ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 5, 1981 Механика

Р. Е. МКРТЧЯН

ЗАДАЧА БОЛЬШИХ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ИЗ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО МАТЕРИАЛА

В связи с расширением области применения резины и различных пластмасс в технике за последние 30 лет теория больших упругих деформаций быстро развилась и приобрела довольно компактную форму. Больших успехов достигла эта теория в области исследования идеально-упругого несжимаемого материала, что обусловливается широким применением вулканизированной резины и сравнительной простотой поставленных проблем.

Однако, несмотря на обилие точных и приближенных общих решений различных важных проблем, которые в какой-то мере опираются на физические законы между напряжениями и деформациями, сами эти законы невозможно считать достаточно исследованными для широкого диапазона деформаций многих сжимаемых материалов, допускающих большие упругие деформации. Например, конкретные выражения потенциальной энергии для сжимаемых упругих материалов известны только в рамках теории упругости второго и третьего порядка [1, 2]. Этот факт, по-видимому, связан со сложностью экспериментов, которые должны охватывать весь диапазон деформаций.

В связи с этим в работе [3] предлагается кусочно-линейный закон связи между напряжениями и деформациями, который опирается на ограниченное число экспериментальных данных, необязательно охватывающих весь диапазон деформаций, или на заранее известный закон. Суть этого закона заключается в том, что непрерывная функция, связывающая напряжения с деформациями, аппроксимируется дискретной моделью, представляющей собой множество значений указанной функции в некотором конечном числе точек области ее определения в совокупности с кусочно-линейными аппроксимациями этой функции на некотором конечном числе подобластей.

В настоящей работе определяются упругие постоянные для упругого сжимаемого материала при кусочно-линейном законе связи между напряжениями и деформациями при больших деформациях и приводится пример составления каталога для этих постоянных. Рассматривается задача цилиндрического изгиба прямоугольного параллелепипеда. Получены простые соотношения для определения деформированного и напряженного состояний. В качестве численного примера решается задача изгиба параллелепипеда в круглую цилиндрическую трубу.

§ 1. В практически возможном диапазоне деформаций данного упругого сжимаемого материала по главным направлениям деформаций фиксируется конечное число узловых точек с идентификационным номером (α, β, γ), характеризующихся главными удлинениями $\lambda^{(\alpha)}, \lambda^{(\beta)}, \lambda^{(\gamma)}$, которые определяются [3]

$$\lambda^{(\delta)} = (1 + e \operatorname{sign} \delta)^{2|\delta|}$$

$$(\delta = -m, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, n)$$

где m и n — натуральные числа, e — малая величина, квадратами и высшими степенями которой в условиях поставленной задачи можно пренебречь относительно e. Диапазон деформаций разделяется на то же число подобластей с теми же идентификационными номерами (α, β, γ), так что

$$1 - e \leqslant \frac{\lambda_1}{\lambda^{(\alpha)}}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda^{(\beta)}}, \quad \frac{\lambda_3}{\lambda^{(\gamma)}} \leqslant 1 + e \tag{1.1}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — главные удлинения, соответствующие подобласти (α, β, γ).

В узловых точках даются главные значения напряжений, которые находятся экспериментальным, либо теоретическим путем (если известен закон состояния данного материала), и называются глобальными напряжениями. Затем на основании глобальных напряжений строится кусочно-линейный закон связи между напряжениями и деформациями, так что в каждой подобласти (α, β, γ) напряжения определяются следующими простыми выражениями [3]:

$$\sigma_i^{(\alpha, \beta, \gamma)} = B_i^{(\alpha, \beta, \gamma)} + b_{ij}^{(\alpha, \beta, \gamma)} e_j \tag{1.2}$$

где $B_i^{(\alpha, \beta, \gamma)}$ — глобальные напряжения подобласти (α, β, γ), $b_{ij}^{(\alpha, \beta, \gamma)}$ — упругие постоянные, которые определяются выражениями

$$b_{i1}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = \frac{\operatorname{sign} \alpha}{e} \left(2 \sum_{k=0}^{\alpha} (-1)^k B_i^{(\alpha-k, \beta, \gamma)} - B_i^{(\alpha, \beta, \gamma)} - (-1)^\alpha B_i^{(0, \beta, \gamma)} \right) +$$
$$+ (-1)^\alpha (\lambda_0 + 2\delta_{i1}\mu_0)$$

$$b_{i2}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = \frac{\operatorname{sign} \beta}{e} \left(2 \sum_{k=0}^{\beta} (-1)^k B_i^{(\alpha, \beta-k, \gamma)} - B_i^{(\alpha, \beta, \gamma)} - (-1)^\beta B_i^{(\alpha, 0, \gamma)} \right) +$$
$$+ (-1)^\beta (\lambda_0 + 2\delta_{i2}\mu_0) \tag{1.3}$$

$$b_{i3}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = \frac{\operatorname{sign} \gamma}{e} \left(2 \sum_{k=0}^{\gamma} (-1)^k B_i^{(\alpha, \beta, \gamma-k)} - B_i^{(\alpha, \beta, \gamma)} - (-1)^\gamma B_i^{(\alpha, \beta, 0)} \right) +$$
$$+ (-1)^\gamma (\lambda_0 + 2\delta_{i3}\mu_0)$$

где δ_{ij} — символы Кронекера. Для фиксированных значений (α, β, γ) имеем

$$B_1^{(\alpha, \beta, \gamma)} = B_1^{(\alpha, \gamma, \beta)} = B_2^{(\beta, \alpha, \gamma)} = B_2^{(\gamma, \alpha, \beta)} = B_3^{(\beta, \gamma, \alpha)} = B_3^{(\gamma, \beta, \alpha)}$$

Из (1.3) вытекает

$$b_{i1}^{(0,\beta,\gamma)} = \lambda_0 + 2\delta_{i1}\mu_0, \quad b_{i2}^{(\alpha,0,\gamma)} = \lambda_0 + 2\delta_{i2}\mu_0, \quad b_{i3}^{(\alpha,\beta,0)} = \lambda_0 + 2\delta_{i3}\mu_0 \quad (1.4)$$

Выражения (1.3) и (1.4) позволяют для исследуемых конкретных материалов составить каталоги определения упругих постоянных $b_{ij}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$. Для иллюстрации в табл. 1 приводится пример составления каталога, где при определении глобальных напряжений $B_i^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ использованы формула Мурнагана с коэффициентами, соответствующими полистиролу [1, 2], и решение задачи однородного растяжения упругого изотропного тела при больших деформациях [4].

Приведенные в табл. 1 постоянные соответствуют выбранной нумерации главных направлений. При ином выборе нумерации индексы постоянных $B_i^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ и $b_{ij}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ меняются соответствующим образом. Например, если в таблице даны значения постоянных, соответствующие подобласти с номером (α, β, γ), то для подобласти (β, α, γ), где α, β, γ — фиксированные числа, они определяются следующим образом:

$$B_1^{(\beta,\alpha,\gamma)} = B_2^{(\alpha,\beta,\gamma)}, \quad B_2^{(\beta,\alpha,\gamma)} = B_1^{(\alpha,\beta,\gamma)}, \quad B_3^{(\beta,\alpha,\gamma)} = B_3^{(\alpha,\beta,\gamma)}$$

$$b_{11}^{(\beta,\alpha,\gamma)} = b_{22}^{(\alpha,\beta,\gamma)}, \quad b_{12}^{(\beta,\alpha,\gamma)} = b_{21}^{(\alpha,\beta,\gamma)}, \quad b_{13}^{(\beta,\alpha,\gamma)} = b_{23}^{(\alpha,\beta,\gamma)} \text{ и т. д.}$$

Рассматриваемый кусочно-линейный закон позволяет:

1. Получить конкретные выражения физической связи между напряжениями и деформациями для упругих сжимаемых материалов, допускающие деформации, выходящие за пределы теории упругости второго или третьего порядка.

2. Упростить соотношения теории упругости с помощью ввода простого линейного физического закона.

3. Для определения упругих постоянных использовать известные физические законы или экспериментальные данные, необязательно охватывающие весь диапазон деформаций, что позволяет исходить из имеющихся возможностей.

§ 2. Предположим, что упругий прямоугольный параллелепипед в системе прямоугольных декартовых координат (X_1, X_2, X_3) занимает область

$$X_1 = a_1, \qquad X_1 = a_2 = a_1 + h$$

$$X_2 = \pm b, \qquad X_3 = \pm c$$

Пусть параллелепипед деформируется в цилиндрическую панель, которая в цилиндрических координатах (r, θ, z) определяется выражениями

$$r = r(X_1), \qquad \theta = \frac{X_2}{\lambda k}, \qquad z = \lambda X_3 \qquad (2.1)$$

где λ — постоянный коэффициент растяжения в направлении X_3, k — постоянная.

Таблица 1

№ п/п	№ подобласти	№ главн. направ. i	Главные удлинен. λ_i	Глобальн. напряж. B_i 10^{-3} $н/см^2$	Коэффициенты b_{ij} 10^{-3} $н/см^2$		
					b_{i1}	b_{i2}	b_{i3}
		1	1	0	27	14	14
1	0, 0, 0	2	1	0	14	27	14
		3	1	0	14	14	27
		1	1.21	5.0	23	14	14
2	1, 0, 0	2	1	4.4	30	27	14
		3	1	4.4	30	14	27
		1	1.4641	12.0	47	14	14
3	2, 0, 0	2	1	9.0	16	27	14
		3	1	9.0	16	14	27
		1	0.81	− 3.0	3	14	14
4	−1, 0, 0	2	1	− 2.4	10	27	14
		3	1	− 2.4	10	14	27
		1	0.6561	− 7.9	46	14	14
5	−2, 0, 0	2	1	− 7.0	36	27	14
		3	1	− 7.0	36	14	27
		1	1	6.4	27	6	6
6	0, 1, 1	2	1.21	10.6	14	35	42
		3	1.21	10.6	14	42	35
		1	1	10.6	27	2	36
7	0, 1, 2	2	1.21	15.0	14	33	2
		3	1.4641	16.5	14	31	24
		1	1	− 4.9	27	11	11
8	0, −1, −1	2	0.81	− 6.4	14	13	20
		3	0.81	− 6.4	14	20	13
		1	1	− 9.2	27	8	32
9	0, −1, −2	2	0.81	−10.5	14	8	21
		3	0.6561	−11.5	14	22	38
		1	1	0.8	27	18	22
10	0, 1, −1	2	1.21	1.4	14	11	22
		3	0.81	− 0.3	14	13	20
		1	1	− 3.0	27	26	16
11	0, 1, −2	2	1.21	− 2.4	14	19	16
		3	0.6561	− 2.4	14	10	30
		1	1	5.0	27	24	26
12	0, 2, −1	2	1.4641	9.0	14	65	16
		3	0.81	2.9	14	21	34
		1	1.21	6.3	28	35	29
13	1, 1, −1	2	1.21	6.3	35	28	29
		3	0.81	2.7	16	16	10
		1	1.21	2.2	25	32	12
14	1, 1, −2	2	1.21	2.2	32	25	12
		3	0.6561	− 1.0	31	31	27
		1	0.81	− 3.4	15	17	16
15	−1, −1, 1	2	0.81	− 3.4	17	15	16
		3	1.21	− 1.7	17	17	5
		1	0.81	1.0	13	5	28
16	−1, −1, 2	2	0.81	1.0	5	13	28
		3	1.4641	5.4	22	22	66
		1	0.81	6.1	18	18	18
17	−1, 1, 2	2	1.21	12.1	15	44	23
		3	1.4641	14.4	7	40	53

Тензор деформации γ_{ij} и главные удлинения деформации λ_i определяются следующими выражениями [5]

$$\gamma_{11}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{(r')^2}\right),\quad \gamma_{22}=\frac{1}{2}\left(r^2-\lambda^2k^2\right),\quad \gamma_{33}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$\gamma_{12}=\gamma_{23}=\gamma_{31}=0,\quad r'=\frac{dr(X_1)}{dX_1} \tag{2.2}$$

$$\lambda_1=r',\quad \lambda_2=\frac{r}{\lambda k},\quad \lambda_3=\lambda \tag{2.3}$$

Если в какой-то точке деформированного тела λ_i находится в пределах

$$\begin{aligned}
&\lambda^{(\alpha)}(1-e)\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda^{(\alpha)}(1+e)\\
&\lambda^{(\beta)}(1-e)\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda^{(\beta)}(1+e)\\
&\lambda^{(\gamma)}(1-e)\leqslant\lambda_3\leqslant\lambda^{(\gamma)}(1+e)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

то деформированное состояние в этой точке соответствует подобласти (α,β,γ). Тогда относительные удлинения e_i, соответствующие этой подобласти, выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&e_1=\frac{\lambda_1}{\lambda^{(\alpha)}}-1=\frac{r'}{\lambda^{(\alpha)}}-1,\qquad e_2=\frac{\lambda_2}{\lambda^{(\beta)}}-1=\frac{r}{\lambda^{(\beta)}k\lambda}-1\\
&e_3=\frac{\lambda}{\lambda^{(\gamma)}}-1,\ \text{причем}\ -e\leqslant e_1,\ e_2,\ e_3\leqslant e
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Подставляя эти значения e_i в (1.2), можно найти выражения физических компонентов напряжений в виде

$$\begin{aligned}
&\sigma_i=\frac{b_{i1}}{\lambda^{(\alpha)}}r'+\frac{b_{i2}}{\lambda^{(\beta)}k\lambda}r+\frac{b_{i3}}{\lambda^{(\gamma)}}\lambda+D_i\\
&D_i=B_i-b_{i1}-b_{i2}-b_{i3}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где, для упрощения, идентификационные метки (α,β,γ) опущены.

Подставляя соответствующие значения σ_i из (2.6) в уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_1}{dr}+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{r}=0 \tag{2.7}$$

и принимая во внимание, что $\dfrac{d}{dr}=\dfrac{1}{r'}\dfrac{d}{dX_1}$, можно найти

$$rr''+A_1(r')^2+A_2r'+A_3r'r=0 \tag{2.8}$$

где

$$A_1 = \frac{b_{11} - b_{21}}{b_{11}}$$

$$A_2 = \frac{\lambda^{(\alpha)}}{b_{11}} \left((b_{11} - b_{21}) \frac{\lambda}{\lambda^{(\gamma)}} + B_1 - B_2 - b_{11} + b_{21} - b_{12} + b_{22} - b_{13} + b_{23} \right)$$

$$A_3 = \frac{\lambda^{(\alpha)}}{\lambda^{(\beta)} k\lambda} \frac{2b_{12} - b_{22}}{b_{11}}, \qquad r'' = \frac{d^2 r(X_1)}{dX_1} \tag{2.9}$$

После разрешения уравнения (2.8) относительно r' получается

$$r' = cr^{-A_1} - A_4 r - A_5 \tag{2.10}$$

откуда

$$X_1(r) = \int \frac{dr}{cr^{-A_1} - A_4 r - A_5} + c_1$$

где

$$A_4 = \frac{A_2}{A_1 + 1}, \qquad A_5 = \frac{A_3}{A_1} \tag{2.11}$$

c и c_1 — постоянные интегрирования.

Таким образом, задача определения деформированного состояния (нахождения функции $r(X_1)$) в подобласти (α, β, γ) приводится к решению уравнения (2.10) с соответствующими граничными условиями (значения r и r') в одной из границ подобласти (α, β, γ).

Если известны конкретные граничные условия деформированного тела, то задача решается последовательным определением деформированных состояний и границ получившихся подобластей, начиная с той граничной цилиндрической поверхности панели, где известны значения $r = r'$ и нормального давления $\sigma_1 = P_0$. При этом выбор номера первой подобласти (α, β, γ) производится следующим образом. Для граничной точки этой подобласти по формуле (2.3) вычисляются значения λ_2 и λ_3 и с помощью выражений (2.4) определяются $\lambda^{(\beta)}$ и $\lambda^{(\gamma)}$. Потом, принимая какое-то ориентировочное значение для $\lambda^{(\alpha)}$, по формуле (2.6), соответствующей принятой подобласти (α, β, γ), вычисляется значение $r' = \lambda_1$ для граничной точки первой подобласти. Если найденное значение λ_1 соответствует принятому значению $\lambda^{(\alpha)}$, то есть выполняется условие $\lambda^{(\alpha)}(1 - e) \leqslant \lambda_1 < \lambda^{(\alpha)}(1 + e)$, то выбранный номер подобласти (α, β, γ) правильный. В противном случае исправляется принятое значение $\lambda^{(\alpha)}$ и повторяются указанные действия для доказательства правильности выбора первой зоны.

Напряженное состояние определяется с помощью (2.6).

Решение задачи иллюстрируется в следующем пункте на численном примере.

3. Пусть прямоугольный параллелепипед из упругого изотропного материала, который при применении кусочно-линейного закона характери-

зуется упругими постоянными, приведенными в табл. 1, в системе прямоугольных декартовых координат (X_1, X_2, X_3) определяется

$$X_1 = a_1 = 0, \qquad X_1 = a_2 = 10 \text{ см}$$
$$X_2 = \pm b = \pm 50 \text{ см}, \quad X_3 = \pm c = \pm 50 \text{ см}$$

Параллелепипед деформируется в круглую цилиндрическую трубу с внутренним радиусом $r_1 = 12$ *см*, на внутренней цилиндрической поверхности которой действует нормальное давление $P_1 = 1000$ *н/см²* и в направлении своей оси труба растягивается с коэффициентом растяжения $\lambda = 1.21$.

Выражения физических компонентов напряжений (2.6) принимают следующий вид:

$$\sigma_i = \frac{b_{i1}}{\lambda^{(\alpha)}} r' + \frac{b_{i2} r}{15.9155\, \lambda^{(\beta)}} + D_i \tag{3.1}$$

$$D_i = B_i - b_{i1} - b_{i2}$$

Здесь подставлены значения $\lambda^{(\gamma)} = \lambda^{(1)} = \lambda = 1.21$, $\lambda k = 15.91555$ (последнее вычисляется из второго выражения (2.1) при значениях $X_2 = 50$ *см* и $\theta = \pi$).

Для определения номера первой подобласти, которая начинается с внутренней поверхности трубы ($r_1 = 12$ *см*), для точки этой поверхности из (2.3) вычисляется $\lambda_2 = r/\lambda k = 0.75398$. Следовательно, $\lambda^{(\beta)} = \lambda^{(-1)} = 0.81$, так как выполняется условие $(1-0.1)\,0.81 \leqslant 0.75398 \leqslant (1+0.1)0.81$. Принимая, что $\lambda^{(\alpha)} = 1$ и что первой подобласти соответствует номер $(0, -1, 1)$, согласно табл. 1 берутся следующие постоянные:

$$\begin{array}{llll}
B_1 = 0.8 & b_{11} = 27 & b_{12} = 22 & b_{13} = 18 \\
B_2 = -0.3 & b_{21} = 14 & b_{22} = 20 & b_{23} = 13 \\
B_3 = 1.4 & b_{31} = 14 & b_{32} = 22 & b_{33} = 11
\end{array} \tag{3.2}$$

умноженные на 10^3 *н/см²*.

Подставляя эти значения в (3.1), можно найти

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= 27000\, r' + 1706.54\, r - 48200 \\
\sigma_2 &= 14000\, r' + 1551.40\, r - 34300 \\
\sigma_3 &= 14000\, r' + 1706.54\, r - 34600
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Подставляя в первое уравнение (3.3) $r = 12$ *см* и $\sigma_1 = -P_1 = -1000$ *н/см²*, находим $\lambda_1 = r'\big|_{X_1=0} = 0.989686$, а этому значению соответствует $\lambda^{(\alpha)} = 1$. Следовательно, выбранный номер $(0, -1, 1)$ для первой зоны правильный. Тогда уравнение (2.10) принимает следующий вид:

$$r' - c r^{-0.48148} + 0.046542\, r - 1.06924 = 0 \tag{3.4}$$

Здесь подставлены значения постоянных $A_1 = 0.48148$, $A_4 = 0.046542$, $A_5 = -1.06924$, которые вычисляются из (2.9) и (2.10). Постоянная $c = 1.58451$ вычисляется из условия $r' = 0.989686$ при $r = 12$ *см*.

Затем, принимая во внимание, что $r = 12$ *см* при $X_1 = 0$, численным методом интегрируется уравнение (3.4) по X_1 до получения таких значений r и r', которые являются граничными для зоны (0, —1, 1). Результататы вычислений приведены в табл. 2. На основании (2.3) и (2.4) вычисляются граничные значения для λ_1 и λ_2: для подобласти (0, —1, 1) граничным является значение $r' = \lambda_1 = \lambda^{(+1}$ $(1-e) = 1-0.1 = 0.9$, после чего начинается другая подобласть с номером (—1, —1, 1).

Заметим, что в табл. 2, для упрощения составления таблицы, границы подобластей незначительно смещены. Например, подобласть (—1, —1, 1) начинается со значения $r' = 0.89857$ вместо $r' = 0.9$. Такие очень малые отклонения при выборе границ областей несущественно влияют на результаты вычислений и при условиях приближенности применяемого физического закона вполне допустимы.

Из табл. 1, определяя упругие постоянные и проведя соответствующие вычисления для подобласти (—1, —1, 1), можно получить

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 18518.50\, r' + 1318.70\, r - 35400 \\ \sigma_2 &= 20987.65\, r' + 1163.55\, r - 35400 \\ \sigma_3 &= 20987.65\, r' + 1318.70\, r - 35700 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$r' - 1.507274\, r^{0.13333} - 0.091831\, r = 0 \tag{3.6}$$

причем при $X_1 = 1.5$ *см*, $r = 13.4191$ *см*.

Поступая аналогичным образом, интегрируем уравнение (3.6) до границы зон (—1, —1, 1) и (—1, 0, 1), где λ_2 достигает своего предельного значения $\lambda_2 = 0.9$ и $r = \lambda_2 k \lambda = 14.3240$ *см*. Для подобласти (—1, 0, 1) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 24691.40\, r' + 879.65\, r - 34300 \\ \sigma_2 &= 27160.50\, r' + 1696.46\, r - 48200 \\ \sigma_3 &= 27160.50\, r' + 879.65\, r - 34600 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$r' - 3.645\, r^{0.1} + 0.002827\, r - 5.6295 = 0 \tag{3.8}$$

при $X_1 = 2.6$ *см*, $r = 14.37313$ *см*.

В подобласти (—1, 0, 1) λ_1 и λ_2 почти в одном месте достигают своих предельных значений $\lambda_1 = r' = 0.729$ и $\lambda_2 = 0.729$, ($r = 17.507$), и поэтому после подобласти (—1, 0, 1) сразу начинается подобласть (—2, 1, 1), для которой

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 41152.26\, r' + 1609.74\, r - 59000 \\ \sigma_2 &= 18289.89\, r' + 1298.18\, r - 34800 \\ \sigma_3 &= 18289.89\, r' + 1661.67\, r - 41800 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$r' - 0.95024\, r^{-0.55555} + 0.030013\, r - 1.05851 = 0$$

при $X_1 = 6.6$ *см*, $r = 17.4845$ *см*.

Напряжения определяются из выражений (3.3), (3.5), (3.7) и (3.9).

Из табл. 2 определяются нормальное давление $P_z = 574.3$ $н/см^2$, действующее на внешней цилиндрической поверхности $r = 19.8177$ *см*, и результирующая сила $N = 9303$ *н*, действующая на торцевых плоскостях трубы.

Таблица 2

№ подобл.	X_1 *см*	r *см*	r'	Напряжения в 10^{-3} $н/см^2$		
				σ_1	σ_2	σ_3
	0.0	12.00000	0.98970	−1.00000	−1.82740	−0.26620
	0.2	12.19730	0.97678	−1.01225	−1.70219	−0.11038
	0.4	12.39201	0.96411	−1.02206	−1.57750	0.04450
	0.6	12.58420	0.95168	−1.02970	−1.45335	0.19846
0, −1, 1	0.8	12.77393	0.93949	−1.03506	−1.32966	0.35157
	1.0	12.96122	0.92753	−1.03837	−1.20654	0.50374
	1.2	13.14614	0.91579	−1.03978	−1.08402	0.69495
	1.4	13.32870	0.90426	−1.03955	−0.96221	0.80507
	1.5	13.41910	0.89857	−1.03691	−0.90163	0.87967
	1.5	13.41910	0.89857	−1.06410	−0.92805	0.85460
	1.6	13.50895	0.89221	−1.06340	−0.95700	0.83960
	1.8	13.68676	0.87960	−1.06240	−1.01480	0.80942
−1, −1, 1	2.0	13.86206	0.86713	−1.06210	−1.07250	0.77887
	2.2	14.03486	0.85480	−1.06260	−1.13024	0.74797
	2.4	14.20521	0.84261	−1.06370	−1.18788	0.71677
	2.6	14.37313	0.83055	−1.06560	−1.24560	0.68510
	2.6	14.37313	0.83055	−1.14923	−1.25811	0.60147
	2.8	14.53894	0.82463	−1.14882	−1.13774	0.58680
	3.0	14.70357	0.81679	−1.14220	−1.01706	0.57307
	3.2	14.86704	0.81305	−1.14601	−0.89550	0.56110
	3.4	15.02937	0.80741	−1.14263	−0.77347	0.55054
	3.6	15.19057	0.80187	−1.13818	−0.65109	0.54125
	3.8	15.35065	0.79658	−1.13237	−0.52802	0.53357
	4.0	15.50967	0.79099	−1.12542	−0.40447	0.52723
−1, 0, 1	4.2	15.66760	0.78568	−1.11767	−0.28084	0.52185
	4.4	15.82447	0.78046	−1.10856	−0.15649	0.51808
	4.6	15.98031	0.77531	−1.09863	−0.03198	0.51530
	4.8	16.13511	0.77022	−1.08813	0.09240	0.51323
	5.0	16.28891	0.76522	−1.07629	0.21751	0.51273
	5.2	16.44170	0.76029	−1.06351	0.34293	0.51335
	5.4	16.59351	0.75543	−1.05006	0.46836	0.51479
	5.6	16.74436	0.75063	−1.03588	0.59392	0.51712
	5.8	16.89425	0.74590	−1.02081	0.71973	0.52052
	6.0	17.04319	0.74123	−1.00508	0.84554	0.52472
	6.2	17.19121	0.73663	−0.98846	0.97176	0.52998
	6.4	17.33830	0.73209	−0.97117	1.09800	0.53607
	6.6	17.48450	0.72760	−0.95337	1.22412	0.54278
	6.6	17.48450	0.72760	−0.91209	1.20618	0.56180
	6.8	17.62975	0.72235	−0.89432	1.29872	0.70714
	7.0	17.77395	0.71716	−0.87578	1.39100	0.85183
	7.2	17.91713	0.71004	−0.85697	1.48250	0.99290
	7.4	18.05928	0.70690	−0.83869	1.57371	1.13831
	7.6	18.20040	0.70184	−0.81976	1.66441	1.28026
	7.8	18.34052	0.69683	−0.80037	1.75468	1.42146
	8.0	18.47964	0.69187	−0.78054	1.84457	1.56192
−2, 1, 1	8.2	18.61776	0.68694	−0.76109	1.93370	1.70126
	8.4	18.75491	0.68206	−0.74113	2.02250	1.83991
	8.6	18.89108	0.67727	−0.71965	2.11167	1.97857
	8.8	19.02628	0.67244	−0.70017	2.19886	2.11491
	9.0	19.16053	0.66769	−0.67955	2.28625	2.25110
	9.2	19.29383	0.66298	−0.65880	2.37315	2.38646
	9.4	19.42619	0.65831	−0.63791	2.45957	2.52099
	9.6	19.55762	0.65368	−0.61650	2.54567	2.65485
	9.8	19.68813	0.64969	−0.59568	2.63099	2.78762
	10.0	19.81772	0.64454	−0.57432	2.71600	2.91974

Заметим, что развитая в [3] теория предусматривает небольшие разрывы напряжений на границах соседних подобластей, так как при определении упругих постоянных использовались условия непрерывности напряжений лишь в определенных местах этих границ.

Точность решения задач зависит от величин этих разрывов, которые в свою очередь зависят от выбора малой величины ε. В нашем примере разность соответствующих напряжений не превышает 10% от этих напряжений.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 25 IX 1980

Կ. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԿՏՈՐ ԱՌ ԿՏՈՐ ԳԾԱՅԻՆ ՆՅՈՒԹԻՑ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԶՈՒԳԱՀԵՌԱՆԻՍՏԻ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԾՌՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ՄԵԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐԸ

Ամփոփում

Կատարվում է առաձգական, սեղմելի նյութի առաձգական հաստատունների որոշման ուսումնասիրությունը լարումների և դեֆորմացիաների միջև կտոր առ կտոր գծային կապի և մեծ դեֆորմացիաների առկայության պայմաններում և բերվում է այդ հաստատունների համար կատալոգ կազմելու օրինակ։

Դիտարկվում է ուսումնասիրվող նյութից պատրաստված ուղղանկյուն զուգահեռանիստի գլանային ծռման խնդիրը մինչև նրա դեֆորմացված և լարվածային վիճակների որոշման համար պարզ առնչությունների ստանալը։ Որպես թվային օրինակ, լուծված է զուգահեռանիստի մինչև կլոր գլանային խողովակի վերածման խնդիրը։

THE PROBLEM OF LARGE ELASTIC DEFORMATIONS FOR CYLINDRICAL FLEXURE OF A CUBOID FROM PIECEWISE LINEAR MATERIAL

K. E. MKRTCHIAN

Summary

The investigation to determine the elastic constants for elastic compressible material, considering the piecewise linear law of relations between stresses and strains, is being continued and an example of compiling a catalogue for these constants is presented.

The problem for a cylindrical flexure of a cuboid from the above material is considered up to deriving simple expressions to define the

strain-stress states. The problem for flexure of a cuboid to a circular cylindrical tube is solved as a numerical example.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., Изд. «Наука», 1970.
2. *Заремба Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. М., Изд. «Наука», 1966.
3. *Мкртчян Р. Е.* Кусочно-линейный закон связи между напряжениями и деформациями при больших деформациях. Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1973, т. 26, № 3.
4. *Green A. E., Zerna W.* Theoretical Elasticity. Oxford, Clarendon Press, 1954.
5. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., Изд. «Мир», 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 5, 1981 Механика

Е. В. КОВАЛЕНКО

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО ТИПА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Предложен метод исследования интегрального уравнения, к которому приводится ряд квазистатических смешанных задач теории упругости, вязкоупругости и гидромеханики. Особенностью данного уравнения в отличие от ранее рассматривающихся [1] является то, что в левую часть его входят операторы Фредгольма и Вольтерра. Показано, что исходное интегральное уравнение эквивалентно системе трех уравнений (одного однородного и двух неоднородных), а также установлена структура его решения и доказана однозначная разрешимость в определенном классе функций. Приведены примеры приложения рассматриваемого интегрального уравнения к периодическим контактным задачам теории упругости при наличии абразивного износа и к смешанным задачам о тонких полимерных покрытиях.

1. Исследуется интегральное уравнение вида

$$\mu\varphi(x, t) + \int_{-1}^{1} \varphi(\xi, t) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi + \int_{0}^{t} \varphi(x, \tau) F(t, \tau) d\tau =$$

$$= \pi[\gamma(t) + \beta(t) x - f(x)] \tag{1.1}$$

$$(|x| \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T < \infty, \quad 0 < \lambda, \mu < \infty)$$

$$K(y) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} L(u) e^{iuy} du \quad \left(y = \frac{\xi - x}{\lambda}\right) \tag{1.2}$$

при следующих условиях:

$$P(t) = \int_{-1}^{1} \varphi(x, t)\, dx, \qquad M(t) = \int_{-1}^{1} x\varphi(x, t)\, dx \tag{1.3}$$

Будем считать, что функция $L(u)$ непрерывна, вещественна и четна на действительной оси, а также удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered} L(u) > 0 \quad (|u| < \infty), \quad L(u) = A + O(u^2) \quad (u \to 0) \\ L(u) = B|u|^{-1}[1 + o(|u|^{-1})] \quad (|u| \to \infty) \end{gathered} \tag{1.4}$$

где A, B — положительные постоянные. Предположим еще, что $f(x) \in L_2(-1, 1)$, а $F(t, \tau)$ либо непрерывная функция при $0 \leqslant \tau, t \leqslant T < \infty$, либо имеет интегрируемую степенную особенность при $t = \tau$.

Здесь $L_2(-1, 1)$ — пространство суммируемых с квадратом на отрезке $[-1, 1]$ функций с обычной нормой. Ограничения, налагаемые на функции $\gamma(t)$ и $\beta(t)$, будут указаны ниже.

Заметим, что при $t = 0$ интегральное уравнение (1.1), (1.2) принимает известный из теории смешанных задач вид [1]

$$\mu\varphi(x, 0) + \int_{-1}^{1} \varphi(\xi, 0) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi[\gamma(0) + \beta(0)x - f(x)] \quad (1.5)$$

$$(|x| \leqslant 1)$$

Изучим теперь свойства ядра $K(y)$, необходимые в дальнейшем.

Лемма. При $y \to 0$ справедлива оценка $K(y) = O(\ln|y|)$. При $|y| > \varepsilon > 0$ функция $K(y)$ непрерывна.

Доказательство леммы не вызывает затруднений и может быть выполнено с помощью известных теорем из теории интегралов Фурье [2], если воспользоваться асимптотическими формулами (1.4).

Согласно неравенству

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left| K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right)\right|^2 d\xi dx = D^2 < \infty \qquad (D = \mathrm{const}) \qquad (1.6)$$

вытекающему из леммы, докажем теорему.

Теорема 1. Оператор

$$H\varphi = \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi \qquad (0 < \lambda < \infty)$$

является самосопряженным, вполне непрерывным и положительно определенным оператором, действующим из $L_2(-1, 1)$ в $L_2(-1, 1)$.

Первые два утверждения теоремы непосредственно следуют из (1.2) и (1.6). Докажем положительную определенность оператора H. Составим скалярное произведение

$$(\varphi, H\varphi)_{L_2(-1,1)} = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\infty} L(u\lambda) |\Phi(u)|^2 du$$

$$\Phi(u) = \int_{-1}^{1} \varphi(x) e^{iux} dx$$

В силу первой формулы (1.4) можем утверждать, что $(\varphi, H\varphi)_{L_2(-1,1)} =$

$=\delta^2>0$ ($\delta=\mathrm{const}$), откуда и следует положительная определенность оператора H.

Перейдем теперь к построению решения исходного интегрального уравнения (1.1) и представим его в форме

$$\varphi(x, t)=\varphi_0(x, t)+\varphi_1(x, t) \tag{1.7}$$

где $\varphi_j(x, t)$ ($j=0, 1$) определяются, соответственно, из

$$\mu[\varphi_0(x, t)-\varphi_0(x, 0)]+\int_{-1}^{1}[\varphi_0(\xi, t)-\varphi_0(\xi, 0)]K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi+$$

$$+\int_0^t\varphi_0(x, \tau)F(t, \tau)d\tau=\pi[\gamma(t)+\beta(t)x-\gamma(0)-\beta(0)x] \tag{1.8}$$

$$\mu[\varphi_1(x, t)-\varphi_1(x, 0)]+\int_{-1}^{1}[\varphi_1(\xi, t)-\varphi_1(\xi, 0)]K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi+$$

$$+\int_0^t\varphi_1(x, \tau)F(t, \tau)d\tau=0 \tag{1.9}$$

$$(|x|\leqslant 1, \quad 0\leqslant t\leqslant T<\infty)$$

Нетрудно заметить, что если почленно сложить (1.5), (1.8), (1.9) и воспользоваться представлением (1.7), то придем к исходному интегральному уравнению (1.1).

Изложим теперь алгоритм построения решений (1.8), (1.9), а следовательно, и первоначального уравнения (1.1) в классе функций $L_2(-1, 1)\times C(0, T)$. $C(0, T)$ — пространство непрерывных на отрезке $[0, T]$ функций.

2. Пусть $\gamma(t), \beta(t)\in C(0, T)$. При каждом $t>0$ разложим решения $\varphi_j(x, t)$ ($j=0, 1$) интегральных уравнений (1.8), (1.9) в ряд Фурье по собственным функциям $\{\varphi_k(x)\}$ оператора H

$$\varphi_j(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}[a_{2k}^{(j)}(t)\varphi_{2k}(x)+a_{2k-1}^{(j)}(t)\varphi_{2k-1}(x)] \tag{2.1}$$

$$\alpha_k\int_{-1}^{1}\varphi_k(\xi)K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\varphi_k(x) \quad (|x|\leqslant 1, \quad k\geqslant 1) \tag{2.2}$$

($\varphi_{2k}(x)$, $\varphi_{2k-1}(x)$, соответственно, четные и нечетные функции).

Заметим, что в силу теоремы 1, согласно общей теории самосопряженных, вполне непрерывных, положительно определенных операторов в гильбертовом пространстве [3]: 1) система собственных функций

$\{\varphi_k(x)\}$ $(k \geqslant 1)$ оператора H ортогональна и полна в $L_2(-1, 1)$, 2) все характеристические числа α_k оператора H вещественны, положительны и $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n \leqslant \ldots < \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \infty$.

Подставляя теперь разложения (2.1) в (1.8), (1.9) и приравнивая в полученном соотношении коэффициенты левой и правой частей при собственных функциях оператора H одинакового номера, получим уравнения

$$b_k(t) + \beta_k \int_0^t b_k(\tau) F(t, \tau) d\tau = 1 \tag{2.3}$$

$$a_{2k}^{(0)}(t) + \beta_{2k} \int_0^t a_{2k}^{(0)}(\tau) F(t, \tau) d\tau = \pi\delta_{2k}\beta_{2k}[\gamma(t) - \gamma(0)] \tag{2.4}$$

$$a_{2k-1}^{(0)}(t) + \beta_{2k-1} \int_0^t a_{2k-1}^{(0)}(\tau) F(t, \tau) d\tau = \pi\delta_{2k-1}\beta_{2k-1}[\beta(t) - \beta(0)] \tag{2.5}$$

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2k}\varphi_{2k}(x), \qquad x = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2k-1}\varphi_{2k-1}(x)$$

$(k \geqslant 1,\ 0 \leqslant t < T < \infty,\ \beta_k = \alpha_k(1 + \mu\alpha_k)^{-1},\ a_k^{(1)}(t) = a_k^{(1)}(0)\, b_k(t))$
которые, согласно условиям, наложенным на $F(t, \tau)$, $\gamma(t)$, $\beta(t)$ однозначно разрешимы в $C(0, T)$ при любых значениях параметров β_k. В (2.4), (2.5) в силу произвола постоянных $a_k^{(0)}(0)$ положено $a_k^{(0)}(0) = 0$.

Не нарушая общности рассуждений, рассмотрим далее четный случай уравнения (1.1) ($f(x)$ — четная функция, $\beta(t) = 0$), имея в виду, что для нечетного случая все может быть проделано аналогично.

Для нахождения собственных функций оператора H воспользуемся методом Ритца [8]. В качестве последовательности координатных элементов возьмем систему ортонормированных полиномов Лежандра

$$\varphi_{2k}(x) = \sum_{m=0}^{N} g_m^{(2k)} P_{2m}^{*}(x), \qquad P_{2m}^{*}(x) = \sqrt{\frac{4m+1}{2}}\, P_{2m}(x) \tag{2.6}$$

Известно [3], что они составляют базис в $L_2(-1, 1)$.

Представляя функцию $K(y)$ в виде

$$K(y) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} e_{ij}(\lambda)\, P_{2i}^{*}(\xi)\, P_{2j}^{*}(x) \tag{2.7}$$

и используя интеграл [4]

$$\int_0^1 P_{2n}(x) \cos ux\, dx = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2u}}\, J_{1/2+2n}(u)$$

запишем коэффициенты разложения в (2.7) в форме

$$e_{ij}(\lambda) = (-1)^{i+j}\pi\lambda\sqrt{(4i+1)(4j+1)}\int_0^\infty L(u)\,J_{1/2+2i}\left(\frac{u}{\lambda}\right)J_{1/2+2j}\left(\frac{u}{\lambda}\right)du$$

Подставляя теперь (2.6), (2.7) в (2.2), используя условие ортогональности полиномов Лежандра и приравнивая в полученном соотношении коэффициенты левой и правой частей при многочленах одинакового номера, получим

$$a_{2k}\sum_{m=0}^{N} g_m^{(2k)} e_{jm}(\lambda) = g_j^{(2k)} \qquad (k \geqslant 1, \quad j = 1, 2, \dots, N) \tag{2.8}$$

Чтобы существовало нетривиальное решение системы (2.8), приравняем нулю ее определитель; придем к уравнению для нахождения первых N характеристических чисел a_{2k} оператора H. Определив a_{2k}, найдем затем $g_m^{(2k)}$, выразив их через $g_0^{(2k)}$

$$g_m^{(2k)} = g_0^{(2k)} h_m^{(2k)} \quad (h_0^{(2k)} = 1) \tag{2.9}$$

В результате получим

$$\varphi_{2k}(x) = g_0^{(2k)}\psi_{2k}(x), \quad \psi_{2k}(x) = \sum_{m=0}^{N} h_m^{(2k)} P_{2m}^{*}(x) \quad (k \geqslant 1) \tag{2.10}$$

Постоянные $g_0^{(2k)}$ в (2.9), (2.10) должны быть подобраны из условия нормировки собственных функций $\varphi_{2k}(x)$ оператора H. Итак, имеем

$$\int_{-1}^{1}\varphi_{2k}(x)\,\varphi_{2n}(x)\,dx = g_0^{(2k)} g_0^{(2n)}\sum_{m=0}^{N} h_m^{(2k)} h_m^{(2n)} = \delta_k^n \tag{2.11}$$

δ_k^n — символ Кронекера.

После нахождения $g_0^{(2k)}$ из (2.11) будут найдены приближения искомых собственных функций оператора H. Заметим, что согласно теореме 1 процесс Ритца для интегрального уравнения (2.2) будет сходящимся при $N \to \infty$.

Удовлетворим теперь интегральному уравнению (1.5) соответствующим выбором счетного множества постоянных $a_{2k}^{(1)}(0)$ $(k \geqslant 1)$.

Представим $f(x)$ ее рядом Фурье по собственным функциям оператора H

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k}\,\varphi_{2k}(x) \tag{2.12}$$

Подставляя затем

$$\varphi(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}^{(1)}(0)\,\varphi_{2k}(x)$$

и соотношение (2.12) в уравнение (1.5), используя формулы (2.2) и $\delta_{2k} = \sqrt{2}\,g_0^{(2k)}$, а также приравнивая в полученном выражении коэффициенты левой и правой частей при собственных функциях оператора H одинакового номера, получим

$$a_{2k}^{(1)}(0) = \pi\beta_{2k}[\sqrt{2}\, g_0^{(2k)}\gamma(0) - f_{2k}] \quad (k \geqslant 1) \tag{2.13}$$

После определения $a_{2k}^{(1)}(0)$ из (2.13) будет построена функция $\varphi_1(x, t)$ согласно (2.1) ($j = 1$), а вместе с тем и формальное решение задачи $\varphi(x, t)$ по формуле

$$\varphi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \{\pi\beta_{2k}[\sqrt{2}\, g_0^{(2k)}\gamma(0) - f_{2k}]\, b_{2k}(t) + a_{2k}^{(0)}(t)\}\, \varphi_{2k}(x) \tag{2.14}$$

Теорема 2. Ряд (2.14) сходится в $L_2(-1, 1)$ равномерно по t на $[0, T]$ при всех $T > 0$ и определяет обобщенное решение [5] уравнения (1.1), если выполнено неравенство

$$\sum_{k=j}^{\infty} \{\pi\beta_{2k}[\sqrt{2}\, g_0^{(2k)}\gamma(0) - f_{2k}]\, b_{2k}(t) + a_{2k}^{0}(t)\}^2 < \varepsilon \quad (j \to \infty) \tag{2.15}$$

Действительно, оценим остаток ряда (2.14)

$$\left\| \sum_{k=j}^{\infty} [a_{2k}^{(1)}(0)\, b_{2k}(t) + a_{2k}^{(0)}(t)]\, \varphi_{2k}(x) \right\|_{L_2(-1, 1)}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k, i=j}^{\infty} [a_{2i}^{(1)}(0)\, b_{2i}(t) + a_{2i}^{(0)}(t)]\, [a_{2k}^{(1)}(0)\, b_{2k}(t) + a_{2k}^{(0)}(t)]\, (\varphi_{2i}, \varphi_{2k})_{L_2(-1, 1)} =$$

$$= \sum_{k=j}^{\infty} [a_{2k}^{(1)}(0)\, b_{2k}(t) + a^{(0)}(t)]^2$$

Если выполнено неравенство (2.15), то ряд (2.14) сходится в $L_2(-1, 1)$ равномерно по $t \in [0, T]$, $T > 0$ и свойства обобщенного решения (см. [5] стр. 500) выполнены. Теорема доказана.

Заметим, что для проверки неравенства (2.15) необходимо задавать конкретный вид функции $F(t, \tau)$. Это будет проделано дальше.

Отметим также, что из формул (1.3) следует

$$P(t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \{\pi\beta_{2k}[\sqrt{2}\, g_0^{(2k)}\gamma(0) - f_{2k}]\, b_{2k}(t) + a_{2k}^{(0)}(t)\}\, g_0^{(2k)}$$

$$P(0) = \pi\sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{2k}[\sqrt{2}\, g_0^{(2k)}\gamma(0) - f_{2k}]\, g_0^{(2k)}$$

и, таким образом, величина $\gamma(0)$ связана с $P(0)$.

3. Пусть теперь $P(t)$ и $M(t)$ — заданные функции переменной $t \in [0, T]$. В приложениях, как правило, представляет интерес случай $P(t) = P$, $M(t) = M$ (P, M = const), поэтому, не нарушая общности рассуждений, в дальнейшем ограничимся рассмотрением именно этого случая.

Представим функции $\gamma(t)$ и $\beta(t)$ в (1.1) в виде

$$\gamma(t) = \gamma_0(t) + \gamma_1(t), \quad \beta(t) = \beta_0(t) + \beta_1(t) \tag{3.1}$$

и будем по-прежнему искать его решение в форме (1.7). При этом интегральное уравнение (1.5) сохраняет свой вид, а два других (1.8), (1.9) перепишутся следующим образом:

$$\mu[\varphi_j(x, t) - \varphi_j(x, 0)] + \int_{-1}^{1} [\varphi_j(\xi, t) - \varphi_j(\xi, 0)] K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi +$$

$$+ \int_{0}^{t} \varphi_j(x, \tau) F(t, \tau) d\tau = \pi[\gamma_j(t) + \beta_j(t) x - \gamma_j(0) - \beta_j(0) x] \qquad (3.2)$$

$$(j = 0, 1; \quad |x| \leqslant 1; \quad 0 \leqslant t \leqslant T < \infty)$$

Подберем в (3.2) ($j = 0$) функции $\gamma_0(t)$ и $\beta_0(t)$ таким образом, чтобы решение его $\varphi_0(x, t) = \varphi_0(x)$ не зависело от t. Очевидно, это можно сделать, положив

$$\int_{0}^{t} F(t, \tau) d\tau = \gamma_0(t) - \gamma_0(0), \qquad \int_{0}^{t} F(t, \tau) d\tau = \beta_0(t) - \beta_0(0) \qquad (3.3)$$

$$\varphi_0(x) = \pi(C + Ex) \quad (C, E = \text{const})$$

Допустим теперь, что система функций $\{a_k(t)\}$, определяемая из уравнения (2.3), полна в $C(0, T)$ (верхний индекс у $a_k^{(1)}(t)$ будем опускать). Ищем решение уравнения (3.2) ($j = 1$) в виде (2.1), полагая $a_k(0) \equiv 1$. Тогда, представляя $\gamma_1(t)$ и $\beta_1(t)$ в форме

$$\gamma_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{2k} a_{2k}(t), \qquad \beta_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{2k-1} a_{2k-1}(t) \qquad (3.4)$$

подставляя (2.1), (3.4) в (3.2) ($j = 1$) и учитывая (2.3), получим

$$\alpha_n \int_{-1}^{1} h_n(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi - h_n(x) = g_n(x) \quad (|x| \leqslant 1; \quad n \geqslant 1) \quad (3.5)$$

$$\varphi_n(x) = \pi\gamma_n \alpha_n h_n(x), \qquad g_n(x) = \begin{cases} 1, & n = 2m \\ x, & n = 2m - 1 \end{cases}$$

Заметим, что условия (1.3) примут вид

$$P = P_0 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} P_k \gamma_{2k} \alpha_{2k} a_{2k}(t), \qquad P_0 = 2\pi C \qquad (3.6)$$

$$M = M_0 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} M_k \gamma_{2k-1} \alpha_{2k-1} a_{2k-1}(t), \quad M_0 = \pi E$$

$$P_k = \int_{-1}^{1} h_{2k}(x) dx = 0, \qquad M_k = \int_{-1}^{1} x h_{2k-1}(x) dx = 0 \qquad (k \geqslant 1)$$

Как и выше, рассмотрим далее четный случай уравнения (1.1), имея в виду, что для нечетного случая все может быть проделано аналогично.

Будем искать решение уравнения (3.5) в форме

$$h_{2k}(x) = \sqrt{2} \sum_{m=0}^{\infty} h_m^{(2k)} P_{2m}^{*}(x) \qquad (3.7)$$

Подставляя (3.7), (2.7) ($N \to \infty$) в (3.5), используя свойство ортогональности полиномов Лежандра и приравнивая в полученном соотношении коэффициенты левой и правой частей при многочленах одинакового номера, получим

$$\alpha_{2k} \sum_{m=0}^{\infty} h_m^{(2k)} e_{jm}(\lambda) = h_j^{(2k)} + \delta_0^j \qquad (k \geqslant 1; \quad j = 0, 1, \ldots) \qquad (3.8)$$

Согласно неравенству (1.6) можно утверждать, что оператор, стоящий в левой части (3.8), действует из полного пространства квадратично суммируемых последовательностей l_2 в l_2 и является там вполне непрерывным. Таким образом, если основной определитель системы (3.8) Δ отличен от нуля, то к ней применима теорема Гильберта [3] о ее разрешимости.

Кроме того, с учетом (3.7) из (3.6) найдем

$$P_k = 2h_0^{(2k)} = 0, \qquad h_0^{(2k)} = 0 \quad (k \geqslant 1) \qquad (3.9)$$

Условие (3.9) служит для определения неизвестных величин α_{2k}. Действительно, из системы (3.8) имеем $h_0^{(2k)} = \Delta_1/\Delta$, где Δ_1 — вспомогательный определитель, получающийся из Δ заменой в нем первой колонны элементами $\{1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$. Определитель Δ_1 — симметричный, поэтому корни его $\alpha = \alpha_{2k}$ $(k \geqslant 1)$ вещественны.

Определив числа α_{2k}, найдем затем из неоднородной системы (3.8) $h_m^{(2k)}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и, таким образом, построим последовательность функций $\{h_{2k}(x)\}$. Удовлетворим теперь выбором счетного множества постоянных γ_{2k} $(k \geqslant 1)$ интегральному уравнению (1.5). Представляя $f(x)$ в (1.5) в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k} P_{2k}^{*}(x) \qquad (3.10)$$

и подставляя (3.10), (2.7) ($N \to \infty$) в (1.5), получим

$$\mu X_{2n} + \sum_{m=0}^{\infty} e_{mn}(\lambda) X_{2m} = \pi\left[\sqrt{2}\, \delta_0^n \gamma(0) - f_{2n}\right] \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (3.11)$$

$$X_{2n} = \int_{-1}^{1} \varphi(x, 0) P_{2n}^{*}(x)\, dx \qquad (3.12)$$

Решив бесконечную алгебраическую систему (3.11), из соотношения (3.12) с учетом формулы

$$\varphi(x, 0) = \pi\sqrt{2}\,[CP_0^*(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{2k} a_{2k} \sum_{m=1}^{\infty} h_m^{(2k)} P_{2m}^*(x)]$$

будем иметь

$$X_{2n} = \pi\sqrt{2}\,(C\delta_0^n + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{2k} a_{2k} h_n^{(2k)}) \tag{3.13}$$

Заметим, что в системе (3.11) $\gamma(0)$ можно считать независимым от γ_{2k} ($k \geqslant 1$), ибо

$$\gamma(0) = \gamma_0(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{2k}$$

Отметим еще, что решения бесконечных алгебраических систем (3.8), (3.11), (3.13) можно получить методом редукции, который для указанных систем тоже можно обосновать.

После их решения функции $\varphi_{2k}(x)$ будут полностью определены, а вместе с ними будет определено и решение задачи $\varphi(x, t)$. Поскольку в ходе решения бесконечных систем (3.11), (3.13) постоянная C выразится через $\gamma(0)$, то постоянную P можно связать с $\gamma(0)$.

4. А. Рассмотрим плоскую контактную задачу теории упругости (плоская деформация) для упругого (G, ν) изотропного слоя толщины h, жестко защемленного по основанию с учетом изнашивания его поверхности, имеющего место при движении цилиндрического штампа ширины $2a$ в направлении своей образующей (зависимость от времени модуля скорости скольжения имеет вид $V = V_0 |\cos \omega t|$) и при наличии шероховатостей в области контакта [1, 6]. Предполагается, что износ носит абразивный характер, при котором количество удаленного материала пропорционально работе сил трения. Предполагается также, что в процессе изнашивания область контакта не изменяется, штамп не изнашивается, а сила трения связана с контактным давлением законом Кулона. При этом трением в области контакта в направлении, перпендикулярном образующей штампа, при определении упругих деформаций пренебрегаем. Не берем в расчет также инерционные силы, возникающие от движения штампа. Согласно [6, 7] в безразмерных переменных и обозначениях

$$\xi = a\xi', \quad x = ax', \quad \lambda = ha^{-1}, \quad t = a(\pi\varkappa\theta)^{-1}t', \quad \theta = G(1-\nu)^{-1}$$

$$\varkappa = k_1k_2V_0, \quad \omega = \pi\varkappa\theta a^{-1}\omega', \quad \mu = a\theta^{-1}\mu', \quad \gamma(t) = a\gamma'(t')$$

$$\beta(t) = \beta'(t'), \quad f(x) = af'(x'), \quad q(\xi, t) = \theta\varphi(\xi', t')$$

$$P(t) = aP'(t'), \quad M(t) = a^2M'(t')$$

(штрихи в дальнейшем опущены), будем иметь уравнение (1.1), в котором $F(t, \tau) = |\cos \omega\tau|$. Здесь $q(x, t)$ — контактное напряжение, возникающее под штампом под действием приложенных к нему силы $P(t)$ и момента $M(t)$, $\gamma(t) + \beta(t)x$ — жесткое перемещение штампа, $f(x)$ — форма его основания, k_1 — коэффициент пропорциональности между работой сил трения и количеством удаленного материала, k_2 — коэффициент трения. При этом в (1.2) следует положить

$$uL(u) = \frac{2\varkappa \operatorname{sh} 2u - 4u}{2\varkappa \operatorname{ch} 2u + 1 + \varkappa^2 + 4u^2} \qquad (\varkappa = 3 - 4\nu) \tag{4.1}$$

Решая (2.3), найдем

$$b_i(t) = \exp\left(-\beta_i \int_0^t |\cos \omega\tau|\, d\tau\right) \qquad (i > 1)$$

Предположим, что жесткое перемещение штампа постоянно по времени, то есть $\gamma(t) + \beta(t)x \equiv \gamma_0$ (рассматриваем четный случай) и $f(x) \equiv 0$ (штамп имеет плоское основание). Тогда формула (2.14) принимает вид

$$\varphi(x, t) = \pi\sqrt{2}\,\gamma_0 \sum_{k=1}^{\infty} g_0^{(2k)} \beta_{2k} \varphi_{2k}(x)\, e^{-\beta_{2k}\int_0^t |\cos\omega\tau|\, d\tau} \tag{4.2}$$

Легко проверить, что условие (2.15) выполнено и поэтому ряд (4.2) определяет обобщенное решение задачи.

В случае постоянных усилий, действующих на штамп, будем иметь

$$\begin{gathered}\left.\begin{aligned}\gamma_0(t) - \gamma_0(0)\\ \beta_0(t) - \beta_0(0)\end{aligned}\right\} = \int_0^t |\cos\omega\tau|\, d\tau\\ a_i(t) = \exp\left(-\beta_i \int_0^t |\cos\omega\tau|\, d\tau\right)\end{gathered} \tag{4.3}$$

после чего определим функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x, t)$ по формулам (2.1), (3.3), а вместе с тем построим решение задачи согласно (1.7).

В. Пусть поверхность упругого (G, ν) изотропного слоя толщины h, жестко защемленного по основанию, усилена по всей длине тонким покрытием в виде сцепленного с ней слоя очень малой толщины h^*, физико-механические свойства которого описываются уравнениями [1]

$$v(x, t) = h^* E^{-1} \left| q(x, t) + \int_{t_0}^t q(x, \tau) R(t, \tau)\, d\tau \right|$$

$$(|x| \leqslant a, \quad 0 \leqslant t \leqslant T < \infty)$$

где E — мгновенный модуль упругости, $q(x, t)$ — контактное давление (задача о штампе), отличное от нуля при $|x| \leqslant a$, $v(x, t)$ — вертикальное перемещение точек поверхности усиливающего слоя, $R(t, \tau)$ — ядро ползучести (последействия). Предположим, что

$$R(t,\tau)=\chi\frac{e^{-r(t-\tau)}}{(t-\tau)^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)}\quad(\chi,\ r,\ \alpha=\text{const},\quad 0<\alpha<1)\tag{4.4}$$

Тогда в безразмерных переменных и обозначениях, приведенных выше, с учетом

$$t=Ea(\pi h^{*}\theta\chi)^{-1}t',\qquad \mu=\pi h^{*}\theta(Ea)^{-1}$$

придем к уравнению (1.1), причем $F(t',\tau')=R(t,\tau)$, (штрих далее опустим), а функция $L(u)$ в представлении ядра (1.2) запишется в форме (4.1). Известно [1], что резольвента ядра (4.4) выражается через дробно-экспоненциальную функцию и имеет вид

$$T(t,\tau)=\chi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{n}(t-\tau)^{n(1-\alpha)-\alpha}}{\Gamma[(1-\alpha)(n+1)]}$$

Тогда непрерывное решение интегрального уравнения (2.3) можно представить

$$b_k(t)=1-\frac{\beta_k}{\delta^{\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(r\delta)^{n}\,t^{(1-\alpha)(n+1)}}{\Gamma[1+(1-\alpha)(n+1)]}\tag{4.5}$$

$$\delta=Ea(\pi h^{*}\theta\chi)^{-1}$$

Предположим далее, как и ранее, $\gamma(t)+\beta(t)x=\gamma_0$, $f(x)=0$. Тогда перепишем формулу (4.2) в форме

$$\varphi(x,t)=\pi\sqrt{2}\,\gamma_0\sum_{k=1}^{\infty}g_0^{(2k)}b_{2k}(t)\,\varphi_{2k}(x)\tag{4.6}$$

где $b_{2k}(t)$ даются формулой (4.5). В силу того, что $g_0^{(2k)}$ — коэффициенты разложения единицы в ряд Фурье по полной в L_2 $(-1,\ 1)$ системе функций $\{\varphi_n(x)\}$ условие (2.15) выполнено. Тогда ряд (4.6) представляет собой обобщенное решение поставленной задачи.

В случае постоянных усилий, приложенных к штампу, определим

$$\left.\begin{array}{l}\gamma_0(t)-\gamma_0(0)\\ \beta_0(t)-\beta_0(0)\end{array}\right\}=\frac{r^{\alpha}}{\delta\Gamma(1-\alpha)}\,\gamma(1-\alpha,\ r\delta t)$$

где $\gamma(x,\ y)$ — неполная гамма-функция, после чего найдем функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x,\ t)$ согласно (2.1), (3.3), (4.5), а вместе с тем построим решение задачи по формуле (1.7).

Автор выражает благодарность В. М. Александрову за внимание к работе и советы.

Институт проблем
механики АН СССР

Поступила 13 VI 1980

Է. Վ. ԿՈՎԱԼԵՆԿՈ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Առաջարկվում է ինտեգրալ հավասարումը ուսումնասիրելու եղանակ, այդ հավասարմանն են բերվում առաձգականության տեսության, մածուցիկ-առաձգականության և հիդրոմեխանիկայի մի շարք կվազիստատիկ խառը խնդիրներ։ Տվյալ հավասարման եզակիությունը հանդիսանում է նրանում, որ նրա ձախ մասում մտնում են Ֆրեդհոլմի և Վոլտերրայի օպերատորները։ Ցույց է տրվում, որ սկզբնական ինտեգրալ հավասարումը համարժեք է երեք հավասարումներից բաղկացած սիստեմին (մեկ համասեռ և երկու անհամասեռ)։ Որոշվել է նաև այդ հավասարման լուծման կառուցվածքը և ապացուցվել է նրա միարժեք լուծելիությունը ֆունկցիաների որոշակի դասում։ Բերվում են դիտարկվող ինտեգրալ հավասարման կիրառման օրինակներ առաձգականության տեսության պարբերական կոնտակտային խնդիրների լուծման համար երբ առկա է հղկիչ-մաշվածությունը և խառը խնդիրների համար բարակ պոլիմերային ծածկույթների վերաբերյալ։

ON APPROXIMATE SOLUTION OF ONE TYPE OF INTEGRAL EQUATIONS IN THE THEORY OF ELASTICITY AND MATHEMATICAL PHYSICS

E. V. KOVALENKO

S u m m a r y

A method to examine an integral equation is suggested, to which a number of quasi-state mixed problems in the theory of elasticiy, viscoelasticity and hydromechanics are reduced. The piculiarity of the given equation lies in the fact that Fredholm's and Volterra's operators enter the left side of the equation. The initial integral equation is shown to be equivalent to the system of three equations (one homogeneous and two non-homogeneous), as well as the structure of its solution is found and a single-valued solvability in a certain class of functions is proved. The examples of application of the examined integral equations to the recurring contact problems in the theory of elasticity under abradant wear and to the mixed problems on thin polymer covers are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР. М., «Наука», 1976.
2. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М., «Наука», 1977.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., ГИФМЛ, 1963.
5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1976.
6. *Коваленко Е. В.* Об эффективном методе решения контактных задач для линейно-деформируемого основания с тонким усиливающим покрытием. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1979, т. 32, № 2.
7. *Александров В. М., Галин Л. А., Пириев Н. П.* Плоская контактная задача при наличии износа для упругого слоя большой толщины. Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 4.
8. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIV, № 5, 1981 Механика

С. Е. МИРЗОЯН, С. М. МХИТАРЯН

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ БЕСКОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ И ПОЛОСАМИ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОСТИ СТАРЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Область контактных задач о передаче нагрузки от тонкостенных элементов в виде стрингеров к деформируемым массивным телам различных форм в постановке теории упругости в последнее время значительно развивается, обогащаясь многими результатами. Основные достижения в этой области с достаточной полнотой отражены в монографии [1].

Между тем, при расчетах разнообразных инженерных конструкций, подкрепленных или армированных тонкостенными элементами, встречаются подобные задачи, исследование которых необходимо провести в постановке теории ползучести. Такие задачи часто возникают в вопросах механики армированных сред. При этом нужно исходить из теории ползучести, наиболее полно отражающей реальные эксплуатационные условия конструкций и сооружений. Одной из таких общепризнанных теорий является теория ползучести с учетом наследственности и старения материалов, предложенная Н. Х. Арутюняном в [2]. Эта теория в последнее время применительно к неоднородно-наследственно стареющим средам существенно обобщена и развита в работах Н. Х. Арутюняна [3—6]. Некоторые контактные задачи для неоднородно стареющих тел исследовались в работах [3, 7, 8].

В рамках последней теории в настоящей работе рассматриваются четыре задачи контактного взаимодействия между бесконечными стрингерами и деформируемыми полосами, обладающими свойствами ползучести и неоднородности старения материалов. При этом в первых двух задачах считается, что бесконечная полоса по одной своей грани усилена бесконечным стрингером, нагруженным горизонтальными силами произвольных интенсивностей, а по другой грани жестко защемлена или свободна от внешних напряжений. В двух других задачах считается, что две пластины в виде бесконечных полос, одна из граней которых либо жестко защемлена, либо свободна от внешних напряжений, соединены между собой вдоль двух других граней бесконечным стрингером, нагруженным горизонтальными силами произвольной интенсивности. Предполагается, что материалы стрингеров и полос имеют разные возрасты, в чем отражается факт их неоднородного старения. Стрингеры трактуются как одномерные деформируемые континуумы, а напряженно-деформированное состояние полос описывается уравнениями плоской теории ползучести.

Рассмотренные задачи математически формулируются в виде интегро-дифференциальных уравнений. Получены их замкнутые решения. Предельным переходом получены решения соответствующих задач в случае полуплоскостей. Приведен числовой пример.

§ 1. *Постановка задач и вывод разрешающих уравнений*

Пусть бесконечная полоса толщины H по одной своей грани усилена бесконечным стрингером малой толщины h, а по другой грани либо жестко защемлена (задача 1), либо свободна от внешних напряжений (задача 2). Будем считать, что материалы стрингера и полосы обладают свойством ползучести, которое характеризуется неоднородностью процесса старения. Обозначим меру ползучести стрингера—$C_1(t, u)$, модуль упругости—$E_1(t)$, возраст через τ_1, а соответствующие характеристики для полосы — через $C_2(t, u)$, $E_2(t)$, τ_2.

Будем считать также, что для материалов полосы и стрингера коэффициенты поперечного сжатия для упругой деформации $\nu_1(t)$ и деформации ползучести $\nu_2(t, u)$ одинаковы и постоянны

$$\nu_1(t) = \nu_2(t, u) = \nu = \mathrm{const}$$

Требуется определить закон распределения контактных напряжений на линии соединения стрингера с полосой, если в момент времени τ_0 к стрингеру приложена горизонтальная сила интенсивности $q_0(x, t)$.

Пусть далее две одинаковые бесконечные полосы соединены между собой вдоль бесконечного стрингера. Другие грани полос либо жестко защемлены (задача 3), либо свободны от напряжений (задача 4), а к стрингеру в момент τ_0 приложены горизонтальные силы интенсивности $q_0(x, t)$. Опять требуется найти закон распределения контактных напряжений, действующих на линии соединения стрингера с полосами, притом характеристики ползучести полос и стрингера те же, что и в первых двух задачах.

Выведем разрешающие уравнения этих задач. Сначала обратимся к первой задаче.

Как обычно [3, 10], будем предполагать, что стрингер лишен изгибной жесткости и находится в одноосном напряженном состоянии, поэтому на линии соединения стрингера с полосой будут действовать только тангенциальные контактные напряжения $q(x, t)$.

В случае плоской деформации* основные реологические соотношения теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред имеют вид [3]

$$\varepsilon_x(t) = \frac{(1-\nu^2)\sigma_x(t) - (\nu+\nu^2)\sigma_y(t)}{E^*(t)} - \int_{\tau_*}^{t} [(1-\nu^2)\sigma_x(u) - \ldots] K^*(t, u)\, du$$

$$\gamma_{xy}(t) = 2(1+\nu)\left[\frac{\tau_{xy}(t)}{E^*(t)} - \int_{\tau_*}^{t} \tau_{xy}(u) K^*(t, u)\, du\right] \qquad (1.1)$$

---

* Реологические соотношения в случае обобщенного плоского напряженного состояния получаются из (1.1), если в них положить $\nu^2 = 0$.

$$\varepsilon_y(t) = \frac{(1-\nu^2)\,\sigma_y(t) - (\nu+\nu^2)\,\sigma_x(t)}{E^*(t)} - \int\limits_{\tau_0}^{t} [(1-\nu^2)\,\sigma_y(u) - \ldots]\, K^*(t,\,u)\,du \tag{1.1}$$

где

$$K^*(t,\,u) = K[t+\rho(x,\,y),\; u+\rho(x,\,y)],\quad \rho(x,\,y) = \tau(x,\,y) - \tau_0$$

$$K(t,\,u) = \frac{d}{du}\left|\frac{1}{E(u)} + C(t,\,u)\right|,\quad E^*(t) = E(t+\rho(x,\,y))$$

$$C(t,\,u) = \varphi(u)\,[1 - e^{-\gamma(t-u)}],\quad \varphi(u) = C_0 + \frac{A_0}{u}$$

Если предположить, что $\tau(x,\,y) = \tau = \mathrm{const}$, то из (1.1) легко получается, что

$$\begin{aligned} u^*(x,\,t) &= (1-L)\,u(x,\,t) \\ v^*(x,\,t) &= (1-L)\,v(x,\,t) \end{aligned} \tag{1.2}$$

где

$$LY(t) = \int\limits_{\tau_0}^{t} E^*(u)\,K^*(t,\,u)\;Y(u)\,du$$

$u(x,\,t)$ и $v(x,\,t)$ — компоненты упруго-мгновенных перемещений, а $u^*(x,\,t)$ и $v^*(x,\,t)$ — те же компоненты при ползучести.

Так как стрингер находится в одноосном напряженном состоянии, то рассматривая равновесие его любой части, будем иметь

$$\sigma_x^{(1)}(x,\,t) = \frac{1}{h}\int\limits_{-\infty}^{x} [q(y,\,t) - q_0(y,\,t)]\,dy \tag{1.3}$$

так как $\sigma_x^{(1)}(x,\,t) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

На основании первого соотношения (1.1) имеем

$$\varepsilon_x^{(1)}(x,\,t) = \frac{1-\nu_1^2}{h}(1-L_1)\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{q(y,\,t) - q_0(y,\,t)}{E_1(t+\rho_1)}\,dy \tag{1.4}$$

Здесь $\varepsilon_x^{(1)}(x,\,t)$ — деформация точек стрингера с учетом ползучести. С другой стороны, известно [9], что перемещение точек границы упругой полосы в задаче 1 определяется формулой

$$u_2(x,\,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{K(|x-\zeta|)\,q(\zeta,\,t)}{E_2(t)}\,d\zeta \tag{1.5}$$

где

$$K(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(2p+1)[(p+1)\,\mathrm{sh}\,2\alpha+2\alpha p](1+\nu_2)}{|s|[2p(p+1)\,\mathrm{ch}\,2\alpha+p^2(4\alpha^2+1)+(p+1)^2]}e^{-isx}ds$$

λ_2 и μ_2 — постоянные Ляме для полосы, а

$$p=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right),\quad \alpha=|s|H$$

Из (1.5) с учетом (1.2) имеем

$$u_2^*(x,t)=(1-L_2)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{K(|x-\zeta|)\,q(\zeta,t)}{E_2(t+\rho_2)}\,d\zeta \tag{1.6}$$

Учитывая граничное условие на линии контакта

$$\varepsilon_x^{(1)}(x,t)=\varepsilon_x^{(2)}(x,t)\quad(-\infty<x<\infty)$$

получим основное разрешающее уравнение для определения $q(x,t)$ в следующем виде:

$$(1-L_2)\frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{K(|x-\zeta|)\,\varphi'(\zeta,t)}{E_2(t+\rho_2)}\,d\zeta=(1-L_1)\frac{\varphi(x,t)-\varphi_0(x,t)}{hE_1(t+\rho_1)/(1-\nu_1^2)} \tag{1.7}$$

где

$$\varphi'(x,t)=q(x,t),\quad \varphi_0'(x,t)=q_0(x,t)$$

$$L_iY(t)=\int\limits_{\tau_i}^{t}E_i(u+\rho_i)K_i(t+\rho_i,u+\rho_i)\,Y(u)\,du,\quad \rho_i=\tau_i-\tau_0\quad(i=1,2)$$

Таким образом, в задаче 1 определение неизвестного контактного напряжения $q(x,t)$ сводится к решению интегро-дифференциального уравнения (1.7).

Поступив вполне аналогичным образом, находим, что решение задачи 2 сводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$(1-L_2)\frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{K_1(|x-\zeta|)\,\varphi'(\zeta,t)}{E_2(t+\rho_2)}\,d\zeta=(1-L_1)\frac{\varphi(x,t)-\varphi_0(x,t)}{hE_1(t+\rho_1)/(1-\nu_1^2)} \tag{1.8}$$

где

$$K_1(x)=\frac{1-\nu_2^2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{ch}\,\alpha-\alpha}{|s|(\mathrm{sh}^2\alpha-\alpha^2)}e^{-isx}\,ds,\quad \alpha=|s|H.$$

Обратимся теперь к последним двум задачам. Для вывода разрешающих уравнений относительно стрингера будем предполагать, что стрингер в горизонтальном направлении растягивается или сжимается как стержень, находясь в одноосном напряженном состоянии. Кроме того, будем считать, что вдоль оси ох его упругие вертикальные перемещения постоянны и даже равны нулю [10]. Последнее предположение обусловлено малостью толщины стрингера, вследствие чего ее изменение от точки к точке в процессе деформации незначительно и можно им пренебречь.

Предполагается также, что полосы находятся в обобщенном плоском напряженном состоянии.

Обозначим интенсивности нормальных и касательных контактных напряжений через $p(x, t)$ и $q(x, t)$ соответственно.

На основе сделанных предположений поставленная задача математически сформулируется в виде соотношений:

$$\frac{dv_1^*(x, t)}{dx} = 0$$

$$\frac{du_1^*(x, t)}{dx} = (1 - L_1)\int_{-\infty}^{x} \frac{2h_1 q(y, t) - q_0(y, t)}{A_* E_1(t + \rho_1)}\, dy \tag{1.9}$$

где A_* — площадь прямоугольного поперечного сечения стрингера, h_1 — ширина стрингера.

Вертикальные и горизонтальные перемещения граничных точек упругих полос в задаче 3 выражаются формулами [9]

$$u_2(x, t) = \frac{1}{E_2(t)}\left[\int_{-\infty}^{\infty} K_{21}(x - \zeta)\, p(\zeta, t)\, d\zeta + \int_{-\infty}^{\infty} K_{22}(|x - \zeta|)\, q(\zeta, t)\, d\zeta\right]$$

(1.10

$$v_2(x, t) = \frac{1}{E_2(t)}\left[\int_{-\infty}^{\infty} K_{11}(|x - \zeta|)\, p(\zeta, t)\, d\zeta + \int_{-\infty}^{\infty} K_{12}(x - \zeta)\, q(\zeta, t)\, d\zeta\right]$$

где

$$K_{11}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2p + 1)[2\alpha p - (p + 1)\operatorname{sh} 2\alpha](1 + \nu_2)}{|s|\,\Delta(s)}\, e^{-isx}\, ds$$

$$K_{12}(x) = K_{21}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i[(p + 1)(1 - \operatorname{ch} 2\alpha) + 4\alpha^2 p^2](1 + \nu_2)}{s\,\Delta(s)}\, e^{-isx}\, ds$$

$$K_{22}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2p + 1)[2\alpha p + (p + 1)\operatorname{sh} 2\alpha](1 + \nu_2)}{|s|\,\Delta(s)}\, e^{-isx}\, ds$$

$$p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\lambda_2^*}{\mu_2}\right), \quad \lambda_2^* = 2\lambda_2\mu_2/(\lambda_2 + 2\mu_2)$$

$$\Delta(s) = 2p(p + 1)\operatorname{ch} 2\alpha + p^2(4\alpha^2 + 1) + (p + 1)^2, \quad \alpha = |s|\,H$$

Теперь заметим, что на линии соединения стрингера с полосами должны удовлетворяться условия

$$\frac{du_1^*(x, t)}{dx} = \frac{du_2^*(x, t)}{dx}, \quad \frac{dv_1^*(x, t)}{dx} = \frac{dv_2^*(x, t)}{dx} \quad (|x| < \infty) \tag{1.11}$$

Для перемещений граничных точек полос с учетом ползучести согласно (1.2) и (1.10) имеем

$$\begin{gathered} u_2^*(x, t) = (1 - L_2)\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{21}(x-\zeta)\, p(\zeta, t)\, d\zeta}{E_2(t+\rho_2)} + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{22}(|x-\zeta|)\, q(\zeta, t)\, d\zeta}{E_2(t+\rho_2)}\right] \\ v_2^*(x, t) = (1 - L_2)\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{11}(|x-\zeta|)\, p(\zeta, t)\, d\zeta}{E_2(t+\rho_2)} + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{12}(x-\zeta)\, q(\zeta, t)\, d\zeta}{E_2(t+\rho_2)}\right] \end{gathered} \tag{1.12}$$

Удовлетворяя условиям (1.11) и имея в виду (1.9), относительно неизвестных контактных напряжений $p(x, t)$ и $q(x, t)$ получим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dx}\left[\int_{-\infty}^{\infty} K_{11}(|x-\zeta|)\, p(\zeta, t)\, d\zeta + \int_{-\infty}^{\infty} K_{12}(x-\zeta)\, \varphi'(\zeta, t)\, d\zeta\right] = 0 \\ (1 - L_2)\frac{d}{dx}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{21}(x-\zeta)\, p(\zeta, t)}{E_2(t+\rho_2)}\, d\zeta + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{22}(|x-\zeta|)\, \varphi'(\zeta, t)}{E_2(t+\rho_2)}\, d\zeta\right] = (1 - L_1)\frac{2h_1\varphi(x, t) - \varphi_0(x, t)}{A_1E_1(t+\rho_1)} \end{gathered} \tag{1.13}$$

где

$$\varphi'(x, t) = q(x, t), \quad \varphi_0'(x, t) = q_0(x, t)$$

Таким образом, в задаче 3 определение $p(x, t)$ и $q(x, t)$ сводится к решению системы интегро-дифференциальных уравнений (1.13).

Вполне аналогичным образом находим, что определение неизвестных контактных напряжений $p(x, t)$ и $q(x, t)$ в задаче 4 сводится к решению следующей системы интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dx}\left| \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{K}_{11}(|x-\zeta|)\, p(\zeta, t)\, d\zeta + \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{K}_{12}(x-\zeta)\, \varphi'(\zeta, t)\, d\zeta \right| = 0$$

$$(1-L_2)\frac{d}{dx}\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widetilde{K}_{21}(x-\zeta)\, p(\zeta, t)\, d\zeta}{E_2(t+\rho_2)} + \right. \tag{1.14}$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widetilde{K}_{22}(|x-\zeta|)\, \varphi'(\zeta, t)\, d\zeta}{E_2(t+\rho_2)} \right| = (1-L_1)\frac{2h_1\varphi(x, t) - \varphi_0(x, t)}{A_s E_1(t+\rho_1)}$$

где

$$\varphi'(x, t) = q(x, t), \quad \varphi_0'(x, t) = q_0(x, t)$$

$$\widetilde{K}_{11}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch}\alpha + \alpha}{|s|(\operatorname{sh}^2\alpha - \alpha^2)} e^{-isx} ds$$

$$\widetilde{K}_{12}(x) = \widetilde{K}_{21}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i[(1-\nu_2)\operatorname{sh}^2\alpha + (1+\nu_2)\alpha^2]}{s(\operatorname{sh}^2\alpha - \alpha^2)} e^{-isx} ds$$

$$\widetilde{K}_{22} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch}\alpha - \alpha}{|s|(\operatorname{sh}^2\alpha - \alpha^2)} e^{-isx} ds, \quad \alpha = |s| H$$

§ 2. Решение определяющих уравнений

Сначала обратимся к решению уравнения (1.7). Применяя к обеим частям уравнения (1.7) преобразование Фурье, после некоторых несложных операций приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$A(s, t)\,\Phi(s, t) - \int_{\tau_0}^{t} [A_1 K_1^*(t, u) + A_2(s)\, K_2^*(t, u)]\, \Phi(s, u)\, du = Q_0(s, t) \tag{2.1}$$

где

$$A(s, t) = A_1/E_1^*(t) + A_2(s)/E_2^*(t), \qquad A_1 = (1-\nu_1^2)/h, \qquad A_2(s) = s^2\overline{K}(s)$$

$$Q_0(s, t) = (1-L_1)\frac{\overline{q}_0(s, t)}{hE_1^*(t)/(1-\nu_1^2)}$$

$\Phi(s, t)$, $\overline{q}_0(s, t)$, $\overline{K}(s)$ — трансформанты Фурье соответственно для $\varphi'(x, t)$, $q_0(x, t)$ и $K(x)$, s — параметр преобразования Фурье.

Поступив аналогичным образом, из (1.8) получим уравнение вида

$$A(s, t)\,\Phi(s, t) - \int_{\tau_0}^{t} [A_1 K_1^*(t, u) + A_2(s)\, K_2^*(t, u)]\, \Phi(s, u)\, du = Q_0(s, t) \tag{2.2}$$

где в рассматриваемом случае

$$A_2(s) = s^2\overline{K_1}(s), \quad \overline{K}_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x)\, e^{isx}\, dx$$

Для решения уравнения (2.1) меры ползучести материала стрингера и полосы примем в форме [3]

$$C_i(t, u) = \varphi_i(u)\left[1 - e^{-\gamma(t-u)}\right] \quad (i = 1, 2) \tag{2.3}$$

где $\varphi_1(u)$ и $\varphi_2(u)$ — функции, определяющие процесс старения материала стрингера и полосы соответственно.

Тогда для $K(t, u)$ будем иметь

$$K(t, u) = -\frac{E'(u)}{E^2(u)} + \varphi'(u) - [\varphi'(u) + \gamma\varphi(u)]\, e^{-\gamma(t-u)} \tag{2.4}$$

Можно показать [2, 3], что решение интегрального уравнения (2.1) в этом случае эквивалентно решению дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами следующего вида:

$$\Phi''(s, t) + \tilde{A}(s, t)\,\Phi'(s, t) = F(s, t) \tag{2.5}$$

при начальных условиях

$$\begin{aligned} &\Phi(s, t)\big|_{t=\tau_0} = Q_0(s, \tau_0)/A(s, \tau_0) \\ &\Phi'(s, t)\big|_{t=\tau_0} = \{\dot{Q}_0(s, \tau_0) - \gamma\,[A_2(s)\,\varphi_2(\tau_2) + A_1\varphi_1(\tau_1)]\,\Phi(s, \tau_0)\}/A(s, \tau_0) \end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$\tilde{A}(s, t) = \{A'(s, t) + \gamma\,[A(s, t) + A_1\varphi_1(t + \rho_1) + A_2(s)\,\varphi_2(t + \rho_2)]\}/A(s, t)$$

$$F(s, t) = [\dot{Q}_0(s, t) + \gamma Q_0(s, t)]/A(s, t)$$

Отметим, что все производные берутся по времени.

Решение дифференциального уравнения (2.5) при начальных условиях (2.6) записывается в виде [2, 3]

$$\Phi(s, t) = \Phi(s, \tau_0) + \Phi'(s, \tau_0)\int_{\tau_0}^{t} e^{-\eta(s, u)}\, du +$$

$$+ \int_{\tau_0}^{t} e^{-\eta(s, u)}\, du \int_{\tau_0}^{u} e^{\eta(s, z)} F(s, z)\, dz$$

$$\eta(s, t) = \int_{\tau_0}^{t} \tilde{A}(s, u)\, du \tag{2.7}$$

Теперь решение исходного уравнения (1.7) будет определяться при помощи обратного преобразования Фурье

$$\varphi'(x, t) = q(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s, t)\, e^{-isx}\, ds \tag{2.8}$$

Отметим, что решение уравнения (2.2) также имеет вид (2.7), только $\overline{K}(s)$ следует заменить функцией $\overline{K}_1(s)$.

Далее, для решения системы интегро-дифференциальных уравнений (1.13) к его обеим частям опять применим преобразование Фурье. Получим

$$\overline{K}_{11}(s)\Psi(s, t) + \overline{K}_{12}\Phi(s, t) = 0$$

$$(1 - L_1)\frac{\overline{K}_{21}(s)\Psi(s, t) + \overline{K}_{22}(s)\Phi(s, t)}{E_2^*(t)} = \tag{2.9}$$

$$= (1 - L_1)\frac{\overline{q}_0(s, t) - 2h_1\Phi(s, t)}{s^2 A_4 E_1^*(t)}$$

где $\Psi(s, t)$, $\Phi(s, t)$, $\overline{q}_0(s, t)$, $\overline{K}_{ij}(s)$ — трансформанты Фурье соответственно для $p(x, t)$, $\varphi'(x, t)$, $q_0(x, t)$, $K_{ij}(x)$ $(i, j = 1, 2)$. Из первого уравнения (2.9) имеем

$$\Psi(s, t) = -\frac{i\,\mathrm{sign}\, s}{2p + 1}a_1\Phi(s, t) = -\frac{\overline{K}_{12}(s)}{\overline{K}_{11}(s)}\Phi(s, t) \tag{2.10}$$

Подставляя выражение $\Psi(s, t)$ из (2.10) в (2.9), после некоторых простых преобразований получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\Phi(s, t)$

$$A(s, t)\Phi(s, t) - \int_{\tau_0}^{t}[A_1K_1^*(t, u) + A_2(s)K_2^*(t, u)]\Phi(s, u)\, du = Q_0(s, t) \tag{2.11}$$

Здесь введены обозначения

$$A_1 = 2h_1, \quad A_2(s) = \frac{(1 + \nu_2)|s|A_4}{\Delta(s)}\left[(2p + 1)a_2 - \frac{a_1a_3}{2p + 1}\right]$$

$$a_1 = -i(2p + 1)\overline{K}_{12}(s)\,\mathrm{sign}\, s/\overline{K}_{11}(s), \qquad a_2 = (p + 1)\,\mathrm{sh}\, 2\alpha + 2\alpha p$$

$$a_3 = (p + 1)(\mathrm{ch}\, 2\alpha - 1) - 4\alpha^2p^2$$

Если меры ползучести материала стрингера и полосы примем в форме (2.3), то аналогичным образом, как выше, интегральное уравнение (2.11) можно привести к дифференциальному уравнению второго порядка при определенных начальных условиях, решение которого имеет вид

$$
\Phi(s, t) = \Phi(s, \tau_0) + \Phi'(s, \tau_0) \int_{\tau_0}^{t} e^{-\eta(s, u)} du +
$$

$$
+ \int_{\tau_0}^{t} e^{-\eta(s, u)} du \int_{\tau_0}^{u} e^{\eta(s, z)} F(s, z)\, dz \tag{2.12}
$$

$$
\eta(s, t) = \int_{\tau_0}^{t} \bar{A}(s, u)\, du
$$

где

$$
\Phi(s, t)\big|_{t=\tau_0} = Q_0(s, \tau_0)/A(s, \tau_0)
$$

$$
\Phi'(s, t)\big|_{t=\tau_0} = \{\dot{Q}_0(s, \tau_0) - \gamma[A_2(s)\varphi_2(\tau_2) + 2h_1\varphi_1(\tau_1)]\Phi(s, \tau_0)\}/A(s, \tau_0)
$$

$$
\bar{A}(s, t) = [A'(s, t) + \gamma[A(s, t) + 2h_1\varphi_1(t + \tau_1) + A_2(s)\varphi_2(t + \tau_2)]]/A(s, t)
$$

$$
F(s, t) = [\dot{Q}_0(s, t) + \gamma Q_0(s, t)]/A(s, t)
$$

Функция $\Psi(s, t)$ определяется с помощью (2.10), а решение исходной системы (1.13) будет определяться при помощи обратного преобразования Фурье

$$
p(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(s, t) e^{-isx} ds
$$

$$
q(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s, t) e^{-isx} ds \tag{2.13}
$$

Следует отметить, что решение системы (1.14) также имеет вид (2.12), только $\bar{K}_i(s)$ нужно заменить функциями $\bar{K}_{ij}(s)$ $(i, j = 1, 2)$.

§ 3. *Частные случаи и численный пример*

С целью получения более простых результатов рассмотрим некоторые частные случаи.

Рассмотрим частный случай внешней нагрузки, $q_0(x, t) = Q_0\delta(x) H(t-\tau_0)$, где $\delta(x)$ — функция Дирака, $H(t)$ — единичная функция Хевисайда, то есть в момент времени $t = \tau_0$ к стрингеру прилагается сосредоточенная в начале координат $x = 0$ сила величины Q_0.

При указанной нагрузке (2.7) примет вид

$$
\Phi(s, t) =
$$

$$
= \frac{(1 - \nu_1^2)\, Q_0}{hE_1(\tau_1)\, A(s, \tau_0)} \left\{ 1 + \gamma \frac{A_2(s)[E_1(\tau_1)\varphi_1(\tau_1) - E_2(\tau_2)\varphi_2(\tau_2)]}{E_2(\tau_2)\, A(s, \tau_0)} \int_{\tau_0}^{t} e^{-\eta(s, u)} du \right\} \tag{3.1}
$$

Положим теперь $E_1(t+\rho_1) = E_1 = \text{const}$, $E_2(t+\rho_2) = E_2 = \text{const}$ и $H \to \infty$. В результате получается соответствующая задача для полуплоскости, решение которой представляется формулой

$$
\Phi(s, t) = \frac{\lambda Q_0}{\lambda + |s|}\left\{1 + \gamma \frac{|s|}{\lambda + |s|}\left[E_1\varphi_1(\tau_1) - E_2\varphi_2(\tau_2)\right]\int\limits_{\tau_0}^{t} e^{-\eta(s, u)}du\right\}
$$

$$
\eta(s, t) = \gamma\int\limits_{\tau_0}^{t}\left[1 + \frac{\lambda E_1\varphi_1(u+\rho_1) + |s|\, E_2\varphi_2(u+\rho_2)}{\lambda + |s|}\right] du \qquad (3.2)
$$

$$
\lambda = (1 - \nu_1^2)\, E_2/2\,(1 - \nu_2^2)\, E_1 h
$$

Формула (3.2) совпадает с результатом Н. Х. Арутюняна [3].

Если деформации ползучести стрингера и полосы, вызванные постоянным напряжением, пропорциональны их упругим деформациям, то есть $E_1(\tau_1)\,\varphi_1(\tau_1) = E_2(\tau_2)\,\varphi_2(\tau_2)$, то для контактного напряжения $q(x, t)$ согласно (2.8) и (3.1) получим

$$
q(x, t) = \frac{(1 - \nu_1^2)\, Q_0}{2\pi h E_1(\tau_1)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-isx}ds}{A(s, \tau_0)} \qquad (3.3)
$$

а из (2.8) и (3.2) получим

$$
\begin{aligned}
q(x) &= -\frac{\lambda Q_0}{\pi}(\cos\lambda x\, \mathrm{ci}\,\lambda x + \sin\lambda x\, \mathrm{si}\,\lambda x) \\
\lambda &= (1 - \nu_1^2)\, E_2/2\,(1 - \nu_2^2)\, E_1 h
\end{aligned} \qquad (3.4)
$$

Последнее с точностью коэффициента совпадает с известным решением Мелана [10].

Для функций старения $\varphi_1(u)$ и $\varphi_2(u)$, принимая выражения

$$
\varphi_1(u) = C_0 + A_0/u, \qquad \varphi_2(u) = \tilde{C}_0 + \tilde{A}_0/u
$$

находим, что (3.2) примет вид

$$
\Phi(s, t) = \frac{\lambda Q_0}{\lambda + |s|}\left\{1 + \gamma|s|\frac{E_1\varphi_1(\tau_1) - E_2\varphi_2(\tau_2)}{\lambda + |s|}e^{r\tau_0}\tau_1^{p_1}\tau_2^{p_2}\times\right.
$$

$$
\left.\times\int\limits_{\tau_0}^{t}\frac{e^{-r\tau}d\tau}{(\tau+\rho_1)^{p_1}(\tau+\rho_2)^{p_2}}\right\} \qquad (3.5)
$$

где

$$
r = \gamma\left[1 + \frac{\lambda E_1 C_0 + E_2|s|\tilde{C}_0}{\lambda + |s|}\right], \qquad p_1 = \gamma\frac{\lambda E_1 A_0}{\lambda + |s|}, \qquad p_2 = \gamma\frac{E_2|s|\tilde{A}_0}{\lambda + |s|}
$$

Из (3.5) и (2.8) после некоторых несложных операций получим

$$q(x,\ t) = -\frac{\lambda Q_0}{\pi} H(t,\ \tau_0,\ \tau_1,\ \tau_2)[\cos\lambda x \operatorname{ci}\lambda x + \sin\lambda x \operatorname{si}\lambda x] + R(x,\ t) \qquad (3.6)$$

где

$$H(t,\ \tau_0,\ \tau_1,\ \tau_2) = 1 + \gamma[E_1\varphi_1(\tau_1) - E_2\varphi_2(\tau_2)]\,[illegible]\, e^{[illegible]}\, r_1^{[illegible]} \times$$

$$\times \{\Phi_0[r_1(t+\tau_2),\ p_0] - \Phi_0(r_1\tau_2,\ p_0)\}, \qquad H(t,\ \tau_0,\ \tau_1,\ \tau_2)\big|_{t=\tau_{[illegible]}} = 1$$

$r_1 = \gamma(1 + E_2\bar{C}_0)$, $\quad p_0 = \gamma E_2\bar{A}_0$, $\quad \Phi_0(\zeta,\ t)$ — неполная гамма-функция, $R(x,\ t)$ — регулярная функция по x и t, которая имеет вид

$$R(x,\ t) = \frac{\lambda Q_0}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\Big\{\gamma[E_1\varphi_1(\tau_1) - E_2\varphi_2(\tau_2)]\,[illegible]\, e^{[illegible]} \times$$

$$\times \int\limits_{\tau_{[illegible]}}^{t} \frac{e^{[illegible]}du}{(u+\rho_1)^{[illegible]}(u+\rho_2)^{[illegible]}} - \frac{\lambda+s}{s}[H(t,\ \tau_0,\ \tau_1,\ \tau_2) - 1]\Big\}\frac{s\cos sx}{(\lambda+s)^2}\,ds -$$

$$R(x,\ t)\big|_{t=\tau_0} = 0$$

Отметим, что в (3.6) выделена сингулярная часть решения в виде первого слагаемого от регулярной части, описываемой функцией $R(x,\ t)$. Легко заметить, что при $E_1\varphi_1(\tau_1) > E_2\varphi_2(\tau_2)$ функция

$$\frac{\lambda Q_0}{\pi} H(t,\ \tau_0,\ \tau_1,\ \tau_2)$$

фактически характеризующая коэффициент интенсивности напряжений в точке $x = 0$, во времени возрастает, а при $E_1\varphi_1(\tau_1) < E_2\varphi_2(\tau_2)$, наоборот, убывает во времени.

В обсуждаемом частном случае и получены числовые результаты. Для характеристик полуплоскости и стрингера приняты следующие значения [2]:

$$E_1 = E_2 = 2\cdot 10^5\ (\kappa\Gamma/\text{см}^2), \quad \nu_1 = \nu_2, \quad h = 0.05\ (\text{см})$$

$$C_0 = \bar{C}_0 = 0.9\cdot 10^{-5}\,(\text{см}^2/\kappa\Gamma), \qquad A_0 = \bar{A}_0 = 4.82\cdot 10^{-5}\left(\frac{\text{сутки}}{\kappa\Gamma/\text{см}^2}\right)$$

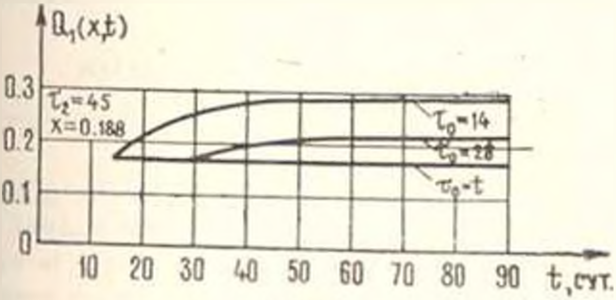
$$\gamma = 0.026\ (\text{сутки}^{-1})$$

По формуле (3.6) на ЭВМ «ЕС-1022» были получены значения $q(x,\ t)$. Построены графики функции $Q_1(x,\ t) = \dfrac{\pi q(x,\ t)}{\lambda Q_0}$ (фиг. 1, 2).

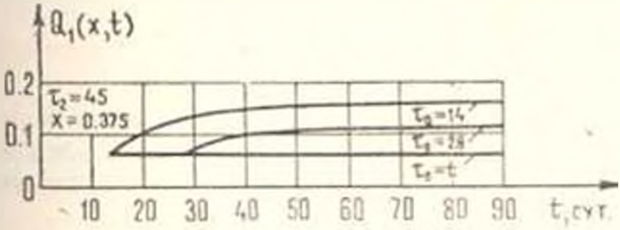
Из приведенных графиков видно, что

1. Учет неоднородного старения приводит к значительному увеличению контактного напряжения.

2. При увеличении координаты x контактное напряжение $q(x, t)$ по сравнению с упругой задачей убывает медленнее.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

3. Чем близки значения возрастов стрингера и полуплоскости, тем меньше значение контактного напряжения и наоборот.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 19 XII 1980

Ս. Ե. ՄԻՐԶՈՅԱՆ, Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

ԱՆՎԵՐՋ ՎԵՐԱԴԻՐՆԵՐԻ ԵՎ ՇԵՐՏԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ ՆՅՈՒԹԵՐԻ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԾԵՐԱՑՄԱՆ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ամփոփում

Անհամասեռորեն ծերացող նյութերի սողքի տեսության [3] շրջանակներում դիտարկված են բարակապատ անվերջ վերադիրներից շերտերին, մասնավորապես կիսահարթություններին, ուժի փոխանցման վերաբերյալ մի քանի հարթ կոնտակտային խնդիրներ։ Դիտարկված խնդիրները անհայտ կոնտակտային լարումների նկատմամբ մաթեմատիկորեն ձևակերպված են ինտեգրո-դիֆերենցիալ և Վոլտերայի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների տեսքերով։ Ստացված են նրանց փակ լուծումները։ Բերված է թվային օրինակ։

ON SOME PROBLEMS OF CONTACT INTERACTION BETWEEN INFINITE STRINGERS AND BANDS, TAKING INTO ACCOUNT THE HETEROGENEITY IN AGING MATERIALS

S. E. MIRZOYAN, S. M. MCHITARIAN

Summary

In terms of the creep theory for heterogeneously aging materials some plane contact problems are considered on transfer of load from infinite thinwalled stringers to bands, to semi-planes in particular. The problems relative to unknown contact stresses are presented as integro-differential equations and those of Volterra of the second kind. The closed solutions thereof are obtained. A numerical example is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР. М., «Наука», 1976.
2. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
3. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно стареющих тел. МТТ, 1976, вып. 3.
4. *Арутюнян Н. Х.* О теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред. ДАН СССР, 1976, т. 229, вып. 3.
5. *Арутюнян Н. Х.* Об уравнениях состояния в нелинейной теории ползучести неоднородно стареющих тел. ДАН СССР, 1976, т. 231, вып. 3.
6. *Арутюнян Н. Х.* Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела. ПММ, 1977, т. 41, вып. 5.
7. *Мирзоян С. Е.* О построении функций влияния для кусочно-неоднородно наследственно-стареющей полуплоскости. Докл. АН Арм. ССР, 1977, т. 14, № 1.
8. *Далтян З. А.* О двух задачах кручения усиленного тонким покрытием бесконечного цилиндра в условиях неоднородной ползучести. Докл. АН Арм. ССР, 1979, т. 19, № 1.
9. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., Изд. «Наука», 1974.
10. *Melan E.* Ein Beitrag zur Theorie geschweister Verbindungen. Ing.-Archiv, 1932, Bd. 3, Heft 2.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 5, 1981 Механика

А. В. БЕЛОКОПЫТОВА, О. А. ИВАНЕНКО, Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ УПРУГОГО РЕБРА К ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКЕ

Контактные задачи для анизотропной полуплоскости с накладками рассматривались в [1]. Обзор основных результатов в этой области содержится в [2]. Взаимодействие изотропной или анизотропной пластины с двоякопериодической системой упругих тонких включений изучено в [3, 4].

Ниже рассматриваются задачи о передаче нагрузки от упругого тонкого включения или периодической системы включений к полубесконечной пьезокерамической пластинке. Общие представления решений строятся на базе полученных в данной работе фундаментальных решений двумерных уравнений электроупругости для полуплоскости. Детально исследуется случай, когда конец ребра выходит на границу полуплоскости. Приводятся результаты расчета.

1. Все построения будем проводить для поперечноизотропной пьезоэлектрической среды (кристалл гексогональной системы 6 mm, поляризованная вдоль оси oz керамика), уравнения состояния которой в кристаллофизической системе координат xyz имеют вид [5]

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_x = S_{11}\sigma_x + S_{12}\sigma_y + S_{13}\sigma_z + d_{31}E_z \\
\varepsilon_y = S_{12}\sigma_x + S_{11}\sigma_y + S_{13}\sigma_z + d_{31}E_z \\
\varepsilon_z = S_{13}\sigma_x + S_{13}\sigma_y + S_{33}\sigma_z + d_{33}E_z \\
\gamma_{yz} = S_{44}\tau_{yz} + d_{15}E_y; \quad D_x = d_{15}\tau_{xz} + \varepsilon_{11}E_x \\
\gamma_{xz} = S_{44}\tau_{xz} + d_{15}E_x; \quad D_y = d_{15}\tau_{yz} + \varepsilon_{11}E_y \\
\gamma_{xy} = 2(S_{11} - S_{12})\tau_{xy}; \quad D_z = d_{31}\sigma_x + d_{31}\sigma_y + d_{33}\sigma_z + \varepsilon_{33}E_z
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \ldots, \tau_{xy}$ и $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots, \gamma_{xy}$ — компоненты тензоров механических напряжений и деформаций $E_x, E_y, E_z, D_x, D_y, D_z$ — компоненты векторов напряженности электрического поля и электрической индукции, $S_{ik} = S_{ik}^E$, d_{ik}, $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^T$ — соответственно упругие податливости, пьезоэлектрические модули и диэлектрические постоянные среды.

Привлекая уравнения равновесия, условия совместности деформации и уравнения Максвелла [6], находим с учетом (1.1) компоненты механических и электрических величин для случая плоского напряженного состояния в плоскости xOz

$$\sigma_x = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\mu_k^2\Phi_k'(z_k); \qquad z_k = x + \mu_k z$$

$$\tau_{xz} = -2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\mu_k\Phi_k'(z_k); \quad \mathrm{Im}\,\mu_k > 0 \tag{1.2}$$

$$\sigma_z = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\Phi_k'(z_k); \qquad \gamma_k = a_{20} + a_{22}\mu_k^2$$

$$u = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}p_k\Phi_k(z_k)$$

$$w = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}q_k\Phi_k(z_k)$$

$$\varphi = -2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\Phi_k(z_k)$$

$$E_x = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\Phi_k'(z_k)$$

$$E_z = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\mu_k\Phi_k'(z_k)$$

$$D_x = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}r_k\mu_k\Phi_k'(z_k)$$

$$D_z = -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}r_k\Phi_k'(z_k)$$

$$p_k = a_{14}\gamma_k\mu_k^2 + 0.5\,(a_{13} - S_{44})\,\gamma_k - a_{23}\lambda_k\mu_k$$

$$q_k = 0.5\,(a_{13} - S_{44})\,\gamma_k\mu_k + a_{10}\gamma_k\mu_k^{-1} - (a_{21} - d_{15})\,\lambda_k$$

$$\lambda_k = a_{21}\mu_k + a_{23}\mu_k^3$$

$$r_k = a_{20}\lambda_k\mu_k^{-1} - d_{15}\gamma_k$$

$$\Phi_k'(z_k) = d\Phi_k(z_k)/dz_k$$

$$a_{10} = S_{33}; \quad a_{12} = 2S_{13} + S_{44}; \quad a_{14} = S_{11}$$

$$a_{20} = \varepsilon_{11}; \quad a_{21} = d_{15} - d_{33}; \quad a_{22} = \varepsilon_{33}; \quad a_{23} = -d_{31}$$

Здесь u, w — компоненты вектора упругого смещения, φ — потенциал электрического поля, μ_k — корни характеристического уравнения.

$$(a_{10} + a_{12}\mu^2 + a_{14}\mu^4)(a_{20} + a_{22}\mu^2) - \mu^2(a_{21} + a_{23}\mu^2)^2 = 0 \tag{1.3}$$

Так, например, для керамики PZT-5 вычисления дают

$$\mu_1 = 1.024i, \quad \mu_2 = 0.215 + 1.038i, \quad \mu_3 = -0.215 + 1.038i$$

Компоненты главного вектора механических усилий вдоль дуги AB определяются формулами

$$\int_{AB} X_n ds = 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{3} \gamma_k \mu_k \Phi_k (z_k) \Big|_A^B$$

$$\int_{AB} Z_n ds = -2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{3} \gamma_k \Phi_k (z_k) \Big|_A^B \qquad (1.4)$$

Выражение для нормальной компоненты D_n вектора электрической индукции $\overline{D}$ на дуге AB и потока вектора $\overline{D}$ через AB получим, используя формулы (1.2), и формулы для компонентов D_x и D_z из (1.1). Имеем (ψ — угол между нормалью к дуге AB и осью ох)

$$D_n = 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{3} a_k (\psi)\, r_k \Phi_k' (z_k)$$

$$\int_{AB} D_n ds = 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{3} r_k \Phi_k (z_k) \Big|_A^B \qquad (1.5)$$

$$a_k (\psi) = \mu_k \cos \psi - \sin \psi$$

2. Пусть в точке (x_0, z_0) неограниченной пластинки действует сосредоточенная сила $\overline{P} = (P\cos\omega,\ P\sin\omega)$ или сосредоточенный заряд плотности ρ.

Искомые функции в этом случае имеют вид

$$\Phi_k (z_k) = iA_k \ln (z_k - z_{k0}); \quad z_{k0} = x_0 + \mu_k z_0 \qquad (k = 1,\ 2,\ 3) \qquad (2.1)$$

Для определения постоянных A_k необходимо привлечь три условия однозначности перемещений и потенциала электрического поля и три условия вида (L — произвольный замкнутый контур, охватывающий точку (x_0, z_0)).

$$\oint_L X_n ds = P \cos \omega; \quad \oint_L Z_n ds = P \sin \omega; \quad \oint_L D_n ds = \rho \qquad (2.2)$$

Реализация указанных условий приводит к системе шести алгебраических уравнений относительно A_k

$$2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{3} A_k \mu_k^{n-1} = B_n \quad (n = 0,\ 1,\ \dots,\ 5) \qquad (2.3)$$

$$B_0 = -\frac{P \cos \omega}{2\pi a_{10} a_{20}} \left[\frac{a_{12} a_{23} a_{21}}{\Delta_1} + \frac{a_{11} - S_{44}}{2} \right]$$

$$B_1 = \frac{1}{2\pi \Delta_1 a_{20}} \left[P \sin \omega \,(d_{13} a_{22} - a_{20} a_{23}) - a_{22} \rho \right]$$

$$B_2 = \frac{P\cos\omega}{2\pi\Delta_1} a_{23}$$

$$B_3 = \frac{1}{2\pi\Delta_1}\{P\sin\omega(a_{21} - d_{15}) + \rho\}$$

$$B_4 = -\frac{P\cos\omega}{2\pi\Delta_1} a_{21}$$

$$B_5 = \frac{\Delta_3}{2\pi\Delta_1\Delta_2}\left\{P\sin\omega\left[(a_{21} - d_{15}) + \frac{a_{12} - S_{44}}{2}\frac{\Delta_1}{\Delta_3}\right] + \rho\right\}$$

$$\Delta_1 = a_{20}a_{23} - a_{21}a_{22}; \quad \Delta_2 = a_{44}a_{22} - a_{23}^2; \quad \Delta_3 = a_{21}a_{23} - a_{14}a_{20}$$

Определитель системы (2.3) $\Delta \neq 0$, так как

$$\Delta = -\frac{8i \operatorname{Im}\mu_1 \operatorname{Im}\mu_2 \operatorname{Im}\mu_3}{|\mu_1\mu_2\mu_3|}|(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_3)(\mu_1 - \bar{\mu}_2)(\mu_1 - \bar{\mu}_3) \times$$
$$\times (\mu_2 - \bar{\mu}_3)|^2 \tag{2.4}$$

$$\operatorname{Im}\mu_k > 0, \quad \mu_k \neq \mu_n \quad (k \neq n;\ k,\ n = 1,\ 2,\ 3)$$

Таким образом, система (2.3) определяет постоянные A_k. Подставляя их значение в (2.1), находим функции $\Phi_k(z_k)$, описывающие поля механических и электрических величин в неограниченной пьезоэлектрической среде при действии сосредоточенных сил (зарядов).

Пусть теперь в некоторой внутренней точке $M(x_0, z_0)$ верхней полуплоскости сосредоточен заряд плотности ρ или действует сосредоточенная сила $\bar{P} = (P\cos\omega; P\sin\omega)$.

На границе $z = 0$ зададим усилия σ_z, τ_{xz} и потенциал электрического поля $\varphi = 0$ (электродированная граница), в случае неэлектродированной границы, когда внешняя среда представляет собой воздух или вакуум, положим приближенно $D_n = 0$. Это сделать можно, так как диэлектрическая проницаемость воздуха или вакуума в сотни раз меньше, чем у керамики.

Требуется определить функции $\Phi_k(z_k)$, описывающие поля механических и электрических величин в среде.

Искомые функции представим в виде

$$\Phi_k'(z_k) = \frac{iA_k}{z_k - z_{k0}} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega_k(x)}{x - z_k}dx \tag{2.5}$$

$$(k = 1,\ 2,\ 3), \quad \operatorname{Im}\omega_k = 0$$

Постоянные A_k определены в (2.3), функции $\omega_k(x)$ подлежат определению.

В силу (1.2) краевые условия на границе $z = 0$ запишем так:

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3} c_{nk}\Phi_k^{\cdot}(x) = f_n^{\cdot}(x)$$
$$(n = 1,\ 2,\ 3), \quad c_{1k} = \lambda_k\mu_k, \quad c_{2k} = \lambda_k \tag{2.6}$$
$$f_1^{\cdot}(x) = -\tau_{xz}|_{z=0}, \qquad f_2^{\cdot}(x) = \sigma_z|_{z=0}, \quad f_3^{\cdot}(x) = 0$$

Здесь условие при $n = 3$ соответствует для электродированной границы заданию $\partial\varphi/\partial x = 0$, в этом случае $c_{3k} = \lambda_k$. Если граница не покрыта электродами, то электрическое граничное условие берем в виде $D_x = 0$, в этом случае $c_{3k} = -r_k$.

Подставляя предельные значения функций (2.5) в краевые условия (2.6), приходим к следующему матричному сингулярному интегральному уравнению

$$A\Omega(\xi) + \frac{B^*}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \Omega(x)\frac{dx}{x-\xi} = f(\xi) \tag{2.7}$$

$$A = \operatorname{Re} C = \|\operatorname{Re} c_{nk}\|, \quad B^* = i \operatorname{Im} C = i\|\operatorname{Im} c_{nk}\|$$

$$\Omega(x) = \begin{bmatrix} \omega_1(x) \\ \omega_2(x) \\ \omega_3(x) \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \gamma_1\mu_1 & \gamma_2\mu_2 & \gamma_3\mu_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$f_n(x) = f_n^*(x) - 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3} c_{nk}\frac{iA_k}{x - z_{k0}} \qquad (n = 1, 2, 3)$$

$$C = \|c_{nk}\|, \quad \det C \neq 0$$

Проще всего обратить (2.7), решив соответствующую задачу Римана. Опуская выкладки, приведем окончательный результат (C^{-1} — матрица обратная к C).

$$\Omega(\xi) = [\operatorname{Re} C^{-1}] f(\xi) + \frac{\operatorname{Im} C^{-1}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-\xi}\,dx \tag{2.8}$$

$$\operatorname{Re} C^{-1} + i \operatorname{Im} C^{-1} = C^{-1}$$

Учитывая выражение для столбца $f(x)$ из (2.7) и выполняя в (2.8) необходимые квадратуры, находим

$$\Omega(x) = \Omega^*(x) + 2\operatorname{Re}\left\{(\bar{C})^{-1} C\left[\frac{iA_1}{x - z_{10}}, \ \frac{iA_2}{x - z_{20}}, \ \frac{iA_3}{x - z_{30}}\right]\right\}$$

$$\Omega^*(x) = [\operatorname{Re} C^{-1}] f^*(x) + \frac{\operatorname{Im} C^{-1}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi)\frac{d\xi}{\xi - x} = \tag{2.9}$$

$$= [\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*], \quad \bar{C} = \|\bar{c}_{nk}\|$$

Здесь под выражением $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ понимаем матрицу-столбец $\Omega^*(x)$ — известный столбец.

Подставляя $\omega_k(x)$ из (2.9) в представления (2.5), получаем решение поставленной задачи

$$\Phi_k(z_k) = F_k(z_k) + \frac{iA_k}{z_k - z_{10}} + \sum_{n=1}^{3} \frac{i\bar{b}_{kn}\bar{A}_n}{z_k - \bar{z}_{n0}}$$

$$F_k(z_k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_k^*(x)}{x - z_k}\,dx, \qquad B = (\bar{C})^{-1}C = \| b_{kn} \| \tag{2.10}$$

$$(k = 1, 2, 3)$$

Интегрируя (2.10), находим

$$\Phi_k(z_k) = F_k(z_k) + iA_k \ln(z_k - z_{k0}) + \sum_{n=1}^{3} i\bar{b}_{kn}\bar{A}_n \ln(z_k - \bar{z}_{n0}) \tag{2.11}$$

Можно показать, что если действует лишь сосредоточенный заряд, а $P = 0$, то имеют место равенства

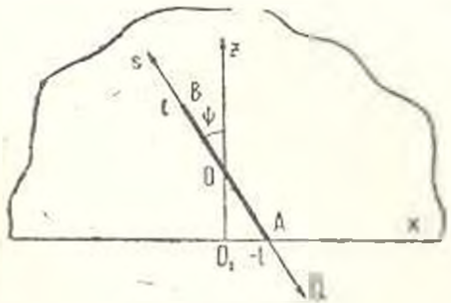
$$A_k + \sum_{n=1}^{3} \bar{b}_{kn}\bar{A}_n = 0$$

то есть функции $\Phi_k(z_k)$ затухают при $|z_k| \to \infty$. Если же $P \neq 0$, то $\Phi_k(z_k)$ ведет себя на бесконечности, как $\ln z_k$, то есть неограниченно возрастает.

Если граница полупространства $z = 0$ свободна от сил, то в (2.10) необходимо положить $F_k(z_k) = 0$ $(k = 1, 2, 3)$.

Функции $\Phi_k(z_k)$ определяют в этом случае функцию Грина двумерной краевой задачи электроупругости для верхней полуплоскости $z > 0$.

3. Рассмотрим пьезокерамическую полубесконечную пластинку, подкрепленную тонким упругим диэлектриком, выходящим на границу $z = 0$ (фиг. 1). Предположим, что к концу ребра приложена сила $\bar{Q}$, ребро работает лишь на растяжение—сжатие, граница $z = 0$ электродирована и и свободна от сил.



Фиг. 1.

В этих условиях в пластинке возникают связанные сингулярные поля механических напряжений и вектора напряженности электрического поля. Электрические краевые условия на линии ребра имеют вид

$$E_s^+ = E_s^-, \quad D_n^+ = D_n^- \tag{3.1}$$

где E_s — касательная компонента вектора напряженности электрического поля, знак плюс относится к левому берегу при движении от начала ребра (точка A) к концу ребра (точка B).

Приравнивая осевую деформацию включения к полусумме деформаций пластинки на его берегах (что допустимо в силу достаточно малой толщины включения), получим, на основании (1.2), условие совместности деформаций ребра и пластинки.

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} a_k(\psi) R_k(\psi)\,\Phi_k'(t_k) = \frac{N}{E_0 F_0}$$

$$N = -\int_{\psi}^{t} g(s)\,ds, \qquad R_k(\psi) = q_k\cos\psi - p_k\sin\psi \tag{3.2}$$

$$t_k = \mathrm{Re}\, t + \mu_k \,\mathrm{Im}\, t, \quad t\in[-l,\ l]$$

Здесь N — усилие в сечении ребра, $-g(s)/d$ — интенсивность контактных усилий, E_0 F_0 — соответственно модуль Юнга, площадь поперечного сечения ребра, ψ — острый угол между ребром и осью z, $[-l,\ l]$ — отрезок, занимаемый осью ребра.

Используя фундаментальное решение (2.10), искомые функции представим в виде

$$\Phi_k'(z_k) = \frac{b_k}{2\pi id}\int_{-l}^{l}\frac{g(s)}{t_k - z_k}\,ds + \frac{1}{2\pi id}\sum_{n=1}^{3}\overline{b}_{kn}\overline{b}_n\int_{-l}^{l}\frac{g(s)\,ds}{\overline{t}_n - z_k} \tag{3.3}$$

$$\mathrm{Im}\, g(s) = 0, \quad t_k = l\,\mu_k\cos\psi + a_k(\psi)\,S$$

Здесь $b_k = A_k$ при $P = 2\pi$, $\rho = 0$; d — толщина пластинки, $2l$ — длина ребра. Можно показать, что представления (3.3) автоматически удовлетворяют на границе $z = 0$ краевым условиям

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \varphi = 0 \tag{3.4}$$

Подставляя в (3.2) полусумму предельных значений функции (3.3) и вводя параметризацию отрезка $[-l,\ l]$ по формулам

$$s = \xi l, \quad -1 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad g(s) = \omega(\xi) \tag{3.5}$$

приходим к сингулярному интегродифференциальному уравнению относительно функции $\omega(\xi)$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\omega(\xi)}{\xi - \xi_0}\,d\xi + \int_{-1}^{1} H^*(\xi,\ \xi_0)\,\omega(\xi)\,d\xi + \lambda\int_{\xi_0}^{1}\omega(\xi)\,d\xi = 0 \tag{3.6}$$

$$G = 2\,\mathrm{Im}\sum_{k=1}^{3} b_k R_k(\psi)$$

$$H^*(\xi,\ \xi_0) = 2\,\mathrm{Im}\sum_{k,\,n=1}^{3}\frac{\overline{b}_{kn}\overline{b}_n\, a_k(\psi)\, R_k(\psi)}{a_n(\psi)\, G\,[\xi - r_{kn}^*(\xi_0)]}$$

$$\lambda = \frac{2\pi l d}{E_0 F_0 G}$$

$$r_{kn}^*(\xi_0) = -1 + \frac{a_k(\psi)}{a_n(\psi)}(1 + \xi_0)$$

К уравнению (3.6) необходимо присоединить дополнительное статическое условие

$$\int_{-1}^{1} \omega(\xi)\, d\xi = -\frac{Q}{l}$$

В ядре $H^{*}(\xi, \xi_0)$ имеется неподвижная особенность в точке

$$\xi = \xi_0 = -1$$

Для определения порядка особенности функции $\omega(\xi)$ на выходящем к границе конце ребра положим

$$\omega(\xi) = \frac{\omega_0(\xi)}{(1+\xi)^{\beta}}; \quad \operatorname{Im}\beta = 0; \quad \omega_0(\xi) \in H[-1;\ 1); \quad 0 < \beta < 1 \tag{3.7}$$

Подставляя (3.7) в интегральное уравнение (3.6) и используя формулы для асимптотических значений интеграла типа Коши в окрестности конца линии интегрирования [7], приходим после стандартной процедуры к трансцендентному уравнению относительно β

$$2\operatorname{Im} \sum_{k,\, n=1}^{3} \bar{b}_{kn} \bar{b}_n R_k(\varphi) \left[-\frac{\alpha_k(\varphi)}{\alpha_n(\varphi)}\right]^{1-\beta} - G\cos\pi\beta = 0 \tag{3.8}$$

4. Пусть теперь полубесконечная пьезоэлектрическая пластинка усилена периодической системой ребер, выходящих на границу $z = 0$ (фиг. 2). Будем предполагать, что к концам ребер приложены одинаковые силы Q и ребра непрерывно скреплены с пластинкой.

Учитывая периодичность механических и электрических полей, представим искомые функции в виде

$$\begin{aligned} \Phi_k'(z_k) &= \frac{b_k}{2Tid} \int_{-1}^{1} g(s) \left[\operatorname{ctg}\frac{\pi(t_k - z_k)}{T} - i\right] ds + \\ &+ \frac{1}{2Tid} \sum_{n=1}^{3} \bar{b}_{kn} \bar{b}_n \int_{-1}^{1} g(s) \left[\operatorname{ctg}\frac{\pi(\bar{t}_n - z_k)}{T} - i\right] ds \end{aligned} \tag{4.1}$$

где T — период структуры.

Очевидно, что условие совместности деформаций (3.2) достаточно выполнить на одном из ребер, в силу (4.1) на остальных ребрах оно выполнится автоматически.

Как и выше, приходим к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению

$$\int_{-1}^{1} G_1(\xi, \xi_0)\, \omega(\xi)\, d\xi + \int_{-1}^{1} G_2(\xi, \xi_0)\, \omega(\xi)\, d\xi + \lambda \int_{\xi_0}^{1} \omega(\xi)\, d\xi = M \tag{4.2}$$

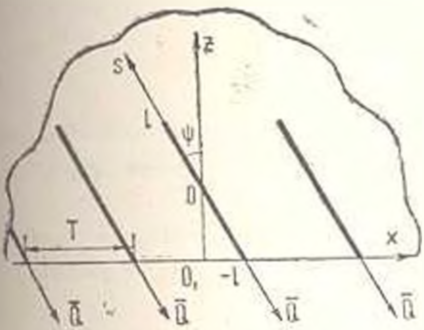
$$G_1(\xi, \xi_0) = 2\,\mathrm{Im} \sum_{k=1}^{3} b_k a_k(\psi) R_k(\psi) \operatorname{ctg}[\alpha_k(\psi)(\xi - \xi_0)]$$

$$G_2(\xi, \xi_0) = 2\,\mathrm{Im} \sum_{k,n=1}^{3} \bar{b}_{kn} \bar{b}_n a_k(\psi) R_k(\psi) \operatorname{ctg}\{\overline{\alpha_n(\psi)}\,[\xi - r^*_{kn}(\xi_0)]\}$$

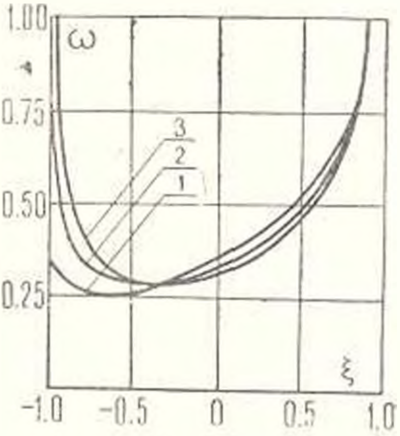
$$\lambda = \frac{2Td}{E_0F_0}, \quad \alpha_k(\psi) = \frac{\pi l}{T} a_k(\psi)$$

$$M = \frac{Q}{l} 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{3} c_k a_k(\psi) R_k(\psi); \quad c_k = b_k + \sum_{n=1}^{3} \bar{b}_{kn} \bar{b}_n$$

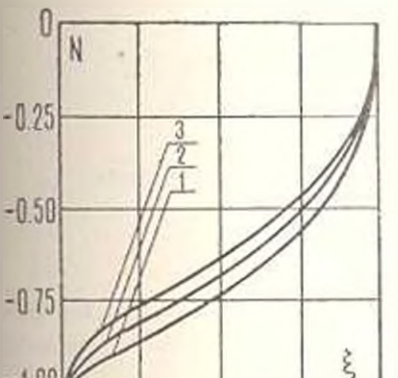
5. Уравнение (3.6) реализовано численно по схеме работы [8].



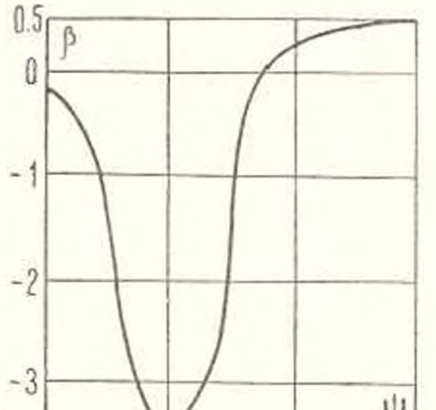
Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

На фиг. 3 представлены кривые изменения контактных усилий $-\omega(\xi)$, а на фиг. 4—внутренних усилий N в сечении ребра по его длине (кривые 1, 2, 3 относятся к значениям $\psi = 55°, 60°, 75°$ соответственно).

На фиг. 5 приведен график изменения порядка особенности β в функции от угла ψ.

Из результатов расчета следует, что при $0 \leqslant \psi \leqslant 51^\circ$ контактные усилия $-\omega(\xi)$ ограничены на конце A, при $51^\circ < \psi \leqslant 90^\circ$ в контактных усилиях появляется особенность, определяемая формулой (3.7).

Авторы благодарят О. А. Письмиченко за помощь при численной реализации алгоритма.

Сумский филиал Харьковского
политехнического института
им. В. И. Ленина

Поступила 12 V 1980

Լ. Վ. ԲԵԼՈԿՈՊԻՏՈՎԱ, Օ. Ա. ԻՎԱՆԵՆԿՈ, Լ. Ա. ՖԻԼՇՏԻՆՍԿԻ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿՈՂԻՑ ԲԵՌՆՎԱԾՈՒԹՅԱՆ ՓՈԽԱՆՑՈՒՄԸ ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ՊՅԵԶՈԿԵՐԱՄԻԿ ՍԱԼԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված են մեկ կողից կամ կողերի պարբերական համակարգից պյեզոկերամիկ կիսաանվերջ սալին բեռնվածության փոխանցման վերաբերյալ էլեկտրաառաձգական երկչափ կոնտակտային խնդիրներ։

Հոդվածում կառուցված Գրինի ֆունկցիայի օգտագործմամբ դրված խնդիրը բերված է կոնտակտային ճիգերի նկատմամբ սինգուլյար ինտեգրադիֆերենցիալ հավասարման։

Եզրագծի վրա դուրս եկող կողի ծայրում կոնտակտային ճիգերի եզակիության կարգը որոշելու համար ստացված է տրանսցենդենտ հավասարում։ Բերվում են թվային արդյունքները։

LOAD TRANSFER FROM AN ELASTIC RIB TO A SEMI-INFINITE PIEZOCERAMIC PLATE

L. V. BELOKOPYTOVA, O. A. IVANENKO, L. A. PHILSHTINSKI

Summary

The paper deals with two-dimensional contact problems of electroelasticity concerning load transfer from a single rib or a periodic system of ribs to a piezoceramic semiinfinite plate.

By using the Green function the given problem is reduced to a singular integro-differential equation relative to contact stresses.

A transcendental equation for determining the order of the peculiarity of contact stresses on the boundary-side rib end is obtained. The results of the calculations are also given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саркисян В. С., Овсепян Л. О.* Контактная задача для анизотропной полуплоскости с упругими креплениями. Докл. АН Арм. ССР, 1971, т. 52, № 5.
2. *Саркисян В. С.* Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Изд-во Ереванского ун-та, 1976.
3. *Долгих В. Н., Фильштинский Л. А.* Об одной модели регулярной кусочно-неоднородной среды. Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1976, № 2.
4. *Долгих В. Н., Фильштинский Л. А.* Модель анизотропной среды, армированной тонкими лентами. Прикл. механика АН УССР, 1979, т. 15, № 4.
5. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
6. *Белокопытова Л. В., Фильштинский Л. А.* Двумерная краевая задача электроупругости для пьезоэлектрической среды с разрезами. Изв. АН СССР, Прикл. математика и механика, 1979, т. 43, вып. 1.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М., изд-во «Наука», 1968.
8. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной упругости. М., изд-во «Наука», 1973.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 5, 1981 Механика

Г. Г. ОГАНЯН

О ВЛИЯНИИ СРЕДНЕГО (АКУСТИЧЕСКОГО) ТЕЧЕНИЯ НА ЭВОЛЮЦИЮ ВОЛНЫ В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

В работе рассматриваются нелинейные задачи распространения волн огибающих монохроматических волн малой амплитуды. На примере модельного уравнения, описывающего волновое движение в различных средах, показано влияние среднего течения на характер распространения модулированной волны (волны огибающей). Выведены и решены нелинейные уравнения модуляций как для одномерного нестационарного (задача самомодуляции волны), так и для стационарного двумерного (задача самофокусировки волны) случаев. Показано, что в первой задаче учет среднего течения оказывает демодулирующее влияние, если параметр, характеризующий дисперсию среды, положителен и обратно — самомодулирующий эффект, если параметр дисперсии отрицателен. Во второй задаче в рассматриваемом приближении средним (акустическим) течением можно пренебречь и характер эволюции модулированной волны зависит лишь от знака параметра дисперсии среды.

Стационарные уравнения модуляций в различных недиссипативных средах и их решения приведены в [1—5].

Рассмотрено влияние кривизны первоначально заданной волны и дифракционного эффекта на эволюцию волны. Показано, что в дефокусирующей среде выпуклая волна начинает сразу расплываться, в то время как вогнутая волна до некоторого момента времени сжимается (самомодулируется) и далее начинается процесс расплывания. В фокусирующей среде, независимо от знака кривизны, эволюция волны имеет волноводный характер. Аналогичная картина распространения модулированной волны имеет место и в задаче самофокусировки пучка. Учет дифракционного эффекта препятствует заострению профиля волны и образованию фокуса.

§ 1. *Уравнения модуляций.* Без учета диссипативных и релаксационных эффектов волновое движение можно описать уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha u\frac{\partial u}{\partial x_1}+\gamma\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}\right)=-\frac{c_0}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1.1}$$

Здесь t — время, $x_1 = x - c_0 t$, x и y — пространственные координаты поперек и вдоль волны, c_0 — невозмущенная скорость звука, u — скорость, α и γ — коэффициенты нелинейности и дисперсии среды. Уравнение (1.1) в одномерном нестационарном случае описывает распространение волн на поверхности неглубокой жидкости, акустических волн в плазме [2, 6], слабых ударных волн в газожидкостной смеси [5, 7].

Решение уравнения (1.1) будем искать в виде

$$u = U_0 + U_1 e^{i\theta} + U_1^* e^{-i\theta} + U_2 e^{2i\theta} + U_2^* e^{-2i\theta} \tag{1.2}$$

Здесь U_0 — действительная функция, описывающая среднее (акустическое) течение, U_i и U_i^* — комплексные и комплексно-сопряженные функции, дифференцирование которых по независимым переменным уменьшает порядок их величин, $\theta = kx_1 - \omega t$ — фаза, k и ω — волновое число и частота невозмущенной волны. Подставляя (1.2) в (1.1), приравнивая коэффициенты при одинаковых по θ степенях экспоненты и удерживая главные члены, получим систему уравнений

$$U_1(\omega - \gamma k^3) + i\frac{\partial U_1}{\partial t} + i\left(-\frac{\omega}{k} - 4\gamma k^2\right)\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial t} - 6\gamma k^2 \frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right) +$$

$$+ \frac{c_0}{2k}\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - \alpha k U_0 U_1 - \alpha k U_1^* U_2 = 0 \tag{1.3}$$

$$2U_2(\omega + 4\gamma k^3) - \alpha k U_1^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial U_0}{\partial t} + \alpha\frac{\partial}{\partial x_1}|U_1|^2\right) + \frac{c_0}{2}\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = 0$$

В линейном приближении из (1.1) нетрудно получить дисперсионное соотношение $\omega = -\gamma k^3$. Подставляя значение ω в уравнение системы (1.3), в главном приближении получим соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} \approx 3\gamma k^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \tag{1.4}$$

подстановка которого в члены более высокого порядка малости приводит систему (1.3) к виду

$$i\left(\frac{\partial U_1}{\partial t} - 3\gamma k^2 \frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right) - 3\gamma k\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} - \frac{\alpha^2}{6\gamma k}|U_1|^2 U_1 - \alpha k U_0 U_1 +$$

$$+ \frac{c_0}{2k}\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0 \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial U_0}{\partial t} + \alpha\frac{\partial}{\partial x_1}|U_1|^2\right) + \frac{c_0}{2}\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = 0$$

Полученная система в рассматриваемом приближении полностью описывает эволюцию огибающей волн (модулированной волны).

§ 2. *Самомодуляция волны.* В одномерном нестационарном варианте уравнений (1.5) предположим [1], что среднее течение, характеризуемое функцией U_0, обусловлено основным, то есть имеет место соотношение (1.4). Тогда система (1.5) сведется к одному уравнению

$$i\left(\frac{\partial U_1}{\partial t} - 3\gamma k^2\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right) - 3\gamma k\,\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \beta |U_1|^2 U_1 = 0, \quad \beta = \frac{\alpha^2}{6\gamma k} \tag{2.1}$$

Эффект влияния среднего течения на вид уравнения (2.1) проявляется, согласно (1.5), через коэффициент β : $\beta > 0$ при $\gamma > 0$ и $\beta < 0$ при $\gamma < 0$. При отсутствии среднего течения $\beta < 0$ при $\gamma > 0$ и $\beta > 0$ при $\gamma < 0$.

1) Пусть $\gamma > 0$ (дефокусирующая среда). Если в уравнении (2.1) перейти к координате $\mu = (x_1 - 3\gamma k^2 t)(6\gamma k)^{-1/2}$ и решение искать в виде $U_1 = a(\mu, t)\exp[i\varphi(\mu, t)]$, где a и φ — амплитуда и фаза волны, то после отделения действительной и мнимой частей, получим систему уравнений

$$\frac{\partial a}{\partial t} - \frac{a}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2} - \frac{\partial a}{\partial\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} = 0$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2a}\frac{\partial^2 a}{\partial\mu^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 - \beta a^2 = 0 \tag{2.2}$$

Рассмотрим задачу с начальными условиями

$$\text{при } t = 0 \qquad a = a_0 \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\mu_0^2}\right), \qquad \varphi = \varphi_0 - \frac{\mu^2}{2R_0} \tag{2.3}$$

где a_0, φ_0 — начальные амплитуда и фаза при $\mu = 0$, μ_0 и $-1/R_0$ — начальные ширина профиля и «кривизна» волны в пространстве времени. Решение системы (2.2) будем искать в виде

$$a = \frac{a_0}{f^{1/2}}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\mu_0^2 f^2}\right), \qquad \varphi = \varphi(t) - \frac{\mu^2}{2R(t)} \tag{2.4}$$

Здесь функция $f(t)$ характеризует степень сжатия профиля волны, причем

$$\frac{1}{R(t)} = \frac{1}{f}\frac{df}{dt} \quad \text{при } t = 0, \quad f(0) = 1, \quad \frac{df(0)}{dt} = \frac{1}{R_0} \tag{2.5}$$

Подставляя (2.4) в (2.2) и в нелинейном слагаемом взяв первых два члена из разложения экспоненты по малым μ, после интегрирования и учета начальных условий (2.4) получим

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^2 = m + n + r - \frac{m}{f} - \frac{n}{f^2}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2\mu_0^2 f^2} + \frac{m\mu_0^2}{4f} \tag{2.6}$$

$$m = \frac{2\alpha^2 a_0^2}{3\gamma k\mu_0^2} = \frac{4a_0^2}{\mu_0^2}\beta, \qquad n = \frac{1}{\mu_0^4}, \qquad r = \frac{1}{R_0^2}$$

1) $\beta > 0$ (влияние акустического течения), тогда $m > 0$. Не выписывая здесь решений уравнения (2.6), записываемых через элементарные функции, опишем вкратце эволюцию волны.

Если первоначально заданная волна выпуклая ($R_0 > 0$), то сразу начинается процесс демодуляции (расплывания) волны. Если же первоначальная волна вогнутая ($R_0 < 0$), то до момента времени

$$t_* = \frac{\sqrt{r}}{m+n+r} - \frac{m}{2(m+n+r)^{3/2}} \ln \frac{\sqrt{4n(m+n+r)+m^2}}{2\sqrt{r(m+n+r)}+m+2n+2r}$$

начинается процесс самомодуляции (сжатия) волны, потом она становится плоской и далее выгибается в сторону выпуклости и начинается процесс демодуляции.

2) $\beta < 0$ (отсутствие акустического течения), тогда $m < 0$, а уравнение (2.6) перепишем в виде

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^2 = n + r - m + \frac{m}{f} - \frac{n}{f^2}, \qquad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2f^2\mu_0^2} - \frac{m\mu_0^2}{4f} \tag{2.7}$$

Покажем, что при отсутствии в уравнениях (2.2) дифракционных членов (вторых производных) происходит заострение гауссова профиля волны. Действительно, для простоты принимая первоначально заданную волну плоской и интегрируя уравнение (2.7), в котором положено $n = r = 0$, находим

$$t = (\arcsin\sqrt{1-f} + \sqrt{f-f^2})(m)^{-1/2}$$

В момент $t = t_0 = \varepsilon\mu_0(3\gamma k/2)^{1/2}/(\varepsilon a_0)$ получаем $f = 0$ и $a \to \infty$. Если же волна неплоская, то для всех $R_0 < 0$ и $R_0 > 0$, удовлетворяющих условию $R_0^2 > 1/m$, имеет место аналогичная картина.

Для физически верного описания картины распространения необходимо в (2.7) учесть дифракционные члены, которые в окрестности $t = t_0$ начинают играть важную роль. Для общности примем, что первоначально заданная волна неплоская. Поведение решений уравнения для f из (2.7) во многом определяется выбором корней f_1, f_2, соответствующих выбору знаков «+» и «—» в решении уравнения $(n + r - m) f^2 + mf - n = 0$, исследование которого необходимо проводить для каждого конкретного случая.

2а) Пусть $n + r - m > 0$, то есть $r > m - n$, что приводит к условию $0 < f_1 < 1$, $f_2 < 0$. Решая с учетом (2.5) уравнение (2.7) и исследуя получаемое решение, приходим к выводу, что если первоначальная волна выпуклая ($R_0 > 0$), то независимо от «радиуса кривизны», имеет место ее демодуляция. Если же начальная волна вогнутая ($R_0 < 0$), то она начинает самомодулироваться до момента

$$t_1 = \frac{\sqrt{r}}{n+r-m} + \frac{m}{(n+r-m)^{3/2}} \ln \frac{2n-m+2r-2\sqrt{r(n-m+r)}}{2n-m+2r+2\sqrt{r(n-m+r)}}$$

При $t = t_1$ волна становится плоской, а при $t > t_1$ — выпуклой и начинается процесс демодуляции.

2б) Пусть $n + r - m < 0$, то есть $r < m - n$, что приводит к условию $0 < f_1 < 1$, $f_2 > 1$.

Первоначально заданная волна выпуклая ($R_0 > 0$). Примем $m - 2n > 0$, то есть нелинейный эффект больше дифракционного, при этом, как будет показано ниже, $f_1 < f < f_2$. Взяв в уравнении (2.7) знак «+» и интегрируя его с учетом (2.5), получим (ветвь IC, фиг. 1)

$$t = \frac{\sqrt{r} - \sqrt{(n+r-m)f^2 + mf - n}}{m-n-r} -$$

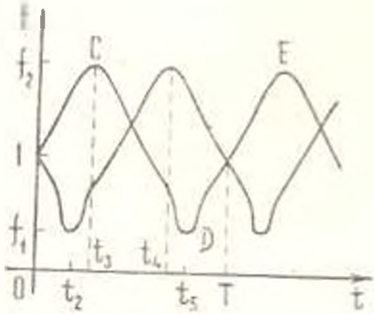
$$- \frac{m}{2(m-n-r)^{3/2}} [\arcsin F(t) - \arcsin B]$$

$$F(t) = \frac{2(n+r-m)f + m}{\sqrt{(m-2n)^2 + 4nr}}, \qquad B = \frac{2n - m + 2r}{\sqrt{(m-2n)^2 + 4nr}}$$

Для того, чтобы подкоренное выражение было больше нуля, необходимо выполнение условия $f_1 < f < f_2$. При $f = f_2$ находим

$$t_3 = \frac{\sqrt{r}}{m-n-r} + \frac{m}{2(m-n-r)^{3/2}} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin B\right)$$

Ввиду того, что, начиная с момента $t > t_3$, $f'(t) < 0$, следует при интегрировании уравнения (2.7) брать знак «—», при этом постоянная интегрирования определяется из условия: при $t = t_3$ $f = f_2$. Решение запишется в виде (ветвь СД)



Фиг. 1.

$$t = \frac{\sqrt{r} + \sqrt{(n+r-m)f^2 + mf - n}}{m-n-r} +$$

$$+ \frac{m}{2(m-n-r)^{3/2}} [\arcsin F(t) +$$

$$+ \arcsin B + \pi]$$

При $f = f_1$ получаем

$$t_5 = \frac{\sqrt{r}}{m-n-r} +$$

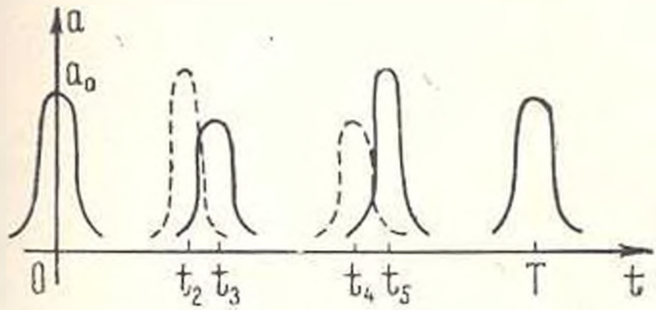
$$+ \frac{m}{2(m-n-r)^{3/2}} \left(\frac{3\pi}{2} + \arcsin B\right)$$

Начиная с момента $t > t_5$ $f'(t) > 0$, поэтому в (2.7) следует брать знак «+» и постоянную интегрирования определять из условия: при $t = t_5$ $f = f_1$, откуда находим решение (ветвь ДЕ)

$$t = \frac{\sqrt{r} - \sqrt{(m-n-r)f^2 + mf - n}}{m-n-r} -$$

$$- \frac{m}{2(m-n-r)^{3/2}} [\arcsin F(t) - \arcsin B - 2\pi]$$

При $f = 1$ получаем $T = 2\pi m (m-n-r)^{-3/2}$, являющееся периодом функции $f(t)$, так как картина изменения f периодически повторится. Таким образом, начальная выпуклая волна начинает демодулироваться до момента $t = t_2$, при котором она, превращаясь в плоскую, далее выгибается в сторону вогнутости; при этом начинается процесс самомодуляции, продолжающийся до момента $t = t_4$. В момент $t = t_5$ вогнутая волна, превращаясь в плоскую, далее становится выпуклой и начинается процесс демодуляции, причем описанный процесс эволюции волны огибающей периодически повторяется (фиг. 2). Первоначально заданная волна вогнутая ($R_0 < 0$). Примем $m - 2n > 0$, при этом $l_1 < l < l_2$. Не выписывая здесь решений, получаемых аналогично вышеприведенному исследованию, опишем картину эволюции волны огибающей (фиг. 1).



Фиг. 2.

Начальная вогнутая волна начинает самомодулироваться до момента

$$t_2 = \frac{\sqrt{r}}{n + r - m} + \frac{m}{2(m - n - r)^{3/2}}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin B\right)$$

при котором она, превращаясь в плоскую, далее выгибается в сторону выпуклости и начинается процесс демодуляции, продолжающийся до момента

$$t_4 = -\frac{\sqrt{r}}{m - n - r} + \frac{m}{2(m - n - r)^{3/2}}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin B\right)$$

При $t = t_4$ выпуклая волна, превращаясь в плоскую, далее становится вогнутой и начинается процесс самомодуляции. Такая картина распространения волны периодически повторяется с периодом $T = \pi m (m - n - r)^{-3/2}$.

Пусть теперь $m - 2n < 0$, то есть нелинейный эффект меньше дифракционного, что приводит к условию $l_1 < l < l_2$. Картина распространения волны огибающей аналогична описанию, приведенному в пункте 2б), лишь выпуклая и вогнутая волны меняются ролями.

Таким образом, из проведенного исследования следует, что в дефокусирующей среде ($\gamma > 0$) учет среднего (акустического) течения приводит к демодуляции (расплыванию) волны огибающей.

3) Пусть $\gamma < 0$ (фокусирующая среда). Заменяя в уравнении (2.1) γ на $(-\gamma)$ и переходя к координате $\mu = (x_1 + 3\gamma k^2 t)(6\gamma k)^{-1/2}$, получим для амплитуды и фазы систему уравнений

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{a}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} + \frac{\partial a}{\partial \mu}\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2a}\frac{\partial^2 a}{\partial \mu^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right)^2 + \beta a^2 = 0$$

Здесь и ниже обозначения те же, что и в п. 1. Рассмотрим задачу об эволюции волны, первоначально заданной в виде гауссова профиля:

при $t = 0$ $$a = a_0 \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\mu_0^2}\right), \qquad \varphi = \sigma_0 + \frac{\mu^2}{2R_0}$$

Если решение рассматриваемой системы искать в виде

$$a = \frac{a_0}{f^{1/2}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\mu_0^2 f^2}\right), \qquad \varphi = \sigma(t) + \frac{\mu^2}{2R(t)}$$

то, аналогично выводу (2.6), получим систему уравнений

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^2 = m + n + r - \frac{m}{f} - \frac{n}{f^2}, \qquad \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{1}{2\mu_0^2 f^2} - \frac{m\mu_0^2}{4f} \tag{2.8}$$

3а) $\beta < 0$ (влияние акустического течения), тогда $m < 0$ и уравнение для функции $f(t)$ из (2.8) совпадает с (2.7). Таким образом, учет среднего течения в фокусирующей среде приводит к самомодуляции волны огибающей.

3б) $\beta > 0$ (отсутствие акустического течения), тогда $m > 0$ и уравнение для функции $f(t)$ совпадает с (2.6), то есть для волны огибающей имеет место процесс демодуляции (расплывание профиля волны).

§ 3. *Узкие пучки.* В задачах об узких пучках изменения параметров течения по касательной к волне превосходят их изменения поперек волны, поэтому в уравнениях (1.5) второй производной по x_1 можно пренебречь в сравнении с y. Перейдем в (1.5) от подвижной (x_1, y, t) к неподвижной (x, y, t) системе координат и стационарный двумерный вариант полученных уравнений запишем в виде

$$\begin{gathered} i(c_0 - 3\gamma k^2)\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\alpha^2}{6\gamma k}|U_1|^2 U_1 - \alpha k U_0 U_1 + \frac{c_0 - 3\gamma k^2}{2k}\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0 \\ \alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}|U_1|^2 + \frac{c_0}{2}\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = 0 \end{gathered} \tag{3.1}$$

В системе (3.1) $|U_1| \sim \varepsilon$, $x \sim 1$, $y \sim \varepsilon^{1/2}$, $\gamma \sim \varepsilon^3$, $k \sim \varepsilon^{-1}$, где ε — безразмерный малый параметр, поэтому из второго уравнения нетрудно заметить, что $U_0 \sim \varepsilon^3$. Таким образом, в рассматриваемом приближении среднее (акустическое) течение не влияет на распространение волны огибающей, и система (3.1) сведется к уравнению

$$i\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\alpha^2}{6\gamma k c_0}|U_1|^2 U_1 + \frac{1}{2k}\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0 \tag{3.2}$$

Если решение (3.2) искать в виде $U_1 = a(x, y)\exp[i\varphi(x, y)]$, то для амплитуды a и фазы φ получим систему уравнений [1—5]

$$
\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{1}{k}\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{a}{2k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0
$$

$$
\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{1}{2k}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2-\frac{1}{2ak}\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}+\gamma a^2=0 \qquad (3.3)
$$

Рассмотрим задачу об эволюции волны, первоначально заданной в виде гауссова пучка

$$
\text{при } x=0 \qquad a=a_0\exp\left(-\frac{y^2}{2y_0^2}\right), \qquad \varphi=\varphi_0+\frac{y^2}{2R_0} \qquad (3.4)
$$

где a_0, φ_0 — начальные амплитуды и фаза волны при $x=0$, y_0 и $1/R_0$ — начальные ширина профиля и кривизна волны. Задача (3.3)—(3.4) ставилась и подробно исследовалась в [2, 3], поэтому дадим краткое описание поведения волны.

Если $\gamma>0$, в дефокусирующей среде происходит расплывание пучка.

Если $\gamma<0$, в фокусирующей среде происходит волноводное распространение волны, то есть узкий пучок стремится фокусироваться, однако дифракционный эффект, выражаемый в (3.3) вторыми производными, препятствует образованию фокуса. Как было показано выше, процесс эволюции волны огибающей периодически повторяется.

В заключение отметим, что в более высшем приближении в работе [4] на основании закона сохранения потока импульса исследовано влияние акустического течения на самофокусировку звукового пучка. Утверждается, что учет среднего течения приводит к дополнительной расфокусировке пучка в дефокусирующей среде ($\gamma>0$). Тогда, по аналогии с [4], можно утверждать, что в фокусирующей среде ($\gamma<0$) акустическое течение усиливает процесс фокусировки пучка.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 8 XII 1980

Դ. Դ. ՕՀԱՆՅԱՆ

ԴԻՍՊԵՐՍԻՎ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐՈՒՄ ԱԼԻՔԻ ՋԱՐԴԱՅՄԱՆ ՎՐԱ ՄԻՋԻՆ (ԱԿՈՒՍՏԻԿ) ՀՈՍԱՆՔԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում են փոքր ամպլիտուդայի մոնոխրոմատիկ ալիքների պարուրիչ ալիքի տարածման խնդիրները։ Ցույց է տրված, որ ոչ ստացիոնար միաչափ խնդրում ակուստիկ հոսանքի հաշվառումը դիսպերսիայի դրական պարամետրի դեպքում ալիքի տարածման վրա թողնում է դեմոդուլացվող ազդեցություն, իսկ դիսպերսիայի բացասական պարամետրի դեպքում՝ ինքնամոդուլացվող էֆեկտ։ Երկչափ ստացիոնար խնդրում ակուստիկ հոսանքը չի ազդում ալիքների պարուրիչի էվոլյուցիայի վրա։

ON INFLUENCE OF MEAN (ACOUSTIC) FLOW ON THE EVOLUTION OF WAVE IN DISPERSIVE MEDIA

G. G. OHANIAN

S u m m a r y

The problems of propagation of enveloping waves of monochromatic waves of small amplitude are considered. It is shown that in one-dimensional nonstationary problem the taking into account of acoustic flow exerts a demodulation influence on propagation of wave, when the parameter of dispersion is positive and conversely — the self-modulation effect, when the parameter of dispersion is negative. In a two-dimensional stationary problem the acoustic flow has no influence on evolution of enveloping waves.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
2. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. М., «Наука», 1979
3. *Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.* Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде. Усп. физ. н., 1967. т. 93, № 1, стр. 19—70.
4. *Заболотская Е. А.* Два механизма самовоздействия звуковых волн, распространяющихся в газожидкостной смеси. Акуст. ж., 1977. т. 23, № 4, стр. 591—595.
5. *Баглоев А. Г., Оганян Г. Г.* Распространение модулированных нелинейных волн в релаксирующей газожидкостной смеси. Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 1, стр. 133—143.
6. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
7. *Оганян Г. Г.* Распространение слабых волн в релаксирующей газожидкостной смеси. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1979, т. 32, № 2, стр. 3—13.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIV, № 5, 1981 Механика

Б. Е. ПОБЕДРЯ, С. В. ШЕШЕНИН

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛАМЕ ОБ УПРУГОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Задаче о равновесии параллелепипеда посвящена обширная литература [1]. В настоящее время получил широкое распространение вариационно-разностный метод получения априори устойчивых разностных схем. Его применение для построения разностных аналогов уравнений теории упругости в перемещениях для параллелепипеда приводит к необходимости программирования большого числа различных разностных уравнений. Дело в том, что разностные уравнения, к которым приводит вариационно-разностный метод, имеют различный вид в разных точках параллелепипеда (во внутренних точках уравнения будут одного типа, на каждой грани—другого и т. д.). Всего получается 27 типов различных уравнений. Ниже дается метод получения разностных уравнений для любой точки параллелепипеда по уравнениям, записанным в одной из его вершин. Получена разностная схема для ортотропного неоднородного упругого и упруго-пластического параллелепипеда. Предложен метод решения полученных разностных уравнений и приведено численное решение двух краевых задач.

1. Вторая краевая задача теории упругости заключается в решении уравнений равновесия

$$L\vec{u} = \operatorname{div}(\underset{\sim}{C}\varepsilon(\vec{u})) + \vec{X} = 0, \quad \vec{x} \in V \tag{1}$$

при заданном на границе Σ векторе поверхностной нагрузки $\vec{s}^e$

$$l\vec{u} = (\underset{\sim}{C}\varepsilon(\vec{u}))\vec{n}\,\Big|_{\Sigma} = \vec{s}^e \tag{2}$$

где $\underset{\sim}{C}(\vec{x})$ — тензор модулей упругости, $\underset{\sim}{\varepsilon}(\vec{u})$ — тензор деформаций, компоненты которого выражены по формулам Коши через вектор перемещений $\vec{u}$ [2], $\vec{X}$—вектор объемных сил, $\vec{n}$—единичный вектор внешней нормали к границе. Все величины будем считать безразмерными. Задача (1), (2) имеет решение, определяемое с точностью до смещения тела как жесткого целого, при известных условиях самоуравновешенности нагрузки [3]. Задача (1), (2) эквивалентна задаче минимизации лагранжиана [4]

$$W = 1/2\int_V \underset{\sim}{\sigma}(\vec{u})\,\varepsilon(\vec{u})\,dV - \int_V \vec{X}\vec{u}\,dV - \int_\Sigma \vec{s}^e\vec{u}\,d\Sigma \tag{3}$$

где $\sigma(\vec{u})$ — тензор напряжений, выраженный через вектор перемещений посредством закона Гука и формул Коши, V — область внутри параллелепипеда.

Начало декартовой системы координат поместим в одной из вершин параллелепипеда, а оси x_1, x_2, x_3 направим вдоль его сторон. В области V введем равномерную сетку с шагом h_α по направлению $x_\alpha : h_\alpha = l_\alpha/(N_\alpha - 1)$, где N_α — число узлов сетки на ребре длиной l_α, параллельном оси x_α, $\alpha = 1, 2, 3$. Введем обозначения: E — тождественный оператор, T_α^n — оператор сдвига, ∂_α — правая, а $\partial_{\bar{\alpha}}$ — левая разностные производные, Λ_α — вторая разностная производная

$$E\vec{u} = \vec{u}, \quad T_\alpha^n \vec{u}(i_1, i_2, i_3) = \vec{u}(i_1 + n\delta_{1\alpha}, i_2 + n\delta_{2\alpha}, i_3 + n\delta_{3\alpha})$$

$$\partial_\alpha = (T_\alpha^1 - E)/h_\alpha, \qquad \partial_{\bar{\alpha}} = (E - T_\alpha^{-1})/h_\alpha, \quad \Lambda_\alpha = \partial_{\bar{\alpha}}\partial_\alpha$$

Далее обозначим

$$[\vec{u}, \vec{\varphi}]_\alpha = 1/2 \left\{ \sum_{i_\alpha = 1}^{N_\alpha - 1} \vec{u}\vec{\varphi}h_\alpha + \sum_{i_\alpha = 2}^{N_\alpha} \vec{u}\vec{\varphi}h_\alpha \right\}, \qquad i_\beta, i_\gamma = \mathrm{const}$$

$$[\vec{u}, \vec{\varphi}]_{\alpha\beta} = [[\vec{u}, \vec{\varphi}]_\alpha]_\beta, \qquad i_\gamma = \mathrm{const}, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma$$

Тогда разностными аналогами интегралов $\int\limits_V \vec{u}\vec{\varphi}\,dV$ и $\int\limits_\Sigma \vec{u}\vec{\varphi}\,d\Sigma$ будут соответственно

$$[\vec{u}, \vec{\varphi}] = [[[\vec{u}, \vec{\varphi}]_1]_2]_3$$

$$[\vec{u}, \vec{\varphi}]_\Sigma = \sum_{\alpha=1}^{3} \left\{ [\vec{u}, \vec{\varphi}]_{\beta\gamma}\Big|_{i_\alpha = 1} + [\vec{u}, \vec{\varphi}]_{\beta\gamma}\Big|_{i_\alpha = N_\alpha} \right\}$$

Норму определим выражением $\|\vec{u}\| = [\vec{u}, \vec{u}]^{1/2}$. Введем обозначение

$$f(k_1, k_2, k_3) = C_{1111}(\partial_{k_1}u_1)^2 + C_{2222}(\partial_{k_2}u_2)^2 + C_{3333}(\partial_{k_3}u_3)^2 +$$
$$+ C_{1212}(\partial_{k_1}u_2 + \partial_{k_2}u_1)^2 + C_{1313}(\partial_{k_1}u_3 + \partial_{k_3}u_1)^2 + C_{2323}(\partial_{k_2}u_3 + \partial_{k_3}u_2)^2 +$$
$$+ 2(C_{1122}\partial_{k_1}u_1\partial_{k_2}u_2 + C_{1133}\partial_{k_1}u_1\partial_{k_3}u_3 + C_{2233}\partial_{k_2}u_2\partial_{k_3}u_3)$$

где $k_1 = 1, \bar{1}$, $k_2 = 2, \bar{2}$, $k_3 = 3, \bar{3}$. Поскольку $\partial_{\bar{\alpha}} = T_\alpha^{-1}\partial_\alpha$, то разностный аналог лагранжиана W для ортотропной среды будет иметь вид

$$W^h = 1/2w^h = [\vec{X}, \vec{u}] - [\vec{s}^0, \vec{u}]_\Sigma \tag{4}$$

где $$\bar{w}^h = \sum_{j_1=0}^{1} \sum_{j_2=0}^{1} \sum_{j_3=0}^{1} \sum_{i_1=j_1+1}^{N_1+j_1-1} \sum_{i_2=j_2+1}^{N_2+j_2-1} \sum_{i_3=j_3+1}^{N_3+j_3-1} f_1(j_1, j_2, j_3)\, h_1 h_2 h_3/8 \tag{5}$$

$$f_1(j_1, j_2, j_3) = f(\bar{T}_1^{-j_1}\partial_1,\ \bar{T}_2^{-j_2}\partial_2,\ \bar{T}_3^{-j_3}\partial_3)$$

Если компоненты тензора $\underset{\sim}{C}$ разрывны на плоскостях, параллельных координатным плоскостям, то область V представим в виде объединения параллелепипедов Π_k, в которых тензор $\underset{\sim}{C}$ непрерывен. Тогда $\bar{W}(V) = \sum_k \bar{W}(\Pi_k)$ и $\bar{W}^h = \sum_k \bar{W}^h(\Pi_k)$. Аналогично можно построить лагранжиан для тела, являющегося объединением конечного числа параллелепипедов. Однако ввести во всей области V единую равномерную сетку можно не всегда.

2. Лагранжиан $\bar{W}^h$ есть функция конечного числа переменных $\vec{u}(i_1, i_2, i_3)$, поэтому для нахождения его минимума нужно решить уравнения

$$\frac{\partial \bar{W}(\vec{u})}{\partial u_\beta(i_1, i_2, i_3)} = 0, \qquad i_\alpha = 1, \ldots, N_\alpha,\ \alpha, \beta = 1, 2, 3 \tag{6}$$

которые запишем в виде

$$L^h \vec{u} + \vec{\Phi} = 0 \tag{7}$$

где

$$(\bar{L}^h \vec{u})_\beta = -\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{w}^h(\vec{u})}{\partial u_\beta(i_1, i_2, i_3)} \tag{8}$$

Сеточная функция $\vec{\Phi}$ определяется следующим образом:

$\vec{\Phi} = \vec{X}$ — во внутренних точках,

$\vec{\Phi} = \vec{X} + 2\dfrac{\vec{s}_\alpha^{\,0}}{h_\alpha}$ — на гранях, перпендикулярных оси x_α,

$\vec{\Phi} = \vec{X} + 2\left(\dfrac{\vec{s}_\beta^{\,0}}{h_\beta} + \dfrac{\vec{s}_\gamma^{\,0}}{h_\gamma}\right)$ — на ребрах, параллельных оси x_α,

$\vec{\Phi} = \vec{X} + 2\sum\limits_{\alpha=1}^{3} \dfrac{\vec{s}_\alpha^{\,0}}{h_\alpha}$ — в вершинах. Здесь $\vec{s}_\alpha^{\,0}$ — поверхностная нагрузка, действующая на грань, перпендикулярную оси x_α.

Введем обозначение

$$g_\alpha(\vec{u}, i_1, i_2, i_3, j_1, j_2, j_3) = \frac{C_{\alpha\alpha}}{4h_\alpha^2} \bar{T}_\alpha^{j_\alpha} u_\alpha - \left(\frac{C_{\alpha 2}}{4h_2^2} + \frac{C_{\alpha 3}}{4h_3^2} + \frac{C_{\alpha 1}}{4h_1^2}\right) u_\alpha +$$

$$+ \frac{C_{\alpha\beta}}{4h_\beta^2}\bar{T}_\beta^{j_\beta} u_\alpha + \frac{C_{\alpha\gamma}}{4h_\gamma^2}\bar{T}_\gamma^{j_\gamma} u_\alpha + \sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{3} \left\{ \frac{z_{\alpha\beta}}{8h_\alpha h_\beta} \left\{ (C_{\alpha\alpha\beta\beta} - \bar{T}_\gamma^{j_\gamma} C_{\alpha\gamma\alpha\beta})\, \bar{T}_\beta^{j_\beta} u_\beta - \right.\right.$$

$$- (\bar{T}_\gamma^{j_\gamma} C_{\alpha\alpha\beta\beta} - C_{\alpha\beta\alpha\beta})\, \bar{T}_\alpha^{j_\alpha} u_\beta + (\bar{T}_\alpha^{j_\alpha} C_{\alpha\alpha\beta\beta} + \bar{T}_\beta^{j_\beta} C_{\alpha\beta\alpha\beta})\, \bar{T}^{j_\alpha} \bar{T}_\beta^{j_\beta} u_\beta -$$

$$\left.\left. - (C_{\alpha\alpha\beta\beta} + C_{\alpha\beta\alpha\beta})\, u_\beta \right\}\right\}, \quad z_{\alpha\beta} = z_{\beta\alpha}, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma$$

$$C_{\alpha\beta} = (\bar{T}_\alpha^{j_\alpha} C_{\alpha\beta\alpha\beta} + C_{\alpha\beta\alpha\beta})/2, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

Тогда в вершинах оператор L^h можно записать в виде:
вершина (0, 0, 0)

$$\vec{L}_{(1)}^h \vec{u} = \vec{g}\,(\vec{u}, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \quad z_{12} = z_{23} = z_{13} = 1$$

вершина (l_1, 0, 0)

$$\vec{L}_{(2)}^h \vec{u} = \vec{g}\,(\vec{u}, N_1, 1, 1, -1, 1, 1), \quad z_{12} = -1, \quad z_{23} = 1, \quad z_{13} = -1$$

вершина (0, l_2, 0)

$$\vec{L}_{(3)}^h \vec{u} = \vec{g}\,(\vec{u}, 1, N_2, 1, 1, -1, 1), \quad z_{12} = -1, \quad z_{23} = -1, \quad z_{13} = 1$$

вершина (l_1, l_2, 0)

$$\vec{L}_{(4)}^h \vec{u} = \vec{g}\,(\vec{u}, N_1, N_2, 1, -1, -1, 1), \quad z_{12} = 1, \quad z_{23} = z_{13} = -1$$

вершина (0, 0, l_3)

$$\vec{L}_{(5)}^h \vec{u} = \vec{g}\,(\vec{u}, 1, 1, N_3, 1, 1, -1), \quad z_{12} = 1, \quad z_{23} = z_{13} = -1$$

вершина (l_1, 0, l_3)

$$\vec{L}_{(6)}^h \vec{u} = \vec{g}\,(\vec{u}, N_1, 1, N_3, -1, 1, -1), \quad z_{12} = z_{23} = -1, \quad z_{13} = 1$$

вершина (0, l_2, l_3)

$$\vec{L}_{(7)}^h \vec{u} = \vec{g}\,(\vec{u}, 1, N_2, N_3, 1, -1, -1), \quad z_{12} = -1, \quad z_{23} = 1, \quad z_{13} = -1$$

вершина (l_1, l_2, l_3)

$$\vec{L}_{(8)}^h \vec{u} = \vec{g}\,(\vec{u}, N_1, N_2, N_3, -1, -1, -1), \quad z_{12} = z_{23} = z_{13} = 1$$

где $\vec{g}$ — вектор с компонентами g_1, g_2, g_3.

Для получения разностных уравнений в остальных узлах сетки используем аддитивность лагранжиана. Рассмотрим внутренний узел (i_1, i_2, i_3) и проведем через него три плоскости, соответственно параллельные координатным плоскостям. Область V разобьется на 8 параллелепипедов $V=\sum_{k=1}^{8}\Pi_k$, $\bar{w}^h(V)=\sum_{k=1}^{8}\bar{w}^h(\Pi_k)$. Из (8) следует, что $\bar{L}^h$ представляется в виде

$$\bar{L}^h=\sum_{k=1}^{8}\bar{L}^h_{(k)},\quad \bar{L}^h_{(k)}=\vec{g}\,(\vec{u},\ i_1,\ i_2,\ i_3,\ j_1,\ j_2,\ j_3)\tag{9}$$

где числа $j_1, j_2, j_3, z_1, z_2, z_3$ зависят от k, как указано выше.

Аналогично, на гранях $\bar{L}^h$ равен сумме четырех, а на ребрах — сумме двух операторов $\bar{L}^h_{(k)}$, соответствующих тем вершинам, которые принадлежат данной грани или данному ребру. Таким образом, $\bar{L}^h$ строится одинаково для точек непрерывности или точек разрыва компонент тензора $\underset{\sim}{C}$. Также в виде суммы соответствующего числа операторов $\bar{L}^h_{(k)}$ получим $\bar{L}^h$ в любой точке тела, составленного из параллелепипедов. Во внутренних точках для случая непрерывных компонент тензора $\underset{\sim}{C}$ оператор $\bar{L}^h$ имеет вид

$$(\bar{L}^h\vec{u})_\alpha=\sum_{\beta=1}^{3}\partial_{\bar\beta}(C_{\alpha\beta}\partial_\beta u_\alpha)+\frac{1}{4}\sum_{\substack{\gamma=1\\ \gamma\neq\alpha}}^{3}[\partial_\alpha(C_{\alpha\alpha\gamma\gamma}\partial_\gamma u_\gamma)+$$

$$+\partial_\gamma(C_{\alpha\gamma\alpha\gamma}\partial_\alpha u_\gamma)+\partial_{\bar\alpha}(C_{\alpha\alpha\gamma\gamma}\partial_{\bar\gamma}u_\gamma)+\partial_{\bar\gamma}(C_{\alpha\gamma\alpha\gamma}\partial_{\bar\alpha}u_\gamma)+$$

$$+\partial_\alpha(C_{\alpha\alpha\gamma\gamma}\partial_{\bar\gamma}u_\gamma)+\partial_{\bar\gamma}(C_{\alpha\gamma\alpha\gamma}\partial_\alpha u_\gamma)+\partial_{\bar\alpha}(C_{\alpha\alpha\gamma\gamma}\partial_\gamma u_\gamma)+\partial_\gamma(C_{\alpha\gamma\alpha\gamma}\partial_{\bar\alpha}u_\gamma)]\tag{10}$$

$$\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3.$$

В случае, когда компоненты C_{ijkl} постоянны, вычисление $\bar{L}^h$ во внутренних точках по формуле (10), а на границе $\sum$ — в виде суммы соответствующего числа операторов $\bar{L}^h_{(k)}$ приводит к небольшому удлинению программы, зато время счета сокращается более, чем вдвое.

3. Свойства разностной схемы (7) известны [5]. При условии

$$C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\geqslant\mu_0\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij},\quad \mu_0>0,\quad ijkl=1,\ 2,\ 3\tag{11}$$

схема (7) устойчива. Для изотропного тела

$$C_{ijkl}=\lambda(\vec{x})\,\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\vec{x})\,(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})\tag{12}$$

и $\mu_0=2\min\limits_{V}\mu(\vec{x})$, где λ, μ — постоянные Ламе. Из (8) при учете того, что $\bar{w}^h$ — квадратичная форма, следуют соотношения

$$w^h(\vec{u})=[-\bar{L}^h\vec{u},\ \vec{u}],\quad w^h(\vec{u},\ \vec{\varphi})=[-\bar{L}^h\vec{u},\ \vec{\varphi}]\tag{13}$$

где $\overline{\omega}^h(\overline{u}, \overline{\varphi})$ — симметричная билинейная форма, соответствующая квадратичной форме $\overline{\omega}^h(\overline{u})$. Из (13) следуют самосопряженность оператора $\overline{L}^h:[\overline{L}^h\overline{u}, \overline{\varphi}] = [\overline{u}, \overline{L}^h\overline{\varphi}]$ и положительная определенность оператора $-\overline{L}^h:[-\overline{L}^h\overline{u}, \overline{u}] > 0$.

4. Получим разностный аналог краевой задачи теории малых упруго-пластических деформаций при активном нагружении [6] или нелинейной теории упругости. Для этого в $\tilde{L}^h$ достаточно положить

$$C_{ijkl} = \lambda(\varepsilon_u)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\varepsilon_u)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

$$\mu(\varepsilon_u) = \mu(1 - \omega(\varepsilon_u)), \quad \lambda(\varepsilon_u) = K - 2/3\,\mu(\varepsilon_u) \tag{14}$$

$$\varepsilon_u = (e_{ij}e_{ij})^{1/2}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - 1/3\,\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

Здесь K — модуль объемного сжатия, ε_u — интенсивность деформаций, ω — функция пластичности Ильюшина [6]. Разностные уравнения теории малых упруго-пластических деформаций запишем в виде

$$\overline{P}_h\overline{u} + \overline{\Phi} = 0 \tag{15}$$

На функцию ω наложим известные условия [6]

$$0 \leqslant \omega < \omega + \frac{d\omega}{d\varepsilon_u}\varepsilon_u \leqslant \omega_0 < 1, \quad \frac{d\omega}{d\varepsilon_u} > 0 \tag{16}$$

На части границы $\sum$ могут быть заданы некоторые компоненты вектора перемещений $\overline{u}$. Тогда в таких узлах по соответствующим направлениям вместо уравнений (7) имеем заданные компоненты вектора перемещений.

5. Для решения задачи (7) используем итерационный метод [7]

$$\tilde{B}\frac{\overline{u}^{n+1} - \overline{u}^n}{\tau_{n+1}} = \tilde{L}^h\overline{u}^n + \overline{\Phi}, \quad n = 0, \dots, N-1 \tag{17}$$

где τ_n — чебышевский набор параметров (Ч. Н. П.) [7]

$$\tau_n = 2\Big/\left\{\gamma_2 + \gamma_1 - (\gamma_2 - \gamma_1)\cos\frac{\pi(2n-1)}{2N}\right\} \tag{18}$$

а оператор $\tilde{B}$ имеет вид

$$\tilde{B} = \prod_{\alpha=1}^{3}(\tilde{E} + \varkappa R_\alpha), \quad R_\alpha = \begin{pmatrix} -\Lambda_{\alpha\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & -\Lambda_{\alpha\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda_{\alpha\alpha} \end{pmatrix}$$

Постоянные γ_1, γ_2 определяются из неравенств

$$\gamma_1[B\vec{u}, \vec{u}] \leqslant [-L^h\vec{u}, \vec{u}] \leqslant \gamma_2[B\vec{u}, \vec{u}] \tag{19}$$

которые запишем сокращенно $\gamma_1 B \leqslant -L^h \leqslant \gamma_2 B$. Выбор оптимального параметра $\varkappa$ и γ_1, γ_2 известны [5, 7].

Описанный метод был реализован в виде программ на ФОРТРАНе для ЭВМ БЭСМ-6. Рассмотрим решение задачи М. М. Филоненко-Бородича [8] о сжатии параллелепипеда $l_{1,2} = 1$, $l_3 = 2$,

$N_{1,2} = 9$, $N_3 = 17$ куполообразной нагрузкой

$$s_{1,2} = 0, \; s_3 = (1 - \cos(2\pi x_1))(1 - \cos(2\pi x_2)) \quad \text{при} \quad x_3 = 0$$

$$s_{1,2} = 0, \; s_3 = -(1 - \cos(2\pi x_1))(1 - \cos(2\pi x_2)) \quad \text{при} \quad x_3 = 2$$

(остальные грани свободны). Итерационный процесс (17) останавливался, как только удовлетворялось неравенство

$$\|\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n\| / \|\vec{u}^1 - \vec{u}^0\| \leqslant 0.5 \cdot 10^{-4} \tag{20}$$

Для выполнения этого условия достаточно провести пять циклов из восьми итераций ($N = 8$). Это занимает около пяти минут. Порядок решаемой системы равен 4131. В таблице 1 приведено сравнение σ_{33} при $x_3 = 1$ с другими решениями этой задачи.

Цифрой 1 обозначено решение М. М. Филоненко-Бородича [8], цифрой 2 — решение В. П. Нетребко, Л. Е. Мальцева, Н. П. Матвеева [9], цифрой 3 — решение М. Мишонова [10], цифрой 4 — предлагаемое решение.

Приведем решение задачи о сжатии куба $l_i = 1$, $N_i = 11$, $E = 1$, $\nu = 1/3$ жесткими плитами без проскальзывания, то есть при $x_3 = 0$, $\vec{u} = 0$, при $x_3 = 1$, $u_{1,2} = 0$, $u_3 = -0.1$, боковая поверхность свободна. Для удовлетворения неравенства (20) достаточно в этой задаче двух циклов из восьми итераций. На фиг. 1, 2 приведено распределение интенсивности напряжений σ_u и максимального удлинения ε_{max} в плоскости $x_2 = 0.5$. В кубе образуются две пирамидальные области (основаниями пирамид служат сжимающие плиты), в которых σ_u и ε_{max} существенно меньше значений этих же величин в средней части куба, то есть при $x_3 = 0.5$. Такое распределение σ_u и ε_{max} соответствует наблюдаемому в опытах распадению куба на куски пирамидальной формы [11, 12]. Известно [12], что разрушение в отсутствие смазки происходит при сжимающей силе в 2—4 раза большей, чем в случае наличия смазки. Полученное решение показывает, что классические критерии прочности, согласно которым разрушение происходит, когда, например, σ_u или ε_{max} достигают заданных значений, не могут объяснить отмеченной разницы в сопротивлении сжатию, ибо в средней части куба напряженное состояние практически одинаково в случаях наличия или отсутствия смазки (разница составляет около 7%).

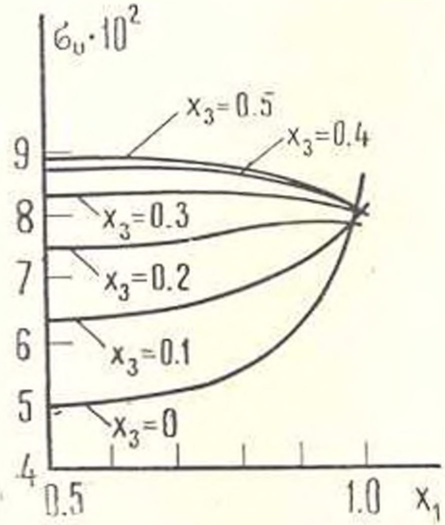
6. Для решения задачи теории малых упруго-пластических деформаций (15) применим итерационный метод

$$L^h \frac{\vec{u}^{m+1} - \vec{u}^m}{\tau_{m+1}} + P_h \vec{u}^m + \vec{\Phi} = 0 \tag{21}$$

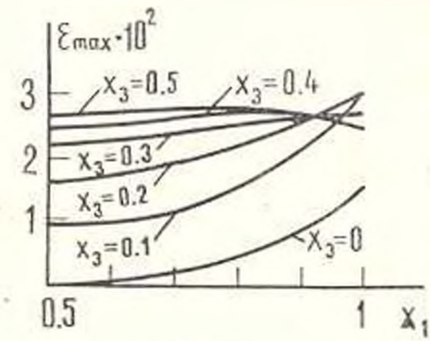
являющийся модификацией метода упругих решений Ильюшина [6]. На каждой итерации схемы (21) нужно решать задачу теории упругости

$$L^h \vec{u}^{m+1} + \vec{\Phi}^m = 0 \tag{22}$$

где $\vec{\Phi}^m = -L^h \vec{u}^m + \tau_{m+1}(P_h \vec{u}^m + \vec{\Phi})$



Фиг. 1.



Фиг. 2,

Параметры τ_m возьмем по формуле (18), а γ_1, γ_2 определяются теперь из неравенств

$$\gamma_1(-L^h) \leqslant -\vec{P}_h'(\vec{v}) \leqslant \gamma_2(-L^h) \tag{23}$$

Из неравенства (23) и равенства [7]

$$[\vec{P}_h(\vec{u}_1) - \vec{P}_h(\vec{u}_2), \Delta\vec{u}] = [-\vec{P}_h'(\vec{v})\,\Delta\vec{u},\ \Delta\vec{u}],\quad \vec{v} = \vec{u}_1 + t\Delta\vec{u}$$

$$\Delta\vec{u} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1,\quad t \in [0,\ 1]$$

получим

$$[\vec{P}_h(\vec{u}_1) - \vec{P}_h(\vec{u}_2),\ \Delta\vec{u}] \geqslant \gamma_1[-L^h \Delta\vec{u},\ \Delta\vec{u}]$$

Отсюда, используя разностные аналоги неравенств Корна и Пуанкаре [5]

$$\int\limits_V u_{i,j} u_{i,j}\, dV \leqslant M_1 \int\limits_V \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}\, dV,\quad \int\limits_V u_i u_i\, dV \leqslant M_2 \int\limits_V u_{i,j} u_{i,j}\, dV$$

справедливые при условиях

$$\int\limits_V \vec{u}\, dV = 0, \quad \int\limits_V \operatorname{rot} \vec{u}\, dV = 0$$

при учете (11) получим

$$[-(\tilde{P}_h(\vec{u}_2) - P_h(\vec{u}_1)), \quad \vec{u}_2 - \vec{u}_1] \geqslant \gamma_1 \frac{2\mu}{M_1 M_2} \| \vec{u}_2 - \vec{u}_1 \|^2$$

Это неравенство выражает сильную монотонность оператора $-P_h$ и обеспечивает [7] существование и единственность решения задачи (15), устойчивость разностной схемы (15).

Оператор P_h', определяемый в виде

$$P_h'(\vec{v})\,\vec{u} = \frac{d P_h(\vec{v} + t\vec{u})}{dt}\bigg|_{t=0}$$

есть оператор $\bar{L}^h$, если в последнем положить

$$C_{ijkl}(\vec{v}) = \lambda(v_u)\,\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(v_u)\,(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - 2\mu \frac{d\omega(v_u)}{dv_u} \frac{v_{ij} v_{kl}}{v_u}$$

$$v_{ij} = 1/2\,(v_{i,j} + v_{j,i}) - 1/3\, v_{k,k}\,\delta_{ij}, \quad v_u = (v_{ij} v_{ij})^{1/2} \tag{24}$$

Тензор C (24) определяет некоторую упругую анизотропную среду, для которой

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = 2\mu\,(1 - \omega(v_u))\, e_{ij} e_{ij} - 2\mu \frac{d\omega}{dv_u} \frac{v_{ij} v_{kl}}{v_u} e_{ij} e_{kl} + K\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ll}$$

Тогда будем иметь

$$2\mu\left(1 - \omega - \frac{d\omega}{dv_u} v_u\right) e_{ij} e_{ij} + K\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} \leqslant \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \leqslant 2\mu e_{ij} e_{ij} + K\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} \tag{25}$$

Из (13), (25) следуют неравенства (23) с $\gamma_1 = \inf\left(1 - \omega - \dfrac{d\omega}{dv_u} v_u\right)$, $\gamma_2 = 1$.

Точность, с которой нужно решать задачу (17), невелика [13]. При этом внешний итерационный процесс будет осуществляться по схеме (21), но не с оператором $\bar{L}^h$, а с „близким“ оператором $\bar{L}^h(E - \bar{D}_M)^{-1}$, где $\bar{D}_M$ — разрешающий оператор внутреннего итерационного процесса (17) [14]. В задаче о сжатии куба из упруго-пластического материала с линейным упрочнением ($l = 1$, $N_\alpha = 5$, $\alpha = 1, 2, 3$) равномерно распределенной по граням $x_3 = 0$ и $x_3 = 1$ нормальной нагрузкой оказалось оптимальным проводить один внутренний цикл из восьми итераций. Если же задачу (22) решать «точно», то есть так, чтобы выполнялось условие (20), то скорость сходимости внешнего итерационного процесса возрастет всего на 2%. Для выяснения различия в скорости сходимости схемы (21) и метода упругих решений (схема (21) при $\tau_n = 1$) был проведен ряд расчетов

Таблица 1

	$x_1=0$ $x_2=0$	$x_1=0.25$ $x_2=0$	$x_1=0.5$ $x_2=0$	$x_1=0.25$ $x_2=0.25$	$x_1=0.5$ $x_2=0.25$	$x_1=0.5$ $x_2=0.5$
1	0.00	1.12	0.97	1.07	1.10	1.47
2	0.90	0.94	0.89	1.03	1.036	1.10
3	0.95	—	1.00	0.97	1.03	1.06
4	0.92	0.96	1.01	1.00	1.047	1.10

Таблица 2

ε_{33}	метод упругих решений		Ч. Н. П.	
	δ_8	δ_{16}	δ_8	δ_{16}
$2.5\cdot10^{-3}$	0.20	0.09	0.06	0.01
$5\cdot10^{-3}$	0.30	0.13	0.04	0.008

описанной выше задачи. Результаты приведены в табл. 2. Отношение модуля упрочнения к модулю μ было взято равным 0.1, предел текучести $\varepsilon_s = 0.1\%$

$$\delta_m = \|B^{-1}(P_h\bar{u}^m + \bar{\Phi})\| / \|B^{-1}(P_h\bar{u}^0 + \bar{\Phi})\|$$

Механико-математический факультет
МГУ им. М. В. Ломоносова

Поступила 22 VII 1980

Բ. Ե. ՊՈԲԵԴՐՅԱ, Ս. Վ. ՇԵՇԵՆԻՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԶՈՒԳԱՀԵՌԱՆԻՍՏԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ԼԱՄԵԻ ԽՆԴՐԻ ԹՎԱՅԻՆ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Վարիացիոն-տարբերական եղանակով ստացված է տարբերական սխեմա, որը մոտարկում է առաձգականության և փոքր առաձգապլաստիկ դեֆորմացիաների տեսությունների առնչություններով խնդիրը ծավալային և մակերևույթային ուժերի ազդեցության տակ գտնվող զուգահեռանիստի հավասարակշռության մասին։ Ցույց է տրված զուգահեռանիստի դանիացած կետում տարբերական հավասարումների ստացման հնարավորությունը, որոնք գրվում են գագաթներից մեկի համար։ Երկու եզրային խնդիրների համար բերվում են թվային լուծումներ։

A NUMERICAL SOLUTION FOR THE LAME PROBLEM OF AN ELASTIC PARALLELEPIPED

B. E. POBEDRYA, S. V. SHESHENIN

Summary

A variational-difference method is used to obtain a system of difference equations, approximating the boundary problem in the theory of elasticity and the deformational theory of plasticity on the equilibrium of parallelepiped under the action of wall and surface forces. The possibility to obtain the difference equations in any point of parallelepiped, using the equations obtained for the vertex, is studied. Numerical solutions for two boundary problems of elasticity are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Суслова Н. Н.* Методы решения пространственной задачи теории упругости для тела в форме параллелепипеда. В сб.: Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. Сер. механ. тверд. деф. тела. М., Наука, 1980, т. 13, с. 187—296.
2. *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. М., изд-во Моск. ун-та, изд. 2-е, 1979.
3. *Новацкий В.* Теория упругости. М., Мир, 1975.
4. *Победря Б. Е.* Некоторые общие теоремы механики деформируемого твердого тела. ПММ, 1979, т. 43, № 3, с. 531—541.
5. *Белухина И. Г.* Разностные схемы для решения некоторых задач статической теории упругости в анизотропном случае. Вычисл. методы и программирование. М., изд-во Моск. ун-та, 1972, № 19, с. 123—145.
6. *Ильюшин А. А.* Пластичность, ч. 1. М.—Л., ГИТТЛ, 1948.
7. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М., Наука, 1978.
8. *Филоненко-Бородич М. М.* Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях. ПММ, 1951, т. 15, вып. 2, с. 137—148.
9. *Нетребко В. П., Мальцев Л. Е., Матвеев Н. П.* Об одном видоизменении вариационного метода Папковича—Филоненко—Бородича решения пространственных задач теории упругости. Инж. ж. МТТ, 1973, № 6, с. 133—138.
10. *Минонов М.* Общ. метод за решение на пространствената задача на еластичността за параллелепипеда. В сб. Изв. Техн. ин-т Бълг. АН. София, 1960, кн. 9—10.
11. *Гончаров И. Г.* Прочность каменных материалов в условиях различных напряженных состояний. М.—Л., Госстройиздат, 1960.
12. *Филиль А.* Техническая механика. Сопротивление материалов, т. 3. М.—Л., ОНТИ, 1937.
13. *Дьяконов Е. Г., Николаев И. К.* О решении некоторых задач теории сетчатых оболочек. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1973, т. 13, № 4, с. 938—951.
14. *Дьяконов Е. Г.* О построении итерационных методов на основе использования операторов, эквивалентных по спектру. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1966, т. 6, № 1, с. 12—34.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 5, 1981 Механика

М. И. ТЕПЛЫЙ

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ, ИМЕЮЩЕЙ КРУГЛОЕ ОТВЕРСТИЕ, СО ВСТАВЛЕННЫМ В НЕГО УПРУГИМ ДИСКОМ

Рассмотрение задач о внутреннем сжатии круговых цилиндров близких радиусов впервые было начато в работах И. Я. Штаермана. При решении поставленной им задачи [1] принято, что внешняя нагрузка, действующая на внутренний и внешний цилиндры по их поверхностям, осуществляется в виде нормального давления, диаметрально противоположного давлению на поверхности контакта. Заметим, что согласно принятой терминологии под внешним цилиндром следует подразумевать неограниченное тело с круговой цилиндрической полостью.

При выводе уравнения задачи использовано известное решение о сжатии цилиндра двумя диаметрально противоположными силами [2] и решение аналогичной задачи для внешности кругового отверстия в упругой среде. Воспользовавшись принципом суперпозиции, И. Я. Штаерман нашел формулы для радиальных перемещений контурных точек цилиндров S_1 и S_2, создаваемых распределенной нагрузкой (фиг. 1), а затем получил интегральное уравнение для определения контактного давления. Это уравнение имеет вид

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p(\vartheta)\left[A\cos(\alpha-\vartheta)\ln \operatorname{tg}\frac{|\alpha-\vartheta|}{2} - B\sin|\alpha-\vartheta| + C\right]d\vartheta =$$

$$= \varepsilon(1-\cos\alpha) - \delta\cos\alpha, \quad -\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0 \tag{1.1}$$

где α_0 — угол контакта; $\varepsilon = R_1 - R_2$ — радиальный зазор:

$$A = 2(\nu_1^* R_1 + \nu_2^* R_2), \quad B = \varkappa_2^* R_1 + \varkappa_1^* R_2, \quad C = 2\nu_2^* R_2$$

$$\nu_1^* = \frac{\lambda_1 + 2G_1}{4\pi G_1(\lambda_1 + G_1)}, \quad \nu_2^* = \frac{\lambda_2 + 2G_2}{4\pi G_2(\lambda_2 + G_2)}, \quad \varkappa_1^* = \frac{1}{4(\lambda_1 + G_1)}, \quad \varkappa_2^* = \frac{1}{4(\lambda_2 + G_2)}$$

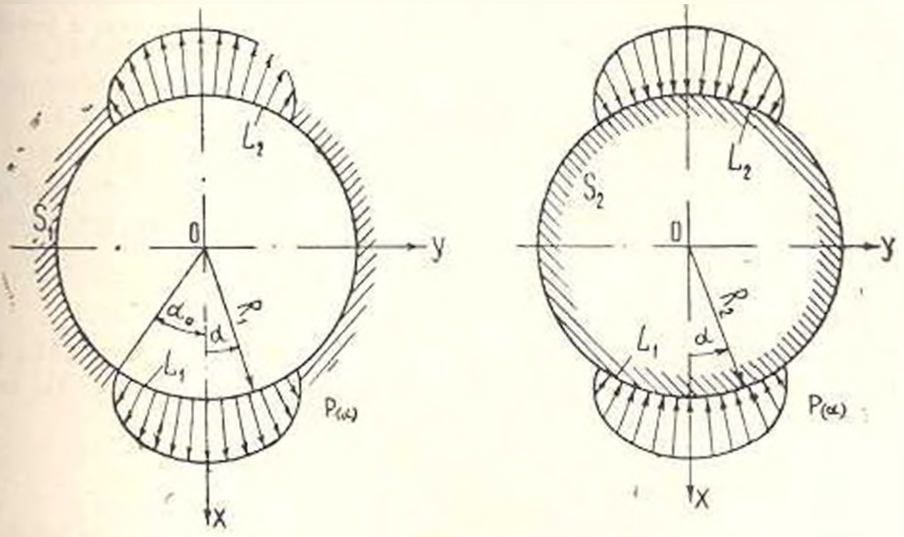
λ_1, λ_2, G_1, G_2 — упругие постоянные сжимаемых тел; δ — сближение тел S_1 и S_2 при сжатии; $p(\alpha)$ — контактное давление. Здесь индекс 1 относится к упругой среде с круговым отверстием радиуса R_1, а индекс 2—к цилиндру S_2 радиуса R_2.

Применив метод конечных разностей, И. Я. Штаерман получил численное решение задачи для случая, когда упругие свойства контактирующих цилиндров одинаковы.

Построим решение контактной задачи, поставленной И. Я. Штаерманом, воспользовавшись комплексным представлением плоской задачи теории упругости [3]. Для вывода уравнения рассматриваемой задачи запишем условие контакта

$$k_1(\alpha) = k_2(\alpha) \quad (|\alpha| \leqslant \alpha_0) \tag{1.2}$$

где $k_1(\alpha)$ и $k_2(\alpha)$ — кривизны деформированных границ в области контакта соответственно кругового отверстия в упругой среде S_1 и цилиндра S_2.



Фиг. 1.

Кривизна деформированного контура круговой области радиуса R может быть определена по известной формуле

$$k(\alpha) = \frac{1}{R} - \frac{v_r + v_r''}{R^2} \tag{1.3}$$

где $v_r(\alpha)$ — радиальное смещение точек рассматриваемого контура; $v_r'' = \frac{d^2 v_r}{d\alpha^2}$.

Сумму радиального смещения v_r и его второй производной v_r'' можно выразить на основании [3] следующим образом:

для точек контура кругового отверстия в упругой среде S_1

$$v_{r1} + v_{r1}'' = \mathrm{Re}\frac{R_1}{2G_1}\{\varkappa_1[\Phi_1^-(t_0) - t_0\Phi_1'^-(t_0)] + \Phi_1^+(t_0) - t_0\Phi_1'^+(t_0)\} \tag{1.4}$$

для точек контура упругого цилиндра S_2

$$v_{r2} + v_{r2}'' = \mathrm{Re}\frac{R_2}{2G_2}\{\varkappa_2[\Phi_2^+(t_0) - t_0\Phi_2'^+(t_0)] + \Phi_2^-(t_0) - t_0\Phi_2'^-(t_0)\} \tag{1.5}$$

Здесь $\Phi_j^+(t_0)$ и $\Phi_j^-(t_0)$ — граничные значения функций Колосова-Мусхелишвили $\Phi_j(z)$ при $z \to t_0$, причем $z = re^{i\theta}$ $(i = \sqrt{-1})$, $t_0 = R_j e^{i\theta}$ — точка на контуре радиуса R_j, $j = 1, 2$ соответственно для контактирующих тел S_1 и S_2; $\Phi_j'(t_0) = \frac{d\Phi^-(t_0)}{dt_0}$; $\varkappa_j = 3 - 4\nu_j$ для плоской деформации и $\varkappa_j = 3 - \nu_j/1 + \nu_j$ для обобщенного плоского напряженного состояния; $G_j = E_j/2(1+\nu_j)$, а E_j и ν_j — соответственно модули Юнга и коэффициенты Пуассона для материалов контактирующих цилиндров.

Для областей S_1 и S_2, когда на дугах контакта L_1 и L_2 действует неизвестное контактное давление (фиг. 1), функции $\Phi_j(z)$ получены в таком виде:

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1+L_2}\frac{p(t)\,dt}{t-z}, \qquad t = R_1 e^{i\theta}$$

$$\Phi_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1+L_2}\frac{p(t)\,dt}{t-z} + \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_1+L_2}\frac{p(t)\,dt}{t}, \qquad t = R_2 e^{i\theta} \tag{1.6}$$

где $p(t)$ — контактное давление; θ — полярный угол.

На основании формул Сохоцкого—Племеля [3] перейдем в (1.6) к граничным значениям, подставив которые в выражения (1.4) и (1.5), получим

$$v_{r1} + v_{r1}'' = \frac{1-\varkappa_1}{4G_1}R_1 p(\alpha) - \frac{1+\varkappa_1}{4\pi G_1}R_1\int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\operatorname{ctg}(\alpha-\theta)\,p'(\theta)\,d\theta +$$

$$+ \frac{1+\varkappa_1}{4\pi G_1}R_1\int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0}p(\alpha)\,d\alpha \tag{1.7}$$

$$v_{r2} + v_{r2}'' = \frac{1-\varkappa_2}{4G_2}R_2 p(\alpha) + \frac{1+\varkappa_2}{4\pi G_2}R_2\int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\operatorname{ctg}(\alpha-\theta)\,p'(\theta)\,d\theta \tag{1.8}$$

Подставим формулы (1.7) и (1.8) в равенство (1.3) и потребуем тождественного совпадения кривизн деформированных контуров цилиндров S_1 и S_2 в области контакта. В результате получим следующее уравнение для определения контактного давления:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\operatorname{ctg}(\alpha-\theta)\,p'(\theta)\,d\theta = \frac{(1-\varkappa_1)G_2-(1-\varkappa_2)G_1}{(1+\varkappa_1)G_2+(1+\varkappa_2)G_1}p(\alpha) +$$

$$+ \frac{(1-\varkappa_1)G_2P_1}{\pi[(1+\varkappa_1)G_2+(1+\varkappa_2)G_1]} + \frac{4\varepsilon G_1G_2}{[(1+\varkappa_1)G_2+(1+\varkappa_2)G_1]R} \tag{1.9}$$

где

$$P_1 = \int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0}p(\alpha)\,d\alpha \tag{1.10}$$

При выводе уравнения (1.9) принято $R_1 \approx R_2 = R$, однако $R_1 - R_2 = \varepsilon \neq 0$. Такое допущение возможно, когда радиусы поверхностей контактирующих цилиндров близки.

Если известно распределение контактного давления $p(\alpha)$ по поверхности контакта, то можно найти равнодействующую P этого давления по формуле

$$P = R \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p(\alpha) \cos \alpha \, d\alpha \qquad (1.11)$$

Интегро-дифференциальное уравнение (1.9) совместно с (1.11) дают полное решение поставленной задачи.

Сведем уравнение (1.1), полученное для случая плоской деформации, к уравнению (1.9). С этой целью продифференцируем (1.1) дважды по α. Затем, складывая полученный результат с исходным уравнением (1.1) и учитывая тождества

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{p(\vartheta)\, d\vartheta}{\sin^2(\alpha - \vartheta)} = -\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \operatorname{ctg}(\alpha - \vartheta)\, p'(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p(\vartheta) \sin|\alpha - \vartheta|\, d\vartheta + \frac{d^2}{d\alpha^2} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p(\vartheta) \sin|\alpha - \vartheta|\, d\vartheta = 2p(\alpha)$$

приходим к уравнению, имеющему такую же структуру, как и уравнение (1.9) и совпадающему с ним, если в уравнении (1.1) положить $B = \varkappa_2^* R_2 - \varkappa_1^* R_1$.

Имеющееся несоответствие между уравнениями (1.1) и (1.9) вызвано ошибкой, допущенной в формуле (227) на стр. 144 книги И. Я. Штаермана [1]. Эта формула должна быть записана (в обозначениях И. Я. Штаермана) так:

$$v_r = P\left(-2\vartheta \cos\varphi \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi|}{2} - \varkappa \sin|\varphi|\right)$$

Решение интегро-дифференциального уравнения (1.9) наталкивается на значительные математические трудности. Однако, когда упругие свойства контактирующих цилиндров одинаковы ($G_1 = G_2 = G$, $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa$), уравнение (1.9) упрощается, принимая вид

$$\frac{1}{\varkappa} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \operatorname{ctg}(\alpha - \vartheta)\, p'(\vartheta)\, d\vartheta = \frac{P_1}{2\varepsilon} + \frac{2\varepsilon G}{(1 + \varkappa) R}, \qquad -\alpha_0 < \alpha < \alpha_0 \qquad (1.12)$$

Найдем решение уравнения (1.12). С этой целью в (1.12) произведем замену переменных, полагая $\operatorname{tg}\alpha = \xi$ и $\operatorname{tg}\vartheta = x$. В результате имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a_0}^{a_0} \frac{p'(\operatorname{arc\,tg} x)}{x-\xi}\,dx = f, \qquad -a_0 \leqslant \xi \leqslant a_0 \tag{1.13}$$

где

$$f = \frac{P_2}{\pi} - \frac{P_1}{2\pi} - \frac{\varepsilon E}{(1+\varkappa)(1+\nu)R}, \quad a_0 = \operatorname{tg} \alpha_0$$

$$P_1 = \int_{-a_0}^{a_0} \frac{p(\operatorname{arc\,tg} \xi)}{1+\xi^2}\,d\xi, \qquad P_2 = \int_{-a_0}^{a_0} \frac{\xi p'(\operatorname{arc\,tg} \xi)}{1+\xi^2}\,d\xi$$

Общее решение уравнения (1.13) дается формулой [5]

$$p'(\operatorname{arc\,tg} \xi) = \frac{-1}{\pi\sqrt{a_0^2-\xi^2}} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{f(x)\sqrt{a_0^2-x^2}}{x-\xi}\,dx + \frac{D}{\sqrt{a_0^2-\xi^2}} \tag{1.14}$$

Подставляя в (1.14) значение функции $f(\xi) = f$ и вычисляя при этом необходимые интегралы, получим

$$p'(\operatorname{arc\,tg} \xi) = \frac{f\xi}{\sqrt{a_0^2-\xi^2}} + \frac{D}{\sqrt{a_0^2-\xi^2}} \tag{1.15}$$

Искомая функция $p(\alpha)$ определяется так:

$$p(\alpha) = \int \frac{p'(\operatorname{arc\,tg} \xi)}{1+\xi^2}\,d\xi + C_1 \tag{1.16}$$

Постоянные C_1 и D найдем из условия равенства нулю контактного давления в конечных точках области контакта, то есть из условия $p(\pm\alpha_0) = 0$.

Исходя из формул (1.15), (1.16) и указанного выше условия, получаем

$$p(\alpha) = \frac{2\varepsilon E}{(1+\nu)(1+\varkappa)[4-\ln(a_0^2+1)]R} \ln \frac{\sqrt{a_0^2+1}+\sqrt{a_0^2-\xi^2}}{\sqrt{a_0^2+1}-\sqrt{a_0^2-\xi^2}} \tag{1.17}$$

$$|\alpha| \leqslant \alpha_0$$

$$P_1 - 2P_2 = \frac{2\pi\varepsilon E}{(1+\varkappa)(1+\nu)R}\left(\frac{4\sqrt{a_0^2+1}}{4-\ln(a_0^2+1)} - 1\right) \tag{1.18}$$

Подставляя формулу (1.17) в равенство (1.11) и вычисляя при этом необходимые интегралы, приходим (с учетом (1.18)) к следующему уравнению:

$$\frac{P}{\varepsilon E} = \frac{8[K(k)-E(k)]}{(1+\nu)(1+\varkappa)[4-\ln(a_0^2+1)]} \tag{1.19}$$

где $E(k)$ и $K(k)$ — полные эллиптические интегралы; $k = \sin\alpha_0$.

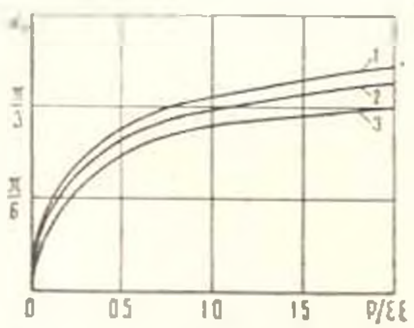
Формула (1.19) устанавливает зависимость между углом контакта α_0, равнодействующей P внешней нагрузки, радиальным зазором ε и упругими постоянными E и ν.

В таблице приведены результаты вычислений контактного давления и величины $P/\varepsilon E$ для случая, когда контактирующие цилиндры находятся в условиях плоской деформации ($\varkappa = 3-4\nu$) и $\nu = 0.3$. В числителе приведены значения $p(\alpha)$ и $P/\varepsilon E$, подсчитанные по формулам (1.17) и (1.19), а в знаменателе — по формулам, установленным в работе [4] для случая, когда внешняя нагрузка приложена в центре внутреннего цилиндра.

На фиг. 2 построены кривые, выражающие изменение угла контакта α_0 в зависимости от величины $P/\varepsilon E$, причем кривая 1 построена по формуле (1.19), кривая 2 — по формуле, полученной в работе [4], а кривая 3 — по данным работы [1]. Из таблицы и фиг. 2 видно, что в рассматриваемых случаях нагружения цилиндров отклонение в результатах по $P/\varepsilon E$ и $p(\alpha)$ незначительное при $\alpha < 5\pi/18$.

Таблица

α_0	Значение контактного давления $p(\alpha)$, доли $\varepsilon E/R$, при α					$\frac{P}{\varepsilon E}$
	0	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{2}{9}\pi$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4}{9}\pi$	
$\frac{\pi}{9}$	$\frac{0.1010}{0.1042}$	$\frac{0}{0}$				$\frac{0.0546}{0.0563}$
$\frac{2}{9}\pi$	$\frac{0.2418}{0.2740}$	$\frac{0.2096}{0.2363}$	$\frac{0}{0}$			$\frac{0.2495}{0.2814}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{0.5537}{0.7329}$	$\frac{0.5232}{0.6847}$	$\frac{0.4165}{0.5267}$	$\frac{0}{0}$		$\frac{0.7950}{1.0297}$
$\frac{4}{9}\pi$	$\frac{5.3699}{5.3279}$	$\frac{5.2305}{5.0876}$	$\frac{4.7704}{4.3643}$	$\frac{3.7892}{3.1084}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{9.3160}{8.7113}$



Фиг. 2.

Сравнение кривых 1 и 3 на фиг. 2 показывает, что имеет место значительное отклонение результатов приближенного решения уравнения, установленного в работе [1], с результатами точного решения задачи, выражаемого формулами (1.17)—(1.19). Существенная погрешность приближенного решения объясняется, как было показано выше, ошибкой, допущенной в уравнении И. Я. Штаермана.

Дрогобычский педагогический
институт им. Ив. Франко

Поступила 17 XII 1979

Մ. Ի. ՏՅՈՊԼԻ

ԿԼՈՐ ԱՆՑՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԱՆՑՔԻ ՄԵՋ ԴՐՎԱԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԿԱՎԱՌԱԿԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Ճշտվել է իրար մոտիկ շառավիղներ ունեցող երկու կլոր գլանների Ի. Յա. Շտաերմանի դրվածքով կոնտակտային խնդրի հավասարումը: Տրվում է այդ հավասարման ճշգրիտ լուծումը, երբ կոնտակտի մեջ գտնվող գլանների առաձգական հատկությունները միևնույնն են: Կատարվել է տարբեր դրվածքներով ստացված այդ խնդրի լուծման արդյունքների համեմատությունը: Ցույց է տրվում, որ Ի. Յա. Շտաերմանի հավասարման մեջ թույլ է տրվել սխալ, որն առաջացել է գլանների կոնտուրային կետերի շառավիղային տեղափոխությունների համար սկզբնական բանաձևերի անճշտությամբ:

CONTACT INTERACTION OF ELASTIC PLANE HAVING CIRCULAR HOLE WITH INSERTED IN IT ELASTIC DISC

M. I. TEPLY

Summary

The equation of the contact problem for round cylinders of almost equal radii in I. J. Shtayerman's stating is derived. An exact solution for this equation in the case of equal elastic characteristics of contract cylinders is given. The comparison of the solutions for the above problem in different statings is carried out. It is shown that an error is present in Shtayerman's equation. The error was caused by inaccuracy in the initial formulae for radial shifts of contour points of the cylinders.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
2. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. Л.—М., ОНТИ, 1937.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
4. *Панасюк В. В., Теплый М. И.* Определение контактных напряжений при внутреннем соприкосновении цилиндрических тел. Прикл. механика, 1971, т. 7, вып. 4.
5. *Михлин С. Г.* Интегральные уравнения. М., Гостехиздат, 1949.