

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
 АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
 ДОКЛАДЫ.

LXXVII, № 1

1983

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. բեկնածու (պատ. ֆաբրիկար), Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Թ. ԲԱՐԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐՐԻՆՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղր. անդամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղր. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Վ. Գ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղր. անդամ, Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Օ. Մ. ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղր. անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՖԱՆԱՐԺՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, А. А. ГАБРИЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН АрмССР, Г. С. СААКЯН, академик АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, академик АН АрмССР.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿԶՈՒԹՅՈՒՆ
 ԵՐԵՎԱՆ

Доклады Академии наук Армянской ССР, т. 77, № 1, с. 1—48.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

ՄԱՌԵՄԱՏԻԿԱ

Ա. Ա. Շահինյան—Շոշափումային հարմոնիկ և գրադիենտային մոտարկումներ	3
Ս. Վ. Շահվերդյան—Կառավարման փոփոխության սահմանափակումով դիսկրետ համակարգերի օպտիմիզացիա	6
Վ. Ա. Միրզոյան—Ենթաբազմաձևության նորմալ դեֆեկտականությունը	11
Ա. Ա. Թալալյան—Հարի վրո-շարքերի վրոյի զուգամիտելու արագության մասին	16
Լ. Դ. Դրիգուրյան—Է. Լանդաուի մի թեորեմի վերաբերյալ	20
Վ. Ռ. Ֆատալով—Ոչ համասեռ գաուսյան պատահական դաշտի մաքսիմումի բաշխման ֆունկցիայի ճշգրիտ ասիմպտոտիկա	25

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ս. Ս. Զարգարյան—Համեմատական հավասարումներից ստացված սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծումների վարքագիծը, եզրագծի անկյունային կետերի շրջակայքում	30
--	----

ՖԻԶԻԿԱ

Ն. Ս. Անանիկյան, Դ. Լ. Բալայան—Իրադրամների գումարումը Լեմանդրի ձևափոխության միջոցով՝ ըստ սկալյար պարամետրի: Բարձր կարգեր	36
Վ. Ն. Հայրապետյան, Յու. Ն. Հայրապետյան—Ջերմաստիճանից գծայնորեն կախված գործակցով ջերմահաղորդականության ոչ գծային հավասարման լուծման գնահատումը	40

ՕՐԴԱՆԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

Վ. Կ. Պիժով, Վ. Ն. Զապիշնի, Դ. Մ. Պոդոսյան—Սիմ-տրիազին պարունակող քլորանհիդրիդի և դիֆենիլուպրոպանի բարձրջերմաստիճանային պոլիկոնդենսացման կինետիկան	45
--	----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

А. А. Шагинян—О касательной гармонической и градиентной аппроксимации.	3
С. В. Шахвердян—Оптимизация дискретных систем с ограничением на изменение управления	6
В. А. Мирзоян—Нормальная дефектность подмногообразия	11
А. А. Талалян—О скорости сходимости к нулю нуль-рядов по системе Хаара.	16
Л. Д. Григорян—К одной теореме Ландау	20
В. Р. Фаталов—Точная асимптотика функции распределения максимума гауссовского неоднородного случайного поля	25

МЕХАНИКА

С. С. Заргарян—Об асимптотике решений системы сингулярных интегральных уравнений, порожденной уравнениями Ламе, в окрестности угловых точек контура.	30
--	----

ФИЗИКА

Н. С. Ананикян, Г. Л. Балаян—Суммирование диаграмм с помощью преобразования Лежандра по скалярному параметру. Высшие порядки	36
В. Н. Айрапетян, Ю. Н. Айрапетян—Оценка решения нелинейного уравнения теплопроводности с коэффициентом, линейно зависящим от температуры.	40

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

В. К. Пыжов, В. Н. Заплишный, Г. М. Погосян—Кинетика высокотемпературной поликонденсации дифенилолпропана и симм-триазинсодержащего хлорангидрида	45
---	----

C O N T E N T S

MATHEMATICS

P.

- A. A. Shahinian*—On tangential harmonic and gradient approximation 3
- S. V. Shahverdian*—The optimization of discrete systems with the limitation on control variation 6
- V. A. Mirzoyan*—The normal nullity of submanifold 11
- A. A. Talalyan*—On the rapidity of convergence to zero of Haar system null series 16
- L. D. Grigorian*—To a theorem of E. Landau 20
- V.R. Fatalov*—The exact asymptotic for distribution function of maximum of Gaussian nonhomogeneous random field 25

MECHANICS

- S. S. Zargarian*—On singularities of solutions to system of singular integral equations of plane elasticity resulting from stresses given at the boundary 30

PHYSICS

- N. S. Ananikian, G. L. Balayan*—The method of diagram summation by means of Legendre transformation in a scalar parameter. Higher orders 36
- V. N. Hairapetian, U. N. Hairapetian*—Estimation of solution of non-linear heat conduction equations with linear dependent coefficient 40

ORGANIC CHEMISTRY

- V. K. Pizhov, V. N. Zaplishny, G. M. Pogossian*—Kinetics of high-temperature polycondensation of diphenylpropane and simm-triazin-containing chloranhydrite 45

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л.

Сдано в набор 20.06.1983. Подписано к печати 20.10.1983. ВФ 06069.
 Бумага № 1, 70×108¹/₁₆. Высокая печать. Печ. лист 3,0. Усл. печ. лист. 4,2.
 Учет.-изд. 3,34. Тираж 420. Заказ 523. Издат. 6008.

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24г, II эт., 1 к.

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван,
 пр. Маршала Баграмяна, 24-г.
 Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин

УДК 517.544

МАТЕМАТИКА

А. А. Шагинян

О касательной гармонической и градиентной аппроксимации

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 31/V 1982)

Во время своего недавнего пребывания в Ереване проф. Поль Готье (Монреальский университет) рассказал об интересных исследованиях по гармоническим приближениям, проводящимся в Монреале. В частности Хенгартнером, Готье и их учениками полностью решена задача о равномерной гармонической аппроксимации на некомпактных множествах с внутренними точками. Переход от равномерного приближения к касательному в случае приближения аналитическими функциями проводится при помощи искусственного приема, не имеющего аналога для гармонических функций.

Размышления над этим кругом задач, стимулированные обсуждениями с П. Готье, позволили нам получить решение задачи о возможности касательной гармонической аппроксимации на некомпактных множествах с внутренними точками, которые вместе с несколькими другими аналогичными результатами излагаем ниже. В доказательствах возможность равномерного приближения не используется. Полученные результаты являются обобщением и гармоническим аналогом известных результатов Т. Карлемана, М. В. Келдыша, С. Н. Мергеляна, Н. У. Аракеляна и др. ⁽¹⁻⁴⁾.

Пусть E замкнутое подмножество области $D \subset R^n (n \geq 2)$, а $g(P)$ непрерывная положительная на E и гармоническая в E^0 функция: $g(P) > 0$ при $P \in E$ и $\Delta g(P) = 0$ при $P \in E^0$. Будем считать, что $g(P) \rightarrow 0$ при $P \in E$ и $\rho(P; \delta D) \rightarrow 0$, где $\rho(\cdot, \cdot)$ метрика одноточечной компактификации R^n .

Теорема 1. Пусть $f(P)$ непрерывная на E и гармоническая в E^0 функция такая, что для любого $\tau > 0$ и любого компактного подмножества $F \subset E$ существует гармоническая в D функция $\varphi(P)$, равномерно приближающая $f(P)$ на F : $|f(P) - \varphi(P)| \leq \tau$ при $P \in F$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует гармоническая на E функция $H(P)$ такая, что $|f(P) - H(P)| \leq \varepsilon \cdot g(P)$ при $P \in E$.

Аналогичный результат для касательного приближения гармоническими во всем D функциями дается ниже.

Пусть в обозначениях теоремы 1 D_n произвольное исчерпание области D регулярными областями ($D_{n+1} \supset D_n$ и $\bigcup_n D_n = D$), а D_n^1 — связанные компоненты с компактным замыканием множества

$D \setminus \overline{D_n \cup E}$. Множество $\overline{D_n \cup \{\bigcup_i D_i^n\}}$ назовем оболочкой D_n и обозначим через $O_E(D_n)$.

Теорема 2. Если $f(P)$, E , $g(P)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и $O_E(D_n)$ компактно при произвольном n , то для любого $\varepsilon > 0$ существует гармоническая в D функция $H(P)$ такая, что $|f(P) - H(P)| \leq \varepsilon \cdot g(P)$ при $P \in E$.

Применяя теоремы 1 и 2, получаем следующие результаты о возможности касательной гармонической аппроксимации в R^3 .

Теорема 3. Пусть E произвольное замкнутое подмножество R^3 . Если множества точек разреженности дополнений к E и E^0 совпадают, то для всякой функции $f(P)$, непрерывной на E , гармонической в E^0 , и $\varepsilon > 0$ существует гармоническая на E функция $H(P)$ такая, что $|f(P) - H(P)| \leq \frac{\varepsilon}{\|P\|}$ при $P \in E$, где $\|\cdot\|$ евклидова норма.

Замечание 1. Если множества точек разреженности E и E^0 не совпадают, то существует такая функция $f(P)$, непрерывная на E и гармоническая в E^0 , что ее нельзя равномерно приблизить на E гармоническими функциями. Таким образом теорема 3 дает полное решение задачи о локальной гармонической аппроксимации с касанием.

Теорема 4. Пусть E произвольное замкнутое подмножество R^3 . Если для любого компактного подмножества $F \subseteq E$ возможно равномерное приближение $f(P)$ на F функциями, гармоническими во всем R^3 , и $O_E(D_n)$, где D_n исчерпание R^3 , компактно при произвольном n , то для любого $\varepsilon > 0$ существует гармоническая в R^3 функция $H(P)$ такая, что $|f(P) - H(P)| \leq \frac{\varepsilon}{\|P\|}$ при $P \in E$.

Замечание 2. Если условия теоремы 4 не выполняются, то существует непрерывная на E и гармоническая в E^0 функция $f(P)$, которую нельзя равномерно приблизить на E гармоническими в R^3 функциями.

Для градиентной аппроксимации с касанием имеют место следующие теоремы.

Теорема 5. Пусть E замкнутое подмножество области $D \subseteq R^3$, мера Лебега которого равна нулю $\text{meas}(E) = 0$, а $f(P)$ гладкая на E функция (непрерывная вместе с частными производными в некоторой окрестности E). Тогда для любой функции $\varepsilon(t) > 0$, $(t > 0)$, $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ существует гармоническая на E функция $g(P)$ такая, что $|f(P) - g(P)| + \|\text{grad } f(P) - \text{grad } g(P)\| \leq \varepsilon(\rho(P; \partial D))$ при $P \in E$.

Теорема 6. Если E , $f(P)$, $\varepsilon(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 5 и $O_E(D_n)$ компактны при всяком n , то существует гармоническая в D функция $H(P)$ такая, что $|f(P) - H(P)| + \|\text{grad } f(P) - \text{grad } H(P)\| \leq \varepsilon(\rho(P; \partial D))$ при $P \in E$.

Ереванский государственный университет

Շոշափումային հարմոնիկ և գրադիենտային մոտարկումներ

Դիցուք $E \subset D$ փակ ենթաբազմություն է $D \subset R^n (n \geq 2)$ տիրույթից, իսկ $g(P)$ -ն անընդհատ և դրական ֆունկցիա է որոշված E -ի վրա, հարմոնիկ E^0 -ում՝ $g(P) > 0$, երբ $P \in E$ և $\Delta g(P) = 0$, երբ $P \in E^0$: Ենթադրենք, որ $g(P) \rightarrow 0$, երբ $P \in E$ և $\rho(P; \partial D) = 0$, ուր $\rho(\cdot, \cdot)$ R^n -ի մեկ կետանոց կոմպակտիֆիկացիայի մետրիկան է:

Թեորեմ 1. Դիցուք $f(P)$ անընդհատ է E -ի վրա և հարմոնիկ E^0 -ում այնպես, որ կամայական $\tau > 0$ և կոմպակտ $F \subset E$ համար գոյություն ունի D -ում հարմոնիկ ֆունկցիա $\varphi(P)$ այնպիսի, որ $|f(P) - \varphi(P)| \leq \tau$, երբ $P \in F$: Այդ դեպքում կամայական $\varepsilon > 0$ -ի համար գոյություն ունի E -ի վրա հարմոնիկ $H(P)$ ֆունկցիա այնպիսի, որ $|f(P) - H(P)| \leq \varepsilon \cdot g(P)$, երբ $P \in E$:

Դիցուք $D_n \subset D$ ռեզուլյար տիրույթներ են այնպես, որ $D_{n+1} \supset D_n$ և $\bigcup_i D_n = D$, իսկ D_i^n կապակցված կոմպոնենտներ են կոմպակտ փակույթով $\overline{D \setminus \{D_n \cup E\}}$ բազմության համար: Նշանակենք $O_E(D_n) = \overline{D_n \cup \{\bigcup_i D_i^n\}}$ բազմությունը:

Թեորեմ 2. Եթե $f(P)$, E , $g(P)$ բավարարում են 1 թեորեմի պայմաններին և $O_D(D_n)$ կոմպակտ է կամայական n -ի համար, ապա կամայական $\varepsilon < 0$ համար գոյություն ունի D -ում հարմոնիկ $H(P)$ ֆունկցիա այնպիսի, որ $|f(P) - H(P)| \leq \varepsilon \cdot g(P)$, երբ $P \in E$:

Կիրառելով այս թեորեմներն ստացվում է լրիվ նկարագրությունը այն բազմությունների, որոնց վրա հնարավոր է շոշափումային հարմոնիկ մոտարկում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. Н. Мергелян, УМН, т. 7, вып. 2 (1952). ² Н. У. Аракедян, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 3, № 4—5 (1968) ³ А. А. Шагинян, Мат. заметки, т. 9, № 2 (1971). ⁴ N. V. Rao, Jour. of Approxim theory, vol. 12, p. 52—60 (1974).

УДК 519.95

С. В. Шахвердян

Оптимизация дискретных систем с ограничением на изменение управления

(Представлено академиком АН Армянской ССР Р. Т. Адонцем 12/VII 1982)

Рассматриваются задачи дискретного оптимального управления (ДОУ) с ограничением на полное изменение скалярного и векторного управления. В форме дискретного принципа максимума приводятся необходимые условия оптимальности. Показывается справедливость обычного принципа максимума для задач ДОУ.

Задачи оптимального управления с ограничением на полное изменение управления исследованы главным образом для непрерывных систем (¹⁻⁴). Задачи ДОУ с такого рода ограничениями ранее не рассматривались.

Задача с ограничением на изменение скалярного управления.

Пусть объект управления описывается системой уравнений

$$x(i+1) = x(i) + f(x(i), u(i)), \quad i = \overline{0, k-1} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$x(0) = x^0, \quad x(k) = x^k, \quad (2)$$

где $x(i)$ — n -мерный фазовый вектор; $u(i)$ — m -мерный управляющий вектор; f — n -мерная вектор-функция; k — целое число, определяющее длительность управляемого процесса; x^0, x^k — n -мерные известные векторы.

Требуется минимизировать сумму

$$\sum_{i=1}^{k-1} F(x(i), u(i)) \quad (3)$$

по $u(i)$ при ограничениях (1), (2) и

$$V_0^k u_j(i) \leq \varepsilon, \quad (4)$$

где $V_0^k u_j(i)$ — полное изменение функции $u_j(i)$ на интервале $[0, k]$; ε — заданное число. Функции $f(x(i), u(i))$, $F(x(i), u(i))$ предполагаются непрерывными и непрерывно-дифференцируемыми по $x(i)$ и $u(i)$.

Известно, что полное изменение функции $u(t)$, заданной на $[0, T]$, определяется как точная верхняя грань сумм вида

$$\sum_{s=1}^{\sigma} |u(t_s) - u(t_{s-1})|$$

по всевозможным разбиениям отрезка $[0, T]$ точками $t_0 = 0 < t_1 < \dots$

..., $\leq t_s = T$ (5). Для задач ДОУ разбиение отрезка $[0, k]$ осуществляется исходя из физической сущности задачи и обеспечения необходимой точности ее решения, поэтому $V_0^k u_j(i)$ может быть определено так:

$$V_0^k u_j(i) = \sum_{i=0}^{k-1} |u_j(i+1) - u_j(i)|.$$

Неравенство (4) заменим равенством

$$V_0^k u_j(i) - \varepsilon + x_{n+1}^2 = 0, \quad (5)$$

где x_{n+1} — неизвестный параметр. Из-за ввода параметра x_{n+1} задача (1) — (3), (5) стала параметрической, в силу чего система (1) должна быть дополнена уравнением

$$x_{n+1}(i+1) = x_{n+1}(i), \quad \forall i \in [0, k-1].$$

Благодаря вводу параметра x_{n+1} задача (1) — (4) сводится к стандартной задаче ДОУ с параметром, для последующего решения которой можно применять известные схемы.

$$\text{Обозначим } F^0 = F + \lambda \left[|u_j(i+1) - u_j(i)| - \frac{1}{k} (\varepsilon - x_{n+1}^2) \right],$$

$$x_0(i+1) = x_0(i) + F^0, \quad x_0(0) = 0, \quad x_0(k) = I^0 = \sum_{i=0}^{k-1} F^0(i).$$

Тогда функция Гамильтона может быть определена так: $H = \psi(i)\Phi(i)$, где $\Phi(i) = (F^0, f, f_{n+1})$, $f_{n+1}(i) = x_{n+1}(i)$, $\psi(i) = n+2$ -мерный сопряженный вектор, определяемый из системы

$$\psi(i+1) = \left(E - \frac{\partial \Phi(i)}{\partial \bar{x}(i)} \right) \psi(i), \quad i = \overline{0, k-1}, \quad (6)$$

$\psi_s(k) = -v_s$, $s = \overline{1, n}$, $\psi_{n+1}(k) = 0$, где v_s — множитель; E — единичная матрица размера n ; $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}}$ — квадратная матрица размера $n+2$; $\bar{x} = (x_0, x, x_{n+1})$. Пусть $u^*(i)$ — оптимальное управление, $x^*(i)$ — соответствующая ему при $\bar{x}(0) = (0, x^0, x_{n+1}(0))$ траектория в задаче (1) — (3), (5). Тогда имеет место

$$\max_{u(i)} H(\psi^*(i), x^*(i), u(i)) = H(\psi^*(i), x^*(i), u^*(i)), \quad (7)$$

т. е. для дискретных систем справедлив обычный принцип максимума, где $\psi^*(i)$ находится из (6). Утверждение (7) для случая выпуклости множества

$$R(x) = \{z/z = f(x, u), \quad u \in U\}$$

доказано в (6). Однако в этой же и некоторых других работах ставится под сомнение справедливость обычного принципа максимума для задач ДОУ в общем случае. К этому принципиальному вопросу мы еще вернемся.

Из системы (6) имеем

$$\psi_{n+1}(i) = \psi_{n+1}(i+1) + 2\psi_0 \lambda x_{n+1}, \quad i = \overline{0, k-1},$$

откуда с учетом $\psi_{n+1}(0) = \psi_{n+1}(k) = 0$ получим

$$\lambda x_{n+1} = 0. \quad (8)$$

Из (8) следует: а) $\lambda = 0$, $x_{n+1} \neq 0$; б) $\lambda \neq 0$, $x_{n+1} = 0$; в) $\lambda = 0$, $x_{n+1} = 0$. Для случая а) ограничение (4) не нарушается. Для случая б) имеет место $V_{0m}^k u_j(i) = \varepsilon$, $\partial H / \partial u_j(i) = 0$. В последнем уравнении

$$\psi_0 \frac{\partial F^0(i)}{\partial u_j(i)} = \psi_0 \frac{\partial F(i)}{\partial u_j(i)} + \psi_0 \lambda \frac{\partial \varphi(i)}{\partial u_j(i)},$$

где $\varphi(i)$ — левая часть уравнения (5);

$$\frac{\partial \varphi(i)}{\partial u_j(i)} = -\text{sign} \Delta u_j(i+1) + \text{sign} \Delta u_j(i). \quad (9)$$

Из выражения (9) следует

$$\frac{\partial \varphi(i)}{\partial u_j(i)} = \begin{cases} 0, & \text{если } \text{sign} \Delta u_j(i+1) = \text{sign} \Delta u_j(i) \\ \pm 2, & \text{в противном случае} \\ -\text{sign} \Delta u_j(i+1), & \text{если } i=0 \\ \text{sign} \Delta u_j(i), & \text{если } i=k-1 \end{cases}$$

где $\Delta u_j(i+r) = u_j(i+r) - u_j(i+r-1)$, $r = 0, 1$.

При этом если $\Delta u_j(i+1) = 0$, то принимается $\text{sign} \Delta u_j(i+1) = \text{sign} \Delta u_j(z)$, где z определяется из условия $\min_z \{(z-i) | \Delta u_j(z) \neq 0, z > i\}$.

Если же $\Delta u_j(i) = 0$, то $\text{sign} \Delta u_j(i) = \text{sign} \Delta u_j(z)$, где z выбирается из условия $\min_z \{(i-z) | \Delta u_j(z) \neq 0, z < i\}$.

Задача с ограничением на изменение векторного управления. Требуется минимизировать (3) при ограничениях (1), (2) и

$$V_{0m}^k u(i) = \sum_{i=0}^{k-1} \|u(i+1) - u(i)\| \leq \varepsilon, \quad (10)$$

где $\|z\|$ — норма вектора z .

Дополнительно к (1) введем в рассмотрение уравнение

$$u(i+1) = u(i) + v(i) = u(i) + \varphi(v(i)), \quad (11)$$

где $v(i)$ — m -мерный управляющий вектор; φ — m -мерная вектор-функция. Тогда (10) можно представить так: $\sum_{i=0}^{k-1} \|v(i)\| \leq \varepsilon$.

Вводом уравнения (11) по существу $u(i)$ отнесено к разряду фазовых координат, а $v(i)$ — управления, в силу чего размерность фазового пространства стала равной $n+m$.

Выполняя выкладки и преобразования, аналогичные изложенным при решении задачи (1)–(4), получим:

а) когда $\lambda = 0$, $\partial H / \partial u(i) = 0$;

б) когда же $\lambda \neq 0$, $V_{0m}^k u(i) = \varepsilon$, $\partial H / \partial v(i) = 0$.

В последнем уравнении $\frac{\partial H(i)}{\partial v_j(i)} = \psi_0 \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial v_j(i)} + \psi_{n+j}(i)$, где $\Omega = V_{0m}^k u(i) - \varepsilon + x_{n+1}^2$; λ — множитель, обеспечивающий выполнение условия $\Omega = 0$; ψ_{n+j} — переменная, сопряженная j -й компоненте вектора $u(i)$.

Если в задаче (1)–(4) φ была недифференцируемой функцией, то Ω дифференцируемая всюду на V функция, где $V = \left\{ v(i) \left| \sum_{i=0}^{k-1} \|v(i)\| \leq \varepsilon, i=0, k-1 \right. \right\}$.

Замечание. В ряде работ с помощью специально сконструированных примеров делаются попытки доказать неприменимость обычного принципа максимума для дискретных систем. Одним из таких примеров является пример: пусть уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} x_1(i+1) &= x_1(i) + 2u(i), \\ x_2(i+1) &= x_2(i) - x_1^2(i) + u^2(i), \end{aligned} \quad i=0, 1.$$

Требуется для начального состояния $x_1(0)=3, x_2(0)=0$ найти управление $u(i), i=0, 1$, доставляющее показателю качества $J=x_2(2)$ максимальное значение при ограничении $|u(i)| \leq 5$ (пример взят из (6)). В этом примере при разбивке отрезка $[0, 2]$ на два интервала $\max J = J^* = 19$, а „оптимальное“ управление равно: $u^*(0) = -2, u^*(1) = \pm 5$. Функция Гамильтона на первом шаге, т. е. при $u^*(0) = -2$, действительно принимает минимальное значение. Однако если этот же отрезок $[0, 2]$ разбить не на два интервала, а скажем, на четыре, то $J^* = 37$, а оптимальное управление принимает значения: $u^*(0) = -5, u^*(1) = 5, u^*(2) = -5, u^*(3) = 5$. На этом оптимальном управлении функция Гамильтона максимальна. Действительно, соответствующие управлению $|u^*(i)| = 5$ оптимальные $x_1(i)$ и $\psi_1^*(i)$ принимают значения

$$x_1^*(i) = \begin{cases} 3, & \text{при } i=0 \\ -2, & \text{„ } i=1 \\ 3, & \text{„ } i=2 \\ -2, & \text{„ } i=3 \end{cases} \quad \psi_1^*(i) = \begin{cases} -2, & \text{при } i=0 \\ 1, & \text{„ } i=1 \\ -1, & \text{„ } i=2 \\ 2, & \text{„ } i=3 \end{cases}$$

Для этих $x_1^*(i)$ и $\psi_1^*(i)$ функция Гамильтона запишется так:

$$H(u(i)) = \begin{cases} -2 u(0) + 0,5u^2(0) - 4,5, & \text{при } i=0 \\ u(1) + 0,5u^2(1) - 2, & \text{при } i=1 \\ -u(2) + 0,5u^2(2) - 4,5, & \text{при } i=2 \\ 2 u(3) + 0,5u^2(3) - 2, & \text{при } i=3 \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что оптимальное управление $u^*(i) = (-1)^{i+1} \times 5$ удовлетворяет условию $\max_{u(i)} H(u(i))$, что и требовалось доказать.

С увеличением числа интервалов на отрезке $[0,2]$ показатель качества увеличивается, а оптимальная траектория принимает вид скользящего режима.

Таким образом, уменьшением шага дискретизации можно добиться выполнения принципа максимума для дискретных систем в общем случае. Обеспечение выполнения принципа максимума для дискретных систем путем изменения шага (если это, конечно, возможно) сопровождается существенным улучшением критерия качества. Следовательно, в дискретных системах выбор шага приобретает качественно иной характер. Эта идея подтверждается не только рассмотренным выше примером, но и всеми существующими в литературе примерами, с помощью которых опровергается обычный принцип максимума.

Когда же шаг дискретизации задается и изменению не подлежит, тогда на оптимальной траектории максимальной должна быть функция $H^0 = H - A$, где

$$A = \int_0^u \frac{\partial H}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial u} du.$$

Доказательство этого утверждения может быть проведено так. Гиперплоскость $(\psi^*, \Delta \bar{x}^*) = 0$ является опорной конусу допустимых вариаций траекторий в его вершине в точке $\bar{x}^*$, следовательно имеет место ⁽⁶⁾

$$(\psi^*, \Delta \bar{x}^*) \leq 0, \quad (12)$$

где ψ^* находится из (6). Так как ψ является функцией u (согласно (6)), то

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) + \frac{\partial H}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial u}. \quad (13)$$

Интегрируя (13), получим

$$\int_0^u \psi \frac{\partial \psi}{\partial u} du = H - A, \quad (14)$$

откуда согласно (12) следует, что справедливо неравенство $\delta H^0 \leq 0$, так как левая часть (14) равна H^0 . Условие $\delta H^0 \leq 0$ является локальным необходимым условием максимума H^0 , следовательно утверждение верно.

Филиал Всесоюзного научно-исследовательского
института по эксплуатации
атомных электростанций

Ս. Վ. ՇԱՀՎԵՐԴՅԱՆ

Կառավարման փոփոխության սահմանափակումով դիսկրետ
համակարգերի օպտիմիզացիա

Դիտարկված են դիսկրետ կառավարման համակարգերի օպտիմիզացման խնդիրներ, երբ սկալյար և վեկտորային կառավարման ֆունկցիաների վրա դրված են սահմանափակումներ: Դիտարկված խնդիրները պարամետրիզացման եղանակներով բերված են դիսկրետ օպտիմալ կառավարման ստանդարտ խնդիրների տեսքի, որոնց համար դուրս են բերված օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանները: Ցույց է տրված, որ սովորական մաթեմատիկական պրինցիպը լրիվ կերպով կիրառելի է դիսկրետ համակարգերի համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Н. Н. Красовский, Теория управления движением, Наука, М., 1968. ² Б. Е. Чупрун, Автоматика и телемеханика, № 3, 1975. ³ Б. Е. Чупрун, Автоматика и телемеханика, № 12, 1976. ⁴ С. В. Шахвердян, ДАН АрмССР, т. 75, № 4 (1982). ⁵ А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, Наука, М., 1968. ⁶ А. И. Пропой, Элементы теории оптимальных дискретных процессов, Наука, М., 1973.

УДК 514.752.44

МАТЕМАТИКА

В. А. Мирзоян

Нормальная дефектность подмногообразия

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 27/IX 1982)

1. Пространства дефектности риманова многообразия и пространства относительной дефектности подмногообразия евклидова пространства определены и изучены Черном и Кюипером (¹).

В настоящей работе для m -мерного подмногообразия M_m n -мерного евклидова пространства R_n определяется понятие пространства нормальной дефектности и изучаются некоторые его свойства.

Чтобы перейти к более точным определениям и формулировкам, приведем некоторые необходимые сведения из римановой геометрии подмногообразий.

Пусть M_m — подмногообразие в R_n , а $T(M_m)$ и $T^\perp(M_m)$ обозначают его касательное и нормальное расслоения соответственно. Риманова связность $\tilde{\nabla}$ пространства R_n индуцирует в расслоениях $T(M_m)$ и $T^\perp(M_m)$ естественные связности: в $T(M_m)$ — связность Леви—Чивита ∇ индуцированной метрики на M_m , а в $T^\perp(M_m)$ — нормальную связность $\nabla^\perp$, которая векторным полям X и ζ как сечениям в $T(M_m)$ и $T^\perp(M_m)$ соответственно ставит в соответствие в точке $x \in M_m$ компоненту ковариантной производной $(\tilde{\nabla}_X \zeta)_x$ во втором прямом слагаемом $T_x^\perp(M_m)$ разложения $T_x(R_n) = T_x(M_m) \oplus T_x^\perp(M_m)$. При этом имеют место формулы (¹)

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha_2(X, Y), \quad (1)$$

$$\tilde{\nabla}_X \zeta = -A_\zeta(X) + \nabla_X^\perp \zeta, \quad (2)$$

где X, Y — касательные к M_m векторы поля, а ζ — нормальное к M_m векторное поле. В правых частях формул (1), (2) первые слагаемые в точке $x \in M_m$ принадлежат касательному пространству $T_x(M_m)$, а вторые слагаемые — нормальному пространству $T_x^\perp(M_m)$. В формуле (1) α_2 является билинейной симметрической формой и называется второй фундаментальной формой подмногообразия M_m . В формуле (2) A_ζ в точке $x \in M_m$ является симметрическим эндоморфизмом пространства $T_x(M_m)$ и называется вторым фундаментальным тензором, соответствующим нормальному векторному полю ζ . Имеет место тождество (²)

$$g(A_\zeta(X), Y) = g^\perp(\alpha_2(X, Y), \zeta),$$

где g и $g^\perp$ — метрики в $T(M_m)$ и $T^\perp(M_m)$ соответственно. Кроме того тензор A_ζ удовлетворяет уравнению Кодации ⁽²⁾

$$(\bar{\nabla}_X A_\zeta)(Y) = (\bar{\nabla}_Y A_\zeta)(X), \quad (3)$$

где $\bar{\nabla}$ — связность ван дер Вардена — Бортолотти ⁽²⁾.

Тензор $R^\perp$, определенный равенством $R^\perp(X, Y)\zeta = \Delta_X^\perp \Delta_Y^\perp \zeta - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \zeta - \nabla_{[X, Y]}^\perp \zeta$, называется тензором кривизны нормальной связности $\nabla^\perp$. Для любых касательных векторных полей X, Y и любых нормальных векторных полей ζ, η имеет место уравнение Риччи ⁽²⁾

$$g^\perp(R^\perp(X, Y)\zeta, \eta) = g([A_\zeta, A_\eta](X), Y) \quad (4)$$

где $[A_\zeta, A_\eta] = A_\zeta A_\eta - A_\eta A_\zeta$. Если $R^\perp \equiv 0$, то нормальная связность $\nabla^\perp$ называется плоской.

За всеми остальными сведениями отсылаем к монографии ⁽²⁾.

2. В касательном пространстве $T_x(M_m)$ в точке $x \in M_m$ определим подпространство $T_1(x)$ равенством

$$T_1(x) = \{X \in T_x(M_m); R^\perp(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in T_x(M_m)\}. \quad (5)$$

Это подпространство будем называть пространством нормальной дефектности подмногообразия M_m в точке x , а его размерность $\mu_1(x)$ — индексом нормальной дефектности в этой точке.

Очевидно, что нормальная связность подмногообразия M_m является плоской тогда и только тогда, когда $\mu_1(x) = m$ в каждой точке $x \in M_m$.

Если $R^\perp \neq 0$ в некоторой точке $x \in M_m$, то $\mu_1(x) \leq m - 2$.

Пространство $T_1(x)$ можно определять и другими способами.

Лемма 1. Условия (а) $X \in T_1(x)$, (б) $[A_\zeta, A_\eta](X) = 0$ для любых $\zeta, \eta \in T_x^\perp(M_m)$ эквивалентны.

Доказательство. Если $X \in T_1(x)$, то $R^\perp(X, Y) = 0$ для любого $Y \in T_x(M_m)$. Следовательно, из уравнения Риччи (4) будем иметь $g([A_\zeta, A_\eta](X), Y) = 0$ для любых $\zeta, \eta \in T_x^\perp(M_m)$. Отсюда в силу невырожденности метрики g получаем $[A_\zeta, A_\eta](X) = 0$. Обратно, если для некоторого $X \in T_x(M_m)$ имеем $[A_\zeta, A_\eta](X) = 0$ для любых $\zeta, \eta \in T_x^\perp(M_m)$, то из уравнения Риччи в силу произвольности η и невырожденности $g^\perp$ получим $R^\perp(X, Y)\zeta = 0$. Так как ζ и Y произвольны, то $X \in T_1(x)$. Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что пространство нормальной дефектности $T_1(x)$ можно определить равенством

$$T_1(x) = \{X \in T_x(M_m); [A_\zeta, A_\eta](X) = 0 \quad \forall \zeta, \eta \in T_x^\perp(M_m)\}. \quad (5')$$

Далее, для каждого вектора $Y \in T_x(M_m)$ определим в $T_x(M_m)$ подпространство $T_x(Y)$ следующим образом:

$$T_x(Y) = \{Z \in T_x(M_m); R^\perp(Y, Z) = 0\}.$$

Так как $R^\perp(Y, Y) = 0$, то $Y \in T_x(Y)$. Следовательно, $\mu_x(Y) = \dim T_x(Y) \geq 1$ для любого ненулевого вектора $Y \in T_x(M_m)$.

Очевидно, что $Y \in T_1(x)$ тогда и только тогда, когда $T_x(Y) = T_x(M_m)$ или, что равносильно, $\mu_x(Y) = m$. Следовательно, если

$Y \in T_1(x)$, то $\mu_x(Y) \leq m-1$. Таким образом пространство $T_1(x)$ можно определить как множество векторов $Y \in T_x(M_m)$ таких, что $T_x(Y) = T_x(M_m)$ или, что равносильно, $\mu_x(Y) = m$. Кроме того из определения пространства $T_1(x)$ следует, что $T_1(x) \subset T_x(Y)$ для любого $Y \in T_x(M_m)$. Далее, если $X \in T_x(Y)$ для любого Y , то $R^\perp(X, Y) = 0$ для любого Y , т. е. $X \in T_1(x)$. Следовательно,

$$T_1(x) = \bigcap_{Y \in T_x(M_m)} T_x(Y).$$

Лемма 2. Ортогональное дополнение $T_1^\perp(x)$ к $T_1(x)$ в $T_x(M_m)$ инвариантно относительно коммутаторов $[A_\zeta, A_\eta]$ для всех $\zeta, \eta \in T_x^\perp(M_m)$.

Приведем одну лемму общего характера, которая будет нужна в дальнейшем.

Лемма 3. Тензор кривизны нормальной связности $R^\perp$ любого подмногообразия M_m в R_n удовлетворяет следующему тождеству:

$$(\bar{\nabla}_X R^\perp)(Y, Z) + (\bar{\nabla}_Y R^\perp)(Z, X) + (\bar{\nabla}_Z R^\perp)(X, Y) = 0, \quad (6)$$

где $\bar{\nabla}$ — связность ван дер Вардена — Бортोलотти, X, Y, Z — касательные векторные поля на M_m .

З а м е ч а н и е. Лемма 3 справедлива также в том случае, когда объемлющее пространство есть риманово пространство произвольной постоянной кривизны (при доказательстве использовано уравнение (3)).

Следующая теорема описывает важное свойство пространства нормальной дефектности подмногообразия.

Теорема. Пусть пространство нормальной дефектности $T_1(x)$ подмногообразия M_m в R_n в некоторой области $U \subset M_m$ имеет постоянную размерность $\mu_1(x) = \text{const} \neq 0$. Тогда в этой области распределение T_1 инволютивно. Если тензор нормальной кривизны $R^\perp$ подмногообразия M_m параллелен в связности ван дер Вардена — Бортोलотти, то распределение T_1 параллельно и вполне геодезично, т. е. его интегральное многообразие вполне геодезично в M_m . В последнем случае ортогональное дополнение $T_1^\perp$ к T_1 в $T(M_m)$ также параллельно, и, следовательно, инволютивно и вполне геодезично.

Доказательство. Пусть $X, Y \in T_1$. Покажем, что коммутатор $[X, Y]$ также принадлежит T_1 . Действительно, если Z, ζ — произвольные касательное и нормальное векторные поля на M_m , то

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X R^\perp)(Y, Z)\zeta &= \bar{\nabla}_X(R^\perp(Y, Z)\zeta) - R^\perp(\bar{\nabla}_X Y, Z)\zeta - \\ &- R^\perp(Y, \bar{\nabla}_X Z)\zeta - R^\perp(Y, Z)\bar{\nabla}_X \zeta = -R^\perp(\bar{\nabla}_X Y, Z)\zeta. \end{aligned}$$

Вычисляя аналогично, получаем:

$$(\bar{\nabla}_Y R^\perp)(Z, X)\zeta = -R^\perp(Z, \bar{\nabla}_Y X)\zeta,$$

$$(\bar{\nabla}_Z R^\perp)(X, Y)\zeta = 0.$$

Применяя тождество (6) и учитывая, что связность ∇ имеет нулевое кручение, т. е. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, имеем:

$$0 = R^\perp(\nabla_X Y, Z)\zeta - R^\perp(\nabla_Y X, Z)\zeta = R^\perp([X, Y], Z)\zeta.$$

Отсюда в силу произвольности ζ и Z следует, что $[X, Y] \in T_1$, т. е. распределение T_1 инволютивно.

Пусть $\bar{\nabla}_Z R^\perp = 0$ для любого касательного к M_m векторного поля Z . Если $Y \in T_1$, а X и Z произвольны, то

$$0 = (\bar{\nabla}_Z R^\perp)(Y, X)\zeta = -R^\perp(\nabla_Z Y, X)\zeta.$$

Следовательно, $\nabla_Z Y \in T_1$ для любого Z и распределение T_1 параллельно. Тогда оно и вполне геодезично. Параллельность распределения $T_1^\perp$ есть следствие параллельности T_1 . Инволютивность и вполне геодезичность $T_1^\perp$ есть тривиальные следствия его параллельности. Теорема доказана.

3. Пусть M_m является римановым многообразием с тензором кривизны римановой связности R . Подпространство $T_0(x) \subset T_x(M_m)$, определенное равенством

$$T_0(x) = \{X \in T_x(M_m); R(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in T_x(M_m)\},$$

называется пространством дефектности многообразия M_m в точке $x \in M_m$, а его размерность $\mu_0(x)$ — индексом дефектности в этой точке. Если M_m изометрически погружено в евклидово пространство R_n , то индекс относительной дефектности $\nu(x)$ в точке $x \in M_m$ (M_m отождествляется с его образом в R_n) есть размерность подпространства $T'_x \subset T_x(M_m)$, определенного равенством

$$T'_x = \{X \in T_x(M_m); A_\zeta(X) = 0 \quad \forall \zeta \in T_x^\perp(M_m)\}$$

и называемого пространством относительной дефектности в точке $x \in M_m$. Эти понятия были определены Черном и Кюипером (1). Известно, что если $\mu_0(x) = \text{const}$, $\nu(x) = \text{const}$ в некоторой области на M_m , то в этой области распределения T_0 и T' инволютивны и их интегральные многообразия являются вполне геодезическими в M_m . Кроме того $T' \subset T_0$. Указанные утверждения можно найти, например, в (1,3,4).

Укажем на связь пространств T'_x , $T_0(x)$ и $T_1(x)$. Пусть $X \in T'_x$. Тогда $A_\zeta(X) = 0$ для любого $\zeta \in T_x^\perp(M_m)$. Следовательно, $[A_\zeta, A_\eta](X) = 0$ для любых $\zeta, \eta \in T_x^\perp(M_m)$ и $X \in T'_x$. Таким образом, верны включения $T'_x \subset T_1(x)$, и неравенство $\nu(x) \leq \mu_1(x)$. Так как $T'_x \subset T_0(x)$, то $T'_x \subset T_0(x) \cap T_1(x)$.

Справедливо следующее

Предложение. Пусть $T_0(x)$, T'_x , $T_1(x)$ обозначают соответственно пространство дефектности, относительной дефектности и нормальной дефектности подмногообразия $M_m \subset R_n$ в точке $x \in M_m$. Если в некоторой области $U \subset M_m$ пространства $T_0(x)$, $T_1(x)$ и пересечение $T_0(x) \cap T_1(x)$ имеют ненулевые постоянные размерности, то в этой области распределение $T_0 \cap T_1$ инволютивно.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ենթադրադամանության նորմալ դեֆեկտականությունը

Էվկլիդեսյան R_n տարածության M_m ենթաբազմադամանության x կետում $T_x(M_m)$ շոշափող տարածության մեջ

$$T_1(x) = \{X \in T_x(M_m); R^\perp(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in T_x(M_m)\}$$

համասարությունում որոշված $(R^\perp$ -ը նորմալ կապակցության տենզորն է) (T_1x) ենթատարածությունը կոչվում է $M^\perp$ ենթաբազմադամանության նորմալ դեֆեկտականության տարածություն: Ապացուցված է, որ T_1 բաշխումը լիովին ինտեգրելի է: Եթե $R^\perp$ տենզորը զուգահեռ է, ապա T_1 բաշխումը նաև զուգահեռ է և լիովին դեոդերիկ: Կապ է հաստատված ենթաբազմադամանության դեֆեկտականության, նորմալ դեֆեկտականության և հարաբերական դեֆեկտականության տարածությունների միջև:

Ապացուցված է, որ $R^\perp$ տենզորը բավարարում է հետևյալ նույնությունը.

$$(\bar{\nabla}_X R^\perp)(Y, Z) + (\bar{\nabla}_Y R^\perp)(Z, X) + (\bar{\nabla}_Z R^\perp)(X, Y) = 0,$$

որտեղ՝ $\bar{\nabla}$ -ն վան Դեր Կարդեն — Բորտոլոտիի կապակցվածությունն է, իսկ X, Y, Z — կամայական շոշափող վեկտորական դաշտեր են:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ S. S. Chern, N. H. Kuiper, Ann. of Math., v. 56, №3 (1952) ² B.-Y. Chen, Geometry of submanifolds, N. Y., Marcel Dekker, 1973. ³ P. Hartman, Trans. of AMS, v. 115 (1965). ⁴ R. Maltz, Cahiers Top. et Géom. Diff., v. 8 (1966).

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН Армянской ССР А. А. Талалян

О скорости сходимости к нулю нуль-рядов по системе Хаара

(Представлено 22/XI 1982)

Известно ^(1,2), что для любой полной в $L_2[0, 1]$ ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ существует нуль-ряд в любой метрике $L_p[0, 1]$, $0 \leq p < 1$, т. е. для любого p , $0 \leq p < 1$ существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad (1)$$

не все коэффициенты a_n , $n=1, 2, \dots$; которого равны нулю и который сходится к нулю в метрике $L_p[0, 1]$.

Здесь при $p=0$ метрикой $L_0[0, 1]$ считается метрика сходимости по мере. Для краткости мы обозначаем

$$\|f\|_p = \int_0^1 |f(x)|^p dx, \quad 0 < p < 1, \quad f \in L_p[0, 1] \quad (2)$$

и для любой почти везде конечной измеримой функции $f(x)$ полагаем

$$\|f\|_0 = \int_0^1 \frac{|f(x)| dx}{1 + |f(x)|}. \quad (3)$$

В работе П. Освальда ⁽³⁾, где рассмотрен вопрос представления функции $f(x) \in L_p[0, 1]$, $0 < p < 1$, рядами по системе Хаара, частные суммы которого имели бы наилучший порядок приближения к функции $f(x)$, приведена точная оценка скорости стремления к нулю частичных сумм нуль-рядов по системе Хаара в пространствах $L_p[0, 1]$; $0 < p < 1$.

Этот легко проверяемый результат можно сформулировать следующим образом.

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) \quad (4)$$

ряд по системе Хаара и

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k X_k(x) \quad (5)$$

частичные суммы этого ряда.

Тогда, если

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\|S_n\|_p}{1/n^{1-p}} = 0, \quad 0 < p < 1, \quad (6)$$

то все коэффициенты a_n , $n=1, 2, \dots$; ряда (4) равны нулю и вместе с тем существует ряд (4), не все коэффициенты которого равны нулю и

$$\|S_n\|_p = O(1/n^{1-p}), \quad 0 < p < 1. \quad (7)$$

В настоящей работе аналогичные точные оценки устанавливаются в случае сходимости по мере, т. е. при $p=0$, и указываются также формулы, восстанавливающие коэффициенты рядов Хаара, частичные суммы которых сходятся в метрике $L_p[0, 1]$, $0 \leq p < 1$, к данной функции $f(x)$ со скоростью, обеспечивающей единственность ряда. Отметим, что вопрос о восстановлении коэффициентов таких рядов в случае сходимости в $L_p[0, 1]$, $0 < p < 1$, был поставлен П. Освальдом. Оказывается, что коэффициенты этих рядов восстанавливаются при помощи введенного А. Н. Колмогоровым A -интеграла или же некоторыми обобщениями этого интеграла ((⁴), с. 100; (⁵), с. 585).

Определенная на отрезке $[0, 1]$ функция $f(x)$ называется A -интегрируемой, если $\mu\{x; |f(x)| \geq n\} = o(1/n)$ и существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 [f(x)]_n dx = (A) \int_0^1 f(x) dx, \quad (8)$$

где

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x) & \text{при } |f(x)| \leq n \\ 0 & \text{при } |f(x)| > n \end{cases}. \quad (9)$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Если ряд (4) по системе Хаара сходится в метрике $L_p[0, 1]$, $0 \leq p < 1$, к функции $f(x)$ со скоростью $o(1/n^{1-p})$, т. е.

$$\|S_n - f\|_p \leq \frac{\varepsilon_n}{n^{1-p}}, \quad n=1, 2, \dots; \quad (10)$$

где $0 \leq p < 1$ и $\varepsilon_n \rightarrow 0$, то $f(x)$ A -интегрируема на каждом интервале Хаара $\Delta = (i-1/2^m, i/2^m)$, $m \geq 0$, $1 \leq i \leq 2^m$, и ряд (4) является рядом Фурье—Хаара функции $f(x)$ в смысле A -интегрирования, т. е.

$$a_i = (A) \int_0^1 X_i(x) f(x) dx, \quad i=1, 2, \dots; \quad (11)$$

Теорема 2. Пусть некоторая подпоследовательность $\{S_{n_k}(x)\}$ частичных сумм ряда (4) сходится в метрике $L_p[0, 1]$, $0 \leq p < 1$ к функции $f(x)$ со скоростью $o(1/n_k^{1-p})$ и

$$\mu\{x; |f(x)| \geq n_k\} = o(1/n_k^{1-p}). \quad (12)$$

Тогда для любого $c \geq 1$ и для любого интервала Хаара Δ существует конечный предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Delta} [f(x)]_{c \cdot n_k} dx \quad (13)$$

и коэффициенты a_i ряда (4) определяются равенствами

$$a_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 X_i(x) [f(x)]_{c \cdot n_k} dx, \quad i = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Из теоремы 2 получается

Следствие. Если для некоторого p , $0 \leq p < 1$, частичные суммы $S_n(x)$ ряда (4) по системе Хаара удовлетворяют условию

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\|S_n\|}{1/n^{1-p}} = 0, \quad (15)$$

то все коэффициенты этого ряда равны нулю.

При $0 < p < 1$ это утверждение фактически приведено в (3), а в случае $p = 0$, т. е. для сходимости по мере, оно является следствием теоремы 2.

Точность оценки (15) для всех p , $0 \leq p < 1$, видна на примере ряда Хаара

$$X_1(x) + X_2(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{2^i} X_i(x), \quad (16)$$

при записи которого в виде (4) для частичных сумм $S_n(x)$ имеем

$$\|S_n\|_p = O(1/n^{1-p}), \quad 0 \leq p < 1. \quad (17)$$

В нуль-ряде (16) отличные от нуля коэффициенты a_n имеют порядок роста $O(\sqrt{n})$. В связи с этим естественно рассмотреть вопрос о нахождении точного порядка скорости стремления к нулю в метриках $L_p[0, 1]$, $0 \leq p < 1$, частичных сумм нуль-рядов по системе Хаара и определить способ восстановления коэффициентов (когда скорость приближения обеспечивает единственность ряда) в классе рядов (4), коэффициенты которых имеют более медленный порядок роста $|a_n| = o(\sqrt{n})$. Заметим при этом, что указанный класс рядов содержит все ряды Фурье—Хаара суммируемых функций.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 3. Пусть коэффициенты ряда (4) удовлетворяют условию $|a_n| = o(\sqrt{n})$ и некоторая подпоследовательность $\{S_{n_k}(x)\}$ его частичных сумм сходится к $f(x)$ в метрике $L_p[0, 1]$, $0 \leq p < 1$, со скоростью $O(1/n_k^{1-p})$, т. е.

$$\|S_{n_k}(f)\|_p \leq \frac{M}{n_k^{1-p}}, \quad M > 0, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (18)$$

Тогда существует последовательность $\alpha_k > 0$, $\alpha_k \uparrow +\infty$, для которой существуют конечные пределы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Delta} [f(x)]_{\alpha_k} dx \quad (19)$$

для всех интервалов Хаара Δ , и коэффициенты a_n ряда (4) определяются равенствами

$$a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 X_n(x) [f(x)]_{\alpha_k} dx. \quad (20)$$

Теорема 4. Для любого p , $0 \leq p < 1$, и для любой последовательности $\beta_n > 0$, $\beta_n \uparrow +\infty$, существует сходящийся в метрике $L_p[0, 1]$ к нулю ряд (4), не все коэффициенты a_n которого равны нулю, $|a_n| = o(\sqrt[n]{\beta_n})$ и частичные суммы $S_n(x)$ которого удовлетворяют неравенствам

$$\|S_n\|_p \leq \frac{M \cdot \beta_n}{n^{1-p}}, \quad M > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Институт математики Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ քղրակից-անդամ Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Հարի գրո-շարքերի գրոյի զուգամիտելու արագության մասին

Ստացված են ճշգրիտ գնահատականներ $L_p(0, 1)$, $0 < p < 1$, և ըստ Հարի մետրիկաներում Հարի շարքերի մասնակի գումարների գրոյի ձգտելու արագությունների վերաբերյալ: Ստացված են նաև այդ շարքերի գործակիցները Հարի գումարի միջոցով վերականգնելու բանաձևեր, երբ զուգամիտության արագությունն ապահովում է Հարի միակությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. А. Талалян, УМН, т. 15, № 5 (1965). ² А. А. Талалян, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 21, № 1—2 (1970). ³ P. Oswald, J. Approxim. Theory, 33, № 1 (1981).
⁴ А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, Наука, М., 1974.
⁵ Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1961.

УДК 517.535.6

МАТЕМАТИКА

Л. Д. Григорян

К одной теореме Э. Ландау

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 28/XI 1982)

1. Пусть $U = \{z : |z| < 1\}$ — единичный круг в комплексной плоскости, Γ — его граница, K — непустое подмножество U . Для любых натуральных n и $m (n \geq m)$ обозначим через $M_n^{(m)}(U, K)$ совокупность всех мероморфных функций f в круге U и таких, что

а) число полюсов f в U с учетом кратностей не превосходит n и все они принадлежат множеству K ; число геометрически различных полюсов не превосходит m ;

$$\text{б) } \|f\|_{\Gamma} = \sup_{z \in \Gamma} \lim_{\zeta \rightarrow z, \zeta \in U} |f(\zeta)| \leq 1.$$

Пусть R_f — сумма главных частей функции $f \in M_n^{(m)}(U, K)$ по всем ее полюсам в U . Положим

$$\lambda_n^{(m)}(U, K) = \sup\{\|R_f\|_{\Gamma} : f \in M_n^{(m)}(U, K)\}, \quad \lambda_n(U, K) = \lambda_n^{(n)}(U, K).$$

Если $K = U$ и $m = n$, т. е. нет никаких ограничений на расположение и число геометрически различных полюсов f в U , в работе (1) показано, что $\lambda_n(U, U) \asymp n$. Для любого множества K такого, что $\overline{K} \subset U$, имеет место следующая асимптотическая формула:

$$\lambda_n(U, K) \sim \frac{1}{\pi} \log n. \quad (1)$$

В работе (2), где установлено соотношение (1), показано, что если множество K состоит из единственной точки $a = 0$, то (1) сводится к хорошо известному результату Э. Ландау об оценке сумм Тейлора ограниченных аналитических функций в круге U (3). Из формулы (1) вытекает, что для любой фиксированной точки $a \in U$ также $\lambda_n(U, \{a\}) \sim \frac{1}{\pi} \log n$. Очевидно, что $\lambda_n^{(1)}(U) = \lambda_n^{(1)}(U, U) = \sup_{a \in U} \lambda_n(U, \{a\})$. В

настоящей заметке будет доказана следующая

Теорема. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(1)}(U)}{\log n} = \frac{2}{\pi}. \quad (2)$$

Замечание. Легко видеть, что в асимптотической формуле для $\lambda_n^{(1)}(U)$ коэффициент при $\log n$ завышается вдвое по сравнению с теоремой Э. Ландау.

2. Перейдем к доказательству теоремы; мы опускаем вычисления, связанные с обоснованием ряда дальнейших оценок.

Рассмотрим произвольную функцию $f \in M_n^{(1)}(U) = M_n^{(1)}(U, U)$.

Пусть f имеет в круге U единственный полюс в точке a , кратность которого не выше чем n . Повторяя те же рассуждения, что и в (2), получим

$$|f(z)| \leq e^{1/\log n}, \quad z \in U/g_n, \quad (3)$$

где

$$g_n = g_n(a), \quad g_n(a) = \left\{ z \in U : \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| < \rho_n \right\}, \quad \rho_n = e^{-1/n \log n};$$

здесь и далее будем считать $n > 1$. Фиксируем произвольную точку z_0 и будем оценивать $|R_A(z_0)|$, $z_0 \in \Gamma$. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 1$.

Для любой точки $a \in U$ положим

$$r'_n(a) = \inf_{z \in g_n(a)} |z-1|, \quad r''_n(a) = \sup_{z \in g_n(a)} |z-1|;$$

очевидно, $0 < r'_n(a) < r''_n(a)$. Получим оценку для отношения $r''_n(a)/r'_n(a)$.

Заметим, что если $z \in g_n(a)$, то можно взять $z = \frac{\omega+a}{1+\bar{a}\omega}$, где $|\omega| < \rho_n$.

Поэтому для произвольных точек $e^{i\theta} \in \Gamma$ и $z \in g_n(a)$ имеем

$$|e^{i\theta} - z| = \left| \frac{e^{i\theta} - a + \omega(1 - e^{i\theta}\bar{a})}{1 + \bar{a}\omega} \right| \geq \frac{(1-|a|)(1-\rho_n)}{2}.$$

Следовательно

$$r'_n(a) \geq \frac{(1-|a|)(1-\rho_n)}{2}. \quad (4)$$

Для произвольных точек $z_1, z_2 \in \partial g_n(a)$ можно считать, что

$$z_1 - z_2 = \frac{\omega_1 + a}{1 + \bar{a}\omega_1} - \frac{\omega_2 + a}{1 + \bar{a}\omega_2}, \quad |\omega_1| = |\omega_2| = \rho_n.$$

Поэтому при $|a| > \frac{1}{2}$

$$|z_1 - z_2| = \left| \frac{(1-|a|^2)}{\bar{a}} \left(\frac{1}{1+\bar{a}\omega_1} - \frac{1}{1+\bar{a}\omega_2} \right) \right| \leq 8 \frac{1-|a|}{1-\rho_n}.$$

Из последнего соотношения следует, что для $|a| > \frac{1}{2}$

$$r''_n(a) \leq r'_n(a) + 8(1-|a|)/(1-\rho_n);$$

отсюда, учитывая (4), получаем

$$\frac{r''_n(a)}{r'_n(a)} \leq \frac{16}{(1-\rho_n)^2} + 1. \quad (5)$$

Нетрудно проверить, что неравенство (5) справедливо и при $|a| \leq \frac{1}{2}$.

Положим $\sigma_n(a) = U \cap \{r'_n(a) < |z-1| < r''_n(a)\}$. Граница области $\sigma_n(a)$ состоит из дуг $L'_n(a)$ и $L''_n(a)$ окружностей $|z-1| = r'_n(a)$ и $|z-1| = r''_n(a)$ соответственно и множества $l_n(a) = \Gamma \cap \{r'_n(a) < |z-1| < r''_n(a)\}$, которое является объединением двух симметричных относительно вещественной оси дуг единичной окружности Γ .

Так как $a \in \sigma_n(a)$, а точка $z_0 = 1$ лежит вне $\sigma_n(a)$, то

$$R_f(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \sigma_n(a)} \frac{f(z) dz}{z-1}.$$

Отсюда, воспользовавшись (3), получаем

$$|R_f(1)| \leq \frac{e^{1/\log n}}{2\pi} \int_{\partial \sigma_n(a)} \frac{|dz|}{|z-1|}.$$

Далее, учитывая (5), определение чисел ρ_n и конструкцию множеств $\partial \sigma_n$, легко показать (см. (2)), что

$$|R_f(1)| \leq \left(\frac{2}{\pi} + \varepsilon_n \right) \log n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Аналогичное соотношение верно для $\|R_f\|_\Gamma$; следовательно, для всех n

$$\lambda_n^{(1)}(U) \leq \left(\frac{2}{\pi} + \varepsilon_n \right) \log n.$$

Теперь для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(1)}(U)}{\log n} \geq \frac{2}{\pi}. \quad (6)$$

Считая $0 \leq a < 1$, положим

$$K_{n,a}^*(z) = K_n \left(-\frac{z-a}{1-az} \right), \quad T_{n,a}(z) = K_{n,a}(z) \cdot K_{n,a}^*(z) \cdot \frac{1-az}{z-a},$$

где $K_n(z)$, $K_{n,a}(z)$ имеют тот же смысл, что и в (2).

Из оценки (7) работы (2) имеем

$$\left| \arg(1-az) + \arg \frac{1}{1+z} \arg K_{n,a}^*(z) \right| \leq \frac{2C_1}{\sqrt{n \left| \arg \left(-\frac{z-a}{1-az} \right) \right|}}. \quad (7)$$

Чтобы оценить $|\arg [-(z-a)/(1-az)]|$, сначала заметим, что при $z = e^{i\theta} \in \Gamma$

$$\cos \left[\arg \left(-\frac{z-a}{1-az} \right) \right] = \frac{2(1+a)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - (1-a)^2}{(1-a)^2 + 4a \sin^2 \frac{\theta}{2}},$$

$$\sin \left[\arg \left(-\frac{z-a}{1-az} \right) \right] = \frac{(a^2-1) \sin \theta}{(1-a)^2 + 4a \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

В дальнейшем будем считать $0 < 1 - a_n < 1/n$. Если $z = e^{i\theta}$ и $|\theta| \leq (1 - a_n)n/\log n$, то при всех n выполняется хотя бы одно из следующих неравенств:

$$\cos \left[\arg \left(-\frac{z - a_n}{1 - a_n z} \right) \right] \leq 0,$$

$$\left| \sin \left[\arg \left(-\frac{z - a_n}{1 - a_n z} \right) \right] \right| \geq C_2 \frac{\log n}{n}$$

(буквой C с различными индексами мы обозначаем абсолютные положительные константы).

Отсюда следует, что при тех же значениях z справедлива оценка

$$\left| \arg \left(-\frac{z - a_n}{1 - a_n z} \right) \right| \geq C_3 \frac{\log n}{n}.$$

С учетом последнего соотношения из (7) получаем

$$\left| \arg(1 - a_n z) + \arg \frac{1}{1 + z} + \arg K_{n,a_n}^*(z) \right| \leq \frac{C_4}{\sqrt{\log n}}, \quad (8)$$

$$z = e^{i\theta}, \quad |\theta| \leq C''(1 - a_n)n/\log n.$$

Из оценки (8) работы (2) имеем

$$\left| \arg(1 - a_n z) + \arg \frac{1}{1 - z} + \arg K_{n,a_n}(z) \right| \leq \frac{C_5}{\sqrt{\log n}}, \quad (9)$$

$$z = e^{i\theta}, \quad |\theta| \geq C'(1 - a_n)\log n/n.$$

Суммирование оценок (8) и (9) дает, что

$$\left| 2\arg(1 - a_n z) + \arg \frac{1}{1 + z} + \arg \frac{K_{n,a_n}(z) \cdot K_{n,a_n}^*(z)}{1 - z} \right| \leq \frac{C_6}{\sqrt{\log n}}, \quad (10)$$

$$z \in J_{n,a_n} = \{z = e^{i\theta} : C'(1 - a_n)n/\log n \leq |\theta| \leq C''(1 - a_n)n/\log n\}$$

(константы C' и C'' выбираются так, что $I_n(a_n) \subset J_{n,a_n}$). При $z \in J_{n,a_n}$, считая $|\arg[1/(1 + z)]| < C_8/\sqrt{\log n}$, получим

$$\left| \arg \frac{T_{n,a_n}(z)}{1 - z} \right| \leq \frac{C_7}{\sqrt{\log n}}. \quad (11)$$

Заметим, что $|T_{n,a_n}(z)| = 1$ при $z \in \Gamma$ и $T_{n,a_n}(z) \in M_{2n+1}^{(1)}(U)$. Повторяя те же рассуждения, что и в (2), из (11), с учетом конструкции множеств J_{n,a_n} , нетрудно получить соотношение (6). Теорема доказана.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Լ. Դ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Է. Լանդաուի մի թեորեմի վերաբերյալ

Հեղինակի (1) աշխատանքում ցանկացած $K(\bar{K} \subset U)$ բազմություն համար ստացված է

$$\lambda_n(U, K) \sim \frac{1}{\pi} \log n \quad (1)$$

ասիմպտոտական բանաձևը, որտեղ՝ $U = \{z : |z| < 1\}$ — միավոր շրջանն է կոմպլեքս հարթության վրա: Նույն աշխատանքում ցույց է տրված, որ եթե $K = \{0\}$, ապա վերը նշված բանաձևը համընկնում է միավոր շրջանում սահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիաների թեյլորյան մասնակի գումարների գնահատականի՝ է. Լանդաուի հայտնի արդյունքի հետ: (1) բանաձևից բխում է, նաև, որ U -ին պատկանող ցանկացած սկեռված a կետի համար՝

$$\lambda_n(U, \{a\}) \sim \frac{1}{\pi} \log n:$$

Ներկա հոդվածում ապացուցված է

$$\lambda_n^{(1)}(U) \sim \frac{2}{\pi} \log n$$

ասիմպտոտական բանաձևը, որտեղ ակնհայտորեն

$$\lambda_n^{(1)}(U) = \lambda_n^{(1)}(U, U) = \sup_{a \in U} \lambda_n(U, \{a\}):$$

Այսպիսով $\lambda_n^{(1)}(U)$ -ի ասիմպտոտական բանաձևում $\log n$ -ի գործակիցը երկու անգամ մեծ է է. Լանդաուի բանաձևի համապատասխան գործակիցից:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Л. Д. Григорян, Мат. сб., т. 100 (142), № 1 (1976). ² Л. Д. Григорян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 12, № 3 (1977). ³ E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Functionentheorie, Berlin, 1929.

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

В. Р. Фаталов

Точная асимптотика функции распределения максимума гауссовского неоднородного случайного поля

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 12/1 1983)

Исследование вероятностей больших отклонений гауссовских стационарных процессов и полей со степенным поведением корреляционной функции в нуле проведено достаточно полно (см. обзор ⁽¹⁾). Разработанные в работе ⁽²⁾ методы позволили получить асимптотику распределения максимума для гауссовского нестационарного процесса, дисперсия которого достигает максимума в конечном числе точек, а корреляционная функция обладает так называемым свойством локальной стационарности.

В настоящей работе сообщается результат об асимптотике $P\{\sup_{t \in T} X(t) > u\}$ при $u \rightarrow \infty$ для гауссовского неоднородного поля $X(t)$

при некоторых весьма общих ограничениях, наложенных на дисперсию и корреляционную функцию. Указан также набросок доказательства.

Следует отметить, что подобные гауссовские поля часто возникают при использовании многомерных статистик типа Колмогорова—Смирнова (см. по этому поводу ⁽³⁾). Асимптотики распределения максимума для двух таких гауссовских полей— n -мерных аналогов броуновского моста также приведены в статье.

Введем необходимые обозначения. Для натуральных чисел $e_1, \dots, e_k$ таких, что $\sum_{i=1}^k e_i = n$, для вектора $\vec{a} \in R^n$ вида

$$\alpha = (\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_1}_{e_1}, \dots, \underbrace{\alpha_k, \dots, \alpha_k}_{e_k}), \quad 2 \geq \alpha_i > 0, \quad i = 1, \dots, k$$

и для $t = (t_1, \dots, t_n)$ определим величину

$$|t|_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{e_1} t_i^2 \right)^{\frac{\alpha_1}{2}} + \dots + \left(\sum_{i=e_1+\dots+e_{k-1}+1}^n t_i^2 \right)^{\frac{\alpha_k}{2}}.$$

Аналогично для вектора $\beta = (\underbrace{\beta_1, \dots, \beta_1}_{f_1}, \dots, \underbrace{\beta_m, \dots, \beta_m}_{f_m}) \in R^n$, $\beta_i > 0$, $i = 1, \dots, m$ будем писать

$$|t|_\beta = \left(\sum_{i=1}^{f_1} t_i^2 \right)^{\frac{\beta_1}{2}} + \dots + \left(\sum_{i=f_1+\dots+f_{m-1}+1}^n t_i^2 \right)^{\frac{\beta_m}{2}}.$$

Для определенных выше векторов α, β будем употреблять также следующую запись: $\alpha = (\alpha_{(1)}, \dots, \alpha_{(n)})$, $\beta = (\beta_{(1)}, \dots, \beta_{(n)})$.

Для невырожденной матрицы A определим функцию от $t, s \in R^n$: $\rho_{A,\beta}(t, s) \equiv \rho_A(t, s) = |A(t-s)|_\beta$, определим также $\rho_A(t, G) = \inf_{s \in G} \rho_A(t, s)$, $G \subset R^n$. Через $\rho(t, s) \equiv |t-s|$ обозначим евклидово расстояние между точками t и s .

Пусть $X(t)$ — гауссовское сепарабельное случайное поле с нулевым средним, заданное на замкнутом ограниченном множестве $T \subset R^n$. Обозначим через $r(t, s)$ корреляционную функцию поля $X(t)$, через σ_t^2 — его дисперсию. Для множества $S \subset T$ определим его „ ε -окрестность“: $S^\varepsilon = \{t \in T : \rho(t, S) \leq \varepsilon\}$.

В дальнейшем предполагаем, что поле $X(t)$ удовлетворяет следующим четырем условиям.

(I) Дисперсия σ_t^2 непрерывна на T и имеет место соотношение $\sigma_t^2 = \sigma - \rho_A(t, T_0) + o(\rho_A(t, T_0))$, $\rho_A(t, T_0) \rightarrow 0$, где T_0 — множество достижения максимума, равного $\sigma^2 > 0$, дисперсией σ_t^2 , причем существует такое открытое в R^n множество U , что $T_0 \subset \bar{U} \subset T$. Для некоторого $\varepsilon > 0$ и для любого $\tau > 0$ $\sup_{t, s \in T_0^\varepsilon, |t-s| > \tau} EX(t)X(s) < \sigma^2$.

(II) Для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех $t, s \in T_0^\varepsilon$ выполнено соотношение (условие локальной стационарности) $r(t, s) = 1 - |D(t, s)(t-s)|_\alpha + o(|t-s|_\alpha)$, $|t-s| \rightarrow 0$, где $D(t, s) \equiv (d_{ij}(t, s))_{i,j=1,\dots,n}$ — матричная функция, заданная на $T \times T$, причем элементы матрицы $d_{ij}(t, s)$ непрерывны на $T_0^\varepsilon \times T_0^\varepsilon$, $|\det D(t, t)| > 0$ п. в. на T_0^ε .

(III) Для некоторых $C > 0$, $\gamma > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ и всех $t, s \in T$ таких, что $|t-s| < \varepsilon_1$, выполнено неравенство $|1 - r(t, s)| \leq C \sum_{i=1}^n |t_i - s_i|^\gamma$.

(IV) Векторы β, α , участвующие в условиях (I), (II), связаны соотношением $\beta_{(i)} > \alpha_{(j)}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Результат статьи останется справедливым, если наряду с условиями (I), (II), (IV) вместо (III) требовать выполнения следующего условия (III'): существуют константы $C > 0$, $\gamma > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ такие, что для $t, s \in T$, $|t-s| < \varepsilon_1$ справедливо неравенство $E(X(t) - X(s))^2 \leq C \sum_{i=1}^n |t_i - s_i|^\gamma$.

Определим для $S > 0$ величину (см. (4))

$$H_\alpha(S) = 1 + \int_0^\infty e^x P \left\{ \sup_{t \in [0, S]^n} \chi(t) > x \right\} dx,$$

где $\chi(t)$ — гауссовское поле с п. н. непрерывными траекториями,

$$E\chi(t) = -|t|_\alpha, \text{Cov}(\chi(t), \chi(s)) = |t|_\alpha + |s|_\alpha - |t-s|_\alpha.$$

В работе (4) доказано, что существует предел $H_\alpha = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{H_\alpha(S)}{S^n}$, $0 <$

$$< H_\alpha < \infty. \text{ Обозначим } \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Сформулируем основную теорему данной заметки.

Теорема 1. При выполнении условий (I) — (IV), или условий (I), (II), (III'), (IV) для любой функции $h(u)$ такой, что при $u \rightarrow \infty$

$$\frac{u^2 h(u)}{\ln u} \rightarrow \infty,$$

верно асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} P\left\{\sup_{t \in T} X(t) > u\right\} &= H_a \prod_{i=1}^k \left(\frac{u}{\sigma}\right)^{\frac{2e_i}{a_i}} \psi\left(\frac{u}{\sigma}\right) \times \\ &\times \int \exp\left(-\frac{u^2}{\sigma^3} \rho_A(t, T_0)\right) |\det D(t, t)| dt (1 + o(1)), \quad u \rightarrow \infty \\ &\{t \in T : \rho_A(t, T_0) \leq h(u)\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Схема доказательства. С помощью линейного преобразования множества T и изменения масштаба убеждаемся, что достаточно ограничиться случаем, когда матрица A в условии (1) есть единичная матрица I , а $\sigma = 1$. Обозначим для краткости записи правую часть соотношения (1) через $Q_h(u)$.

Доказательство состоит из нескольких этапов. Существует непрерывная функция $\delta(u) \leq h(u)$, удовлетворяющая при $u \rightarrow \infty$ соотношениям

$$\delta(u) \downarrow 0, \quad \frac{u^2 \delta(u)}{\ln u} \rightarrow \infty, \quad u \delta(u) \rightarrow 0. \quad (2)$$

Легко убедиться, что $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{Q_h(u)}{Q_\delta(u)} = 1$.

Для функции $\delta(u)$ выделяется множество $T_\delta = \{t \in T : \rho_I(t, T_0) \leq \delta\}$ и доказывается, что

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\left\{\sup_{t \in T} X(t) > u\right\}}{P\left\{\sup_{t \in T_\delta} X(t) > u\right\}} = 1. \quad (3)$$

Далее доказывается, что с точки зрения асимптотического поведения вместо поля $X(t)$ можно рассматривать поле

$$X^c(t) = X(t) / (c_I(1 + c\rho_I(t, T_0))),$$

корреляционная функция которого равна $r(t, s)$, а дисперсия поля $X^c(t)$ в силу условия (1) близка на T_δ при $c \approx 1$ к дисперсии поля $X(t)$. Затем множество T_δ разбивается измельчающейся с ростом u решеткой, образованной множествами

$$A_{l, \theta} = \{t \in T : l_i \theta_i \leq t_i \leq (l_i + 1) \theta_i, \quad i = 1, \dots, n\},$$

где $l = (l_1, \dots, l_n)$ — вектор с целочисленными координатами, $\theta = \theta(u) = (\theta_1(u), \dots, \theta_n(u))$ — непрерывная вектор-функция от u , причем для $i, j = 1, \dots, n$ при $u \rightarrow \infty$ выполнены соотношения

$$\theta_i(u) \downarrow 0, \quad \delta / \theta_i^3 \rightarrow \infty, \quad \theta_i u^{\frac{2}{a(i)}} \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Дальнейшие рассуждения основаны на неравенстве Бонферрони:

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathcal{L}^+} P\left\{\sup_{t \in A_{l, \theta}} X^c(t) > u\right\} &\geq P\left\{\sup_{t \in T_\delta} X^c(t) > u\right\} \geq \\ &\geq \sum_{l \in \mathcal{L}^-} P\left\{\sup_{t \in A_{l, \theta}} X^c(t) > u\right\} - \sum_{l, l' \in \mathcal{L}^+, l \neq l'} P\left\{\sup_{t \in A_{l, \theta}} X^c(t) > u, \sup_{t \in A_{l', \theta}} X^c(t) > u\right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\mathcal{L}^+(\mathcal{L}^-)$ — множество кубов $A_{1,0}$, имеющих с T_δ непустое пересечение (содержащихся в T_δ).

На каждом кубе $A_{1,0}$, $1 \in \mathcal{L}^\pm$ в силу условия (II) и теоремы сравнения Слепяна ⁽⁵⁾ можно осуществить переход от поля $X^\epsilon(t)$ к некоторому однородному гауссовскому полю. Используя теорему 1 из статьи ⁽⁴⁾ и понятие интеграла Лебега, находим, что асимптотики обеих сумм в (5) совпадают и равны $Q_\delta(u)$, оценка двойной суммы в (5) показывает, что при $u \rightarrow \infty$ она есть величина бесконечно малого порядка относительно $Q_\delta(u)$.

Теорема 2. Пусть гауссовское сепарабельное поле $X(t)$, $t \in T$, $EX(t) = 0$ удовлетворяет условиям (I) — (III) с множеством T_0 , состоящим из одной точки t_0 , которая является внутренней точкой множества T . Тогда если $\beta_{(i)} > \alpha_{(i)}$, $i, j = 1, \dots, n$, то

$$P\left\{\sup_{t \in T} X(t) > u\right\} = H_2 2^m \pi^{\frac{n}{2}} \frac{|\det D(t_0, t_0)|}{|\det A|} \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma\left(\frac{f_i}{\beta_i}\right)}{\beta_i \Gamma\left(\frac{f_i}{2}\right)} \times \\ \times \prod_{i=1}^k \left(\frac{u}{\sigma}\right)^{\frac{2e_i}{\alpha_i}} \prod_{i=1}^m \left(\frac{\sigma^3}{u^2}\right)^{\frac{f_i}{\beta_i}} \psi\left(\frac{u}{\sigma}\right) (1 + o(1)), \quad u \rightarrow \infty;$$

если $\beta_{(i)} < \alpha_{(i)}$, $i = 1, \dots, n$, то

$$P\left\{\sup_{t \in T} X(t) > u\right\} = \psi\left(\frac{u}{\sigma}\right) (1 + o(1)), \quad u \rightarrow \infty.$$

В качестве применения теоремы 1 приведем результаты об асимптотиках функций распределения максимума двух гауссовских полей, являющихся предельными для некоторых многомерных статистик Колмогорова. Эти асимптотики были найдены в работе ⁽³⁾ непосредственным вычислением.

Теорема 3. Пусть $W_1(t)$, $t \in [0, 1]^n$ — гауссовское поле с нулевым средним и ковариационной функцией

$$r_1(t, s) = \prod_{i=1}^n (\min(t_i, s_i) - t_i s_i).$$

Тогда

$$P\left\{\sup_{t \in [0, 1]^n} W_1(t) > u\right\} = 2^{n^2-n} (\sqrt{2\pi} u)^{n-1} \exp(-2^{2n-1} u^2) (1 + o(1)), \quad u \rightarrow \infty.$$

Теорема 4. Для гауссовского поля $W_2(t)$, $t \in [0, 1]^n$ с нулевым средним и ковариационной функцией

$$r_2(t, s) = \prod_{i=1}^n \min(t_i, s_i) - \prod_{i=1}^n t_i s_i$$

справедливо

$$P\left\{\sup_{t \in [0, 1]^n} W_2(t) > u\right\} = (4 \ln 2)^{n-1} u^{2n-2} \exp(-2u^2) (1 + o(1)), \quad u \rightarrow \infty.$$

В заключение автор выражает благодарность В. И. Питербаргу за постоянное внимание и руководство работой.

Ереванский государственный университет

Ոչ համասեռ գաուսյան պատահական դաշտի մաքսիմումի բաշխման ֆունկցիայի ճշգրիտ ասիմպտոտիկա

Հոդվածում բերված է ոչ համասեռ գաուսյան պատահական $X(t)$ դաշտի մաքսիմումի բաշխման ֆունկցիայի ճշգրիտ ասիմպտոտիկան, երբ դաշտը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

ա) $X(t)$ դաշտի դիսպերսիան R^n տարածության փակ և սահմանափակ բազմության վրա հասնում է իր մաքսիմումին,

բ) $X(t)$ կոռելյացիոն ֆունկցիան օժտված է լոկալ ստացիոնարության հատկությամբ:

Հոդվածի արդյունքները կարելի է կիրառել մեծ շեղումների հավանականությունների ասիմպտոտիկան գտնելու խնդրի այնպիսի գաուսյան դաշտերի դեպքում, որոնք թույլ սահմաններ են Կոլմոգորովի բազմաչափ ստատիստիկաները:

Աշխատանքում բերված են այդ տիպի կիրառությունները բրոունյան կամուրջի n -չափանի համանմանի համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. И. Питербарг, в кн. Случайные процессы, сер. Математика. Новое в зарубежной науке, вып. 10, Мир, М., 1978. ² В. И. Питербарг, В. П. Присяжнюк, Теория вероятностей и мат. статистика, т. 18 (1978). ³ В. И. Питербарг, В. Р. Фаталов, в сб.: Вероятностно-статистические методы исследований, Изд-во МГУ, 1983. ⁴ Ю. К. Беляев, В. И. Питербарг, в сб.: Выбросы случайных полей, Изд-во МГУ, 1972. ⁵ D. Slepian, Bell System Technical Journal, v. 41, № 2 (1962).

УДК 539.3.01 517.944

МЕХАНИКА

С. С. Заргарян

Об асимптотике решений системы сингулярных интегральных уравнений, порожденной уравнениями Ламе, в окрестности угловых точек контура

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 2/XII 1982)

Определение асимптотики решений интегральных уравнений вблизи угловых точек контура представляет значительный теоретический интерес и оказывается полезным и эффективным при численной реализации их решений (см. ⁽¹⁾).

В настоящей работе получена асимптотика решений системы сингулярных интегральных уравнений плоской задачи теории упругости вблизи угловых точек контура. Рассматривается система интегральных уравнений теории потенциала, которая получается при решении первой краевой задачи для системы уравнений Ламе. Для определения асимптотики решений интегральных уравнений применяется метод, использованный ранее в ⁽²⁾ для исследования асимптотики решений интегральных уравнений теории логарифмического потенциала со смешанными краевыми условиями. Здесь мы рассматриваем первую внутреннюю задачу плоской теории упругости, когда на контуре заданы смещения.

Пусть $\partial\Omega$ простая замкнутая кусочно-гладкая кривая с конечным числом угловых точек $p_1, p_2, \dots, p_m$. Обозначим через $\Omega^{(i)}$ ограниченную область, расположенную внутри, а через $\Omega^{(e)}$ область, внешнюю по отношению к $\partial\Omega$. Раствор угла между полукасательными в точке p_j со стороны области $\Omega^{(i)}$ обозначим $2\alpha_j$. Допустим, что $0 < \alpha_j < \pi$ при $j = 1, 2, \dots, m$.

Как известно, решение плоской задачи теории упругости при заданных на границе смещениях сводится к решению следующей краевой задачи для системы Ламе:

$$Au^{(i)} \equiv \mu \Delta \vec{u}^{(i)} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \vec{u}^{(i)} = 0 \text{ в } \Omega^{(i)}, \quad \vec{u}^{(i)}|_{\partial\Omega} = \vec{g}, \quad (1)$$

где λ и μ — коэффициенты Ламе.

Решение задачи (1.1) будем искать в виде обобщенного упругого потенциала двойного слоя ⁽³⁾

$$(W\vec{\varphi})(x) = \int_{\partial\Omega} [T(\partial_y, n)\Gamma(y-x)]^* \vec{\varphi}(y) d_y s, \quad (2)$$

где $\vec{\varphi}$ — искомая вектор-функция, $\Gamma(y-x) = (2 \times 2)$ матрица Кедьвина —

Сомильяна с элементами $\Gamma_{ij} = a\delta_{ij}\log r^{-1} + b[(y_i - x_i)(y_j - x_j)]/r^2$, $T(\partial_y, n)$ — матричный дифференциальный оператор с элементами $T_{ij} = \lambda n_j(y) \partial/\partial y_j + \mu n_i(y) \partial/\partial y_i + \mu \delta_{ij} \partial/\partial n$, $i, j = 1, 2$; $a = (\lambda + 3\mu)/2\pi\mu(\lambda + 2\mu)$, $b = (\lambda + \mu)/2\pi\mu(\lambda + 2\mu)$, $n = \{n_1, n_2\}$ — единичная нормаль в точке контура, знак * означает переход к сопряженной матрице.

Учитывая граничные свойства потенциала (2), получаем систему сингулярных интегральных уравнений (4)

$$-\vec{\varphi}(x) + \int_{\partial\Omega} [T(\partial_y, n)\Gamma(y-x)]^* \vec{\varphi}(y) d_y s = \vec{g}(x), \quad x \in \partial\Omega \setminus \bigcup_j U p_j, \quad (3)$$

разрешимость которой в весовых классах Гельдера исследована в (5). Ниже при нахождении асимптотики мы не будем уточнять пространства, которым принадлежат рассматриваемые функции, и для простоты будем считать вектор $\vec{g}$ гладким.

Выразим решение системы (3) через решение некоторой вспомогательной задачи. Обозначим через $v^{(e)}$ решение задачи

$$Av^{(e)} = 0 \text{ в } \Omega^{(e)}, \quad T(\partial_x, n)v^{(e)}/\partial\Omega = (T(\partial_x, n)u^{(i)} - T(\partial_x, n)u^{(e)})/\partial\Omega, \quad (4)$$

стремящееся к нулю на бесконечности.

Пусть $u^{(e)}$ решение задачи

$$Au^{(e)} = 0 \text{ в } \Omega^{(e)}, \quad u^{(e)}/\partial\Omega = \vec{g}. \quad (5)$$

На основании формулы Бетти будем иметь при $x \in \partial\Omega \setminus \bigcup_j U p_j$

$$\vec{u}^{(i)}(x) = - \int_{\partial\Omega} \vec{u}^{(i)}(y) [T(\partial_y, n)\Gamma(y-x)]^* d_y s + \int_{\partial\Omega} \Gamma(y-x) T(\partial_y, n) \vec{u}^{(i)}(y) d_y s; \quad (6)$$

$$\vec{u}^{(e)}(x) = \int_{\partial\Omega} \vec{u}^{(e)}(y) [T(\partial_y, n)\Gamma(y-x)]^* d_y s - \int_{\partial\Omega} \Gamma(y-x) T(\partial_y, n) \vec{u}^{(e)}(y) d_y s + 2\vec{u}^{(e)}(\infty). \quad (7)$$

Складывая (6) и (7), находим

$$2\vec{g} = \int_{\partial\Omega} \Gamma(y-x) [T(\partial_y, n) \vec{u}^{(i)}(y) - T(\partial_y, n) \vec{u}^{(e)}(y)] d_y s + 2\vec{u}^{(e)}(\infty), \quad (8)$$

где $\vec{u}^{(e)}(\infty)$ — предельное значение вектора $u^{(e)}$ на бесконечности.

Учитывая, что решение задачи (4) при $x \in \partial\Omega \setminus \bigcup_j U p_j$ имеет представление

$$\vec{v}^{(e)}(x) = \int_{\partial\Omega} \vec{v}^{(e)}(y) [T(\partial_y, n)\Gamma(y-x)]^* d_y s - \int_{\partial\Omega} \Gamma(y-x) T(\partial_y, n) \vec{v}^{(e)}(y) d_y s, \quad (9)$$

принимая во внимание (8) и равенство

$$\int_{\partial\Omega} [T(\partial_y, n)\Gamma(y-x)]^* d_y s = E, \quad x \in \partial\Omega \setminus p_j,$$

где E — единичная матрица, получаем

$$\vec{\varphi} = \frac{1}{2} \left(\vec{v}^{(e)} - \vec{u}^{(e)}(\infty) \right). \quad (10)$$

Для простоты предположим, что вблизи точки p_j область совпадает с сектором $\{x_1 + ix_2 = \rho e^{i\theta}; 0 < \rho < \delta, -\alpha < \theta < \alpha\}$.

Рассмотрим случай $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. При $x \in \Omega^{(i)}$ и $\rho \rightarrow 0$

$$u^{(i)} = \vec{g}(0) + \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_1}(0)x_1 + \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_2}(0)x_2 + \vec{O}(\rho^{1+\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0. \quad (11)$$

Аналогично при $x \in \Omega^{(e)}$

$$\begin{aligned} u^{(e)} = & \vec{g}(0) + \vec{e}_\rho d\rho^{\lambda_u} \left\{ \frac{\sin(\lambda_u - 1)(\pi - \alpha)}{\sin(\lambda_u + 1)(\pi - \alpha)} \sin(\lambda_u + 1)\theta - \sin(\lambda_u - 1)\theta \right\} + \\ & + \vec{e}_\theta v_2 d\rho^{\lambda_u} \left\{ -\frac{\cos(\lambda_u - 1)(\pi - \alpha)}{\cos(\lambda_u + 1)(\pi - \alpha)} \cos(\lambda_u + 1)\theta + \cos(\lambda_u - 1)\theta \right\} + \\ & + \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_1}(0)x_1 + \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_2}(0)x_2 + \vec{O}(\rho^{1+\varepsilon}), \quad v_2 = \frac{x + \lambda_u}{x - \lambda_u}, \end{aligned} \quad (12)$$

где x — упругая постоянная, равная 3—4 ν при плоской деформации; ν — коэффициент Пуассона; λ_u — корень уравнения $x \sin 2\lambda(\pi - \alpha) + \lambda \sin 2(\pi - \alpha) = 0$ с наименьшей положительной действительной частью. Случай кратных корней λ_u не рассматривается.

Так как вектор-функции (11) и (12) можно дифференцировать, то, вычисляя оператор напряжений $T(\partial_u, n)$ при $x \in \partial\Omega \setminus p_j$, $\rho \rightarrow 0$ и решая задачу (4), получаем

$$\begin{aligned} v^{(e)} \sim & v^{(e)}(0) + \vec{e}_\rho B\rho^{\lambda_l} \left\{ \frac{\lambda_l + 1}{x - \lambda_l} \frac{\cos(\lambda_l - 1)(\pi - \alpha)}{\cos(\lambda_l + 1)(\pi - \alpha)} \cos(\lambda_l + 1)\theta + \right. \\ & + \cos(\lambda_l - 1)\theta \left. \right\} + \vec{e}_\theta (x - \lambda_l)^{-1} B\rho^{\lambda_l} \left\{ -(\lambda_l - 1) \frac{\sin(\lambda_l - 1)(\pi - \alpha)}{\sin(\lambda_l + 1)(\pi - \alpha)} \sin(\lambda_l + 1)\theta + \right. \\ & + (x + \lambda_l) \sin(\lambda_l - 1)\theta \left. \right\}, \quad -(\pi - \alpha) \leq \theta \leq \pi - \alpha, \end{aligned} \quad (13)$$

где λ_l — корень уравнения $\sin 2\lambda(\pi - \alpha) + \lambda \sin 2(\pi - \alpha) = 0$ с наименьшей действительной частью. Доказывается, что $\lambda_l < \lambda_u$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. По-

этому в главном члене асимптотики (13) участвует число λ_l . Итак, при $r \rightarrow 0$ на основании (10) имеем

$$\begin{aligned} \vec{\varphi} - \vec{\varphi}(0) \sim & \vec{e}_\rho \frac{1}{2} B\rho^{\lambda_l} \left[\frac{\lambda_l + 1}{x - \lambda_l} + 1 \right] \cos(\lambda_l - 1)(\pi - \alpha) + \\ & + \vec{e}_\theta \frac{1}{2} \rho^{\lambda_l} B \left[\mp \frac{\lambda_l - 1}{x - \lambda_l} \pm v_1 \right] \sin(\lambda_l - 1)(\pi - \alpha), \quad v_1 = \frac{x + \lambda_l}{x - \lambda_l}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь во второй скобке верхние знаки соответствуют лучу $\theta = \pi - \alpha$, а нижние — лучу $\theta = -(\pi - \alpha)$.

Постоянную B будем определять методом, предложенным в (8). Применяя формулу Бетти к вектор-функциям $\vec{v}^{(e)}$ и $\vec{\zeta}^{(e)}$ по области

$\Omega^{(e)} = \Omega^{(e)} \cap \{y - x\} > \varepsilon$ при $x = p_j$ и $\varepsilon \rightarrow 0$, где $\vec{v}^{(e)}$ определяется по (13), а $\vec{\zeta}^{(e)}$ — решение задачи

$$A\vec{\zeta}^{(e)} = 0 \text{ в } \Omega^{(e)}, \quad T(\partial_x, n)\vec{\zeta}^{(e)} = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus p_j, \quad (15)$$

имеющее асимптотику

$$\vec{\zeta}^{(e)} \sim \vec{e}_\rho \rho^{-\lambda_t} \left\{ -\frac{\lambda_t - 1}{x + \lambda_t} \frac{\cos(\lambda_t + 1)(\pi - \alpha)}{\cos(\lambda_t - 1)(\pi - \alpha)} \cos(\lambda_t - 1)\theta + \cos(\lambda_t + 1)\theta \right\} + \\ + \vec{e}_\theta (x + \lambda_t)^{-1} \rho^{-\lambda_t} \left\{ -(\lambda_t + 1) \frac{\sin(\lambda_t + 1)(\pi - \alpha)}{\sin(\lambda_t - 1)(\pi - \alpha)} \sin(\lambda_t - 1)\theta - (x - \lambda_t) \sin(\lambda_t + 1)\theta \right\},$$

получаем

$$B = k_1^{-1}(\alpha) \int_{\partial\Omega} \zeta^{(e)} T(\partial_y, n) \vec{u}^{(i)} d_y s.$$

Продолжая вектор-функцию $\zeta^{(e)}$ в область $\Omega^{(i)}$, решением задачи $A\vec{z}^{(i)} = 0$ в $\Omega^{(i)}$, $\vec{z}^{(i)} = \vec{\zeta}^{(e)}$ на $\partial\Omega \setminus \bigcup_j p_j$ получаем

$$B = k_1^{-1}(\alpha) \int_{\partial\Omega} (\vec{g} - \vec{g}(0)) T(\partial_y, n) \vec{z}^{(i)} d_y s. \quad (16)$$

Формулы (14) и (16) определяют главный член асимптотики вектор-функции $\vec{\varphi} - \vec{\varphi}(0)$ в случае $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Пусть теперь $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

При $x \in \Omega^{(i)}$ и $\rho \rightarrow 0$ решения задач (1) и (5) имеют асимптотику

$$\vec{u}^{(i)} = \vec{g}(0) + \vec{e}_\rho G \rho^{\lambda_u} \left\{ \frac{\sin(\lambda_u - 1)\alpha}{\sin(\lambda_u + 1)\alpha} \sin(\lambda_u + 1)\theta - \sin(\lambda_u - 1)\theta \right\} + \\ + \vec{e}_\theta G \rho^{\lambda_u} \left\{ \frac{\sin(\lambda_u - 1)\alpha}{\sin(\lambda_u + 1)\alpha} \cos(\lambda_u + 1)\theta + \nu_2 \cos(\lambda_u - 1)\theta \right\} + \\ + \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_1}(0) x_1 + \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_2}(0) x_2 + O(\rho^{1+\varepsilon}), \quad (17)$$

$$\vec{u}^{(e)} = \vec{g}(0) + \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_1}(0) x_1 + \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_2}(0) x_2 + O(\rho^{1+\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0. \quad (18)$$

Решая задачу (4), учитывая дифференцируемость вектор-функций (17) и (18), при $x \in \partial\Omega \setminus p_j$ и $\rho \rightarrow 0$ получаем

$$\vec{v}^{(e)} \sim \vec{v}^{(e)}(0) + \vec{e}_\rho \rho^{\lambda_u} \{ D_1 \sin(\lambda_u + 1)\theta - D_3 \sin(\lambda_u - 1)\theta \} + \\ + \vec{e}_\theta \rho^{\lambda_u} \{ D_1 \cos(\lambda_u + 1)\theta + \nu_2 D_3 \cos(\lambda_u - 1)\theta \}, \quad -(\pi - \alpha) \leq \theta \leq \pi - \alpha, \quad (19)$$

где

$$D_1 = G [\sin 2\lambda_u (\pi - \alpha) - \lambda_u \sin 2(\pi - \alpha)]^{-1} \left\{ \lambda_u \frac{\sin(\lambda_u - 1)\alpha}{\sin(\lambda_u + 1)\alpha} \sin[\pi(\lambda_u - 1) + 2\alpha] + \right.$$

$$+ \frac{\sin(\lambda_u - 1)\alpha}{\sin(\lambda_u + 1)\alpha} \sin[\pi(\lambda_u - 1) - 2\alpha\lambda_u] - \frac{\lambda_u^2 - 1}{2\lambda_u} (1 - \nu_2) \sin \pi(\lambda_u - 1) \Big\}.$$

$$D_3 = 2G\lambda_u [\sin 2\lambda_u(\pi - \alpha) - \lambda_u \sin 2(\pi - \alpha)]^{-1} \Big\{ 2\lambda_u \frac{\sin(\lambda_u - 1)(\pi - \alpha)}{\sin(\lambda_u + 1)(\pi - \alpha)} \sin(\lambda_u + 1)\pi -$$

$$- \lambda_u(1 - \nu_2) \sin[\pi(\lambda_u + 1) - 2\alpha] + (1 - \nu_2) \sin[\pi(\lambda_u + 1) - 2\lambda_u\alpha] \Big\}.$$

В силу (10) имеем

$$\vec{\varphi} - \vec{\varphi}(0) \sim \pm \vec{e}_\rho \frac{1}{2} \rho^{\lambda_u} \Big\{ D_1 \sin(\lambda_u + 1)(\pi - \alpha) - D_3 \sin(\lambda_u - 1)(\pi - \alpha) \Big\} +$$

$$+ \vec{e}_\theta \frac{1}{2} \rho^{\lambda_u} \Big\{ D_1 \cos(\lambda_u + 1)(\pi - \alpha) + \nu_2 D_3 \cos(\lambda_u - 1)(\pi - \alpha) \Big\}. \quad (20)$$

Здесь верхний знак соответствует лучу $\theta = \pi - \alpha$, а нижний — лучу $\theta = -(\pi - \alpha)$.

Постоянную G будем определять аналогично предыдущему случаю:

$$G = -k_2^{-1}(\alpha) \int_{\partial\Omega} (\vec{g} - \vec{g}(0)) T(\partial_y, n) \vec{\zeta}^{(i)} ds, \quad (21)$$

где $\vec{\zeta}^{(i)}$ решение задачи

$$A\vec{\zeta}^{(i)} = 0 \text{ в } \Omega^{(i)}, \quad \vec{\zeta}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus p_j,$$

имеющее асимптотику

$$\vec{\zeta}^{(i)} \sim \vec{e}_\rho \rho^{-\lambda_u} \Big\{ - \frac{\sin(\lambda_u + 1)\alpha}{\sin(\lambda_u - 1)\alpha} \sin(\lambda_u - 1)\theta + \varepsilon \sin(\lambda_u + 1)\theta \Big\} +$$

$$+ \vec{e}_\theta \rho^{-\lambda_u} \Big\{ \frac{\sin(\lambda_u + 1)\alpha}{\sin(\lambda_u - 1)\alpha} \cos(\lambda_u - 1)\theta + \nu_2 \cos(\lambda_u + 1)\theta \Big\}, \quad -\alpha \leq \theta \leq \alpha.$$

В (16) и (21) k_1 и k_2 — константы, зависящие от упругих постоянных и величины угла области.

Формулы (20) и (21) определяют главный член асимптотики вектор-функции $\vec{\varphi} - \vec{\varphi}(0)$ в случае $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

127

Ս. Ս. ԶԱՐԴԱՐՅԱՆ

Լամբի հավասարումներից ստացված սինգուլյար ինտեգրալ
հավասարումների համակարգի լուծումների վարժագիրը,
Եզրագծի անկյունային կետերի շրջակայքում

Առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծման համար դիտարկվում է Լամբի հավասարումներից ստացված սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգը անկյուններ ունեցող տիրույթների դեպքում:

Հայտնի է, որ եզրային ինտեգրալ հավասարումները բավականաչափ

ճշտությամբ լուծելու համար անհրաժեշտ է ուսումնասիրել նրանց լուծումների վարքագիծը անկյունային կետերի շրջակայքում: Հոդվածը նվիրված է այդ համակարգի լուծումների վարքագծի ուսումնասիրությանը այն դեպքում, երբ տիրույթի նզրում տրված են տեղափոխությունները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. С. Заргарян, Изв. АН СССР, МТТ, № 3, 1982. ² С. С. Заргарян, В. Г. Мазья, Вестн. ЛГУ им. А. А. Жданова, № 1, 1983. ³ В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегелиа, М. О. Башелейшвили и др., Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости, Наука, М., 1976. ⁴ Н. С. Кахниашвили, Тр. Тбил. ун-та, вып. 50 (1953). ⁵ В. Г. Мазья, Тез. докладов школы-семинара «Теория упругости и вязкоупругости» в Цахкадзоре, Ереван, Изд. АН АрмССР, 1982. ⁶ В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, Math. Nachr., вып. 76 (1977).

УДК 530.145

ФИЗИКА

Н. С. Ананикян, Г. Л. Балаян

Суммирование диаграмм с помощью преобразования Лежандра по скалярному параметру. Высшие порядки

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. Г. Матиняном 20/VII 1982)

Стандартная теория возмущений по малой константе связи (λ) в применении к задаче ангармонического осциллятора дает хорошие результаты только при $\lambda \leq 0,01$. С увеличением константы связи при переходе от низкого порядка к более высокому точность ухудшается, что связано с асимптотичностью ряда теории возмущений. Более того, кривые энергии $\epsilon(\lambda)$ как функции константы связи уже при $\lambda \sim 0,1$ начинают осциллировать, т. е. они находятся то выше, то ниже точной кривой, так как ряд теории возмущений является знакопеременным.

В настоящей работе рассматривается метод пересуммирования ряда ⁽¹⁾, позволяющий избавиться от осцилляций и получить хорошее согласие с точными данными ⁽²⁾ в широкой области значений λ .

Метод основан на преобразовании Лежандра по скалярному параметру.

1. Преобразование Лежандра по скалярному параметру рассмотрено в работе ⁽³⁾, где была выведена полная система уравнений для эффективного потенциала $\Gamma(\varphi, G, H, s)$, зависящего от одно φ -, двух G -, трех H -точечных функций Грина и от скалярной величины $s = \langle s_{\text{кл}}(\varphi) \rangle$ (вакуумного среднего классического действия).

Потенциал $\Gamma(\varphi, G, H, s)$ можно представить в виде $\Gamma = s + F(s, G, H)$ (3), где

$$\bar{s} = s - s(\varphi) - \frac{i\hbar}{2} D^{-1}G - \frac{g\hbar}{4} G\varphi^2 - \frac{g\hbar^2}{8} G^2 - \frac{g\hbar^2}{3!} H\varphi. \quad (1.1)$$

В (1.1) $s(\varphi)$ — функционал действия теории (для $g\varphi^4$ -теории он имеет вид $s(\varphi) = \frac{1}{2} iD^{-1}\varphi\varphi + \frac{1}{4!} g\varphi^4$, а $iD_{xy}^{-1} = -(\square_x + m^2)\delta(x-y)$ — „голый“ пропагатор).

Функционал F можно строить итерациями по G^{-1} . Для этого необходимо вывести уравнение типа $F_G = \dots$ ⁽⁴⁾, где в правой части стоят функциональные производные по G более высокого порядка. Такое уравнение для $F(s, G, H)$ было выведено в ⁽³⁾. Поэтому F можно построить в произвольном порядке по G^{-1} . В настоящей работе функционал F построен до девятого порядка по G^{-1} включи-

тельно. Ввиду громоздкости явный вид не выписан. Приведем, однако, выражение для величины, которая понадобится в дальнейшем.

$$\begin{aligned} \text{tr}\{G_{xy} Q^{-1}(xxx|yyy)\} &= \frac{6!}{h^2} \Theta(1+x+Ax^2+Bx^3), \\ \text{где } Q^{-1} - \text{оператор, обратный к } Q_{nn} &= \frac{F_{\bar{3}n} F_{\bar{3}n}}{F_{\bar{3}\bar{3}}} - F_{nn}, \\ x &= \frac{36}{g h^2} \text{ (диаграмма)} \tilde{S}; \quad A = -1 + \frac{1}{3} \text{ (диаграмма)} [\text{ (диаграмма)} + \text{ (диаграмма)}], \\ B &= 2 - \text{ (диаграмма)} [\text{ (диаграмма)} + 4 \text{ (диаграмма)}] + \frac{1}{27} \text{ (диаграмма)} [3 \text{ (диаграмма)} + \\ &+ 8 \text{ (диаграмма)} + 30 \text{ (диаграмма)} + 60 \text{ (диаграмма)}] \end{aligned} \quad (1.2)$$

каждой линии в диаграммах соответствует G . Отметим также, что в (1.2) $\varphi = H = 0$.

Введение дополнительного скалярного параметра s позволяет вывести уравнение вида ⁽³⁾

$$F_{\bar{s}} = -\frac{1}{h} \left(\frac{4!}{g h^2} \right)^2 \frac{\bar{s}}{4 \text{tr}\{GQ^{-1}\}}. \quad (1.3)$$

В терминах переменной x оно имеет вид

$$F = -\frac{1}{g h} \frac{\text{ (диаграмма)}^4}{\text{ (диаграмма)}^2} \int \frac{x dx}{\text{tr}\{GQ^{-1}\}} \quad (1.4)$$

Интеграл (1.4) позволяет провести дополнительное пересуммирование, для чего необходимо вычислить $\text{tr}\{GQ^{-1}\}$ (1.2). В ⁽¹⁾ $\text{tr}\{GQ^{-1}\}$ был вычислен в низших порядках.

Такое суммирование может быть полезным в теории поля и задачах статистической физики. Преимущества такого метода суммирования хорошо видны на примере ангармонического осциллятора.

2. В случае ангармонического осциллятора $\left(L = \frac{m \dot{x}^2}{2} - \frac{m \omega^2 x^2}{2} + g \frac{x^4}{4!} \right)$, являющемся одномерным аналогом $g\varphi^4$ -теории, можно вы-

числить все диаграммы, входящие в (1.4) в приближении $G=D$. Разность энергий основного состояния полной ($g \neq 0$) и свободной ($g=0$) теорий определяются формулой ⁽⁴⁾

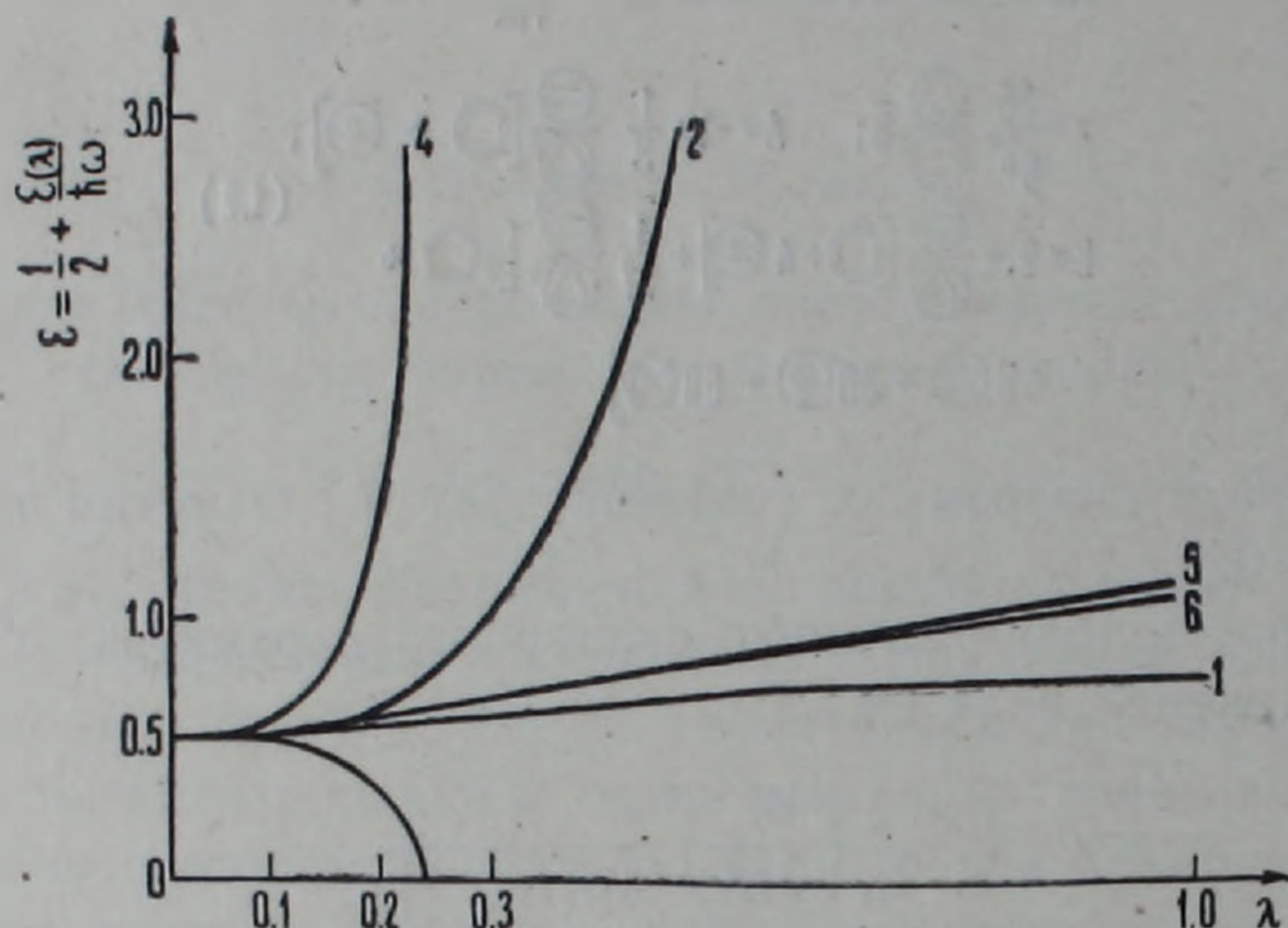
$$-\bar{\epsilon}(g) \int dt = \Gamma / s - \bar{s}_{vac} - \frac{i h}{2} \text{tr} 1 - \frac{h}{2i} \text{tr} \ln G, \quad (2.1)$$

где $\bar{s}_{vac}$ решение уравнения стационарности $\Gamma_{\bar{s}} = 0$.

Подставляя в (2.1) выражение для F (1.4), получим энергию основного состояния $\bar{\epsilon}^{(5)}(\lambda)$ ангармонического осциллятора как функцию безразмерной константы взаимодействия $\lambda = -\frac{g h}{4! m^2 \omega^2}$ (индекс ⁽⁵⁾

означает, что суммируются диаграммы не выше пятого порядка по λ).

Вид функции $\tilde{\epsilon}^{(5)}(\lambda)$ показан на рисунке (кривая 6). Кривая 5 соответствует случаю, когда суммируются диаграммы не выше третьего порядка по λ ⁽¹⁾, что означает $A=B=0$. Кривые 2, 3, 4 соответствуют $\epsilon^{(3)}(\lambda)$, $\epsilon^{(4)}(\lambda)$, $\epsilon^{(5)}(\lambda)$ в стандартной теории возмущений по



малой константе. Кривая 1 является точной ⁽²⁾. Функция $\tilde{\epsilon}^{(4)}(\lambda)$ ($A \neq 0$; $B=0$) была изучена в ⁽¹⁾, отметим, что она лежит между кривыми 5 и 6.

Численные значения энергий основного состояния, вычисленные в различных приближениях, приведены в таблице.

$\epsilon(\lambda)$	λ					
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	1
$\epsilon_{\text{точное}}$	0,5591	0,6024	0,6380	0,6688	0,7210	0,8038
$\epsilon^{(3)} \text{ Т. В.}$	0,5696	0,7115	1,0507	1,712	4,5005	19,4375
$\tilde{\epsilon}^{(3)}$	0,5724	0,6418	0,7099	0,7771	0,9100	1,1726
$\epsilon^{(5)} \text{ Т. В.}$	0,5812	1,4504	7,7980	32,2042	251,6865	3359,1289
$\tilde{\epsilon}^{(5)}$	0,5692	0,6363	0,7019	0,7672	0,8972	1,1569

Анализ метода суммирования диаграмм, описанный в данной работе, позволяет сделать следующие выводы (см. рисунок и таблицу):

- в отличие от стандартной теории возмущений исчезла осциллирующая кривая при переходе от низших к высшим порядкам;
- значительно расширилась по λ область применения, по крайней мере, для энергий основного состояния;
- наблюдается монотонное увеличение точности с ростом порядка приближения.

В заключение авторы благодарят С. Г. Матиняна, Г. К. Саввиди и О. Н. Худавердяна за полезные и стимулирующие обсуждения.

Ереванский физический институт
Государственного комитета по использованию
атомной энергии СССР

Ն. Ս. ԱՆԱՆԻԿՅԱՆ, Գ. Լ. ԲԱԼԱՅԱՆ

Դիագրամների գումարումը Լեժանդրի ձևափոխության միջոցով՝
ըստ սկալյար պարամետրի: Բարձր կարգեր

Արված է Լեժանդրի ձևափոխությունը ըստ $s = \langle 0 | s_T | 0 \rangle$ սկալյար պարամետրի, որը հանդիսանում է դասական գործողության վակուումային միջինը: Օգտագործելով այդ պարամետրից կախված էֆեկտիվ պոտենցիալի հավասարումը կատարված է վակուումային դիագրամների գումարում: Աշխատանքում առաջարկված դիագրամների գումարման մեթոդը կարելի է օգտագործել վիճակագրական ֆիզիկայում և դաշտի քվանտային տեսությունում: Կիրառելով այն միաշափ ոչհարմոնիկ օսցիլյատորի խնդրին, ի տարբերություն ստանդարտ խոտորումների տեսության, ըստ կապի փոքր հաստատունի ավելի բարձր կարգերի անցնելիս

- ա) վերանում են էներգիայի որպես ֆունկցիա կապի հաստատունից կորերի օսցիլյացիաները
- բ) դիտվում է ճշտության մոնոտոն լավացում
- գ) զգալի մեծանում է ըստ λ -ի կիրառման ոլորտը հիմնական վիճակի էներգիան հաշվելու համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՇԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Н. С. Ананикян, Г. Л. Балаян, Г. К. Саввиди. Препринт ЕФИ-574 (61)—82.
² F. Hioe, D. Macmillen, E. Montrell, Phys. Rep., v. 3С (7), 305—335 (1978). ³ Н. С. Ананикян, Г. К. Саввиди, ТМФ, т. 49, № 1, (1981) ⁴ А. Н. Васильев, Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике, Изд-во ЛГУ, 1976.

УДК 536.21

ФИЗИКА

В. Н. Айрапетян, Ю. Н. Айрапетян

Оценка решения нелинейного уравнения теплопроводности с коэффициентом, линейно зависящим от температуры

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Д. М. Седракяном 29/XI 1982)

Цель данной работы в получении приближенных решений простейшего нелинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[g(c) \frac{\partial c}{\partial x} \right], \quad (1)$$

где

$$g(c) = 1 + \alpha c; \quad \alpha = \text{const} = 0,5 \quad (2)$$

с начальным

$$c(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{при } x=0 \\ 0 & \text{при } x>0 \end{cases} \quad (3)$$

и граничными условиями

$$c(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{при } x=0 \\ 0 & \text{при } x \rightarrow \infty \end{cases}. \quad (4)$$

Так как данный параболический оператор удовлетворяет условиям, налагаемым общей теоремой о монотонности ^(1,2), то удастся получить «коридор», в котором оказывается заключенным точное решение.

Первое приближенное решение ищем в виде

$$c_-(x, t) = 1 + A_1 \theta(y) + A_2 [\theta(y)]^2, \quad (5)$$

где

$$\theta(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-u^2} du; \quad y = \frac{x}{2\sqrt{t}}; \quad (6)$$

A_1 и A_2 —это const, которые определим ниже.

Заметим, что $c_-(x, t)$, задаваемое (5), удовлетворяет начальному (3) и граничному (4) условиям, если параметры A_1 и A_2 удовлетворяют условию

$$1 + A_1 + A_2 = 0. \quad (7)$$

Второе условие для определения A_1 и A_2 получим, потребовав, что-

бы $c_-(x, t)$ удовлетворяло уравнению (1) в окрестности $x=0$; это дает

$$\frac{2A_2}{A_1^2} = - \frac{d \ln g(c_-)}{dc_-} = -\beta = -\frac{1}{3}, \quad (8)$$

так как $\alpha=0,5$ (см. (2)).

Решением системы (7), (8), как легко убедиться, являются

$$A_1 = \frac{1 - \sqrt{1+2\beta}}{\beta} = -0,875; \quad (9)$$

$$A_2 = -1 - A_1 = -0,125; \quad (10)$$

имеем

$$c'_-(y) = (A_1 + 2A_2\theta)\theta'; \quad (11)$$

$$c''_-(y) = (A_1 + 2A_2\theta)\theta'' + 2A_2(\theta')^2 = -2y\theta'(A_1 + 2A_2\theta) + 2A_2(\theta')^2, \quad (12)$$

так как

$$\theta''(y) = -2y\theta'(y). \quad (13)$$

Подставив (11), (12) в (1), получим

$$\begin{aligned} \hat{L}c_-(x, t) &= -\frac{\partial c_-}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[g(c_-) \frac{\partial c_-}{\partial x} \right] = \\ &= \frac{\theta'(y)}{4t} \{ -2\alpha y c_-(y)(A_1 + 2A_2\theta) + \theta' [\alpha(A_1 + 2A_2\theta)^2 + 2A_2 g(c_-)] \}. \end{aligned} \quad (14)$$

Первый член в (14) положительный, имеющий тах, так как $A_1 + 2A_2 < 0$. Выражение в [...] монотонно растущее, ибо его производная больше нуля. Действительно, она равна

$$6A_2\alpha\theta'(A_1 + 2A_2\theta) > 0. \quad (15)$$

Следовательно, если выражение в [...] при $y=0$ больше или равно нулю, т. е.

$$\alpha A_1^2 + 2A_2(1 + \alpha), \quad (16)$$

то

$$\hat{L}c_-(x, t) \leq 0. \quad (17)$$

Легко убедиться, что A_1 и A_2 , задаваемые (9) и (10), удовлетворяют (16). Таким образом

$$c_- = 1 - 0,875\theta(y) - 0,125[\theta(y)]^2 \quad (18)$$

обеспечит выполнение (17).

Подберем теперь такую функцию $c_+(x, t)$, которая обеспечивала бы выполнение

$$\hat{L}c_+(x, t) \geq 0 \quad (19)$$

во всей области изменения аргументов (x, t) и удовлетворяла бы граничным условиям (3) и (4). Выберем

$$c_+(x, t) = c_+(y) = \operatorname{Nerfc}[\sigma(y + y_0)], \quad (20)$$

где N, σ, y_2 — параметры, определяемые ниже.

$$\operatorname{erfc} y = 1 - \operatorname{erf} y = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-u^2} du; \quad (21)$$

имеем

$$c'_{+y} = -N\sigma \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\sigma^2(y+y_0)^2}; \quad (22)$$

$$c''_{+yy} = -2\sigma^2(y+y_0)c'_{+y}. \quad (23)$$

Подставляя (22), (23) в выражение для $\hat{L}c_+(y) = \hat{L}c_+(x, t)$, получим

$$\begin{aligned} \hat{L}c_+(x, t) &= \frac{1}{2t} \{2yc'_{+y} + \alpha(c'_{+y})^2 - 2\sigma^2(y+y_0)c'_{+y}g(c_+)\} = \\ &= \left(-\frac{c'_{+y}}{2t}\right) \{-2y + 2\sigma^2g(c_+)(y+y_0) - \alpha c'_{+y}\} = \left(-\frac{c'_{+y}}{2t}\right) T(y), \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$T(y) = -2y + 2\sigma^2(y+y_0)g(c_+) - \alpha c'_{+y}. \quad (25)$$

Так как $-c'_{+y} > 0$ (при $\sigma > 0, N > 0$, только такие мы и рассматриваем), то (19) будет выполняться, если выполняется

$$T(0) = 0; \quad (26)$$

$$\frac{dT}{dy} = M(y) \leq 0, \quad \text{при } 0 < y < \infty, \quad (27)$$

где

$$M(y) = -2 + 2\sigma^2g(c_+) + 4\alpha\sigma^2(y+y_0)c'_{+y}. \quad (28)$$

Исследуем $M(y)$ на экстремум

$$\frac{dM}{dy} = 2\alpha\sigma^2c'_{+y}[3 - 4\sigma^2(y+y_0)^2]. \quad (29)$$

Отсюда $M(y)$ достигает экстремума при

$$\sigma(y+y_0) = \pm \sqrt{3/4} = \pm 0,866; \quad (30)$$

$$\frac{d^2M}{dy^2} = 2\alpha\sigma^2c'_{+yy}[3 - 4\sigma^2(y+y_0)^2] - 16\alpha\sigma^4(y+y_0)c'_{+y}. \quad (31)$$

В точках экстремума первый член равен нулю и, следовательно, знак d^2M/dy^2 определяется знаком $\sigma(y+y_0)$. Ниже мы убедимся, что $y_0 < 0$, поэтому очевидно, что на интервале $[0, \infty)$ может быть лишь одна точка

$$y_1 = \frac{0,866}{\sigma} - y_0, \quad (32)$$

обеспечивающая $M(y)$ экстремум, причем в этой точке $M(y)$ достигает минимума. Максимальных же значений $M(y)$ будет достигать на концах интервала $[0, \infty)$. Таким образом, для выполнения (27) необходимо и достаточно выполнения

$$M(0) = -2 + 2\sigma^2(1 + \alpha) + 4\alpha\sigma^2 y_0 c'_{+y} \leq 0; \quad (33)$$

$$M(\infty) = -2 + 2\sigma^2 \leq 0. \quad (34)$$

Для выполнения же (19) кроме того должно выполняться (26), т. е.

$$T(0) = 2\sigma^2 y_0(1 + \alpha) + \alpha N \sigma \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\sigma^2 y_0^2} \leq 0. \quad (35)$$

Из (35) легко получить

$$(\sigma y_0) e^{\sigma^2 y_0^2} + N \cdot 0,18806 \leq 0, \quad (36)$$

так как

$\frac{\alpha}{(1 + \alpha)\sqrt{\pi}} = 0,18806$, а N определится из условия удовлетворения решения, задаваемого (20) краевому условию при $x = 0$ (3), т. е.

$$N = \frac{1}{\operatorname{erfc}(\sigma y_0)}. \quad (37)$$

Легко убедиться, что

$$z = \sigma y_0 = -0,16 \quad (38)$$

удовлетворяет (36).

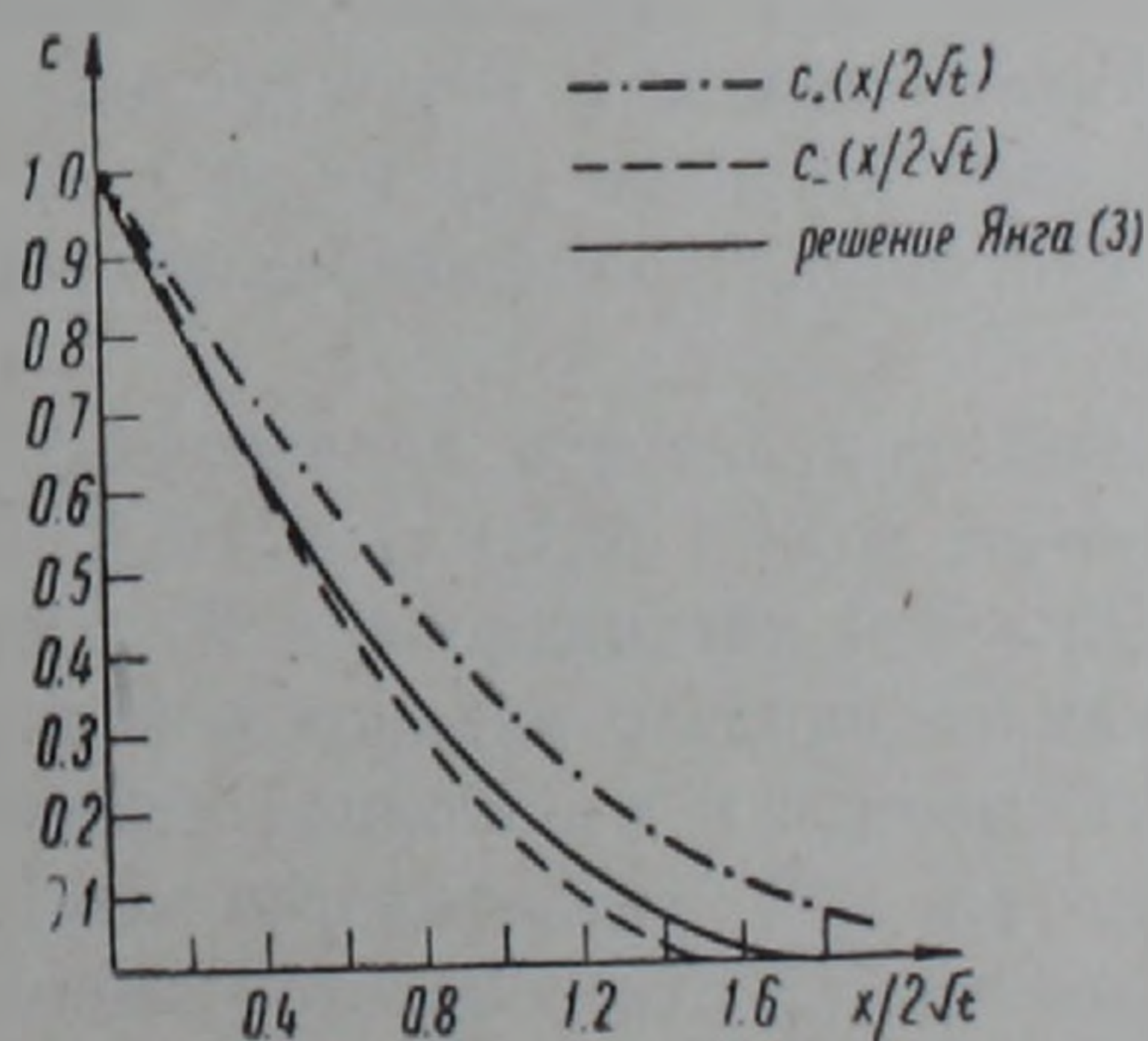
Подставив (38) в (33), получим

$$\sigma^2 \leq \frac{1}{1 + \alpha - \frac{4\alpha N}{\sqrt{\pi}} z e^{-z^2}} \leq (0,77867)^2. \quad (39)$$

Таким образом, значения параметров

$$\sigma = 0,778; \quad y_0 = -0,206; \quad N = 0,84817 \quad (40)$$

в функции, задаваемой (20), обеспечат выполнение (19).



Таким образом получено приближенное решение указанного выше параболического уравнения. На основе теоремы о монотонности параболического оператора определен «коридор», в котором лежит точное решение (рисунок).

Ջերմաստիճանից գծայնորեն կախված գործակցով ջերմահաղորդականության
ոչ գծային հավասարման լուծման գնահատումը

Ոչ գծային պարաբոլական օպերատորների մոնոտոնության վերաբերյալ
թեորեմի հիման վրա առաջարկված է անհայտ լուծման վերևից և ներքևից
գնահատման նոր եղանակ: Այն բերում է ջերմության տարածման համա-
պատասխան ոչ գծային պրոցեսի որակական և քանակական նկարագրմանը:

Ստացված արդյունքը լավ համաձայնեցվում է թվային լուծումներին՝
ստացված հաջորդական մոտավորությունների մեթոդով:

Առաջարկված մեթոդը համատեղ մոտավոր ալգորիթմների հետ, ըստ
երևույթին ավելի արդյունավետ է:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Л. Коллатц, Функциональный анализ и вычислительная математика, Мир, М., 1969. ² R. M. Redheffer, Arch. Rat. Mech. Anal., v. 14 (1963). ³ K. T. Yang, Trans ASME, Y. Appl. Mech, v. 25, № 1 (1958).

УДК 54.541.64+678.6/531.3

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

В. К. Пыжов, В. Н. Заплишный, Г. М. Погосян

Кинетика высокотемпературной поликонденсации дифенилолпропана и симм-триазинсодержащего хлорангидрида

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Г. Мацюяном 25/X 1982)

Особенности и кинетика поликонденсации хлорангидридов классических дикарбоновых кислот с диолами изучены достаточно подробно (¹). Вместе с тем эти свойства для политриазиновых систем практически не исследованы. Особенности кинетики и механизма поликонденсации дихлортриазинов с диолами описаны лишь в единичных сообщениях (²⁻⁴), в то время как эти же вопросы для симм-триазинсодержащих дикарбоновых кислот вообще не изучены.

Настоящая работа посвящена изучению кинетики высокотемпературной поликонденсации хлорангидрида 2-диэтиламино-4,6-бис (п-карбоксифенокси)-симм-триазина (ДКФТ) с дифенилолпропаном (Д) в среде дитолилметана в отсутствие акцептора хлористого водорода. Контроль полиреакции осуществляли по выделяющемуся хлористому водороду.

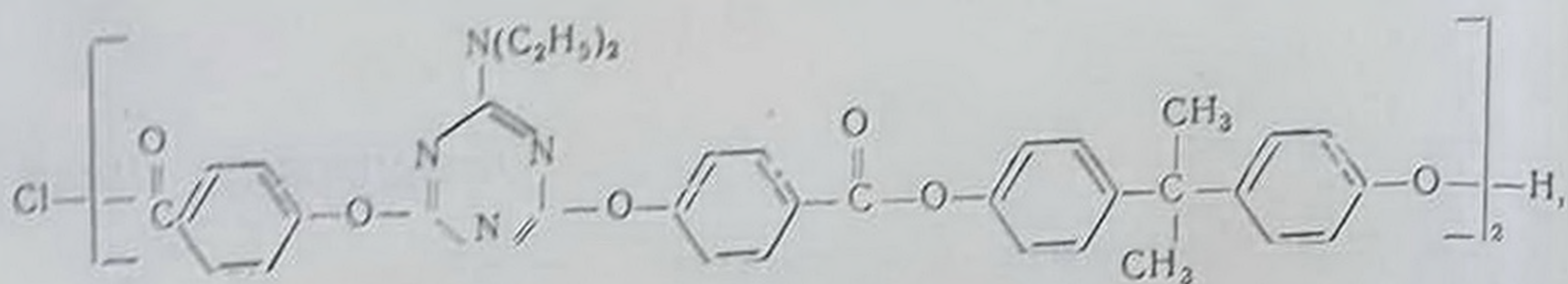
При эквимольном соотношении ДКФТ:Д кинетику поликонденсации изучали в интервале 200—250°. При этом верхний температурный предел ограничен термодеструкцией исходных мономеров, нижний — малой скоростью процесса. Общий ход процесса показан на рис. 1 в координатах концентрация выделяющегося хлористого водорода (С, %) — время (t, мин).

Кроме того, поликонденсация изучена при мольном соотношении ДКФТ:Д, равном 10:1; 2,5:1; 1:1; 1:2,5; 1:10, и температуре 210°. Дифференциальным методом (⁵) в координатах $\ln V - \ln C$ определены концентрационный и временной порядки реакции по каждому компоненту (рис. 2). Равенство концентрационного и временного порядков свидетельствует об отсутствии автокатализа (⁵). На основе полученных экспериментальных данных показано (рис. 3), что кинетические кривые хорошо спрямляются в координатах $\frac{x}{a(a-x)} - t$ по уравнению второго порядка.

Таким образом, можно констатировать, что изученная полиреакция имеет первый порядок по каждому из компонентов и общий второй порядок.

Следует отметить, что при глубине конверсии до 50—60% (по вы-

деляющемуся хлористому водороду) скорость полиреакции значительно и подчиняется закономерностям второго порядка. На этой стадии, по-видимому, образуются преимущественно димеры



так как скорость их образования на несколько порядков выше скорости последующего роста цепи. Далее, судя по тому, что показатель степени концентрации в выражении скорости, найденный из расчета кривой $C-t$, возрастает до 10 и более, реакция замедляется. При этом через 12 ч нагрева эквимольных количеств исходных компонентов при 210° полимер имеет характеристическую вязкость в диоксане, равную 0,18 дл/г, 20° и мол. массу около 15 000.

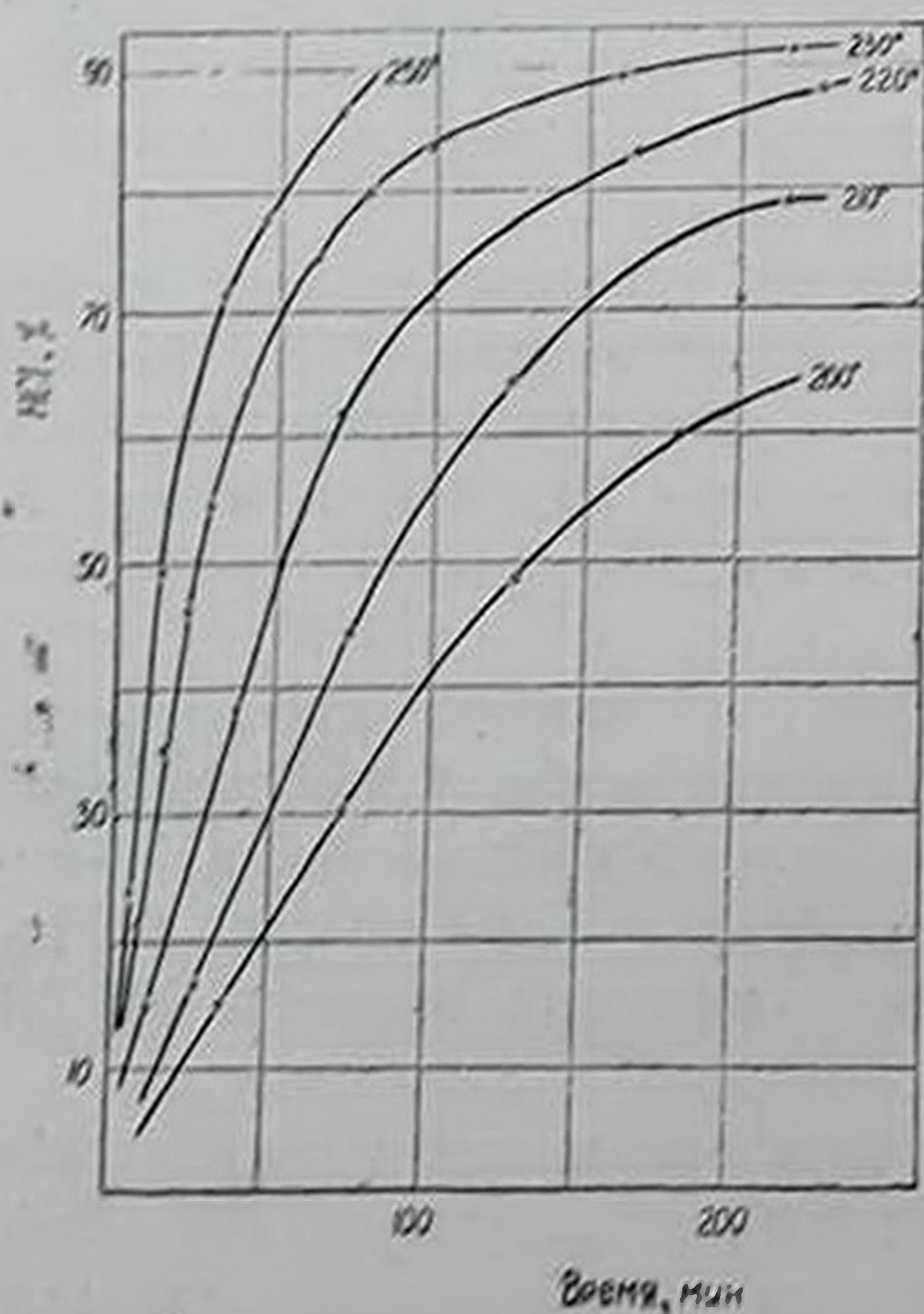


Рис. 1. Кинетические кривые взаимодействия ДКФТ с Д при $200-250^\circ$

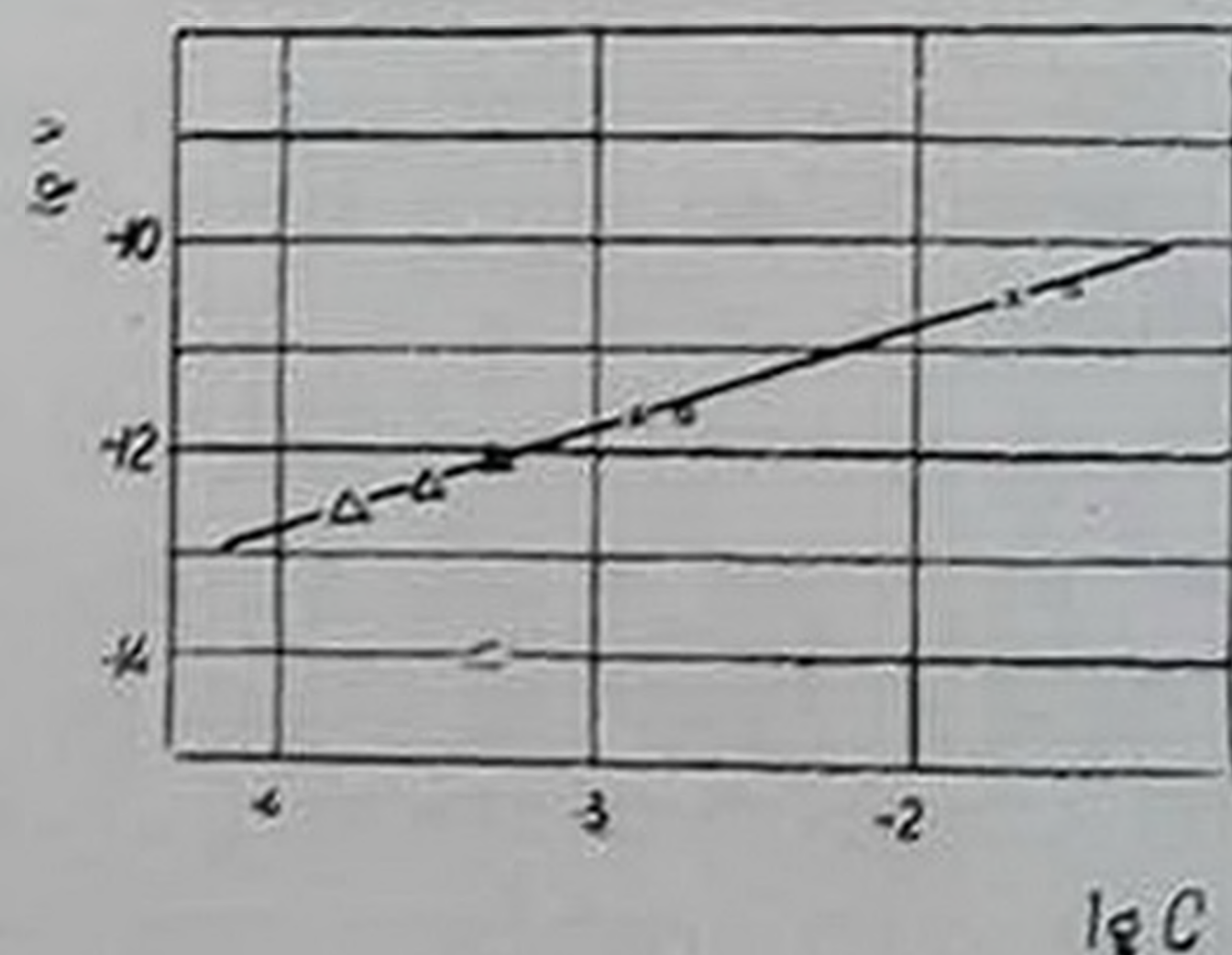


Рис. 2. Соотношение порядков реакции: $\circ$ и $\times$ — концентрационные порядки по Д и ДКФТ соответственно, $\triangle$ — временной порядок (в темном треугольнике концентрационный и временной порядки совпадают)

На основании найденных из рис. 3 констант скорости, используя уравнение Аррениуса, аналитическим и графическим (рис. 4) методами найдены хорошо совпадающие значения предэкспоненциального множителя (A) и энергии активации (E), которые сведены в таблицу. Исходя из уравнений Эйринга и Аррениуса в рамках теории абсолютных скоростей (⁵) вычисленная разность энтропий переходного состояния ($\Delta S^\ddagger$) для изученной полиреакции составляет $-28,5$ ккал/моль $\cdot^\circ K$, что согласуется с известными значениями для реакций типа S_N2 .

К раствору 0,9226 г (2 ммоль) ДКФТ в 50 мл дитолилметана при заданной температуре быстро прибавляли предварительно нагретый до такой же температуры раствор 0,456 г (2 ммоль) Д в 50 мл дитолилметана. Через реакционную смесь (со скоростью 0,3 л/мин) барботировали сухой и очищенный от следов кислорода и двуокиси уг-

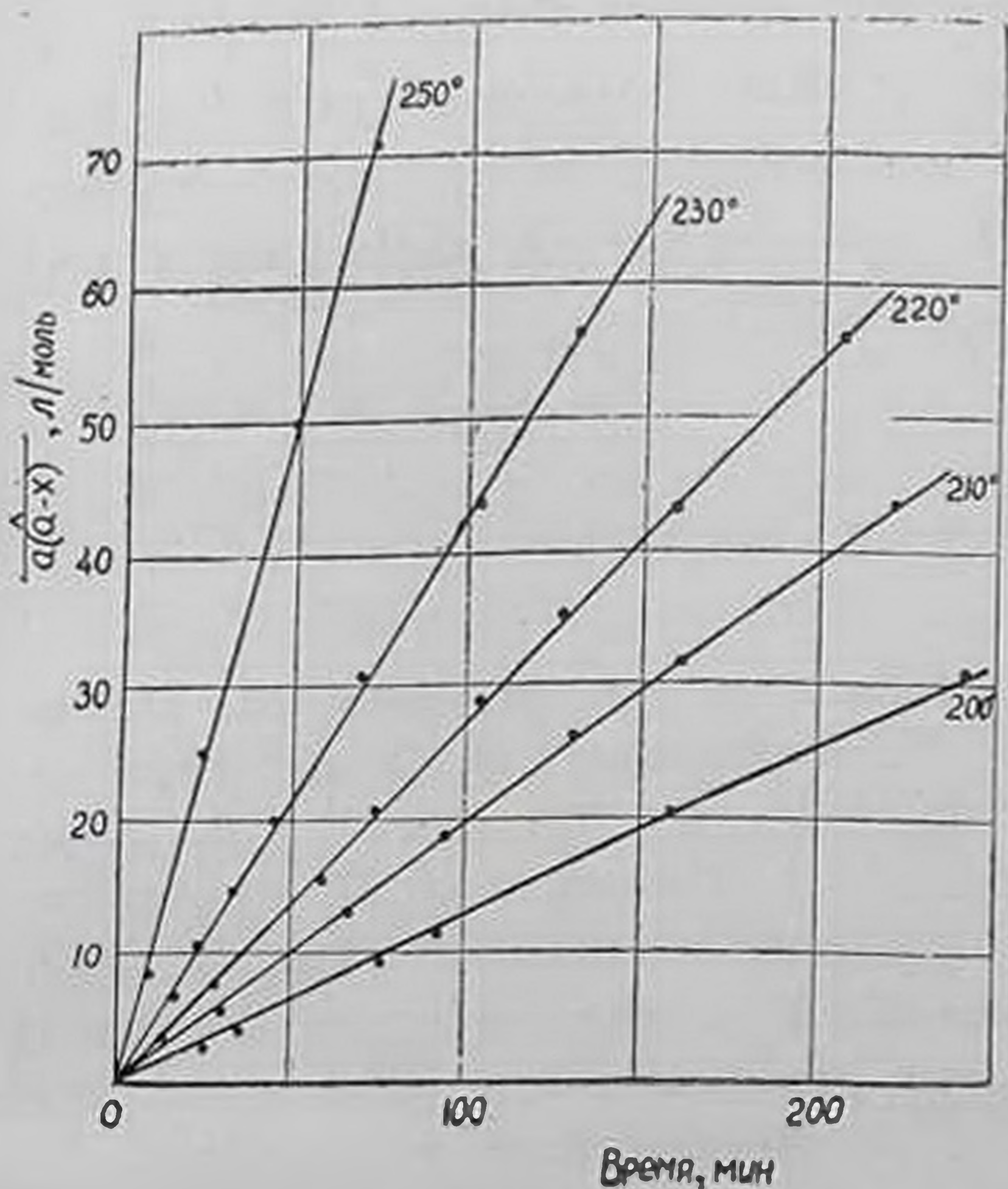


Рис. 3. Зависимость $\frac{a}{a(x)}$ от продолжительности поликонденсации ДКФТ и Д при 200–250°



Рис. 4. Энергия активации ($E = R \lg a$) в координатах Аррениуса

Кинетические и термодинамические параметры поликонденсации ДКФТ и Д

Константа начальной скорости полиреакции	Температура реакции, °C					E , ккал/моль	A , моль ⁻¹ ·л·сек ⁻¹	$\Delta S^\ddagger$, ккал/моль·°K
	200	210	220	230	250			
$K \cdot 10^3$ моль ⁻¹ ·л·сек ⁻¹	2,09	3,24	4,56	7,22	16,37	20 ± 2	$5,9 \pm 0,2 \cdot 10^6$	-28,5

лерода азот. Барботаж азота обеспечивал хорошее перемешивание и постоянный унос хлористого водорода в поглотительную склянку с 0,05 N спиртовым раствором едкого кали. Отобранные в ходе поликонденсации пробы раствора щелочи объемом в 1 мл оттитровывали раствором 0,01 N соляной кислоты (индикатор—фенолфталеин). Все опыты проводились в одинаковом объеме дитолилметана. ДКФТ синтезировали по (6), Д и дитолилметан очищали по (7,8). Поликонденсацию проводили в приборе, аналогичном (9).

Սիմ-տրիագին պարունակող փլուրանհիդրիդի և դիֆենիլուպրոպանի
բարձրջերմաստիճանային պոլիկոնդենսացման կինետիկան

Ուսումնասիրված է 2-դիէթիլամինա-4,6-բիս (պ-կարբօքսիֆենօքսի)-
սիմ-տրիագինի քլորանհիդրիդի և դիֆենիլուպրոպանի պոլիկոնդենսացման
կինետիկան դիտուիլմեթանի լուծույթում $300-250^{\circ}\text{C}$ -ում: Ցույց է տրված, որ
ուսումնասիրված ռեակցիան առաջին կարգի է ըստ յուրաքանչյուր կոմպո-
նենտի և ընդհանուր՝ ըստ երկրորդի: Ելնելով ստացված կինետիկական և թեր-
մոդինամիկական տվյալներից եզրակացվել է, որ ռեակցիան ընթանում է բի-
մոլեկուլյար նուկլեոֆիլ տեղակայման մեխանիզմով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В. В. Коршак, С. В. Виноградова, Неравновесная поликонденсация, М., Наука, М., 1972. ² А. К. Микитаев, Д. Ф. Кутепов, В. В. Коршак и др., в сб.: Вопросы физико-химии полимеров, вып. 1, Нальчик, 1972. ³ Д. Ф. Кутепов, С. А. Гласко, ВМС, т. 15Б, № 3 (1973). ⁴ Л. А. Королева, Л. А. Родивилова, М. С. Акутин, ВМС, т. 15А, № 4 (1973). ⁵ К. Лейдер, Кинетика органических реакций, Мир, М., 1976. ⁶ Г. М. Погосян, И. А. Асатурян, В. Н. Заплишний, Арм. хим. журн., т. 29, № 11 (1976). ⁷ У. Серенсон, Т. Кемпбел, Препаративные методы химии полимеров, ИЛ, М., 1963. ⁸ Р. С. Величкова, В. В. Коршак, С. В. Виноградова и др., Изв. АН СССР. Сер. хим., № 4, 858 (1969). ⁹ Практикум по физике и химии полимеров, Химия, М., 1977.

