В настоящей статье опровергается эта гипотеза.

Пусть G —орграф. Через $V(G)$ обозначается множество вершин G , а через $E(G)$ —множество его дуг. Для $A, B \subseteq V(G)$ введем обозначения:

$$E(A \rightarrow B) = \{(y, z) / y \in A, z \in B\},$$

$$E(A, B) = E(A \rightarrow B) \cup E(B \rightarrow A).$$

Пусть H_1 —орграф, изображенный на рис. 1.

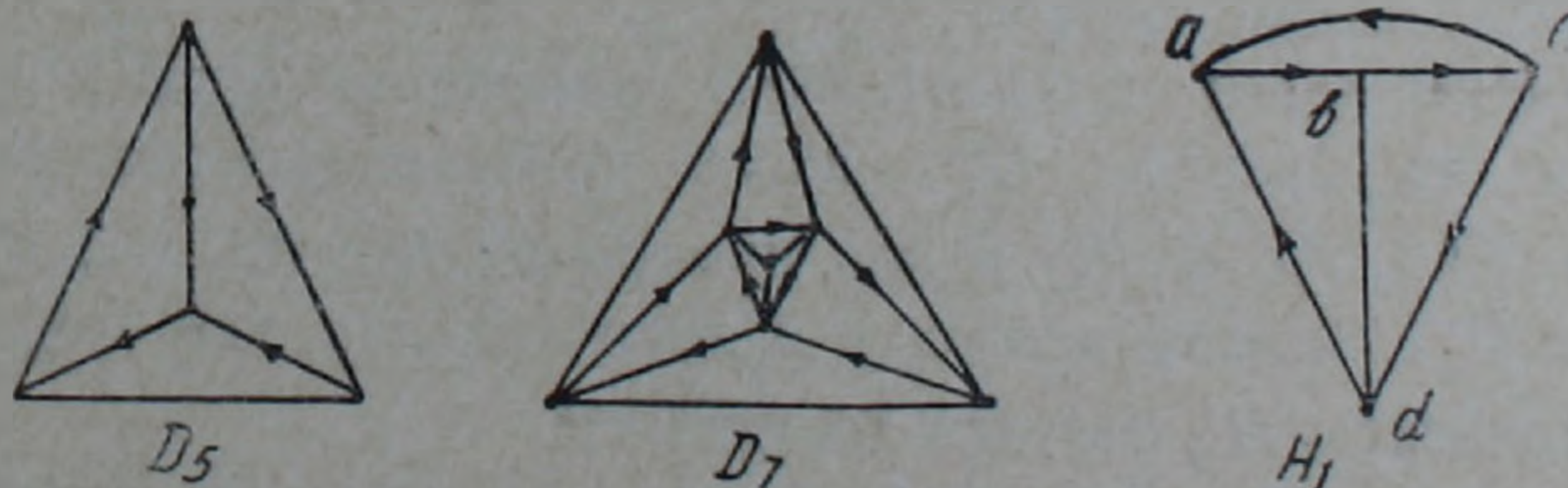


Рис. 1

Для любого $k \geq 2$ определим орграф H_k следующим образом (см. рис. 2). Возьмем k копий $H_1^1, H_1^2, \dots, H_1^k$ орграфа H_1 и добавим между этими копиями все дуги из множеств $E(A, A), E(C, C)$,

$E(D \rightarrow A)$, $E(C \rightarrow D)$ и $E(B, D)$, где $A = \{x/x = a \in V(H_1^i)\}$, $B = \{x/x = b \in V(H_1^i)\}$, $C = \{x/x = c \in V(H_1^i)\}$ и $D = \{x/x = d \in V(H_1^i)\}$, $1 \leq i \leq k$.

Утверждение 1. Для любого $k \geq 1$ орграф H_k является k -связным.

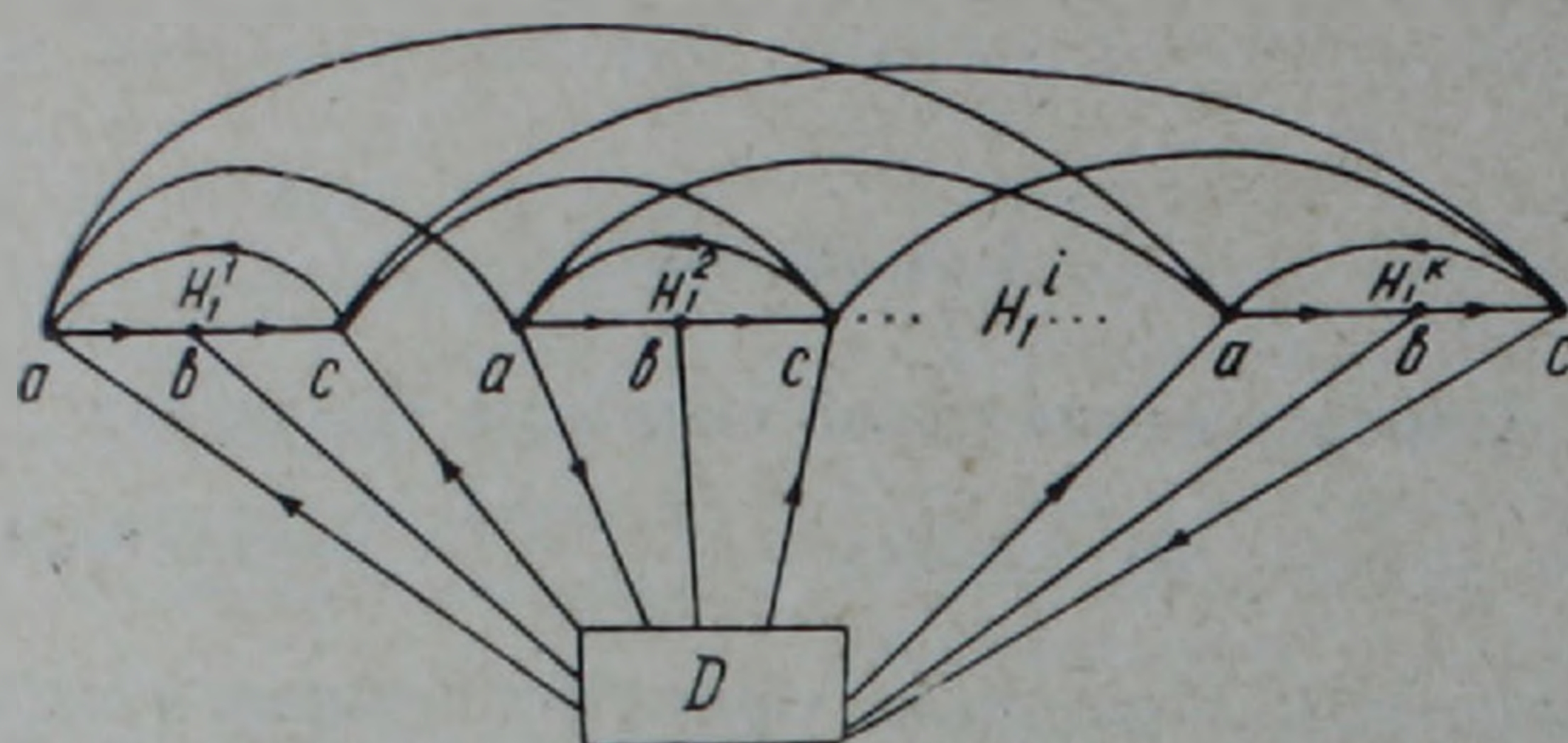


Рис. 2. Орграф H_k

Доказательство. Простой проверкой можно убедиться, что при $k \leq 2$ орграф H_k является k -связным. Допустим, что утверждение справедливо для всех $i \leq k-1$, $k \geq 3$. Пусть x и y произвольные вершины орграфа H_k . Тогда x, y принадлежат некоторому орграфу $H_{k-1} \subset H_k$. Следовательно, по индуктивному предположению в H_{k-1} существует $k-1$ вершинно-непересекающихся путей из вершины x в вершину y . Кроме того, так как $H_k \setminus H_{k-1} = H_1$ является сильно связным и вершина x (соответственно y) смежна к (соответственно из) некоторой вершине $H_k \setminus H_{k-1}$, то в H_k существует путь из вершины x в вершину y , который проходит только через вершины $H_k \setminus H_{k-1}$. Значит в H_k существует k вершинно-непересекающихся путей из вершины x в вершину y , т. е. H_k является k -связным.

Пусть Q_k^1 орграф, который получается из H_k после добавления одной новой вершины x , которая соединяется с вершинами H_k всеми дугами из множеств $E(x \rightarrow A)$, $E(x, B)$ и $E(C \rightarrow x)$ и пусть Q_k^m , $m \geq 2$ орграф, который представляет собой объединение орграфа Q_k^1 и $(m-1)$ -вершинного транзитивного турнира T с добавлением всех дуг, $E(V(T) \rightarrow D^{k+1})$, $E(V(T) \rightarrow A)$, $E(C \rightarrow V(T))$, где $D^{k+1} = D \cup \{x\}$, кроме того вершины $V(T)$ и B соединены точно одной дугой между собой. Заметим, что Q_k^m является $(4k+m)$ -вершинным и все вершины из $V(T) \cup D^{k+1}$ имеют степень $4k+m-1$.

Обозначим через $Q(k, m)$, $k \geq 2$ множество орграфов, которые получаются из орграфа Q_k^m после добавления некоторых дуг из множества $E(B, A \cup B \cup C)$ и при нумерации $H_1^1, H_1^2, \dots, H_1^k$ блоков H_1 орграфа Q_k^m , можно добавить и дуги (c, a) , где $c \in V(H_1^i)$, $a \in V(H_1^{i+1})$ (индексы H_1^i берутся по $\text{mod}(k)$).

С помощью утверждения 1 легко заметить, что любой орграф из множества $Q(k, m)$ является k -связным.

Утверждение 2. Для любого $k \geq 2$, если $G \in Q(k, m)$, то G не является гамильтоновым.

Доказательство. Предположим, что G является гамильтоновым и пусть $x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_l \rightarrow \dots \rightarrow x_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow x_1$, где $D^{k+1} = \{x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\}$, его гамильтоновы контур. Возьмем по направлению

контура длиннейший подпуть, который начинается из вершины x_i , $1 \leq i \leq k+1$ и из множества D^{k+1} содержит только вершину x_i . Легко заметить, что каждый такой путь содержит по крайней мере одну вершину из множества B . Отсюда, так как количество таких путей равно $k+1$, то $|B| \geq k+1$. Это противоречит условию $|B|=k$.

Утверждение 3. При любых $k \geq 2$ и $m \geq 1$ множество $Q(k, m)$ содержит $(4k+m-1)$ -регулярный орграф.

Доказательство. Пусть $x \in Q_k^m$. Тогда

$$d(x) = \begin{cases} 4k+m-1, & \text{при } x \in V(T) \cup D^{k+1}, \\ 2k+m+3, & \text{при } x \in B, \\ 3k+m, & \text{при } x \in A \cup C. \end{cases}$$

Из орграфа Q_k^m с помощью добавления новых дуг получим $(4k+m-1)$ -регулярный орграф такой, чтобы полученный орграф принадлежал множеству $Q(k, m)$. Для всех i и j , $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq [(k-2)/2]$ в орграфе Q_k^m добавим все дуги вида (a, b) , (b, a) , (b, c) , (c, b) , где $a, c \in V(H_1^i)$ и $b \in V(H_1^{i+2j})$. Кроме того добавим все дуги вида (c, a) , где $c \in V(H_1^i)$, $a \in V(H_1^{i+1})$. Далее при нечетном k в каждом блоке H_1^i добавим дуги вида (b, a) (c, b) . Полученный орграф является $(4k+m-1)$ -регулярным и принадлежит $Q(k, m)$. (На рис. 3 и 4 изображены примеры регулярных орграфов из $Q(2, 9)$ и $Q(3, 13)$.)

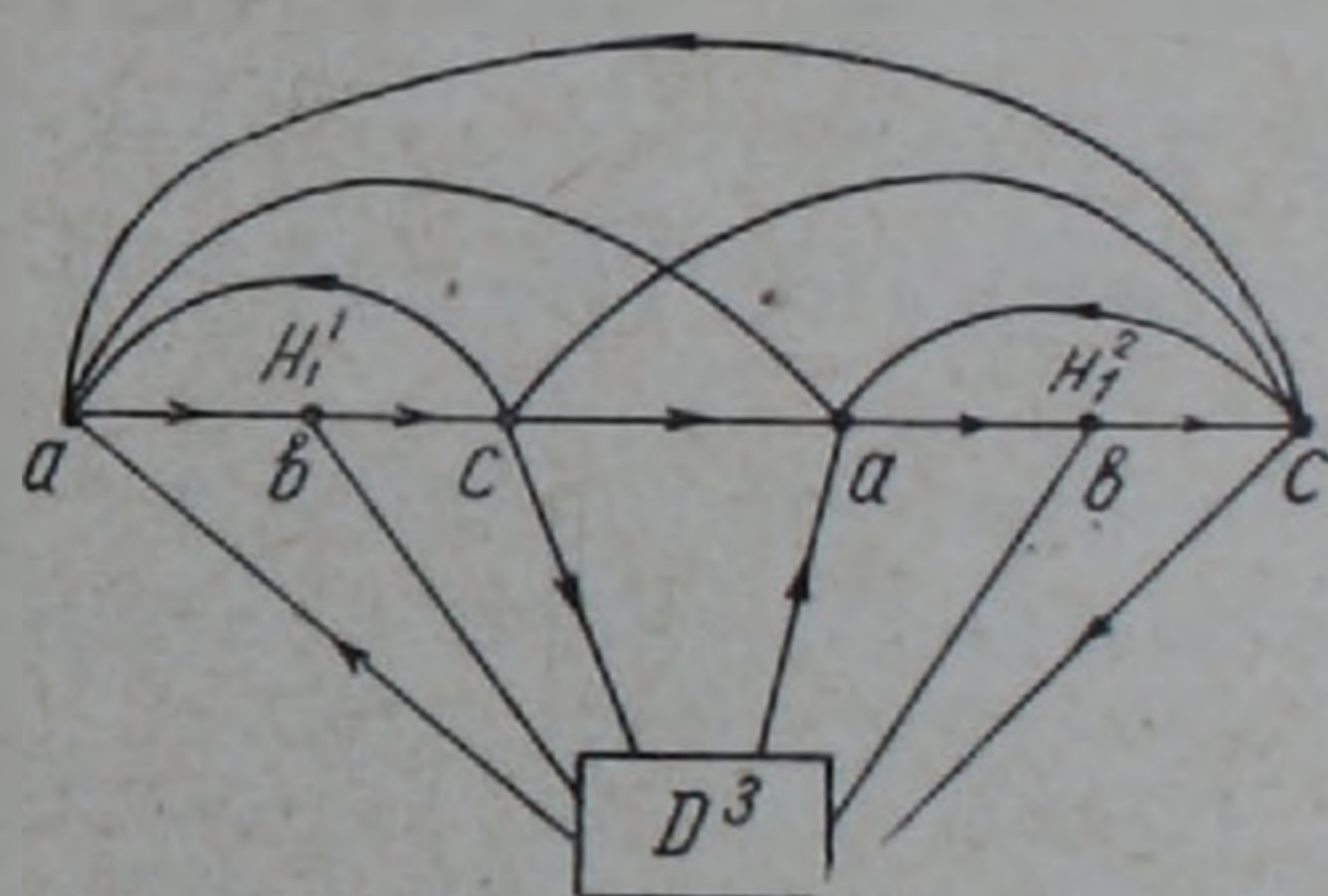


Рис. 3. 2-связный 8-регулярный негамильтонов орграф

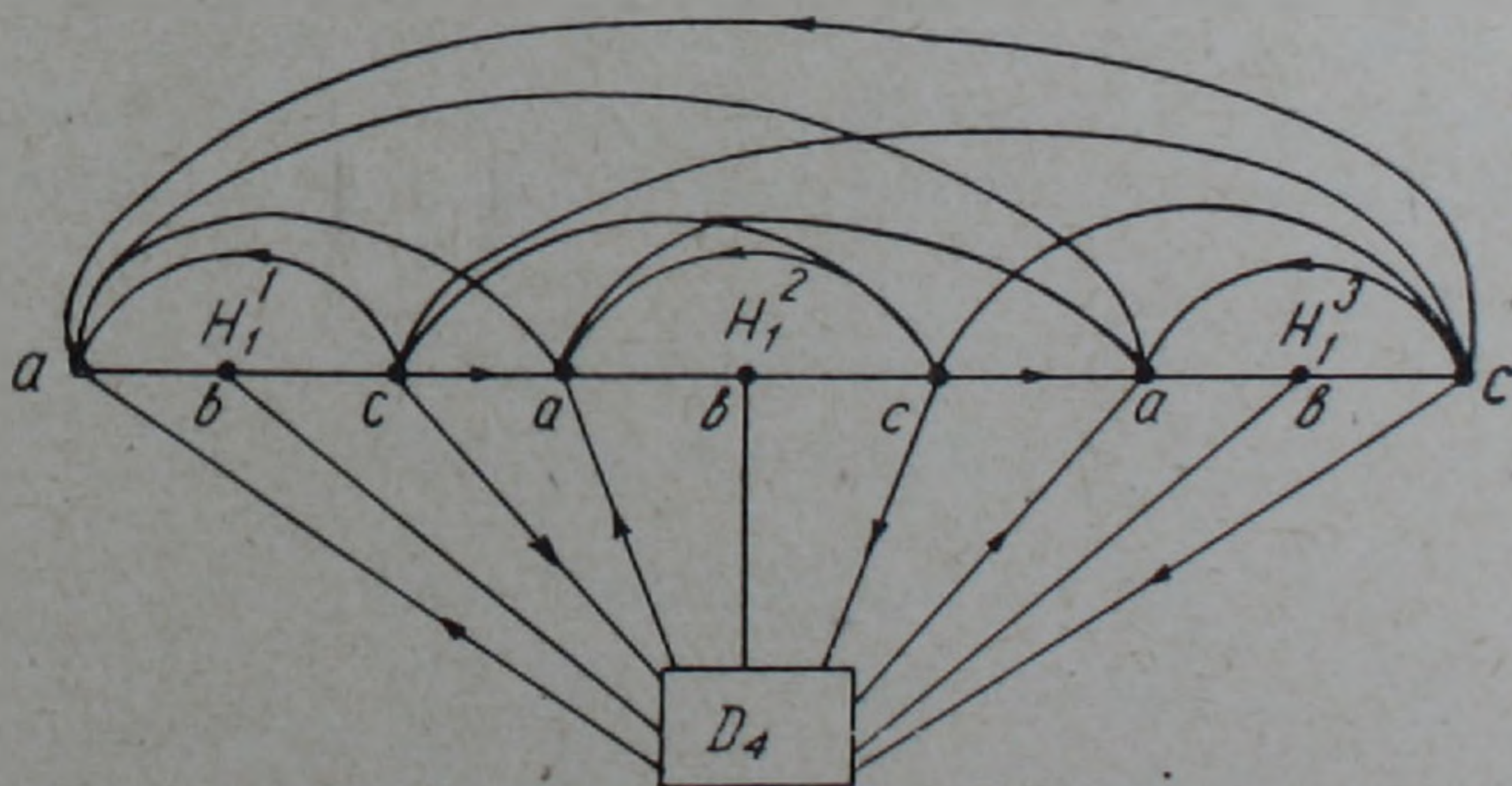


Рис. 4. 3-связный 12-регулярный негамильтонов орграф

Из утверждений 1—3 вытекает следующая

Теорема. Для любых $k \geq 2$ и $n \geq 4k+1$ существует k -связный $(n-1)$ -регулярный негамильтонов орграф с n вершинами.

З а м е ч а н и е. Если в орграфе $G \in Q(k, m)$ турнир T , все вершины типа a и типа c заменим произвольными орграфами (различные вершины можно заменять различными орграфами), то полученный орграф также будет негамильтоновым. Предполагаем, что гипотеза Томассена верна для тех орграфов, которые невозможно построить таким путем.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ս. Խ. ԴԱՐՔԻՆՅԱՆ

Թոմասենի մի հիպոթեզի հերքումը .

Դիտարկվում են վերջավոր կողմնորոշված պարզ գրաֆներ:

Թոմասենը աշխատանք ⁽³⁾-ում ենթադրում է, որ ցանկացած n գագաթների 2-կապակցված $(n-1)$ -համասեռ կողմնորոշված գրաֆ, բացի D_5 -ից և D_7 -ից, հանդիսանում է համիլտոնյան:

Ներկա հոդվածում հերքվում է այդ ենթադրությունը և ապացուցվում է՝

Թե ճշմարիտ է. Ցանկացած $k \geq 2$ և $n \geq 4k+1$ թվերի համար գոյություն ունի n գագաթների k -կապակցված $(n-1)$ -համասեռ ոչ համիլտոնյան կողմնորոշված գրաֆ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Ф. Харари, Теория графов, Мир, М., 1973. ² J. A. Bondy, Proc. 9th Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Boca Raton, Congressus Numertantium XXI, Utilitas Math. Publ., 1978. ³ C. Thomassen, Proc. 7th British Combinatorial Conf., London Math. Soc. Lecture Notes 38, Cambridge University Press, 1979. ⁴ J. C. Bermond, C. T. Thomassen, Prepr. Ser. Math. Inst. Aarhus Univ., № 10, 1980—1981.

УДК 519.4

МАТЕМАТИКА

Ю. М. Мовсисян

Уравновешенные сверхтождества длины три

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 20/V 1982)

1. *Классификация по выполнимости.* Уравновешенные тождества длины 3 изучены В. Д. Белоусовым ⁽¹⁾, А. Садам ⁽²⁾, Б. Трпеновским ⁽³⁾ и др. В настоящей работе приводятся результаты исследований сверхтождеств (т. е. тождеств с переменными операциями), определенных по этим равенствам. В смысле выполнимости сверхтождества, определенные по равенству ассоциативности $x \cdot yz = x(y \cdot z)$, рассмотрены в ⁽⁴⁾.

Универсальная алгебра $\langle Q; \Sigma \rangle$ с бинарными операциями называется обратимой, если для любой операции $A \in \Sigma$ группоид $Q(A)$ — квазигруппа. Все рассматриваемые здесь алгебры — обратимые алгебры, хотя многие результаты (в подходящей формулировке) можно распространить и на другие классы алгебр (например, на класс моноидальных систем ⁽⁴⁾).

Алгебра $\langle Q; \Sigma \rangle$ называется нетривиальной, если порядок $|\Sigma| > 1$. Сверхтождество называется нетривиальным, если в нем участвуют хотя бы два различных символа операций. Легко заметить, что если в нетривиальной обратимой алгебре выполняется сверхтождество, определенное по одному из уравновешенных тождеств длины 3, то каждый символ операции должен в нем повторяться хотя бы два раза (это следует и из более общего результата об одиночных операциях ⁽⁵⁾). Следовательно каждое из указанных тождеств порождает три нетривиальных сверхтождества (из них $X[x, Y(y, z)] = X[x, Y(y, z)]$ и $X[Y(x, y), z] = X[Y'(x, y), z]$ выполняются в классе всех бинарных алгебр):

$$X[x, Y(y, z)] = Y[x, X(y, z)] \quad (1.1)$$

$$X[x, X(y, z)] = Y[x, Y(y, z)] \quad (1.2)$$

$$X[x, Y(y, z)] = X[x, Y(z, y)] \quad (2.1)$$

$$X[x, Y(y, z)] = Y[x, X(z, y)] \quad (2.2)$$

$$X[x, X(y, z)] = Y[x, Y(z, y)] \quad (2.3)$$

$$X[x, Y(y, z)] = X[y, Y(x, z)] \quad (3.1)$$

$$X[x, Y(y, z)] = Y[y, X(x, z)] \quad (3.2)$$

$$X[x, X(y, z)] = Y[y, Y(x, z)] \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} X[x, Y(y, z)] &= X[y, Y(z, x)] \\ X[x, Y(y, z)] &= Y[y, X(z, x)] \\ X[x, X(y, z)] &= Y[y, Y(z, x)] \end{aligned} \quad (4.1) - (4.3)$$

$$\begin{aligned} X[x, Y(y, z)] &= X[z, Y(y, x)] \\ X[x, Y(y, z)] &= Y[z, X(y, x)] \\ X[x, X(y, z)] &= Y[z, Y(y, x)] \end{aligned} \quad (6.1) - (6.3)$$

$$\begin{aligned} X[x, Y(y, z)] &= X[Y(x, z), y] \\ X[x, Y(y, z)] &= Y[X(x, z), y] \\ X[x, X(y, z)] &= Y[Y(x, z), y] \end{aligned} \quad (8.1) - (8.3)$$

$$\begin{aligned} X[x, Y(y, z)] &= X[Y(y, z), x] \\ X[x, Y(y, z)] &= Y[X(y, z), x] \\ X[x, X(y, z)] &= Y[Y(y, z), x] \end{aligned} \quad (10.1) - (10.3)$$

$$\begin{aligned} X[Y(x, y), z] &= Y[X(x, y), z] \\ X[X(x, y), z] &= Y[Y(x, y), z] \end{aligned} \quad (12.1), (12.2)$$

$$\begin{aligned} X[Y(x, y), z] &= X[Y(x, z), y] \\ X[Y(x, y), z] &= Y[X(x, z), y] \\ X[X(x, y), z] &= Y[Y(x, z), y] \end{aligned} \quad (14.1) - (14.3)$$

$$\begin{aligned} X[Y(x, y), z] &= X[Y(y, z), x] \\ X[Y(x, y), z] &= Y[X(y, z), x] \\ X[X(x, y), z] &= Y[Y(y, z), x] \end{aligned} \quad (16.1) - (16.3)$$

$$\begin{aligned} X[x, Y(y, z)] &= X[z, Y(x, y)] \\ X[x, Y(y, z)] &= Y[z, X(x, y)] \\ X[x, X(y, z)] &= Y[z, Y(x, y)] \end{aligned} \quad (5.1) - (5.3)$$

$$\begin{aligned} X[x, Y(y, z)] &= X[Y(y, x), z] \\ X[x, Y(y, z)] &= Y[X(y, x), z] \\ X[x, X(y, z)] &= Y[Y(y, x), z] \end{aligned} \quad (7.1) - (7.3)$$

$$\begin{aligned} X[x, Y(y, z)] &= X[Y(z, x), y] \\ X[x, Y(y, z)] &= Y[X(z, x), y] \\ X[x, X(y, z)] &= Y[Y(z, x), y] \end{aligned} \quad (9.1) - (9.3)$$

$$\begin{aligned} X[x, Y(y, z)] &= X[Y(z, y), x] \\ X[x, Y(y, z)] &= Y[X(z, y), x] \\ X[x, X(y, z)] &= Y[Y(z, y), x] \end{aligned} \quad (11.1) - (11.3)$$

$$\begin{aligned} X[Y(x, y), z] &= X[Y(y, x), z] \\ X[Y(x, y), z] &= Y[X(y, x), z] \\ X[X(x, y), z] &= Y[Y(y, x), z] \end{aligned} \quad (13.1) - (13.3)$$

$$\begin{aligned} X[Y(x, y), z] &= X[Y(z, x), y] \\ X[Y(x, y), z] &= Y[X(z, x), y] \\ X[X(x, y), z] &= Y[Y(z, x), y] \end{aligned} \quad (15.1) - (15.3)$$

$$\begin{aligned} X[Y(x, y), z] &= X[Y(z, y), x] \\ X[Y(x, y), z] &= Y[X(z, y), x] \\ X[X(x, y), z] &= Y[Y(z, y), x] \end{aligned} \quad (17.1) - (17.3)$$

Для краткости высказывание „в обратимой алгебре $\langle Q; \Sigma \rangle$ выполняется сверхтождество (n) “ записывается „ $\langle Q; \Sigma \rangle \models (n)$ “.

Теорема 0. 1. $\langle Q; \Sigma \rangle \models (1.1) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = \lambda_i(x \cdot y)\}$, где $Q(\cdot)$ — квазигруппа, а отображения λ_i — перестановочные между собою право-регулярные подстановки квазигруппы $Q(\cdot)$.

2. $\langle Q; \Sigma \rangle \models (1.2) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = \lambda_i(x \cdot y)\}$, где $Q(\cdot)$ — квазигруппа, а подстановка $\lambda_i: Q \rightarrow Q$ удовлетворяет условию $\lambda_i(x \cdot y) = x \cdot \lambda_i^{-1}y$.

3. $\langle Q; \Sigma \rangle \models (12.1) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = \lambda_i(x \cdot y)\}$,

где $Q(\cdot)$ — квазигруппа, а отображения λ_i — перестановочные между собою лево-регулярные подстановки этой квазигруппы.

$$4. \langle Q; \Sigma \rangle | = (12.2) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = \lambda_i(x \cdot y)\},$$

где $Q(\cdot)$ — квазигруппа, а $\lambda_i : Q \rightarrow Q$ — подстановка с условием $\lambda_i(x \cdot y) = \lambda_i^{-1}x \cdot y$.

$$5. \langle Q; \Sigma \rangle | = (2.1) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = A_i(y, x)\}.$$

$$6. \langle Q; \Sigma \rangle | = (2.2) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = \lambda_i(x \cdot y)\},$$

где $Q(\cdot)$ — коммутативная квазигруппа, отображения λ_i — перестановочные между собою право-регулярные подстановки квазигруппы $Q(\cdot)$.

$$7. \langle Q; \Sigma \rangle | = (2.3) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = \lambda_i(x \cdot y)\},$$

где $Q(\cdot)$ — коммутативная квазигруппа, а $\lambda_i : Q \rightarrow Q$ — подстановка с условием $\lambda_i(x \cdot y) = x \cdot \lambda_i^{-1}y$.

8. В классе всех обратимых алгебр сверхтождества (2.1), (10.1), (11.1) и (13.1), сверхтождества (2.2), (10.2), (11.2) и (13.2), далее — (2.3), (10.3), (11.3) и (13.3) эквивалентны (в смысле выполнимости).

$$9. \langle Q; \Sigma \rangle | = (3.1) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = x \circ t_i \circ y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, $t_i \in Q$, $\alpha : Q \rightarrow Q$ — фиксированная подстановка.

$$10. \langle Q; \Sigma \rangle | = (3.2) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = \alpha_i x \circ y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, $\alpha_i : Q \rightarrow Q$ — подстановка.

$$11. \langle Q; \Sigma \rangle | = (3.3) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = x \circ t_i \circ y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, t_i^2 не зависит от индекса i , $\alpha : Q \rightarrow Q$ — фиксированная подстановка.

$$12. \langle Q; \Sigma \rangle | = (14.1) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = x \circ t_i \circ \alpha y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, $t_i \in Q$, $\alpha : Q \rightarrow Q$ — фиксированная подстановка.

$$13. \langle Q; \Sigma \rangle | = (14.2) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = x \circ \alpha_i y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, $\alpha_i : Q \rightarrow Q$ — подстановка.

$$14. \langle Q; \Sigma \rangle | = (14.3) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = x \circ t_i \circ \alpha y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, t_i^2 не зависит от индекса i , $\alpha : Q \rightarrow Q$ — некоторая подстановка.

$$15. \langle Q; \Sigma \rangle | = (4.1) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = x \circ t_i \circ y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, $t_i \in Q$.

$$16. \langle Q; \Sigma \rangle | = (4.3) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(xy) = x \circ t_i \circ y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, $t_i \circ t_i = e$.

17. В классе всех обратимых алгебр

i) сверхтождества (4.1), (4.2), (15.1), (15.2), (5.1), (5.2), (16.1),

(16.2), (7.1), (7.2), (8.1), (8.2), (9.1), (9.2) эквивалентны (в смысле выполнимости).

ii) *сверхтождества* (4.3), (15.3), (5.3), (16.3), (7.3), (8.3), (9.3) также эквивалентны.

$$18. \langle Q; \Sigma \rangle | = (6.1) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = \varphi^2 x \circ t_i \circ \varphi y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, φ — ее автоморфизм, $t_i \in Q$.

$$19. \langle Q; \Sigma \rangle | = (6.2) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = \varphi^2 x \circ t_i \circ \varphi y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, φ — ее автоморфизм со свойством $\varphi t_i = t_i \circ t$, для некоторого фиксированного элемента $t \in Q$.

$$20. \langle Q; \Sigma \rangle | = (6.3) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = \varphi^2 x \circ t_i \circ \varphi y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, φ — ее автоморфизм со свойством $\varphi t_i = t_i^{-1} \circ t$, для некоторого фиксированного элемента $t \in Q$.

$$21. \langle Q; \Sigma \rangle | = (17.1) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = \varphi x \circ t_i \circ \varphi^2 y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, φ — ее автоморфизм, $t_i \in Q$.

$$22. \langle Q; \Sigma \rangle | = (17.2) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = \varphi x \circ t_i \circ \varphi^2 y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, φ — ее автоморфизм со свойством $\varphi t_i = t_i \circ t$, для некоторого фиксированного элемента $t \in Q$.

$$23. \langle Q; \Sigma \rangle | = (17.3) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = \varphi x \circ t_i \circ \varphi^2 y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, φ — ее автоморфизм со свойством $\varphi t_i = t_i^{-1} \circ t$, для фиксированного $t \in Q$.

З а м е ч а н и е. Если порядок $|\Sigma| = 1$, то, как вытекает из свойств 9 и 12, условие $p(0) = 0$ в описании 1.3 статьи (6) оказывается лишним.

2. Изотопные замыкания сверттождеств. Класс алгебр Λ называется изотопным замыканием формулы Φ , внутри класса всех обратимых алгебр, если Λ содержит те и только те обратимые алгебры, каждая из которых изотопна алгебре, в которой истинна формула Φ . В аналогичном смысле понимается и изотопное замыкание системы формул. В частности мы здесь определяем изотопные замыкания некоторых сверттождеств.

Два сверттождества (или две формулы) назовем изотопно-эквивалентными, если внутри класса всех обратимых алгебр их изотопные замыкания совпадают. Начнем с понятия изотопии: бинарные алгебры $\langle Q; \Sigma \rangle$ и $\langle Q'; \Sigma' \rangle$ называются изотопными, если существуют биективные отображения $\alpha, \beta, \gamma: Q \rightarrow Q'$ и $\tilde{\varphi}: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ такие, что $\alpha A(x, y) = [\tilde{\varphi} A](\beta x, \gamma y)$ для любой операции $A \in \Sigma$ и для любых $x, y \in Q$.

Т е о р е м а 1. *Внутри класса всех обратимых алгебр*

а) *изотопное замыкание формулы $\exists Y \forall X \forall x, y, z (X[x, Y(y, z)] = Y[X(x, y), z])$*

определяется импликацией

$$Y(x_1, y_0) = Y(x_0, y_1)$$

$$Y(x_1, y_2) = Y(x_0, y_3) \rightarrow X(x_2, y_3) = Y(x_3, y_2); \quad (18)$$

$$X(x_2, y_1) = Y(x_3, y_0)$$

б) изотопное замыкание формулы $\exists Y \forall X \forall x, y, z (Y[x, X(y, z)] = X[Y(x, y), z])$

определяется импликацией

$$\begin{aligned} X(x_1, y_0) &= X(x_0, y_1) \\ Y(x_1, y_2) &= X(x_0, y_3) \rightarrow X(x_2, y_3) = Y(x_3, y_2); \\ X(x_2, y_1) &= X(x_3, y_0) \end{aligned} \quad (19)$$

в) изотопное замыкание формулы $\exists Y \forall X \forall x, y, z (X[Y(x, y), z] = X[x, Y(y, z)])$

определяется импликацией

$$\begin{aligned} X(x_1, y_0) &= X(x_0, y_1) \\ X(x_1, y_2) &= X(x_0, y_3) \rightarrow Y(x_3, y_2) = Y(x_2, y_3); \\ X(x_2, y_1) &= X(x_3, y_0) \end{aligned} \quad (20)$$

г) изотопное замыкание системы $\exists Y \forall X \forall x, y, z (Y[x, Y(y, z)] = X[X(x, y), z]); X[Y(x, y), z] = Y[X(x, y), z]$

определяется импликацией

$$\begin{aligned} X(x_1, y_0) &= X(x_0, y_1) \\ X(x_1, y_2) &= X(x_0, y_3) \rightarrow X(x_2, y_3) = Y(x_3, y_2), \\ Y(x_2, y_1) &= X(x_3, y_0) \end{aligned} \quad (21)$$

причем из формулы (21) следуют формулы (18) и (20);

д) изотопное замыкание системы $\exists Y \forall X \forall x, y, z (X[x, X(y, z)] = Y[Y(x, y), z]); X[x, Y(y, z)] = Y[x, X(y, z)]$

определяется импликацией

$$\begin{aligned} Y(x_1, y_0) &= Y(x_0, y_1) \\ X(x_1, y_2) &= Y(x_0, y_3) \rightarrow X(x_2, y_3) = Y(x_3, y_2), \\ Y(x_2, y_1) &= Y(x_3, y_0) \end{aligned} \quad (22)$$

причем из формулы (22) следуют формулы (19) и (20).

Следствие. В классе всех обратимых алгебр

е) изотопное замыкание свертотждества ассоциативности

$$X[x, Y(y, z)] = Y[X(x, y), z] \quad (23)$$

определяется конъюнкцией формул (18) и (19);

ж) изотопное замыкание свертотждества ассоциативности

$$X[x, Y(y, z)] = X[Y(x, y), z] \quad (24)$$

определяется конъюнкцией формул (18), (19) и (20);

з) изотопное замыкание свертотждества ассоциативности

$$X[x, X(y, z)] = Y[Y(x, y), z] \quad (25)$$

определяется конъюнкцией формул (19) и (21) (что равносильно конъюнкции формул (18) и (22)).

Теорема 2. Внутри класса всех обратимых алгебр

и) изотопное замыкание свертотждества (3.2) определяется импликацией

$$\begin{aligned} X(x_1, y_2) = X(x_2, y_1) &\rightarrow X(x_2, y_3) = Y(x_3, y_2); \\ X(x_1, y_3) = Y(x_3, y_1) \end{aligned} \quad (26)$$

к) изотопное замыкание сверхтождества (14.2) определяется импликацией

$$\begin{aligned} Y(x_1, y_2) = Y(x_2, y_1) &\rightarrow X(x_2, y_3) = Y(x_3, y_2); \\ X(x_1, y_3) = Y(x_3, y_1) \end{aligned} \quad (27)$$

л) изотопное замыкание сверхтождества (4.3) определяется импликацией

$$\begin{aligned} Y(x_1, y_2) = Y(x_2, y_1) &\rightarrow X(x_2, y_3) = Y(x_3, y_2). \\ Y(x_1, y_3) = X(x_3, y_1) \end{aligned}$$

Следствие. Внутри класса всех обратимых алгебр

м) изотопное замыкание сверхтождества (4.1) определяется конъюнкцией формул (26) и (27);

н) сверхтождества (4.1), (3.1), (14.1), (6.1), (6.2), (17.1) и (17.2) изотопно-эквивалентны;

о) сверхтождества (4.3), (3.3) и (14.3) изотопно-эквивалентны;

п) изотопное замыкание сверхтождества (6.3) (или (17.3)) содержит изотопное замыкание сверхтождества (4.3) и содержится в изотопном замыкании сверхтождества (4.1).

Важность полученных сравнений (как в смысле выполнимости, так и изотопной эквивалентности) связана с тем, что внутри класса всех обратимых алгебр сверхтождества (4.1) (или (4.3)) эквивалентны системе сверхтождеств ассоциативности и коммутативности:

$$(4.1) \sim \begin{cases} (23) \\ X(x, y) = X(y, x) \end{cases} \sim \begin{cases} (24) \\ X(x, y) = X(y, x); \end{cases} \quad (4.3) \sim \begin{cases} (25) \\ X(x, y) = X(y, x). \end{cases}$$

Попутно получен отрицательный ответ на вопрос 6 книги ⁽¹⁾.

Ереванский государственный университет

ՅՈՒ. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Երեք երկարությամբ հավասարակշռված գերնույնություններ

Աշխատանքում նկարագրվում են երեք երկարությամբ օժտված բոլոր հավասարակշռված գերնույնությունները՝ հակադարձելի հանրահաշիվների դասում: Այդ գերնույնությունները դասակարգվում են ըստ իրացնելիության, այնուհետև որոշվում են մի շարք գերնույնությունների իդոտոպ փակույթները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. Д. Белоусов, Мат. сб., т. 70 (112), № 1 (1966). ² A. Sade, Amer. Math. Monthly, vol. 68, № 4 (1961). ³ Б. Трпеновски, Годишен зб. Природно-матем. фак. Ун-т Скопье, 13, 33—43 (1960). ⁴ Ю. М. Мовсисян, ДАН АрмССР, т. 62, № 5 (1976). ⁵ J. Aczél, Algebra Univers. I, N 1 (1971). ⁶ J. Jezek, T. Kepka, Check. Math. J., 29 (1979). ⁷ В. Д. Белоусов, Алгебраические сети и квазигруппы, Штиница, Кишинев, 1971.

УДК 518.9

МАТЕМАТИКА

Е. С. Марутян

О n -ядре суммы кооперативных игр с континуумом участников

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 26/V 1982)

Принцип оптимальности, называемый в теории игр n -ядром, был введен Д. Шнейдлером в работе ⁽¹⁾ для игр n -лиц в форме характеристической функции. Задачу распространения этого понятия на игры с бесконечным множеством игроков впервые рассмотрел Ч. Берд (см. ⁽²⁾). Целью данной работы является описание n -ядра для суммы игр с континуумом участников вообще и для выпуклых игр в частности.

Игрой называется тройка $(I, \mathcal{E}, v)$, где $(I, \mathcal{E})$ есть основное пространство игроков, изоморфное $([0, 1], \mathcal{B})$ ($\mathcal{B}$ — борелевская σ -алгебра подмножеств $[0, 1]$), а v есть такая ограниченная функция множества, что $v: \mathcal{E} \rightarrow R_+$ и $v(\emptyset) = 0$. Элементы $\mathcal{E}$ будем называть коалициями. Обозначим через $V(I, \mathcal{E})$ множество всех игр, определенных на $(I, \mathcal{E})$. Предполагается, что $V(I, \mathcal{E})$ снабжено топологией, в которой для $v_0 \in V(I, \mathcal{E})$ база окрестностей имеет вид

$$\{v/\forall j=1, \dots, n, |v_0(A_j) - v(A_j)| < \varepsilon\}, \text{ где } \{A_j\}_1^n \subset \mathcal{E}, \text{ а } \varepsilon > 0.$$

Будем рассматривать определенные в ⁽³⁾ пространство $B(I, \mathcal{E})$, сопряженное к нему $ba(I, \mathcal{E})$ и ba -слабую топологию $\sigma(ba, B)$ на B .

Множество дележей игры v в общем случае определяется следующим образом:

$$D(v) = \{\mu \in ba_+(I, \mathcal{E})/\mu(I) = v(I)\}.$$

ε - c -ядром игры v называется следующее множество:

$$C^\varepsilon(v) = \{\mu \in D(v)/\mu(S) \geq v(S) - \varepsilon, \text{ для } \forall S \in \mathcal{E}\}.$$

При $\varepsilon = 0$ $C^\varepsilon(v)$ превращается в c -ядро.

Аналогично ⁽²⁾ рассмотрим отношение предпочтения $\succeq^*$, заданное на множестве дележей $D(v)$ следующим образом: пусть $\mu_1, \mu_2 \in D(v)$, скажем, что $\mu_1 \succeq^* \mu_2$, если $\sup[v(S) - \mu_1(S)] < \sup[v(S) - \mu_2(S)]$, где супремум в левой и правой частях рассматривается по множествам $[S/\mu_1(S) < \mu_2(S)]$, $[S/\mu_2(S) < \mu_1(S)]$ соответственно.

Определим n -ядро $N(v)$ игры v следующим образом:

$$N(v) = \{\mu \in D(v)/\mu \succeq^* \lambda, \forall \lambda \in D(v)\}.$$

Если J есть некоторое множество индексов, то суммой игр $(I, \mathcal{E}, v_j)$ называется игра $(I, \mathcal{E}, v)$, где $v(S) = \sup_{j \in J} \{v_j(S)\}$.

Предложение 1. Пусть $(I, \mathcal{E}, v)$ — сумма конечного числа игр $\{(I, \mathcal{E}, v_k) = \Gamma_k\}_{k=1, \dots, n}$, т. е.

$$v(S) = \max_{1 \leq k \leq n} \{v_k(S)\}.$$

Тогда, если

$$a = \max_k \{v_k(I)\}, \quad C_a^\varepsilon(v_k) = \{\mu \in \text{ba}_+(I, \mathcal{E}) / \mu(I) = a, \mu(S) \geq v_k(S) - \varepsilon\},$$

$$\varepsilon_0 = \min \left\{ \varepsilon / \bigcap_{k=1}^n C_a^\varepsilon(v_k) \neq \emptyset \right\},$$

то имеют место следующие включения:

$$\bigcap_{k=1}^n N(v_k) \subseteq N(v) \subseteq \bigcap_{k=1}^n C_{a'}^{\varepsilon_0}(v_k)$$

Пусть $C^\varepsilon(v)$ — минимальное ε -с-ядро игры v . Приводимое ниже утверждение устанавливает полунепрерывность сверху (см. например (4)) отображения $F: v \rightarrow C^\varepsilon(v)$.

Предложение 2. Отображение $F: v \rightarrow C^\varepsilon(v)$ слабо полунепрерывно сверху в топологии $\sigma(\text{ba}, B)$.

Замечание. Если задана система игр $\{(I, \mathcal{E}, u_j)\}_{j \in J}$, J — направленное множество, $v_{j_0}(S) = \sup_{j < j_0} u_j(S)$, $v(S) = \sup_{j \in J} \{u_j(S)\}$, то из предложения 2 следует, что $\lim_j C^{\varepsilon_j}(v_j) \subseteq C^\varepsilon(v)$.

Определение. Игра v называется σ -полунепрерывной снизу (сверху), если для любой $S \in \mathcal{E}$ и для любой неубывающей (невозрастающей) последовательности $S_n \uparrow S$ ($S_n \downarrow S$) имеет место $v(S_n) \rightarrow v(S)$. σ -непрерывными будем называть те игры, которые всюду одновременно σ -полунепрерывны и снизу и сверху.

Предложение 3. Если игра $(I, \mathcal{E}, v)$ обладает с-ядром и σ -непрерывна в I или в $\emptyset$, то $N(v) = C(v)$.

Определение. Заданная на измеримом пространстве игроков $(I, \mathcal{E})$ игра v называется выпуклой, если для любых $S, T \in \mathcal{E}$ $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$. Класс всех выпуклых игр будем обозначать через V_c . Для $T \in \mathcal{E}$ обозначим через $\mathcal{L}^T$ множество всех конечных измеримых разбиений T .

Определение. Пусть $T \subseteq S$. Маргинальной мерой коалиции S назовем следующую функцию множества:

$$\mu^S(T) = \sup_{\Lambda \in \mathcal{L}^T} \sum_{k=1}^{|\Lambda|} \{v(S) - v(S, T_k)\},$$

где $\Lambda = \{T_k\}_{k=1}^{|\Lambda|}$, $T_k \in \mathcal{E}$.

Заданная таким образом маргинальная мера является обобщением соответствующего понятия для игр с конечным множеством игроков.

Предложение 4. Если $v \in V_c$, то $\mu^S \in \text{ba}_+(I, \mathcal{E})$ и сосредоточена на S .

Обозначим через V_c' класс всех σ -непрерывных в I выпуклых игр.

Замечание. Если $v \in V_c$, то μ^S счетно-аддитивна. Введем следующую величину: $\alpha_S = \mu^S(S) - v(S)$, $\alpha_S \geq 0$, в силу того, что $(I, \mathcal{E}, v)$ является кооперативной игрой.

Предложение 5. Если $v \in V_c$, то

$$v(\cdot) = \sup_{S \in \mathcal{E}} \{\mu^S(\cdot) - \alpha_S\}. \quad (1)$$

Теперь на $(I, \mathcal{E})$ рассмотрим игру $u(S) = (\mu(S) - \alpha)^+ = \max(0, \mu(S) - \alpha)$, где $\alpha \geq 0$.

Предложение 6. $C(u) = \{v \in \text{ba}_+(I, \mathcal{E}) / v(S) = \mu(S) - \alpha \lambda(S)\}$, где $\lambda \in \text{ba}(I, \mathcal{E})$ есть знакопеременная мера, с $\lambda(I) = 1$.

Предположим, что J есть направленное множество индексов, соответствующее аффинным функциям множества из формулы (1) предложения 4. Обозначим через $v_{j_0}(S) = \sup_{j < j_0} \{\mu^j(S) - \alpha_j\}$.

Тогда получаем следующую теорему.

Теорема. Если $(I, \mathcal{E}, v)$ выпуклая, σ -непрерывная игра, то имеют место следующие утверждения:

1. $v(\cdot) = \sup_{j \in J} \{\mu^j(\cdot) - \alpha_j\}$;
2. $C(v) = \bigcap_{j \in J} C_{v(j)}^0(u^j)$;
3. $N(v^j) \subseteq C(v_j)$, $\lim_j N(v_j) \subseteq N(v) = C(v)$, если $v_j \rightarrow v$.

Замечание. Условие выпуклости достаточно, но не необходимо для представления 1.

Приведем два примера. Предварительно предположим, что $(I, \mathcal{E}) = ([0, 1], \mathcal{B})$.

В предлагаемых ниже примерах строятся игры с n -ядрами, состоящими из единственного дележа, причем в первой игре этот дележ вполне конечно-аддитивен и носит несколько патологический характер в том смысле, что сосредоточен на одном-единственном игроке.

Пример 1. Игра задана следующей характеристической функцией:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если существует такой } x \in [0, 1], \text{ что } S = [x, 1] \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Из определения характеристической функции следует, что игрок, на котором сосредоточен дележ, составляющий n -ядро, должен соответствовать точке 1.

Пример 2. Задана игра $v = f \circ \mu$, где $\mu \in \text{NA}^1$ есть скалярная мера, а $f \in C_{[0,1]}$ и удовлетворяет следующему условию: существует такой отрезок $[c, d] \subset (0, 1)$, что $f(x) \geq x$ при $x \in [c, d]$.

Для таких игр n -ядро $(^2)$ есть следующее множество

$$N(v) = \{v \in \text{NA}^1 / \min_{\lambda \in D(v)} \sup_{S \in \mathcal{B}} [v(S) - \lambda(S) = \sup_{S \in \mathcal{B}} [v(S) - v(S)] = M]\}.$$

Лемма. Пусть для $x \in (0, 1)$ $B_\mu(x) = \{S \in \mathcal{B} / \mu(S) = x\}$. Если для некоторых $\mu, \nu \in \text{NA}^1$ существует такой $x \in (0, 1)$, что $B_\mu(x) = B_\nu(x)$, то $\mu \equiv \nu$.

Единственность n -ядра в этом примере доказываем следующим образом. Сначала замечаем, что мера μ минимизирует функционал $e_v(\lambda) = \sup_{S \in \mathcal{B}} \{v(S) - \lambda(S)\}$, т. е. $\mu \in N(v)$. Отсюда на основе леммы и условия, наложенного на функцию f , из определения игры следует, что любая другая мера с таким же свойством должна совпадать с μ .

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ե. Ս. ՄԱՐՈՒԹՅԱՆ

Կոնտինուում մասնակիցներով կոոպերատիվ խաղերի գումարի կորիզի մասին

Հոդվածում տրված է կոնտինուում մասնակիցներով խաղերի գումարի, ինչպես նաև՝ ուռուցիկ խաղերի n -կորիզի նկարագիրը: Ցույց է տրված, որ $v(S) = \sup_{j \in J} \{v_j(S)\}$ տիպի խաղերի n -կորիզը հանդիսանում է բաղադրիչ խաղերի ε - C -կորիզների համան բազմություն ենթաբազմություն:

Ապացուցվում է նաև, որ համանման ներկայացում է թույլ տալիս նաև անընդհատ ուռուցիկ խաղի n -կորիզը, երբ իբրև խաղ-բաղադրիչներ վերցված են որոշակի տիպի բազմության աֆինական ֆունկցիաներ: Վերջում բերվում են կոնտինուում խաղացողներով խաղերի օրինակներ, որոնց n -կորիզը միակն է:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ D. Schmeidler, SIAM. J. Appl. math., vol. 17, №6 (1969). ² Charles Bird, J. Appl. math., vol. 31, №3 (1976). ³ Н. Данфорд, Дж. Шварц, Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, М., 1962. ⁴ А. М. Рубинов, Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам, Наука, Л., 1980.

УДК 624.131.437«3/7»

МЕХАНИКА ГРУНТОВ

С. Р. Месчян

Методика определения ползучести одномерного уплотнения
набухающих глинистых грунтов при начальной
природной влажности

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. И. Тер-Степаняном 26/V 1982)

В наиболее простейшем случае ползучие свойства набухающих глинистых грунтов при одномерной деформации (без возможности бокового расширения) с учетом влияния дополнительного увлажнения можно определить из двух семейств экспериментальных кривых (рис. 1), полученных испытанием образцов-близнецов при двух крайних характерных значениях начальной влажности — при природной влажности w_0 (рис. 1, а) и после водонасыщения w_s (рис. 1, б) под арретир при различных значениях нормальных напряжений (¹).

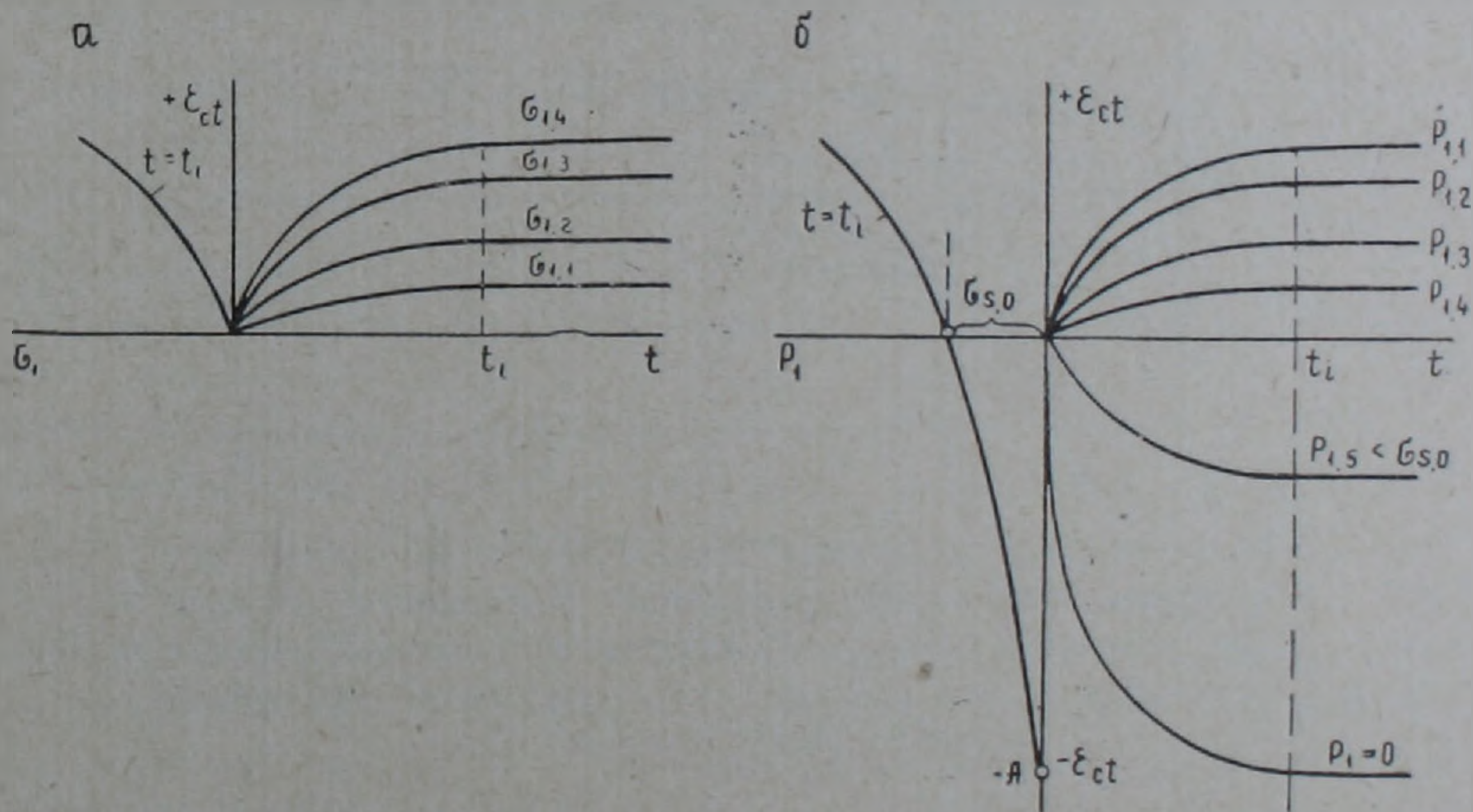


Рис. 1. Схемы семейств экспериментальных кривых ползучести набухающего грунта при испытании образцов с начальной природной влажностью (а) и после водонасыщения под арретир (б): $+\epsilon_{ct}$ и $-\epsilon_{ct}$ — деформации ползучести при уплотнении и разуплотнении (набухании) соответственно

На основании результатов предварительных опытов автором было установлено, что уплотнение во времени набухающих глинистых грунтов, испытанных при начальной природной влажности (рис. 1, а) и после замачивания под арретир (рис. 1, б), при равных эффективных давлениях $\sigma_1 = p_1 - \sigma_{s,0}$ практически одинаково. Здесь p_1 — сумма нормального напряжения и давления свободного набухания $p_1 = \sigma_1 + \sigma_{s,0}$.

Чтобы проверить сказанное выше, проведено несколько серий испытаний образцов природного сложения глинистых грунтов, основные сведения о физических свойствах которых приведены в табл. 1.

Таблица 1

№ грунта	№ скважины	Глубина отбора, м	w_0	ρ_s , кг/м ³	ρ , кг/м ³	$\sigma_{s,0}$, МПа
1	6315—В	8,6	0,39	2770	1830	0,177
2	6315—А	10,2	0,30	2760	1950	0,20
3	6315—Б	8,2	0,30	2765	1880	0,08

Грунты № 1 и 2 испытаны при шестикратной повторности опытов под действием двух ступеней эффективного напряжения, а грунт № 3—под действием пяти ступеней эффективного давления. В последнем случае повторность опытов девяти- (при $w=w_0$) и трехкратная (при $w=w_s$). Как было отмечено, опыты проведены при двух значениях начальной влажности с замером давления свободного набухания $\sigma_{s,0}$ (см. табл. 1) по методу компенсации деформаций (2).

Результаты испытания грунтов рассмотрим в отдельности.

1. Серия образцов природной влажности грунта № 1 испытана под действием двух ступеней уплотняющего давления (рис. 2). Две

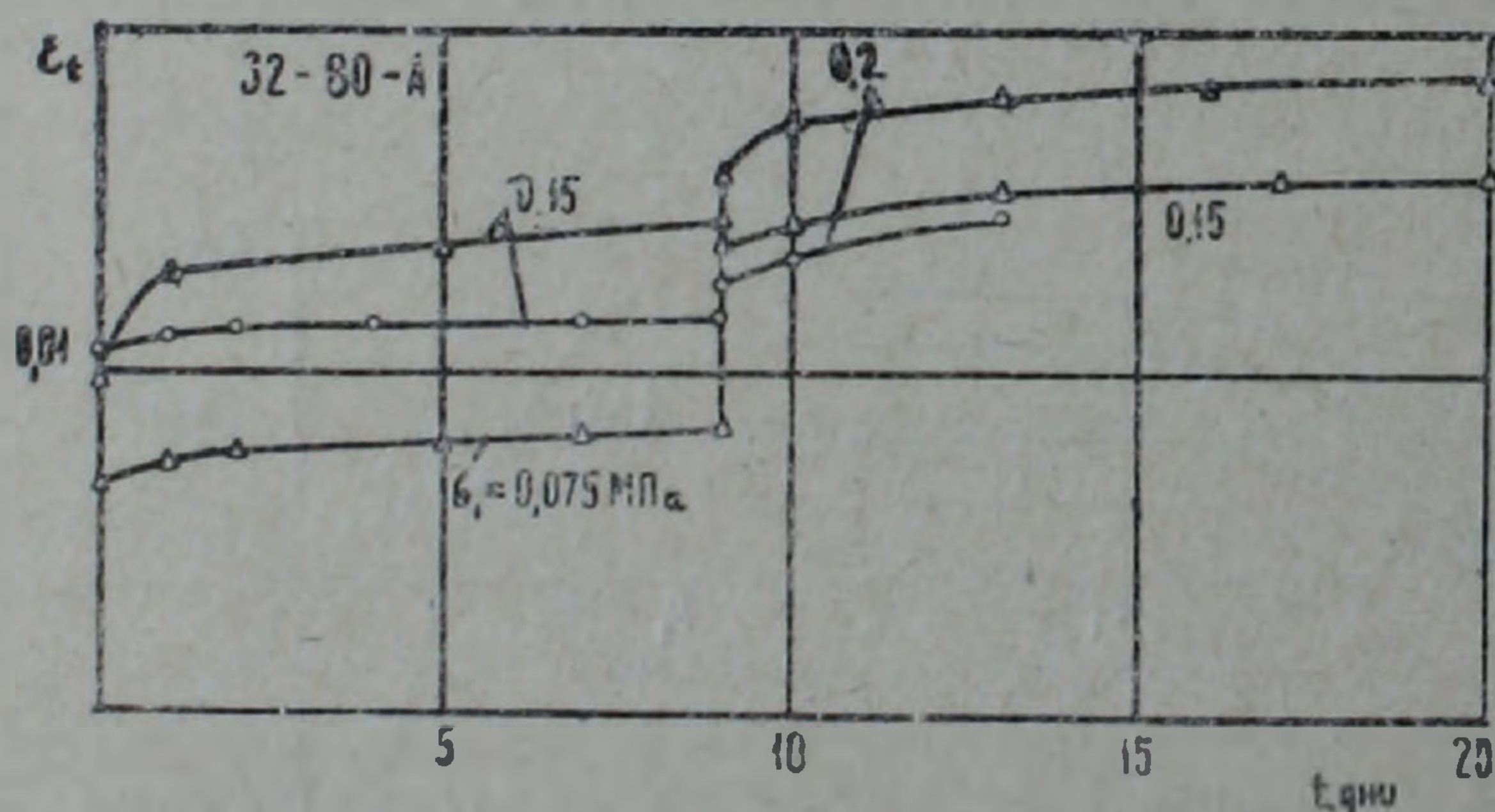


Рис. 2. Кривые ползучести грунта № 1, определенные под действием ступенчато-возрастающих эффективных давлений при начальной природной влажности (сплошная линия с кружками) и после водонасыщения под арретир (сплошные линии с треугольниками)

серии образцов после водонасыщения под арретир и стабилизации давления свободного набухания испытаны под действием двух различных эффективных напряжений (вначале 0,075 и 0,15, а затем 0,15 и 0,2 МПа соответственно).

Сопоставление данных, полученных испытанием образцов при начальной природной влажности (на рис. 2 отмечены кружочками) и после водонасыщения под арретир (отмечены треугольниками) под действием равных эффективных давлений, показывает, что их расхождение не превышает 20 %. В то же время абсолютные значения отмеченных расхождений не превышают 15 % деформаций ползучес-

ти грунта, обладающего природной влажностью, при его испытании под действием напряжения, равного давлению свободного набухания.

2. Испытаны две серии образцов грунта № 2 под действием двух последовательно приложенных равных ступеней эффективного давления — при начальной природной влажности (на рис. 3 кривая ползу-

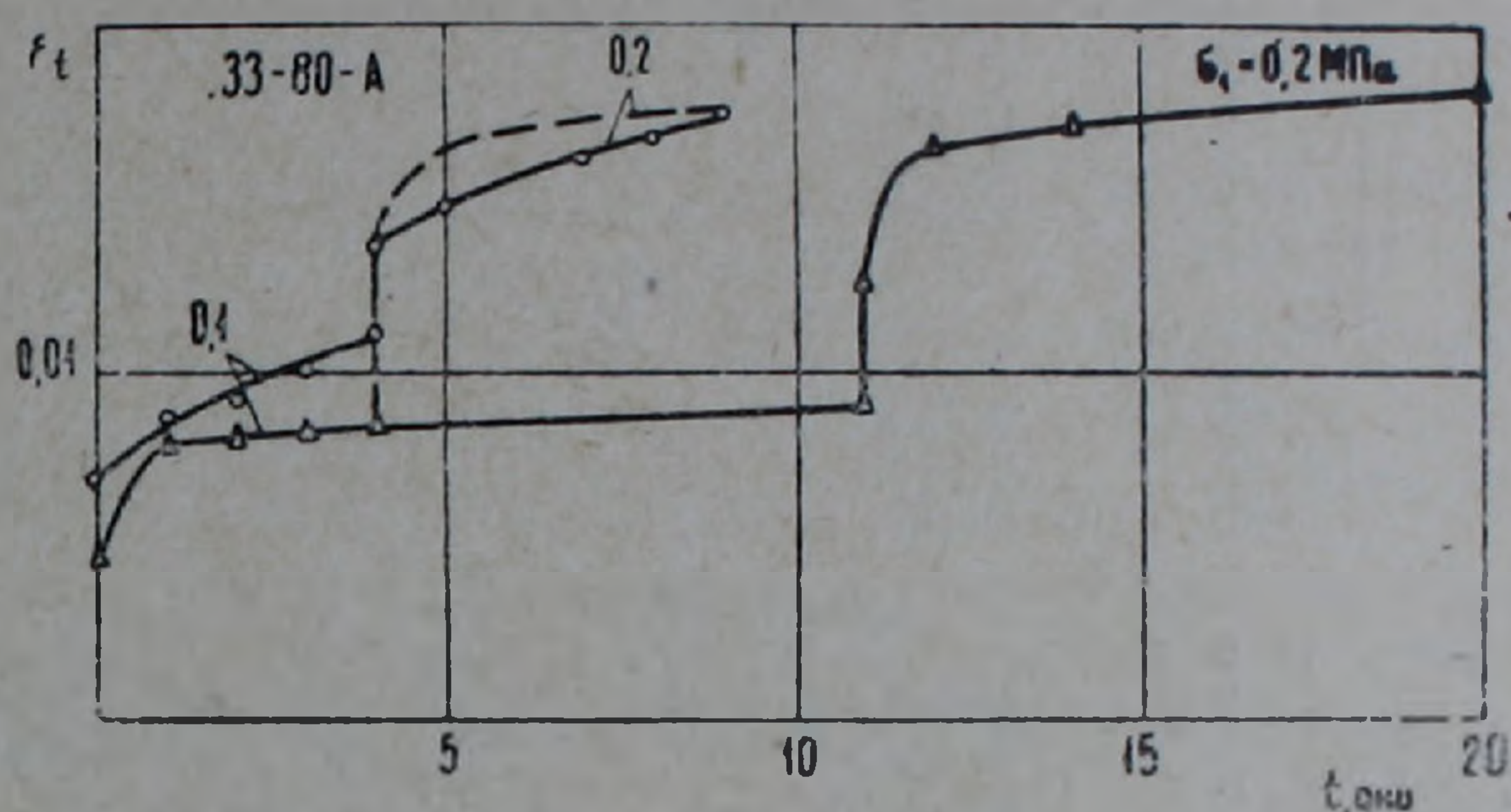


Рис. 3. Кривые ползучести грунта № 2, определенные под действием ступенчато-возрастающих эффективных давлений при начальной природной влажности (сплошные линии с кружками) и после водонасыщения под арретир (сплошные линии с треугольниками). Штриховой линией показана смещенная влево кривая ползучести, полученная при испытании образцов после водонасыщения под арретир под действием второй ступени напряжения

чести отмечена кружочками) и после водонасыщения под арретир. Здесь в отличие от рассмотренного выше случая, во избежание испарения влаги из образцов, обладающих природной влажностью, длительность испытания несколько сокращена.

Как видно на рис. 3, кривые ползучести, полученные при равных значениях эффективного давления, независимо от начальной влажности практически совпадают.

3. Результаты испытания образцов грунта № 3 приведены в табл. 2 и на рис. 4, где сплошной линией показана кривая ползучести образцов, испытанных при начальной природной влажности. Эти результаты подтверждают приведенные выше опытные данные. Однако следует отметить, что они справедливы только при испытании тонких водонасыщенных образцов при двустороннем отжатии поровой воды, когда можно считать, что уплотнение грунта обусловлено только фактором ползучести скелета ⁽²⁾.

На основании изложенного выше уравнение ползучести одномерного уплотнения набухающего глинистого грунта для постоянных напряжений с учетом проявления давления набухания $\sigma_{s,0}$ при его замачивании (дополнительном увлажнении) можно записать в следующем общем виде:

$$\varepsilon_{ct} = C_c(t) \cdot F(p_1 - \sigma_{s,0}), \quad (1)$$

где $C_c(t)$ — мера ползучести, т. е. ползучесть при единичном эффективном давлении, равном разности $\sigma_1 = (p_1 - \sigma_{s,0}) = 1$; $F(p_1 - \sigma_{s,0})$ — функция напряжения, характеризующая нелинейную зависимость между

Длительность испытания	Усредненные значения абсолютных деформаций уплотнения Δh_{cl} , мм, при	
	$w=w_0$	$w=w_s$
$\sigma_1=0,05$ МПа		
1 ч	0,126	0,066
1 день	0,156	0,088
2 дня	0,167	0,095
$\sigma_1=0,1$ МПа		
1 ч	0,221	0,171
1 день	0,250	0,209
2 дня	0,267	0,218
$\sigma_1=0,2$ МПа		
1 ч	0,395	0,383
1 день	0,433	0,463
2 дня	0,454	0,478
$\sigma_1=0,3$ МПа		
1 ч	0,560	0,604
1 день	0,607	0,690
2 дня	0,628	0,708
$\sigma_1=0,4$ МПа		
1 ч	0,814	0,802
1 день	0,860	0,890
2 дня	0,882	0,904
3 дня	0,907	0,910

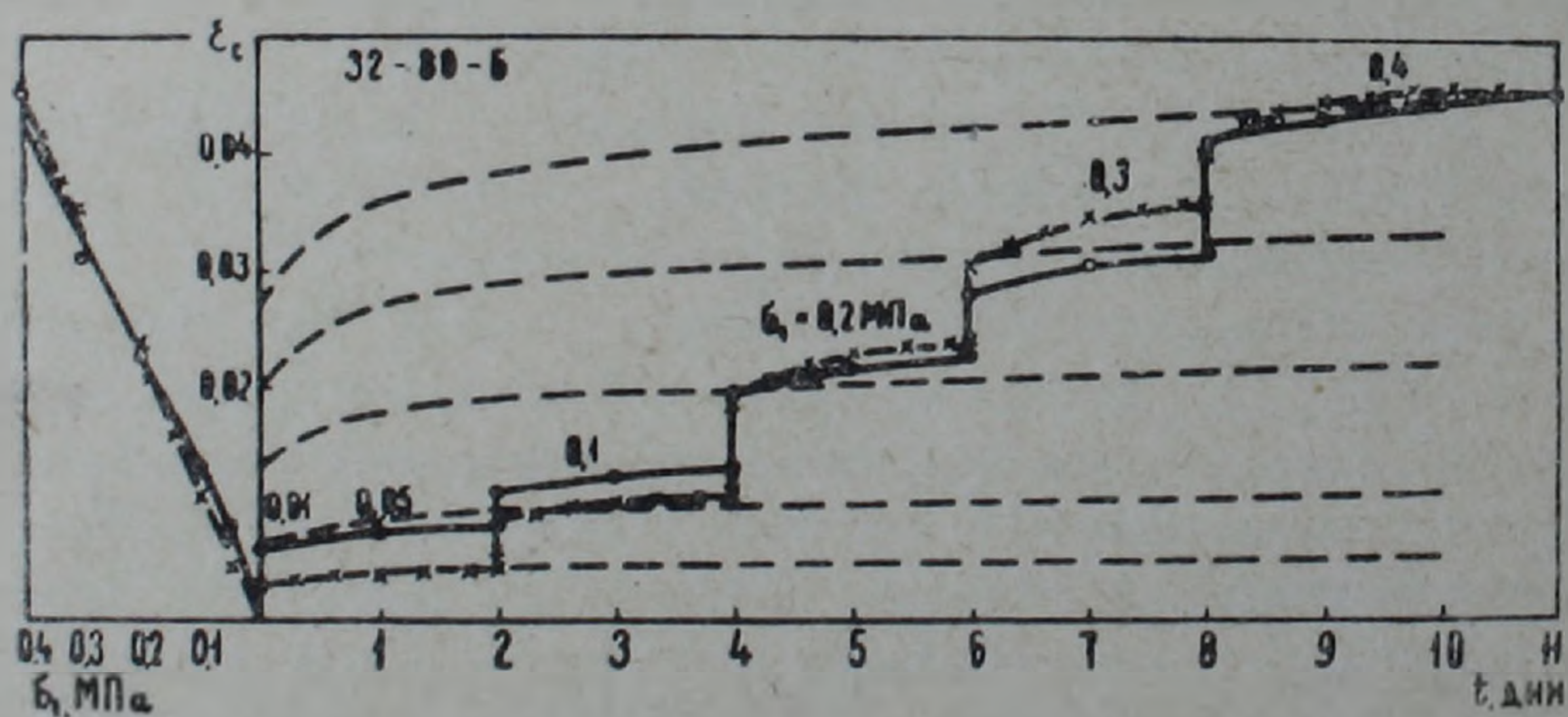


Рис. 4. Кривые ползучести грунта №3, полученные под действием ступенчато-возрастающих эффективных давлений при начальной природной влажности (сплошная линия в правой части рисунка) и после водонасыщения под арретир (штриховая линия с треугольниками). В левой части рисунка показаны кривые зависимости эффективное давление—деформация ползучести, в правой части штриховыми линиями показаны кривые ползучести, построенные по выражению (10)

деформациями ползучести и эффективным давлением (рис. 1, б) и удовлетворяющая условию $F[(p_1 - \sigma_{s,0}) = 1] = 1$.

В качестве выражения меры ползучести можно, в частности, использовать степенное соотношение ⁽²⁾

$$C_c(t) = A \cdot t^m, \quad (2)$$

а функции напряжения записать в виде

$$F(p_1 - \sigma_{s,0}) = \alpha(p_1 - \sigma_{s,0}) + \beta(p_1 - \sigma_{s,0})^n, \quad (3)$$

где α , β и n — определяемые из опыта параметры.

Соотношение (1) с учетом (2) и (3) принимает вид

$$\varepsilon_{ct} = A \cdot t^m [\alpha(p_1 - \sigma_{s,0}) + \beta(p_1 - \sigma_{s,0})^n], \quad (4)$$

из чего следует, что когда: а) $p_1 = \sigma_{s,0}$, деформация ползучести грунта равна нулю; б) $p_1 > \sigma_{s,0}$, имеет место уплотнение грунта при его замачивании; в) $\sigma_{s,0} = 0$, $p_1 = \sigma_1$, имеет место уплотнение грунта при природной влажности; г) $p_1 < \sigma_{s,0}$, при замачивании имеет место набухание грунта, величина которого достигает наибольшего значения при $p_1 = 0$.

Из соотношения (4) следует, что меры ползучести набухающего глинистого грунта при природной влажности $w = w_0$ и после замачивания под арретир $w = w_s$, определенные под действием единичного эффективного давления, равны. Следовательно они могут быть определены как из испытания грунта при природной влажности, так и после водонасыщения под арретир.

Для приведенного на рис. 3 примера одномерного уплотнения набухающего грунта в двух различных состояниях влажности зависимость между эффективным давлением $\sigma_1 = p_1 - \sigma_{s,0}$ и деформацией ползучести ε_{ct} представлена в виде линейной функции, и для функции напряжения получено следующее выражение:

$$F(p_1 - \sigma_{s,0}) = (10 \cdot p_1 - 10\sigma_{s,0}) = 10 \cdot \sigma_1. \quad (5)$$

Принимая за единичное эффективное давление $(p_1 - \sigma_{s,0}) = 0,1$ МПа, соотношение (1) с учетом (5) и величины давления свободного набухания $\sigma_{s,0} = 0,08$ МПа (см. табл. 1) запишем следующим образом:

$$\varepsilon_{ct} = 0,0089 \cdot t^{0,034} \cdot (10 \cdot p_1 - 10 \cdot 0,08). \quad (6)$$

Кривые ползучести одномерного уплотнения для постоянных напряжений σ_1 , построенные по соотношению (6) (на рис. 3 показаны штриховыми линиями), достаточно близки к экспериментальным кривым, определенным как при испытании образцов при начальной влажности $w = w_0$, так и после водонасыщения под арретир. Это значит, что соотношение (4) является обобщенным выражением, позволяющим по результатам испытания образцов после водонасыщения под арретир и определения давления свободного набухания $\sigma_{s,0}$ установить ползучие свойства грунта природной влажности.

Ереванский государственный университет
Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Սկզբնական բնական խոնավություն ունեցող ուռչող
կավային գետնահողերի միաչափ խտացման սողի
որոշման եղանակ

Հոգվածում քննության են առնված ուռչող կավային գետնահողերի միաչափ ձևափոխության հնարավոր դեպքերը, բերված են սկզբնական բնական խոնավություն ունեցող և ծավալային ձևափոխության բացակայության պայմաններում նախնական ջրահագեցումից հետո դրանց խտացման սողի որոշման արդյունքները: Ցույց է տրված, որ միևնույն σ_1 էֆեկտիվ ճնշման դեպքում, որը հավասար է $\sigma_1 = p_1 - \sigma_{s,0}$ (p_1 -ը — լրիվ ճնշումն է, $\sigma_{s,0}$ -ն — ազատ ուռչելու ճնշումը), նշված պայմաններում որոշված խտացման սողի կորերը գործնականորեն համընկնում են:

Ստացված են առնչություններ, որոնք հնարավորություն են ընձեռնում ծավալային ձևափոխության բացակայության պայմաններում նախնական ջրահագեցումից հետո որոշված ազատ ուռչելու ճնշման ($\sigma_{s,0}$) և սողի խտացման կորերից ստանալ սկզբնական բնական խոնավություն ունեցող գետնահողի սողի կորերը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. Р. Месчян, в кн.: Труды третьего Всесоюзного симпозиума по реологии грунтов, Изд-во Ереванского ун-та, 1980. ² С. Р. Месчян, Механические свойства грунтов и лабораторные методы их определения, М., Недра, 1974.

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. Г. Мхитарян

Об одном ортогональном интегральном соотношении и его
 приложении к контактным задачам теории упругости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 6/V 1982)

Ортогональные интегральные соотношения, переводящие одну полную ортогональную систему функций в другую, наряду со спектральными соотношениями играют важную роль при построении эффективного решения обширного класса интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в контактных и смешанных задачах теории упругости, в смешанных задачах теории теплопроводности и в других областях математической физики. Ряд результатов по таким соотношениям и их приложениям к разнообразным смешанным задачам приводится в работах Г. Я. Попова, достаточно полный обзор которых дан в коллективной монографии (1).

В настоящей статье при помощи одного интегрального соотношения для полиномов Якоби, установленного в (2), и примененного в (3) способа выводится ортогональное соотношение для бесселевых функций на полубесконечном интервале. Затем на основе этого соотношения строится замкнутое решение интегрального уравнения, описывающего контактную задачу нелинейной теории упругости о вдавливании полубесконечного штампа довольно общей конфигурации в деформирующуюся по степенному закону полуплоскость с учетом сил сцепления. Отметим, что в такой постановке задачи о вдавливании штампа конечных размеров в полуплоскость рассмотрены в (4-6), причем в последней работе учтены силы сцепления в контактной зоне.

1. В работе (2) установлено ортогональное интегральное соотношение

$$\int_0^1 \frac{[a \operatorname{sgn}(x-y) + b]^{\sigma} P_n^{(\alpha-1, \gamma-\alpha)}(1-2y)}{|x-y|^{\gamma} y^{1-\alpha} (1-y)^{\alpha-\gamma}} dy =$$

$$= \frac{A \pi \Gamma(n+\gamma)}{n! \Gamma(\gamma) \sin \pi \gamma} (a+b)^{\sigma} P_n^{(\gamma-\alpha, \alpha-1)}(1-2x), \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

где

$$A = \sqrt{1 - 2 \cos \pi \gamma a^{\sigma} + a^{2\sigma}}; \quad a_* = \frac{b-a}{b+a} \quad (\operatorname{Re} A > a)$$

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{\sin \pi \gamma}{A}\right), \quad (0 < \operatorname{Re} \gamma < 1; \quad 0 < \operatorname{Re} \alpha < 1),$$

$P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ — полиномы Якоби, а $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. После перехода к новым переменным

$$x = u^2/4n^2, \quad y = v^2/4n^2$$

(1.1) переходит в следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2n} \frac{[a \operatorname{sgn}(u^2 - v^2) + b]^{\sigma} n^{1-\alpha} P_n^{(\alpha-1, \gamma-\alpha)} \left(1 - \frac{v^2}{2n^2}\right) v}{|u^2 - v^2|^{\gamma} v^{2(1-\alpha)} \left(2 - \frac{v^2}{2n^2}\right)^{\alpha-\gamma}} dv = \\ & = \frac{2^{\alpha-\gamma-1} A \pi}{\Gamma(\gamma) \sin \pi \gamma} (a+b)^{\sigma} \frac{\Gamma(n+\gamma)}{\Gamma(n+1)} n^{1-\gamma} n^{\alpha-\gamma} P_n^{(\gamma-\alpha, \alpha-1)} \left(1 - \frac{u^2}{2n^2}\right). \end{aligned}$$

Далее, воспользуемся известным соотношением ⁽⁷⁾

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} P_n^{(\alpha, \beta)} \left(1 - \frac{z^2}{2n^2}\right) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha} J_{\alpha}(z)$$

и асимптотической формулой ⁽⁸⁾

$$\frac{\Gamma(n+\gamma)}{\Gamma(n+1)} \cong n^{\gamma-1} \quad (n \rightarrow \infty),$$

где $J_{\alpha}(z)$ — функция Бесселя первого рода индекса α .

В результате будем иметь

$$\int_0^{\infty} \frac{[a \operatorname{sgn}(u^2 - v^2) + b]^{\sigma} J_{\alpha-1}(v) v}{|u^2 - v^2|^{\gamma} v^{1-\alpha}} dv = \frac{2^{1-\gamma} \pi A}{\Gamma(\gamma) \sin \pi \gamma} (a+b)^{\sigma} u^{\alpha-\gamma} J_{\gamma-\alpha}(u).$$

Наконец, перейдя к новым переменным

$$u = \lambda \sqrt{x}; \quad v = \lambda \sqrt{s} \quad (\lambda > 0),$$

придем к следующему ортогональному интегральному соотношению:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{[a \operatorname{sgn}(x-s) + b]^{\sigma} s^{\frac{\alpha-1}{2}} J_{\alpha-1}(\lambda \sqrt{s})}{|x-s|^{\gamma}} ds = \\ & = \frac{2^{1-\gamma} \pi A}{\Gamma(\gamma) \sin \pi \gamma} (a+b)^{\sigma} \lambda^{\gamma-1} x^{\frac{\alpha-\gamma}{2}} J_{\gamma-\alpha}(\lambda \sqrt{x}), \quad (\lambda > 0), \end{aligned} \tag{1.2}$$

переводящему одно семейство бесселевых функций в другое.

2. Перейдем теперь к постановке контактной задачи. Пусть полубесконечный штамп, основание которого характеризуется функцией $g(x)$, под действием вертикальных сил, распределенных по всей его длине, и момента вдавливается в полуплоскость. При этом предполагается, что штамп движется лишь поступательно в вертикальном направлении, в контактной зоне учитываются силы сцепления, а для

материала полуплоскости справедлива степенная физическая зависимость

$$\sigma_i = K_0 \varepsilon_i^\mu, \quad (0 < \mu < 1), \quad (2.1)$$

где K_0 — определенная физическая константа, μ — показатель ползучести, а σ_i и ε_i — интенсивности напряжений и скоростей деформаций. Требуется определить распределение нормальных и тангенциальных контактных напряжений, обозначаемых $p(x)$ и $q(x)$ соответственно.

Придерживаясь обобщенного принципа суперпозиции ^(4,5), указанную задачу, как в ⁽⁶⁾, математически можно формулировать в виде следующего интегрального уравнения с эрмитовым ядром:

$$\int_0^\infty \frac{1 - i\nu \operatorname{sgn}(x-s)}{|x-s|^h} \chi(s) ds = f(x), \quad \left(|\nu| < \operatorname{tg} \frac{\pi h}{2} \right), \quad (2.2)$$

где

$$\chi(x) = p(x) - i \frac{J_1(\mu)}{J_2(\mu)} q(x); \quad h = 1 - \mu \quad (1/2 < \mu < 1);$$

$$\nu = \left(\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2} \right)^{1-h}; \quad (0 < h < 1); \quad \beta = \frac{1}{\mu} \sqrt{2\mu - 1};$$

$$J_1(\mu) = 4 \int_0^{\pi/2} (\cos \beta \vartheta)^\mu \cos \vartheta d\vartheta; \quad J_2(\mu) = 4 \int_0^{\pi/2} (\sin \beta \vartheta)^\mu \sin \vartheta d\vartheta;$$

$$f(x) = [\sigma_0 - g_0(x)]^h.$$

Здесь σ_0 характеризует осадку штампа как одного целого, а $g_0(x)$ — комплекснозначная функция, известным образом связанная с функцией $g(x)$ ⁽⁶⁾. Поскольку по всей контактной зоне полубесконечный штамп сцеплен с основанием, то должно выполняться условие

$$\left| \frac{q(x)}{p(x)} \right| < \rho,$$

где ρ — коэффициент кулоновского трения, которое исключает возможность скольжения штампа вдоль границы полуплоскости.

Отметим, что интегральное уравнение (2.2) должно рассматриваться при условии

$$\int_0^\infty p(x) dx = \int_0^\infty \chi(x) dx = P < \infty, \quad (2.3)$$

где P — равнодействующая прижимающих штамп вертикальных сил.

Теперь заметим, что вследствие известного представления ⁽⁸⁾

$$\frac{1 - i\nu \operatorname{sgn} x}{|x|^h} = \frac{\Gamma(1-h)}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda x} \left(\sin \frac{\pi h}{2} - \nu \cos \frac{\pi h}{2} \operatorname{sgn} \lambda \right) |\lambda|^{h-1} d\lambda$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad (2.4)$$

на основе теоремы Бохнера—Хинчина порождаемое указанной функцией эрмитово ядро

$$K(x, s) = \frac{1 - i\nu \operatorname{sgn}(x-s)}{|x-s|^h} \quad (-\infty < x, s < \infty)$$

при $|\nu| < \operatorname{tg} \frac{\pi h}{2}$ является положительно-определенным ядром. Поэтому уравнение (2.2) в пространстве $L_2(0, \infty)$ имеет единственное решение.

Далее, сравнивая асимптотики левых и правых частей (2.2) при $x \rightarrow \infty$, находим, что функция $g_0(x)$ не должна быть произвольной функцией, а именно, на бесконечности она должна обладать асимптотическим поведением

$$g_0(x) \cong \delta_0 - \frac{\sqrt[2h]{P^2(1+\nu^2)}}{|x|} e^{-i\varphi/h}, \quad (x \rightarrow \infty), \quad (2.5)$$

где $\varphi = \operatorname{arctg} \nu$

Из (2.5) фактически определяется δ_0 , т. е. эта постоянная априори входит в структуру функции (2.6).

Равенство (2.6) характеризует своеобразие постановки задачи о полубесконечном штампе.

Теперь приступим к построению решения уравнения (2.2). Исходя из (1.2), его решение представим в виде

$$\chi(x) = x^{\frac{\alpha-1}{2}} \int_0^\infty \Phi(\lambda) J_{\alpha-1}(\lambda \sqrt{x}) d\lambda. \quad (2.6)$$

При этом в (1.2) положим

$$a = -i\nu, \quad b = 1, \quad \varepsilon = 1, \quad \gamma = h.$$

Тогда это соотношение переходит в следующее:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1 - i\nu \operatorname{sgn}(x-s)}{|x-s|^h} s^{\frac{\alpha-1}{2}} J_{\alpha-1}(\lambda \sqrt{s}) ds = \\ = \frac{2^{1-h} \pi A}{\Gamma(h) \sin \pi h} (1 - i\nu) \lambda^{h-1} x^{\frac{\alpha-h}{2}} J_{h-\alpha}(\lambda \sqrt{x}), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где в разбираемом случае

$$A = \frac{1}{1+\nu^2} \sqrt{(1+\nu^2)^2 - 2 \cos \pi h (1+\nu^2)(1+i\nu)^2 + (1+i\nu)^4} \quad (\operatorname{Re} A > 0);$$

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \arcsin \left(\frac{\sin \pi h}{A} \right), \quad (0 < \operatorname{Re} \alpha < 1).$$

Далее, (2.6) подставим в уравнение (2.2), поменяем порядок интегрирования и воспользуемся соотношением (2.7). В результате будем

иметь

$$\int_0^{\infty} \Phi(\lambda) J_{h-\alpha}(\lambda \sqrt{x}) \lambda^{h-1} d\lambda = \frac{\Gamma(h) \sin \pi h}{2^{1-h} \pi (1-i\nu) A} x^{\frac{h-\alpha}{2}} f(x).$$

Отсюда по формуле обращения Ханкеля

$$\Phi(\lambda) = \frac{\Gamma(h) \sin \pi h}{\pi A 2^{2-h} (1-i\nu)} \lambda^{2-h} \int_0^{\infty} J_{h-\alpha}(\lambda \sqrt{x}) x^{\frac{h-\alpha}{2}} f(x) dx. \quad (2.8)$$

Таким образом, решение определяющего уравнения (2.2) дается формулами (2.6) и (2.8). При этом на основе известных асимптотических формул для бесселевых функций (?) условие сходимости интеграла из (2.8) имеет вид

$$0 \leq \operatorname{Re} \xi \leq \min \left\{ \frac{1}{2}, h+1-\operatorname{Re} x \right\};$$

$$\operatorname{Re} \gamma \geq \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3+2h}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} x \right\}.$$

Здесь положено

$$f(x) = O(x^{-3}) \quad (x \rightarrow 0); \quad f(x) = O(x^{-1}) \quad (x \rightarrow \infty)$$

и учтена квадратичная суммируемость функции $f(x)$ на интервале $(0, \infty)$.

Анализ формулы (2.6) показывает, что показатель особенности контактных напряжений на конце штампа $x=0$ меньше, чем традиционная в классической теории упругости квадратичная особенность. Следовательно, можно утверждать, что постановка контактной задачи о вдавливании полубесконечного штампа в полуплоскость, основанная на нелинейной теории установившейся ползучести при степенной зависимости (2.1), приводит к снижению концентрации контактных напряжений на конце штампа.

Отметим, что уравнением (2.2) описывается также аналогичная задача о полубесконечном штампе в постановке линейной теории упругости, когда модуль упругости полуплоскости по глубине изменяется по степенному закону (9).

В заключение приношу благодарность С. М. Мхитаряну за оказанную помощь во время работы над этой статьей.

Ереванский институт
народного хозяйства

Վ. Գ. ՄԽԻՏՅԱՆ

Օրբոգոնալ ինտեգրալ մի առնչության և առաձգականության
տեսության կոնտակտային խնդիրներում նրա կիրառության մասին

Աշխատանքում արտածվում է կիսաանվերջ ինտեգրալի վրա մի օրբոգոնալ
ինտեգրալ առնչություն, որը պարունակում է Բեսելի առաջին սեռի ֆունկ-

ցիաներ: Այդ առնչության օգնությամբ կառուցվում է աստիճանային օրենքով դեֆորմացվող կիսահարթությունը կիսաանվերջ դրոշմի սեղմման կոնտակտային խնդրի փակ լուծումը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Развитие теории контактных задач в СССР, Наука, М., 1976. ² Г. Я. Попов, ПММ, т. 31, № 2 (1967). ³ С. М. Мхитарян, ДАН АрмССР, т. 74, № 4 (1982). ⁴ Н. Х. Арутюнян, ПММ, т. 23, № 5 (1959). ⁵ Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян, ПММ, т. 27, № 5 (1963). ⁶ С. А. Енгибарян, ДАН АрмССР, т. 67, № 1 (1978). ⁷ Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. СМБ, т. 2, Наука, М., 1974. ⁸ Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. СМБ, т. 1, Наука, М., 1973. ⁹ Г. Я. Попов, ПММ, т. 37, № 2 (1973).

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

К. Г. Гулян, Э. А. Запунян

О двух контактных задачах для круглого диска с
упругими креплениями *

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 24/V 1982)

Обзор основных результатов и работ по теории задач контактного взаимодействия между тонкостенными креплениями и массивными деформируемыми телами приведен в (1). При этом тела обычно моделируются в виде бесконечных областей. Между тем исследование такого круга задач для тел конечных размеров, который сравнительно мало изучен, представляет теоретический и практический интерес. В этом направлении укажем на работы (2,3), в которых рассматриваются задачи для прямоугольника. Укажем также на работы (4,5), которые по методу исследования весьма близки к настоящей работе.

Здесь приводится исследование двух контактных задач о передаче нагрузки от одной или двух накладок к упругому круглому диску.

Основываясь на известных физических предположениях, принятых в работах (4,6), решение поставленных задач сводят к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения при определенных граничных условиях. Затем на основе аппарата ортогональных многочленов Чебышева это уравнение сводится к квазиполной регулярной бесконечной системе линейных уравнений.

1. Пусть упругий круглый диск толщиной $2h$ и радиуса R усилен тонкими упругими накладками, причем в первой задаче предполагается, что диск с двух сторон усилен одной (рис. 1), а во второй задаче — двумя одинаковыми и симметрично расположенными относительно центра диска упругими накладками (рис. 2). Требуется определить закон распределения контактных напряжений вдоль линии крепления упругих накладок с диском, когда на накладках действует сама уравновешенная система сосредоточенных сил.

Выведем разрешающие уравнения поставленных задач.

Сначала рассмотрим первую задачу (рис. 1). Пользуясь известным комплексным представлением решения плоской задачи теории упругости (7), легко определить функцию влияния для диска, когда в его точках $(-x_0, 0)$ и $(x_0, 0)$ действуют равные по величине и противоположно направленные сосредоточенные силы P вдоль оси Ox . Эта функция имеет вид

* Работа доложена на II Всесоюзной научной конференции «Смешанные задачи механики деформируемого тела», Днепропетровск, 1981 г.

$$\begin{aligned}
u^{(2)}(x, 0) = \frac{P}{4\pi E} \left\{ (1+\nu)(3-\nu) \ln \left| \frac{\xi+\eta}{\xi-\eta} \right| + [(1-\nu)^2+4] \ln \frac{1+\xi\eta}{1-\xi\eta} + \right. \\
+ 2(1-\nu)^2 \xi\eta + \frac{2\xi\eta}{(1-\xi^2\eta^2)^2} [\nu^2+6\nu-3-2\nu(1+\nu)(\xi^2+\eta^2) + \\
\left. + (3\nu^2-6\nu+7)\xi^2\eta^2 - (1-\nu^2)\xi^2\eta^2(\xi^2+\eta^2) - 2(1-\nu)^2\xi^4\eta^4] \right\}, \quad (1.1)
\end{aligned}$$

где $\xi = x/R$, $\eta = x_0/R$.

Здесь $u^{(2)}(x, 0)$ — горизонтальное перемещение точек диска вдоль оси Ox , а E и ν — его модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно.

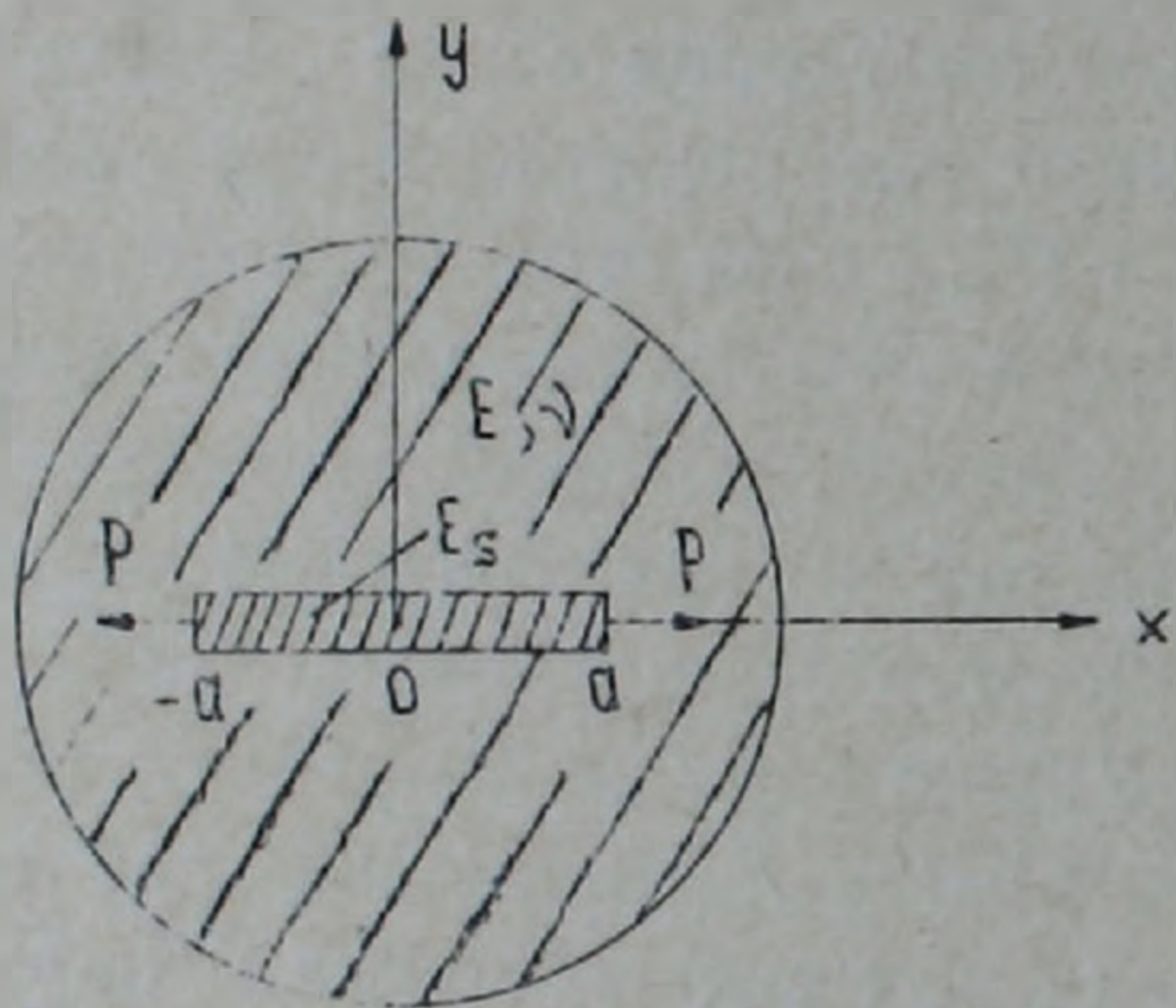


Рис. 1. Упругий круглый диск, усиленный одной накладкой

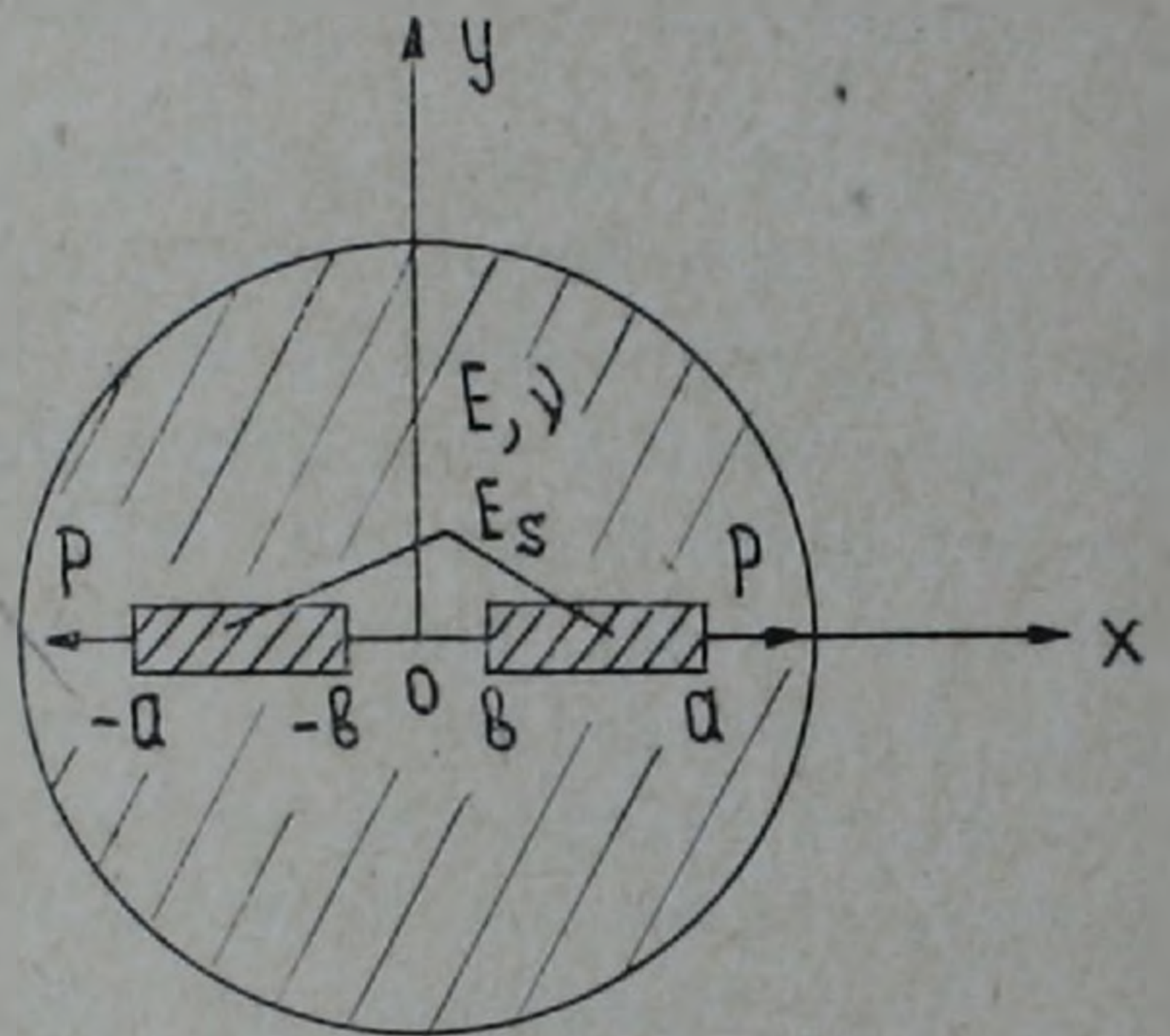


Рис. 2. Упругий круглый диск, усиленный двумя накладками

Вследствие симметрии задачи будем считать $0 < x < a$. Теперь из условия равновесия любой части (x, a) накладки, учитывая закон Гука, имеем

$$\varepsilon_x^{(1)} = \frac{1}{E_s A_s} \left[P - d \int_x^a \tau_s(x_0) dx_0 \right], \quad (0 < x < a), \quad (1.2)$$

где E_s — модуль упругости накладки, A_s — площадь прямоугольного поперечного сечения накладки, d — ее ширина, а $\tau_s(x)$ — подлежащее определению тангенциальное контактное напряжение. При этом из условия равновесия всей накладки будем иметь

$$\int_{-a}^a \tau_s(x) dx = 0.$$

С другой стороны, перемещения точек отрезка $[0, a]$ диска от действующих на него контактных напряжений $\tau_s(x)$ согласно (1.1) будут

$$u^{(2)}(x, 0) = \frac{d}{h} \frac{R(1+\nu)(3-\nu)}{4\pi E} \int_0^{a/R} \left[\ln \frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|} + K(\xi, \eta) \right] \tau(\eta) d\eta, \quad (1.3)$$

($0 < \xi < a/R$)

где

$$K(\xi, \eta) = \frac{(1-\nu)^2 + 4}{(1+\nu)(3-\nu)} \ln \frac{1+\xi\eta}{1-\xi\eta} + \frac{2(1-\nu)^2}{(1+\nu)(3-\nu)} \xi\eta + \frac{1}{(1+\nu)(3-\nu)} \times \\ \times \frac{2\xi\eta}{(1-\xi^2\eta^2)^2} [\nu^2 + 6\nu - 3 - 2\nu(1+\nu)(\xi^2 + \eta^2) + (3\nu^2 - 6\nu + 7)\xi^2\eta^2 - \\ - (1-\nu^2)\xi^2\eta^2 - 2(1-\nu)^2\xi^4\eta^4], \quad (\tau_s(\xi R) = \tau(\xi)).$$

На участке $[0, a]$ контакта накладки с диском должно выполняться условие

$$u^{(2)}(x, 0) = u^{(1)}(x), \quad (0 < x < a),$$

которое с учетом (1.2)–(1.3) приводит к следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{a_0} \left[\ln \frac{\xi + \eta}{|\xi - \eta|} + K(\xi, \eta) \right] \varphi'(\eta) d\eta = \lambda \left[\xi - \int_{\xi}^{a_0} \eta \varphi'(\eta) d\eta \right] \quad (1.4) \\ (0 < \xi < a_0)$$

при граничном условии

$$\varphi(a_0) = 0, \quad (1.5)$$

где введены безразмерные величины

$$\tau(\xi) = \frac{P}{dR} \tau_0(\xi), \quad a_0 = \frac{a_0}{R}, \quad \lambda = \frac{4EhR}{(1+\nu)(3-\nu)E_s A_s} \\ \varphi(\xi) = - \int_{\xi}^{a_0} \tau_0(\eta) d\eta, \quad \varphi'(\xi) = \tau_0(\xi). \quad (1.6)$$

Аналогичным образом получим, что разрешающее уравнение для второй задачи имеет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{b_0}^{a_0} \left[\ln \frac{1}{|\xi - \eta|} + \ln \frac{a_0 - b_0}{2} + K_1(\xi, \eta) \right] \varphi'(\eta) d\eta = -\lambda \int_{b_0}^{\xi} (\xi - \eta) \varphi'(\eta) d\eta + c \\ (b_0 < \xi < a_0) \quad (1.7)$$

$$\varphi(b_0) = 0, \quad \varphi(a_0) = -1, \quad (1.8)$$

где

$$K_1(\xi, \eta) = K(\xi, \eta) + \ln \frac{2(\xi + \eta)}{a_0 - b_0}, \\ \varphi(\xi) = \int_{b_0}^{\xi} \tau_0(\eta) d\eta, \quad \varphi'(\xi) = \tau_0(\xi), \quad (1.9)$$

$$c = \frac{4Eh}{(1+\nu)(3-\nu)P} u^{(1)}(b), \quad b_0 = b/R.$$

Постоянная c , которая характеризует жесткость системы, также подлежит определению.

После перехода к новым переменным

$$\xi = \frac{1}{2} [(a_0 - b_0)t + a_0 + b_0], \quad \eta = \frac{1}{2} [(a_0 - b_0)v + a_0 + b_0], \quad (1.10)$$

$$\varphi \left\{ \frac{1}{2} [(a_0 - b_0)t + a_0 + b_0] \right\} = \Phi(t)$$

уравнение (1.7) примет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \ln \frac{1}{|t-v|} + \tilde{K}_1(t, v) \right\} \Phi'(v) dv = -\lambda_1 \int_{-1}^t (t-v) \Phi'(v) dv + c \quad (1.11)$$

$$(-1 < t < 1)$$

$$\Phi(-1) = 0, \quad \Phi(1) = -1, \quad (1.12)$$

где

$$\tilde{K}_1(t, v) = K_1[\xi(t), \eta(v)], \quad \lambda_1 = \frac{a_0 - b_0}{2} \lambda. \quad (1.13)$$

2. Решение уравнения (1.4) представим в виде ряда

$$\varphi'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a_0^2 - \xi^2}} \sum_{n=1}^{\infty} X_n T_{2n-1}(\xi/a_0), \quad (0 < \xi < a_0). \quad (2.1)$$

Здесь $T_{2n-1}(\xi/a_0)$ ($n=1, 2, \dots$) — многочлены Чебышева первого рода, а $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставляя выражение (2.1) в (1.4) и учитывая соотношения для полиномов Чебышева, по процедуре (⁸⁻¹⁰) после некоторых элементарных выкладок относительно коэффициентов $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ получим эквивалентную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений. Не останавливаясь на подробностях, сразу приведем окончательный вид этой системы:

$$Y_m = \sum_{n=1}^{\infty} R_{m,n} Y_n + H_m, \quad (m=1, 2, \dots), \quad (2.2)$$

где

$$X_n = (2n-1) Y_n, \quad R_{m,n} = R_{m,n}^{(1)} + R_{m,n}^{(2)},$$

$$R_{m,n}^{(1)} = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \cos(2m-1)t dt \int_0^{\pi/2} \tilde{K}_z(t, z) \cos(2n-1)z dz,$$

$$R_{m,n}^{(2)} = \frac{\lambda a_0}{\pi} \begin{cases} \pi \frac{(-1)^m}{2m-1} + \frac{4[2-(2m-1)^2]}{(2m-1)^2[4-(2m-1)^2]}, & n=1 \\ \frac{4(2n-1)[1+(2n-1)^2-(2m-1)^2]}{[(2m-1)^2-4(n-1)^2][4n^2-(2m-1)^2]}, & m=1, 2, \dots \\ & n=2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.3)$$

$$H_m = \begin{cases} \lambda a_0, & m=1 \\ 0, & m=2, 3, \dots \end{cases}, \quad \tilde{K}(t, z) = K(a_0 \cos t, a_0 \cos z).$$

Решение уравнения (1.11) при граничных условиях (1.12) представляется формулой

$$\Phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n(t), \quad (-1 < t < 1). \quad (2.4)$$

Тогда уравнение (1.11) сведется к бесконечной системе аналогичной структуры. После того как определим коэффициенты $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, значение постоянной c можно найти по формуле

$$c = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} M_n X_n - N, \quad (2.5)$$

где M_n и N определенные величины.

Для исследования бесконечной системы (2.2) заметим, что функция $\tilde{K}(t, z)$, входящая в ядро этой системы, в квадрате $(0 \leq t, z \leq \pi/2)$ непрерывна и любое число раз непрерывно дифференцируема. Тогда интегрированием по частям находим

$$R_{m,n}^{(1)} = \frac{1}{2n-1} T_{m,n}^{(1)},$$

$$T_{m,n}^{(1)} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \cos(2m-1)t dt \int_0^{\pi/2} \tilde{K}_z(t, z) \cos(2n-1)z dz, \quad (2.6)$$

при помощи которого можем записать

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} |R_{m,n}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |R_{m,n}^{(1)}| + \sum_{n=1}^{\infty} |R_{m,n}^{(2)}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} |T_{m,n}^{(1)}| + \sum_{n=1}^{\infty} |R_{m,n}^{(2)}|. \quad (2.7)$$

Далее, следуя известной методике, показывается, что по крайней мере

$$S_m = O(m^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}), \quad m \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

Последнее равенство позволяет утверждать, что бесконечная система уравнений (2.2) квазивполне регулярна при любом λ . Такой же результат имеет место для второй задачи.

Авторы благодарят С. М. Мхитаряна за постановку задачи и внимание к работе.

Институт механики Академии наук Армянской ССР

Կ. Գ. ՂՈՒՅԱՆ, Է. Ա. ԶԱՊՈՒՆՅԱՆ

Առանձգական ամրացումներով կլոր սկավառակի համար երկու կոնտակտային
խնդիրների մասին

Դիտարկվում են մեկ կամ երկու վերադիրներից կլոր առանձգական սկավառակին բեռի փոխանցման երկու կոնտակտային խնդիրները: Ենթադրվում է, որ առաջին խնդրում սկավառակը երկու կողմից ուժեղացված է իր կենտրոնի նկատմամբ սիմետրիկ դասավորված մեկական, իսկ երկրորդ խնդրում՝ երկու-

ական սուաձգական վերադիրներով: Երկու խնդիրներն էլ մաթեմատիկորեն ձևակերպվում են որոշակի եզրային պայմաններով սինգուլյար ինտեգրադիֆերենցիալ հավասարումների տեսքով: Այնուհետև Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդի օգնությամբ այդ հավասարումները բերվում են քվադրիիտիկ ռեգուլյար գծային անվերջ հավասարումների համակարգերի:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ Развитие теории контактных задач в СССР, Наука, М., 1976. ² P. S. Theocaris, K. Dafermos, Journ Appl. Mech., ser. E. vol. 31, № 4 (1964). ³ В. В. Микаэлян, ДАН АрмССР, т. 58, № 1 (1974). ⁴ Н. Х. Арутюнян, ПММ, т. 32, вып. 4 (1968). ⁵ Б. Л. Абрамян, Изв. АН СССР, МТТ, № 5, 1972. ⁶ E. Melan, Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen Ingr-Arch; Bd3, № 2 (1932). ⁷ Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Наука, М., 1966. ⁸ Г. А. Морарь, Г. Я. Попов, ПММ, т. 34, № 3 (1970). ⁹ Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян, ПММ, т. 33, № 5 (1969). ¹⁰ N. K. Arutunnyan, S. M. Mkhitaryan, Trends in elasticity and Thermoelasticity. Witold Nowacki Anniversary Volume. Wolters-Noordhoff Publishing, 1971.

УДК 535. 341

ФИЗИКА

Г. Г. Демирханян, Ф. П. Сафарян

Вычисление фактора Дебая—Валлера примесных лазерных кристаллов

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 28/V 1982)

1. Систематические спектроскопические исследования примесных диэлектрических кристаллов не потеряли свое значение; в настоящее время они ведутся с целью нахождения новых рабочих материалов для ОКГ света и улучшения качества уже работающих ОКГ. Важное значение приобретает исследование интенсивностей спектральных линий примесных лазерных кристаллов. Известно, что контур спектральной линии поглощения или испускания можно представить в следующем виде:

$$I(\nu, T) = \text{const} \cdot e^{-2W(T)} f(\nu, T),$$

где функция $f(\nu, T)$ при сравнительно низких температурах, когда однородная ширина линии меньше, чем неоднородная, имеет вид функции гауссовского распределения, а при высоких температурах, когда в ширине спектральной линии преобладает зависящая от температуры однородная часть, представляет собой лоренцевскую функцию распределения. Очевидно, что при низких температурах температурная зависимость интенсивности линий определяется только дебай-валлеровским фактором $\exp\{-2W(T)\}$, а при высоких температурах она оказывается более сложной, так как на нее в этом случае оказывает влияние также температурная зависимость ширины спектральной линии.

Для правильной интерпретации экспериментальных данных по температурному тушению спектральных линий необходимо провести последовательные количественные вычисления как величин температурной ширины, так и дебай-валлеровского фактора для конкретных кристаллических систем. Трудности таких вычислений связаны в основном с трудностями детального вычисления (на микроскопической основе) матричных элементов электрон-фононного взаимодействия (ЭФВ). После того как в работах (^{1,2}) были проведены подобные вычисления для температурных ширин спектральных линий задача вычисления дебай-валлеровского фактора также стала осуществимой. В настоящей статье мы приводим результаты вычислений фактора Дебая—Валлера для двух кристаллических систем: ИАГ—Nd³⁺ и ИАГ—Yb³⁺.

2. Показатель экспоненциальной функции $2W(T)$ в факторе

Дебая—Валлера, как известно, можно представить в следующем виде:

$$2W(T) = \sum_{\alpha} \frac{1}{(\hbar\omega_{\alpha})^2} [B_{\alpha}^{(1)}(\lambda', \lambda') - B_{\alpha}^{(1)}(\lambda, \lambda)](1 + 2v_{\alpha}), \quad (1)$$

где через λ и λ' обозначены соответственно основное и возбужденное примесные электронные состояния, между которыми происходит электронный переход; $\hbar\omega_{\alpha}$ —энергия решеточных фононов типа α ;

$v_{\alpha} = [e^{\frac{\hbar\omega_{\alpha}}{kT}} - 1]^{-1}$ —число фононов, имеющих энергию $\hbar\omega_{\alpha}$; $B_{\alpha}^{(1)}(\nu, \nu')$ —коэффициенты ЭФВ первого порядка, связанные с матричными элементами ЭФВ $\langle \nu | V^{(1)} | \nu' \rangle$ посредством

$$B_{\alpha}^{(1)}(\nu, \nu') = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\alpha}}{2Mv_0^2}} \sin\delta_{\alpha} \langle \nu | V^{(1)} | \nu' \rangle, \quad (2)$$

где M —масса кристалла; v_0 —средняя скорость звуковых волн в кристалле; δ_{α} —случайная фаза нормальных колебаний кристалла; $V^{(1)}$ —член первого порядка в разложении потенциальной функции кулоновского взаимодействия оптического электрона примесного иона с ионами первой координационной сферы по смещениям ионов из равновесных положений. Для систем типа активированных гранатов в (3) получено выражение для $V^{(1)}$. Оно имеет вид*:

$$V^{(1)} = \frac{16}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \frac{Ze^2r^2}{r_0^3} \left\{ \Phi_1 [Y_{2-1}(\vartheta, \varphi) - Y_{21}(\vartheta, \varphi)] + i\Phi_2 [Y_{21}(\vartheta, \varphi) + Y_{2-1}(\vartheta, \varphi)] + i\Phi_4 [Y_{2-2}(\vartheta, \varphi) - Y_{22}(\vartheta, \varphi)] - \frac{3}{2} \Phi_6 [Y_{22}(\vartheta, \varphi) + Y_{2-2}(\vartheta, \varphi)] - \sqrt{\frac{3}{2}} (3\Phi_5 - 1) Y_{20}(\vartheta, \varphi) \right\}, \quad (3)$$

где r_0 и Z соответственно радиус и эффективный заряд ионов первой координационной сферы; r —радиус орбиты оптического электрона примеси.

$$\Phi_1 = \sin 2\theta \cos \Phi; \quad \Phi_2 = \sin 2\theta \sin \Phi; \quad (4)$$

$$\Phi_4 = \sin^2\theta \sin 2\Phi; \quad \Phi_5 = \cos^2\theta; \quad \Phi_6 = \sin^2\theta \cos 2\Phi.$$

Функции (4) записаны для фиксированного направления волнового вектора $\vec{x}(\theta, \Phi)$ звуковых волн в кристалле. Для учета всех направлений в конечных физических величинах необходимо произвести усреднение по сферическим координатам θ и Φ .

На основе применения приближения Дебая для колебания решетки можно в формуле (1) от суммы по фононным состояниям α

* В выражении (3) для $V^{(1)}$ опущен член нулевого порядка, пропорциональный Y_{00} , поскольку, как нетрудно убедиться, при составлении разности $[\langle \lambda' | V^{(1)} | \lambda' \rangle - \langle \lambda | V^{(1)} | \lambda \rangle]$ вклады этого члена в $\langle \lambda' | V^{(1)} | \lambda' \rangle$ и в $\langle \lambda | V^{(1)} | \lambda \rangle$ взаимно уничтожаются.

перейти к интегралу посредством преобразования $\sum_{\alpha} \dots \rightarrow \left(\frac{3V}{2\pi^2 v_0^3} \right) \times$
 $\times \int_0^{\omega_D} \dots \omega^2 d\omega$ (где V —объем кристалла; ω_{α} —частота Дебая). Тогда

для зависящего от температуры члена в $2W(T)$ нетрудно получить следующее выражение:

$$2W(T) = \frac{3\omega_D^2}{2\pi^2 \hbar \rho v_0^5} \overline{\sin^2 \delta_x} \left(\frac{T}{T_D} \right)^2 |M_{\lambda\lambda}^{\lambda'\lambda'}|^2 I(T), \quad (5)$$

где

$$M_{\lambda\lambda}^{\lambda'\lambda'} = \langle \lambda' | V^{(1)} | \lambda' \rangle - \langle \lambda | V^{(1)} | \lambda \rangle; \quad (6)$$

ρ —плотность кристалла; интеграл $I(T) = \int_0^{T_D/T} \frac{x dx}{e^x - 1}$ табулирован, напри-

мер, в (4) (T_D —температура Дебая кристалла). Однако в двух предельных случаях низких и высоких температур возможно найти приближенные выражения для этого интеграла:

$$I(T) = \frac{\pi^2}{6} - \left(1 + \frac{T_D}{T} \right) e^{-T_D/T} - \left(\frac{1}{4} + \frac{T_D}{2T} \right) e^{-2T_D/T} - \left(\frac{1}{9} + \frac{T_D}{3T} \right) e^{-3T_D/T} \quad (7)$$

при $T < T_D$;

$$I(T) = \frac{T_D}{T} - \frac{1}{4} \left(\frac{T_D}{T} \right)^2 + \frac{1}{38} \left(\frac{T_D}{T} \right)^3 - \frac{11}{3600} \left(\frac{T_D}{T} \right)^5 + \dots \quad (8)$$

при $T > T_D$.

Итак, при достаточно низких температурах $\left(T < \frac{1}{2} \cdot T_D \right)$, как следует из формул (5)–(8), $2W(T) \sim T^2$, а при высоких температурах ($T > T_D$) $2W(T) \sim T$.

3. Вычислим фактор Дебая—Валлера для спектральной линии, соответствующей электронному переходу между нижними штарковскими состояниями термов $^4F_{3/2}$ и $^4I_{11/2}$ иона Nd^{3+} в ИАГ. Волновые функции $|j M_j\rangle$ этих состояний приведены в (2) (где j полный момент количества движения, M_j его проекция):

$$|\lambda'\rangle = \pm |3/2 \pm 1/2\rangle;$$

$$|\lambda\rangle = -0,2253 |11/2 \pm 1/2\rangle + 0,2249 |11/2 \pm 9/2\rangle + 0,9479 |11/2 \mp 7/2\rangle. \quad (9)$$

Как видно из формул (3) и (9), вычисление матричных элементов типа $\langle \nu | V^{(1)} | \nu' \rangle$ сводится к вычислению матричных элементов неприводимых тензорных операторов типа $r^2 Y_{2m}$, для которых развит аппарат генеалогической схемы, предложенной Рака. Соответствующая формула для вычисления матричных элементов типа $\langle j_1 M_1 | r^l Y_{lm} | j_2 M_2 \rangle$ приведена, например, в (1). Здесь мы приводим только величины отличных от нуля матричных элементов оператора $r^2 Y_{2m}$:

$$\begin{aligned}
\langle 3/2 \pm 1/2 | r^2 Y_{20} | 3/2 \pm 1/2 \rangle &= \frac{1}{5} \sqrt{\frac{1}{5\pi}} \bar{r}^2; \\
\langle 11/2 \pm 1/2 | r^2 Y_{20} | 11/2 \pm 1/2 \rangle &= -\frac{1}{11 \cdot 13} \sqrt{\frac{14}{3\pi}} \bar{r}^2; \\
\langle 11/2 \pm 9/2 | r^2 Y_{20} | 11/2 \pm 9/2 \rangle &= \frac{5}{11 \cdot 13} \sqrt{\frac{2}{21\pi}} \bar{r}^2; \\
\langle 11/2 \pm 7/2 | r^2 Y_{20} | 11/2 \pm 7/2 \rangle &= \frac{1}{5 \cdot 11 \cdot 13} \sqrt{\frac{2}{21\pi}} \bar{r}^2,
\end{aligned} \tag{10}$$

где $\bar{r}^2 = \int_0^\infty [R_{4f}(r)]^2 r^4 dr$; $R_{4f}(r)$ — радиальная волновая функция $4f$ электрона. Численные значения $\bar{r}^2$ для РЗ ионов, вычисленных на основе хартри-фоковских волновых функций, приведены, например, в (5).

Учитывая, что штарковские состояния иона Nd^{3+} в ИАГ двукратно вырождены (крамерсовское вырождение), для входящего в формулу (5) коэффициента $M_{\lambda\lambda}^{\lambda'\lambda'}$ нетрудно найти выражение

$$|M_{\lambda\lambda}^{\lambda'\lambda'}|^2 = 0,45 g_\lambda g_{\lambda'} \left(\frac{ze^2 \bar{r}^2}{r_0^3} \right)^2 \overline{(3\Phi_1 - 1)^2}, \tag{11}$$

где $g_\lambda = g_{\lambda'} = 2$ статвесы состояний λ и λ' .

Используя следующие значения параметров (2): $\omega_D = 9,82 \cdot 10^{13} \text{ сек}^{-1}$; $\rho = 4,56 \text{ г/см}^3$; $v_0 = 5,58 \cdot 10^5 \text{ см/сек}$; $r_0 = 2,37 \cdot 10^{-8} \text{ см}$; $\bar{r}^2 = 1,001 \text{ а. е.}$, которые справедливы для кристалла ИАГ— Nd^{3+} , а также средние значения $\overline{\sin^2 \theta_a} = \frac{1}{2}$, $\overline{(3\Phi_5 - 1)^2} = \frac{4}{5}$, которые легко вычисляются, для $2W(T)$ на основе формул (5) и (11) получим выражение

$$2W(T) = 9,63 \cdot 10^{-2} \left(\frac{T}{T_D} \right)^2 Z^2 \int_0^{T_D/T} \frac{x dx}{e^x - 1}. \tag{12}$$

Для двух предельных температур на основе формул (7) и (8) получим:

$$2W(T) = 1,59 \cdot 10^{-1} \left(\frac{T}{T_D} \right)^2 Z^2 \quad \text{при } T < T_D;$$

$$2W(T) = 9,63 \cdot 10^{-2} \left(\frac{T}{T_D} \right) Z^2 \quad \text{при } T > T_D;$$

Выбирая подходящее значение для параметра Z (фактически единственного параметра теории), можно достичь удовлетворительного согласия теории с экспериментом. Отметим, что для других спектральных характеристик (ширины и сдвига линий (2,6), вероятности безызлучательных переходов (7) и т. д.) такое согласие достигалось при значениях $Z = 1 \pm 0,15$.

4. Вычислим фактор Дебая—Валлера для спектральной линии,

соответствующей электронному переходу между нижними штарковскими состояниями термов $^2F_{7/2}$ и $^2F_{5/2}$ иона Yb^{3+} в ИАГ. Волновые функции этих состояний в представлении (LSM_LM_S) найдены в (8), в удобном нам представлении $(LSjM_j)$ они имеют следующий вид:

$$|\lambda'\rangle = \pm 0,2732|5/2 \mp 1/2\rangle + 0,8902i|5/2 \pm 3/2\rangle - 0,3789i|5/2 \mp 5/2\rangle; \quad (13)$$

$$|\lambda\rangle = -0,0931|7/2 \pm 7/2\rangle - 0,3652|7/2 \mp 1/2\rangle \mp 0,3603|7/2 \pm 3/2\rangle \pm 0,8504i|7/2 \mp 5/2\rangle.$$

При этом отличными от нуля оказываются семнадцать матричных элементов неприводимых тензорных операторов r^2Y_{2m} . Значения некоторых таких матричных элементов приведены ниже:

$$\begin{aligned} \langle 7/2 \pm 7/2 | r^2 Y_{20} | 7/2 \rangle \pm 7/2 &= \sqrt{\frac{5}{3\pi}} \bar{r}^2; \\ \langle 7/2 \pm 5/2 | r^2 Y_{2\pm 2} | 7/2 \pm 1/2 \rangle &= \frac{5}{7} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \bar{r}^2; \\ \langle 7/2 \pm 7/2 | r^2 Y_{2\pm 2} | 7/2 \pm 3/2 \rangle &= \sqrt{\frac{11}{21\pi}} \bar{r}^2; \\ \langle 7/2 \pm 3/2 | r^2 Y_{20} | 7/2 \pm 3/2 \rangle &= -\frac{1}{7} \sqrt{\frac{15}{\pi}} \bar{r}^2; \\ \langle 7/2 \pm 7/2 | r^2 Y_{2\pm 1} | 7/2 \pm 5/2 \rangle &= -\sqrt{\frac{10}{7\pi}} \bar{r}^2; \\ \langle 5/2 \pm 3/2 | r^2 Y_{2\pm 1} | 5/2 \pm 1/2 \rangle &= -\frac{2}{7} \sqrt{\frac{3}{5\pi}} \bar{r}^2; \\ \langle 5/2 \pm 3/2 | r^2 Y_{2\pm 2} | 5/2 \mp 1/2 \rangle &= \frac{3}{7} \sqrt{\frac{3}{5\pi}} \bar{r}^2; \\ \langle 5/2 \pm 3/2 | r^2 Y_{20} | 5/2 \pm 3/2 \rangle &= -\frac{1}{7} \sqrt{\frac{1}{5\pi}} \bar{r}^2; \\ \langle 5/2 \pm 1/2 | r^2 Y_{20} | 5/2 \pm 1/2 \rangle &= -\frac{4}{7} \sqrt{\frac{1}{5\pi}} \bar{r}^2; \end{aligned} \quad (14)$$

на их основе для коэффициентов $M_{\lambda\lambda}^{\lambda'\lambda'}$ находим выражение

$$|M_{\lambda\lambda}^{\lambda'\lambda'}|^2 = \left(\frac{16}{9} \sqrt{\frac{2 \cdot 7}{5}} \frac{Ze^2 \bar{r}^2}{r_0^3} \right)^2 [0,0492(3\Phi_5 - 1) + 0,4574\Phi_4]^2 g_\lambda g_{\lambda'}.$$

Учитывая, что для Yb^{3+} $\bar{r}^2 = 0,613$ а. е. и кроме того $\bar{\Phi}_4^2 = 4/15$, $\bar{\Phi}_4 \bar{\Phi}_5 = \bar{\Phi}_5 = 0$, для $2W(T)$ получим выражение

$$2W(T) = 0,41 Z^2 \left(\frac{T}{T_D} \right)^2 \int_0^{T_D/T} \frac{x dx}{e^x - 1}. \quad (15)$$

В случае низких температур ($T < T_D$) получаем

$$2W(T) = 0,67 Z^2 \left(\frac{T}{T_D} \right)^2,$$

а в случае высоких температур ($T > T_D$)

$$2W(T) = 0,41 Z^2 \left(\frac{T}{T_D} \right).$$

5. Из сравнения формул (12) и (15) следует, что тушение люминесценции для системы ИАГ—Nd³⁺ наступает при более низких температурах, чем для системы ИАГ—Yb³⁺. Это не противоречит хорошо известному экспериментальному факту, заключающемуся в том, что в этом отношении ИАГ—Nb³⁺ является более хорошим материалом для ОКГ, чем ИАГ—Yb³⁺.

Однако насколько справедливы проведенные здесь вычисления, можно выяснить только после детального сравнения результатов этих вычислений с экспериментальными данными, для чего необходимо располагать полным набором таких данных, который в настоящее время отсутствует.

Авторы выражают благодарность М. Л. Тер-Микаеляну за постоянное внимание к работе.

Институт физических исследований
Академии наук Армянской ССР

Գ. Գ. ԴԵՄԻՐԽԱՆՅԱՆ, Ֆ. Պ. ՍԱՖԱՐՅԱՆ

Խառնուրդային լազերային գծերի ինտենսիվության Դերայ—Ուոլերի ֆակտորի հաշվարկը

Աշխատանքում ստացված է Դերայ—Ուոլերի ֆակտորի ջերմաստիճանային կախումը հազվագյուտ հողերի խմբի տարրերի իոններով ակտիվացված նոնաբարերի տիպի բյուրեղների համար: Ուերայ—Ուոլերի ֆակտորի թվային հաշվարկը, ինչպես նաև նրա ասիմպտոտիկ արտահայտությունը բարձր և ցածր ջերմաստիճանների համար, կատարված է YAlG—Nd³⁺ և YAlG—Yb³⁺ կոնկրետ բյուրեղային համակարգերի համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ И. С. Андриеш, В. Я. Гамурарь, Д. Н. Вылегжанин и др., ФТТ, т. 14, 2967 (1972). ² Ф. П. Сафарян, ФТТ, т. 19, 1947 (1977); т. 20, 1963 (1978). ³ Г. Г. Демирханян, Ф. П. Сафарян, Уч. записки ЕрГУ, № 2, 61 (1981). ⁴ Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, Специальные функции. Формулы. Графики. Таблицы, Наука, М, 1977. ⁵ A. J. Freeman, R. E. Watson, Phys. Rev., vol. 127, 2058 (1962). ⁶ Ф. П. Сафарян, препринт ПРЛФ—78—15, 1978. ⁷ Ф. П. Сафарян, ФТТ, т. 21, 300 (1979). ⁸ J. J. Pearson, G. F. Herrmann, K. A. Wickersheim, Phys. Rev., vol. 159, 251 (1967).

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Р. Г. Жангирян, Ф. А. Костанян

Переходное излучение магнитогидродинамических волн

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. М. Гарибяном 24/V 1982)

Как известно, переходное излучение (ПИ) рассматривалось в основном для диэлектрических или плазмоподобных сред, причем учет электродинамических свойств среды, как правило, проводился путем соответствующего выбора тензора диэлектрической проницаемости (^{1,2}).

В настоящей работе исследуется ПИ на плоской границе раздела проводящая жидкость (ПЖ) — вакуум ($z > 0$), при наличии внешнего магнитного поля, нормального к границе, в одножидкостном приближении магнитной гидродинамики. В среде, описываемой такой моделью, могут существовать три основных типа возбуждений: вихреобразные волны Альфвена (АВ) и продольные быстрые и медленные магнитозвуковые (БМЗ и ММЗ) волны (^{3,4}). В работе (⁵) впервые было указано на возможность черенковского излучения магнитогидродинамических (МГД) волн, возбуждаемых источниками дивергентного (источник массы, тепловой или термооптический источник) или вихревого вида (электрический ток и т. п.).

Излучение, возбуждаемое источниками указанных видов на границе раздела, представляет интерес как с точки зрения теории ПИ и переходного рассеяния волн различной природы, так и в свете приложений в астрофизике, акустоэлектронике и др.

В МГД-приближении, справедливом при выполнении неравенства $\sigma \gg T_{\text{хар}}^{-1}$, где σ — проводимость среды, а $T_{\text{хар}}$ — характерный временной масштаб модели, поведение проводящей жидкости во внешнем магнитном поле $\vec{H} = H_0 \hat{e}_z$ описывается следующей линеаризированной системой уравнений:

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) - c_A^2 [\nabla \times \nabla \times [\vec{v} \times \hat{e}_z] \times \hat{e}_z] =$$
(1)

$$= - \frac{\beta_T c_s^2}{\rho_0 c_p} \nabla \cdot Q - \frac{c}{\sigma H_0} c_A^2 [[\nabla \times \nabla \times \vec{j}_0] \times \hat{e}_z];$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\beta_T}{c_p} c_s^2 Q - \rho_0 c_s^2 (\nabla \cdot \vec{v});$$
(2)

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = H_0 \vec{\nabla} \times [\vec{v} \times \hat{e}_z] + \nu_m \nabla^2 \vec{h} - \frac{c}{\sigma} [\vec{\nabla} \times \vec{j}_0]; \quad (3)$$

$$\vec{E} = \frac{\nu_m}{c} \vec{\nabla} \times \vec{h} - \frac{\vec{j}_0}{\sigma} - H_0 \frac{1}{c} [\vec{v} \times \hat{e}_z]. \quad (4)$$

В приведенных уравнениях $\vec{v}$, p , $\vec{h}$ — возмущения поля скоростей, давления и магнитного поля в ПЖ; c_s — скорость звука; $c_A = H_0 / \sqrt{4\pi\rho_0}$ — скорость АВ; ρ_0 , β_T и c_p — невозмущенная плотность, коэффициент теплового расширения и удельная теплоемкость ПЖ; $\nu_m = c^2 / 4\pi\sigma$ — магнитная вязкость; $Q(\vec{r}, t)$ и $\vec{j}_0(\vec{r}, t)$ — распределение плотности мощности теплового источника и плотность тока источника. Дивергентным источником может являться, в частности, термооптический источник (ТОИ); в качестве такового мы выбираем движущийся со скоростью $v_0 \hat{e}_z$ фокус лазерного излучения с плотностью мощности вида

$$Q(\vec{r}, t) = Q_0 \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{(z - v_0 t)^2}{l^2} \right\}, \quad (5)$$

где Q_0 — плотность мощности в центре фокуса, l и a — характерные размеры ТОИ. В качестве источника тока выбираем движущийся заряд q :

$$\vec{j}_0(\vec{r}, t) = \hat{e}_z v_0 q \delta(\vec{r} - \hat{e}_z v_0 t). \quad (6)$$

Для нахождения полей ПИ в ПЖ и в вакууме, возбуждаемого источниками (5) и (6), систему уравнений (1—4) вместе с уравнениями Максвелла для полей в вакууме необходимо дополнить соответствующими граничными условиями. Они заключаются в непрерывности нормальных составляющих магнитного поля, тангенциальных компонент электрического поля, а также суммарного гидродинамического и линеаризованного электромагнитного (ЭМ) тензора напряжений. Последнее условие приводит в нашем случае к требованию непрерывности тангенциальных компонент магнитного поля и к равенству полного давления в ПЖ и магнитного давления в вакууме:

$$p + \frac{1}{4\pi} H_0 h_z = \frac{1}{4\pi} H_0 h_z^{\text{вак}}. \quad (7)$$

Разлагая физические величины, подлежащие определению, а также величины (5) и (6) в интегралы Фурье, получаем систему алгебраических уравнений для фурье-амплитуд полей ПИ. Из решения этой системы следует, что в случае ПИ заряда в ПЖ возбуждаются лишь АВ, а в случае ТОИ — БМЗ и ММЗ волны.

Приведем выражения для частотного распределения магнитных полей ПИ заряда в ПЖ, полученные нами в пределе $\nu_m \rightarrow 0$, $c_A/c_s \ll 1$, реализуемом в обычных лабораторных условиях ⁽¹⁾:

$$\begin{Bmatrix} h_{Rx} \\ h_{Ry} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{Bmatrix} \frac{iqc_A}{c v_0} H_1^{(1)} \left(\frac{\omega}{c} R \sin \vartheta \right) e^{i \frac{\omega}{c} R \cos \vartheta}. \quad (8)$$

Здесь R, ϑ, φ — сферические координаты точки наблюдения, $H_1^{(1)}$ — функция Ганкеля первого рода. Энергия ПИ АВ в единичном телесном угле и в интервале частот $d\omega$ равна

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{q^2 c_A v_0^2}{16\pi^3 c^4} \frac{\sin^2 \vartheta \cdot \cos \vartheta}{\left(1 + \frac{v_0}{c} \cos \vartheta\right)^2 \left(\frac{c_A}{c} - \cos \vartheta\right)^2}. \quad (9)$$

Отсюда видно, что энергия ПИ зависит от величины c_A , которая существенно влияет на угловое распределение. Энергия ЭМ поля ПИ заряда в вакууме определяется следующим соотношением:

$$\frac{dW_{\text{вак}}}{d\omega d\Omega} = \frac{q^2 v_0^2}{16\pi^3 c^3} \frac{\sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta}{\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \cos^2 \vartheta\right) \left(\frac{c_A}{c} - \cos \vartheta\right)^2}, \quad (10)$$

в котором полярный угол отсчитывается от направления $-\hat{e}_z$. Здесь, как и в формуле (9), существенными оказываются направления $\vartheta_{\text{max}} \simeq \simeq \frac{\pi}{2} \pm c_A/c$, т. е. энергия ПИ АВ и ЭМ волн сосредоточена в приповерхностных областях.

В случае ТОИ компоненты электрического поля ПИ в волновой зоне имеют вид

$$E_{x,y}(\vec{r}, t) = \begin{Bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix} F(\vartheta) \times \\ \times \exp\left\{-\frac{(R-ct)^2}{l^2} \frac{v_0^2}{c^2} \left(1 + \frac{a^2}{l^2} \frac{v_0^2}{c^2} \sin^2 \vartheta\right)^{-1}\right\}, \quad (11)$$

где

$$F(\vartheta) = f_1 f_2^{-1} \Delta^{-1} \sin \vartheta \cos \vartheta; \\ f_1 = 1 + 2M_s^2 [\beta_A^2 - (1 + \beta_A^2) \beta_L^2 \sin^2 \vartheta] - \sqrt{2} M_s [1 + \beta_A^2 - \beta_L^2 \sin^2 \vartheta]; \\ f_2 = M_A^2 - \beta_0^2 \sin^2 \vartheta + 2M_s^2 [\beta_A^2 - (1 + \beta_A^2) \beta_L^2 \sin^2 \vartheta] + \\ + M_A \cdot M_s \cos \vartheta \sqrt{2} (1 + \beta_A^2 - \beta_L^2 \sin^2 \vartheta); \\ \Delta = 1 - M_s^{-2} (\beta_A^{-2} - M_A^{-2}) (1 + \beta_0^2 \sin^2 \vartheta); \\ A_0 = Q_0 c_s^2 \beta_T (\rho_0 c_p)^{-1}, \quad \beta_A = \frac{c_s}{c_A}, \quad \beta_L = \frac{c_s}{c}; \\ \beta_0 = v_0/c, \quad M_A = v_0/c_A, \quad M_s = v_0/c_s.$$

Из (11) следует, что ЭМ волна, испущенная от границы при ее пересечении ТОИ, распространяется в виде импульса длительностью l/v_0 . Последняя может существенно зависеть от направления распространения при выполнении условия $v_0/c > l/a$.

Энергия магнитного давления в единичном телесном угле в вакууме определяется магнитной компонентой ЭМ волны

$$P_h^{\text{вак}} = \frac{1}{4\pi} H_0 \cdot h_z \quad (12)$$

и равна

$$\frac{dW_h^{\text{век}}}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \frac{H_0^2}{4c} A_0 a^2 l L \sqrt{\pi} \sin\vartheta F(\vartheta), \quad (13)$$

где L — длина траектории ТОИ в ПЖ, с которой формируется ПИ.

Анализ полей в ПЖ затрудняется в силу сложного дисперсионного уравнения для БМЗ и ММЗ волн. Для получения качественной картины излучения представляется целесообразным рассмотреть два предельных случая: а) $\beta_A \gg 1$ и б) $\beta_A \ll 1$.

В случае а) поля давлений ПИ ММЗ волн являются малыми величинами порядка β_A^{-2} , а выражения для БМЗ волн фактически сводятся к известным результатам для непроводящих жидкостей, в пределе $H_0 = 0$ (6).

Случай б) реализуется обычно в астрофизических масштабах, при больших значениях величины c_A . Опуская громоздкие вычисления, приведем окончательное выражение для поля давления ММЗ волны в этом случае:

$$p_-(\vec{r}, t) = \rho_0 A_0 \frac{l}{v_0} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\rho^2}{a^2}} \operatorname{sgn} \tilde{y} \cdot \operatorname{erfc}|\tilde{y}|, \quad (14)$$

в котором $\tilde{y} = M_s(z - c_s t)/l$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, а erfc — дополнительный интеграл вероятностей (7). Отсюда видно, что ММЗ волна распространяется в цилиндрической области радиуса $\sim a$ с осью вдоль направления внешнего магнитного поля в виде импульса разрежения и следующего за ним сжатия с эффективным продольным размером $\sim l/M_s$.

Переходной импульс магнитного давления ММЗ волны описывается функцией

$$p_{h,-}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \rho_0 A_0 \frac{l^3}{a^2} M \left(2, 1, -\frac{\rho^2}{a^2} \right) \frac{1}{M_s^2 v_0} \times \\ \times \left\{ 2\tilde{y} \exp(-\tilde{y}^2) - \sqrt{\pi} \operatorname{sgn} \tilde{y} [1 + 2\tilde{y}^2] \operatorname{erfc}|\tilde{y}| \right\}. \quad (15)$$

Здесь $M(2, 1, -\rho^2/a^2)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Куммера (7). Из (15) следует, что магнитный импульс ПИ ММЗ волны распространяется аналогично звуковому импульсу (14), с добавочными зонами „разрежения“ и „сжатия“.

Что же касается БМЗ волн, то в рассматриваемом случае они излучаются в виде полусферического импульса

$$p_{h,+}(\vec{r}, t) = \rho_0 A_0 \frac{a^2 M_A}{2 R c_A} \frac{\cos\vartheta \cdot \sin^4\vartheta (1 + M_A^2 a^2 \sin^2\vartheta / l^2)^{-1/2}}{(1 - M_A^2 \cos^2\vartheta)} \times \\ \times U(\vartheta) \exp \left\{ -\frac{(R - c_A t)^2}{l^2} (1 + M_A^2 a^2 \sin^2\vartheta / l^2)^{-1} \cdot M_A^2 \right\}; \\ U(\vartheta) = \begin{cases} \cos\vartheta - M_A \sin^2\vartheta, & \sin\vartheta > \beta_0 / M_A, \\ \frac{M_A (1 + \sqrt{\beta_0^2 - M_A^2 \sin^2\vartheta})}{M_A \cos\vartheta + \sqrt{\beta_0^2 - M_A^2 \sin^2\vartheta}}, & \sin\vartheta < \beta_0 / M_A \end{cases}$$

шириной $M_A^{-1}(l^2 + M_A^2 a^2 \sin^2\vartheta)^{1/2}$, который распространяется со ско-

ростью АВ. При влете ТОИ со скоростью $v_0 > c_A$ в ПЖ формируется конус Маха с вершиной в точке влета, поверхность которого разделяет области „сжатия“ магнитного давления ($\cos\theta < 1/M_A$) и „разрежения“.

Мы не затрагиваем здесь вопросы, касающиеся энергии ПИ для каждого из рассмотренных случаев. Отметим лишь, что результаты энергетического анализа приводят к интересным физическим выводам об угловой зависимости и частотном „обрезании“ спектров ММЗ и БМЗ ПИ. Универсальный характер ПИ, приводящий к новым качественным выводам при рассмотрении ПИ МГД волн, свидетельствует о том, что область применения теории ПИ не исчерпывается известными результатами (^{1,2}) (см. также (⁸)). Поэтому представляет интерес дальнейшее расширение области применения теории ПИ для волн различной природы.

Отдел теплофизики
Академии наук Узбекской ССР
Институт радиофизики и электроники
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Գ. ԶԱՆԴԻՐՅԱՆ, Ֆ. Ա. ԿՈՍՏԱՆՅԱՆ

Մագնիսահիդրոդինամիկական ալիքների անցումային ճառագայթումը

Զարգացվում է Ալֆվենի և մագնիսաձայնային ալիքների անցումային ճառագայթման մագնիսահիդրոդինամիկական գծայնացված տեսությունը: Ցույց է տրված, որ անցումային ճառագայթման «դանդաղ» մագնիսաձայնային ալիքը տարածվում է միջավայրում ձայնի արագությամբ գլանաձև տիրույթի երկայնքով, իմպուլսի տեսքով: «Արագ» մագնիսական ալիքը տարածվում է ոլորտաձև իմպուլսի ձևով Ալֆվենի ալիքների տարածման արագությամբ: Աղբյուրի՝ միջավայր մուտք գործելու կետում ձևավորվում է Մախի կոնը, որը բաժանում է մագնիսական ձնշման «սեղմման» և «նոսրացման» տիրույթները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Г. М. Гарибян, Препринт ЕрФИ, № 3, 1975. ² В. Л. Гинзбург, В. Н. Цытович, УФН, т. 126, вып. 4 (1978). ³ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1957. ⁴ В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Наука, М., 1967. ⁵ В. П. Докучаев, ЖЭТФ т. 53, вып. 2 (8) (1967). ⁶ Л. М. Лямшев, УФН, т. 135, вып. 4 (1981). ⁷ Справочник по специальным функциям под редакцией М. Абрамовица и М. Стиган, Наука, М., 1979. ⁸ В. И. Павлов, Акустический журнал, т. 28, вып. I (1982).

УДК 595.768.12

ЭНТОМОЛОГИЯ

С. М. Яблоков-Хнзорян

**Новый листоед из Таджикистана
(Coleoptera, Chrysomelidae)**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. О. Мовсисяном 1/II 1982)

Cryptocephalus (s. str.) *lopatini* Iablokoff-Khnzorian sp. nov.

Рот темный со светлой верхней губой, лоб светлый с двумя темными пятнами у основания усиков и с закругленно треугольным темным осевым пятном. темя черное. Шупики темные, усики светлые. Переднеспинка светлая с двумя крупными слитыми темно-бурыми пятнами, не достигающими ни переднего края, ни боковых краев, и вырисовывающими два косо изогнутых светлых основных пятна и светлый треугольник вдоль переднего края. Щиток светлый с тонким зачернением вдоль контура. Надкрылья светлые с парами черно-бурых пятен, одной у плечевых бугорков, двумя, более светлыми, за щитком и двумя за серединой, образованными соединившимися полосами. Весь контур со швом тонко зачернен. Эпиплеры светлые. Средняя часть передне- и среднегруди светлая, остальная часть груди темная. Брюшко светлое с затемнениями. Ноги с вертлугами светлые. Длина 3,9 мм (рис. 1,а).

Глаза со слабой и широкой выемкой. Лоб на треть уже головы, довольно густо и крупно, вдавленно точечный и негусто и коротко волосистый на гладком фоне. Усики довольно толстые (рис. 1,б). Переднеспинка сильно выпуклая, довольно крупно и густо точечная на гладком фоне, в среднем точки отстоят на диаметр (смотреть при дневном освещении), в немногих местах сгущены в короткие ряды. Боковая кайма тонкая, сверху видна лишь у задних углов. Щиток треугольный, в 9 раз уже тела. Надкрылья почти голые, кзади, в особенности на скате, с немногими очень короткими косо торчащими волосками, с закругленным пришовным углом, с правильными рядами зачерненных точек, такого же размера, как на переднеспинке, внутренние ряды точек кзади заметно приближены к шву, промежутки шагреневые и рассеянно точечные, точки вдвое мельче, чем в рядах. Эпиплевры спадают косо, полностью видны сбоку, резко сужены за задними тазиками. Выступ переднегруди широкий и плоский, с несколькими точками, за тазиками выступает трапецевидно, со слабо вогнутым задним краем. Грудь рассеянно точечная и волосистая. У ♂ брюшко с коротким третьим уростернитом, следующие, от четвертого до шестого, короткие, резко сужены к середине,

седьмой очень крупный, отогнут вниз, со слабой округлой срединной ямкой. Ноги довольно толстые, последний членик лапок заметно выступает за третьим, на задних лапках вдвое длиннее него. У ♂ первый членик передних и средних лапок расширен и шире их голеней (рис. 1, в):

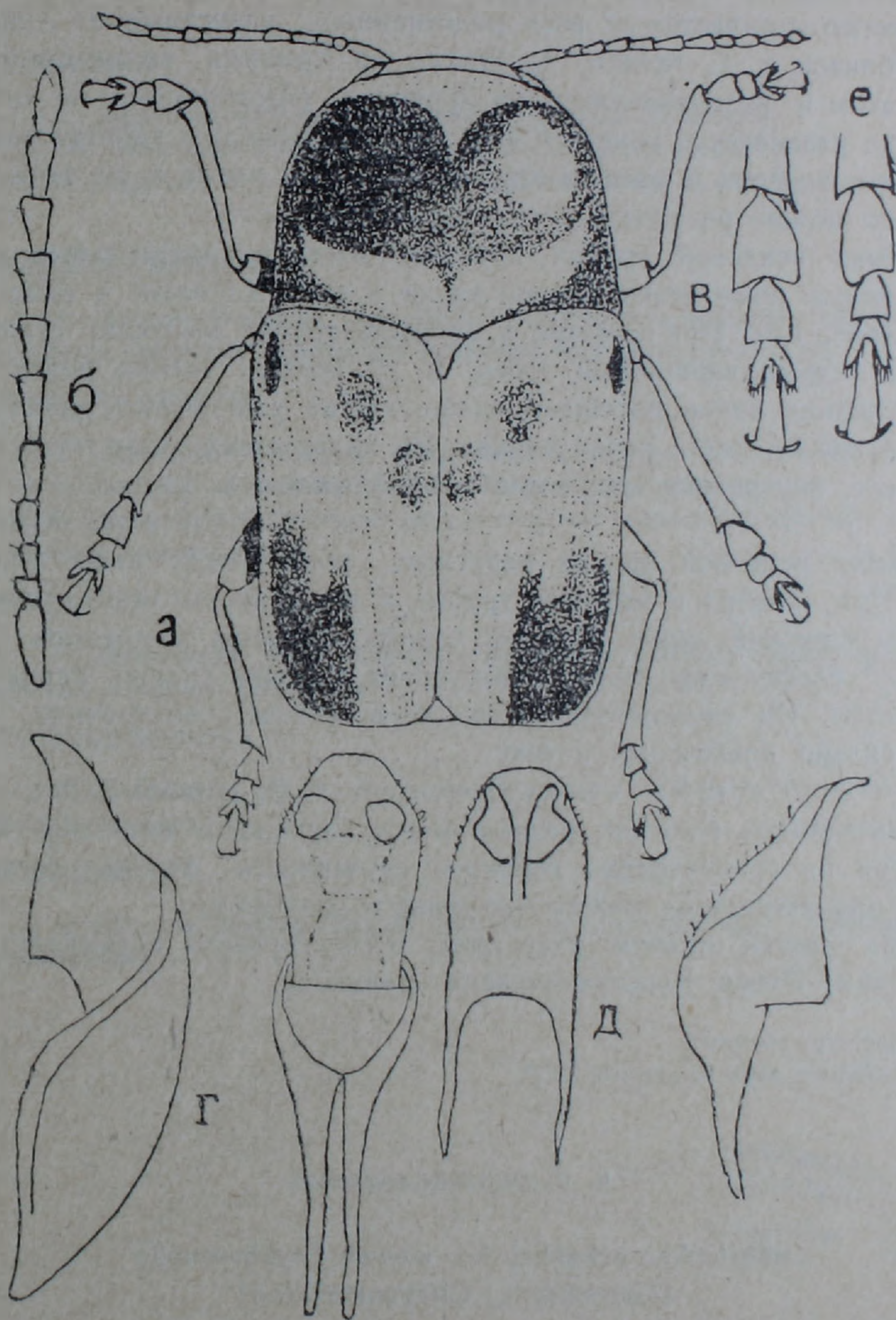


Рис. 1. а—г—*Cryptoccephalus lopatini* Khnz., голотип; а—габитус; б—ус; в—средняя лапка дорсально; г—пенис латерально и вентрально; д—е—*C. richteri* L. Medvedev, из Шатина (Армянская ССР); д—пенис вентрально и латерально (без тегмена); е—средняя лапка ♂ дорсально; а×20, прочее ×40

Пенисная трубка (рис. 1, г) уплощена, кончается широкой тупой лопастью, несущей две округлые вентральные ямки, отстоящие друг от друга на их диаметр, поле между ними плоское. Проксимально от ямок трубка выпуклая со слабым продольным кантом, кзади затухаю-

щим. Боковые края трубки дистально с рядом коротких торчащих волосков. Тегмен обычного для этого рода строения.

Таджикистан, Дарваз, Ньюльванд, на сухом восточном склоне на высоте около 1500 м, 26/VI 1975, голотип, ♂, в коллекциях Института зоологии АН Армянской ССР.

Вид принадлежит к подроду *Cryptocephalus* s. str. (*Asiopus* Lopat.), легко отличается от всех родственных, известных из Азии, но очень близок к *C. richteri* L. Medv. из Армении, являющимся его викариатом и развивающимся на курчавке (*Atraphaxis*), на которой вероятно развивается и новый вид. Оба вида сходны габитуально, по размерам, окраске и многим признакам, в том числе и по форме пениса. Их можно различать следующим образом:

1(2) Ямки пенисной трубки крупные, изогнуто треугольные, поле между ними резко сужено кзади и здесь сдавлено в виде кля (рис. 1,б). При осмотре в профиль трубка выглядит суженной в острый вершинный зубец. У ♂ первый членик передних и средних лапок расширен слабо, слегка уже голени, уростернит 4 сужен слабо. Усики тонкие. На надкрыльях ряды точек крупнее, внутренние кзади слабо приближены к шву

. *C. richteri* L. Medvedev
2(1) Ямки пенисной трубки округлые, поле между ними плоское. При осмотре в профиль трубка к вершине выглядит суженной в широкий зубец. Первый членик передних и средних лапок ♂ слегка шире голени, уростернит 4 сужен сильно. Усики толстые. На надкрыльях ряды точек мельче, внутренние ряды сильно приближены к шву

. *C. lopatini* Khnz. sp. n.

Замечателен большой разрыв между ареалами этих двух видов несмотря на сравнительно хорошую изученность фауны листоедов стран, промежуточных между Арменией и Дарвазом.

Вид назван именем известного отечественного специалиста по листоедам, Игоря Константиновича Лопатина.

Институт зоологии

Академии наук Армянской ССР

Ս. Մ. ՅԱԲԼՈՎՈՎ-ԽԵՉՈՐՅԱՆ

Տերևակեր բզեզների նոր տեսակ Տաջիկստանից
(Coleoptera, Chrysomelidae)

Դարվազից (Տաջիկստան) նկարագրված է տերևակեր բզեզների նոր տեսակ — *Cryptocephalus lopatini* Khnz., որը հանդիսանում է միայն Հայաստանից հայտնի *C. richteri* L. Medv. տեսակի վիկարիատը:

Հետաքրքրական է այս 2 տեսակների արեալների միջև եղած մեծ խզումը, չնայած Հայաստանի և Դարվազի միջև գտնվող երկրների տերևակեր բզեզների ֆաունան համեմատաբար լավ է ուսումնասիրված: