

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
 АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
 Д О К Л А Д Ы

LXXVI, № 1

1983

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. ֆաբրոտոր), է. Գ. ԱՅՐԻՎՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Թ. ԲԱՐԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐՐԻՆՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Վ. Գ. ՄԻՆԹԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Օ. Մ. ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՁՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, А. А. ГАБРИЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН, академик АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, академик АН АрмССР.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

Ե Ր Ե Վ Ա Ն

Е Р Е В А Н

Доклады Академии наук Армянской ССР, 1983, т. 76, № 1, с. 1—48

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

էջ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ա. Յու. Շահվերդյան—Վրենբերգի հայտանիշը և գնահատականներ պոտենցիալների և սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների համար 3

Ա. Է. Ջրբաշյան—Որոշ արդյունքներ Ֆուրյեի ձևափոխությունների մուլտիպլիկատորների վերաբերյալ կշռային L^p դասերում 8

Մ. Վ. Ղազարյան—Առանձնահատուկ եզակի կետերով ֆունկցիայի հոլոմորֆ շարունակելության մասին C^n 13

Տ. Վ. Տաբաթիկովա—Արստրակտի ինտերֆերենցիոն թեորեմներ 18

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Շ. Ե. Բոգոյան—Կողմնորոշված գրաֆների հանրահաշվական նկարագրությունը 22

Խ. Ս. Մինասյան—Անիզոտրոպ պրիզմատիկ մարմնում ջերմության հարթ պարբերական հոսքի մասին 27

ՄԵՆԱՆԵԿԱ

Խ. Մ. Կիրակոսյան, Վ. Ն. Մինասյան—Հավասարաչափ ծովող միաշերտ իզեալական պլաստիկ սալերի նախագծման մասին 33

ՇԻՆԱՐԱՐԱԿԱՆ ՄԵՆԱՆԵԿԱ

Ա. Գ. Նազարով, Վ. Լ. Մնացականյան—Մեխանիկական սիստեմներում դինամիկական վիճակների համար ինգիկատորային կորերի կառուցման մասին 38

ԳՐՈՒՆՏՆԵՐԻ ՄԵՆԱՆԵԿԱ

Կ. Ֆ. Ռուստամյան—Գաղ պարունակող կավային գետնահողի միաչափ խտացման խնդիրը կմախքի սողքի աստիճանային օրենքի դեպքում 41

ՄԻՋԱՏԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Մ. Յաբլով-Խնձուրյան—Բնդեռի նոր տեսակ Հայկական ՍՍՀ-ից (Coleoptera, Scarabaeidae) 46

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
МАТЕМАТИКА	
<i>А. Ю. Шахвердян</i> —Условия типа критерия Н. Винера и оценки для потенциалов и субгармонических функций	3
<i>А. Э. Джрбашян</i> —Некоторые результаты о мультипликаторах преобразований Фурье в весовых пространствах L^p	8
<i>М. В. Казарян</i> —О голоморфном продолжении функций со специальными особенностями в C^n	13
<i>Г. В. Тарарыкова</i> —Абстрактные интерференционные теоремы	18
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА	
<i>Ш. Е. Бозоян</i> —Алгебраическое описание направленных графов	22
<i>Р. С. Минасян</i> —О плоском периодическом течении тепла в анизотропном призматическом теле	27
МЕХАНИКА	
<i>Р. М. Киракосян, В. Н. Минасян</i> —К проектированию равноизгибаемых однослойных идеально-пластических пластинок	33
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА	
<i>А. Г. Назаров, В. Л. Мнацаканян</i> —О построении индикаторных кривых для динамических процессов в механических системах	38
МЕХАНИКА ГРУНТОВ	
<i>Г. Ф. Рустамян</i> —Линейная одномерная задача уплотнения газосодержащего глинистого грунта при степенном законе ползучести скелета	41
ЭНТОМОЛОГИЯ	
<i>С. М. Яблоков-Хнзорян</i> —Новый вид хруща из Армянской ССР (Coleoptera, Scarabaeidae)	46

C O N T E N T S

MATHEMATICS	P
<i>A. Yu. Shahverdian</i> —Wiener's criteria type conditions and estimates for potentials and subharmonic functions.	3
<i>A. E. Djrhashian</i> —Some results on Fourier multipliers in weighted L^p spaces	8
<i>M. V. Kazarian</i> —On holomorph continuation of functions with special singularities in C^n	13
<i>T. V. Tararykova</i> —Abstract interference theorems.	18
APPLIED MATHEMATICS	
<i>Sh. E. Bozoyan</i> —Algebraic description of ordered graphs	22
<i>R. S. Minasian</i> —On flat periodic heat flow in anisotropic prismatic body.	27
MECHANICS	
<i>R. M. Kirakosian, V. N. Minassian</i> —The design of uniform bended one-layer ideally plastic plates	33
STRUCTURAL MECHANICS	
<i>A. G. Nazarov, V. L. Mnatsakanian</i> —On the construction of indicator diagrams for dynamical processes in mechanical systems.	38
SOIL MECHANICS	
<i>G. Ph. Rustamian</i> —The one-dimensional linear condensation problem for gas-containing clay soil under the degree law of the frame creep	41
ENTOMOLOGY	
<i>S. M. Iablokoff-Khnzorian</i> —New chafer species from the Armenian SSR (Coleoptera, Scarabaeidae)	46

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 30.12.1983 г. Подписано к печати 1.3.1983 г. ВФ 05827
 Бумага № 1,70×108 1/16. Высокая печать. Печ. лист. 3,0. Усл. печ. лист. 4,2
 Учет.-изд. 3,38. Тираж 420. Заказ. 994. Издат. 5845.

Адр. ред.: 375019, Ереван, Барекамутян, 24 г. II эт., 1 к.

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван, Барекамутян 24 г.

Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин.

УДК 517.574

МАТЕМАТИКА

А. Ю. Шахвердян

Условия типа критерия Н. Винера и оценки для потенциалов и субгармонических функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 3/V 1982)

В п. 1 рассматриваются потенциалы Рисса u_x^α ($0 < \alpha < m$) в m -мерном евклидовом пространстве R^m ($m \geq 3$) и потенциалы Грина u^α в единичном m -мерном шаре D^m ($m \geq 2$). Показывается, что функция вида ωu , где $\omega > 0$ задается борелевской мерой μ , имеет предел по некоторому фильтру, элементы которого определяются условием типа критерия Н. Винера ⁽¹⁾ для иррегулярности точки в задаче Дирихле. Полученные теоремы содержат, усиливают или дополняют результаты А. Картана ⁽²⁾, Альфорса—Хейнса ⁽³⁾ и др.

В п. 2 рассматриваются функции w вида $w = u - v$, где u, v — субгармонические в R^m или в D^m ($m \geq 2$). Получена оценка для функций $w \neq \infty$, справедливая вне исключительного множества, определяемого условием типа критерия Н. Винера; в формулировке этой оценки участвует невайнновская ⁽⁴⁾ характеристическая функция. С. Н. Мергелян ⁽⁵⁾ установил теорему единственности для гармонических в D^3 функций; в точном виде этот результат получен В. Рао ⁽⁶⁾. А. Л. Шагинян в ⁽⁷⁾ формулирует точную теорему единственности для ограниченных аналитических в круге функций. Теорема 5 есть такое утверждение для определенных в D^m функций w с ограниченной характеристикой.

1. Используются следующие величины. Для $x \in R^m$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, $|x| = (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{1/2}$, $C(x, r) = \{\xi \in R^m : |x - \xi| < r\}$ — шар радиуса $r > 0$, $\Delta^m = \{|\xi| = 1\}$ — единичная $(m-1)$ -мерная сфера, $g(x, \xi)$ — функция Грина D^m . Если мера $0 \leq \mu \leq +\infty$ задана в области $G \subseteq R^m$, то число $0 < \mu_0 \leq +\infty$ всегда означает: $\mu_0 = \mu(G)$. Для компакта $e \neq \emptyset$ $\mathfrak{M} = \{\mu : \text{supp}(\mu) \subseteq e, \mu(e) = 1\}$,

$$C\{e; k\} = \left(\inf_{\mu \in \mathfrak{M}} \left\{ \int_{e \times e} k(x, \xi) d\mu(x) d\mu(\xi) \right\} \right)^{-1}$$

— емкость e ⁽⁸⁾; когда e — не компакт, $C\{e; k\}$ будет означать внешнюю емкость. Выбирая ядро $k = k(x, \xi)$, определим емкости c_α, c_g, c_2 : если $e \subseteq R^m$ ($m \geq 3$), то $c_\alpha(e) = C\{e; |x - \xi|^{\alpha - m}\}$, если $e \subseteq D^m$ ($m \geq 2$),

то $c_g(e) = C\{e; g(x, \xi)\}$, если $e \subseteq R^2 \setminus \{0\}$, то $c_2(e) = C\left\{e; \log \frac{|x|}{|x - \xi|}\right\}$; по-

нятно, что для $e \subseteq \Delta^2$ $c_2(e)$ совпадает с логарифмической емкостью.

Если μ — мера в R^m ($m \geq 3$) или в D^m ($m \geq 2$), то

$$u_{\alpha}^{\mu}(x) = \int_{|\xi| < \infty} |x - \xi|^{\alpha - m} d\mu(\xi), \quad u^{\mu}(x) = \int_{|\xi| < 1} g(x, \xi) d\mu(\xi)$$

—соответственно потенциалы Рисса и Грина.

Множество $e \subset \mathbb{R}^m$ ($m \geq 3$) называется $(\alpha -)$ разреженным в точке $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\xi \notin e$ в случае, когда ξ — изолированная точка для e или когда ξ — предельная точка для e и \exists потенциал u_{α}^{μ} так, что $u_{\alpha}^{\mu}(\xi) < \lim_{x \rightarrow \xi} u_{\alpha}^{\mu}(x)$, $x \in e$ (8–10). Согласно теореме М. Брело (10) e тогда и только тогда разрежено в ξ , когда для некоторого $0 < q < 1$ и $e_n = e \cap \{x : q^{n+1} \leq |x - \xi| < q^n\}$ выполнено

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n(\alpha - m)} c_{\alpha}(e_n) < \infty; \quad (1)$$

условие (1) с $\alpha = 2$ есть критерий Винера (1).

$e \subset \mathbb{R}^m$ ($m \geq 3$) называем разреженным в ∞ , если для некоторого $q > 1$ и $e_n = e \cap \{x : q^n < |x| \leq q^{n+1}\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n(\alpha - m)} c_{\alpha}(e_n) < \infty.$$

$e \subset \mathbb{D}^m$ ($m \geq 2$) называем разреженным в Δ^m , если для некоторого $0 < q < 1$ и $e_n = e \cap \{x : q^{n+1} \leq 1 - |x| < q^n\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n(2 - m)} c_g(e_n) < \infty.$$

Для $\xi \in \mathbb{R}^m$ $\mathcal{F}_{\xi} = \{e \subset \mathbb{R}^m, \xi \in e : \mathbb{R}^m | e \text{ — разрежено в } \xi\}$ является фильтром в \mathbb{R}^m ; $\mathcal{F} = \{e \subset \mathbb{D}^m : \mathbb{D}^m | e \text{ — разрежено в } \Delta^m\}$ является фильтром в \mathbb{D}^m ; для $\xi \neq \infty$ предел по \mathcal{F}_{ξ} совпадает с тонким (8–10) пределом.

Для потенциала u (и точки $\xi \in \overline{\mathbb{R}^m}$) определим совокупность Ω монотонных функций $\omega > 0$:

если $u = u_{\alpha}^{\mu}$ и $\xi \neq \infty$, то $\forall \omega \in \Omega_{\xi, u}$

$$\int_{|x - \xi| < 1} \frac{\omega(|x - \xi|)}{|x - \xi|^{m - \alpha}} d\mu(x) < \infty, \quad r^{\alpha - m} \omega(r) \downarrow, \quad \omega(r) \uparrow, \quad r \in (0, 1);$$

если $u = u_{\alpha}^{\mu}$, то $\forall \omega \in \Omega_{\infty, u}$

$$\int_{|x| > 1} \frac{\omega(|x|)}{|x|^{m - \alpha}} d\mu(x) < \infty, \quad r^{\alpha - m} \omega(r) \downarrow \omega_0, \quad \omega(r) \uparrow, \quad r \in (1, \infty); \quad (2)$$

если $u = u^{\mu}$, то $\forall \omega \in \Omega_u$,

$$\int_{|x| < 1} \frac{\omega(|x|)}{(1 - |x|)^{m - 2}} d\mu(x) < \infty, \quad \frac{\omega(r)}{(1 - r)^{m - 2}} \downarrow, \quad \frac{\omega(r)}{(1 - r)^{m - 1}} \uparrow, \quad r \in (0, 1);$$

в (2) $\omega_0 \geq 0$ — некоторое число.

Теорема 1. Если $u = u_{\alpha}^{\mu}$ — потенциал Рисса в \mathbb{R}^m ($m \geq 3$), $\xi \in \overline{\mathbb{R}^m}$, $\omega \in \Omega_{\xi, u}$, то для $\xi \neq \infty$

$$\lim_{\mathcal{F}_{\xi}} \omega(|x - \xi|) u(x) = \begin{cases} 0 & , \quad u(\xi) = +\infty \\ \omega(+0) u(\xi), & u(\xi) \neq +\infty \end{cases} \quad (3)$$

и для $\xi = \infty$

$$\lim_{\mathcal{F}_\infty} \omega(|x|)u(x) = \begin{cases} 0, & \mu_0 = +\infty \\ \omega_0 \mu_0, & \mu_0 \neq +\infty \end{cases} \quad (4)$$

Если u^μ — потенциал Грина в D^m ($m \geq 2$), $\omega \in \Omega_{u^\mu}$, то

$$\lim_{\mathcal{F}} \omega(|x|)u^\mu(x) = 0.$$

Здесь (3) содержит теорему А. Картана (2) о непрерывности (квазивсюду) в тонкой топологии потенциала Ньютона; (4) получается из (3) в результате преобразования Кельвина и усиливает теорему Дени—Хеймана (11) (теорема 3.21).

Следующая теорема есть аналог соответствующих результатов А. Картана и М. Брело (10).

Теорема 2. Если функция $f: D^m \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^1$ имеет предел s по фильтру \mathcal{F} , то \exists разреженное в Δ^m множество e так, что $\lim_{|x| \rightarrow 1, x \notin e} f(x) = s$. Множество $e \subset D^m$ ($m \geq 2$) с предельными точками на Δ^m тогда и только тогда разрежено в Δ^m , когда \exists потенциал Грина $u^\mu \neq \infty$ в D^m так, что $\lim_{\substack{|x| \rightarrow 1 \\ x \in e}} (1 - |x|)^{m-1} u^\mu(x) = +\infty$.

Ниже $[\xi, \eta]$ означает прямолинейный отрезок, соединяющий точки ξ, η ; $0 \leq \lambda \leq 1$ — некоторое число.

Следствие 1. Если u^μ — потенциал Грина в D^m и

$$\int_{|x| < 1} (1 - |x|)^\lambda d\mu(x) < \infty,$$

то \exists разреженное в Δ^m множество e , $\exists e' \subset \Delta^m$, $c_2(e') = 0$, $\forall \xi \in \Delta^m \exists e'' \subset \Delta^m$, $c_2(e'') = 0$ так, что $\forall \eta' \in \Delta^m \setminus e'$, $\forall \eta'' \in \Delta^m | e''$ выполнено

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow 1 \\ x \in e}} h(x) = \lim_{r \rightarrow 1-0} h(r\eta') = \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \in [\xi, \eta'']}} h(x) = 0, \text{ где } h(x) = (1 - |x|)^{m-2+\lambda} u^\mu(x).$$

При $m=2$ и $\lambda=1$ следствие 1 (после его переформулировки для случая полуплоскости P — для этого достаточно конформно отобразить D^2 на P) уточняет (см. также (12) и теорему Л. Наим в (13)) результат Альфорса—Хейнса (3). При $m=2$ (и $\lambda=0$) следствие 1 дополняет соответствующие теоремы М. Цудзи (14) и Дж. Литтлвуда (15,16). Теорема 3 показывает, что при $m=2$ требование $c_2=0$ в следствии 1 усилить невозможно.

Теорема 3. Для $\forall e \subset \Delta^2$, $c_2(e) = 0$ и произвольной функции $0 < p(r) \leq 1$ существуют потенциалы Грина u^μ , $u^{\mu'} \neq \infty$ такие, что

$$\forall \eta \in e \overline{\lim}_{r \rightarrow 1-0} p(r)u^\mu(r\eta) = \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \in [1, \eta]}} p(|x|)u^{\mu'}(x) = +\infty.$$

2. Для функции ω , представимой в виде $\omega = u - v$, где u, v — субгармонические в \mathbb{R}^m (или в D^m), $m \geq 2$, используется обозначение $\omega \in \Delta(\mathbb{R}^m)$ (или $\omega \in \Delta(D^m)$); всегда предполагается, что u, v гармоничны в $x=0$. Если $\omega \in \Delta$, то

$$T(r, \omega) = \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int_{\partial D_r^m} \max\{\omega(x), 0\} d\sigma(x) + \int_{D_r^m} g(0, \xi, D_r^m) d\nu(\xi)$$

— характеристическая функция Р. Неванлинны ⁽⁴⁾; здесь c^m — площадь поверхности Δ^m , $d\sigma$ — элемент площади поверхности ∂D_r^m , g — функция Грина D_r^m ($=C(0, r)$), ν — мера Рисса ν . Мы используем функцию $T_\omega(r) = T(r, \omega) - \omega(0)$. Дальше $k > 1$, $0 < \theta < 1$ — произвольные числа.

Для $\omega \in \Delta$ определим совокупность $\Omega(\omega) = \{\omega\}$ заданных на $(1, +\infty)$ или на $(0, 1)$ функций $\omega \downarrow$, $\omega > 0$:

если $\omega \in \Delta(\mathbb{R}^m)$, μ — мера Рисса μ , то $\forall \omega \in \Omega(\omega)$

$$\int_{|x| < \infty} \omega(|x|) d\mu(x) < \infty, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \omega(r) T_\omega(r) = \sigma_\omega < \infty;$$

если $\omega \in \Delta(D^m)$, μ — мера Рисса μ , то $\forall \omega \in \Omega(\omega)$

$$\int_{|x| < 1} \omega(|x|) d\mu(x) < \infty, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow 1-0} \omega(r) \frac{T_\omega(r)}{(1-r)^{m-1}} = \sigma_\omega < \infty.$$

Лемма. Пусть $m \geq 2$, $T_\omega(r) = O(1)$; если $\omega \in \Delta(\mathbb{R}^m)$, то $r^{2-m} \in \Omega(\omega)$, если $\omega \in \Delta(D^m)$, то $(1-r)^{m-1} \in \Omega(\omega)$. Пусть $m \geq 2$, $T_\omega(r) \uparrow \infty$, $0 < \tau < 1$ — убывающая к 0 функция, заданная на $[1, +\infty)$ или на $[0, 1]$; если $\omega \in \Delta(\mathbb{R}^m)$ и $\forall r \tau(kr) \leq \theta_k \tau(r)$, то $\tau(kr) r^{2-m} (T_\omega(r))^{-1} \in \Omega(\omega)$ и если $\omega \in \Delta(D^m)$ и τ — выпуклая, то $\tau(r) (1-r)^{m-1} (T_\omega(r + \theta(1-r)))^{-1} \in \Omega(\omega)$.

$e \subset \mathbb{R}^m$ ($m \geq 2$) называем $(*)$ -разреженным в ∞ , если для некоторого $q > 1$ и $e_n = e \cap \{x : q^n \leq |x| < q^{n+1}\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_2(e_n) < \infty. \quad (5)$$

$e \subset D^m$ ($m \geq 2$) называем $(*)$ -разреженным в Δ^m , если для некоторого $0 < q < 1$ и $e_n = e \cap \{x : q^{n+1} \leq 1 - |x| < q^n\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_g(e_n) < \infty.$$

Согласно лемме 5.5 из ⁽⁸⁾ при $m \geq 3$ (5) равносильно неравенству $c_2(e) < \infty$.

Теорема 4. Если $\omega \in \Delta(\mathbb{R}^m)$, $m \geq 2$, $\omega \in \Omega(\omega)$, то \exists $(*)$ -разреженное в ∞ открытое множество $e_{\omega, k} \subset \mathbb{R}^m$ так, что для некоторой постоянной $0 < c_{\omega, k} < \infty$

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in e_{\omega, k}}} \omega(k|x|) \omega(x) \geq -c_{\omega, k} \sigma_\omega.$$

Если $\omega \in \Delta(D^m)$, $m \geq 2$, $\omega \in \Omega(\omega)$, то \exists $(*)$ -разреженное в Δ^m открытое множество $e_{\omega, \theta} \subset D^m$ так, что для некоторой постоянной $0 < c_{\omega, \theta} < \infty$

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow 1 \\ x \in e_{\omega, \theta}}} \omega(|x| + \theta(1 - |x|)) \omega(x) \geq -c_{\omega, \theta} \sigma_\omega.$$

Оценки для функций ω , в которых исключительное множество описывается в метрических терминах, см., например, в ^(17, 18). Из доказательства теоремы 4 можно заметить, что $e_{\omega, \theta}$ есть объединение открытых $L_n \subset D^m$ таких, что

$$L_n \xrightarrow[n]{} \Delta^m, \quad \frac{1 - \inf\{|x| : x \in L_n\}}{1 - \sup\{|x| : x \in L_n\}} \leq c < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_g(L_n) < \infty;$$

такие множества рассматривались в (19).

Теорема 5. Пусть $\omega \in \Delta(D^m)$, $m \geq 2$, $T_\omega(r) = O(1)$ и $e \subset D^m$ не разрежено в Δ^m ; тогда если

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow 1-0 \\ x \in e}} (1 - |x|)^{m-1} \omega(x) = -\infty, \quad \text{то } \omega \equiv -\infty. \quad (6)$$

Требование о неразрезанности в Δ^m множества e в (6) не улучшаемо (см. теорему 2); пример функции $P(x, \xi) = \frac{1 - |x|^2}{|x - \xi|^m}$ ($\xi \in \Delta^m$, P — ядро Пуассона) показывает, что когда e находится в области Штольца с вершиной ξ , то в (6) указан точный порядок убывания. Гипершар D^{m-1} не разрежен в Δ^m ; произвольный треугольник из D^3 с вершиной в Δ^3 не разрежен в Δ^3 .

Автор признателен академику АН Армянской ССР С. Н. Мергеляну за внимание к работе.

Ереванский научно-исследовательский проектный институт автоматизированных систем управления городом

Ա. Յու. ՇԱՀՎԵՐԴՅԱՆ

Վիճերի հայտանիշը և գնահատականներ պոտենցիալների և սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների համար

Դիտարկվում են Ռիսսի $u = u_\alpha^\alpha$ պոտենցիալները R^m ($m \geq 3$, $0 < \alpha < m$) m -չափանի էվկլիդեսյան տարածությունում և Դրիսի $u = u^\alpha$ պոտենցիալները D^m ($m \geq 2$) միավոր գնդում: Ցույց է տրված, որ ω և u տեսքի ֆունկցիան, որտեղ $\omega > 0$ -ն որոշվում է $\mu \geq 0$ բորելյան չափով, ունի վերջավոր սահման, երբ $|x| \rightarrow \infty$ կամ $|x| \rightarrow 1-0$ և $x \in e$: Բացառիկ բազմությունը որոշվում է Դրիսի խնդրում կետի իռեզուլյարություն համար վիճերի հայտանիշի տիպի պայմանով: Այդպիսի բազմություններից դուրս ստացված են գնահատականներ R^m -ում կամ D^m -ում սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ N. Wiener, J. Math. Phys., 3, №3 (1924). ² H. Cartan, Ann. Univ. de Grenoble, Math. Phys, 22, 221—280 (1946). ³ L. Ahlfors, M. Heins, Ann. Math., 50, №2 (1949). ⁴ И. И. Привалов, Субгармонические функции, Гостехиздат, М.—Л., 1937. ⁵ С. Н. Мергелян, УМН, т. 11, №5 (1956). ⁶ В. Рао, Мат. заметки, т. 3, №3 (1968). ⁷ А. Л. Шагинян, ДАН АрмССР, т. 27, №5 (1958). ⁸ Н. С. Ландкоф, Основы современной теории потенциала, Наука, М., 1966. ⁹ М. Брело, Основы классической теории потенциала, Мир, М., 1964. ¹⁰ М. Брело, О топологиях и границах в теории потенциала, Мир, М., 1974. ¹¹ У. Хейман, П. К. Кеннеди, Субгармонические функции, Мир, М., 1980. ¹² W. K. Hayman, J. Math. Pures et Appl., 35, №2 (1956). ¹³ H. L. Jackson, Ann. Inst. Fourier, 20/2 (1970). ¹⁴ M. Tsuji, Comment. Math. Univ. St. Pauli, №1, 1956. ¹⁵ M. Tsuji, Potential theory in modern function theory, Tokyo, 1959. ¹⁶ J. E. Littlewood, Proc. London Math. Society, 28 (1929). ¹⁷ И. В. Ушакова, Зал. мех.-мат. факультета Харьковского ун-та, Харьковского мат. о-ва, т. 29, сер. 4 (1963). ¹⁸ А. Н. Фридман, Укр. мат. журн., т. 32, №5 (1980). ¹⁹ А. Ю. Шахвердян, ДАН АрмССР, т. 70, №5 (1980).

УДК 517. 518. 5

МАТЕМАТИКА

А. Э. Джрбашян

Некоторые результаты о мультипликаторах преобразований
 Фурье в весовых пространствах L^p

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 7/IV 1982)

Настоящая работа посвящена изучению мультипликаторов интегралов Фурье в весовых пространствах. Основными результатами являются теоремы 6 и 7, которые обобщают недавние результаты П. Шёлина и П. Шёгрена ⁽¹⁾ на случай весовых пространств.

1. *Первые определения и результаты.* Пусть m — ограниченная измеримая функция, определенная на вещественной оси \mathbb{R} . Определим линейный оператор при помощи соотношения

$$(T_m f)^\wedge(x) = m(x) \hat{f}(x),$$

где \hat{f} — преобразование Фурье функции f . Функция m называется мультипликатором в $L^p_{\omega} = \{f : \|f\|_{p,\omega}^p = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \omega(x) dx < \infty\}$, если

$$\|T_m f\|_{p,\omega} \leq C \|f\|_{p,\omega},$$

где C не зависит от f . Мы пишем тогда $m \in M^p(\omega)$.

Пусть I — некоторый интервал (конечный или нет) $I \subset \mathbb{R}$. Определим оператор взятия частичной суммы следующим образом:

$$(S_I f)^\wedge(x) = \chi_I(x) \hat{f}(x),$$

где χ_I — характеристическая функция интервала I .

Если $R = \{I_j\}$ некоторая последовательность интервалов, то определим оператор S_R (обобщенный оператор взятия частичной суммы), действующий из $L^2(l^2)$ в себя по правилу

$$S_R f = (S_{I_1} f_1, S_{I_2} f_2, \dots),$$

где $f = (f_1, f_2, \dots)$ принадлежит $L^2(l^2)$.

Если k — целое, $-\infty < k < \infty$, то разложение $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- \cup \{0\}$, где $\mathbb{R}_+ = \bigcup_k (2^k, 2^{k+1}]$ и $\mathbb{R}_- = \bigcup_k [-2^{k+1}, -2^k)$, называется двоичным разложением Литтлвуда — Пэли.

Определение. Локально интегрируемая на \mathbb{R} неотрицательная функция ω принадлежит классу Макенхоупта A_p , $1 < p < \infty$, если

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega(x) dx \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right)^{p-1} \leq C,$$

где \sup берется по всем конечным отрезкам I , $I \subset \mathbb{R}$ и $|I|$ — длина этого отрезка.

Теорема 1. Если $m \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, m и $|x| |m'(x)|$ ограничены на \mathbb{R} , то m является мультипликатором класса L_w^p , $1 < p < \infty$, если $w \in A_p$.

Доказательство более общей теоремы в случае любого $n \geq 1$ см. (2), теорема 1 или (3), теорема 3.

Следующая теорема является аналогом теоремы 1 для векторнозначных функций и принадлежит Х. Трибелю (4). Однако она справедлива только в случае $w(x) = |x|^\alpha$, $-1 < \alpha < p-1$.

Обозначим через $L_w^p(l^2)$ пространство последовательностей функций $f = \{f_j\}$, для которых

$$\|f\|_{p,w}^p \equiv \|f\|_{L_w^p(l^2)}^p = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j \geq 1} |f_j(x)|^2 \right)^{p/2} w(x) dx < \infty$$

при некотором весе w и $1 < p < \infty$.

Теорема 2. Пусть имеем последовательность ограниченных измеримых функций $m(x) = \{m_j(x)\}_{j \geq 0}$ таких, что $m_j \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ и

$$\left(\sum_{j \geq 1} |m_j'(x)|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{C}{|x|}.$$

Определим оператор $T_m f$, действующий в $L_w^p(l^2)$ по правилу

$$(T_m f(x))^\wedge = \{(T_{m_j} f_j(x))^\wedge\}_{j \geq 1} = \{m_j(x) \hat{f}_j(x)\}_{j \geq 1}.$$

Тогда, если $1 < p < \infty$ и $w(x) = |x|^\alpha$, $-1 < \alpha < p-1$, то T_m является ограниченным оператором в $L_w^p(l^2)$:

$$\|T_m f\|_{p,w} \leq C \|f\|_{p,w}.$$

Следующие три теоремы — весовые аналоги хорошо известных классических теорем. Их доказательства точно копируют доказательства соответствующих безвесовых теорем (см. (5), гл. 4, теоремы 4, 5 и 6). Единственный новый факт, необходимый для доказательства, — известная теорема Ханга—Макенхоупта—Видена об ограниченности преобразования Гильберта в весовых пространствах (6). Несколько усложненные доказательства теорем 3—5 имеются также в (2).

Теорема 3. Для любого семейства интервалов $R = \{I_j\}$ и $f \in L_w^p(l^2)$

$$\|S_R f\|_{p,w} \leq C \|f\|_{p,w}$$

при $1 < p < \infty$, если $w \in A_p$.

Теорема 4. Пусть $\mathbb{R} = \bigcup_k I_k$ — двоичное разложение вещественной оси. Если S_k — соответствующий мультипликаторный оператор, $(S_k f)^\wedge = \chi_{I_k} \hat{f}$, то при $1 < p < \infty$, $w \in A_p$ имеют место неравенства

$$C_1 \|f\|_{p,w} \leq \left\| \left(\sum_k |S_k f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,w} \leq C_2 \|f\|_{p,w}.$$

Теорема 5. Пусть функция t ограничена на \mathbb{R} и имеет ограниченную вариацию на каждом конечном интервале, не содержащем начала координат. Если по всем двоичным интервалам I

$$\sup_I \int_I |dm(x)| \leq C$$

и если $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p$, то $m \in M^p(\omega)$.

2. Основные результаты В этом пункте мы докажем наши основные результаты, которые существенно опираются на теоремы 1–5. Для этого потребуются ввести еще несколько понятий и определений.

Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — замкнутое множество нулевой меры Лебега и $\mathbb{R} \setminus E = \bigcup_k I_k$, I_k — дополнительные интервалы множества E . Пусть

χ_k — характеристическая функция интервала I_k и $(S_k f)^\wedge = \chi_k \hat{f}$.

Следуя (1), будем говорить, что E обладает свойством $LP(p, \omega)$, если

$$C_1 \|f\|_{p, \omega} \leq \|(\sum_k |S_k f|^2)^{1/2}\|_{p, \omega} \leq C_2 \|f\|_{p, \omega} \quad (1)$$

для некоторой весовой функции ω и $1 < p < \infty$.

E имеет свойство $HM(p, \omega)$, если любая функция $m \in C^1(\mathbb{R} \setminus E)$ такая, что

$$|m(x)| + d_E(x) |m'(x)| \leq C, \quad (2)$$

является мультипликатором в L^p_ω . Здесь $d_E(x) = \text{dist}(x, E)$.

Наконец, E имеет свойство $\text{Mag}(p, m)$, если любая функция m локально конечной вариации в $\mathbb{R} \setminus E$, для которой

$$\sup_k \int_{I_k} |dm(x)| < \infty, \quad (3)$$

принадлежит $M^p(\omega)$.

Теоремы 1–5 показывают, что множество $E = \{0\}$ (а также любое одноточечное множество) обладает всеми тремя этими свойствами, если $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p$.

В работе (1) показано, что свойствами LP , HM и Mag при $\omega(x) \equiv 1$ обладают также некоторые, довольно общие множества. Мы покажем, что это верно и для пространства L^p_ω при $1 < p < \infty$ и некоторых ω .

Теорема 6. Если $E \subset \mathbb{R}$ — замкнутое множество нулевой меры, $1 < p < \infty$, $\omega(x) = |x|^\alpha$, $-1 < \alpha < p-1$, то свойства $LP(p, \omega)$, $HM(p, \omega)$ и $\text{Mag}(p, \omega)$ эквивалентны.

Доказательство существенно опирается на теоремы 1–5 и следует той же схеме, что и доказательство классического результата (см. (5)).

Пусть E и E' замкнутые множества нулевой меры Лебега на \mathbb{R} . Назовем E' приемником E , если существует константа $c > 0$ такая, что из $x, y \in E'$ и $x \neq y$ следует $|x - y| \geq c d_E(x)$.

Теорема 7. Если E имеет свойство $LP(p, |x|^a)$, $-1 < a < p-1$, то этим же свойством обладает любой его преобразованием E' .

Доказательство. Пусть E' — преобразование E , $\mathbb{R} \setminus E' = \bigcup_k (a_k, b_k)$ и пусть $\chi_k = \chi_{(a_k, b_k)}$. Построим функции $\varphi_k \in C^1(\mathbb{R} \setminus E)$, $\varphi_k \geq 0$ со свойствами

$$1) \varphi_k = 1 \text{ на } [a_k, b_k];$$

$$2) \sup_k \sup_x \{ \varphi_k(x) + d_E(x) |\varphi_k'(x)| \} < \infty;$$

$$3) \text{supp } \varphi_k \subset \left[a_k - \frac{d_E(a_k)}{2}, b_k + \frac{d_E(b_k)}{2} \right].$$

Тогда, как видно из условия 3), только у конечного числа функций φ_k носители пересекаются. Из теоремы 6 следует, что E имеет также свойство $HM(p, |x|^a)$, $1 < p < \infty$, $-1 < a < p-1$. Поэтому суммы $\sum_k \pm \varphi_k$ при любых комбинациях знаков принадлежат $M^p(|x|^a)$, $-1 < a < p-1$. Применяя средние Радемахера, получим

$$\|(\sum_k |G_k|^2)^{1/2}\|_{p, |x|^a} \leq C \|f\|_{p, |x|^a}$$

при $1 < p < \infty$, $-1 < a < p-1$, где $\hat{G}_k = \varphi_k \hat{f}$.

Обозначим $\hat{F}_k = \chi_k \hat{f}$ и заметим, что $\chi_k = \chi_k \varphi_k$. Поэтому $F_k = S_k G_k$, где $(S_k f)^\wedge = \chi_k \hat{f}$. Применив теперь теорему 3 в случае $R = \{(a_k, b_k)\}$, получим

$$\|(\sum_k |F_k|^2)^{1/2}\|_{p, |x|^a} \leq C \|f\|_{p, |x|^a}.$$

Теорема доказана.

Последовательность точек $\{x_k\}$, стремящуюся к точке $x \in \mathbb{R}$, назовем лакунарной, если $x_k \neq x$ и существует число $q < 1$ такое, что $(x_{k+1} - x)/(x_k - x) \leq q$.

Определим лакунарную последовательность порядка n индуктивно следующим образом. Лакунарная последовательность порядка 0 — это просто одноточечное множество. Лакунарная последовательность порядка n — это преобразование лакунарной последовательности порядка $n-1$.

Ввиду этого определения мы немедленно получаем

Следствие. Лакунарное множество конечного порядка обладает всеми тремя свойствами $LP(p, \omega)$, $HM(p, \omega)$ и $Mag(p, \omega)$, если $1 < p < \infty$, $\omega(x) = |x|^a$, $-1 < a < p-1$.

Примером лакунарной последовательности порядка 1 служит любое множество вида $\{a^k\}_{k=0}^{\infty}$, где $a > 1$.

Лакунарную последовательность порядка 2 можно получить, если подходить к каждой точке предыдущей последовательности таким

же образом. Следовательно, множество вида $\{a^k + b^j\}_{k, j=0}^{\infty}$, где $a > 1$ и $b > 1$, является лакунарной последовательностью порядка 1.

Аналогично можно получить примеры лакунарных последовательностей любого конечного порядка.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Է. ԶՐԲԱՇՅԱՆ

Որոշ արդյունքներ Ֆուրյեի ձևափոխությունների մուլտիպլիկատորների վերաբերյալ կշռային L^p դասերում

Հորվածում ցույց է տրված, որ եթե առանցքի վրա որոշված սահմանափակ ֆունկցիան ունի «շատ» եզակի կետեր, իսկ մյուս կետերում բավարարում է ողորկության որոշ պայմանների, ապա այն հանդիսանում է Ֆուրյեի ձևափոխության մուլտիպլիկատոր կշռային L^p դասերում որոշ կշիռների համար $1 < p < \infty$: Այդպիսով ընդհանրացվում են Պ. Շյուլինի և Պ. Շյոգրենի արդյունքները կշռային տարածություններում:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ P. Sjögren, P. Sjölin, Uppsala Univ., Dept. of Math. Report, 1930:1. ² D. S. Kurtz, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 259, № 1 (1980). ³ А. Э. Джрбашян, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 16, № 3 (1981). ⁴ H. Triebel, Math. Nachr. vol. 78 (1977). ⁵ И. Стейн, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, Мир, М., 1973. ⁶ R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 176 (1973).

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

М. В. Казарян

О голоморфном продолжении функций со специальными особенностями в \mathbb{C}^n

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 7/V 1982)

Основным результатом настоящей работы является следующая Теорема 1. Пусть функция $f=f(z, w)$ $z \in \mathbb{C}^{n-1}$, $n \geq 2$, $w \in \mathbb{C}$, голоморфна в единичном шаре $\{(z, w) : |z|^2 + |w|^2 < 1\} \subset \mathbb{C}^n$ и для любого $\lambda \in \mathbb{C}^{n-1}$, $|\lambda| < r$ ($r > 0$) функция $f(\lambda w, w)$ голоморфна всюду в $\mathbb{C} = \mathbb{C}_w$, за исключением одной точки (зависящей от λ).

Тогда f продолжается до функции \bar{f} , голоморфной в $\mathbb{C}^n \setminus \{l(z, w) = 0\}$, где l — некоторая линейная функция.

Если $f(\lambda w, w)$ вообще не имеет особенностей или мероморфна, то утверждение теоремы 1 является очевидным следствием стандартных теорем об оболочках голоморфности и мероморфности (см. (1,2)),

Для доказательства теоремы 1 кроме известных результатов Е. М. Чирки (3) о разложении функции, голоморфной вне аналитических множеств, в ряды Лорана—Якоби нам нужно одно обобщение классической теоремы Леви об аналитичности множества особых точек (см. (4)).

Пусть $D \subset \mathbb{C}_z^{n-1}$, $G \subset \mathbb{C}_w$ — произвольные области и функция $f=f(z, w)$ голоморфна по совокупности переменных в области $(D \times G) \setminus E$, где $E \subset D \times G$ — замкнутое множество, сечение которого любой комплексной прямой $z = z_0$, $z_0 \in D$, состоит из одной точки, которую мы обозначим через $(z_0, \varphi(z_0))$. Теорема Леви утверждает, что E — аналитическое множество в $D \times G$, т. е. φ — голоморфная функция в области D .

Задача существенно усложняется в случае частичной голоморфности только по w , без дополнительного предположения о замкнутости множества особенностей E . В этой ситуации справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $D \subset \mathbb{C}_z^{n-1}$ — произвольная область и функция $f=f(z, w)$; $z \in D$, $w \in \mathbb{C}$ голоморфна по совокупности переменных в $D \times \{|w| < 1\}$. Предположим, что при любом фиксированном $z \in D$ функция $f(z, w)$ голоморфно продолжается во всю плоскость \mathbb{C}_w , за исключением одной точки $\varphi(z)$. Тогда φ — голоморфная функция в области D , т. е. множество особенностей $E = \{(z, w); z \in D, w = \varphi(z)\}$ является аналитическим.

Если множество E замкнуто, то утверждение теоремы 2 сразу

следует из теоремы Леви, ибо тогда функция f , как хорошо известно, голоморфна в $(D \times \mathbb{C}_w) \setminus E$.

Доказательство обеих теорем существенно упрощается, когда функция $f(\cdot, w)$ имеет единственную особенность в расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ (в общем случае мы считаем, что в бесконечности тоже может быть особенность). Простые доказательства в этом случае приводятся ниже.

Для доказательства теоремы 2 в указанном выше частном случае заметим, что по фундаментальной теореме Гартогса достаточно доказать голоморфность $\varphi(z)$; $z = (z_1, \dots, z_{n-1})$ по каждому переменному z_k , $k = 1, \dots, n-1$, при фиксированных остальных; значит, можно считать $n=2$. По условию, для любого фиксированного $z \in D$ функция $f(z, w)$ голоморфна в единичном круге $\{|w| < 1\}$ и ее ряд Тейлора в точке $w=0$ сходится в большом круге $\{|w| < |\varphi(z)|\}$. Тогда, как известно, ряд $f(z, w) = \sum a_n(z)w^n$ сходится в области $\{(z, w) : z \in D, |w| < |\varphi(z)|_*\}$; аналогично ряд $f(z, w) = \sum b_n(z)/w^n$ сходится в области $\{(z, w) : z \in D, |w| > |\varphi(z)|^*\}$. Здесь $|\varphi(z)|_*$ и $|\varphi(z)|^*$ — соответственно нижняя и верхняя регуляризации функции $|\varphi(z)|$. Хорошо известно (см. (1.4)), что функция $-\ln|\varphi(z)|^*$ супергармонична, а $-\ln|\varphi(z)|_*$ — субгармонична в D . Отсюда с помощью стандартных усреднений легко выводится, что $\ln|\varphi(z)|$ — гармоническая функция в области D . Нам достаточно того, что $|\varphi(z)|$ — непрерывная функция. Точно так же доказывается непрерывность функции $|\varphi(z) - a|$, где a — произвольная точка с $|a| < 1$. Из непрерывности $|\varphi(z) - a|$ для этих a , очевидно, следует непрерывность самой функции $\varphi(z)$, после чего наше утверждение следует из теоремы Леви.

Для доказательства частного случая теоремы 1 сделаем замену переменных $z_1 = z/w$; $z_2 = 1/w$ и положим $g(z_1, z_2) = f(z_1/z_2, 1/z_2)$. Тогда $g(z_1, z_2)$ голоморфна в области $\{|z_2| > \sqrt{1 + |z_1|^2}\}$ и для любого фиксированного z_1 ; $|z_1| < r$, функция $g(z_1, z_2)$ голоморфна в $\bar{\mathbb{C}}_{z_2} \setminus \varphi(z_1)$. Как мы уже доказали, φ — голоморфная функция. Пусть $\varphi(z_1) = l(z_1) + z_1^2 \varphi_1(z_1)$, где $l(z_1) = az_1 + b$ — линейная часть функции $\varphi(z_1)$ в нуле, и $\varphi_1(z_1)$ — голоморфная функция, равномерно ограниченная в круге $|z_1| \leq r/2$. При $|z_1| < \varepsilon$ имеем $|\varphi(z_1) - l(z_1)| < C\varepsilon^2$, т. е. над $|z_1| < \varepsilon$ функция $g(z_1, z_2)$ голоморфна вне трубочки $|z_2 - l(z_1)| < C\varepsilon^2$. Сделаем еще одно преобразование $z' = z_1$, $w' = 1/(z_2 - l(z_1))$ и положим $h(z', w') = g\left(z', \frac{1}{w'} + l(z')\right)$. Тогда функция h голоморфна в $\{|z'| < \varepsilon, |w'| < c'\}$ для некоторого $c' > 0$ и при каждом фиксированном z' , $|z'| < \varepsilon$ она голоморфна по w' в круге $|w'| < 1/C\varepsilon^2$. По лемме Гартогса, h голоморфна в поликруге $\{|z'| < \varepsilon, |w'| < 1/C\varepsilon^2\}$. Кроме того, h голоморфна в области $\{|w'| < 1/c\sqrt{1 + |z'|^2}\}$ для некоторого $c > 0$, зависящего от коэффициентов функции l , так как g голоморфна в $\{|z_2| > \sqrt{1 + |z_1|^2}\}$ и по z_2 голоморфна в ∞ .

Таким образом, h голоморфна в объединении поликругов $\{|z'| < \varepsilon, |w'| < 1/C\varepsilon^2\}$ и $\{|z'| < 1/\varepsilon, |w'| < \varepsilon/2c\}$. Оболочка голоморфности этого объединения содержит поликруг $\{|z'| < \varepsilon^{-3/5}, |w'| < \varepsilon^{-2/5}\}$. Так как $\varepsilon > 0$

произвольное, то функция h голоморфно продолжается на все \mathbb{C}^2 . Возвращаясь к переменным (z, w) , получаем, что f голоморфно продолжается в $\mathbb{C}^2 \setminus \{(z, w) : az + bw = 1\}$.

В общем случае приведем только схему доказательства теоремы 2. Сделаем преобразование $(z, w) \rightarrow (z, 1/w)$ и будем разлагать полученную функцию $g(z, w) = f(z, 1/w)$ в ряды Тейлора по $(w-a)$, $|a| > 1$. Радиусы сходимости (при различных z) равны либо $|a|$, либо $|a - \varphi(z)|$. Нижняя регуляризация по z радиуса сходимости по w в каждой точке z не больше, чем сам радиус, причем отличаются они только на множестве емкости нуль. Используя это свойство и произвольность центра разложения a , нетрудно показать, что $\arg \varphi(z)$ является непрерывной функцией. Рассматривая вместо преобразования $w \rightarrow 1/w$ другие дробно-линейные преобразования \mathbb{C}_w и повторяя приведенное рассуждение, мы получим, что функция $\varphi(z)$ непрерывна, после чего утверждение теоремы опять следует из теоремы Леви.

Доказательство теоремы 1 в общем случае. По теореме 2, функция φ голоморфно зависит от параметра λ , поэтому в достаточно узком конусе $|z| < r|\lambda|$ особенности функции $f(z, w)$ лежат на множестве $w = \psi(z)$, где ψ — голоморфная функция в малой окрестности точки 0 в \mathbb{C}_z^{n-1} . Пусть $p(z)$ — многочлен Тейлора второй степени для функции ψ в нуле. $\psi(z) = p(z) + z^3 \psi_1(z)$, где ψ_1 — тоже голоморфна в окрестности $z=0$. Сделаем биголоморфное преобразование координат $(z, w) \rightarrow (z, w - p(z) + \psi(0))$ (а функцию будем по-прежнему обозначать через $f(z, w)$). Тогда при каждом фиксированном z особенность f будет в точке $(z, h(z))$, где $h(z) = \alpha + \psi(z) + p(z)$, $\alpha = \psi(0)$ и $|h(z) - \alpha| < C|z|^3$ в некоторой окрестности $z=0$. Сделав еще одно преобразование $(z, w) \rightarrow (z/w, 1/w)$, мы получаем, что достаточно разобрать случай, когда функция $f = f(z, w)$ голоморфна в области $U = \{(z, w) : |w| > \sqrt{1 + |z|^2}\}$ и для любого фиксированного z , $|z| < r$, функция $f(z, w)$ голоморфна в $\mathbb{C}_w \setminus \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ голоморфна в $|z| < r$ и

$$|\varphi(z) - \alpha| < C|z|^3, \quad (1)$$

где $\alpha = \varphi(0)$ и C — абсолютная константа.

Положим $g(w) = w(w - \alpha)$ и заметим, что вне круга $\{|w| \leq 1 + |z|\}$ для любого фиксированного $z \in \mathbb{C}$ функцию f можно разлагать в ряд Лорана — Якоби по степеням полинома $g(w)$:

$$f(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z, w) / g^n(w), \quad (2)$$

коэффициенты которого

$$a_n(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1+|z|} f(z, \eta) g^{n-1}(\eta) \frac{g(\eta) - g(w)}{\eta - w} d\eta \quad (3)$$

являются, очевидно, голоморфными функциями во всем пространстве (см. (2)).

Оценим $|a_n(z, w)|$ с учетом того, что $|f| < C_2$ и

$$|g(w)| < C_1(1+|w|)^2 \text{ и } \frac{g(\eta) - g(w)}{\eta - w} = \eta + w - \alpha$$

в области U .

Из (3) следует, что

$$|a_n(z, w)| \leq C_3(1+|z|)^{2n}(1+|w|). \quad (4)$$

Следовательно, по теореме Лиувилля, $a_n(z, w)$ является многочленом степени $\leq 2n$ по z и степени ≤ 1 по w . Уточним теперь оценку (4) при $|z| < \varepsilon$. Тогда из (1) имеем $|\varphi(z) - \alpha| < C\varepsilon^3$, т. е. f голоморфна вне лимнискаты $|w(w - \alpha)| < C\varepsilon^3$. Таким образом, в формуле (3) при $|z| < \varepsilon$ интеграл можно брать по лимнискате $|g(\eta)| = C\varepsilon^3$. Пусть, далее, $C(\varepsilon) = \max |f|$ на этой лимнискате. Тогда, очевидно,

$$|a_n(z, w)| \leq C(\varepsilon)(C\varepsilon^3)^n(1+|w|).$$

По неравенству Бернштейна—Уолша во всем \mathbb{C}^2 имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |a_n(z, w)| &\leq C(\varepsilon)(C\varepsilon^3)^n \left(\frac{1+|z|}{\varepsilon} \right)^{2n} (1+|w|) = \\ &= C(\varepsilon) \cdot (C\varepsilon)^n (1+|z|)^{2n} (1+|w|). \end{aligned}$$

Таким образом, для общего члена ряда (2) получается оценка

$$\left| \frac{a_n(z, w)}{g^n(w)} \right| \leq \frac{C(\varepsilon)(C\varepsilon)^n (1+|z|)^{2n} (1+|w|)}{|g(w)|^n},$$

из которой следует, что ряд (2) равномерно сходится в области

$$|g(w)| > C_4 \cdot \varepsilon \cdot (1+|z|)^2.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ функция f голоморфно продолжается в $\mathbb{C}^2 \setminus \{g(w) = 0\}$. Возвращаясь к старым переменным, получаем, что исходная функция голоморфна в дополнении к алгебраическому множеству в \mathbb{C}^2 . Так как на каждой прямой $z = \lambda w$, $|\lambda| < r$ это множество имеет лишь одну точку, то (см. (5)) степень этого множества равна 1, т. е. множество особенностей f —линейное.

В заключение приношу глубокую благодарность А. А. Гончару и Е. М. Чирке за помощь в работе.

Ереванский электротехнический завод

Министерства электротехнической промышленности СССР

Մ. Վ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Առանձնահատուկ եզակի կետերով ֆունկցիայի հոլոմորֆ շարունակելիության մասին \mathbb{C}^n -ում

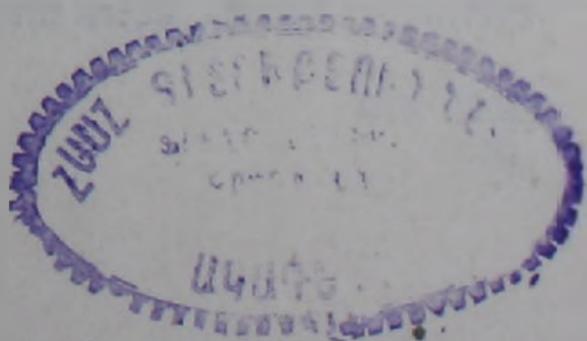
Հոդվածում դիտարկվում են \mathbb{C}^n , $n > 1$ տարածության որևէ տիրույթում հոլոմորֆ ֆունկցիաներ, որոնք ըստ փոփոխականներից մեկի, հոլոմորֆ շարունակվում են համապատասխան կոմպլեքս հարթությունում, բացառությամբ միակ եզակի կետի:

Ստացված է այդպիսի ֆունկցիաների եզակի կետերի բազմության անա-

լիտիկության մասին թեորեմ, որը Հևիի դասական թեորեմի ընդհանրացումն է:
Հիմնական թեորեմը կոնկրետ տիրույթի դեպքում պնդում է, որ այդ-
պիսի ֆունկցիան կարելի է հոլոմորֆ շարունակել ամբողջ \mathbb{C}^n տարածու-
թյուն, բացի որևէ գծային ֆունկցիայի զրոներից:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В. С. Владимиров, Методы теории функций многих комплексных переменных, М., Наука, 1964. ² М. В. Казарян, ДАН АрмССР, т. 67, № 2 (1978). ³ Е. М. Чирка, Мат. сб., т. 100 (142), № 1 (1976). ⁴ Б. В. Шабат, Введение в комплексный анализ, М., Наука, 1976. ⁵ Д. Мамфорд, Алгебраическая геометрия, Мир, М., 1979.



УДК 517.535.4

МАТЕМАТИКА

Т. В. Тарарыкова

Абстрактные интерференционные теоремы

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракелянном 8/V 1982)

В настоящей статье рассматриваются вопросы, посвященные явлению интерференции, впервые обнаруженному С. Н. Бернштейном ⁽¹⁾ и в дальнейшем изучавшемуся рядом авторов (см., например, ⁽²⁻⁵⁾) для операторов, действующих в банаховых пространствах.

Пусть X — банахово пространство. $A_j: X \rightarrow X$ — линейные ограниченные операторы ($j=1, \dots, n$), причем $A_k A_l = A_l A_k$ ($k, l=1, \dots, n$); $T_j(t)e^{iA_j t}$ ($t \in R$) — группы операторов, порождаемые операторами A_j . Положим $\alpha_j(t) = \sup_{|h| \leq |t|} \|T_j(h)\|$ ($t \in R, j=1, \dots, n$). При каждом $j=1, \dots, n$

функция $\alpha_j(t)$ непрерывна на R , четна, монотонно возрастает при $t \geq 0$ и удовлетворяет следующим условиям: $1 \leq \alpha_j(t) \leq e^{\|A_j\|t}$, $\alpha_j(t_1 + t_2) \leq \alpha_j(t_1)\alpha_j(t_2)$. Обозначим через M_α класс борелевских мер μ на R^n таких, что $\|\mu\|_\alpha = \int_{R^n} \alpha(s) |\mu(ds)| < \infty$, где $\alpha(s) = \alpha_1(s_1) \dots \alpha_n(s_n)$. Полагая $T(s) = \prod_{j=1}^n T_j(s_j) = e^{i(A_1 s_1 + \dots + A_n s_n)}$, определим свертку $\mu * x$ для $\mu \in M_\alpha$,

$x \in X: \mu * x = \int_{R^n} T(-s)x \mu(ds)$.

Ниже рассматривается преобразование Фурье $\hat{\mu}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \times$

$\int_{R^n} e^{-i\lambda t} \mu(dt)$ меры $\mu \in M_\alpha$ и ряд Фурье функции $(2\pi)^{n/2} e^{i\lambda t} \hat{\mu}(\lambda) \sim$

$\sim \sum_{k \in Z^n} a_k(t) e^{i\lambda k} \quad t \in R^n, \lambda \in Q$, где $Q = \{\lambda \in R^n, |\lambda_j| < \pi, j=1, \dots, n\}$, $a_k(t) =$

$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_Q \hat{\mu}(\lambda) e^{i\lambda(t-k)} d\lambda$. Предположим, что $\{a_k\} \in l_\alpha: \sum_{k \in Z^n} |a_k(t)| \alpha(k) < \infty$

при $t \in R^n$, следовательно,

$(2\pi)^{n/2} e^{i\lambda t} \hat{\mu}(\lambda) = \sum_{k \in Z^n} a_k(t) e^{i\lambda k}, \lambda \in \bar{Q} = \{\lambda \in R^n, |\lambda_j| \leq \pi, j=1, \dots, n\}$.

Теорема 1. Пусть спектральные радиусы операторов A_j $r(A_j) < \pi$. Тогда, если $\alpha(t) \leq \sum C \prod_{j=1}^n (1+|t_j|)^M$ для некоторых $C > 0$ и $M \geq 0$, то

1) для любой функции $\eta(\lambda) \in C_0^\infty(Q)$, $\eta(\lambda) = 1$ на $Q_1 = \{\lambda \in R^n, |\lambda_j| < r(A_j), j=1, \dots, n\}$

$$T(t)x = \sum_{k \in Z^n} c_k(t) T(k)x, \quad t \in R^n, \quad (1)$$

где $c_k(t)$ — коэффициенты Фурье функции $(2\pi)^{n/2} e^{i\lambda t} \eta(\lambda)$;

2) для любого $0 < \varepsilon < 1$ существуют такие функции $b_k(t) = b_{k\varepsilon}(t)$ ($k \in Z^n, t \in R^n$), что $|b_k(t)| \leq c(t) e^{-|k|^\varepsilon}$, где $c(t)$ не зависит от k и $T(t)x = \sum_{k \in Z^n} b_k(t) T(k)x$;

3) если $\mu \in M_\alpha$, $\{a_k\} \in l_\alpha$, то

$$T(t)\mu * x = \sum_{k \in Z^n} a_k(t) T(k)x, \quad (t \in R^n). \quad (2)$$

В частности, если μ есть мера Дирака, сосредоточенная в нуле, то

$$T(t)x = \sum_{k \in Z^n} \frac{\sin \pi(t_1 - k_1) \dots \sin \pi(t_n - k_n)}{\pi(t_1 - k_1) \dots \pi(t_n - k_n)} T(k)x.$$

Будем говорить, что $\alpha \in F$, если $\alpha_j(u) \leq e^{\sigma_j(u)}$ ($j=1, \dots, n$), $u \in R$, где функции $\sigma_j(u)$ непрерывны, четны, выпуклы, монотонно возрастают при $u \geq 0$ и $\int_0^\infty \frac{\sigma(u)}{1+u^2} du < \infty$.

Теорема 2. Пусть $r(A_j) \leq \pi$ ($j=1, \dots, n$). Если $\alpha \in F$, $\mu \in M_\alpha$, $\{a_k\} \in l_\alpha$, то справедливо равенство (2).

Теорема 3. Пусть $\pi < r(A_j) < 2\pi$ ($j=1, \dots, n$). Тогда

1) если $\alpha \in F$, $\{a_k\} \in l_\alpha$, $\mu \in M_\alpha$, $\hat{\mu}(\lambda) = 0$ при $\lambda \in \bar{Q}_1 \setminus Q_2$, где $Q_1 = \{\lambda \in R^n, |\lambda_j| < r(A_j), j=1, \dots, n\}$, $Q_2 = \{\lambda \in R^n, |\lambda_j| < 2\pi - r(A_j), j=1, \dots, n\}$, то справедливо равенство (2);

2) если $\mu \in M_\alpha$, $\{a_k\} \in l_\alpha$, $\hat{\mu}(\lambda) = 0$ в некоторой окрестности множества $\bar{Q}_1 \setminus Q_2$, то справедливо равенство (2).

Замечание. Если $r(A_j) > 2\pi$ ($j=1, \dots, n$), то в предложениях теоремы 3 равенство (2) принимает вид $T(t)\mu * x = 0$.

Пусть теперь $\Lambda(t) \in X^*$ ($t \in R^n$) — линейный непрерывный функционал, удовлетворяющий условию $\Lambda(0)(T(t)x) = \Lambda(t)(T(0)x)$. Применяя функционал к равенству (1), учитывая его непрерывность, получим, что

$$\Lambda(t)x = \Lambda(0)T(t)x = \Lambda(0)\left(\sum_{k \in Z^n} c_k(t) T(k)x\right) = \sum_{k \in Z^n} c_k(t) \Lambda(k)x.$$

Аналогично, можно применять $\Lambda(0)$ и к равенству (2).

Таким образом, справедливо следующее

Следствие. В предположениях теорем 1–3 выполняются равенства:

$$\Lambda(t)x = \sum_{k \in Z^n} c_k(t) \Lambda(k)x; \quad (1')$$

$$\Lambda(t)\mu * x = \sum_{k \in Z^n} a_k(t) \Lambda(k)x. \quad (2')$$

Ниже рассматривается вопрос о справедливости неравенств:

$$\|\Lambda(t)x\|_{L_{q,\gamma}(R^n)} \leq K \|\Lambda(k)x\|_{l_{p,\beta}} \quad (3)$$

$$\|\Lambda(t)\mu * x\|_{L_{q,\gamma}(R^n)} \leq K \|\Lambda(k)x\|_{l_{p,\beta}} \quad (4)$$

где $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\gamma(t)$ — непрерывная положительная в R^n функция, $\beta(k) = (\{\beta_k\}_{k \in Z^n}, \beta_k > 0)$.

Если $K = \inf_{\substack{\tau \in C_0^\infty(Q) \\ \tau=1 \text{ на } Q_1}} \|C\|_{l_p \rightarrow L_q} < \infty$, где C — оператор, определенный равен-

ством $C(\{g_k\})(t) = \sum_{k \in Z^n} \frac{c_k(t)\gamma(t)}{\beta_k} g_k$, $c_k(t)$ — коэффициенты Фурье функции $(2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{i\lambda t} \eta(\lambda)$,

$$\|C\|_{l_p \rightarrow L_q} = \sup_{\{g_k\} \neq 0} \frac{\left\| \sum_{k \in Z^n} \frac{c_k(t)\gamma(t)}{\beta_k} g_k \right\|_{L_q(R^n)}}{\|g_k\|_{l_p}},$$

то справедлива

Теорема 4. Пусть $r(A_j) < \pi$ ($j=1, \dots, n$). Тогда

$$\|\Lambda(t)x\|_{L_{q,\gamma}(R^n)} \leq K \|\Lambda(k)x\|_{l_{p,\beta}}$$

Следствие. Пусть $r(A_j) < \pi$ ($j=1, \dots, n$). Тогда

$$\sup_{t \in R^n} |\Lambda(t)x| \leq \left(\prod_{j=1}^n \frac{r(A_j)}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k \in Z^n} |\Lambda(k)x|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

причем константа $\left(\prod_{j=1}^n \frac{r(A_j)}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$ — точная.

Теорема 5. В предположениях пункта 3 теоремы 1, теоремы 2 и пунктов 1, 2 теоремы 3 имеем

$$\|\Lambda(t)\mu * x\|_{L_{q,\gamma}(R^n)} \leq \|C\|_{l_p \rightarrow L_q} \|\Lambda(k)x\|_{l_{p,\beta}}$$

Следствие.

$$\sup_{t \in R^n} |\Lambda(t)\mu * x| \leq \|\hat{\mu}\|_{L_2(Q)} \left(\sum_{k \in Z^n} |\Lambda(k)x|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Воронежский государственный университет

Տ. Վ. ՏԱՐԱՐԻԿՈՎԱ

Աբստրակտ ինտեգրեկոնսերվանտներ

Ստացված են U . Կարտրայտի և U . Ն. Բերնշտեյնի վերջավոր աստիճանի ամբողջ ֆունկցիաների մասին թեորեմների արտրակտ անալոզները և ընդհանրացումները:

Թող X -ը լինի բանախի տարածություն և $A_j: X \rightarrow X$ ($j=1, \dots, n$) զույգ առ զույգ տեղափոխիչ սահմանափակ օպերատորներ: Նշանակենք

$$T_j(s_j) = e^{iA_j s_j} (s_j \in R), \quad T(s) = \prod_{j=1}^n T_j(s_j) \quad (s \in R^n),$$

$$\mu * x = \int_{\mathbb{R}^n} T(-s)x \mu(ds), \quad \alpha_j(s) = \sup_{|h| \leq |s|} \|T_j(h)\|, \quad \alpha(s) = \prod_{j=1}^n \alpha_j(s_j),$$

որտեղ μ -ն \mathbb{R}^n -ում այնպիսի բորելյան չափ է, որ՝

$$\|\mu\|_\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(s) |\mu(ds)| < \infty:$$

Ստացված են $T(t)x = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(t) T(k)x$, երբ $r(A_j) < \pi$ և $T(t)\mu * x = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(t) T(k)x$, երբ $r(A_j) \leq \pi$ ներկայացումները, ինչպես նաև μ -ի վրա

համապատասխան ենթադրությունների դեպքում ներկայացումներ, երբ $\pi < r(A_j) \leq 2\pi$: Ելնելով այդ ներկայացումներից ստացված են հետևյալ տիպի գնահատականներ

$$\|\Lambda(t)x\|_{L_{q_x}(\mathbb{R}^n)} \leq B_{p,q} \|\Lambda(k)\|_{l_{p,3}}; \quad \|\Lambda(t)\mu * x\|_{L_{q,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq B_{p,q} \|\Lambda(k)x\|_{l_{p,3}},$$

երբ $1 \leq p \leq q \leq \infty$, որտեղ $\Lambda(t)$ -ն $\Lambda(t)x = \Lambda(0)T(t)x = T(t)\Lambda(0)x$ պայմանին բավարարող ֆունկցիոնալ է: p -ի և q -ի որոշ արժեքների համար $B_{p,q}$ հաստատունը ճշգրիտ է:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. Н. Бернштейн, Перенесение свойств тригонометрических полиномов на целые функции конечной степени. Соч., т. 2, 1949. ² Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, Наука, М., 1965. ³ Б. Я. Левин, День Тхань Хоа, Функц. анализ и его прилож., т. 3, вып. 1 (1969). ⁴ R. P. Boas, Michigan Math. Journal, 3, 123—132, 1955—1956. ⁵ А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, Физматгиз, М., 1960.

УДК 62.507

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Ш. Е. Бозоян

Алгебраическое описание направленных графов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 5/VI 1982)

Язык бесскобочной записи выражений Лукасевича ⁽¹⁾ можно использовать для описания входящих и выходящих деревьев ⁽²⁾, поскольку выражению может быть поставлено в соответствие входящее (или выходящее) дерево и это соответствие взаимно-однозначно. Однако для описания направленных графов в общем случае данный язык непригоден.

В настоящей работе обобщается язык Лукасевича, который приспособляется к описанию конечных направленных графов вообще.

Рассмотрим счетное множество $I = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, элементы которого назовем „вершинами“, а элементы множества I^2 — „дугами“. Определим понятие направленного графа (в дальнейшем — граф).

Определение. Базис индукции. Упорядоченная тройка $\langle X = \{x\}, \Gamma = \emptyset, Y \rangle$, где $X \subset I$, а Y — упорядочение вершин из X , их исходов и заходов относительно конкретных вхождений дуг из Γ (см. п. 2 индуктивного перехода настоящего определения), является графом. В данном случае содержание Y заключается в том, что вершине x приписывается некоторый номер n (n — натуральное число), а ее исходам и заходам — нулевые номера.

Индуктивный переход 1) Если $G' = \langle X', \Gamma, Y' \rangle$ — граф ($X' \subset I$, $\Gamma \subset I^2$, в Γ допускается повторение элементов), то $G = \langle X, \Gamma, Y \rangle$ также является графом, где $X = X' \cup \{x\}$ ($x \in I \setminus X'$), а Y получается из Y' следующим образом: вершине x приписывается номер, который не был приписан вершинам X' , а нумерация остальных вершин, их исходов и заходов остается неизменной. Вершине x приписываются нулевые номера исходов и заходов.

2) Если $G' = \langle X, \Gamma', Y' \rangle$ — граф, то $G = \langle X, \Gamma, Y \rangle$ также является графом, где $\Gamma = \Gamma' \cup \{\langle x_1, x_2 \rangle\}$ ($x_1, x_2 \in X$, x_1 и x_2 обязательно различны), а Y получается из Y' следующим образом: данному вхождению дуги $\langle x_1, x_2 \rangle$ приписывается номер исхода вершины x_1 и номер захода вершины x_2 ; вершине x_1 приписывается номер исхода, превышающий на 1 номера исхода x_1 относительно вхождения дуги $\langle x_1, x \rangle$ в Γ' (x обязательно отлична от x_2), имеющей максимальный номер исхода; вершине x_2 приписывается номер захода, превышающий на 1 номера захода x_2 относительно дуги $\langle x, x_2 \rangle$ в Γ' (x обязательно отлична от x_1), имеющей мак-

симальный номер захода. Если Γ' не содержит дугу вида $\langle x_1, x \rangle$ ($\langle x, x_2 \rangle$), то вершине x_1 (x_2) приписывается номер исхода (захода) 1.

3) Пусть $G' = \langle X, \Gamma, Y' \rangle$ — граф и $\langle x_1, x \rangle, \langle x_1, x' \rangle \in \Gamma$ (x и x' необязательно различны) являются конкретными вхождениями дуг в Γ , относительно которых по Y' вершине x' приписаны номера исхода i и j , соответственно. Если „поменять местами“ номера i и j , т. е. вершине x_1 относительно указанного вхождения дуги $\langle x_1, x \rangle$ приписать номер исхода j , а относительно дуги $\langle x_1, x' \rangle$ — номер исхода i , то полученная тройка $G = \langle X, \Gamma, Y \rangle$, где Y новое упорядочение в соответствии с вышеуказанным изменением номеров исходов вершины x_1 , является графом.

Графы G и G' называются изоморфными.

4) Пусть $G' = \langle X, \Gamma, Y' \rangle$ — граф, и $\langle x, x_2 \rangle, \langle x', x_2 \rangle \in \Gamma$ (x и x' необязательно различны) являются конкретными вхождениями дуг в Γ , относительно которых по Y' вершине x_2 приписаны номера захода i и j соответственно. Если „поменять местами“ номера i и j , т. е. вершине x_2 относительно указанного вхождения дуги $\langle x, x_2 \rangle$ приписать номер захода j , а относительно дуги $\langle x', x_2 \rangle$ — номер захода i , то полученная тройка $G = \langle X, \Gamma, Y \rangle$, где Y новое упорядочение в соответствии с вышеуказанным изменением номеров заходов вершины x_2 , является графом.

Графы G и G' называются изоморфными.

5) Пусть $G' = \langle X, \Gamma, Y' \rangle$ — граф, и $x_1, x_2 \in \Gamma$. Пусть вершинам x_1 и x_2 по Y' приписаны номера n и m соответственно. Если вершине x_1 сопоставить номер m , вершине x_2 — номер n , а номера остальных вершин оставить без изменения, то полученная тройка $G = \langle X, \Gamma, Y \rangle$, где Y упорядочение, полученное из Y' в соответствии с вышеуказанным изменением номеров вершин x_1 и x_2 , также является графом.

Графы G и G' называются изоморфными.

Для построения языка описания графа перечислим средства, позволяющие кодировать любой граф конечной последовательностью символов. Фиксируем множество $M = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ и с помощью его элементов построим объекты типов $n_e^{0(a,b)}$ и $n_e^{(a,b)}$, где $n, a, b, e \in M$, $0 \leq e \leq b$, и конечные последовательности $s_1 s_2 \dots s_N$ из этих объектов. В дальнейшем эти объекты будем называть *символами*. Символам сопоставим *веса* следующим образом: $\omega(n_e^{0(a,b)}) = a - 1$, $\omega(n_e^{(a,b)}) = -1$. Весом последовательности символов $s_1 s_2 \dots s_N$ назовем сумму весов этих символов

$$\omega(s_1 s_2 \dots s_N) = \sum_{k=1}^N \omega(s_k).$$

Описанием символа $n_e^{0(a,b)}$ в последовательности $s_1 s_2 \dots s_N$ называется минимальный отрезок этой последовательности с весом -1 , началом которого является $n_e^{0(a,b)}$. В описании символа $n_e^{0(a,b)}$ минимальный отрезок с весом -1 , непосредственно следующий за символом $n_e^{0(a,b)}$, называется *первой компонентой* этого описания. Следующий за

первой компонентой минимальный отрезок с весом -1 называется второй компонентой и т. д. Тройка $\langle n, a, b \rangle$ называется параметром вершины x в данном графе G , если n —номер этой вершины, a —число заходов, а b —число исходов этой вершины. Выражение

$$[s_1 s_2 \dots s_N]_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k}^{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k}$$

означает результат подстановки символов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ вместо $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ соответственно в последовательности $s_1 s_2 \dots s_N$.

Определим понятие записи графа. Запись графа G обозначим $h(G)$.

Определение. Базис индукции. Если $G = \langle \{x\}, \emptyset, Y \rangle$ и вершине x в G приписан номер n , то $h(G) = n_0^{(0,0)}$.

Индуктивный переход. 1) Если граф G получается из G' согласно п. 1 индуктивного перехода определения графа, и вершине x в G приписан номер n , то

$$h(G) = h(G') n_0^{(0,0)}.$$

2) Пусть определена запись $h(G')$, и G получается из G' согласно п. 2 индуктивного перехода определения графа, где вершины x_1 и x_2 в G' имеют параметры $\langle n, a, b \rangle$ и $\langle m, c, d \rangle$ соответственно. Рассмотрим следующие возможные случаи:

а) $x_1 \neq x_2$ и $h(G')$ содержит символ $n_0^{(a,b)}$. Тогда в $h(G')$ описание символа перемещается и помещается в конце описания символа $m_f^{(c,d)}$, затем символ $n_0^{(a,b)}$ заменяется символом $n_{b+1}^{(a,b+1)}$, все символы $n_e^{(a,b)}$ ($0 \leq e \leq b$) заменяются на $n_e^{(a,b+1)}$ соответственно, а символы $m_f^{(c,d)}$ и $m_f^{(c,d)}$ ($0 \leq f \leq d$)—на $m_f^{(c+1,d)}$ и $m_f^{(c+1,d)}$ соответственно. Далее, если полученная таким путем из $h(G')$ последовательность содержит символ $k_r^{(g,h)}$, предшествующий некоторому символу $k_r^{(g,h)}$ в этой последовательности, то $k_r^{(g,h)}$ заменяется на $k_r^{(g,h)}$, за $k_r^{(g,h)}$ приписывается отрезок последовательности символов, полученной из описания символа $k_r^{(g,h)}$ исключением этого символа, а описание символа $k_r^{(g,h)}$ заменяется символом $k_r^{(g,h)}$. Последняя процедура производится многократно до тех пор, пока возможно ее осуществлять. Полученная последовательность символов является $h(G)$.

б) $x_1 \neq x_2$ и $h(G')$ не содержит символ $n_0^{(a,b)}$ (следовательно содержит символ $n_e^{(a,b)}$, где $e \neq 0$). Тогда в $h(G')$ в конце описания символа $m_f^{(c,d)}$ прибавляется новый символ $n_{b+1}^{(a,b+1)}$, а затем все символы $n_e^{(a,b)}$, $n_{e'}^{(a,b)}$ ($0 \leq e, e' \leq b$), $m_f^{(c,d)}$ и $m_{f'}^{(c,d)}$ ($0 \leq f, f' \leq d$) заменяются символами $n_e^{(a,b+1)}$, $n_{e'}^{(a,b+1)}$, $m_f^{(c+1,d)}$ и $m_{f'}^{(c+1,d)}$ соответственно. Полученная последовательность символов является $h(G)$.

в) $x_1 = x_2$. В $h(G')$ в конце описания символа $n_e^{(a,b)}$ прибавляется символ $n_{b+1}^{(a+1,b+1)}$, а символы $n_e^{(a,b)}$ и $n_{e'}^{(a,b)}$ ($0 \leq e, e' \leq b$) заменяются символами $n_e^{(a+1,b+1)}$ и $n_{e'}^{(a+1,b+1)}$ соответственно. Полученная последовательность символов является $h(G)$.

3) Пусть определена запись $h(G')$ и G получается из G' соглас-

но п.3 индуктивного перехода определения графа. Пусть в G' вершина x_1 имеет параметр $\langle n, a, b \rangle$. В $h(G')$ символ $n_i^{(a,b)}$ (или $n_i^{0(a,b)}$) заменяется на $n_j^{(a,b)}$ (соответственно на $n_j^{0(a,b)}$), а символ $n_j^{(a,b)}$ (или $n_j^{0(a,b)}$) — на $n_i^{(a,b)}$ (соответственно на $n_i^{0(a,b)}$). Полученная последовательность символов является $h(G)$.

Записи $h(G')$ и $h(G)$ называются эквивалентными.

4) Пусть определена запись $h(G')$ и G получается из G' согласно п.4 индуктивного перехода определения графа. Пусть в G' вершина x_2 имеет параметр $\langle m, c, d \rangle$. В $h(G')$ компоненты описания символа $m_f^{0(c,d)}$ с номерами i и j поменяются местами (т. е. i -я компонента пишется на месте j -ой компоненты, j -я компонента — на месте i -ой компоненты). Далее, если полученная таким путем из $h(G')$ последовательность содержит символ $n_e^{(a,b)}$, предшествующий некоторому символу $n_{e'}^{0(a,b)}$ в этой последовательности, то $n_e^{(a,b)}$ заменяется на $n_{e'}^{0(a,b)}$, за $n_{e'}^{0(a,b)}$ приписывается отрезок последовательности символов, полученный из описания символа $n_{e'}^{0(a,b)}$ устранением самого символа $n_{e'}^{0(a,b)}$, а описание символа $n_{e'}^{0(a,b)}$ заменяется символом $n_e^{(a,b)}$. Последняя процедура производится многократно до тех пор, пока возможно ее осуществлять. Полученная последовательность символов является $h(G)$.

Записи $h(G')$ и $h(G)$ называются эквивалентными.

5) Пусть определена запись $h(G')$ и G получается из G' согласно п.5 индуктивного перехода определения графа, где вершины x_1 и x_2 имеют параметры $\langle n, a, b \rangle$ и $\langle m, c, d \rangle$ соответственно. В $h(G')$ символы $n_e^{0(a,b)}$ и $n_{e'}^{(a,b)}$ ($0 \leq e, e' \leq b$) заменяются на $m_e^{0(a,b)}$ и $m_{e'}^{(a,b)}$ соответственно, а символы $m_f^{0(c,d)}$ и $m_{f'}^{(c,d)}$ ($0 \leq f, f' \leq d$) — на $n_f^{0(c,d)}$ и $n_{f'}^{(c,d)}$ соответственно. Полученная последовательность символов является $h(G)$.

Записи $h(G')$ и $h(G)$ называются эквивалентными.

Теорема. Для того чтобы последовательность символов

$$s_1 s_2 \dots s_N \quad (1)$$

являлась записью некоторого графа, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) $\omega(s_1 s_2 \dots s_N) = -m$, где m число символов типа $n_0^{0(a,b)}$ в (1);
- 2) $\omega(s_1 s_2 \dots s_k) \geq 1 - m$ для любого $k < N$;
- 3) последовательность (1) символы $n_e^{0(a,b)}$ (при некотором единственном e , $0 \leq e \leq b$) и $n_{e'}^{(a,b)}$ ($b > 0$, $e' \in \{1, 2, \dots, b\} \setminus \{e\}$) содержит или не содержит одновременно, причем каждый точно один раз, и $n_e^{0(a,b)}$ предшествует в (1) всем $n_{e'}^{(a,b)}$; в случае $b = 0$ $n_0^{0(a,0)}$ содержится в (1) однократно или вообще не содержится;

4) s_1 является символом типа $n_0^{0(a,b)}$ и вес любого максимального отрезка последовательности (1), началом которого является символ типа $n_0^{0(a,b)}$, а остальные символы отрезка (если они имеются) — не этого типа, равен -1 .

Необходимость доказывається индукцией по построению графа, т. е. по числу применений п. 1—5 индуктивного перехода определения графа. *Достаточность* доказывається по длине N последовательности (1).

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Շ. Ե. ԲՈՋՈՅԱՆ

Կողմնորոշված գրաֆների հանրահաշվական նկարագրությունը

Բանաձևերի՝ առանց փակագծերի գրառման նուկասերի լեզուն ընդհանրացվում և հարմարեցվում է կողմնորոշված գրաֆների՝ տողով նկարագրությունը: Ապացուցվում է թեորեմ, որը նշում է անհրաժեշտ ու բավարար պայմաններ, որպեսզի սիմվոլների տված հաջորդականությունը լինի որևէ կողմնորոշված գրաֆի նկարագրություն:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ *Lukasiewicz*, Sur la formalisation des theories mathematiques, Colloques internationaux du Centre National de la Recherche scientifique, 36, Paris, 1950, 11--19 (1953). ² *Ф. Харари*, Теория графов, Мир, М., 1973.

УДК 536.21

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Р. С. Минасян

О плоском периодическом течении тепла в анизотропном
 призматическом теле

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 16/IV 1982)

В работе ⁽¹⁾ дано решение задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа с неразделяющимися переменными в прямоугольной области. В настоящей статье рассматривается задача плоского периодического течения тепла в бесконечном анизотропном призматическом теле, ограниченном плоскостями $y=0$, $y=d$, $x-\omega y=0$, $x-\omega y=b$, когда имеются внутренние источники тепла, а на границе задано распределение температуры. Функция $U(x, y, t)$ распространения тепла в теле удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению ⁽²⁾:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{c\rho} \left[\lambda_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (\lambda_{12} + \lambda_{21}) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \omega(x, y, t) \right], \quad (1)$$

а также граничным условиям и условию периодичности

$$U(x, 0, t) = S_0(x, t); \quad U(x, d, t) = S_1(x, t); \quad U(\omega y, y, t) = T_0(y, t); \quad (2)$$

$$U(b + \omega y, y, t) = T_1(y, t); \quad U(x, y, t + \theta) = U(x, y, t).$$

Здесь c — теплоемкость, ρ — плотность, $\omega(x, y, t)$ — интенсивность источников тепла, λ_{kj} , представляющие компоненты тензора второго ранга, являются коэффициентами теплопроводности ^(2,3), причем $\lambda_{11} > 0$, $\lambda_{22} > 0$. Предполагаем при этом, что $(\lambda_{12} + \lambda_{21})^2 - 4\lambda_{11}\lambda_{22} < 0$.

Относительно граничных функций $S_j(x, t)$ и $T_j(y, t)$ предполагаем, что они непрерывны в соответствующих областях и почти всюду обладают производной с ограниченной вариацией, а также что $S_0(0, t) = T_0(0, t)$, $S_0(b, t) = T_1(0, t)$, $S_1(\omega d, t) = T_0(d, t)$, $S_1(b + \omega d, t) = T_1(d, t)$. Что касается $\omega(x, y, t)$, то предполагаем, что она удовлетворяет условиям Дирихле.

Прежде чем переходить к построению решения, аффинным преобразованием координат

$$x - \omega y = \xi; \quad \beta y = \eta, \quad (3)$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{\lambda_{11}}{\lambda_{11}}}; \quad \lambda = \lambda_{11} - (\lambda_{12} + \lambda_{21})\omega + \lambda_{22}\omega^2, \quad (4)$$

рассматриваемую область преобразуем в прямоугольник со сторонами b и $d_1 = \beta d$. В этом случае, обозначив

$$U\left(\xi + \frac{\omega\eta}{\beta}, \frac{\eta}{\beta}, t\right) = U^*(\xi, \eta, t); \quad w\left(\xi + \frac{\omega\eta}{\beta}, \frac{\eta}{\beta}, t\right) = w^*(\xi, \eta, t);$$

$$\alpha = \frac{2\omega\lambda_{22} - \lambda_{21} - \lambda_{12}}{2\sqrt{\lambda\lambda_{22}}}, \quad (5)$$

для $U^*(\xi, \eta, t)$ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial U^*}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial \xi^2} - 2\alpha \frac{\partial^2 U^*}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\lambda} w^* \right); \quad a = \frac{\lambda}{c\rho}. \quad (6)$$

Из (4) и (5) легко видеть, что $|\alpha| < 1$. Граничные условия согласно (2) и (5) примут вид

$$U^*(\xi, 0, t) = S_0^*(\xi, t); \quad U^*(\xi, d_1, t) = S_1^*(\xi, t); \quad U^*(0, \eta, t) = T_0^*(\eta, t);$$

$$U^*(b, \eta, t) = T_1^*(\eta, t), \quad (7)$$

где

$$S_0^*(\xi, t) = S_0(\xi, t); \quad S_1^*(\xi, t) = S_1(\xi + \omega d, t); \quad T_0^*(\eta, t) = T_0\left(\frac{\eta}{\beta}, t\right);$$

$$T_1^*(\eta, t) = T_1\left(\frac{\eta}{\beta}, t\right).$$

Применяя к уравнению (6) конечное комплексное преобразование Фурье по времени t , для изображения функции $U^*(\xi, \eta, t)$ получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 U_k}{\partial \xi^2} - 2\alpha \frac{\partial^2 U_k}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U_k}{\partial \eta^2} - \frac{i\delta_k}{a} U_k = -\frac{1}{\lambda} w_k. \quad (8)$$

Здесь

$$U_k(\xi, \eta) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta U^*(\xi, \eta, t) e^{-i\delta_k t} dt; \quad w_k(\xi, \eta) =$$

$$= \frac{1}{\theta} \int_0^\theta w^*(\xi, \eta, t) e^{-i\delta_k t} dt; \quad \delta_k = \frac{2k\pi}{\theta}.$$

При этом согласно формуле обращения (4) переход от изображения к оригиналу осуществляется рядом

$$U^*(\xi, \eta, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(\xi, \eta) e^{i\delta_k t}. \quad (9)$$

Далее, следуя работе (1), представим функцию $U_k(\xi, \eta)$ одновременно в виде двух разложений в ряд

$$U_k(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{\infty} f_{kj}(\xi) \sin \gamma_j \eta = \frac{g_{k0}(\xi)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} g_{kj}(\xi) \cos \gamma_j \eta, \quad (10)$$

где

$$f_{kj}(\xi) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} U_k(\xi, \eta) \sin \gamma_j \eta d\eta; \quad g_{kj}(\xi) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} U_k(\xi, \eta) \cos \gamma_j \eta d\eta; \quad \gamma_j = \frac{j\pi}{d_1}. \quad (11)$$

Для определения $f_{kj}(\xi)$ и $g_{kj}(\xi)$ умножим уравнение (8) поочередно на $\frac{2}{d_1} \sin \gamma_j \eta d\eta$ и $\frac{2}{d_1} \cos \gamma_j \eta d\eta$ и проинтегрируем от 0 до d_1 .

Принимая во внимание граничные условия (7), имеем:

$$f_{kj}''(\xi) + 2\alpha\gamma_j g_{kj}'(\xi) - \left(\gamma_j^2 + \frac{i\delta_k}{a} \right) f_{kj}(\xi) = -\frac{2}{d_1} p_{kj}(\xi); \quad (12)$$

$$g_{kj}''(\xi) - 2\alpha\gamma_j f_{kj}'(\xi) - \left(\gamma_j^2 + \frac{i\delta_k}{a} \right) g_{kj}(\xi) = -\frac{2}{d_1} q_{kj}(\xi).$$

Здесь обозначено:

$$p_{kj}(\xi) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{d_1} \omega_k(\xi, \eta) \sin \gamma_j \eta d\eta + \gamma_j [S_k^{(0)}(\xi) - (-1)^j S_k^{(1)}(\xi)];$$

$$q_{kj}(\xi) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{d_1} \omega_k(\xi, \eta) \cos \gamma_j \eta d\eta + 2\alpha [S_k^{(0)'}(\xi) - (-1)^j S_k^{(1)'}(\xi)] - S_k^{(2)}(\xi) + (-1)^j S_k^{(3)}(\xi); \quad (13)$$

$$S_k^{(0)}(\xi) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta S_0^*(\xi, t) e^{-i\delta_k t} dt; \quad S_k^{(1)}(\xi) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta S_1^*(\xi, t) e^{-i\delta_k t} dt;$$

$$S_k^{(2)}(\xi) = \frac{\partial U_k}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}; \quad S_k^{(3)}(\xi) = \frac{\partial U_k}{\partial \eta} \Big|_{\eta=d_1}.$$

Решая уравнения (12) и удовлетворяя соответствующим граничным условиям для $f_{kj}(\xi)$ и $g_{kj}(\xi)$, получаем:

$$f_{kj}(\xi) = \frac{2 \operatorname{sh} \nu_{kj} (b - \xi)}{d_1 \operatorname{sh} \nu_{kj} b} \left\{ \int_0^{d_1} T_k^{(0)}(\eta) \sin \gamma_j (\eta - \alpha \xi) d\eta + \frac{1}{\nu_{kj}} \int_0^\xi [p_{kj}(\xi_1) \cos \alpha \gamma_j (\xi - \xi_1) - q_{kj}(\xi_1) \sin \alpha \gamma_j (\xi - \xi_1)] \operatorname{sh} \nu_{kj} \xi_1 d\xi_1 \right\} + \frac{2 \operatorname{sh} \nu_{kj} \xi}{d_1 \operatorname{sh} \nu_{kj} b} \left\{ \int_0^{d_1} T_k^{(1)}(\eta) \sin \gamma_j (\alpha b - \alpha \xi + \eta) d\eta + \frac{1}{\nu_{kj}} \int_\xi^b [p_{kj}(\xi_1) \cos \alpha \gamma_j (\xi_1 - \xi) + q_{kj}(\xi_1) \sin \alpha \gamma_j (\xi_1 - \xi)] \operatorname{sh} \nu_{kj} (b - \xi_1) d\xi_1 \right\}; \quad (14)$$

$$g_{kj}(\xi) = \frac{2 \operatorname{sh} \nu_{kj} (b - \xi)}{d_1 \operatorname{sh} \nu_{kj} b} \left\{ \int_0^{d_1} T_k^{(0)}(\eta) \cos \gamma_j (\eta - \alpha \xi) d\eta + \frac{1}{\nu_{kj}} \int_0^\xi [p_{kj}(\xi_1) \sin \alpha \gamma_j (\xi - \xi_1) + \right.$$

$$+q_{kj}(\xi_1)\cos\alpha\gamma_j(\xi-\xi_1)]\operatorname{sh}\nu_{kj}\xi_1 d\xi_1 \left. \right\} + \frac{2\operatorname{sh}\nu_{kl}\xi}{d_1\operatorname{sh}\nu_{kl}b} \left\{ \int_0^{d_1} T_k^{(l)}(\eta)\cos\gamma_j(ab-a\xi+\eta)d\eta - \right. \\ \left. - \frac{1}{\nu_{kl}} \int_{\xi}^b [p_{kj}(\xi_1)\sin\alpha\gamma_j(\xi_1-\xi) - q_{kj}(\xi_1)\cos\alpha\gamma_j(\xi_1-\xi)]\operatorname{sh}\nu_{kl}(b-\xi_1)d\xi_1 \right\},$$

где

$$\nu_{kj} = \left[(1-\alpha^2)\gamma_j^2 + \frac{i\delta_k}{a} \right]^{\frac{1}{2}}; \quad T_k^{(l)}(\eta) = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} T_l^*(\tau, t)e^{-i\delta_k t} dt \quad (l=0; 1). \quad (15)$$

Как видно из (14) и (13), в выражения для $f_{kj}(\xi)$ и $g_{kj}(\xi)$ входят неизвестные значения $S_k^{(2)}(\xi)$ и $S_k^{(3)}(\xi)$. Для их определения потребуем, чтобы вторым представлением (10) функции $U_k(\xi, \eta)$ также выполнялись граничные условия задачи на $\eta=0$ и $\eta=d_1$:

$$\frac{g_{k0}(\xi)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} g_{kj}(\xi) = S_k^{(0)}(\xi); \quad \frac{g_{kd}(\xi)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j g_{kj}(\xi) = S_k^{(1)}(\xi). \quad (16)$$

Умножим оба уравнения (16) на $\frac{2}{b} \sin\tilde{\alpha}_l \xi d\xi$, где $\tilde{\alpha}_l = \frac{l\pi}{b}$, и проинтегрируем от 0 до b . Замечая, что ряды (16) сходятся в $(0, b)$ равномерно, вследствие чего возможна перестановка знаков суммы и интеграла, после некоторых преобразований получим

$$n_{kl}^{(\nu)} = -4\alpha^2 \tilde{\alpha}_l^2 \tau_{kl} \frac{\operatorname{ch}\tau_{kl}d_1 - (-1)^\mu \cos\alpha\tilde{\alpha}_l d_1}{d_1 \operatorname{sh}\tau_{kl}d_1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{j+\mu}] m_{hj}^{(l)}}{\left(\gamma_j^2 + \tilde{\alpha}_l^2 + \frac{i\delta_k}{a} \right)^2 - 4\alpha^2 \gamma_j^2 \tilde{\alpha}_l^2} + Q_{kl}^{(\mu)}. \quad (17)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$n_{kl}^{(\mu)} = 2\delta_k \tilde{\alpha}_l \int_0^b [S_k^{(2)}(\xi) - (-1)^\mu S_k^{(3)}(\xi)] \sin\tilde{\alpha}_l \xi d\xi; \quad m_{kj}^{(l)} = \delta_k \gamma_j d_1 [f'_{kj}(0) - (-1)^j f'_{kj}(b)];$$

$$Q_{kl}^{(\mu)} = -2\delta_k \tau_{kl} \frac{\operatorname{ch}\tau_{kl}d_1 - (-1)^\mu \cos\alpha\tilde{\alpha}_l d_1}{\operatorname{sh}\tau_{kl}d_1} \left[\frac{1}{\theta(a\tilde{\alpha}_l^2 + i\delta_k)} \int_0^{\theta} e^{-i\delta_k t} \frac{\partial}{\partial t} (S_0^*(0, t) - \right. \\ \left. - (-1)^l S_0^*(b, t) + (-1)^\mu S_1^*(0, t) - (-1)^{\mu+l} S_1^*(b, t)) dt + \int_0^b (S_k^{(0)'}(\xi) + (-1)^\mu \times \right. \\ \left. \times S_k^{(1)'}(\xi)) \cos\alpha\tilde{\alpha}_l \xi d\xi \right] + \frac{2\delta_k \tilde{\alpha}_l}{\operatorname{sh}\tau_{kl}d_1} \left\{ \frac{a}{a\tilde{\alpha}_l^2 + i\delta_k} \int_0^{d_1} [T_k^{(0)'}(\eta) - (-1)^l T_k^{(1)'}(\eta)] \left[\alpha \left(\tilde{\alpha}_l^2 + \frac{2i\delta_k}{a} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\sin\alpha\tilde{\alpha}_l \eta \operatorname{sh}\tau_{kl}(d_1 - \eta) - (-1)^\mu \sin\alpha\tilde{\alpha}_l (d_1 - \eta) \operatorname{sh}\tau_{kl}\eta) + \tau_{kl} \tilde{\alpha}_l (\cos\alpha\tilde{\alpha}_l \eta \operatorname{ch}\tau_{kl}(d_1 - \eta) - \right. \right. \\ \left. \left. - (-1)^\mu \cos\alpha\tilde{\alpha}_l (d_1 - \eta) \operatorname{ch}\tau_{kl}\eta) \right] d\eta + \frac{1}{\lambda} \int_0^b \int_0^{d_1} \omega_k(\xi, \eta) [\sin\tilde{\alpha}_l (a\eta + \xi) \operatorname{sh}\tau_{kl}(d_1 - \eta) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -(-1)^\mu \sin \alpha_{kl} (x d_1 - x \eta - \xi) \operatorname{sh} \tau_{kl} \gamma_l \Big| d \eta d \xi + \left(\alpha \operatorname{sh} \tau_{kl} d_1 + \right. \\
& \left. + (-1)^\mu \frac{\tau_{kl}}{\zeta_l} \sin \alpha_{kl} d_1 \right) \int_0^b [S_k^{(0)'}(\xi) - (-1)^\mu S_k^{(1)'}(\xi)] \sin \alpha_{kl} \xi d \xi; \quad \tau_{kl} = \left[(1 - \alpha^2) \zeta_l^2 + \frac{i \delta_k}{a} \right]^{1/2}.
\end{aligned} \quad (18)$$

В свою очередь, $m_{kl}^{(0)}$ и $m_{kl}^{(1)}$ согласно (18) и (14) определяются из следующих соотношений:

$$m_{kl}^{(l)} = -4 \alpha \gamma_j^2 \nu_{kj} \frac{\operatorname{ch} \nu_{kj} b - (-1)^l \cos \alpha \gamma_j b}{b \operatorname{sh} \nu_{kj} b} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{l+\mu}] n_{kl}^{(j)}}{\left(\zeta_j^2 + \gamma_j^2 + \frac{i \delta_k}{a} \right)^2 - 4 \alpha^2 \gamma_j^2 \nu_{kj}^2} + P_{kl}^{(l)}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
\text{где } P_{kl}^{(l)} = & -2 \delta_k \nu_{kj} \frac{\operatorname{ch} \nu_{kj} b - (-1)^l \cos \alpha \gamma_j b}{\operatorname{sh} \nu_{kj} b} \left[\frac{1}{\theta (\alpha \gamma_j^2 + i \delta_k)} \int_0^{\theta} e^{-i \delta_k t} \frac{\partial}{\partial t} (S_0^*(0, t) - \right. \\
& \left. - (-1)^l S_1^*(0, t) + (-1)^l S_0^*(b, t) - (-1)^{j+l} S_1^*(b, t)) dt + \right. \\
& \left. + \int_0^{d_1} (T_k^{(0)'}(\eta) + (-1)^l T_k^{(1)'}(\eta)) \cos \gamma_j \eta d \eta \right] + \\
& + \frac{2 \gamma_j \delta_k}{\operatorname{sh} \nu_{kj} b} \left\{ \frac{a}{\alpha \gamma_j^2 + i \delta_k} \int_0^b [S_k^{(0)'}(\xi) - (-1)^l S_k^{(1)'}(\xi)] \left[\alpha \left(\gamma_j^2 + \frac{2 i \delta_k}{a} \right) (\sin \alpha \gamma_j \xi \operatorname{sh} \nu_{kj} (b - \xi) - \right. \right. \\
& \left. \left. - (-1)^l \sin \alpha \gamma_j (b - \xi) \operatorname{sh} \nu_{kj} \xi) + \gamma_j \nu_{kj} (\cos \alpha \gamma_j \xi \operatorname{ch} \nu_{kj} (b - \xi) - (-1)^l \cos \alpha \gamma_j (b - \right. \right. \\
& \left. \left. - \xi) \operatorname{ch} \nu_{kj} \xi) \right] d \xi + \left(\alpha \operatorname{sh} \nu_{kj} b + (-1)^l \frac{\nu_{kl}}{\gamma_l} \sin \alpha \gamma_j b \right) \int_0^{d_1} [T_k^{(0)'}(\eta) - (-1)^l T_k^{(1)'}(\eta)] \sin \gamma_j \eta d \eta + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\lambda} \int_0^b \int_0^{d_1} \omega_k(\xi, \eta) [\sin \gamma_j (x \xi + \eta) \operatorname{sh} \nu_{kj} (b - \xi) - (-1)^l \sin \gamma_j (x b - \alpha \xi - \eta) \operatorname{sh} \nu_{kj} \xi] d \eta d \xi \right\}.
\end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, для определения неизвестных постоянных $n_{kl}^{(j)}$ и $m_{kl}^{(l)}$ получили совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (17) и (19). Для исследования этих систем оценим предварительно сумму модулей коэффициентов при неизвестных в каждом из уравнений. Рассмотрим, например, сумму модулей коэффициентов в kl -ом уравнении системы (17):

$$\sigma_{kl}^{(\mu)} = 4 |\alpha| |\tau_{kl}| \zeta_l^2 \frac{|\operatorname{ch} \tau_{kl} d_1 - (-1)^\mu \cos \alpha_{kl} d_1|}{d_1 |\operatorname{sh} \tau_{kl} d_1|} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{j+\mu}}{\left| \left(\gamma_j^2 + \zeta_l^2 + \frac{i \delta_k}{a} \right)^2 - 4 \alpha^2 \gamma_j^2 \nu_{kj}^2 \right|}. \quad (21)$$

Производя оценку суммы (21), получим, что

$$\text{при } \zeta_l^4 < \frac{\delta_k^2}{a^2} \quad \sigma_{kl}^{(\mu)} < |\alpha| < 1, \text{ а при } \zeta_l^4 \geq \frac{\delta_k^2}{a^2} \quad \sigma_{kl}^{(\mu)} < \frac{|\alpha| a \zeta_l^2}{\sqrt{a^2 \zeta_l^4 + \delta_k^2}}.$$

Аналогичную оценку получаем и для системы (19). Таким образом, системы (17) и (19) вполне регулярны. Свободные члены $Q_{kl}^{(\mu)}$ и $P_{kl}^{(\mu)}$ согласно предположениям относительно функций $S_j(x, t)$, $T_j(y, t)$ и $w(x, y, t)$ ограничены в своей совокупности, и из теории бесконечных систем⁽⁵⁾ следуют существование и единственность ограниченного решения полученных систем и сходимость метода последовательных приближений.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Անիզոտրոպ պրիզմատիկ մարմնում ջերմության հարթ պարբերական հոսքի մասին

Հողվածում դիտարկվում է զուգահեռագծային լայնական հատվածքով անվերջ անիզոտրոպ պրիզմատիկ մարմնում ջերմության հարթ պարբերական հոսքի խնդիրը, երբ մարմնում գործում են պարբերաբար փոփոխվող ջերմության աղբյուրներ, իսկ եզրում տրված է ջերմության բաշխումը:

Աֆֆին ձևափոխության միջոցով հատվածքի եզրագիծը վերածվում է ուղղանկյան, որից հետո կիրառվում է Ֆուրյեի վերջավոր կոմպլեքս ձևափոխությունը, ապա հետևելով⁽¹⁾ հողվածի, լուծումը որոնվում է շարքի միաժամանակ երկու տեսակ վերածման միջոցով, որոնց գործակիցները որոշվում են գծային հանրահաշվական հավասարումների լիովին ռեգուլյար անվերջ սխեմաներից:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Р. С. Минасян, ДАН АрмССР, т. 23, № 4 (1956). ² Г. Карслоу, Д. Егер, Теплопроводность твердых тел, Наука, М., 1964. ³ Дж. Най, Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц, Мир, М., 1967. ⁴ К. Дж. Трантер, Интегральные преобразования в математической физике, Гостехиздат, М., 1956. ⁵ Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, М., 1962.

УДК 539.374

МЕХАНИКА

Р. М. Киракосян, В. Н. Минасян

**К проектированию равноизгибаемых однослойных
 идеально-пластических пластинок**

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 7/V 1982)

В работе (1) доказано, что интеграл от квадрата толщины идеально-пластической однослойной пластинки достигает своего наименьшего значения при ее равноизгибаемости. Непосредственные вычисления показывают, что объем равноизгибаемой пластинки или совпадает с минимальным объемом соответствующей гладкой пластинки, или практически не отличается от него. Критерий равноизгибаемости не зависит от искомой толщины и внешних нагрузок пластинки, что существенно упрощает задачу. Толщина равноизгибаемой пластинки изменяется сравнительно в малом промежутке и пластинка получается более плавного профиля. Равноизгибаемость сглаживает также влияние анизотропии материала, в силу чего анизотропная пластинка в некотором смысле приближается к изотропной.

В настоящей статье в декартовых координатах приводится разрешающая система уравнений задачи проектирования равноизгибаемых однослойных пластин, изготовленных из идеально-пластического ортотропного материала. Рассматриваются гладкая и кусочно-линейная поверхности текучести. При условии текучести Треска задача сводится к известной краевой задаче для уравнения Пуассона. В качестве приложения решается задача для эллиптической пластинки.

1. Рассмотрим произвольную в плане однослойную пластинку, изготовленную из ортотропного идеально-пластического материала. Оси декартовых координат x, y, z направим по главным осям анизотропии материала. Пусть пластинка при заданных граничных условиях несет поперечную нагрузку постоянной интенсивности q . Определим толщину $2h$, обеспечивающую равноизгибаемость пластинки.

Условие текучести пластинки в пространстве моментов M_x, M_y, M_{xy} представим в виде

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[(H+G)M_x^2 + (H+F)M_y^2 - 2HM_xM_y + 2NM_{xy}^2 - h^4 \right] = 0, \quad (1.1)$$

где постоянные H, G, F, N выражаются через пределы текучести материала $\sigma_{sx}, \sigma_{sy}, \sigma_{sz}$ и τ_{sxy} (2).

Используя ассоциированный закон течения, из условия равноизгибаемости (1) и уравнения равновесия дифференциального элемента пластинки получим следующую разрешающую систему:

$$\alpha_1 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right)^2 + \alpha_3 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + 4 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \right)^2 = 1, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} & \left(2\alpha_1 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} + \left(2\alpha_2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + 2 \left[2\alpha_1 \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^3} + (4 + \alpha_3) \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x \partial y^2} \right] \frac{\partial t}{\partial x} + \\ & + 2 \left[2\alpha_2 \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial y^3} + (4 + \alpha_3) \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y} \right] \frac{\partial t}{\partial y} + 2 \left[\alpha_1 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} + \right. \\ & \left. + (4 + \alpha_3) \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + \alpha_2 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial y^4} \right] t = 1. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь приняты обозначения:

$$\bar{w} = \frac{w}{c\sqrt{2N}}, \quad \alpha_1 = \frac{2N(H+F)}{FG+GH+HF}, \quad \alpha_2 = \frac{2N(H+G)}{FG+GH+HF}, \quad (1.4)$$

$$\alpha_3 = \frac{4NH}{FG+GH+HF}, \quad t = \frac{h^2}{2q\sqrt{2N}},$$

w — скорость прогиба пластинки, c — произвольная положительная постоянная.

Таким образом, задача проектирования равноизгибаемой пластинки с гладкой поверхностью текучести (1.1) сводится к интегрированию уравнений (1.2), (1.3) при соответствующих краевых условиях.

2. Рассмотрим шарнирно опертую по контуру эллиптическую пластинку с полуосями a и b . Уравнения (1.2), (1.3) допускают решения

$$w = \frac{c\sqrt{2N}a^2b^2}{2\sqrt{\alpha_1b^4 + \alpha_3a^2b^2 + \alpha_2a^4}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right), \quad (2.1)$$

$$h = \frac{ab}{2} \left(\frac{8q^2N}{\alpha_1b^4 + \alpha_3a^2b^2 + \alpha_2a^4} \right)^{1/4} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad (2.2)$$

$$V = \frac{2\pi a^2b^2}{3} \left(\frac{8q^2N}{\alpha_1b^4 + \alpha_3a^2b^2 + \alpha_2a^4} \right)^{1/4}, \quad \frac{M_x}{M_y} = \frac{2\alpha_1b^2 + \alpha_3a^2}{2\alpha_2a^2 + \alpha_3b^2}, \quad M_{xy} \equiv 0, \quad (2.3)$$

где V — объем пластинки.

В случае круглой пластинки ($a=b=R$) решение задачи имеет вид

$$w = \frac{c\sqrt{2N}}{2\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}} (R^2 - r^2), \quad h = \frac{1}{2} \left(\frac{8q^2N}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \right)^{1/4} \sqrt{R^2 - r^2}, \quad (2.4)$$

$$V = \frac{2\pi R^3}{3} \left(\frac{8q^2N}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \right)^{1/4}, \quad \frac{M_x}{M_y} = \frac{2\alpha_1 + \alpha_3}{2\alpha_2 + \alpha_3}, \quad M_{xy} \equiv 0. \quad (2.5)$$

Здесь R — радиус, r — расстояние от центра пластинки. Из (2.4) и (2.5) видно, что толщина и скорость прогиба круглой пластинки несмотря на прямолинейно-ортогональную ортоэропию материала зависит только от радиальной координаты r . Равноизгибаемость в данном

случае настолько сглаживает влияние анизотропии, что поведение пластинки становится осесимметричным и пластинка приближается к изотропной. Однако влияние анизотропии материала полностью не исчезает. Например, в центре пластинки изгибающие моменты M_x и M_y принимают различные значения.

Решения для изотропных пластинок можно получить из (2.1)–(2.5), полагая в них

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 4, \quad N = \frac{3}{2\sigma_s^2}. \quad (2.6)$$

Для эллиптической пластинки имеем

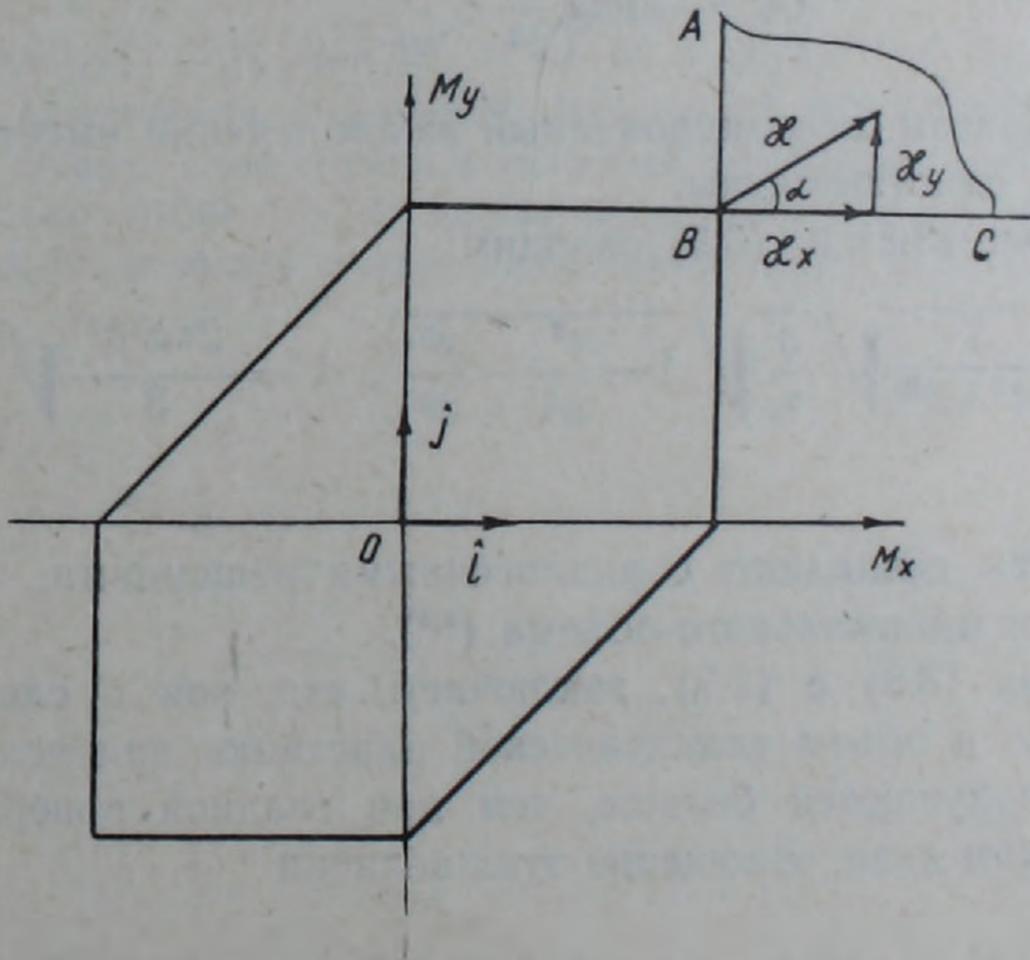
$$h = \frac{ab}{2} \left(\frac{3}{a^4 + a^2b^2 + b^4} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{q}{\sigma_s}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad (2.7)$$

$$V = \frac{2\pi a^2 b^2}{3} \left(\frac{3}{a^4 + a^2b^2 + b^4} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{q}{\sigma_s}}, \quad \frac{M_x}{M_y} = \frac{2b^2 + a^2}{2a^2 + b^2}.$$

Равноизгибаемая круглая изотропная пластинка совпадает с пластинкой минимального объема (3).

3. Принимая условие текучести Треска для идеально-пластических изотропных пластинок положим (рисунок)

$$M_x = M_y = \sigma_s h^2, \quad M_{xy} = 0. \quad (3.1)$$



Условие равноизгибаемости и уравнение равновесия пластинки приводятся к виду

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = -2, \quad (3.2)$$

где

$$\bar{w} = w \frac{2\sigma_s}{c}, \quad t = h^2 \frac{2\sigma_s}{q}. \quad (3.3)$$

Таким образом, задача проектирования равноизгибаемой пластинки при условии текучести Треска и допущений (3.1) сводится к краевой задаче для уравнения Пуассона. Полученные решения следует считать пригодными, если они не противоречат ассоциированному закону течения, т. е. если вектор скоростей обобщенных пластических деформаций

$$x = x_x \hat{i} + x_y \hat{j} \quad (3.4)$$

нигде не выходит из прямого угла ABC (рисунок).

Рассмотрим шарнирно опертую эллиптическую пластинку с полуосями a и b . Решения уравнений (3.2) имеют вид

$$\bar{w} \equiv t = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right). \quad (3.5)$$

Так как

$$x_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{cb^2}{\sigma_s(a^2 + b^2)}, \quad x_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{ca^2}{\sigma_s(a^2 + b^2)}, \quad (3.6)$$

то вектор (3.4) во всех точках пластинки находится в прямом угле ABC , составляя с осью M_x постоянный угол

$$0 < \alpha = \operatorname{arctg} \frac{a^2}{b^2} < \frac{\pi}{2}. \quad (3.7)$$

Таким образом, ассоциированный закон течения имеет место и решения (3.5) действительны.

С помощью (3.5) и (3.3) находим

$$h = \frac{ab}{2} \sqrt{\frac{2}{a^2 + b^2}} \sqrt{\frac{q}{\sigma_s}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad V = \frac{2\pi a^2 b^2}{3} \sqrt{\frac{q}{\sigma_s} \cdot \frac{2}{a^2 + b^2}} \quad (3.8)$$

Эти результаты совпадают с аналогичными решениями, найденными для пластинки минимального объема (4.5).

Сравнивая (3.8) с (2.7), заключаем, что, как и следовало ожидать, толщина и объем эллиптической пластинки при условии текучести Треска получаются больше, чем при гладкой поверхности текучести. На самом деле, отношение этих величин

$$\frac{h_{\text{тр.}}}{h_{\text{гл.}}} = \frac{V_{\text{тр.}}}{V_{\text{гл.}}} = \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \right]^{1/4} \geq 1 \quad (3.9)$$

равняется единице лишь для круглой пластинки. Максимальная разница получается при $\frac{a}{b} \rightarrow 0$ или $\frac{a}{b} \rightarrow \infty$ и не превышает 8%.

Հավասարաչափ ծովող միաշերտ իդեալական պլաստիկ սալերի նախագծման մասին

Միաշերտ իդեալական պլաստիկ սալի հաստության քառակուսու ինտեգրալն իր ամենափոքր արժեքը ստանում է հավասարաչափ ծոման դեպքում: Անմիջական հաշվարկները ցույց են տալիս, որ հավասարաչափ ծովող սալի ծավալը կամ համընկնում է համապատասխան ողորկ սալի մինիմալ ծավալի հետ, կամ նրանից գործնականում չի տարբերվում: Հավասարաչափ ծոման հայտանիշը կախված չէ որոնվող հաստությունից և սալի վրա ազդող բեռից: Այդ հանգամանքն էապես հեշտացնում է խնդրի լուծումը: Սալի հաստությունը փոխվում է փոքր միջակայքում, որի շնորհիվ սալը ստացվում է ալելի ողորկ: Հավասարաչափ ծոմը հարթեցնում է նաև նյութի անիզոտրոպության ազդեցությունը:

Հստ հավասարաչափ ծոման հայտանիշի, միաշերտ իդեալական պլաստիկ սալերի նախագծման խնդիրը բերվում է ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի նկատմամբ եզրային խնդրի: Որպես կիրառություն լուծվում է էլիպսական սալի նախագծման խնդիրը նյութի հոսունության ողորկ և կտոր առ կտոր ողորկ մակերևույթների համար: Քննարկվում են ստացված արդյունքները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹Р. М. Киракосян, ДАН АрмССР, т. 72, № 5 (1981). ²Н. Н. Малинин, Прикладная теория пластичности и ползучести, Машгиз, М., 1975. ³Z. Mroz, Rozpr. Inzyn., 114, 1958. ⁴В. Прагер, Проектирование пластинок наименьшего веса, Сб. переводов, Механика, № 6 (40) (1956). ⁵М. И. Эстрик, В кн.: Новые методы расчета строительных конструкций, Издательство литературы по строительству, М., 1971.

УДК 624.04÷699.841

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Академик АН Армянской ССР А. Г. Назаров, В. Л. Мнацаканян

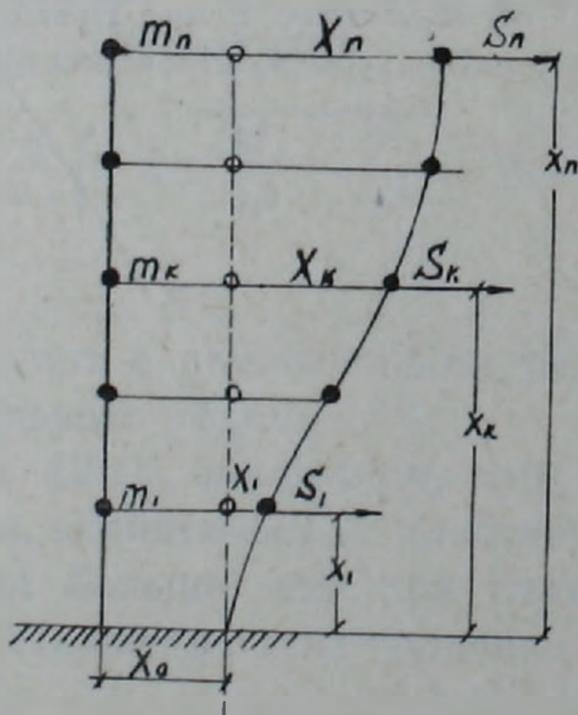
О построении индикаторных кривых для динамических процессов в механических системах

(Представлено 26/VIII 1982)

Насколько нам известно, впервые построение индикаторных кривых для динамических процессов в состоянии, приближающемся к резонансу, дано Э. Е. Хачияном и М. Г. Мелкумяном ⁽¹⁾ при расчетной схеме

$$\sum_{i=1}^n m_i y_i'' + R_k(y_k - y_{k-1}) + C_k(y_k' - y_{k-1}') = P(t), \quad k = 1, 2 \dots n.$$

Здесь приводится решение этой задачи в самой общей постановке, когда реакция системы со многими степенями свободы есть некоторая функция от смещений и скоростей при произвольной внешней нагрузке. Для простоты рассмотрим консольный брус с сосредоточенными грузами Q_k в точках X_k , подверженный воздействию сейсмических сил S_k (рисунок).



Расчетная схема сооружения

Здесь $X_0(t)$ — смещение грунта при землетрясении, $X_k(t)$ — смещение точек $X_k(t)$ рассматриваемой системы за счет ее деформации.

Исходя из равенства и противоположности внешних сил S_i и внутренних сил типа $\varphi_i(y_i - y_{i-1}; \dot{y}_i - \dot{y}_{i-1})$ можно записать при $m_k g = Q_k$

$$S_n = -m_n(\ddot{X}_n + \ddot{X}_0) = \varphi_n(X_n - X_{n-1}, \dot{X}_n - \dot{X}_{n-1})$$

.....

$$S_k = -m_n(\ddot{X}_n + \ddot{X}_0) - m_{n-1}(\ddot{X}_{n-1} + \ddot{X}_0) \dots - m_k(\ddot{X}_k + \ddot{X}_0) = \varphi_k(\dot{X}_k - \dot{X}_{k-1}, \dot{X}_k - \dot{X}_{k-1}) \quad (1)$$

$$S_1 = -m_n(\ddot{X}_n + \ddot{X}_0) - m_{n-1}(\ddot{X}_{n-1} + \ddot{X}_0) - \dots - m_k(\ddot{X}_k + \ddot{X}_0) - \dots - m_1(\ddot{X}_1 + \ddot{X}_0) = \varphi_1(\dot{X}_1, \dot{X}_1).$$

В случае действия на систему внешних переменных сил $P(t)$ к члену S_k выражения (1) следует добавить $P_n(t) + P_{n-1}(t) + \dots + P_k(t)$

$$S_k = -m_n(\ddot{X}_n + \ddot{X}_0) - m_{n-1}(\ddot{X}_{n-1} + \ddot{X}_0) - m_k(\ddot{X}_k + \ddot{X}_0) + P_n + P_{n-1} + \dots + P_k.$$

Уравнение (1) учитывает механические свойства материала конструкции в общем виде.

Здесь мы не останавливаемся на технике получения значений $X_k(t)$, $\dot{X}_k(t)$, $\ddot{X}_k(t)$, $\ddot{X}_0(t)$, $P_k(t)$. Они могут быть получены разными приемами в зависимости от приборов и вычислительных средств, которыми располагает экспериментатор, и в зависимости от того, проводятся ли эксперименты в лабораторных условиях, когда Землю можно принять за неподвижную систему отсчета, или когда такой системы отсчета поблизости нет (например, при землетрясении).

Пусть заданы интересующие нас функции в табличной форме в зависимости от моментов времени t_i . Количество подразделений t_i зависит от быстроты изменений функций $\dot{X}_0(t)$ и $P(t)$ (рисунок). Тогда для каждого груза Q_k путем простых вычислений можно составить необходимые для дальнейшего таблицы. Здесь приводим схему такой таблицы. Начало отсчета t отнесено к началу записи динамического процесса.

Схема таблицы значений t , S_k , $X_k - X_{k-1}$, $\dot{X}_k - \dot{X}_{k-1}$ для груза Q_k

Номер точки оси времени	Время, отсчитываемое от начала записи	Динамическая сила, действующая в точке k	$X_k(t) - X_{k-1}(t)$	$\dot{X}_k(t) - \dot{X}_{k-1}(t)$
0	t_0	S_k^0	$X_k(t_0) - X_{k-1}(t_0)$	$\dot{X}_k(t_0) - \dot{X}_{k-1}(t_0)$
1	t_1	S_k^1	$X_k(t_1) - X_{k-1}(t_1)$	$\dot{X}_k(t_1) - \dot{X}_{k-1}(t_1)$
2	t_2	S_k^2	$X_k(t_2) - X_{k-1}(t_2)$	$\dot{X}_k(t_2) - \dot{X}_{k-1}(t_2)$
...
il	t_l	S_k^l	$X_k(t_l) - X_{k-1}(t_l)$	$\dot{X}_k(t_l) - \dot{X}_{k-1}(t_l)$

Рассмотрим теперь трехмерную декартовую систему координат. За оси аргументов примем переменные $(X_k - X_{k-1})$ и $(\dot{X}_k - \dot{X}_{k-1})$, а вдоль третьей (вертикальной) оси отложим соответствующие значения S_k . Соединяя между собой соседние точки, получим пространственную кривую $S_k(X_k - X_{k-1}, \dot{X}_k - \dot{X}_{k-1})$. Она представляет собой индикаторную кривую, зависящую от приращения смещений и их скоростей. В таком виде индикаторная кривая неудобна для построений. Эту кривую можем спроектировать на плоскость $(X_k - X_{k-1}; S_k)$ и $(\dot{X}_k - \dot{X}_{k-1}; S_k)$.

В результате получим две плоские индикаторные кривые $(X_k -$

— $X_{k-1}; S_k$) и $(\dot{X}_k - \dot{X}_{k-1}, S_k)$, однозначно характеризующие пространственную индикаторную кривую. Точнее, мы получили одну и ту же индикаторную кривую, хотя внешне они сильно отличаются друг от друга, так как X и \dot{X} связаны между собою определенной функциональной зависимостью для каждой заданной акселерограммы $\ddot{X}(t)$.

Приведенные здесь построения послужат основой дальнейших наших исследований динамических свойств материалов и конструкций.

Ордена Трудового Красного Знамени
Институт геофизики и
инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР
Филиал ВНИИАЭС

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, Վ. Լ. ՄՆԱՅԱԿԱՆՅԱՆ

Մեխանիկական սիստեմներում դինամիկական վիճակների համար
ինդիկատորային կորերի կառուցման մասին

Աշխատանքում փորձնական տվյալների հիման վրա բերվում է ինդիկատորային կորերի կառուցումը, օգտվելով ամենաընդհանուր տեսքով տրված (1) դիֆերենցիալ հավասարումներից: Աղյուսակի սխեմայի նկ. 2 հիման վրա կազմվում է S_k տարածական ինդիկատորային կորը՝ կառուցված $X_k - X_{k+1}$ դեֆորմացիայի և $X_k - X_{k+1}$ դեֆորմացիայի արագության հիման վրա:

Այս տարածական ինդիկատորային կորի պրոյեկցիաները $(X_k - X_{k+1}, S)$ և $(\dot{X}_k - \dot{X}_{k+1}, S)$ հարթությունների վրա բերվում են հարթ ինդիկատորային կորերի (ուժ—դեֆորմացիա) և ուժ—դեֆորմացիայի արագություն:

Այս կառուցումները հիմք կհանդիսանան մեր կողմից նյութերի և կառուցվածքների դինամիկական հատկությունների հետազոտման համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Э. Е. Хачиян, М. Г. Мелкумян, ДАН АрмССР, т. 74, № 2 (1982).

УДК 624.131.4395

МЕХАНИКА ГРУНТОВ

Г. Ф. Рустамян

Линейная одномерная задача уплотнения газосодержащего глинистого грунта при степенном законе ползучести скелета

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. И. Тер-Степаняном 4/IV 1982)

Уравнение фильтрационного уплотнения водонасыщенного глинистого грунта с учетом сжимаемости газосодержащей воды при условии несжимаемости твердых частиц, неизменяемости коэффициента фильтрации, $i = \text{const}$ и $1 + e = 1 + e_{\text{ср}}$ (e — коэффициент пористости) записывается в следующем виде ^(1,2):

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{K_{\text{в}}} e_{\text{ср}} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1 + e_{\text{ср}}}{\gamma_{\text{в}}} k \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \quad (1)$$

где p — дополнительное давление в поровой воде; $1/K_{\text{в}} = a_{\text{в}}$ — коэффициент сжимаемости поровой воды; $\gamma_{\text{в}}$ — удельный вес воды.

Решение дифференциального уравнения (1) получено А. Л. Гольдиным ⁽³⁾ и З. Г. Тер-Мартirosяном ⁽²⁾. Для выражения деформации скелета грунта во времени они, следуя В. А. Флорину, использовали линейную теорию упруго-ползучего тела Г. Н. Маслова — Н. Х. Арутюняна (без учета старения материала), где мера ползучести принята в виде экспоненциальной функции ⁽⁴⁾.

Экспериментом установлено, что кривые меры ползучести скелета глинистых грунтов при одномерном уплотнении хорошо аппроксимируются в виде ⁽⁵⁾:

$$C(t) = A_0 \cdot t^m. \quad (2)$$

В настоящей работе сделана попытка решения линейной задачи одномерного уплотнения водонасыщенного глинистого грунта при степенном законе ползучести скелета (2).

Используя уравнение теории старения, изменяемость коэффициента пористости грунта при линейной ползучести записывают в следующем виде ⁽⁵⁾:

$$e_0 - e = a_0 \cdot \sigma_1 + C_e(t) \cdot \sigma_1,$$

где

$$C_e(t) = C(t) \cdot (1 + e_0) = A_0 t^m (1 + e_0) = At^m,$$

т. е.

$$e_0 - e = \sigma_1 [a_0 + C_e(t)] = \sigma_1 (a_0 + At^m), \quad (3)$$

a_0 — коэффициент мгновенной сжимаемости (деформации) скелета.

Подставляя выражение (3) в уравнение (1), получаем:

$$-\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} (a_0 + At^m) - At^{m-1} \cdot m \sigma_1 + e_{cp} \cdot a_w \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1 + e_{cp}}{\gamma_w} k \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (4)$$

Из уравнения равновесия имеем

$$q = \sigma_1(t) + p(t), \quad (5)$$

где $q = \text{const}$ — величина внешнего давления; $p(t)$ — поровое давление в воде; $\sigma_1(t)$ — эффективное давление, передающееся на скелет грунта.

Подставляя значение $\sigma_1(t)$ из уравнения (5) в (4), получаем неоднородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial p}{\partial t} (a_0 + At^m + e_{cp} \cdot a_w) + A \cdot t^{m-1} \cdot m p - At^{m-1} \cdot m \cdot q = \frac{1 + e_{cp}}{\gamma_w} k \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (6)$$

Граничные условия во всем процессе уплотнения будут (2):

$$\left. \begin{array}{l} z=0 \\ z=h \end{array} \right\} p=0. \quad (7)$$

Начальное условие получено из условия отсутствия фильтрации в момент приложения нагрузки, когда имеет место равенство деформаций скелета и поровой жидкости (2):

$$p(0) = \frac{a_0}{a_0 + e_0 \cdot a_w} = \beta_0 \cdot q, \quad (8)$$

где β_0 — начальный коэффициент порового давления; e_0 — начальный коэффициент пористости до приложения нагрузки.

Решение уравнения (6) с начальными и граничными условиями (7) и (8) ищем в виде

$$p(z, t) = \sum_{n=1,3,\dots} T_n(t) \cdot \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z. \quad (9)$$

Подставляя решение (9) в уравнение (6), получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \alpha(t) \sum_{n=1,3,\dots} T_n(t) \cdot \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z + \beta(t) \sum_{n=1,3,\dots} T_n(t) \cdot \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z - \\ - \beta(t) q = c_v \sum_{n=1,3,\dots} T_n(t) \left(\frac{\pi \cdot n}{h} \right)^2 \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\left. \begin{array}{l} \alpha(t) = a_0 + A \cdot t^m + e_{cp} \cdot a_w; \\ \beta(t) = A \cdot t^{m-1} \cdot m, \\ c_v = \frac{1 + e_{cp}}{\gamma_w} k, \end{array} \right\} \quad (11)$$

Разложив постоянную величину q в ряд синусов

$$q = \frac{4q}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z$$

и подставляя это разложение в уравнение (10), получаем

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \alpha(t) \cdot T_n(t) \cdot \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z + \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \beta(t) \cdot T_n(t) \cdot \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z -$$

$$- \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \beta(t) \frac{4q}{\pi \cdot n} \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} c_v \left(\frac{\pi \cdot n}{h} \right)^2 \cdot \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z = 0. \quad (12)$$

Из (12) получим

$$T_n(t) + \frac{\beta(t) + c_v \left(\frac{\pi \cdot n}{h} \right)^2}{\alpha(t)} T_n(t) - \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \frac{4q}{\pi \cdot n} = 0. \quad (13)$$

Обозначая в (13)

$$B(t) = \frac{\beta(t) + c_v \left(\frac{\pi \cdot n}{h} \right)^2}{\alpha(t)}; \quad Q(t) = \frac{4q}{\pi \cdot n} \cdot \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}, \quad (14)$$

получаем дифференциальное уравнение

$$T_n(t) + B(t) \cdot T_n(t) - Q(t) = 0, \quad (15)$$

решение которого, как известно, записывается в следующем виде (6):

$$T_n(t) = e^{-\int B(t) dt} \left[\int Q(t) \cdot e^{\int B(t) dt} dt + C' \right]. \quad (16)$$

Заменяя в (16) неопределенные интегралы определенными интегралами с переменным верхним пределом, получаем

$$T_n(t) = e^{-\int_0^t B(u) du} \left[\int_0^t Q(v) \cdot e^{\int_0^v B(u) du} dv + C' \right], \quad (17)$$

где C' — постоянная интегрирования.

Для определения C' из уравнения (8) и (9) имеем

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} T_n(0) \cdot \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z = \beta_0 \cdot q. \quad (18)$$

Разложив $\beta_0 \cdot q$ в ряд синусов

$$\beta_0 \cdot q = \frac{4\beta_0 \cdot q}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z,$$

подставляя это разложение в (18) и приравнявая соответствующие коэффициенты в правой и левой частях уравнения, находим следующее начальное условие:

$$T_n(0) = \frac{4\beta_0 \cdot q}{\pi \cdot n}. \quad (19)$$

Подставив (19) в уравнение (17), находим

$$C' = \frac{4\beta_0 \cdot q}{\pi \cdot n}. \quad (20)$$

Следовательно

$$T_n(t) = e^{-\int_0^t B(u) du} \left[\int_0^t Q(v) \cdot e^{\int_0^v B(u) du} dv + \frac{4\beta_0 \cdot q}{\pi \cdot n} \right], \quad (21)$$

а из (9) с учетом (21) будем иметь

$$p(z, t) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} e^{-\int_0^t B(u) du} \left[\int_0^t Q(v) \cdot e^{\int_0^v B(u) du} dv + \frac{4\beta_0 \cdot q}{\pi \cdot n} \right] \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z, \quad (22)$$

где функции $B(u)$ и $Q(v)$ определяются по формулам (14).

Уравнение (22) характеризует изменение порового давления в слое грунта толщиной h во времени с учетом ползучести скелета грунта и сжимаемости жидкости.

Для определения перемещения границ уплотняемого слоя воспользуемся известной формулой осадок (7)

$$S(t) = \int_0^h \frac{e_0 - e(t, z)}{1 + e_0} dz, \quad (23)$$

где e_0 — начальное значение коэффициента пористости.

Подставляя в уравнение (23) выражение $e_0 - e$ из (3), имеем

$$S(t) = \frac{1}{1 + e_0} \int_0^h \sigma_1(t, z) (a_0 + A \cdot t^m) dz,$$

где

$$\sigma_1(t, z) = q - p(t, z).$$

Тогда для определения осадки слоя толщиной h получим

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{a_0 + At^m}{1 + e_0} \int_0^h [q - p(t, z)] dz = \\ &= \frac{a_0 + At^m}{1 + e_0} \left[qh - \int_0^h p(t, z) dz \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Автор выражает глубокую благодарность С. Р. Месчяну за помощь при выполнении настоящей работы.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Գ. Յ. ՌՈՒՍԱՄՅԱՆ

Գաղ պարունակող կավային գետնահողի միաչափ խտացման
խնդիրը կմախֆի սողֆի աստիճանային օրենքի դեպքում

Հողվածում բերված է գաղ պարունակող ջրահագեցված կավային գետնահողի միաչափ խտացման խնդիրը, որի կմախֆը ենթարկվում է աստիճան-

նային օրենքին: Հնդունված է, որ ծակոտինային ջրի շարժումը ենթարկվում է Դարսիի օրենքին, բացակայում է ճնշման սկզբնական գրադիենտը և կրճախքի սողքը գծային է:

Ստացված են ծակոտինային ջրում առաջացող հավելյալ ճնշումների և շերտի տևական նստվածքը որոշելու բանաձևերը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. А. Флорин, Изв. АН СССР, ОТН, № 6, 1953. ² Н. А. Цытович и др., Прогноз скорости осадок оснований сооружений, М., Стройиздат, 1967. ³ А. Л. Гольдин, Труды Ленинградского инж.-экономического ин-та им. П. Тольятти, вып. 57, 1965. ⁴ Н. Х. Арутюнян, Некоторые вопросы теории ползучести, М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1952. ⁵ С. Р. Месчан, Механические свойства грунтов и лабораторные методы их определения, Недра, М., 1974. ⁶ В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 2, М., Наука, 1974. ⁷ Н. А. Цытович, Механика грунтов, М., Стройиздат, 1963.

УДК 595.764.1

ЭНТОМОЛОГИЯ

С. М. Яблоков-Хнзорян

Новый вид хруща из Армянской ССР
(Coleoptera, Scarabaeidae)

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. О. Мовсисяном 2/II 1982)

Amphimallina helenae Iablokoff-Khuzorian sp. nov.

Армянская ССР: Нор Амберг выше Антарута (Аштаракский р-н), у нижней опушки порослевого дубового мелколесья, 4 самки (голотип и 3 паратипа), выведенные из личинок Е. К. Эртевцяна по личным сборам от 18/V 1977. Эти личинки окуклились 14--18/VI, имаго появились 7--10/VII. Все типы в коллекциях Института зоологии АН Армянской ССР.

Сверху тело красно-бурое, лобный киль и передний край наличника черно-бурые, переднеспинка со слабо осветленным боковым краем, включающим более темное пятно, с узким дискальным пятном, надкрылья с осветлениями. Низ тела желто-бурый с затемнениями на переднегруди. Щупики и усики темные, кроме светлых последних члеников жгутика. Ноги желто-бурые с затемнениями. Волосистость беловатая. Длина (14) мм (рис. 1).

Глаза слабо выступают из контура головы. Лоб волосистый, с крупными, частично сливающимися точками на гладком фоне, между глазами с высоким гладким килем, прерванным у середины, перед ним лоб спадает круто до вдавленного наличника, отграниченного цельным швом, резко приподнятым вдоль двухлопастного переднего края, усаженного ресничками по всей длине (выемка между лопастями слабая, у разных особей несколько изменчивая, но всегда четкая). Наличник с вдавленной крупной округлой точечностью сверху и на переднем скате. Этот скат отвесный, построен так же как у близкого рода *Amphimallon* Latr., с такой же вырезкой для верхней губы, которая, однако, выступает сильнее, а скат относительно длиннее. Последний членик челюстных щупиков крупный, яйцевидный и остроконечный, с крупной овальной ямкой (рис. 1, в). Усики (рис. 1, б) типичные для рода, но их членик 2 своеобразно вздут у вершины и сильно сужен у основания.

Переднеспинка окаймлена по всему контуру, крупно, неравномерно, негусто, вдавленно точечная на гладком фоне, с немногими торчащими волосками, ее передний край гладкий, слабо дугообразно изогнутый, передние углы тупые и закругленные, слабо выступающие, боковой край слабо закруглен, точечный и поэтому выглядит

зазубренным, с бахромой из длинных ресничек, задние углы тупые и закругленные, но намеченные, основной край гладкий и двувыемчатый. Щиток крупный, шире длины, почти голый, рассеянно точечный на нежно шагренированном фоне. Надкрылья в рассеянной то-

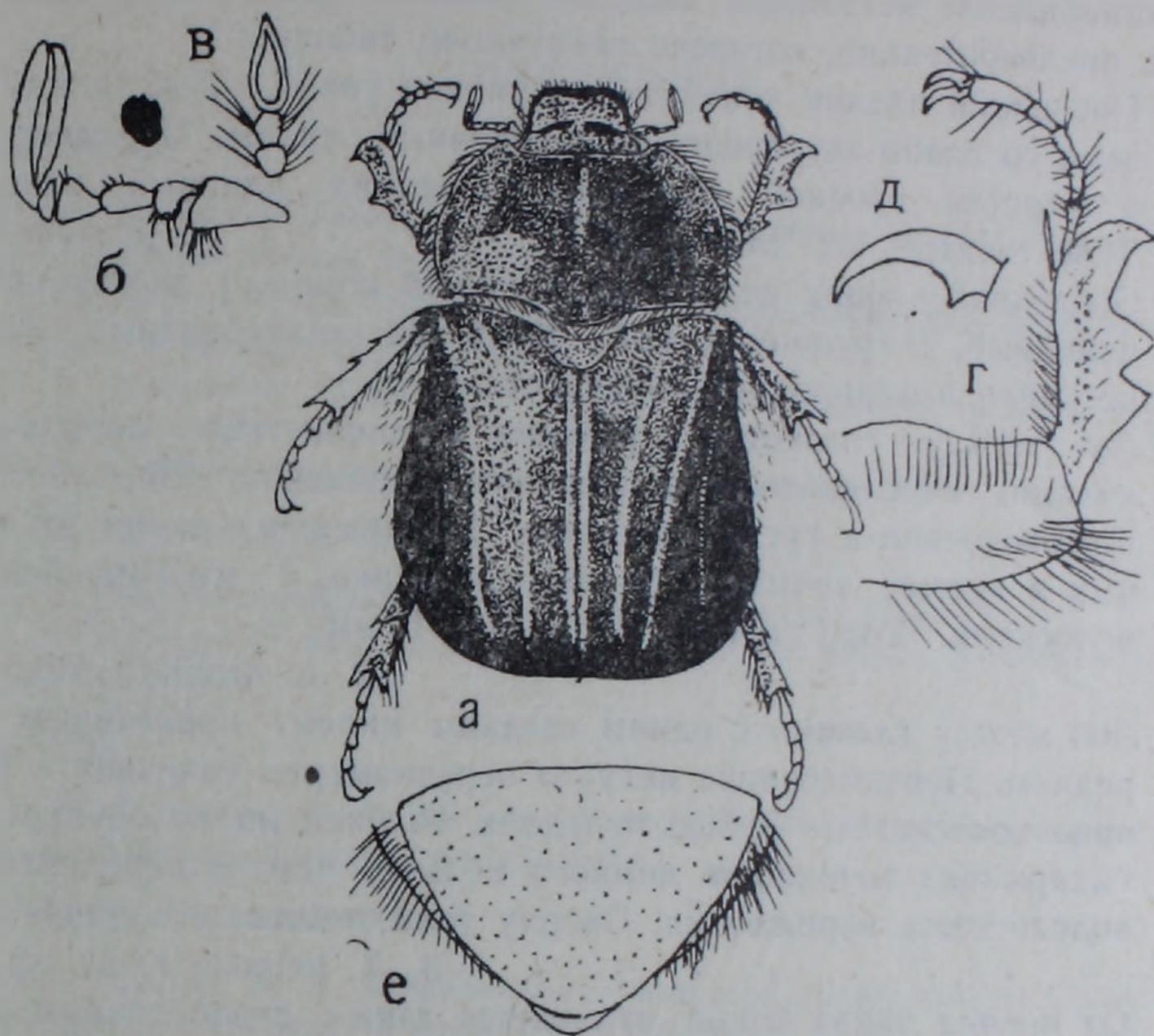


Рис. 1. *Amphimallina helenae* Khnz., sp. nov., голотип; а—габитус; б—левый усик; в—левый щупик; г—правая передняя нога; д—коготок; е—пигидий

чечности, слегка более мелкой, чем на переднеспинке, на гладком фоне, в очень короткой и изреженной волосистости, с 3 парами гладких плоских ребер, укороченных у их обоих концов, и следом 4-й за плечами, боковой край опущен и слабо распластан за серединой, с единичными короткими ресничками. Сзади надкрылья обрубленные, с резким и тупым пришовным углом. Плечевые бугорки резкие, крылья слегка укорочены (самка). Пигидий плоский, голый, негусто поверхностно точечный на гладком фоне (рис. 1, е). Грудь, в особенности заднегрудь, в очень густой и длинной волосистости. Брюшко довольно густо, недлинно волосистое, волоски торчащие. Передние ноги (рис. 1, г) толстые, копательные, их голени с 3 крупными зубцами, срединный зубец приближен к основному. Средние и задние голени снаружи с резким цельным косым килем, сбоку выступающим зубцеобразно. Шпоры и коготки типичные для рода (рис. 1, д).

Этот вид — типичный представитель небольшого рода *Amphimallina* Reitt., 1905, близкий к *Amphimallon* Latr., но отличающийся от всех прочих близких родов трибы *Rhizotrogini* восьмичлениковыми

усиками. До сих пор в нем было описано 2 вида, оба по единственному самцу, первый из них — *A. jengichi* Reitt., 1905, описан из Уральска, второй — *A. arnoldii* Medvedev, 1951, — из „Ленкорани, Талышского хребта“, по сборам К. В. Арнольди в мае 1936 г. Поскольку у близких форм половой диморфизм выражен часто сильно, то установление настоящих видовых отличий нового вида возможно лишь предварительно, согласно следующей таблице:

- | | | |
|------|---|-------------------------------------|
| 1(2) | Последний членик челюстных щупиков узкий. Лоб между глазами со слабо зазубренным поперечным килем. Переднеспинка в негустой двойной точечности и редких длинных волосках. Тело светлое, его длина 14 мм | 1. <i>A. jengichi</i> Reitt. |
| 2(1) | Последний членик челюстных щупиков крупный, заостренно-яйцевидный, с крупной ямкой. Киль лба незазубренный. Переднеспинка в однородной точечности. | |
| 3(4) | Лоб между глазами с 2 резкими морщинистыми поперечными килями, отделенными поперечной бороздкой. Переднеспинка густоточечная и густоволосистая. Надкрылья в таких же крупных и густых точках, как переднеспинка, с многочисленными волосками. Тело светлое, его длина 16 мм | 2. <i>A. arnoldii</i> Medvedev |
| 4(3) | Лоб между глазами с одним гладким килем, прерванным у середины. Переднеспинка негусто неравномерно точечная и рассеянно волосистая. Зубцы передних голеней много крупнее. На надкрыльях точечность немного мельче, чем на переднеспинке, волосистость изреженная. Сверху тело темное, его длина 14 мм | 3. <i>A. helenae</i> Khnz. sp. nov. |

От прочих видов новый отличается также своеобразным строением второго членика усиков. Он назван именем Елены Карапетовны Эртевцян.

Институт зоологии
Академии наук Армянской ССР



Մ. Մ. ՅԱՐԼՈՎՈՎ-ԽԵՉՈՐՅԱՆ
Բնդեռի նոր տեսակ Հայկական ՍՍՀ-ից
(Coleoptera, Scarabaeidae)

Անտառումից գերեւ, նոր Ամբերդում հայտնաբերված է բնդեռի նոր տեսակ *Amphimallina helenae* Khnz. sp. nov.: Այս տեսակը գտնված է Ծ. Կ. Հերթեցյանի կողմից, ի պատիվ որի էլ այն անվանվում է:

Բզեզը դաստիարակվել է 18.5.77 թ. հավաքված թրթուրներից, հասունը դուրս է եկել հուլիսի 7—10-ը: Այն համարվում է *Amphimallina* Reitt. սեռի 3-րդ ներկայացուցիչը, այս սեռից հայտնի էր ընդամենը 2 տեսակ, մեկը Ուրալսկից, մյուսը Թալիշից: