ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 6, 1981 Механика

Э. Х. ГРИГОРЯН

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ПЛОСКИХ ВОЛН В ПЛОСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В работе методом плоских волн получено решение уравнений однородной среды при наличии сосредоточенных импульсов. При решении использовано известное представление δ-функции в виде разложения на плоские волны [1, 2]. Это разложение δ-функции было дано в работе [3], которое затем применялось к решению задачи Коши для гиперболических уравнений и к построению фундаментальных решений эллиптических уравнений. Аналогичные результаты получены также в монографии [4], где при решении соответствующих задач использовано представление непрерывной функции в виде разложения по некоторым плоским волнам.

В настоящей работе проведена элементарная модификация в представлении δ-функции в виде разложения на плоские волны, которая позволяет в плоской задаче определить фундаментальное решение для уравнений магнитоупругости достаточно простым образом. Далее, с помощью такой модификации, методом плоских волн получается решение задачи Ламба для упругой среды.

Задачи о сосредоточенном импульсе для безграничной магнитоупругой среды другими методами исследовались в работах [5, 6].

Решение задачи Ламба для упругой среды методом интегральных преобразований содержится в [7], а методом функционально-инвариантных решений Смирнова-Соболева — в [8].

1. Требуется определить решение системы уравнений

$$c_3^2\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_1^2}+c_4^2\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_2^2}+c^2\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1}{\rho}P\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(t)=\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2}$$

$$c_4^2\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_1^2}+c_3^2\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_2^2}+c^2\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1}{\rho}Q\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(t)=\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \qquad (1.1)$$

при условии

$$u^{(1)}(x_1,x_2,t)=0,\ \frac{\partial u^{(1)}(x_1,x_2,t)}{\partial t}=0,\ u^{(2)}(x_1,x_2,t)=0,\ \frac{\partial u^{(2)}(x_1,x_2,t)}{\partial t}=0$$

$$\text{при}\quad t<0 \qquad (1.1')$$

где $c^2=c_1^2-c_2^2$, $c_1^2=(\lambda+2G)/\rho$, $c_2^2=G/\rho$, $c_3^2=c_1^2+a^2$, $c_4^2=c_2^2+a^2$, $a^2=\mu H_0^2/4\pi\rho$, λ и G — постоянные Ляме, ρ — плотность упругой среды,

μ — магнитная проницаемость среды, H_* — интенсивность внешнего магнитного поля, a — скорость Альфвена.

Уравнения (1.1) описывают движение идеально проводящей упругой среды при наличии однородного магнитного поля $\vec{H}(H_*, 0, 0)$, когда в среде действуют объемные силы в виде сосредоточенных импульсов, в случае пренебрежения токами смещения [5, 6].

Для решения задачи (1.1), (1.1)' пользуемся представлением $\delta(x_1)\,\delta(x_2)$ в виде разложения на плоские волны [1]

$$\delta(x_1)\,\delta(x_2) = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{(\zeta_1 x_1+\zeta_2 x_2)^2},\ \zeta_1^2+\zeta_2^2=1,\ |\zeta|=\sqrt{\zeta_1^2+\zeta_2^2} \quad (1.2)$$

Имея в виду, что $\zeta_1^2+\zeta_2^2=1$, (1.2) можно записать в виде

$$\delta(x_1)\,\delta(x_2) = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{1}{(\zeta_1 x_1+\sqrt{1-\zeta_1^2}\,x_2)^2}+\frac{1}{(\zeta_1 x_1-\sqrt{1-\zeta_1^2}\,x_2)^2}\right]\times$$

$$\times\frac{d\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}} \quad (1.3)$$

Из (1.3) после продолжения ζ_1 на всю действительную ось получим

$$\delta(x_1)\,\delta(x_2) = -\frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\zeta_1 x_1+\zeta_2 x_2)^2}\,\frac{d\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}}\right],\quad \zeta_2=\sqrt{1-\zeta_1^2} \quad (1.4)$$

Очевидно, что под $\sqrt{1-\zeta_1^2}$ понимается та ветвь этой функции, которая положительна при положительных мнимых значениях ζ_1. Такую ветвь можно выбрать, если провести разрез на отрезке $(-1, 1)$. Для такой ветви $\sqrt{1-\zeta_1^2}$ положительно мнима при $\zeta_1<-1$ и отрицательно мнима при $\zeta_1>1$.

Эта элементарная модификация в представлении $\delta(x_1)\,\delta(x_2)$ (1.4) дает возможность в дальнейшем без каких-либо трудностей получить решение задачи (1.1), (1.1)' в виде записи через элементарные функции.

Теперь приступим к решению задачи (1.1), (1.1)'. Для этого сначала определим решение однородного уравнения (1.1) вида

$$u_1^{(1)} = A_* f(\nu t+\zeta_1 x_1+\zeta_2 x_2),\quad u_2^{(1)} = B_* f(\nu t+\zeta_1 x_1+\zeta_2 x_2) \quad (-\infty<\zeta_1<+\infty)$$

Под $\sqrt{1-\zeta_1^2}$ понимается вышеуказанная ветвь этой функции.

После подстановки этих функций в (1.1) и требования, чтобы они удовлетворяли однородным уравнениям, для определения A_*, B_* получим систему уравнений

$$(c_1^2\zeta_1^2+c_2^2\zeta_2^2-\nu^2)\,A_*+c^2\zeta_1\zeta_2\,B_*=0$$
$$c^2\zeta_1\zeta_2\,A_*+(c_1^2\zeta_1^2+c_2^2\zeta_2^2-\nu^2)\,B_*=0$$

Для того, чтобы получить нетривиальное решение этой системы, должно иметь место следующее:

$$\lambda^4 - \lambda^2 (c_1^2 + c_2^2) + c_1^2 c_2^2 + a^2 c^2 \zeta_1^2 = 0$$

Решив это уравнение, получим его корни в следующем виде:

$$\lambda_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{c_1^2 + c_2^2 - (-1)^j \sqrt{(c_1^2 - c_2^2)^2 - 4a^2 c^2 \zeta_1^2}}$$

$$\lambda_3 = -\lambda_1, \quad \lambda_4 = -\lambda_2 \quad (j = 1, 2)$$

Очевидно, что $\zeta_1 = \zeta_1^{\pm} = \pm (c_1^2 - c_2^2)/2ac$ будут точками ветвления внутреннего радикала в выражениях $\lambda_j(\zeta_1)$, $(j = 1, 2)$.

Фиксируем значения внутреннего радикала так, как это сделано относительно функции $\sqrt{1-\zeta_1^2}$. Очевидно, что в этом случае надо провести разрез, соединяющий ζ_1^- с ζ_1^+. В разрезанной указанным образом плоскости точка $\zeta_1^{(1)} = -ic_2c_1/ac$ будет точкой ветвления для $\lambda_1(\zeta_1)$, а $\zeta_1^{(2)} = \overline{\zeta_1^{(1)}}$ — точкой ветвления для $\lambda_2(\zeta_1)$. Теперь однозначные ветви функций $\lambda_j(\zeta_1)$, $(j = 1, 2)$ в указанной плоскости выберем так, чтобы $\lambda_1(\zeta_1)$ для мнимых значений ζ_1 было положительным при $\operatorname{Im}\zeta_1 > \operatorname{Im}\zeta_1^{(1)}$ и отрицательно мнимым при $\operatorname{Im}\zeta_1 < \operatorname{Im}\zeta_1^{(1)}$, а $\lambda_2(\zeta_1)$ — положительным при $\operatorname{Im}\zeta_1 < \operatorname{Im}\zeta_1^{(2)}$ и отрицательно мнимым при $\operatorname{Im}\zeta_1 > \operatorname{Im}\zeta_1^{(2)}$. Для этого для $\lambda_1(\zeta_1)$ надо провести разрез, соединяющий точку $\zeta_1^{(1)}$ с бесконечностью и находящийся в левой полуплоскости, а для $\lambda_2(\zeta_1)$ — разрез, соединяющий точку $\zeta_1^{(2)}$ с бесконечностью и находящийся в правой полуплоскости. Причем линия $\operatorname{Im}\zeta_1 = \operatorname{Im}\zeta_1^{(2)}$ обходит точку $\zeta_1^{(2)}$ снизу, а линия $\operatorname{Im}\zeta_1 = \operatorname{Im}\zeta_1^{(1)}$ — точку $\zeta_1^{(1)}$ сверху.

Таким образом, общее решение однородного уравнения в рассматриваемом классе функций будет иметь вид

$$u^{(1)} = A_{kj} f(\lambda_j t + \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2), \quad u^{(2)} = B_{kj} f(\lambda_j t + \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2) \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

Здесь и в дальнейшем под повторяющимся индексом понимается суммирование.

Имеют место следующие соотношения:

$$B_{kj} = -\frac{c_1^2 \zeta_1^2 + c_2^2 \zeta_2^2 - \lambda_j^2}{c^2 \zeta_1 \zeta_2} A_{kj} \quad (j = 1, 2, 3, 4) \tag{1.5}$$

Теперь построим решение задачи (1.1), (1.1)′. Имея в виду (1.4), решение задачи (1.1), (1.1)′ ищем в виде

$$u^{(k)} = -\frac{1}{2\pi^2} H(t) \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u^{(k)}(\zeta_1, x_1, x_2, t) \frac{d\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}} \right] \quad (k = 1, 2)$$

Здесь $H(t)$ — функция Хевисайда.

Подставив $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ в систему уравнений (1.1) и потребовав, чтобы она удовлетворилась, в результате получаем следующее:

$$\delta_{kj} A_{kj} = 0, \quad \lambda_j A_{kj} = \frac{P}{\rho}, \quad \delta_{kj} B_{kj} = 0, \quad \lambda_j B_{kj} = \frac{Q}{\rho} \quad (j = 1, 2, 3, 4) \tag{1.6}$$

$$f(\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2) = -\frac{1}{\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2} + C$$

Здесь C — произвольная постоянная, δ_{ij} — символы Кронекера.

Разрешив систему уравнений (1.6) и (1.5), для A_{ij} и B_{ij} получим следующие выражения:

$$A_{11} = \frac{P}{2\rho}\frac{c_1^2\zeta_1^2 + c_2^2\zeta_2^2 - \lambda_1^2}{\lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{Q}{2\rho}\frac{c_*^2\zeta_1\zeta_2}{\lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \quad A_{21} = -A_{11}$$

$$A_{12} = -\frac{P}{2\rho}\frac{c_1^2\zeta_1^2 + c_2^2\zeta_2^2 - \lambda_2^2}{\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} - \frac{Q}{2\rho}\frac{c_*^2\zeta_1\zeta_2}{\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \quad A_{22} = -A_{12}$$

$$B_{11} = -\frac{Q}{2\rho}\frac{c_1^2\zeta_1^2 + c_2^2\zeta_2^2 - \lambda_1^2}{\lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{P}{2\rho}\frac{c_*^2\zeta_1\zeta_2}{\lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \quad B_{21} = -B_{11}$$

$$B_{12} = \frac{Q}{2\rho}\frac{c_1^2\zeta_1^2 + c_2^2\zeta_2^2 - \lambda_2^2}{\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} - \frac{P}{2\rho}\frac{c_*^2\zeta_1\zeta_2}{\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \quad B_{22} = -B_{12}$$

Таким образом, решение задачи (1.1), (1.1)' будет иметь вид

$$u^{(1)} = \frac{H(t)}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} A_{1j}\left(\frac{1}{\lambda_j t + \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2} + \frac{1}{\lambda_j t - \zeta_1 x_1 - \zeta_2 x_2}\right)\frac{d\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}}\right]$$

$$u^{(2)} = \frac{H(t)}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} B_{1j}\left(\frac{1}{\lambda_j t + \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2} + \frac{1}{\lambda_j t - \zeta_1 x_1 - \zeta_2 x_2}\right)\frac{d\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}}\right] \tag{1.7}$$

$(j = 1, 2)$

Нетрудно видеть, что подынтегральные функции имеют следующие точки ветвления: $\zeta_1 = \pm 1$, $\zeta_1 = \pm$ [illegible]. Следовательно, эти функции, рассматриваемые как функции комплексного переменного, вне действительной оси, кроме полюсов, других особых точек не могут иметь.

С другой стороны, легко видеть, что волны $\lambda_j t + \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 = 0$ будут уходящими от начала координат (0, 0) при $\mathrm{Im}\,\zeta_1 > 0$ только, если $x_2 < 0$, а волны $\lambda_j t - \zeta_1 x_1 - \zeta_2 x_2 = 0$ будут уходящими от (0, 0) при $\mathrm{Im}\,\zeta_1 > 0$ только, если $x_2 > 0$. Учитывая это, после вычислений интегралов из (1.7) стандартным методом теории вычетов, имея при этом в виду, что действительная ось должна обходить особые точки подынтегрального выражения сверху, для $x_2 < 0$ получим

$$u^{(1)} = \frac{H(t)}{\pi}\,\mathrm{Re}\left[\frac{iA_{1j}(\zeta_1^{(j)})}{\lambda_j'(\zeta_1^{(j)})\,\zeta_2^{(j)} t + \zeta_2^{(j)} x_1 - \zeta_1^{(j)} x_2}\right]$$

$(j = 1, 2)$

$$u^{(2)} = \frac{H(t)}{\pi}\,\mathrm{Re}\left[\frac{iB_{1j}(\zeta_1^{(j)})}{\lambda_j'(\zeta_1^{(j)})\,\zeta_2^{(j)} t + \zeta_2^{(j)} x_1 - \zeta_1^{(j)} x_2}\right]$$

где $\zeta_1^{(j)}$ определяются из уравнений

$$\lambda_j(\zeta_1^{(j)})\, t + \zeta_1^{(j)} x_1 + \zeta_2^{(j)} x_2 = 0 \quad (j = 1, 2)$$

2. Рассмотрим колебания упругой полуплоскости, на границе которой приложен сосредоточенный импульс (задача Ламба)

$$a_0^2 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_1^2} + b_0^2 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_3^2}$$

$$b_0^2 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_1^2} + a_0^2 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_3^2} \tag{2.1}$$

$$\left. \left[a_0^2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_2} + (a_0^2 - 2b_0^2) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_1} \right] \right|_{x_2=0} = -\frac{P}{\rho c} \delta(x_1) \delta(x_3)$$

$$\left. \left[\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_1} \right] \right|_{x_2=0} = -\frac{Q}{\rho b_0^2} \delta(x_1) \delta(x_3) \tag{2.1$'$}$$

$$u^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_3} = 0, \quad u^{(2)} = 0, \quad \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{при} \quad x_3 < 0 \tag{2.1$''$}$$

где $a_0^2 = c_1^2/c^2$, $b_0^2 = c_2^2/c^2$, $c^2 = c_1^2 - c_2^2$, $x_3 = ct$, t — переменная, характеризующая время.

Для решения рассматриваемой задачи, как и выше, $\delta(x_1)\,\delta(x_3)$ представим в виде

$$\delta(x_1)\,\delta(x_3) = -\frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\zeta_1 x_1 + \sqrt{1-\zeta_1^2}\, x_3)^2} \frac{d\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}} \right] \tag{2.2}$$

причем под $\sqrt{1-\zeta_1^2}$ понимается та ветвь этой функции, что и в первом пункте.

Решение системы уравнений (2.1) ищем в виде

$$u_\lambda^{(1)} = A_\lambda f(\zeta_1 x_1 - \lambda x_2 + \sqrt{1-\zeta_1^2}\, x_3), \quad u_\lambda^{(2)} = B_\lambda f(\zeta_1 x_1 - \lambda x_2 + \sqrt{1-\zeta_1^2}\, x_3) \tag{2.3}$$

Под $\sqrt{1-\zeta_1^2}$ понимается та ветвь, что и в (2.2).

Подставляя (2.3) в (2.1), для определения A_λ, B_λ получим систему уравнений

$$(a^2\zeta_1^2 - \zeta_2^2 + \lambda^2 b^2) A_\lambda - \lambda\zeta_1 B_\lambda = 0$$

$$\zeta_2 = \sqrt{1-\zeta_1^2}$$

$$-\lambda\zeta_1 A_\lambda + (b^2\zeta_1^2 - \zeta_2^2 + \lambda^2 a^2) B_\lambda = 0$$

Нетрудно видеть, что рассматриваемая система будет иметь нетривиальное решение при

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{a_0^2+1}}{a_0} \sqrt{\frac{1}{a_0^2+1} - \zeta_1^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{b_0^2+1}}{b_0} \sqrt{\frac{1}{b_0^2+1} - \zeta_1^2}$$

$$\lambda_3 = -\lambda_1, \quad \lambda_4 = -\lambda_2$$

Функции λ_1, λ_2 выберем так, чтобы они были положительными при положительно мнимых значениях ζ_1. Тогда решение системы уравнений (2.1) в рассматриваемом классе функций будет иметь вид

$$u^{(1)} = A_{\lambda_j} f(\zeta_1 x_1 - \lambda_j x_2 + \zeta_2 x_3), \quad u^{(2)} = B_{\lambda_j} f(\zeta_1 x_1 - \lambda_j x_2 + \zeta_2 x_3)$$

причем

$$B_{\lambda_j} = \frac{a_0^2\zeta_1^2 - \zeta_2^2 + \lambda_j^2 b_0^2}{\lambda_j \zeta_1} A_{\lambda_j} \quad (j = 1, 2, 3, 4) \tag{2.4}$$

Так как в рассматриваемой задаче $x_2 > 0$ и в силу того, что ζ_1, λ_j (j = 1, 2) положительны при положительно мнимых значениях ζ_1, то отсюда следует, что наше решение будет представлять уходящую волну, если взять $A_{\lambda_3} = A_{\lambda_4} = 0$. Следовательно,

$$\overset{*}{u}{}^{(j)} = A_{\lambda_j} f(\zeta_1 x_1 - \lambda_j x_2 - \zeta_2 x_3), \quad \overset{*}{u}{}^{(j)} = B_{\lambda_j} f(\zeta_1 x_1 - \lambda_j x_2 + \zeta_2 x_3) \quad (j = 1, 2)$$

Имея в виду (2.2), решение задачи (2.1), (2.1)', (2.1)'' ищем в виде

$$u^{(j)} = -\frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \overset{*}{u}{}^{(j)} (\zeta_1, x_1, x_2, x_3) \frac{d\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}} \right] \quad (j = 1, 2)$$

Подставляя $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ в граничное условие (2.1)', после некоторых выкладок получим следующее:

$$\begin{gathered} \left(2\zeta_1^2 - \frac{\zeta_2^2}{b_0^2}\right) A_{\lambda_1} + 2\zeta_1^2 A_{\lambda_2} = \frac{P\zeta_1}{\rho c b_0^2} \\ 2\lambda_1\lambda_2 A_{\lambda_1} - \left(2\zeta_1^2 - \frac{\zeta_2^2}{b_0^2}\right) A_{\lambda_2} = \frac{Q\lambda_2}{\rho c b_0^2} \\ f(\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_3) = -\frac{1}{\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_3} + N \end{gathered} \tag{2.5}$$

Здесь N — произвольная постоянная.

Далее из (2.4) и (2.5) получим

$$A_{\lambda_1} = \frac{Q}{\rho c b_0^2} \frac{2\lambda_2\zeta_1^2}{\Delta(\zeta_1)} - \frac{P}{\rho c b_0^2} \frac{\zeta_1(\zeta_2^2 b_0^{-2} - 2\zeta_1^2)}{\Delta(\zeta_1)} + A_{\lambda_1}^0$$

$$A_{\lambda_2} = \frac{P}{\rho c b_0^2} \frac{2\lambda_1\lambda_2\zeta_1}{\Delta(\zeta_1)} + \frac{Q}{\rho c b_0^2} \frac{\lambda_2(\zeta_2^2 b_0^{-2} - 2\zeta_1^2)}{\Delta(\zeta_1)} + A_{\lambda_2}^0$$

$$B_{\lambda_1} = -\frac{\lambda_1}{\zeta_1}(A_{\lambda_1} - A_{\lambda_1}^0) + B_{\lambda_1}^0, \quad B_{\lambda_2} = \frac{\zeta_1}{\lambda_2}(A_{\lambda_2} - A_{\lambda_2}^0) + B_{\lambda_2}^0$$

$$A_{\lambda_1}^0 = c_1 \delta(\zeta_1 - \zeta_{1R}) + c_2 \delta(\zeta_1 + \zeta_{1R}), \quad A_{\lambda_2}^0 = -\frac{(2\zeta_{1R}^2 - \zeta_{2R}^2 b_0^{-2})}{2\zeta_{1R}^2} A_{\lambda_1}^0$$

$$B_{\lambda_1}^0 = -\frac{\lambda_{1R}}{\zeta_{1R}} A_{\lambda_1}^0, \quad B_{\lambda_2}^0 = -\frac{(2\zeta_{1R}^2 - \zeta_{2R}^2 b_0^{-2})}{2\lambda_{2R}\zeta_{1R}} A_{\lambda_2}^0, \quad \zeta_{2R} = \sqrt{1 - \zeta_{1R}^2}$$

$$\Delta(\zeta_1) = (2\zeta_1^2 - \zeta_2^2 b_0^{-2})^2 + 4\lambda_1\lambda_2\zeta_1^2, \quad \lambda_{jR} = \lambda_j(\zeta_{1R})$$

где $A_{\lambda_1}^0$, $A_{\lambda_2}^0$ удовлетворяют однородным уравнениям системы (2.5), c_1, c_2 — произвольные постоянные, $\delta(z)$ — функция Дирака, а $\zeta_{1R} = c(c^2 + c_R^2)^{-1/2}$, где c_R — скорость распространения волн Рэлея, являющаяся корнем уравнения $\Delta(\zeta_1) = 0$.

Следовательно, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ будут даваться формулами

$$u^{(1)}=\frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(A_{\lambda_j}-A^0_{\lambda_j})}{\zeta_1x_1-\lambda_jx_2+\zeta_2x_3}\,\frac{d\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}}\right]-$$

$$-\frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{(-1)^n L_j C_n}{\zeta_{2R}\,(\zeta_{1R}\,x_1+(-1)^n\lambda_{jR}x_2-(-1)^n\zeta_{2R}\,x_3)}\right]+N_1$$

$$u^{(2)}=\frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(B_{\lambda_j}-B^0_{\lambda_j})}{\zeta_1x_1-\lambda_j\,x_2+\zeta_2x_3}\,\frac{d\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}}\right]-$$

$$-\frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{(-1)^n\;M_j\,C_n}{\zeta_{2R}\,(\zeta_{1R}\,x_1+(-1)^n\lambda_{jR}\,x_2-(-1)^n\zeta_{2R}\,x_3)}\right]+N_2$$

где $L_1=1$, $L_2=(\zeta_{2R}^2\,b_0^2-2\zeta_{1R}^2)/2\zeta_{1R}^2$, $M_1=-\lambda_{1R}\,\zeta_{1R}^{-1}$, $M_2=(\zeta_{2R}^2\,b_0^2-2\zeta_{1R}^2)/2\zeta_{1R}\lambda_{2R}$, N_1, N_2 — произвольные постоянные.

Здесь интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши, поскольку подынтегральные выражения имеют простые полюсы в точках $\pm\zeta_{1R}$.

Вычисляя эти интегралы стандартным методом теории вычетов, при этом имея в виду, что действительная ось должна обходить особые точки подынтегрального выражения сверху, получим

$$u^{(1)}=\frac{1}{\pi}H(x_3)\,\mathrm{Re}\left[\frac{i\,(A_{\lambda_j}(\zeta_1^{(j)})-A^0_{\lambda_j}(\zeta_1^{(j)}))}{\zeta_2^{(j)}\dfrac{d}{d\zeta_1}\,(\zeta_1x_1-\lambda_jx_2+\zeta_2x_3)|_{\zeta_1=\zeta_1^{(j)}}}\right]-$$

$$-\frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{\pi i\dfrac{\partial}{\partial\zeta_1}(A_{\lambda_j}-A^0_{\lambda_j})|_{\zeta_1=\zeta_{1R}}\,\delta_{nn}+(-1)^n L_j\,C_n}{\zeta_{2R}\,(\zeta_{1R}\,x_1+(-1)^n\lambda_{jR}\,x_2-(-1)^n\zeta_{2R}\,x_3)}\right]+N_1$$

$$u^{(2)}=\frac{1}{\pi}\,H\,(x_3)\,\mathrm{Re}\left[\frac{i\,(B_{\lambda_j}(\zeta_1^{(j)})-B^0_{\lambda_j}(\zeta_1^{(j)}))}{\zeta_2^{(j)}\dfrac{d}{d\zeta_1}\,(\zeta_1x_1-\lambda_jx_2+\zeta_2x_3)|_{\zeta_1=\zeta_1^{(j)}}}\right]-$$

$$-\frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{\pi i\dfrac{\partial}{\partial\zeta_1}\,(B_{\lambda_j}-B^0_{\lambda_j})|_{\zeta_1=\zeta_{1R}}\;\delta_{nn}+(-1)^n\,M_j\,C_n}{\zeta_{2R}\,(\zeta_{1R}\,x_1+(-1)^n\lambda_{jR}\,x_2-(-1)^n\zeta_{2R}\,x_3)}\right]+N_2$$

где $\zeta_1^{(j)}$ определяются из уравнений

$$\zeta_1^{(j)}\,x_1-\lambda_j\,(\zeta_1^{(j)})\;x_2+\zeta_2^{(j)}\,x_3=0\;\;(j=1,\,2)$$

Теперь удовлетворив условиям (2.1)'', получим решение задачи Ламба в следующем виде:

$$u^{(1)}=\frac{1}{\pi}H(x_3)\,\mathrm{Re}\left[\frac{i\{A_{\lambda_j}(\zeta_1^{(j)})-A^0_{\lambda_j}(\zeta_1^{(j)})\}}{\zeta_2^{(j)}x_1-\zeta_1^{(j)}x_3-\zeta_2^{(j)}\lambda_j(\zeta_1^{(j)})\,x_2}\right]$$

$$(j=1,\ 2)$$

$$u^{(2)}=\frac{1}{\pi}H(x_3)\,\mathrm{Re}\left[\frac{i\{B_{\lambda_j}(\zeta_1^{(j)})-B^0_{\lambda_j}(\zeta_1^{(j)})\}}{\zeta_2^{(j)}x_1-\zeta_1^{(j)}x_3-\zeta_2^{(j)}\lambda_j(\zeta_1^{(j)})\,x_2}\right]$$

Ереванский государственный
университет

Поступила 11 VII 1980

Է. Խ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ՀԱՐԹ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԻ ՄԻ ՄՈԴԻՖԻԿԱՑԻԱՅԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ՀՈԾ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ՀԱՐԹ ԳԾԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում հարթ ալիքների մեթոդով ստացված է մագնիսաառաձգական միջավայրի հավասարումների լուծումը կենտրոնացված իմպուլսների առկայության դեպքում։ Լուծման ընթացքում կատարված է մոդիֆիկացիա δ-ֆունկցիայի ըստ հարթ ալիքների վերլուծության ներկայացման նկատմամբ։ Նշված մոդիֆիկացիան հնարավորություն է տալիս բավականին հեշտ ձևով որոշելու մագնիսաառաձգականության հավասարումների սիստեմի ֆունդամենտալ լուծումը։ Հետագայում, նշված մոդիֆիկացիայի օգնությամբ, հարթ ալիքների մեթոդով ստացվում է Լամբի խնդրի լուծումը առաձգական միջավայրի համար։

Ed. Kh. GRIGORIAN

ON SOME MODIFICATION OF THE PLANE WAVES METHOD FOR PLANE PROBLEMS IN CONTINUUM MECHANICS

S u m m a r y

The solution for equations of magnetoelastic medium under concentrated loads is obtained by the plane waves method. The modification of the known presentation of δ-function in plane wave expansion is carried out in the solution. This modification makes it possible to obtain in a rather easy way the principal solution for magnetoelasticity equations. Then by this modification the solution of Lamb's problem for elastic medium is obtained, using the plane waves method.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй спецкурс. М., Изд-во «Наука», 1973.
2. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., Изд-во «Мир», 1964.

3. *Гельфанд И. М., Шапиро З. Я.* Однородные функции и их приложения. Успехи мат. наук. 1955, т. 10, вып. 3 (65).
4. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в приложении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М., ИЛ. 1958.
5. *Багдоев А. Г.* Определение фундаментальных решений для уравнений магнитоупругости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, № 2.
6. *Григорян Э. Х.* О колебании магнитоупругой среды, возбуждаемой сосредоточенной гармонической силой. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1978, т. 31, № 5.
7. *Филипов И. Г., Егорьев О. А.* Нестационарные колебания и дифракция волн в акустических и упругих средах. М., «Машиностроение», 1977.
8. *Франк Ф., Мизес Р.* Интегральные и дифференциальные уравнения математической физики. М., ОГИЗ, 1936.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 6 Механика

А. Г. БАГДОЕВ

ПРОНИКАНИЕ ТЕЛА В СРЕДУ ПРИ НАЛИЧИИ ВИБРАЦИЙ

Рассматривается задача о проникании тонкого твердого тела вращения в упругую среду при наличии вибрационного импульса, действующего как до, так и после начала проникания. Рассмотрены две модельные задачи, в первой из которых основным является предварительное нагружение среды с помощью импульса, действующего на ее поверхности, причем во время погружения тела место приложения импульса предположено неизменным. Во второй задаче вибратор находится в вершине проникающего тела. Разумеется, под действием вибраций меняются свойства среды, однако в настоящей статье предположено, что вдали от тела среда остается упругой, хотя и упругие постоянные могут быть функциями частоты колебаний вибрационной силы. Вблизи тела среда течет или появляются трещины по главным меридиональным площадкам.

Задачи о проникании тела в жидкость рассмотрены в [1—3], внедрение свай в грунт в статической постановке изучалось в [4], задача о проникании тонкого тела в упругую среду решена в [5], приближенный подход к задаче вибронагружения, при котором среда моделируется упругой пластинкой, предложен в [6].

§ 1. *Проникание тела в среду при вибрационной силе, действующей на границе полупространства*

Вначале изучается задача Лэмба о вертикальной силе, периодической во времени, действующей на границе полупространства,

$$z=0, \quad \sigma_{zz}(r, z, t) = -p(r)\,\mathrm{Re}\, e^{i\omega(t+t_0)}, \quad \sigma_{rz}=0 \tag{1.1}$$

где Re обозначает действительную часть, r есть радиальная координата, ось Or направлена по свободной поверхности среды, ось Oz — вертикально в глубь среды, t — время, t_0 — некоторый сдвиг по t, учитывающий момент приложения периодической силы, в момент $t=0$ начинается проникание тела. Уравнение меридиана тела выбирается в виде $r=r_k(z, t)$. Вначале определяется поле упругих перемещений от действия силы (1.1). Для определенности полагается $p(r)=\dfrac{p_0\delta(r)}{2\pi r}$, где $\delta(x)$ есть дельта-функция, p_0 — постоянное значение силы. Решение уравнений динамической теории упругости при условии (1.1) можно записать в виде [7]

$$u_r^{(0)}(r, z, t) = -\mathrm{Re}\, e^{i\omega(t+t_0)} \int_0^\infty \left(\alpha A e^{-\nu_1 z} - \nu_2 B e^{-\nu_2 z}\right) \alpha J_1(\alpha r)\, d\alpha$$

$$u_z^{(0)}(r,z,t)=\mathrm{Re}\, e^{i\omega(t-t_0)}\int_0^\infty(-\nu_1 A e^{-\nu_1 z}+\alpha^2 e^{-\nu_2 z})\,\alpha J_0(\alpha r)\,d\alpha \qquad (1.2)$$

где A, B находятся с помощью условий (1.1) в виде

$$A=-\frac{p_0}{2\pi\mu}\frac{2\alpha^2-k_2^2}{R(\alpha)},\quad B=-\frac{p_0}{\pi\mu}\frac{\nu_1}{R(\alpha)}$$

$$R(\alpha)=(2\alpha^2-k_2^2)^2-4\alpha^2\nu_1\nu_2,\quad \nu_n=(\alpha^2-k_n^2)^{\frac{1}{2}},\quad k_n=\frac{\omega}{c_n},\quad n=1,2 \qquad (1.3)$$

c_1 и c_2 — скорости продольных и поперечных волн.

Для малых r можно получить

$$u_r^{(0)}\simeq -r\varkappa,\quad \varkappa=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\, e^{i\omega(t-t_0)}\int_0^\infty(\alpha A e^{-\nu_1 z}-\nu_2\alpha B e^{-\nu_2 z})\,\alpha^2\,d\alpha \qquad (1.4)$$

В упругой области для $t>0$ поле смещений можно представить в виде

$$u_r=u_r^{(0)}+u_r^{(1)},\quad u_z=u_z^{(0)}+u_z^{(1)}$$

где $u_{r,z}^{(1)}$ — перемещения, удовлетворяющие нулевым начальным условиям, связанные с проникaнием тела. Используя метод источников [3, 5], можно показать, что вблизи тела, то есть для малых r имеет место

$$u_r^{(1)}\simeq\frac{f(z,t)}{2\pi r},\quad u_z^{(1)}\simeq 0 \qquad (1.5)$$

где функция $f(z,t)$, связанная с плотностью источников, определяется из граничных условий.

Для напряжений в упругой среде имеет место

$$\sigma_{rr}=\lambda\Delta+2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad \sigma_{\theta\theta}=\lambda\Delta+2\mu\frac{u_r}{r}$$

$$\sigma_{zz}=\lambda\Delta+2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z},\quad \sigma_{rz}=\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right),\quad \Delta=\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad (1.6)$$

Вблизи тела естественно предположить наличие течения среды, которое происходит позади фронта $r=r_*\xi_*$, привязанного к вершине тела, причем при отсутствии вибраций [5] получается, что $\xi_*=\mathrm{const}$. В области течения имеют место уравнения [5]

$$\frac{\varepsilon_{rr}}{\varepsilon_i}=\frac{\sigma_{rr}-\sigma}{2\tau_s},\quad \frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{\varepsilon_i}=\frac{\sigma_{\theta\theta}-\sigma}{2\tau_s},\quad \frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_i}=\frac{\sigma_{zz}-\sigma}{2\tau_s},\quad \frac{\varepsilon_{zr}}{\varepsilon_i}=\frac{\sigma_{rz}}{\tau_s} \qquad (1.7)$$

Здесь

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial v_r}{\partial r},\quad \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{v_r}{r},\quad \varepsilon_{rz}=\frac{\partial v_r}{\partial z}$$

где v_r, v_z — компоненты скорости, причем в основном порядке $|\varepsilon_{zz}|\ll|\varepsilon_{rr}|$ и тогда получится для интенсивности скорости деформации $\varepsilon_i=2\frac{v_r}{r}$.

Постоянная $6\tau_s^2$ есть правая часть условия Мизеса

$$(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})^2+(\sigma_{rr}-\sigma_{zz})^2+(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{zz})^2+6\sigma_{rz}^2=6\tau_s^2 \tag{1.8}$$

Отметим, что решение $u_r^{(0)}$, $u_z^{(0)}$ получено на основании граничного условия (1.1) на поверхности $z=0$.

Для $u_r^{(1)}$, $u_z^{(1)}$ имеются нулевые граничные условия (1.1), однако, как показано в [5], всюду, за исключением малой окрестности точки O, отраженные от $z=0$ волны имеют порядок λ_1^2, где λ_1 — характерная толщина тела, и в порядке $O(1)$, в котором вычисляется $\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r}$ на теле, ими можно пренебречь. Отраженные волны, имеющие порядок малости λ_1^2, можно определять по $u_r^{(1)}$, $u_z^{(1)}$ методом [5]. Точно так же не влияет на решение в основном порядке и малая окрестность точки O, где порядки величин v_r такие же, как и на всем теле [5]. Таким образом, при вычислении напряжений в порядке $O(1)$ достаточно для $u_r^{(1)}$, $u_z^{(1)}$ удовлетворять нулевым начальным условиям и граничным условиям при $r=r_k\xi_0$. Условие малости $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ имеет место [5] при проникании без вибраций и соответствует условию проникания, при котором по крайней мере $v_r\sim v_z$, и тогда в порядке $O(1)$ в области течения уравнение несжимаемости примет вид

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}=0 \tag{1.9}$$

причем $3\sigma=\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}+\sigma_{zz}$. Из (1.7) в основном порядке получится

$$\sigma_{rr}=\sigma-\tau_s,\quad \sigma_{\theta\theta}=\sigma+\tau_s,\quad \sigma_{zz}=\sigma \tag{1.10}$$

Интегрируя (1.9) и удовлетворяя условию на теле $v_r=\frac{\partial r_k}{\partial t}$ или $u_r=r_k$, можно получить при $r\leqslant r_k\xi_0$

$$v_r=\frac{r_k}{r}\frac{\partial r_k}{\partial t},\quad u_r=r-\sqrt{r^2-r_k^2} \tag{1.11}$$

Тогда из непрерывности нормальных перемещений на поверхности $r=r_k\xi_0$ в силу того, что $\xi_0\gg 1$ и поэтому $u_r\approx\frac{r_k^2}{2r}$, получится

$$\frac{r_k}{2\xi_0}=u_r^{(0)}+\frac{1}{2\pi r_k\xi_0}f(z,t) \tag{1.12}$$

Условие для нормального импульса в силу малости скоростей частиц можно записать в виде

$$\sigma_{rr}^{(0)}+\sigma_{rr}^{(1)}=\sigma_{rr} \tag{1.13}$$

Для определения σ_{rr} в области течения можно использовать упрощенные уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

где использована малость σ_{rz} и u_r, откуда согласно (1.10) получится

$$\sigma_{rr} = 2\tau_s \ln r + \varphi(z, t) - \tau_s \tag{1.14}$$

В силу (1.5), (1.6) $\sigma_{rr}^{(1)} = -\frac{\mu}{\pi r^2} f(z, t)$, тогда функция φ определится из (1.12), (1.13) в виде

$$2\tau_s \ln \xi_0 r_k + \varphi - \tau_s = -\frac{\mu}{\xi_0^2} - (2\lambda + 4\mu)\,\varkappa + \lambda \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z} \tag{1.15}$$

где

$$\frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z} = \mathrm{Re}\, e^{i\omega(t - t_0)} \int_0^\infty (\nu_1^2 A e^{-\nu_1 z} - \alpha^2 \nu_2 B e^{-\nu_2 z})\, \alpha d\alpha \tag{1.16}$$

Для определения функции ξ_0 имеется условие (1.8), которое следует записывать для упругого решения, причем, учитывая (1.4), можно найти

$$\frac{1}{\xi_0^2} = -2\varkappa + \sqrt{\frac{\tau_s^2}{\mu^2} - \frac{4}{3}\left\{\varkappa + \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}\right\}^2} \tag{1.17}$$

Необходимое условие того, что решение верно

$$\frac{\tau_s^2}{\mu^2} > \frac{4}{3}\left\{\varkappa + \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}\right\}^2 + 4\varkappa^2 \tag{1.18}$$

выполняется для достаточно малых значений импульса. Для больших p_0 область течения появляется до начала проникания и упругое решение при $r > r_k \xi_0$ не имеет места. В области течения согласно (1.14), (1.15)

$$\sigma_{rr} = 2\tau_s \ln \frac{r}{r_k \xi_0} - \frac{\mu}{\xi_0^2} - (2\lambda + 4\mu)\,\varkappa + \lambda \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + 2\tau_s \tag{1.19}$$

и если при $r = r_k \xi_0$ $\sigma_{\theta\theta} < \sigma_*$, где σ_* есть прочность на отрыв по меридиональным площадкам, то и при $r < r_k \xi_0$ $\sigma_{\theta\theta} < \sigma_*$ и трещины не образуются [5].

Можно учесть также тот факт, что под действием вибраций упругие постоянные принимают их новые значения за конечное время*. Один из способов, в котором среда вдали от тела переходит из вязкого в упругое состояние, заключается в замене постоянных λ, μ на [9]

$$\lambda\left(1 + \bar{\tau}\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad \mu\left(1 + \tau\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

где $\bar{\tau}$, τ есть время релаксации, при этом (1.5) снова имеет место. Также можно учесть в области течения эффекты вязкости, заменяя в

* Проще всего взять упругое решение вдали от тела, в котором $\mu = \mu(t)$, при этом (1.19) снова имеет место.

(1.7) $\frac{\tau_s}{\varepsilon_i}$ на $\mu' + \frac{\tau_s}{\varepsilon_i}$, где μ' есть коэффициент сдвиговой вязкости, а также можно учесть и упругие слагаемые в тензоре скоростей деформаций [10].

Можно решить также задачу проникания в грунт, в котором вблизи тела имеет место условие сыпучести [2]

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1-k}{1+k}\sigma_{rr} + \frac{\tau_0}{1+k}, \quad \tau_0 = 2\tau_s$$

Вводя лагранжеву координату $\xi = r - u_r$, получим из (1.11) $u_r = \sqrt{\xi^2 + r_k^2} - \xi$, а уравнение движения дает (после отбрасывания $\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$)

$$\sigma_{rr} = \frac{\tau_0}{\nu(1+k)}\left(1 - \frac{r_k^\nu}{r^\nu}\right) + \frac{r_k^\nu}{r^\nu}\sigma_{rr}(0, t), \quad \nu = \frac{2k}{1+k}$$

На фронте $r = r_k\xi_0$, $\sigma_{rr} \approx \sigma_{rr}^{(0)} + \sigma_{rr}^{(1)}$, откуда получится

$$\frac{\tau_0}{\nu(1+k)}\left(1 - \frac{1}{\xi_0^\nu}\right) + \frac{1}{\xi_0^\nu}\sigma_{rr}(0, t) = -2(\lambda+\mu)\varkappa +$$

$$+ \lambda\frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z} - \frac{\mu(1 + 2\varkappa\xi_0^2)}{\xi_0^2}$$

ξ_0 определяется из указанного условия предельного равновесия или непрерывности $\sigma_{\theta\theta}$, что дает с учетом того, что $\sigma_{rr}^{(1)} \approx \sigma_{\theta\theta}^{(1)}$, $\sigma_{rr}^{(0)} \approx -\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$,

$$\frac{2\mu(1 + 2\varkappa\xi_0^2)}{\xi_0^2} + \left\{-2(\lambda+\mu)\varkappa + \lambda\frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}\right\}2k = \tau_0$$

При отсутствии вибраций отсюда снова получится $\xi_0^2 = \frac{\mu}{\tau_0}$. Давление на теле $\sigma_{rr}(0, t)$ найдется по предыдущей формуле. В дальнейшем для простоты при расчетах взята первоначальная модель среды с областью течения вблизи тела и упругой средой при $r \geqslant r_k\xi_0$. Сила сопротивления проникании равна

$$P = -2\pi\int_0^{f} r_k\sigma_{rr}|_{r=r_k}(\gamma_1 + k_1)\,dz$$

где $f(t)$ есть глубина проникания, $\gamma_1 \approx -\frac{\partial r_k}{\partial z}$ есть полуугол раствора тела, k_1 — коэффициент трения. Записывая уравнение движения тела $mf'' = -P + p_0\cos\omega(t + t_1)$, можно из (1.17) для ряда значений z находить ξ_0 на каждом слое по t. Тогда для $f(t)$ получится обыкновенное дифференциальное уравнение, которое при заданной форме тела $r_k = r_k\{f(t) - z\}$ можно решать для начальных условий $t = 0$, $f(t) = 0$.

$f'(t) = V$, $\xi_0 = 1$. При $\mu \neq 0$ или при $\tau_s \neq 0$ решение имеет особенность в вершине тела. Вблизи точки пересечения тела со свободной поверхностью $z=0$ также требуется уточнение решения [5]. Согласно решению в области $r \leqslant r_k \xi_0$ на теле $\frac{\partial u_r}{\partial r} = \infty$, что согласуется с тем фактом, что точки оси $r=0$ переходят в точки поверхности $r = r_k$. Кроме того, вблизи тела можно пренебречь $u_r^{(0)}$, $u_z^{(0)}$ по сравнению с u_r в то время, как в упругой области они имеют один порядок.

§ 2. *Проникание при наличии фронта трещин*

При невыполнении условия $\sigma_\theta < \sigma_*$ при $r = r_k \xi_0$ можно предположить, что позади фронта $r = r_k \xi_0$ имеет место образование меридиональных трещин, на которых выполняется условие $\sigma_\theta = 0$ [8]. Повторяя выкладки работы [5] с учетом вибрационных перемещений § 1, можно получить в области трещин вблизи тела

$$\sigma_{rr} = \frac{2\mu\eta r_k}{r} \left\{ -\frac{1}{\eta + \ln \xi_0} + \xi_0 \frac{-\varkappa 2(\lambda + 2\mu) + \lambda \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}}{2\mu (\ln \xi_0 + \eta)} \right\} \tag{2.1}$$

где ξ_0 определяется из соотношения

$$-2\varkappa \frac{\lambda(\eta + \ln \xi_0) + (\lambda + 2\mu) \ln \xi_0}{\eta + \ln \xi_0} + \lambda \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z} \frac{\eta + 2 \ln \xi_0}{\eta + \ln \xi_0} +$$

$$+ 2\mu \frac{\eta}{\xi_0 (\eta + \ln \xi_0)} = \sigma_* \tag{2.2}$$

причем $\eta = \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}$. Условие того, что реализуется фронт трещин, позади которого не возникает фронт течения, помимо вышеуказанного, имеет вид

$$\sqrt{6} \frac{\sqrt{(\lambda + \mu)^2 + \frac{1}{3}\mu^2}}{(\eta + \ln \xi_0)(\lambda + 2\mu)} \left\{ 1 + \frac{\varkappa 2(\lambda + 2\mu) - \lambda \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}}{2\mu} \xi_0 \right\} < \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\tau_s}{\mu} \tag{2.3}$$

При невыполнении условия (2.3) позади фронта $r = r_k \xi_0$ трещин образуется фронт течения $r = r_k \xi_1$. Впереди фронта $r = r_k \xi_0$ по-прежнему имеет место упругое решение (1.4), (1.6). Так же, как и в задаче [5], где отсутствуют вибрации, можно получить решение в области трещин $r_k \xi_1 < r < r_k \xi_0$ и области течения $r_k < r < r_k \xi_1$, в которой имеет место

$$\sigma_{rr} = 2\tau_s \ln \frac{r}{r_k \xi_1} - \eta\mu \frac{1}{\xi_1^2 \left(\ln \frac{\xi_0}{\xi_1} + \eta \right)} +$$

$$
+ \eta \frac{-2(\lambda + 2\mu)\varkappa + \lambda \dfrac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}}{\ln \dfrac{\xi_0}{\xi_1} + \eta} \frac{\xi_0}{\xi_1} \tag{2.4}
$$

где ξ_0, ξ_1 определяются уравнениями

$$
\frac{1}{\ln \xi_0/\xi_1 + \eta} \left\{ \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{\xi_1^2} + \frac{\xi_0}{\xi_1} 2\varkappa - \frac{\xi_0}{\xi_1} \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z} \right\} \sqrt{\frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu^2} + \frac{1}{3}} = \frac{\tau_s}{\mu}
$$

$$
-4(\lambda + \mu)\varkappa + 2\lambda \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z} +
$$

$$
+ \frac{\eta\mu}{\xi_1 \xi_0 (\ln \xi_0/\xi_1 + \eta)} + \eta \frac{2\varkappa(\lambda + 2\mu) - \lambda \dfrac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}}{\ln \dfrac{\xi_0}{\xi_1} + \eta} = \sigma_* \tag{2.5}
$$

Условие отсутствия фронта трещин позади фронта $r = r_\lambda \xi_1$

$$
2\tau_s + \frac{\xi_0}{\xi_1} \left\{ -4(\lambda + \mu)\varkappa + 2\lambda \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z} \right\} < \left(1 + \frac{\xi_0}{\xi_1} \right) \sigma_* \tag{2.6}
$$

Полученные формулы достаточно просты и по ним можно проводить численные расчеты, причем были проведены расчеты для задачи § 1, в которой имеется фронт течения, и тело взято в виде конуса с углом полураствора λ_1. Были взяты следующие значения величин $c_1 = a$, $c_2 = b$:

$$
\frac{b}{a} = \frac{1}{1.81}, \quad \frac{V}{b} = 0.1, \quad \omega t_s = 50, \quad \omega t = 6.86;\ 10
$$

$$
\frac{\omega z}{b} = z_1, \quad 0.1 < z_1 < \frac{V}{b}\,\omega t, \quad \frac{\tau_s}{\mu} = 0.01;\ 0.1
$$

$$
p = \frac{p_0 \omega^2}{4\pi\mu b^2}, \quad p = 10^{-6};\ 10^{-5};\ 10^{-4}
$$

где V — скорость проникания, которая пока предположена постоянной. Сила сопротивления записывается в виде

$$
P = -(\lambda_1 + k_1)\lambda_1 \int_0^{Vt} 2\pi (Vt - z)\, \sigma_{rr}\, dz
$$

или

$$
P = 2\pi(\lambda_1 + k_1)\lambda_1 \frac{b^2 \tau_s}{\omega^2} P', \quad P' = -\int_0^{\frac{V}{b}\omega t} \left(\frac{V}{b}\omega t - z_1 \right) \frac{\sigma_{rr}}{\tau_s}\, dz_1
$$

где λ_1 — угол полураствора, k_1 — коэффициент трения.

Ввиду того, что период по ωt функций

$$\frac{\varkappa}{p} = J, \quad \frac{1}{p}\,\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} = K$$

равен $2\pi \approx 6.28$, можно продолжить полученные значения периодически по ωt, причем значения J, K в точке 6.86 обратны по знаку их величинам в точке 10.

Результаты расчетов приведены в табл. 1, где даны результаты для $\omega t = 10$, причем для $\omega t = 6.86$ следует поменять знаки J, K, а также в

Таблица 1

$\omega t = 10$

z_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
J	74.666	18.91	8.633	5.041	3.374	2.461	1.902	1.53	1.221	1.101
K	233.684	58.935	26.645	15.335	10.082	7.210	5.461	4.309	3.427	2.977

табл. 2, 3, где в последнем столбце записаны постоянные значения $\frac{1}{\xi_0^2}$ и σ_{rr}, получаемые при $p=0$; при $z_1 > 0.7$ величины $\frac{1}{\xi_0^2}$ и σ_{rr} почти по-

Таблица 2

$p = 10^{-5}, \quad \frac{\tau_s}{\mu} = 0.01$

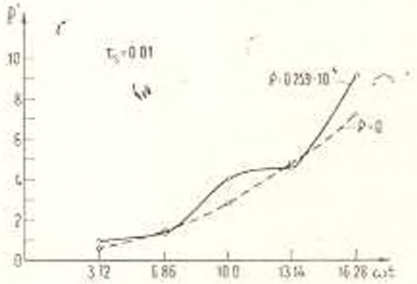
z_1		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	$p=0$
$\frac{1}{\xi_0^2}$	$\omega t = 10$	0.008	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
	$\omega t = 6.86$	0.011	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
$-\frac{\sigma_{rr}}{\tau_s}$	$\omega t = 10$	5.82	5.65	5.63	5.62	5.61	5.61	5.61	5.6
	$\omega t = 6.86$	5.42	5.56	5.58	5.59	6.6	5.6	5.6	5.6

Таблица 3

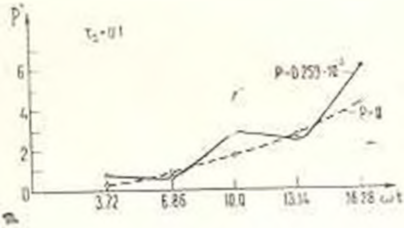
$p = 10^{-4}, \quad \frac{\tau_s}{\mu} = 0.1$

z_1		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	$p=0$
$\frac{1}{\xi_0^2}$	$\omega t = 10$	0.079	0.096	0.098	0.099	0.099	0.1	0.1	0.1
	$\omega t = 6.86$	0.108	0.103	0.102	0.101	0.101	0.101	0.1	0.1
$-\frac{\sigma_{rr}}{\tau_s}$	$\omega t = 10$	3.52	3.35	3.33	3.32	3.31	3.3	3.3	3.3
	$\omega t = 6.86$	3.11	3.25	3.28	3.29	3.29	3.3	3.3	3.3

стоянны, причем то же относится к величинам $\frac{1}{\xi_0^2}$ и σ_{rr} при значениях $p = 10^{-6}$, $\frac{\tau_s}{\mu} = 0.01$, где $-\frac{\sigma_{rr}}{\tau_s} = 5.6$ и при $p=10^{-6}$, $p=10^{-5}$, $\frac{\tau_s}{\mu} = 0.1$, где $-\frac{\sigma_{rr}}{\tau_s} = 3.3$. Кроме того, на графиках 1, 2 приведены кривые, дающие изменение P' в зависимости от ωt, причем пунктиром дана линия P'_0, соответствующая $p = 0$. Следует отметить, что значения K, J, $\frac{1}{\gamma_0}$, $\frac{\sigma_{rr}}{\tau_s}$, P годятся для произвольного закона проникания $f(t)$, только следует заменить V на $\frac{f}{t}$. Полученные значения σ_{rr} и P позволяют оценить влияние вибраций на сопротивление среды проникания и получить закон движения тела в среде при наличии вибраций.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Следует отметить, что при $\frac{\tau_s}{\mu} = 0.1$ значения $-\frac{\sigma_{rr}}{\mu}$ больше значений при $\frac{\tau_s}{\mu} = 0.01$, однако $\left(-\frac{\sigma_{rr}}{\tau_s}\right)$ при этом уменьшается. Предполагая, что вибрации сильно уменьшают μ и $\frac{\mu}{\tau_s}$, отсюда можно получить вывод о значительном уменьшении $(-\sigma_{rr})$ и силы сопротивления из-за вибраций.

Тот же вывод относится к коэффициенту трения.

Расчеты выполнены Г. А. Саркисяном.

§ 3. *Случай вибрационной силы, приложенной в вершине тела*

В вышерассмотренных задачах было сделано предположение о том, что вибрация имеет место и до начала проникания, причем вибрационная сила все время приложена в точке O свободной поверхности среды. Для виброударных инструментов, по-видимому, более естественным является предположение о том, что вибрации передаются в среду через силу, приложенную в вершине тела. Вначале решается задача о движении точечной силы со скоростью проникания V, которая для простоты предположена постоянной.

Уравнения движения в цилиндрической системе координат записываются в виде

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 v'}{\partial r^2}+(\lambda+2\mu)\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v'}{\partial r}-\frac{v'}{r}\right)+\mu\frac{\partial^2 v'}{\partial z^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u'}{\partial r\partial z}=$$

$$=\rho\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 v'}{\partial r\partial z}+(\lambda+\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial v'}{\partial z}+\mu\frac{\partial^2 u'}{\partial r^2}+\mu\frac{1}{r}\frac{\partial u'}{\partial r}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}=$$

$$=f+\rho\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} \tag{3.1}$$

где f есть объемная сила, направленная по оси z,

$$f=-\operatorname{Re} p_0\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\,\delta(Vt-z)\,e^{-i\omega_0 t} \tag{3.2}$$

Удобно ввести функции

$$u'=\operatorname{Re}u,\quad v'=\operatorname{Re}v \tag{3.3}$$

тогда для u, v знак Re в (3.2) можно отбросить. Решение для преобразования Лапласа по t от v, u ищется в виде

$$\bar v=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}A(\alpha,\beta)\,e^{i\alpha z}J_1(\beta r)\,d\alpha d\beta$$

$$\bar u=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}B(\alpha,\beta)\,e^{i\alpha z}J_0(\beta r)\,d\alpha d\beta \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (3.1), к которому применено двустороннее преобразование Лапласа, и обращая преобразования Фурье по α и Ганкеля по β, можно найти

$$A=-\frac{p_0}{2\pi\Delta}\rho i\alpha(a^2-b^2)\beta^2\delta(\omega-\omega_0-V\alpha)$$

$$B=\frac{p_0}{2\pi\Delta}\rho(a^2\beta^2+b^2\alpha^2-\omega^2)\beta\delta(\omega-\omega_0-V\alpha) \tag{3.5}$$

где $s=-i\omega$ есть параметр преобразования Лапласа,

$$\Delta=\rho^2(\omega^2-a^2\alpha^2-a^2\beta^2)(\omega^2-b^2\alpha^2-b^2\beta^2)$$

и использовано преобразование Лапласа

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}\delta(Vt-z)\,e^{-i\omega_0 t}\,dt=\frac{1}{V}e^{i\frac{z}{V}(\omega-\omega_0)}$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к (3.4), (3.5), можно получить, например, для v

$$v = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-i\omega_0 t}\, \frac{i\alpha\beta\,(a^2 - b^2)\,\beta p_0 e^{i\alpha(z - Vt)}\, J_1(\beta r)\, d\alpha d\beta}{2\pi\rho\,(\omega_1^2 - a^2\alpha^2 - a^2\beta^2)(\omega_1^2 - b^2\alpha^2 - b^2\beta^2)} \tag{3.6}$$

где $\omega_1 = \omega_0 + V\alpha$.

Проводится вычисление вычетов по α в точках $\omega_0 + V\alpha = \omega$ или

$$\alpha_{1,2}^{(1,2)} = \frac{\omega_0 V \pm J_{1,2}}{c_{1,2}^2 - V^2}, \quad J_n = c_n \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2 (c_n^2 - V^2)} \tag{3.7}$$

причем верхнему индексу 1 соответствуют знак «+», и значения $\alpha_{1,2}^{(1)} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_{1,2}^2} - \beta^2}$; это решение соответствует $z > Vt$. Соответственно при $z < Vt$ выбирается верхний индекс 2 в (3.7), знак „—" и значения $\alpha_{1,2}^{(2)} = -\sqrt{\frac{\omega^2}{c_{1,2}^2} - \beta^2}$. Окончательно получится при $z < Vt$

$$v = -p_0 \sum_{n=1}^{2} \int_0^\infty (-1)^{n-1} e^{-i\omega_0 t}\, \frac{\alpha_n^{(2)}\, \beta^2\, e^{i\alpha_n^{(2)}(z - Vt)}\, c_n^2\, J_1(\beta r)}{\omega_n^{(2)2}\, 4\pi\rho\, J_n}\, d\beta$$

$$u = p_0 \int_0^\infty e^{-i\omega_0 t}\, \frac{i\alpha_1^{(2)2}\, \beta c_1^2\, e^{i\alpha_1^{(2)}(z - Vt)}\, J_0(\beta r)}{\omega_1^{(2)2}\, 4\pi\rho J_1}\, d\beta + \tag{3.8}$$

$$+ p_0 \int_0^\infty e^{-i\omega_0 t}\, \frac{i\beta^3 c_2^2\, e^{i\alpha_2^{(2)}(z - Vt)}\, J_0(\beta r)}{4\pi\rho\, \omega_2^{(2)2}\, J_2}\, d\beta$$

где использовано соотношение

$$1 - V\frac{d\alpha_n}{d\omega_n} = \frac{\omega_n (1 - V^2/c_n^2) - \omega_0}{V \alpha_n}$$

и имеет место

$$\omega_n^{(1,2)} = \frac{\omega_0 \pm V J_n/c_n^2}{1 - V^2/c_n^2}$$

причем точки $\alpha_{1,2}^{(2)}$ находятся в нижней полуплоскости. При $z > Vt$ взяты значения $\alpha_{1,2}^{(1)}$.

Для того, чтобы выяснить являются ли непрерывными значения v, u при $z = Vt$, можно использовать соотношение [5]

$$\int_0^\infty \beta\, \frac{e^{i|z|\sqrt{\omega^2/c_n^2 - \beta^2}}}{\sqrt{\beta^2 - \frac{\omega^2}{c_n^2}}}\, J_0(\beta r)\, d\beta = \frac{e^{i\frac{\omega}{c_n}\sqrt{z^2 + r^2}}}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

где $\sqrt{\beta^2-\omega^2/c_n^2} = -i\sqrt{\frac{\omega^2}{c_n^2}-\beta^2}$, и получить из (3.8)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=p_0\frac{\partial^2}{\partial z\partial r}\sum_{n=1}^{2} e^{-i\omega_0 t}(-1)^{n-1}\, e^{i\frac{\omega_0 V}{c_n^2-V^2}(z-Vt)}\,\frac{e^{i\frac{\omega_0}{c_n\sqrt{1-V^2/c_n^2}}R_n}}{4\pi\rho R_n}$$

причем $R_n=\sqrt{\frac{(Vt-z)^2}{1-V^2/c_n^2}+r^2}$. Поскольку такое же выражение получается при $z>Vt$, отсюда следует правильность (3.8) и соответствующего значения для $z>Vt$. Можно вычислить сначала в (3.4), (3.5) вычет по α и получить

$$-\bar{v}=\pm p_0\int_0^\infty\sum_{n=1}^{2}(-1)^{n-1}\frac{\beta^2\delta(\omega-\omega_0-V\alpha_n)\,e^{i\alpha_n z}}{2\rho\omega^2}J_1(\beta r)\,d\beta$$

$$-\bar{u}=\mp p_0\int_0^\infty\frac{i\alpha_1\beta\delta(\omega-\omega_0-V\alpha_1)}{2\omega^2\rho}J_0(\beta r)\,d\beta\mp \tag{3.9}$$

$$\mp p_0\int_0^\infty i\beta^3\delta(\omega-\omega_0-V\alpha_2)\,e^{i\alpha_2 z}J_0(\beta r)\frac{d\beta}{2\alpha_2\omega^2\rho}$$

где $\alpha_1=\pm\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2}-\beta^2}$, $\alpha_2=\pm\sqrt{\frac{\omega^2}{b^2}-\beta^2}$, верхние (нижние) знаки относятся к $z>Vt$ $(z<Vt)$.

Для того, чтобы получить совпадение с формулой (3.8), следует при $z<Vt$ вычислять в (3.9) интегралы от дельта-функции в точках $\alpha_{1,2}^{(2)}$, а при $z>Vt$ — в точках $\alpha_{1,2}^{(1)}$. (3.8) дает решение стационарной задачи без учета нулевых начальных условий и свободной поверхности. Для достаточно больших t и малых $\frac{V}{b}$ можно и при наличии последней считать задачу не зависящей от начальных условий. Тогда для построения отраженных от поверхности $z=0$ волн следует полагать для полных комплексных перемещений $V^1=\bar{v}+\bar{v}_1$, $U^1=\bar{u}+\bar{u}^1$, где $\bar{v}, \bar{u}$ даются (3.4), в которых берутся нижние знаки

$$\bar{v}_1=\int_0^\infty\sum_{n=1}^{2}A_n(\beta)\,e^{-i\alpha_n z}J_1(\beta r)\,d\beta$$

$$\bar{u}_1=\int_0^\infty\sum_{n=1}^{2}B_n(\beta)\,e^{-i\alpha_n z}J_0(\beta r)\,d\beta,\quad U'=\operatorname{Re}U^1,\quad V'=\operatorname{Re}V^1 \tag{3.10}$$

На поверхности $z=0$ имеются условия $\sigma_{zz}=\sigma_{rz}=0$, которые дают

$$\lambda\left(\frac{\partial V^1}{\partial r}+\frac{V^1}{r}\right)+(\lambda+2\mu)\frac{\partial U^1}{\partial z}=0 \qquad (3.11)$$

$$\frac{\partial V^1}{\partial z}+\frac{\partial U^1}{\partial r}=0$$

Подставляя (3.9), (3.10) и (3.11), учитывая соотношения, получаемые из уравнений (3.1), верных и для u_1, v_1 ($f=0$), после подстановки в (3.10) $B_1=-\frac{\alpha_1}{i\beta}A_1$, $B_2=\frac{\beta}{i\alpha_2}A_2$, можно получить решение в виде

$$-A_1\Delta_1=\frac{p_0}{2\omega^2\rho}\beta^2 b^2 R_1\,\delta(\omega-\omega_0-V\alpha_1)+$$

$$+2\frac{b^2 p_0}{\rho\omega^2}\beta^4\left(\frac{\omega^2}{b^2}-2\beta^2\right)\delta(\omega-\omega_0-V\alpha_2),\; R_1=\left(\frac{\omega^2}{b^2}-2\beta^2\right)^2-4\beta^2\alpha_1\alpha_2$$

$$-A_2\Delta_1=-2b^2\left(\frac{\omega^2}{b^2}-2\beta^2\right)p_0\frac{\alpha_1\alpha_2\beta^2}{\omega^2\rho}\delta(\omega-\omega_0-V\alpha_1)+$$

$$+p_0\frac{\beta^2 b^2}{2\omega^2\rho}\delta(\omega-\omega_0-V\alpha_2),\;\frac{\Delta_1}{b^2}=\left(\frac{\omega^2}{b^2}-2\beta^2\right)^2+4\alpha_1\alpha_2\beta^2$$

Подставляя полученные соотношения в (3.10), после обратного преобразования по ω с учетом того, что в силу $-(z+Vt)<0$ нужно вычислять интегралы от дельта-функции в точках $\alpha_{1,2}^{(2)}$, получится

$$-v_1=p_0\int_0^\infty\sum_{n=1}^{2}\Omega_n(\omega_n^{(2)})J_1(\beta r)\,e^{-i\omega_n^{(2)}t-i\alpha_1(\omega_n^{(2)})z}\,d\beta+$$

$$+p_0\int_0^\infty\sum_{n=1}^{2}K_n(\omega_n^{(2)})J_1(\beta r)\,e^{-i\omega_n^{(2)}t-i\alpha_2(\omega_n^{(2)})z}\,d\beta \qquad (3.12)$$

$$-u_1=p_0\int_0^\infty\sum_{n=1}^{2}\Omega_n(\omega_n^{(2)})J_0(\beta r)\,e^{-i\omega_n^{(2)}t-i\alpha_1(\omega_n^{(2)})z}\,\frac{i\alpha_1(\omega_n^{(2)})}{\beta}\,d\beta+$$

$$+p_0\int_0^\infty\sum_{n=1}^{2}K_n(\omega_n^{(2)})J_0(\beta r)\,e^{-i\omega_n^{(2)}t-i\alpha_2(\omega_n^{(2)})z}\,\frac{\beta}{i\alpha_2(\omega_n^{(2)})}\,d\beta$$

где

$$\Omega_1(\omega)=\frac{\beta^2 b^2 R_1(\omega)V\alpha_1}{4\pi\Delta_1(\omega)\,[\omega(1-V^2a^{-2})-\omega_0]\,\omega^2\rho}$$

$$\Omega_2(\omega)=\frac{b^2\beta^4\left(\frac{\omega^2}{b^2}-2\beta^2\right)V\alpha_2}{\pi\rho\omega^2\Delta_1(\omega)\,[\omega(1-V^2b^{-2})-\omega_0]}$$

$$K_1(\omega) = -\frac{b^2\beta^2\left(\frac{\omega^2}{b^2}-2\beta^2\right)\alpha_1^2\, V\alpha_2}{\pi\mu\omega^2\Delta_1(\omega)\,[\omega(1-V^2a^{-2})-\omega_0]}$$

$$K_2(\omega) = \frac{\beta^2 b^2 R_1(\omega)\, V\alpha_2}{4\pi\rho\,\omega^2\Delta_1(\omega)\,\{\omega(1-V^2b^{-2})-\omega_0\}}$$

Для малых r, учитывая, что $J_1(\beta r)\approx\frac{1}{2}\beta r$, и обозначая $\mathrm{Re}\,V' = -r\varkappa$, можно получить значения $\varkappa$ и $\frac{\partial u'}{\partial z}+\frac{\partial u_1'}{\partial z}$ сложением действительной части выражений (3.8), (3.12), причем сравнение с § 1 показывает, что роль $u_z^{(0)}$, $u_z^{(1)}$ играют V', U'. Далее, используя значения $\varkappa=\varkappa_0+\varkappa_2$, $\frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}$ в формулах §§ 1, 2, можно получить решение задачи о проникании тела в упругую среду при наличии фронта течения, фронта трещин и фронта трещин, за которым следует фронт течения, причем вибрационная сила p_0 действует в вершине тела во все время с начала проникания. При $V=0$, взяв (3.8) для $z>Vt$, то есть для значений $\alpha^{(1)}_{1,2}$, и сложив с (3.12), с учетом того, что при этом $\alpha^{(1)}_n=-\alpha^{(2)}_n$, $\omega_0=-\omega$, $\sqrt{\beta^2-\frac{\omega^2}{c_n^2}}=i\alpha_n^{(2)}$, можно получить решение (1.2), в котором изменен знак p_0. Следует отметить, что в отсутствие предварительного нагружения среды, учитывая, что вибрации передаются в среду через всю поверхность проникающего тела, можно упростить задачу, не учитывая слагаемых $u_z^{(0)}$, $u_z^{(0)}$.

Тогда (1.19) примет вид

$$\sigma_{rr} = 2\tau_s \ln\frac{r}{r_k\xi_0} - \tau_s,\quad \xi_0^2=\frac{\mu}{\tau_s}$$

и на теле $+\sigma'=\sigma_{rr}=-\tau_s\ln\frac{\mu}{\tau_s}-\tau_s$ постоянно. Уравнение движения конуса имеет вид $r_k=\varepsilon_1(f-z)$.

$$mf''(t)=-\tau_s\left(\ln\frac{\mu}{\tau_s}+1\right)\pi f^2(t)\,\varepsilon_1(\varepsilon_1+k_1)+p_0\cos\omega t$$

где p_0 есть вибрационная сила. Хотя вблизи свободной поверхности требуется уточнение решения [5], влияние этой области на закон движения мало, и его можно не учитывать. Для произвольного $r_k=r_k\,[f(t)-z]=r_k(\zeta)$

$$V=f'(0),\ f'^2(t)-V^2=\frac{2\pi\sigma'}{m}\int_0^f r_k^2(\zeta)\,d\zeta-\frac{4\pi\tau' k_1}{m}\int_0^f r_k(\zeta)(f-\zeta)\,d\zeta,$$

откуда при $f'(t)=0$ найдется $f=f_{\max}$.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 10 V 1979

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ՄԱՐՄՆԻ ԹԱՓԱՆՑՈՒՄԸ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՄԵՋ ՎԻԲՐԱՑԻԱՆԵՐԻ ՆԵՐԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ենթադրվում է, որ թափանցող մարմնի շրջակայքում տեղի ունի միջավայրի քայքայում և միջավայրը հոսում է։ Դիտարկված խնդիրներում լուծումը առաձգական տիրույթի համար կարվում է մարմնի շրջակայքում պլաստիկական տիրույթի համար ստացված լուծման հետ։ Բերվում են աղյուսակներ և գրաֆիկները։

THE PENETRATION OF A BODY INTO A MEDIUM UNDER VIBRATION

A. G. BAGDOEV

Summary

The penetration of a slender body of revolution into the elastic medium under a vibration impulse is considered. The problems are examined. In the first one the initial loading of the medium by the impulse applied to the surface of the medium is studied. In the second one the vibration impulse is applied to the top of the penetrating body. The front, connected with the top of the body and separating the region of elastic deformations from the region of plastic flow near the body is introduced. The effective solution, satisfying the boundary conditions on the body is found. The tables of stresses on the body and the graphs of the resistance force of the medium are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорян С. С.* Некоторые вопросы газодинамики тонких тел. Кандидатская диссертация, МГУ, 1956.
2. *Сагомонян А. Я.* Проникание. Изд. МГУ, 1974.
3. *Багдоев А. Г.* Проникание узкого конуса в сжимаемую жидкость. Вестник МГУ, 1955.
4. *Сокол В. А., Шмойлов Л. Ф.* Осесимметричная задача о внедрении в упругое полупространство тонкой жесткой гладкой сваи конечной длины. ПММ, 1975, т. 39, вып. 4.
5. *Багдоев А. Г.* Проникание тонкого тела вращения в упругую среду. Изв. АН Арм. ССР, 1977, т. 30, № 5.
6. *Неймарк Ю. И.* Теория вибрационного погружения. Инж. сб., 1953, т. 16, стр. 13—18.
7. *Новацкий В.* Теория упругости. М., «Мир», 1975.
8. *Григорян С. С.* Некоторые вопросы математической теории деформирования горных пород. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
9. *Кольский Г.* Волны напряжения в твердых телах. М., ИЛ, 1955.
10. *Ионов В. Н., Огибалов П. М.* Напряжения в телах при импульсивном нагружении. М., Изд-во ВШ, 1975.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 6, 1981 Механика

М. В. БЕЛУБЕКЯН, А. Е. ГАСПАРЯН

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ МАГНИТОУПРУГОЙ ВОЛНЫ В КОНЕЧНО-ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

В настоящей работе рассматриваются одномерные волновые движения конечно-проводящей неполяризуемой ненамагничиваемой упругой изотропной среды в однородном магнитном поле. Для описания распространения волн используются линеаризованные уравнения электродинамики и уравнения динамической теории упругости [1—3].

Решения представлены в виде монохроматических волн и получены дисперсионные соотношения. Зависимость частоты от волнового числа найдена с помощью разложения по малому параметру.

Исследованы изменение скорости, дисперсия и затухание волн в зависимости от величины магнитного поля.

Полученные решения исследуются при помощи метода стационарной фазы.

§ 1. Основные уравнения

При выводе систем уравнений, описывающих движение упругой среды в постоянном однородном магнитном поле, принимаются следующие предположения:

а) среда является однородным изотропным проводником с постоянной электропроводностью;

б) токи смещения пренебрегаются;

в) упругое перемещение среды и электромагнитные возмущения считаются настолько малыми, что при описании магнитоупругих колебаний можно пользоваться линейными уравнениями магнитоупругости и электродинамики.

Для описания движения упругой среды в постоянном однородном магнитном поле с заданным вектором напряженности $\vec{H}_0$ используются уравнения электродинамики для области, занимаемой телом (внутренняя область) и уравнения динамической теории упругости, которые в абсолютной гауссовой системе единиц запишутся следующим образом [1—3]:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho_e, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0 \tag{1.1}$$

и

$$G\Delta\vec{u} + (\lambda + G)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} + \vec{R} = \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

где ρ_e — объемная плотность электрического заряда, c — скорость света в вакууме, ρ, λ, G — плотность и упругие постоянные Ляме среды, соответственно, $\vec{R}$ — сила Лоренца, которая возникает от действия вектора плотности электрического тока и вектора магнитной индукции

$$\vec{R} = \frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B} \tag{1.3}$$

Найти решение задачи (1.1) — (1.2) в общем виде трудно, поэтому используем линеаризованные уравнения электродинамики

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rot}\,\vec{h} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left(\vec{e} + \frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\times\vec{H}_0\right)\\
&\mathrm{rot}\,\vec{e} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{h}}{\partial t}\\
&\mathrm{div}\,\vec{h} = 0\\
&\mathrm{div}\left(\varepsilon\vec{e} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\times\vec{H}_0\right) = 4\pi\rho_e
\end{aligned} \tag{1.4}$$

где μ — коэффициент магнитной проницаемости, ε — диэлектрическая постоянная, $\sigma = 1/R_1$ — коэффициент электропроводности среды (R_1 — удельное электрическое сопротивление), $\vec{h}$, $\vec{e}$ — компоненты возбужденного электромагнитного поля.

Последнее уравнение системы (1.4) служит для определения плотности электрического тока ρ_e, возникающего при распространении магнитоупругой волны.

§ 2. Постановка и решение задачи

Рассмотрим случай, когда упругая одномерная волна распространяется по направлению координаты x, а вектор напряженности заданного магнитного поля параллелен направлению распространения волн, то есть

$$\vec{H}_0 = \{H_{01}, 0, 0\} \tag{2.1}$$

Проектируя систему уравнений (1.2) и (1.4) на оси координат, с учетом (2.1) получаем следующие уравнения одномерной задачи:

$$\begin{aligned}
&C_t^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\sigma\mu}{c\rho}H_{01}\left(e_3 - \frac{\mu}{c}H_{01}\frac{\partial u_2}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial h_3}{\partial x} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left(e_2 - \frac{\mu}{c}H_{01}\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial e_3}{\partial x} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial h_2}{\partial t}$$

и

$$C_t^2\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - \frac{\sigma\mu}{c\rho} H_{01}\left(e_2 + \frac{\mu}{c} H_{01}\frac{\partial u_3}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial h_3}{\partial x} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left(e_2 + \frac{\mu}{c} H_{01}\frac{\partial u_3}{\partial t}\right) \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial x} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial h_3}{\partial t}$$

Для u_1 получим отдельное уравнение

$$c_l^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \tag{2.4}$$

где $c_l^2 = (2G+\lambda)/\rho$ — квадрат скорости чисто упругих продольных волн, $c_t^2 = G/\rho$ — квадрат скорости чисто поперечных волн.

Из (2.4) следует, что магнитное поле не влияет на скорость распространения продольной волны.

Согласно (2.2) и (2.3) задачи определения u_2, h_2, e_3 и u_3, h_3, e_2 автономны.

Решение системы уравнений (2.2) будем искать в следующем виде:

$$(u_2,\ h_2,\ e_3) = (u_{20},\ h_{20},\ e_{30})\exp(i\theta) \tag{2.5}$$

где $\theta = kx - \omega t$.

Подставляя (2.5) в (2.2), относительно ω получим кубическое уравнение, то есть дисперсионное соотношение

$$\gamma\omega^3 + ik^2\omega^2 - (\mu\alpha + \gamma c_t^2)\,k^2\omega - i\,c_t^2\,k^4 = 0 \tag{2.6}$$

где

$$\gamma = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2},\quad \alpha = \frac{\sigma\mu}{c^2\rho} H_{01}^2 \tag{2.7}$$

Аналогичным путем получается дисперсионное уравнение относительно ω для системы (2.3), совпадающее с уравнением (2.6). Теперь предположим, что магнитное поле перпендикулярно к направлению распространения волн. Координатные оси $0y$ и $0z$ можно повернуть так, чтобы ось $0y$ была параллельной вектору напряженности заданного магнитного поля

$$\vec{H}_0 = \{0,\ H_{02},\ 0\} \tag{2.8}$$

Из системы уравнений (1.2) и (1.4) с учетом (2.8) получаем следующую систему уравнений одномерной задачи:

$$c_l^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\sigma\mu}{c\rho} H_{02}\left(e_3 + \frac{\mu}{c} H_{02}\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left(e_3 + \frac{\mu}{c} H_{02}\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial e_3}{\partial x} = \frac{\mu}{c} \frac{\partial h_2}{\partial t}$$

Для u_i ($i = 2, 3$) получим отдельное уравнение

$$c_l^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{2.10}$$

В этом случае магнитное поле не влияет на скорость распространения поперечной волны.

Представляя решение системы уравнений (2.9) в виде

$$(u_1,\ h_2,\ e_3) = (u_{10},\ h_{20},\ e_{30}) \exp(i\theta) \tag{2.11}$$

аналогично предыдущей задаче, легко получается кубическое уравнение относительно ω, которое имеет вид

$$\gamma\omega^3 + ik^2\omega^2 - (\mu\alpha + \gamma c_l^2) k^2\omega - ic_l^2 k^4 = 0 \tag{2.12}$$

§ 3. Анализ дисперсионного уравнения (2.6) и (2.12)

Займемся исследованием решений кубических уравнений (2.6) и (2.12). Уравнение (2.6) разделим на $\gamma k c_l$ и запишем в следующем виде:

$$\frac{1}{c_l k} \Omega^3 + \gamma_1 \Omega^2 + (c_l^2 + v_A^2) \frac{k}{c_l} \Omega + \gamma_1 c_l^2 k^2 = 0 \tag{3.1}$$

где $\gamma_1 = k/\gamma c_l$ — безразмерная величина, $v_A^2 = \mu H_{01}^2/4\pi\rho$ — скорость Альфвена, $\Omega = -i\omega$.

Для $\gamma_1 = 0$ (идеальный проводник) имеем

$$\Omega^3 + (c_l^2 + v_A^2) k^2 \Omega = 0 \tag{3.2}$$

откуда вытекает, что скорость распространения поперечной волны равна $\sqrt{c_l^2 + v_A^2}$ и волна распространяется без затухания. Одномерные магнитоупругие волны на основе модели идеального проводника были исследованы в ряде работ [4].

Пусть γ_1 мало и отлично от нуля, тогда решение можно искать в виде разложения по степеням γ_1, то есть

$$\Omega = \Omega_0 + \gamma_1\Omega_1 + \gamma_1^2\Omega_2 + \gamma_1^3\Omega_3 + \cdots \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (3.1), группируя коэффициенты при одинаковых степенях γ_1 и решая соответствующие уравнения, будем иметь

$$\Omega_0^* = -\frac{c_l^3}{c_l^2 + v_A^2} k\gamma_1 - \frac{c_l^7 v_A^2}{(c_l^2 + v_A^2)^4} k\gamma_1^3 - \cdots \tag{3.4}$$

$$\Omega_1^* = i\sqrt{c_l^2 + v_A^2}\, k - \frac{c_l v_A^2}{2(c_l^2 + v_A^2)} k\gamma_1 - i\frac{3}{8} k \times$$

$$\times \frac{c_l^2 v_A^2 \sqrt{c_l^2 + v_A^2}\,(v_A^2 + 2c_l^2)}{(c_l^2 + v_A^2)^3} \gamma_1^2 + \cdots \tag{3.5}$$

$$\Omega_2^* = -i\sqrt{c_t^2 + v_A^2}\,k - \frac{c_t\, v_A^2}{2(c_t^2 + v_A^2)}\,k\,\gamma_1 + i\,\frac{3}{8}\,k \times$$

$$\times \frac{c_t^2\, v_A^2 \sqrt{c_t^2 + v_A^2}\,(v_A^2 + 2c_t^2)}{(c_t^2 + v_A^2)^3}\,\gamma_1^2 + \cdots \tag{3.6}$$

где Ω_0^*, Ω_1^*, Ω_2^* — решение уравнения (3.1) в виде разложения. Аналогичным путем получим и решение уравнения (2.12).

Рассмотрим волны только в одном направлении, соответствующие знаку плюс.

Из (3.5) в нулевом приближении для фазовой скорости получим следующее значение:

$$c_\phi = \frac{\operatorname{Im}\Omega_1^*}{k} = \sqrt{c_t^2 + v_A^2} \tag{3.7}$$

которое совпадает со скоростью волн, распространяющихся в идеально проводящей среде, причем фазовая и групповая скорости меняются в зависимости от величины магнитного поля. Волна распространяется без затухания. Первое приближение дает тот же результат для величины скорости, но в этом случае возникает и процесс затухания, который зависит от величины внешнего магнитного поля $|H_0|$ и от волнового числа k. Декремент затухания волны $\operatorname{Re}\Omega_1^*$ имеет вид

$$\operatorname{Re}\Omega_1^* = -\frac{v_A^2}{2\gamma_1 (c_t^2 + v_A^2)}\,k^2 \tag{3.8}$$

Согласно второму приближению получаем для фазовой скорости распространения волн следующее выражение:

$$\frac{\operatorname{Im}\Omega_1^*}{k} = \sqrt{c_t^2 + v_A^2} - \frac{3}{8}\,\frac{v_A^2 \sqrt{c_t^2 + v_A^2}\,(v_A^2 + 2c_t^2)}{\gamma_1^2 (c_t^2 + v_A^2)^3}\,k^2 \tag{3.9}$$

Легко убедиться, что фазовая и групповая скорости не равны.

Из (3.9) видно, что фазовая скорость зависит от волнового числа k, поэтому имеет место дисперсия волн, то есть распространяющаяся волна обладает дисперсией. В этом случае также волна затухает и декремент затухания имеет вид (3.8).

Если взять следующее приближение, легко получить, что фазовая и групповая скорости не изменяются, но декремент затухания изменяет свое значение.

Из условия малости параметра γ_1 вытекает, что полученные результаты будут справедливы при следующем ограничении на длину волны:

$$\lambda > \frac{2\pi}{\gamma_1 c_t} \tag{3.10}$$

Для конкретных проводников будем иметь: для алюминия $\lambda > 1.4\cdot 10^{-2}$ *см*, для меди $\lambda > 0.85\cdot 10^{-2}$ *см*, для латуни $\lambda > 4.2\cdot 10^{-2}$ *см*, для константана $\lambda > 8.97\cdot 10^{-2}$ *см*, для манганина $\lambda > 29.9\cdot 10^{-2}$ *см* и т. д.

Значения модуля упругости, плотности и электропроводности для вычисления по формуле (3.10) взяты из справочника [5]. В случае, когда длина волны не удовлетворяет условию (3.10), используем формулы Кардано для кубического уравнения.

Представляя решение уравнения (2.6) в виде решения Кардано и принимая $\gamma c_t/k < 1$, получим

$$\Omega_0^* = -3\frac{k^2}{\gamma} + 2c_t^2\gamma + \cdots \tag{3.11}$$

$$\Omega_1^* = 2c_t ki - c_t^2\gamma + \cdots \tag{3.12}$$

$$\Omega_2^* = -2c_t ki - c_t^2\gamma + \cdots \tag{3.13}$$

Если взять только два приближения в решении (3.12), то получим, что фазовая и групповая скорости равны и постоянны

$$c_\phi = c_r = \frac{\operatorname{Im}\Omega_1^*}{k} = \pm c_t$$

это значит, что волны не обладают дисперсией. В этом случае затухание опять не возникает. Если возьмем три приближения, получим, что снова фазовая и групповая скорости равны и постоянны, но здесь уже возникает процесс затухания и декремент затухания равен следующей величине:

$$\operatorname{Re}\Omega_1^* = -c_t^2\gamma \tag{3.14}$$

и т. д.

Такой анализ можно сделать и для уравнения (2.12).

§ 4. Анализ решения методом стационарной фазы

Общее решение, описывающее волновое движение, представим в виде суперпозиции простых гармонических волн (2.5) со всевозможными волновыми числами

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\exp[i(kx-\omega t)]\,dk \tag{4.1}$$

где частота ω — известная из дисперсионного соотношения для данной среды функция $\Psi(k)$. Принимается, что амплитудная функция $A(k)$ конечна и дифференцируема на всем интервале интегрирования.

Интеграл (4.1) с учетом (3.6) можно представить в следующем виде:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\exp\left[-\frac{v_A^2}{2\gamma(c_t^2+v_A^2)}k^2 t\right]\exp[it\Psi(k)]\,dk \tag{4.2}$$

где

$$\Psi(k)=\frac{x}{t}k-W(k)=$$

$$=\left(\frac{x}{t}-\sqrt{c_l^2+v_A^2}\right)k+\frac{3}{8}\frac{v_A^2\sqrt{c_l^2+v_A^2}(v_A^2+2c_l^2)}{\gamma^2(c_l^2+v_A^2)^3}k^3 \tag{4.3}$$

Рассмотрим интеграл (4.2) для случая, когда $\Psi'(k)=0$ при некотором $k=k_0$, $-\infty<k_0<+\infty$. Из (4.3) получим

$$k_0=\pm\sqrt{\frac{8\gamma^2(c_l^2+v_A^2)^3\left(\sqrt{c_l^2+v_A^2}-\frac{x}{t}\right)}{9v_A^2(v_A^2+2c_l)\sqrt{c_l^2+v_A^2}}} \tag{4.4}$$

Возьмем значение k_0 со знаком плюс.

Из условия (3.10) с учетом (4.4) получается, что отношение c'/c_l должно удовлетворять следующему неравенству (c_l — групповая скорость):

$$\sqrt{1+\frac{v_A^2}{c_l^2}}\left[1-\frac{9v_A^2c_l^2(v_A^2+2c_l^2)}{8(c_l^2+v_A^2)^3}\right]<\frac{c_r}{c_l}<\sqrt{1+\frac{v_A^2}{c_l^2}} \tag{4.5}$$

Отсюда можно сделать вывод, что дисперсия волн имеет место при выполнении неравенства (4.5).

Неравенство (4.5) показывает, что интервал изменения групповой скорости, то есть влияние дисперсии, зависит от напряженности магнитного поля.

Наибольший интервал (наибольший эффект дисперсии) получается при $v_A^2=(\sqrt{3}-1)c_l^2$ или $H_0=[4\pi(\sqrt{3}-1)\mu^{-1}G]^{1/2}$.

С помощью преобразования Фурье и методом стационарной фазы [6], из (4.2) для функции $u(x,t)$ получается следующее асимптотическое выражение:

$$u(x,t)\sim\left(\frac{2\pi}{|\Psi_0''t|}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{4\gamma(c_l^2+v_A^2)^2\left(\sqrt{c_l^2+v_A^2}-\frac{x}{t}\right)}{(v_A^2+2c_l^2)\sqrt{c_l^2+v_A^2}}t\right]\times$$

$$\times A_0\exp\left[i\left(t\Psi_0\pm\frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{4.6}$$

где $A_0=A(k_0)$

$$\Psi_0=\frac{2}{3}\left(\frac{x}{t}-\sqrt{c_l^2+v_A^2}\right)\sqrt{\frac{8\gamma^2(c_l^2+v_A^2)^3\left(\sqrt{c_l^2+v_A^2}-\frac{x}{t}\right)}{9v_A^2(v_A^2+2c_l^2)\sqrt{c_l^2+v_A^2}}} \tag{4.7}$$

$$\Psi_0''=\frac{9}{4}\frac{v_A^2\sqrt{c_l^2+v_A^2}(v_A^2+2c_l^2)}{(c_l^2+v_A^2)^3\gamma^2}\sqrt{\frac{8\gamma^2(c_l^2+v_A^2)^3\left(\sqrt{c_l^2+v_A^2}-\frac{x}{t}\right)}{9v_A^2(v_A^2+2c_l^2)\sqrt{c_l^2+v_A^2}}} \tag{4.8}$$

Знаки «$\pm$» относятся к $\Psi_0''\gtrless 0$ соответственно.

Аналогичную формулу можно получить для решения (3.6).

Из решения (4.6) можно сделать вывод, что волна любой начальной формы в конечном счете превращается в квазигармоническую волну, у которой волновое число k_0 и частота $\omega = W(k)$ зависят от соотношения x/t. Амплитуда этой волны тоже зависит от x/t и затухает.

В качестве примера рассмотрим задачу со следующими начальными условиями:

$$u(x, 0) = p_0\delta(x), \quad u_t(x, 0) = 0$$

где p_0 — некоторая постоянная, а $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Полагая в (4.1) $t = 0$, с учетом (4.9) получим

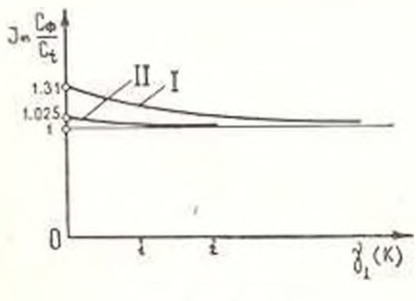
$$A(k) = -\frac{p_0}{2\pi} = \text{const}$$

и решение (4.6) примет следующий вид:

$$u(x, t) \sim \frac{p_0}{(2\pi|\Psi_0^{''}t|)^{1/2}} \exp\left[-\frac{4}{9}\frac{\gamma^2(c_t^2+v_A^2)\left(\sqrt{c_t^2+v_A^2}-\frac{x}{t}\right)}{(v_A^2+2c_t^2)\sqrt{c_t^2+v_A^2}}\right] \times$$

$$\times \exp\left[i\left(t\Psi_0 \pm \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

В заключение приведем график зависимости фазовой скорости ($c_ф$) от волнового числа согласно уравнению (3.1).



Фиг. 1.

Графики построены для алюминия. Кривая I соответствует значению магнитного поля

$$H_0 = [4\pi(\sqrt{3}-1)\rho\mu^{-1}G]^{1/2}$$

(наибольшее влияние дисперсии), кривая II — значению магнитного поля

$$H_0 = [0,2\pi\rho\mu^{-1}G]^{1/2}$$

Численные результаты показывают, что при $\gamma_1 \gg 1$ дисперсия не существенна.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 17 I 1980

Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ, Հ. Ե. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

ՄԻԱՉԱՓ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԱԼԻՔԻ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՀԱՂՈՐԴԻՉ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում դիտարկվում է միաչափ ալիքային շարժումը վերջավոր հաղորդիչ, իզոտրոպ, առաձգական միջավայրում մագնիսական դաշտի առ-

կայության դեպքում։ Ալիքների տարածումը նկարագրելու համար օգտագործվում են մագնիսաառաձգականության տեսության գծայնացված հավասարումները։ Ստացված են դիսպերսիոն առնչությունները։ Հաճախականության կախումը ալիքային թվից ստացվում է ըստ փոքր պարամետրի վերլուծության միջոցով։

Ուսումնասիրվում է ալիքների տարածման արագության, դիսպերսիայի և մարման փոփոխումը կախված մագնիսական դաշտի մեծությունից։

Կոնկրետ նյութի համար կառուցված է գրաֆիկ, որը ցույց է տալիս ֆազային արագության փոփոխումը կախված ալիքային թվից։

THE PROPAGATION OF ONE-DIMENSIONAL MAGNETOELASTIC WAVE IN A FINITE CONDUCTING MEDIUM

M. V. BELUBEKIAN, A. E. GASPARIAN

S u m m a r y

In the paper one-dimensional wave motion of a finite conducting elastic isotropic medium in a magnetic field is considered. To describe the wave propagation, linear equations of the theory of magnetoelasticity are used.

The dispersion relations are obtained. The dependence of the frequency on the wave number is found by the small parameter expansion. The variation in velocity, dispersion and damping of propagation of waves depending on magnitude on the magnetic field is investigated.

The found solutions are studied by the stationary phase method.

The graph of the dependence of phase velocity on the wave number is presented for the particular material.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* «Электродинамика сплошных сред». М., Гостехиздат. 1957.
2. *Paria G.* Magneto-Elasticity and Magneto-Thermo-Elasticity. Al v. Appl. Mech. 1967, 10, Fas. 1. Academic Press.
3. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин». М., «Наука», 1977.
4. *Baser J., Karul F.* Simple wave motion in magnetoelasticity. Geophys. J. Roy. Ashron. Soc. 1971, 25, № 1—3, 127—156.
5. Таблица физических величин. Справочник. Под ред. академика И. К. Кикоина. М., Атомиздат. 1976.
6. Нелинейные волны. Под ред. С. Лейбовича и А. Сибасса. М., Изд. «Мир», 1977.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 6, 1981 Механика

Г. Е. БАГДАСАРЯН, П. А. МКРТЧЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Задачи устойчивости сверхпроводящих токонесущих цилиндрических оболочек рассмотрены в работах [1—3].

В данной работе выведены уравнения возмущенного движения сверхпроводящей цилиндрической оболочки в стационарном неоднородном магнитном поле. На основе этих уравнений исследуется поведение оболочки в начальном однородном магнитном поле, вектор напряженности которого перпендикулярен к оси цилиндра. Установлена возможность потери устойчивости невозмущенного состояния. Получена формула для определения критического значения напряженности внешнего магнитного поля.

1. Пусть изотропная замкнутая цилиндрическая оболочка постоянной толщины $2h$ и радиуса срединной поверхности R, изготовленная из сверхпроводящего материала, находится в начальном магнитном поле с заданным вектором напряженности $\vec{H}_0$. Упругие свойства материала оболочки характеризуются модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ. Электромагнитные свойства среды, окружающей оболочку, эквивалентны свойствам вакуума. Влияние токов смещения на характеристики устойчивости оболочки пренебрегается.

Оболочка отнесена к триортогональной системе координат (α, β, γ) так, что координатные линии α и β совпадают с линиями кривизны срединной поверхности, откладываемые соответственно вдоль образующей и по дуге.

В отношении тонкой оболочки считается справедливым гипотеза недеформируемых нормалей.

Известно [4], что при помещении сверхпроводящего тела в магнитное поле на тонком приповерхностном слое появляются экранирующие токи, препятствующие проникновению магнитного поля вовнутрь тела. Выталкивание магнитного поля приводит к изменению напряженности магнитного поля в области вне тела. Это изменение является результатом наложения на начальное поле $\vec{H}_0$ магнитного поля $\vec{H}^c$, создаваемого экранирующими токами. Поэтому невозмущенное магнитное поле $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}^c$ определяется из решения следующей задачи магнитостатики во внешней области [5]:

$$\operatorname{rot} \vec{H}^0 = 0, \quad \operatorname{div} \vec{H}^0 = 0 \tag{1.1}$$

$$\vec{n}_0(\vec{H}_0 + \vec{H}^0) = 0 \quad \text{при} \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in S \tag{1.2}$$

$$\vec{H}^0 = 0 \quad \text{при} \quad |\vec{r}| \to \infty \tag{1.3}$$

где $\vec{n}_0$ — единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности S тела, $\vec{r}$ — радиус-вектор рассматриваемой точки.

Вследствие того, что магнитное поле не проникает в область, занимаемую оболочкой, на поверхности оболочки компоненты тензора напряжений Максвелла претерпевают разрыв. Этим разрывом обусловлено появление магнитного давления $\vec{P}_0$, определяемого формулой

$$\vec{P}_0 = \vec{n}_0 T^0 \tag{1.4}$$

где T^0 — тензор напряжений Максвелла

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(H_i H_k - \frac{\delta_{ik}}{2}\vec{H}^2\right) \tag{1.5}$$

δ_{ik} — символ Кронекера.

В силу (1.2) из (1.4) и (1.5) для поверхностной нагрузки получается выражение [5]

$$\vec{p}_0 = -\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\vec{n}_0 \tag{1.6}$$

Под действием нагрузки $\vec{p}_0$ в оболочке устанавливается начальное невозмущенное состояние, характеризующееся вектором перемещения $\vec{u}_0$ и тензором упругих напряжений σ^0. Исходное состояние оболочки, как обычно, определяется из линейных уравнений теории упругости при поверхностных условиях, написанных без учета деформации поверхностей, ограничивающих оболочку. Тогда характеристики невозмущенного состояния будут определяться из следующих уравнений равновесия и граничных условий на поверхности оболочки:

$$\operatorname{div} \sigma^0 = 0 \tag{1.7}$$

$$\vec{n}_0 \cdot \sigma^0 = \vec{p}_0 \quad \text{при} \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in S \tag{1.8}$$

Характеристики возмущенного движения $(\vec{u}_0 + \vec{u},\ \sigma^0 + \sigma,\ \vec{p}_0 + \vec{p},\ \vec{H} + \vec{h})$ должны удовлетворять нелинейным уравнениям и краевым условиям на деформированной поверхности оболочки. Принимая возмущения малыми, эти уравнения и граничные условия аналогично работам [6—8] линеаризуются. В результате получаются следующие линейные уравнения возмущенного движения:

в области, занимаемой оболочкой

$$\operatorname{div}(\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^0 \nabla \vec{u}) - \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0 \tag{1.9}$$

в области вне тела оболочки

$$\operatorname{rot} \vec{h} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{h} = 0 \tag{1.10}$$

Решения уравнений (1.9) и (1.10) связаны следующими линеаризованными условиями на поверхности S:

$$\hat{\sigma} \cdot \vec{n}_0 = \vec{p} \tag{1.11}$$

$$\vec{n}_0 (\vec{h} + \vec{H} \nabla \vec{u}) = 0 \tag{1.12}$$

Здесь

$$\hat{\sigma} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{2\nu}{1-2\nu} (\operatorname{div} \vec{u}) \hat{E} + \nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^* \right] \tag{1.13}$$

$$\vec{p} = \hat{T} \cdot \vec{n}_0, \quad T_{ik} = \frac{1}{4\pi} (H_k h_i + h_k H_i) - \frac{\delta_{ik}}{4\pi} \vec{h} \cdot \vec{H} \tag{1.14}$$

где $\hat{E}$ — единичный тензор, ∇ — набла-оператор Гамильтона, $(\nabla \vec{u})^*$ — транспонированный тензор $\nabla \vec{u}$, $\hat{T}$ — тензор напряжения Максвелла возмущенного состояния.

Отметим, что граничное условие (1.12) является следствием условия непроникновения магнитного поля в толщу оболочки.

2. Согласно гипотезам Кирхгофа—Лява для оболочки имеем следующие известные соотношения:

$$u_\alpha = u - \gamma \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \quad u_\beta = \left(1 + \frac{\gamma}{R}\right) v - \gamma \frac{\partial w}{\partial \beta}, \quad u_\gamma = w(\alpha, \beta, t) \tag{2.1}$$

где $u(\alpha, \beta, t)$, $v(\alpha, \beta, t)$, $w(\alpha, \beta, t)$ — искомые перемещения срединной поверхности оболочки.

В силу (2.1) поверхностное условие (1.12) принимает вид

$$h_\gamma^\pm = H_\alpha^\pm \frac{\partial w}{\partial \alpha} + H_\beta^\pm \frac{\partial w}{\partial \beta} \tag{2.2}$$

где индексами «+» и «−» отмечены значения соответствующих величин на поверхностях оболочки $\gamma = h$ и $\gamma = -h$.

Подставляя (1.13), (2.1) в (1.9) и осредняя полученные при этом уравнения по толщине оболочки, с учетом известных допущений относительно углов поворота [6] и условий (2.2) получим следующую систему дифференциальных уравнений устойчивости оболочки:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} -$$

$$-\frac{1-\nu^2}{2Eh}\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \alpha}T_2^0+\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}N_1^0+\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}N_2^0-\frac{1}{4\pi}\left[(H_\alpha^+)^2-(H_\alpha^-)^2\right]\frac{\partial w}{\partial \alpha}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4\pi}(H_\alpha^+H_\beta^+-H_\alpha^-H_\beta^-)\frac{\partial w}{\partial \beta}\right\}=0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \beta}-\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-$$

$$-\frac{h}{3R}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}+\frac{w}{R^2}\right)+\frac{1-\nu^2}{2Eh}\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \alpha}S^0-\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}N_1^0-\right.$$

$$-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}+\frac{w}{R^2}\right)N_2^0+\frac{1}{4\pi}\left[(H_\beta^+)^2-(H_\beta^-)^2\right]\frac{\partial w}{\partial \beta}+\frac{1}{4\pi}(H_\alpha^+H_\beta^+-$$

$$\left.-H_\alpha^-H_\beta^-)\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right\}=0 \qquad (2.3)$$

$$D\left[\Delta^2 w+\frac{\nu}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}+\frac{3}{Rh^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \beta}+\nu\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{w}{R}\right)\right]+$$

$$+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}T_1^0-2\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}S^0+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}+\frac{w}{R^2}\right)T_2^0+$$

$$+\frac{1}{4\pi}(H_\alpha^+h_\alpha^+-H_\alpha^-h_\alpha^-+H_\beta^+h_\beta^+-H_\beta^-h_\beta^-)+\frac{h}{4\pi}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left\{\left[(H_\alpha^+)^2-(H_\alpha^-)^2\right]\frac{\partial w}{\partial \alpha}+\right.$$

$$\left.+(H_\alpha^+H_\beta^+-H_\alpha^-H_\beta^-)\frac{\partial w}{\partial \beta}\right\}-\frac{h}{4\pi}\frac{\partial}{\partial \beta}\left\{(H_\alpha^+H_\beta^+-H_\alpha^-H_\beta^-)\frac{\partial w}{\partial \alpha}+\right.$$

$$\left.+\left[(H_\beta^+)^2-(H_\beta^-)^2\right]\frac{\partial w}{\partial \beta}\right\}=0$$

В уравнениях (2.3) T_1^0, T_2^0, S^0, N_1^0, N_2^0 — усилия, характеризующие начальное невозмущенное состояние оболочки. Указанные параметры невозмущенного состояния определяем, решая задачу (1.7)—(1.8). Отметим также, что начальное невозмущенное состояние оболочки в общем случае является моментным.

Рассматривая систему уравнений (2.3), замечаем, что она не замкнута. В нее входят неизвестные граничные значения тангенциальных составляющих индуцированного магнитного поля $h_\alpha^\mp$, $h_\beta^\mp$ на поверхностях оболочки. Их определяем, решая уравнения (1.10) при условии (1.12) и условии затухания возмущений на бесконечности.

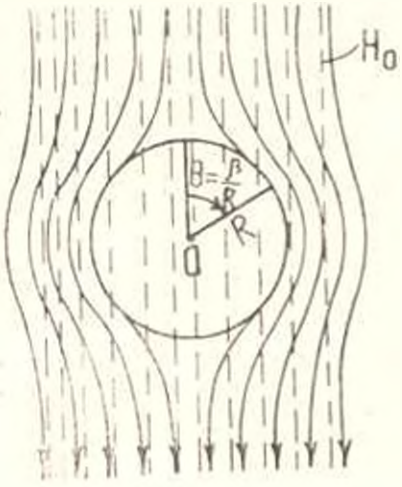
3. Рассмотрим задачу устойчивости сверхпроводящей цилиндрической оболочки бесконечной длины в однородном магнитном поле, вектор напряженности которого перпендикулярен к оси цилиндра (фиг. 1).

$$\vec{H}_0=H_0\left(\sin\frac{\beta}{R}\cdot\vec{e}_\beta-\cos\frac{\beta}{R}\cdot\vec{e}_\gamma\right),\quad H_0=\mathrm{const} \qquad (3.1)$$

где $\vec{e}_\beta$ и $\vec{e}_\gamma$ — единичные векторы по направлениям соответствующих координатных линий.

Добавочное магнитное поле $\vec{H}^{\circ}$, обусловленное экранирующими токами, определяется из решения задачи (1.1)—(1.3) и имеет вид

$$\vec{H}^{\circ} = H_0\left(\frac{R+h}{R+\gamma}\right)^2\left(\sin\frac{\beta}{R}\cdot\vec{e}_\beta + \cos\frac{\beta}{R}\cdot\vec{e}_\gamma\right) \quad (\gamma \geqslant h) \qquad (3.2)$$



Фиг. 1.

Невозмущенное магнитное поле во внутренней области ($\gamma < h$) равно нулю, а во внешней области ($\gamma \geqslant h$) является результатом наложения полей (3.1) и (3.2). Следовательно,

$$\vec{H} = \begin{cases} 0 & \text{при } \gamma < h \\ H_0\left[1+\left(\frac{R+h}{R+\gamma}\right)^2\right]\sin\frac{\beta}{R}\times \\ \times\vec{e}_\beta - H_0\left[1-\left(\frac{R+h}{R+\gamma}\right)^2\right]\times \\ \times\cos\frac{\beta}{R}\cdot\vec{e}_\gamma & \text{при } \gamma \geqslant h \end{cases} \qquad (3.3)$$

Из (1.6), согласно (3.3), замечаем, что поверхностная нагрузка $\vec{p}_0$ не изменяется вдоль образующих цилиндра. Поэтому из усилий невозмущенного состояния отличными от нуля являются только N_2° и T_2°. Осредняя по толщине оболочки уравнения (1.7), с учетом (1.6), (1.8), (3.3) для определения указанных неизвестных усилий получим следующие уравнения:

$$\frac{dT_2^{\circ}}{d\beta} + \frac{N_2^{\circ}}{R} = 0, \quad \frac{dN_2^{\circ}}{d\beta} - \frac{T_2^{\circ}}{R} = \frac{H_0^2}{2\pi}\sin^2\frac{\beta}{R} \qquad (3.4)$$

Решая уравнения (3.4), найдем

$$T_2^{\circ} = -\frac{RH_0^2}{12\pi}\left(3-\cos\frac{2\beta}{R}\right), \quad N_2^{\circ} = \frac{RH_0^2}{6\pi}\sin\frac{2\beta}{R} \qquad (3.5)$$

В дальнейшем будем рассматривать частный случай, когда возмущения не зависят от координаты α (образующие цилиндра остаются прямолинейными). Тогда введением потенциальной функции Φ посредством

$$\vec{h} = \operatorname{grad}\Phi \qquad (3.6)$$

задача определения возмущенного магнитного поля $\vec{h}$ во внешней области, согласно (1.10), (2.2), (2.3) приводится к решению следующей внешней задачи Неймана для круга ($\gamma > h$):

$$\begin{cases} \Delta_2\Phi = \frac{1}{R+\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[(R+\gamma)\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right] + \frac{R^2}{(R+\gamma)^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2} = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} = 2H_0\sin\frac{\beta}{R}\frac{\partial w}{\partial\beta} \quad \text{при } \gamma = h \end{cases} \qquad (3.7)$$

Решение задачи (3.7) представляется посредством интеграла Дини [9]

$$\Phi = \frac{(R+h)H_0}{\pi R}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left[1+\left(\frac{R+h}{R+\tau}\right)^2 - 2\frac{R+h}{R+\tau}\cos\left(\frac{\beta}{R}-\xi\right)\right]\sin\xi\,\frac{\partial w}{\partial\xi}\,d\xi \tag{3.8}$$

Из (3.6) в силу (3.8) для h_β^- найдем

$$h_\beta^+ = \frac{H_0}{\pi R}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(\frac{\beta}{R}-\xi\right)\sin\xi}{1-\cos\left(\frac{\beta}{R}-\xi\right)}\,\frac{\partial w}{\partial\xi}\,d\xi \tag{3.9}$$

Подстановкой (3.3), (3.5) и (3.9) в (2.3) рассматриваемая задача устойчивости сводится к исследованию следующей системы интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\beta} - \frac{h^2}{3R}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\frac{w}{R^2}\right) + \frac{(1-\nu^2)RH_0^2}{12\pi Eh}\left[\frac{6}{R}\sin^2\frac{\beta}{R}\frac{\partial w}{\partial\beta} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\frac{w}{R^2}\right)\sin\frac{2\beta}{R}\right] = 0 \tag{3.10}$$

$$D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \frac{3}{Rh^2}\left(\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{w}{R}\right)\right] + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{RH_0^2}{4\pi}\left[\left(1+\frac{1}{3}\cos\frac{2\beta}{R}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\frac{w}{R^2}\right) + \frac{4h}{R}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sin^2\frac{\beta}{R}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right) + \frac{2}{\pi R^2}\sin\frac{\beta}{R}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(\frac{\beta}{R}-\xi\right)\sin\xi}{1-\cos\left(\frac{\beta}{R}-\xi\right)}\frac{\partial w}{\partial\xi}\,d\xi\right] = 0$$

Решение системы уравнений устойчивости (3.10) будем искать в виде

$$v = e^{i\omega t}\sum_{n=2}^{\infty} v_n \sin\frac{n\beta}{R}$$

$$w = e^{i\omega t}\sum_{n=2}^{\infty} w_n \cos\frac{n\beta}{R} \tag{3.11}$$

где ω — частота колебаний оболочки, v_n и w_n — неизвестные коэффициенты.

Представления (3.11) удовлетворяют условиям замкнутости оболочки по координате β.

Подставляя (3.11) в (3.10) и используя обычный процесс ортогонализации, после некоторых преобразований приходим к следующей бесконечной системе алгебраических уравнений:

$$k v_k + w_k + \frac{h^2}{3R^2}(k^2-1)\, w_k = \frac{(1-\nu^2)\, RH_0^2}{24\pi Eh} \sum_{n=2}^{\infty} a_{nk}\, w_n$$

$$k v_k + w_k + \frac{h^2}{3R^2}\left[k^2 (k^2-1) - \bar{\omega}^2\right] w_k = \frac{(1-\nu^2)\, RH_0^2}{8\pi\, Eh} \sum_{n=2}^{\infty} b_{nk}\, w_n \tag{3.12}$$

$$(k = 2,\ 3,\ 4, \cdots)$$

где

$$a_{nk} = \frac{1}{k}\left[(n^2-1+3n)\, \delta_{n,\, k-2} - (n^2-1-3n)\, \delta_{n,\, k+2} - 6n\delta_{nk}\right]$$

$$b_{nk} = (n^2-1-2n)\, \delta_{nk} + \left(n + \frac{n^2-1}{6}\right)(\delta_{n,\, k-2} + \delta_{n,\, k+2})$$

$$\bar{\omega} = \omega R^2 \sqrt{2\rho h/D}$$

При получении (3.12) было установлено и учтено, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\theta-\xi)\sin\xi \sin n\xi}{1-\cos(\theta-\xi)}\, d\xi = -2\pi \sin\theta \cos n\theta \tag{3.13}$$

Исключая v_k из системы уравнений (3.12), получим следующую бесконечную систему относительно w_k:

$$(\omega_k^2 - \bar{\omega}^2)\, w_k - \bar{H}^2 \sum_{n=2}^{\infty} \bar{b}_{kn}\, w_n = 0 \tag{3.14}$$

Здесь

$$\omega_k = k^2 - 1, \quad \bar{H}^2 = \frac{3(1-\nu^2)\, R^3 H_0^2}{8\pi E h^3}$$

$$\bar{b}_{kn} = (k-1)^2 \delta_{kn} + \left[\frac{n^2-1}{6}\left(1+\frac{2}{k}\right) + n\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]\delta_{n,\, k+2} + \tag{3.15}$$

$$+ \left[\frac{n^2-1}{6}\left(1-\frac{2}{k}\right) + n\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]\delta_{n,\, k-2}$$

Невозмущенное состояние оболочки устойчиво, если все корни уравнения

$$|(\omega_k^2 - \bar{\omega}^2)\, \delta_{kn} - \bar{H}^2\, \bar{b}_{kn}| = 0 \tag{3.16}$$

лежат в верхней полуплоскости.

Рассмотрим сходимость бесконечного определителя, входящего в уравнение (3.16). С этой целью, следуя [7], представим указанный определитель в виде

$$\Delta = |\delta_{kn} + c_{kn}| \tag{3.17}$$

где

$$c_{kn} = -\frac{\bar{\omega}^2}{\omega_k\, \omega_n}\, \delta_{kn} - \frac{\bar{H}^2}{\omega_k\, \omega_n}\, \bar{b}_{kn} \tag{3.18}$$

Бесконечный определитель (3.17) сходится, если сходится двойной ряд [7, 10]

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}|c_{kn}| \qquad (3.19)$$

В силу (3.18) легко получить

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}|c_{kn}| = \bar{\omega}^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k^2-1)^2}+\bar{H}^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}+$$
$$+\frac{\bar{H}^2}{6}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k(k+5)}{(k-1)(k+2)(k^2+4k+3)}+\frac{\bar{H}^2}{6}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k+2)(k^2+10k-3)}{k(k^2-1)(k^2+4k+3)} \qquad (3.20)$$

откуда следует, что определитель (3.17) относится к классу сходящихся (нормальных) определителей.

4. Рассматривая (3.15), легко заметить, что бесконечная система алгебраических уравнений (3.14) распадается на две независимые бесконечные системы. Одна из них содержит ω'_k только с четными индексами, а вторая — с нечетными индексами. Определитель первой системы в силу (3.16) имеет вид

$$\begin{vmatrix}
\Omega_{22}-\bar{\omega}^2 & d_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
d_{42} & \Omega_{44}-\bar{\omega}^2 & d_{46} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & d_{64} & \Omega_{66}-\bar{\omega}^2 & d_{68} & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & d_{86} & \Omega_{88}-\bar{\omega}^2 & d_{810} & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & d_{108} & \Omega_{1010}-\bar{\omega}^2 & d_{1012} & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & d_{1210} & \Omega_{1212}-\bar{\omega}^2 & d_{1214}\ \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots
\end{vmatrix} \qquad (4.1)$$

где

$$\Omega_{kn}=\omega_k^2\delta_{kn}-d_{kn},\quad d_{kn}=\bar{H}^2\bar{b}_{kn} \qquad (4.2)$$

Определитель второй системы получается из (4.1), если ко всем индексам элементов определителя (4.1) прибавить единицу. Условием существования нетривиального решения является равенство нулю нормального определителя (4.1). Из указанного условия получается уравнение для определения частоты $\bar{\omega}$. Это уравнение в первом приближении ($n=2$) имеет вид

$$\bar{\omega}^2-\Omega_{22}=0 \qquad (4.3)$$

Для второго и третьего приближений имеем соответственно

$$\bar{\omega}^4-(\Omega_{22}+\Omega_{44})\bar{\omega}^2+\Omega_{22}\Omega_{44}-d_{24}d_{42}=0 \qquad (4.4)$$

$$\bar{\omega}^6 - (\Omega_{22} + \Omega_{44} + \Omega_{66})\,\bar{\omega}^4 + (\Omega_{22}\Omega_{44} + \Omega_{22}\Omega_{66} + \Omega_{44}\Omega_{66} -$$

$$- d_{46}d_{64} - d_{24}d_{42})\,\bar{\omega}^2 + \Omega_{22}d_{46}d_{64} + \Omega_{66}d_{42}d_{24} - \Omega_{22}\Omega_{44}\Omega_{66} = 0 \qquad (4.5)$$

Используя условие статической устойчивости $\omega = 0$, из (4.3)—(4.5) получим следующие уравнения для определения критического значения напряженности магнитного поля:
в случае первого приближения

$$\bar{b}_{22}\bar{H}^2 - \omega_2^2 = 0 \qquad (4.6)$$

в случае второго приближения

$$(\bar{b}_{24}\bar{b}_{42} - \bar{b}_{22}\bar{b}_{44})\,\bar{H}^4 + (\bar{b}_{22}\,\omega_4^2 + \bar{b}_{44}\,\omega_2^2)\,\bar{H}^2 - \omega_2^2\omega_4^2 = 0 \qquad (4.7)$$

в случае третьего приближения

$$(\bar{b}_{22}\bar{b}_{44}\bar{b}_{66} - \bar{b}_{24}\bar{b}_{42}\bar{b}_{66} - \bar{b}_{22}\bar{b}_{46}\bar{b}_{64})\,\bar{H}^6 + [(\bar{b}_{46}\bar{b}_{64} -$$
$$- \bar{b}_{44}\bar{b}_{66})\,\omega_2^2 - \bar{b}_{22}\bar{b}_{66}\,\omega_4^2 + (\bar{b}_{24}\bar{b}_{42} - \bar{b}_{22}\bar{b}_{44})\,\omega_6^2]\,\bar{H}^4 + \qquad (4.8)$$
$$+ (\bar{b}_{66}\,\omega_2^2\omega_4^2 + \bar{b}_{44}\,\omega_2^2\omega_6^2 - \bar{b}_{22}\,\omega_4^2\omega_6^2)\,\bar{H}^2 - \omega_2^2\omega_4^2\omega_6^2 = 0$$

Из условий (4.6)—(4.8) в силу (3.15) найдены следующие приближения критического значения напряженности магнитного поля, при котором сверхпроводящая оболочка теряет устойчивость:

$$\bar{H}_* = \begin{cases} 3 & \text{для первого приближения} \\ 2.4916 & \text{для второго приближения} \\ 2.4878 & \text{для третьего приближения} \end{cases} \qquad (4.9)$$

Отметим, что найдено также четвертое приближение $\bar{H}_*$, которое с приведенной здесь точностью совпало с третьим приближением.

Аналогичное исследование проведено относительно второй бесконечной системы алгебраических уравнений с нечетными индексами. В результате получены следующие значения соответствующих приближений величины $\bar{H}_*$:

$$\bar{H}_* = \begin{cases} 4 & \text{для первого приближения} \\ 3.5503 & \text{для второго приближения} \\ 3.5424 & \text{для третьего приближения} \\ 3.5424 & \text{для четвертого приближения} \end{cases} \qquad (4.10)$$

Сравнивая (4.9) и (4.10), замечаем, что последовательные приближения достаточно быстро сходятся и в качестве критического значения $\bar{H}$ следует брать 2.4878. Тогда на основе (3.15) для критического значения внешнего магнитного поля получим формулу

$$H_0^* = \frac{4.98\,h}{R}\sqrt{\frac{2\pi E h}{3(1-\nu^2)\,R}} \qquad (4.11)$$

Известно [4, 5], что для каждого сверхпроводника существует критическое магнитное поле H_k, превышение которого приводит к разрушению сверхпроводящего свойства материала. Поэтому напряженность магнитного поля, определяемая формулой (4.11), должна быть меньше, чем H_k. Следовательно, в зависимости от того напряженность внешнего магнитного поля удовлетворяет условию $H_0 < H_0^* < H_k$ или условию $H_0^* < H_0 < H_k$ сверхпроводящая оболочка будет устойчивой или неустойчивой.

Условие $H_0^* < H_k$ для каждого конкретного сверхпроводящего материала налагает ограничение на относительную толщину оболочки и определяет класс оболочек, для которых имеет смысл исследование вопросов устойчивости в магнитном поле. Оболочки, которые могут терять устойчивость в сверхпроводящем состоянии, должны иметь толщину, не превышающую h^*, определяемую из условия $H_0^* < H_k$ по формуле

$$\frac{2h^*}{R} = \left[\left(\frac{H_k}{2.49}\right)^2 \frac{3(1-\nu^2)}{\pi E}\right]^{1/3} \tag{4.12}$$

На основании формулы (4.12) в табл. 1 приведены значения $2h^*/R$ для некоторых сверхпроводников. При расчете для материалов, у которых коэффициент Пуассона неизвестен, приближенно принято $\nu = 0.3$. Для сплавов Nb_3S_n и V_3Ga в качестве модуля Юнга принято $E = 15.6 \cdot 10^{11}$ *дин/см*² и $E = 14.8 \cdot 10^{11}$ *дин/см*² соответственно.

Таблица 1

Материал оболочки	E, $10^{11}\ \frac{дин}{см^2}$	ν	$\frac{2h^*}{R}$, 10^{-3}
Свинец (Pb)	1.6	0.44	8
Ниобий (Nb)	15.6	—	7
Ванадий (V)	14.8	—	6
Тантал (Ta)	18.6	—	3.8
Олово (Sn)	5.3	0.33	2.85
Алюминий (Al)	7	0.34	1.25
Nb_3S_n	—	—	185
V_3Ga	—	—	165

Критические значения напряженности магнитного поля H_0^* для оболочек, изготовленных из этих материалов, при различных значениях $2h^*/R$ приведены в табл. 2. Здесь черточки означают, что разрушение сверхпроводимости материала оболочки для соответствующих толщин наступает раньше, чем потеря статической устойчивости. Из этой таблицы видно, что для достаточно тонких оболочек существенным является потеря устойчивости под действием магнитного давления.

В заключение отметим, что если оболочка изготовлена из обычного проводящего материала и покрыта тонким слоем сверхпроводящего сплава (напр., Nb_3S_n), то разрушение сверхпроводимости магнитным полем пра-

Таблица 2

Материал оболочки	H_0^*, 10^3 э					H_k, 10^3 э
	$2h/R = 1/50$	1/100	1/200	1/500	1/1000	
Nb	—	—	1.18	0.30	0.11	1.94
Pb	—	—	0.40	0.10	0.036	0.80
V	—	—	1.15	0.29	0.010	1.31
S_n	—	—	—	0.18	0.062	0.31
Nb_3S_n	8.6	3.04	1.08	0.27	0.096	245
V_3Ga	9.20	3.20	1.15	0.29	0.010	210

ктически невозможно ($H_k \approx 2 \cdot 10$[illegible] э) и поэтому остается проблема статической устойчивости.

Институт механики
АН Армянской ССР
Ленинаканский филиал
ЕрПИ

Поступила 20 II 1981

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, Պ. Հ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԳԵՐՀԱՂՈՐԴԻՉ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ

Ամփոփում

Աշխատանքում արտածված են անհամասեռ մագնիսական դաշտում գտնվող գերհաղորդիչ գլանային թաղանթի գրգռված վիճակի հավասարումները։ Այդ հավասարումների հիման վրա ուսումնասիրված է թաղանթի վարքը սկզբնական համասեռ մագնիսական դաշտում, որի լարվածության վեկտորը ուղղահայաց է գլանի առանցքին։ Ապացուցված է գրգռված վիճակի կայունության կորստի հնարավորությունը։ Ստացված է բանաձև արտաքին մագնիսական դաշտի լարվածության կրիտիկական մեծության որոշման համար։

STABILITY OF A SUPERCONDUCTING CYLINDRICAL SHELL IN MAGNETIC FIELD

G. E. BAGDASARIAN, P. A. MKRTCHIAN

Summary

The equations of perturbation motion are deduced for a superconducting cylindrical shell in a non-homogeneous stationary magnetic field.

Based on these equations the shell's behaviour is investigated in the primary magnetic field whose magnetic intensity vector is perpendicu-

lar to shell's axis. The possibility of shell's non-perturbed state stability loss is determined which is a momentum one due to non-homogeneity of the non-perturbed magnetic field. The formula is obtained for critical value of the external magnetic field intensity.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киселев М. И.* О волнах конечной амплитуды в токонесущей сверхпроводящей коаксиальной линии. ЖТФ, 1975, т. 45, вып. 2 (382).
2. *Овакимян Р. Н.* Об устойчивости цилиндрической токонесущей оболочки бесконечной проводимости. Изв. АН АрмССР, Механика, 1969, т. 22, № 4.
3. *Овакимян Р. Н.* Об устойчивости коаксиальной системы сверхпроводящих оболочек. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1979, т. 32, № 3.
4. *Буккель В.* Сверхпроводимость. М., «Мир», 1975.
5. *Ландау Л. Д.* и *Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат 1957.
6. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. М., Гостехиздат, 1948.
7. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
8. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М., «Наука», 1977.
9. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. М., «Высшая школа», 1970.
10. *Канторович Л. В.* и *Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М., Гостехиздат, 1952.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIV, № 6, 1981 Механика

О. А. АРУТЮНОВ, С. С. ГРИГОРЯН, Р. З. КАМАЛЯН

О ВЛИЯНИИ УРОВНЯ ГРУНТОВЫХ ВОД НА ПРОЦЕСС ВЫБРОСА ГРУНТА ВЗРЫВОМ

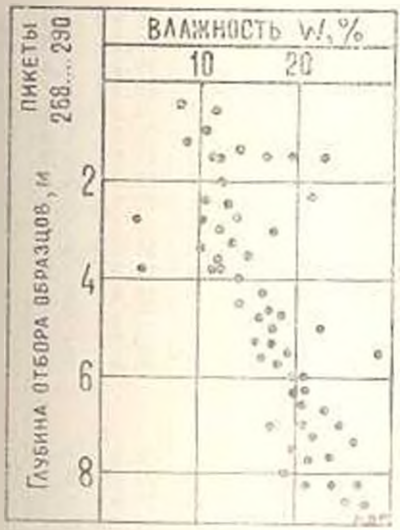
Исследование действия взрыва в грунтах и горных породах является одной из актуальных проблем современной механики. Особый интерес в этой области представляют задачи, связанные с исследованием взрывов на выброс, которые широко используются в водохозяйственном строительстве. При подготовке крупных промышленных взрывов на выброс возникает необходимость в решении ряда важных вопросов, таких как расчет величины заряда и глубины его заложения, определение количества необходимых зарядов и схемы их расположения, выбор наиболее рационального интервала замедления взрыва одних зарядов по отношению к другим, предсказание окончательных результатов взрыва. Пока что все эти вопросы решаются весьма приближенно. Основой расчетов служит накопленный опыт ведения взрывных работ, воплощенный в различные эмпирические формулы и правила. Особую трудность представляет проведение взрывных работ в сложных гидрогеологических условиях — в грунтах с высокой естественной влажностью или при близком расположении уровня грунтовых вод к заряду ВВ. Как показывает практика, в этих условиях профили выемок, получаемых в результате взрывов на выброс, часто оказываются в резком несоответствии с проектными и не могут быть приняты к эксплуатации. В первом случае выемка оказывается заполненной частично или полностью разжиженной массой [1, 2, 3], во втором случае образуется вспученная зона грунта [4].

Можно констатировать, что в настоящее время объем взрывных работ в указанных условиях значительно меньше, чем в грунтах естественно-воздушной влажности. Причиной является как недостаточная изученность наблюдающихся при указанных условиях эффектов, так и отсутствие ввиду этого научно-обоснованных методов инженерных расчетов параметров и технологических схем производства взрывных работ. Эти трудности, при все возрастающем требовании достижения максимальной эффективности использования энергии взрыва, приводят к необходимости в усовершенствовании существующих и разработке новых технологических схем и методов расчета параметров заряда.

Настоящая статья посвящена исследованию эффекта вспучивания грунтов при взрывах на выброс. Данное явление наблюдалось при строительстве ряда крупных каналов и коллекторов в Средней Азии. Ниже приводятся данные о некоторых конкретных объектах при создании которых этот эффект проявился.

1. *Краткое описание взрывов с эффектом вспучивания*

Канал ДМ-1. В литологическом отношении трасса канала ДМ-1 представлена супесчано-суглинистой толщей с прослоями (1—2) и линзами (до 0.5 *м*) песка и гравийно-галечниковых отложений. Суглинки и супеси значительно засолены и загипсованы, их засоленность составляет величину порядка 11% по отношению к воздушно-сухому грунту. Распределение влажности по глубине толщи в пределах указанных пикетов показана на фиг. 1, откуда видно, что с увеличением глубины влажность грунтов увеличивается, однако на одинаковых глубинах в различных точках трассы она практически одинакова. Физические свойства грунтов приведены в табл. 1. Особой закономерности в характеристиках грунтов не наблюдается. Вследствие высокой засоленности пластичность невысокая. С глубиной засоленность уменьшается. Сдвиговые характеристики грунтов приведены в табл. 2.



Фиг. 1. Распределение влажности по глубине грунтовой толщи на ДМ-1.

Проектом, с учетом геометрических размеров выемки, было принято трехрядное расположение горизонтально-удлиненных (траншейных) зарядов. Расстояние между зарядами 9 *м*, глубина заложения 4*м*, вес боковых зарядов по 360 *кг/м*, центрального — 530 *кг/м*. Взрывание короткозамедленное. Несмотря на то, что расчетный заряд был уложен в грунт на расчетную глубину, вместо ожидаемой выемки заданных параметров, получилась выемка сложной конфигурации с пологими бортами (фиг. 2). Вдоль оси всей выемки образовался «горб» из грунта, оказавшийся при первом осмотре весьма влажным. Через некоторое время в ложе выемки и местами на поверхности «горба» стали появляться маленькие фонтанчики. В навале параллельно оси выемки виднелись глубокие трещины.

Коллектор ЦК-4. Физические свойства грунтов на исследованном участке канала представлены в табл. 1. Участок сложен, в основном, суглинками с незначительными прослойками глин и частыми линзами супесей, мощность которых достигает 5*м*. Пластичность грунтов невысокая из-за засоленности. Число пластичности в среднем достигает для супесей — 6, суглинков — 10. Сдвиговые характеристики грунтов приведены в табл. 2. Схема взрывания — однорядный траншейный заряд. Масса заряда — 210 *кг/м*. Глубина заложения — 4.5 *м*. Результат взрыва показан на фиг. 3. Образовавшаяся выемка имела корытообразную форму с небольшим «горбом» по оси. Видимая глубина составляла примерно 1/5 про-

Таблица 1

Физические свойства грунтов

Наименование объекта и пикеты	Глубина отбора образца, м	Удельный вес, $т/м^3$	Объемный вес, $т/м^3$: естеств. влажность	Объемный вес, $т/м^3$: сухого грунта	Естественная влажность, %	Пористость, %	Коэффициент пористости	Верхний предел пластичности, %	Нижний предел пластичности, %	Число пластичности	УГВ, м
ДМ—1											
290+00	2.0	2.68	1.65	1.47	12.5	45.2	0.825	26.7	19.8	6.9	8.0
"	6.0	2.67	2.01	1.68	19.6	37.1	0.590	24.2	19.2	5.0	8.0
292+00	1.5	2.69	1.64	1.40	17.1	48.0	0.923	27.5	19.1	8.4	8.0
"	3.5	2.69	1.88	1.63	15.2	39.4	0.650	26.4	18.3	8.1	8.2
"	5.5	2.74	2.00	1.56	28.5	43.1	0.757	42.5	24.5	18.0	8.2
296+00	1.5	2.67	1.63	1.45	12.2	45.7	0.842	28.7	22.7	6.0	8.2
"	3.0	2.7	1.86	1.58	17.6	41.5	0.709	27.2	17.5	9.7	8.5
"	6.0	2.70	2.00	1.66	20.3	38.6	0.629	27.9	17.9	10.0	8.5
"	8.0	2.68	2.01	1.69	19.0	36.9	0.585	25.1	17.2	7.9	8.5
278+64	2.8	2.67	1.69	1.53	10.3	42.7	0.745	25.0	19.4	5.6	8.5
"	3.8	2.67	1.64	1.46	11.7	45.1	0.821	28.2	21.7	6.5	8.0
268+50	0.45	2.68	1.48	1.36	8.3	49.0	0.561	25.6	17.8	7.8	8.2
"	1.45	2.69	1.54	1.35	14.3	49.8	0.992	27.0	18.4	8.6	8.2
"	2.45	2.67	1.47	1.33	10.8	50.5	1.008	29.1	23.4	5.7	8.2
"	3.45	2.67	1.66	1.55	10.0	43.2	0.766	26.0	20.2	5.8	8.2
"	5.0	2.69	1.87	1.58	17.9	41.0	0.694	28.8	20.8	8.0	8.2
ЦК—1											
10+00	4.5	2.67	1.70	1.51	12.3	43.65	0.770	25.2	18.6	6.6	5.2
"	6.0	2.71	1.93	1.53	26.2	43.5	0.770	33.4	21.7	11.7	5.2
15+10	3.1	2.70	1.89	1.50	25.9	44.4	0.799	30.5	20.8	9.7	9.2
"	4.4	2.73	1.97	1.56	26.4	42.9	0.751	38.5	23.6	14.9	9.2
19+30	1.5	2.71	1.95	1.56	24.7	42.4	0.736	30.3	19.3	11.0	5.0
"	2.6	2.68	1.92	1.52	26.6	43.3	0.764	30.8	23.2	7.6	5.0
19+97	1.5	2.72	1.91	1.53	25.0	43.8	0.779	35.6	22.9	12.7	5.0
"	2.6	2.73	1.90	1.50	26.6	45.1	0.821	37.6	22.0	17.6	5.0
20+40	1.0	2.70	1.88	1.60	17.9	40.7	0.686	30.0	19.7	10.7	5.3
"	1.5	2.69	2.03	1.66	22.5	38.3	0.621	25.5	16.4	9.1	5.0

Фиг. 2. Ситуация, возникшая на участке канала ДМ-1 после взрыва.

ектной, борта выемки пологие, ширина по верху превышала проектную почти в два раза.

Таблица 2

Сдвиговые характеристики грунтов

Наименование объектов	Глубина отбора образцов, *м*	Угол внутреннего трения, φ°	Коэффициент внутреннего трения	Сцепление С, *кг/см²*
ДМ–1				
290+00	2.0	23	0.432	0.546
"	6.0	30	0.568	0.685
292+00	1.5	26	0.488	0.625
"	3.5	28	0.530	0.710
"	5.5	22	0.412	1.35
296+00	1.5	28	0.535	0.700
"	3.0	25	0.463	1.056
"	6.0	27.5	0.520	0.750
"	8.0	16	0.284	0.770
278+64	2.8	27	0.512	0.630
"	3.8	28	0.537	0.540
268+50	0.45	39	0.800	0.597
"	1.45	28	0.537	0.615
"	2.45	31	0.600	0.515
"	3.45	28	0.525	0.815
"	5.0	27	0.512	0.695
ЦК–4				
19+97	1.5	28	0.525	0.610
"	2.6	29	0.550	0.554
19+30	1.5	30	0.575	0.542
"	2.6	27	0.500	0.445
15+00	3.1	26	0.487	0.550
"	4.4	27	0.500	0.922
10+00	4.5	27	0.500	0.450
"	6.0	28	0.525	0.508

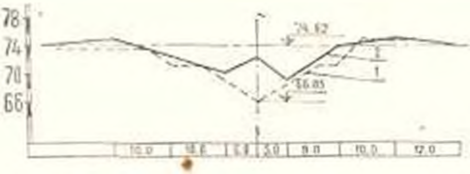
Коллектор ЦК-4-1. В литологическом отношении трасса коллектора аналогична ЦК-4. Схема взрывания — однорядный траншейный заряд. Масса заряда на ПК 15 ... 16 — 250 *кг/м*, глубина заложения 4.5 *м*. В результате взрыва образовалась выемка с явно выраженным «горбом» вдоль оси (фиг. 4). Фактическая ширина по верху не превышала проектную.

Фиг. 3. Результат маркшейдерской съемки поперечного сечения выемки на участке коллектора ЦК-4 (ПК 14+10): 1—проектный контур, 2—фактический профиль.

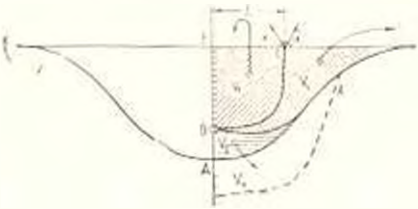
Аналогичные результаты были получены и при взрывах на других объектах.

Отметим, что, несмотря на различие в формах вспучивания, характерным для всех взрывов с аномальным эффектом являлись следующие признаки: влажный грунт в зоне вспучивания, пологие откосы у выемки, наличие трещин в навале, параллельных оси выемки.

2. *Состояние вопроса.* Эффект вспучивания грунта при взрывах на выброс известен сравнительно давно (см., напр., [3, 4, 5, 6]). Однако, несмотря на это, до последнего времени рационального объяснения механизма образования вспученной зоны не существовало. В работе [7] явление вспучивания грунта, названное автором аномальным эффектом при взрыве на выброс, объясняется следующим образом. Весь объем грунта, подверженный действию расширяющихся продуктов детонации ВВ при взрыве на выброс, делится на три части: V_1 — объем выброса, то есть объем грунта, выброшенного на поверхность за пределы выемки, V_2 — объем грунта, упавшего обратно в выемку, V_3 — объем грунта, вдавленного в окружающий массив действием взрыва (фиг. 5). При этом автор явление



Фиг. 4. Результат маркшейдерской съемки поперечного сечения выемки на участке коллектора ЦК-4-1 (ПК 12 ÷ 10): 1 — проектный контур, 2 — фактический профиль.



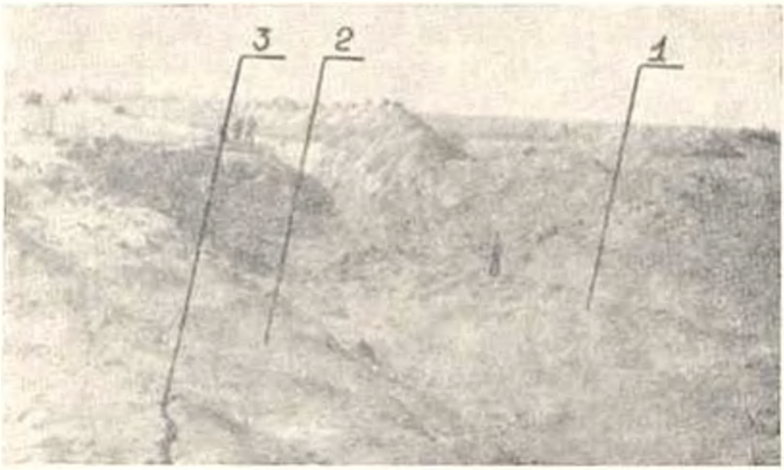
Фиг. 5. Схема образования вспученной зоны по Г. Н. Мартынову.

аномального эффекта связывает с существованием объема грунта V_2, упавшего обратно в выемку, величина которого, по мнению автора, существенно растет из-за искривления траекторий движения частиц грунта при взрывах в тяжелых водонасыщенных грунтах. Приняв гипотезу искривления траекторий движения частиц грунта, автор предполагает, что граница между объемами V_1 и V_2 на некотором расстоянии L от эпицентра взрыва выходит на свободную поверхность вертикально. Тогда частицы, движущиеся правее указанной границы, вылетают под условно положительным углом и падают за пределы контура выемки. Частицы, движущиеся левее данной границы, вылетая с «отрицательным углом», составляют в сумме объем V_2, который, сталкиваясь с аналогичным и симметрично движущимся объемом в левой части (фиг. 5), падает обратно в выемку. Автор отрицает образование объема V_2 за счет оползания бортов выемки в заключительной стадии развития взрыва, поскольку, как утверждается в работе, замеренная по фотографиям ширина снопа выброса в нижней своей части соответствует истинной ширине получаемой выемки по верху. Отсутствие в сухих грунтах с малым содержанием жидкой фазы аномального эффекта автор объясняет тем, что в таких грунтах скорость ударной волны мала, а время «откачка» настолько велико [7], что камуфлетная полость успевает развиться, благодаря чему путь, по которому частицы движутся с искривленными траекториями, весьма мал, и само искривление траекторий незначительно ввиду низкой интенсивности ударной волны и малого градиента плотности окружающей среды. При этом, как утверждает автор, граница раздела объемов V_1 и V_2 приближается к эпицентру взрыва.

В 1976 г. С. С. Григоряном было предложено объяснение явления вспучивания грунта, излагаемое ниже. Как показывает опыт проведения натурных взрывов в полевых условиях, одним из необходимых факторов, вызывающих эффект вспучивания грунта, является наличие близко расположенных к заряду грунтовых вод. После детонации заряда по грунту проходит сильная ударная волна, которая образует в водонасыщенной части массива зону «разжижения» грунта. Ударная волна, идущая по этому массиву, имеет существенно большую скорость, чем ударная волна, идущая по «сухому» грунту, расположенному над этим массивом. Поэтому фронт этой волны в области грунта выше уровня грунтовых вод оказывается очень пологим. Это приводит при ее отражении от свободной поверхности грунта к движению последнего в близком к вертикали направлении и к интенсивному разрыхлению и разрушению сухого грунта в приповерхностной области, причем разрушение тем меньше, чем дальше грунт от эпицентра взрыва из-за затухания взрывной волны при ее удалении от эпицентра. После окончания развития взрыва грунт, располагавшийся в некоторой области выше заряда, оказывается поднятым и выброшенным за пределы выемки. После выброса в оставшейся невыброшенной части грунта возникает неравновесное состояние, обусловленное действием силы тяжести, существованием выемки выброса, дробленым грунтом вне выемки и относительно высокой текучестью разжиженного грунта. При этих условиях под действием силы тяжести возникает движение разжиженного грунта и лежащего на нем дробленого грунта к оси выемки и образование за счет движения по инерции вспученной зоны в центре выемки. Следствием такой схемы движения на этой относительно медленной второй ее стадии является процесс опускания бортов выемки (фиг. 6).

Следует отметить еще и недавно опубликованную работу [8], в которой также отмечается, что возникновение аномального эффекта связано с высоким расположением уровня грунтовых вод. Образование же вспученной зоны грунта авторами объясняется сползанием с бортов выемки объемов V_1 и V_2 с последующим выпором объема V вдоль оси выемки. Причем, как утверждается в работе, объем выпора V равен суммарному объему сползающих частей $V_1 + V_2$. Однако в более поздней работе [9] авторы причиной появления перемычки (вспученной зоны) считают возвратное движение нагруженного взрывом нижележащего грунта (ила), не способного к дальнейшему уплотнению (выдавливанию).

В работе [10] предлагается следующий механизм аномального явления. Считается, что в связных водонасыщенных грунтах при приложении к ним динамической нагрузки определенной величины могут возникнуть тиксотропные процесы, связанные с изменением процентного содержания свободной воды. Возникновение тиксотропных явлений в указанных грунтах авторы связывают, согласно [11], с переходом части связанной воды в свободное состояние при динамических взрывных нагрузках. В результате этого повышаются внутрипоровое давление и градиент фильтрации, вследствие чего происходит фильтрационная деформация дна взрывной



Фиг. 6. Общий вид выемки, образовавшейся после взрыва на выброс: 1— вспученная зона, 2— просевший борт, 3—трещина, образовавшаяся в результате опускания борта выемки.

выемки, которая сопровождается механической суффозией — выносом мелких частиц через поры более крупнозернистого скелета. При этом, по мнению авторов, вынос может либо носить ограниченный характер, либо приводить к полному разрушению канала.

3. *Некоторые результаты исследований.* Обзор литературных источников показывает насколько сложна проблема и соответственно противоречивы объяснения механизма аномального явления. В разрешении данной проблемы дополнительное знание могут доставить результаты проведенных нами экспериментов, целью которых было установление возможности и получение практических рекомендаций для строительства открытых выемок в осложненных условиях. В основу исследований была положена схема образования вспученной зоны, предложенная С. С. Григоряном. Согласно этой схеме минимальное расстояние от центра заряда до уровня грунтовых вод, при котором вспучивание не должно возникать, можно определить из требования, чтобы при подходе к уровню грунтовых вод интенсивность взрывной волны упала до величины, уже не вызывающей эффектов «разжижения» водонасыщенного грунта и его оползания вместе с вышележащими сухими толщами. Соответствующие критические величины этой интенсивности можно определять эмпирическим путем, проводя серию пристрелочных взрывов. Однако структура теоретической формулы, по которой в принципе можно ее рассчитать, может быть получена

следующим образом. Зависимость интенсивности Δp взрывной волны удаленного заряда в грунте от расстояния r имеет вид

$$\Delta p \leqslant \Delta p_* f\left(\frac{r}{\sqrt{Q}}\right) \tag{3.1}$$

где Δp_* — постоянная величина, определяемая типом ВВ и свойствами грунта, Q — вес единицы длины заряда ВВ. Вид функции f также определяется типом грунта и ВВ. Упомянутое выше ограничение на интенсивность волны записывается в виде

$$\Delta p \leqslant \Delta p_{кр}$$

где $\Delta p_{кр}$ — критическое значение Δp, не вызывающее указанных выше эффектов. Это условие с учетом (3.1) приводится к виду

$$r \leqslant r_* = \sqrt{Q}\, f^{-1}\left(\frac{\Delta p_{кр}}{\Delta p_*}\right) = \xi \sqrt{Q} \tag{3.2}$$

где ξ —функция, обратная к f.

Если нет возможности для проведения пристрелочных взрывов, позволяющих определить множитель ξ в (3.2), то для грубых оценок можно принять, что

$$r_* = \lambda h_0 \sqrt{1 + n^2}$$

где n — показатель действия взрыва, h_0 — глубина заложения заряда, а коэффициент λ — порядка 0.4—0.7.

Тогда с учетом соотношения

$$Q = 2 k h_0^2 \frac{0.4 + 0.6\, n^3}{n - 1}$$

связывающего погонный вес Q ВВ с параметрами h_0 и n [11], получаем для коэффициента ξ выражение

$$\xi = \lambda \sqrt{\frac{(n-1)(1+n^2)}{2\,k\,(0.4 + 0.6\, n^3)}} \tag{3.3}$$

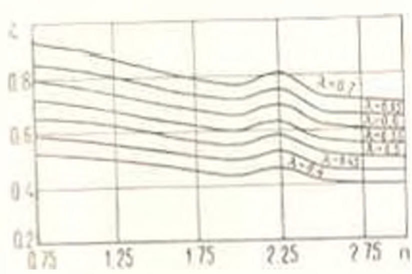
где k — расчетный удельный расход ВВ (кг/м²).

На фиг. 7 приведена диаграмма для определения коэффициента ξ при различных n и λ.

Из описанной схемы явления вспучивания следует, что глубина h_0 заложения зарядов должна быть связана с глубиной расположения уровня грунтовых вод H_* соотношением

$$h_0 < H_* - \xi \sqrt{Q} \tag{3.4}$$

Этот вывод согласуется с теми фактами, что, как показал анализ результатов опытно-промышленных взрывов, с приближением глубины



Фиг. 7. Диаграмма для определения коэффициента ξ при различных n и λ.

заложения заряда к уровню грунтовых вод относительная глубина выемки уменьшается. Таким образом, для конкретных грунтовых условий, типа и массы ВВ существует оптимальная глубина заложения заряда, при которой образуется выемка с максимальными параметрами и без вспучивания и аномальных эффектов.

Эта тенденция отмечается и в работах [8, 9, 10]. Изложенное выше иллюстрируется следующим примером. Исходные данные: $n = 2.25$, $h_0 = 3$ *м*, $H_в = 8$ *м*, $k = 1.3$ *кг/м³*. Согласно (3.3) имеем

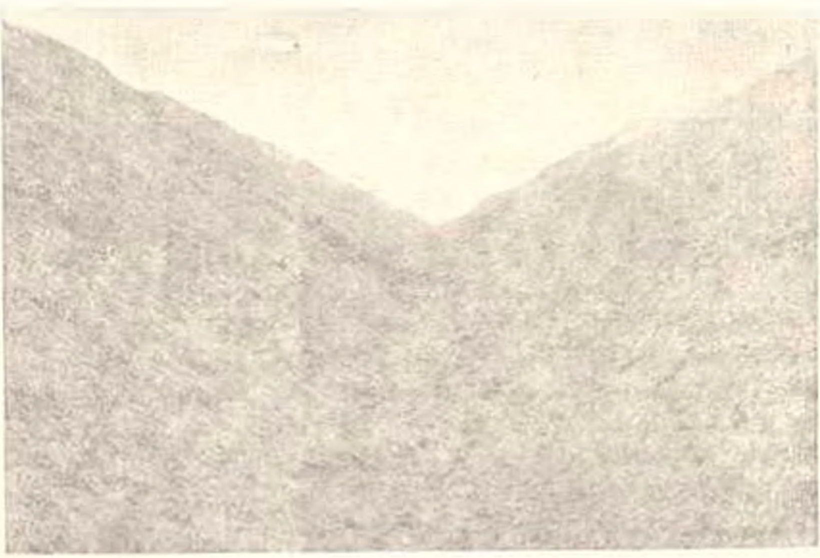
$$\xi = \sqrt{\frac{3.25 \cdot 6.06}{2.6(0.4 + 0.6 \cdot 11.38)}} \approx \lambda$$

Отсюда при $\lambda = 0.5$ получаем для критического расстояния $r_в$ до уровня грунтовых вод $r_в = 0.5\sqrt{Q}$.

Если взять вес заряда согласно [12] равным 300 *кг/м*, то при $H_в = 8$ *м* и $h_0 = 3$ *м* для $r_в$ имеем $r_в = 0.5\sqrt{300} \approx 8.5$ *м*, что приводит к нарушению условия (3.4).

При $Q = 100$ *кг/м* для $r_в$ имеем $r_в = 0.5\sqrt{100} = 5$ *м*, и условие (3.4) выполняется, ибо $H_в - h_0 = 8 - 3 = 5$ *м*.

Результат фактически проведенного для этого расчетного случая взрыва показан на фиг. 8.



Фиг. 8.

Известно [13], что начальное давление продуктов детонации в первом приближении может быть определено с помощью выражения

$$p_0 = \frac{\gamma_0 D^2}{2(1+\gamma)} \tag{3.5}$$

где ρ_0 — плотность ВВ, D — скорость детонации ВВ, γ — показатель политропы. Известно также, что в пластически деформируемых средах ответственным за разрушение среды (соответственно за образование зоны разжижения в водонасыщенных грунтах) является импульс взрыва, определяемый интегралом по времени от давления

$$I=\int p(r,t)\,dt \tag{3.6}$$

Из (3.5) следует, что с уменьшением плотности и скорости детонации ВВ уменьшается начальное пиковое давление, что приводит к соответствующему изменению формы и величины взрывного импульса. Таким образом, согласно (3.5) и (3.6), для увеличения глубины заложения зарядов, не приводящих к нарушению условия (3.4), необходимо применять ВВ с более низкими плотностью и скоростью детонации.

Для сравнения в табл. 3 приведены результаты взрывов в идентичных условиях с использованием штатного ВВ граммонита 79/21 и игданита.

Таблица 3

Тип ВВ	Глубина заложения h_0, м	Характеристики ВВ		Масса ВВ Q, кг/м	Поперечное сечение выемки S, м²	Глубина выемки H, м	Фактич. удел. расход ВВ, q кг/м³
		ρ_0, кг/м³	D, м/с				
Граммонит 79/21	3	900—1000	3500—4200	100	30.5	4.2	3.2
Игданит	3.2	850	2200 2700	210	46.75	4.64	4.5

Как видно из таблицы, использование в качестве ВВ игданита, характеризующегося более низкими детонационными параметрами [14], позволяет увеличить массу заряда и глубину его заложения, что, соответственно, способствует увеличению геометрических размеров выемки без образования вспученной зоны.

Выводы. Результаты опытно-промышленных взрывов, проведенные трестом «Средазспецстрой» в 1976—1980 гг. с учетом описанной выше схемы явления вспучивания, показали возможность эффективного применения взрывов на выброс при строительстве гидромелиоративных сооружений в осложненных условиях.

Поскольку в настоящее время область применения взрывного метода выполнения земляных работ в осложненных условиях становится все шире, то представляет значительный интерес дальнейшее изучение влияния свойств грунта, параметров и конструкций заряда на указанное явление с целью оптимизации технологии производства взрывных работ.

Трест «Средазспецстрой»

Поступила 1 XII 1980

Օ. Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՈՎ, Ս. Ս. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Ռ. Զ. ՔԱՄԱԼՅԱՆ

ՊԱՅԹԵՑՈՒՄՈՎ ԲՆԱՀՈՂԵՐԻ ԴՈՒՐՍ ՆԵՏՄԱՆ ԸՆԹԱՑՔԻ ՎՐԱ ԳԵՏՆԱՋՐԵՐԻ ՄԱԿԱՐԴԱԿԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Բերված են պայթեցումներով բնահողերի դուրս նետման ուղղությամբ բարդ պայմաններում կատարված, երբ տեղադրված լիցքերի մոտ գետնաջրերի մակարդակը բարձր է, հետազոտությունների արդյունքները։

Ցույց է տրված գետնաջրերի մակարդակի ազդեցությունը պայթեցումներով առաջացրած հանվածքների պարամետրերի վրա։

THE INFLUENCE OF UNDERGROUND WATER LEVEL ON THE PROCESS OF GROUND EJECTION BY EXPLOSION

O. A. ARUTUNOV, S. S. GRIGORIAN, R. Z. KAMALIAN

S u m m a r y

Pilot-industrial results to explosions influence on ground ejection in complicated conditions — in the ground with high ground water level disposition to charge — are presented. The influence of ground water level on parameters of explosive excavation is shown.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Авдеев Ф. А.* Взрывы на выброс в оплывающих моренных грунтах при строительстве Аларечeнского водоотводящего канала. В кн.: Труды V сессии ученого совета по народнохозяйственному использованию взрыва. Фрунзе, Илим, 1965, с. 259—272.
2. *Кушнарев Д. М.* Использование энергии взрыва в строительстве. М., Стройиздат, 1977, с. 118.
3. *Вовк А. А., Смирнов А. Г., Кравец В. Г.* Динамика водонасыщенных грунтов. Киев, Наукова думка, 1975, с. 204.
4. *Шумсков Б. Б., Минлели Э. О.* Рациональные пути использования энергии взрыва в мелиоративном строительстве. Гидротехника и мелиорация, 1975, № 11, с. 13—16.
5. *Золотарев И. Я.* Взрывные работы на ирригационном и мелиоративном строительстве в Узбекистане. В кн.: Взрывное дело, 1947, вып. 47, с. 40—47.
6. *Данчев П. С.* О влиянии водонасыщенности грунтов и горных пород на эффект действия взрыва. В кн.: Взрывное дело, 1960, 45/2, с. 54—62.
7. *Мартынов Н. Г.* Об аномальном эффекте взрыва на выброс в водонасыщенных грунтах. Изв. вузов. Геология и разведка, 1977, № 2, с. 127—135.
8. *Лучко И. А., Бигдаш Д. В.* Влияние уровня грунтовых вод на результаты взрывов на выброс. В кн.: Использование взрыва при разработке нескальных грунтов. Киев, Наукова думка, 1978, с. 120—123.
9. *Вовк А. А., Лучко И. А., Бигдаш Д. В.* Особенности взрыва на выброс в условиях приазовских плавней. В кн.: Взрывное дело, 1979, 81/38, с. 208—213.
10. *Андреев Ю. П., Цурик В. А., Тесленко В. В.* Опыт строительства гидромелиоративных объектов в Калмыцкой АССР с применением энергии взрыва. В кн.: Взрывное дело, 1979, 81/38, с. 223—226.

11. *Герсеванов Н. М., Польшин Д. Е.* Теоретические основы механики грунтов. М., Госстройиздат, 1948, с. 295.
12. Проектирование взрывных работ. Под редакцией Б. Н. Кутузова. М., «Недра», 1974.
13. Физика взрыва. Под редакцией К. П. Станюковича. М., «Наука», с. 93.
14. *Дубнов Л. В., Бахаревич Н. С., Романов А. И.* Промышленные взрывчатые вещества. М., «Недра», 1973, с. 319.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIV, № 6, 1981 Механика

В. А. КАРААШ

К ТЕОРИИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН С РАЗДЕЛЕННЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ

Тонкие элементы из пьезокерамики в виде круглых пластин и колец находят широкое применение в электромеханических преобразователях энергии — излучателях и приемниках ультразвука, фильтрах частот, резонаторах, пьезотрансформаторах и т. п. Работа этих элементов характеризуется рядом особенностей, главной из которых является сильная связанность электрических (напряженность, индукция) и механических (напряжения, деформации, перемещения) полей. В лучших современных составах пьезокерамики превращаться из механической формы в электрическую и наоборот может до 20—50% энергии. На практике связанность полей проявляется в зависимости характеристических частот и интенсивности возбуждения колебаний на этих частотах от способа электрического нагружения, то есть от величины, формы и схемы соединения электродов.

Хорошее согласие расчетных и экспериментальных данных обеспечивает прикладная теория электроупругости, наиболее полно изложенная в работах А. Ф. Улитко и его учеников.

В тонких круглых пьезокерамических пластинах чаще всего возбуждаются электрическим полем и применяются в различных устройствах радиальные колебания, тогда как несимметричные могут проявляться как паразитные, возникающие из-за внутренних или геометрических неоднородностей. Несимметричные колебания тонких упругих или пьезоэлектрических круглых пластин изучались в работах [1—4], а пьезокерамических тонких колец — в работе [5]. В отличие от радиальных несимметричные колебания характеризуются наличием наряду с деформацией растяжения—сжатия по радиусу также деформации сдвига в плоскости пластины.

В настоящем исследовании в рамках прикладной теории электроупругости выводятся уравнения для определения резонансных частот несимметричных колебаний, а также изучается распределение внутренних динамических напряжений в круглых пьезокерамических пластинах с центральным круговым отверстием произвольного радиуса.

1. Рассмотрим тонкое пьезокерамическое кольцо с наружным радиусом R и внутренним a, покрытое на нижнем и верхнем основаниях сплошными электродами, толщиной которых можно пренебречь. После поляризации до насыщения разделим электродное покрытие с двух сторон на $2l$ кольцевых секторов, равномерно расположенных по азимуту. Соединим соседние

электроды таким образом, чтобы направление нагружающего электрического поля в них было противоположным. Напряженность электрического поля E_z в любом из секторов

$$E_z^{(i)} = \frac{4E_0 l}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\sin l(2i+1)\vartheta}{l((2i+1)} \quad (1.1)$$

где $E_0 = \frac{V_0}{h}$, V_0 — разность потенциалов, h— толщина, ϑ— угловая координата, причем $h \ll R - a$ и $h \ll \pi a/l$.

Запишем векторное уравнение движения [5]

$$[r^2\nabla^2 + (k_1 r)^2]\operatorname{div}\vec{U} = d_{31}(1+\nu)r^2\nabla^2 E_z \quad (1.2)$$

$$[r^2\nabla^2 + (k_2 r)^2]\operatorname{rot}_z\vec{U} = 0 \quad (1.3)$$

где

$$k_1^2 = \omega^2\rho s_{11}^E(1-\nu^2),\quad k_2^2 = 2\omega^2\rho s_{11}^E(1+\nu) \quad (1.4)$$

$$\operatorname{div}\vec{U} = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_\vartheta}{\partial\vartheta} = \varepsilon_r + \varepsilon_\vartheta \quad (1.5)$$

$$\operatorname{rot}_z\vec{U} = \frac{\partial U_\vartheta}{\partial r} + \frac{U_\vartheta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial\vartheta} = 2\frac{\partial U_\vartheta}{\partial r} - \varepsilon_{r\vartheta} \quad (1.6)$$

Остальные обозначения позаимствованы из работы [5]. Поскольку пластина выбрана достаточно тонкая, так что в пределах каждого сектора напряженность электрического поля можно считать однородной по толщине, то

$$\nabla^2 E_z = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\vartheta^2} = -\frac{4lE_0}{\pi r^2}\sum_{i=0}^{\infty} l(2i+1)\sin l(2i+1)\vartheta \quad (1.7)$$

Подставляя это соотношение в (1.2) и представляя частное решение полученного уравнения в виде

$$\operatorname{div}\vec{U} = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(r)\sin l(2i+1)\vartheta \quad (1.8)$$

приходим к неоднородному уравнению Бесселя

$$r^2\frac{d^2 f_i}{dr^2} + r\frac{df_i}{dr} + [k_1^2 r^2 - l^2(2i+1)^2] f_i = -\frac{4l^2 E_0 d_{31}(1+\nu)}{\pi}(2i+1) \quad (1.9)$$

общее решение которого

$$f_i = 2a'_{l(2i+1)} J_{l(2i+1)}(k_1 r) + 2a''_{l(2i+1)} Y_{l(2i+1)}(k_1 r) -$$
$$- G_i l(2i+1)\, s_{-1,\, l(2i+1)}(k_1 r),\ \left(G_i = \frac{4E_0 l d_{31}(1+\nu)}{\pi}\right) \quad (1.10)$$

В работах [4, 5] приведено общее решение уравнения (1.3). Обозначая $n = l(2l+1)$, имеем

$$\operatorname{div} \vec{U} = \sum_{n=1}^{\infty} [2 a_n' J_n(k_1 r) + 2 a_n'' Y_n(k_1 r) - G_l n s_{-1, n}(k_1 r)] \sin n\vartheta \quad (1.11)$$

$$\operatorname{rot}_z \vec{U} = \sum_{n=1}^{\infty} [2 b_n' J_n(k_2 r) + 2 b_n'' Y_n(k_2 r)] \cos n\vartheta \quad (1.12)$$

Произвольные постоянные a_n', a_n'', b_n', b_n'' определяются из условия отсутствия радиальных и сдвиговых напряжений на внутреннем и внешнем контурах кольца

$$\sigma_{r|r=a} = \sigma_{r|r=R} = \tau_{r\vartheta|r=a} = \tau_{r\vartheta|r=R} = 0 \quad (1.13)$$

Частотное уравнение для определения безразмерных резонансных частот $\varkappa_{m,n} = (k_1 R)_{m,n}$ несимметричных колебаний $((m, n))$ с любыми радиальным m и угловым n индексами получено в работе [5], в виде определителя четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \alpha_{13} & -\alpha_{14} \\ \alpha_{21} & -\alpha_{22} & \alpha_{23} & -\alpha_{24} \\ -\alpha_{31} & \alpha_{32} & -\alpha_{33} & \alpha_{34} \\ -\alpha_{41} & \alpha_{42} & -\alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.14)$$

причем коэффициенты являются комбинациями функций Бесселя.

Корни уравнения (1.14) находились численным способом для некоторых отношений $\gamma = \frac{a}{R}$ при $\nu = 0.34$. Полученные значения $\varkappa_{m,n}$ в интервале $0 \leqslant \gamma \leqslant 0.9$ для случая $l = 3$ приведены в табл. 1. Нетрудно видеть, что с ростом диаметра отверстия частоты всех мод, кроме первых двух, имеют тенденцию к повышению, хотя и проходят через слабо выраженный минимум.

Экспериментальные измерения резонансных частот на пластине из пьезокерамики ЦТС-19 с наружным диаметром 50 мм при увеличении γ от 0 до 0.65 подтвердили предсказания таблицы.

Таблица 1

γ	Мода $((m, n))$							
	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3	7.3	8.3
0	2.0562	3.3687	5.2084	6.3013	7.3646	9.0874	9.7453	11.0110
0.1	2.0718	3.5317	5.3698	6.2829	7.3363	9.0923	9.6737	10.9231
0.2	2.0562	3.4991	5.2050	6.2899	7.2434	9.2309	9.6559	11.2434
0.3	2.0014	3.4531	5.2443	6.2650	7.6662	9.0432	10.3182	
0.4	1.9017	3.4787	5.6912	6.0412	8.0412	9.3662	11.6162	
0.5	1.7795	3.5748	5.7998	6.5248	8.6373	10.9123		
0.6	1.6373	3.5594	5.8824	7.9574	9.9824			
0.7	1.5461	3.5594	6.8344	10.5094				
0.8	1.4492	3.4000	9.4500					
0.9	1.3687	3.2187						

2. На основе полученного общего решения (1.11) и (1.12) можно построить выражение для суммы главных механических напряжений $(\sigma_r + \sigma_\theta)$ в пластине. Исходя из уравнений состояния [6]

$$
\begin{cases} \varepsilon_r = s_{11}^E \sigma_r + s_{12}^E \sigma_\theta + d_{31} E_z \\ \varepsilon_\theta = s_{12}^E \sigma_r + s_{11}^E \sigma_\theta + d_{31} E_z \end{cases} \tag{2.1}
$$

имеем

$$
\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = \operatorname{div} \bar{U} = s_{11}^E (1 - \nu)(\sigma_r + \sigma_\theta) + 2 d_{31} E_z \tag{2.2}
$$

откуда

$$
\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu)} \operatorname{div} \bar{U} - \frac{2 d_{31} E_z}{s_{11}^E (1 - \nu)} \tag{2.3}
$$

Подставляя (1.1) и (1.11) в (2.3), получаем

$$
\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu)} \sum_{n=l}^{\infty} \Big[2 a_n' J_n (k_1 r) + 2 a_n' Y_n (k_1 r) - G_l \Big(\frac{2}{n (1 + \nu)} + n s_{-1, n} (k_1 r) \Big) \Big] \sin n\theta \tag{2.4}
$$

Анализ соотношения (2.4) показывает, что внутренние динамические напряжения в тонкой круглой пьезокерамической пластине с центральным круговым отверстием сложным образом зависят от полного набора мод колебаний. Наряду с выбранным семейством несимметричных мод всегда могут возбуждаться и более высокие в силу правила отбора

$$
n = l (2t + 1) \quad t = 0,\ 1,\ 2, \cdots \tag{2.5}
$$

Действие этого правила иллюстрирует табл. 2, в которой приведены соответствующие данному числу разрезов l числа n.

Таблица 2

l	n					
1	1	3	5	7	9	11
2	2	6	10	14	18	22
3	3	9	15	21	27	
4	4	12	20	28		
5	5	15	25			

Из табл. 2 следует, что с ростом числа разрезов электродного покрытия спектр несимметричных мод, которые могут возбуждаться наряду с основным семейством, делается менее плотным. Необходимо отметить, что правило отбора (2.5) действует для любых несимметричных мод, которые возбуждаются противофазными электрическими полями в круглых пластинах, кольцах или оболочках вращения.

Вблизи резонансных частот $\varkappa_{m,n}$ постоянные a_n^{+} и a_n^{-} резко возрастают (стремится к нулю частотный определитель (1.14)) и вклад первых двух слагаемых в квадратных скобках соотношения (2.4) становится определяющим. Таким образом, распределение динамических напряжений в тонких пьезокерамических кольцах вблизи резонансных частот подчиняется функциям Бесселя первого и второго рода по радиусу и синусоидальному закону по азимуту. Вклад функций Ломмеля $S_{-1,n}$ следует учитывать лишь вдали от резонансных частот.

Экспериментальные исследования по изучению распределения внутренних динамических напряжений как в сплошных круглых пластинах, так и при наличии центрального отверстия проводились методом пьезотрансформаторного датчика [7]. Сперва измерялись резонансные и антирезонансные частоты тонких круглых пластин со сплошными электродами. По этим данным определялись величины p_{11}^{E} и ν. Затем электродное покрытие разделялось l диаметральными разрезами с обеих сторон. Вдоль биссектрисы одного из секторов и по дуге полуокружности наносились пьезотрансформаторные датчики и изучалось распределение динамических напряжений в пластине. Наконец, сверлилось центральное отверстие, диаметр его постепенно увеличивался, и исследовалось распределение напряжений в кольце. По характеру азимутального распределения измеренных потенциалов датчиков — последние пропорциональны сумме главных механических напряжений — проводилась идентификация несимметричных мод, то есть устанавливалась их принадлежность тому или иному семейству $((m, n))$. По мере увеличения диаметра отверстия интенсивность одних мод уменьшалась, других увеличивалась. Установлено, что все несимметричные моды проходят через максимумы и минимумы интенсивности.

Исследование распределения динамических напряжений в пластинах с круговым отверстием на несимметричных модах колебаний, равно как и зависимость их интенсивности от диаметра отверстия, проведено в данной работе впервые.

Институт механики
АН УССР

Поступила 24 VII 1980

Վ. Լ. ԿԱՐԼԱՇ

ԲԱԺԱՆՎԱԾ ԷԼԵԿՏՐՈԴՆԵՐՈՎ ԲԱՐԱԿ ՊՅԵԶՈԿԵՐԱՄԻԿԱԿԱՆ ԿԼՈՐ ԹԻԹԵՂՆԵՐԻ ՈՉ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Կիրառական էլեկտրաառաձգականության տեսության շրջանակներում լուծվում է կենտրոնական կլոր անցքով բարակ կլոր պյեզոկերամիկական թիթեղների ոչ սիմետրիկ տատանումների խնդիրը, երբ նրանք ըստ հաստության պոլյարիզացված են մինչև հագեցում:

Հաշվված ռեզոնանսային հաճախականությունները և տատանումների ձևերը համեմատվում են փորձնական տվյալների հետ, որոնք ստացվել են ՑՏՍ—19 պյեզոկերամիկայից պատրաստված նմուշների վրա։

ON THE THEORY OF ASYMMETRIC VIBRATIONS OF THIN PIEZOCERAMIC CIRCULAR PLATES WITH SEPARATE ELECTRODES

V. L. KARLASH

S u m m a r y

The problem is solved of asymmetric vibrations of polarized along the thickness thin circular piezoceramic plates with a central circular hole. For excitation of asymmetric vibrations the electrode covering of the plate on both sides was divided into arbitrary even number of sectors of equal size with a subsequent switching on of these sectors in the phase opposite to the source of the alternating electric field.

The frequency equation and the equation for distribution of internal dynamic stresses in the plate are introduced. Calculated resonance frequencies and vibration forms are compared with experimental data, obtained on specimens of piezoceramic CTS—19.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лав А.* Математическая теория упругости. М.—Л., ОНТИ НКТП, 1935, с. 675.
2. *Onoe M.* Contour vibrations of isotropic circular plates. J. acoust. Soc. Am., 1956, 28, p. 1158—1162.
3. *Holland R.* Numerical studies of elastic-disk contour Modes lacking axial symmetry. J. acoust. Soc. Am., 1966, 40, p. 1051—1057.
4. *Вовкодав И. Ф., Карлаш В. Л., Улитко А. Ф.* Анализ несимметричных колебаний тонких пьезокерамических дисков с разрезанными электродами. Прикл. механика, 1979, 15, № 2, с. 78—82.
5. *Карлаш В. Л.* Исследование несимметричных колебаний поляризованных по толщине пьезокерамических колец. Прикл. механика, 1978, 14, № 12, с. 88—94.
6. *Улитко А. Ф.* К теории колебаний пьезокерамических тел. Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1975, вып. 15, с. 90—99.
7. *Карлаш В. Л., Улитко А. Ф.* Метод исследования механических напряжений в колеблющихся пьезокерамических телах. Электричество, 1976, № 11, с. 82—83.