ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 4, 1981 Механика

А. Г. БАГДОЕВ, А. В. ШЕКОЯН

ТРЕХМЕРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ПЬЕЗОДИЭЛЕКТРИКАХ И ПЬЕЗОПОЛУПРОВОДНИКАХ

Распространение звуковых волн в разных средах изучено в работах [1—3, 21].

Опубликовано много работ, в которых изучали акустические волны в пьезоэлектриках (см., напр., обзоры, монографии [4—10]). В большинстве этих работ [4—9] ограничиваются рассмотрением одномерного приближения. В результате остаются вне поля зрения представляющие интерес вопросы о пространственном распределении звуковых волн, зарядов, о фокусировке (дефокусировке), о самофокусировке (самодефокусировке) звуковых волн и о некоторых других эффектах.

В статье [10] выведены трехмерные уравнения для амплитуды акустической волны, однако вторые пространственные производные по поперечным координатам, которые при пространственно ограниченных волнах (например, при звуковых пучках) часто того же порядка, что и первая производная по продольной координате, там не сохранены.

Распространение звуковых волн в пьезоэлектриках описывается уравнениями теории упругости и Максвелла [1—10]. Эти уравнения с учетом нелинейностей (упругой, геометрической, электрострикционной и электронно-концентрационной) имеют следующий вид:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{E}' = -\mu_{ik}\left(\frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t_1^2} + \frac{\partial \vec{j}}{\partial t_1}\right) \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = -qn \tag{3}$$

$$j_i = \sigma^0_{ik} E'_k + q d_{ik} \frac{\partial n}{\partial x_k} \tag{4}$$

$$D_i = \varepsilon_{ik} E'_k + e_{ikl} S_{kl} + a_{iklm} E'_m S_{lm} \tag{5}$$

$$\sigma'_{ik} = \frac{\partial}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)}\left|\frac{1}{2} S_{ij} S_{kl} + \frac{1}{6} C_{ijklmn} S_{ij} S_{kl} S_{mn}\right| - e_{lik} E'_l - a_{lklm} E'_m E'_l \tag{6}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_p}{\partial x_i}\frac{\partial u_p}{\partial x_j}\right) \tag{7}$$

$$\sigma^0_{ik} = \sigma_{ik} + \sigma^{нел}_{ik} = q\mu_{ik}(n_0 + n) \tag{8}$$

где u_i — компонента смещения, ρ — плотность, $\partial/\partial t$ и $\partial/\partial t_1$ — производные по времени при лагранжевом и эйлеровом описании, σ'_{ik} — тензор напряжения, $\vec{E}$ и $\vec{D}$ — векторы электрического напряжения и смещения, q — заряд электрона, n_0 и n — равновесная и возмущенная звуковой волной концентрация электронов, $\vec{j}$ — вектор плотности электрического тока, σ^0_{ik}, σ_{ik}, $\sigma^{нел}_{ik}$ — общий, линейный и нелинейный тензоры электропроводности, d_{ik} и μ_{ik} — тензоры коэффициента диффузии и подвижности носителей заряда, c_{iklm}, C_{iklmn}, e_{ikl}, a_{iklm}, ε_{ik} и μ'_{ik} — соответственно, тензоры модуля линейной и нелинейной упругости, пьезомодуля, электрострикции, диэлектрической и магнитной проницаемостей, S_{kl} — тензор деформации. Электрическое поле $E'_m = E_m + E^I_m$, где E_m — переменное поле, обусловленное пьезосвойством среды, а E^I_m — постоянное поле, создаваемое внешними источниками.

Для сокращения записи уравнения (1)—(8) выписаны в таком виде, чтобы они были верны как для пьезодиэлектрика, так и для пьезополупроводника.

Уравнения (2) и (3) написаны в переменных Эйлера, а остальные — в переменных Лагранжа.

Будем предполагать, что звуковая волна распространяется в полубесконечной среде. Выберем ортогональную координатную систему x_1, x_2, x_3 так, чтобы плоскость $x_3 = 0$ совпала с поверхностью среды. Нормаль к фронту звуковой волны совпадает с осью x_3. В направлении $x_3 > 0$ распространяется звуковая волна. Предполагается, что в плоскости $x_3 = 0$, $u_1 = u_2 = 0$, а в ограниченной ее части $u_3 \neq 0$.

Для простоты выбираем направление распространения волны (ось x_3) совпадающим с осью симметрии кристалла и рассмотрим гексагональную ($6mm$) и тетрагональную ($4mm$) систему, в которых отличны от нуля [8, 11]: модули упругости $c_{11} = c_{22}$, $c_{12} = c_{21}$, $c_{31} = c_{13} = c_{23} = c_{32}$, $c_{44} = c_{55}$, c_{33}, c_{66}, (в гексагональной $c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2$), пьезомодули $e_{15} = e_{24}$, $e_{31} = e_{32}$, e_{33}, диэлектрические проницаемости $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$, ε_{33}, нелинейные упругие модули C_{111}, C_{112}, C_{113}, C_{123}, C_{144}, C_{133}, C_{134}, C_{155}, C_{222}, C_{333}, C_{344}. У электрострикционного тензора отличны от нуля те же члены, что и у тензора модуля упругости. Здесь и далее будем пользоваться тензорной формой записи, используя общепринятые обозначения [7, 8, 12].

Будет рассмотрен случай, когда E^I_3 параллельно оси x_3.

Переходим во всех уравнениях (1)—(8) к переменным Лагранжа. Тогда система (1)—(8) примет следующий вид:

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + c_{12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{13} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_1} + c_{66}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) +$$

$$+ c_{44}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) - e_{15} \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - e_{31} \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \tag{9}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c_{11} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + c_{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{13} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + c_{44}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) +$$

$$+ c_{66}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right) - e_{15} \frac{\partial E_2}{\partial x_3} - e_{31} \frac{\partial E_3}{\partial x_2} \tag{10}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = (c_{13} + c_{44})\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + c_{44} \Delta_\perp u_3 + c_{33} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} -$$

$$- e_{15}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} \right) - \left(e_{33} + 2a_{33} E_3^0 \right) \frac{\partial E_3}{\partial x_3} - 2a_{33} E_3 \frac{\partial E_3}{\partial x_3} +$$

$$+ (2c_{44} + C_{344})\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) +$$

$$+ (2c_{33} + C_{333}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \Delta_\perp u_3 \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 E_3}{\partial x_1 \partial x_3} = -\mu_{11} \left| e_{15} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} + \sigma_{11} \frac{\partial E_1}{\partial t} + q d_{11} \frac{\partial^2 n}{\partial x_1 \partial t} \right| \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 E_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 E_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 E_3}{\partial x_2 \partial x_3} = -\mu_{11} \left| e_{15} \left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial t^2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u_3}{\partial t^2 \partial x_2} \right) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} + \sigma_{11} \frac{\partial E_2}{\partial t} + q d_{11} \frac{\partial^2 n}{\partial x_2 \partial t} \right| \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial x_2 \partial x_3} - \Delta_\perp E_3 = -\mu_{33} \left| e_{31} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \right.$$

$$(e_{33} + a_{33} E_3^0)\left(\frac{\partial^3 u_3}{\partial t^2 \partial x_3} - 2 \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3^2 \partial t} \frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right) +$$

$$+ \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 E_3}{\partial t^2} - 2\varepsilon_{33} \frac{\partial^2 E_3}{\partial x_3 \partial t} \frac{\partial u_3}{\partial t} - \varepsilon_{33} \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} +$$

$$+ a_{33}\left(E_3 \frac{\partial^3 u_3}{\partial t^2 \partial x_3} + 2\frac{\partial^2 u_3}{\partial t \partial x_3}\frac{\partial E_3}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial^2 E_3}{\partial t^2}\right) +$$

$$+ (e_{33} + a_{33}E_3^0)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2 + \varepsilon_{33}\frac{\partial E_3}{\partial t} + q\mu_{33}E_3^0\frac{\partial n}{\partial t} +$$

$$+ q\mu_{33}n\frac{\partial E_3}{\partial t} + q\mu_{33}E_3\frac{\partial n}{\partial t} + qd_{33}\frac{\partial^2 n}{\partial t \partial x_3}\Big] \qquad (14)$$

$$e_{15}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + e_{15}\Delta_1 u_3 + e_{31}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + e_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} +$$

$$+ \varepsilon_{11}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2}\right) + \varepsilon_{33}\frac{\partial E_3}{\partial x_3} = -qn \qquad (15)$$

где $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

В уравнениях (9), (10), (12), (13), (15) опущены, а в (11), (14) упрощены нелинейные члены, сохранены только те члены, в которые входят E_i, u_i и n. В пьезополупроводниках будем пренебрегать геометрической нелинейностью, тогда можно отождествлять переменные Лагранжа и Эйлера. Поэтому в уравнениях (9)—(15) члены, обусловленные пьезополупроводниковыми свойствами, не изменились после перехода к описанию Лагранжа.

В пьезодиэлектриках и пьезополупроводниках звуковая волна распространяется совершенно различным образом, поэтому рассмотрим их раздельно.

1. *Пьезодиэлектрики.* В этой среде $n = j = 0$. Тогда основными типами нелинейности будут упругая, геометрическая и электрострикционная. Уравнения, описывающие распространение звуковых волн в такой среде, — это (9)—(14) с учетом вышеуказанных условий.

Если ограничиться одномерным приближением, то связанная система уравнений (9)—(14) расщепляется на пары уравнений (9), (12), (10), (13) и (11), (14), то есть волновые движения, обусловленные $(E_1\ u_1)$, $(E_2\ u_2)$ и $(E_3\ u_3)$ распространяются раздельно, не взаимодействуя друг с другом.

Из системы (9)—(14) видно, что в трехмерном случае волновые движения взаимосвязаны и раздельно распространяться не могут.

В том случае, когда в среде распространяется гармоническая плоская продольная волна, в линейном приближении скорость ее имеет следующий вид.

$$v^2 = \frac{c_{33}}{\rho} + \frac{e_{33}^2}{\rho\varepsilon_{33}} + \frac{2a_{33}e_{33}E_3^0}{\rho\varepsilon_{33}} + \frac{a_{33}(E_3^0)^2}{\rho\varepsilon_{33}} \qquad (1.1)$$

Если подставить в выражение (1.1) $E_3^0 = 0$, то v^2 совпадает со скоростью, которая была получена ранее для случая распространения звуковой волны в пьезодиэлектриках в одномерном приближении [4—8]

Как видно из (1.1), при $e_{33} = 0$ среда под действием E_3^0 как бы приобретает пьезосвойство [5].

Систему (9)—(14) удобно изучить в координатной системе, движущейся со скоростью волны,

$$\delta\tau' = \tau = t - \frac{x_3}{v}, \qquad x_1 = \delta^{-1/2} x_1, \qquad x_2 = \delta^{-1/2} x_2$$

где δ — малый параметр, который характеризует порядок малости нормальной к волне скорости частиц. Порядки $x_{1,2}$ выбраны [1, 14] такими же, как в газодинамике.

Ввиду того, что у входа в среду создаются только продольные смещения, разумно предполагать, что поперечные смещения и электрические поля малы по сравнению с продольными. Поэтому отношение смещений и электрических полей u_1, u_2, E_1, E_2, u_3 и E_3 к их характерным величинам имеют порядки малости $\delta^{3/2}$, $\delta^{3/2}$, δ^2 и δ, соответственно. Учитывая это, в уравнениях (9), (10), (12) и (13) отбрасываем члены по порядку малости выше $\delta^{3/2}$, а в уравнениях (11) и (14) — выше, чем δ. Далее последовательно исключаем величины u_1, u_2, E_1, E_2 и E_3. В членах, где E_3 стоит под знаком дифференцирования по координатам x_1 и x_2, а также в нелинейных членах E_3 исключается с помощью выражения, которое связывает главные члены уравнения (14) и имеет следующий вид:

$$E_3 = \frac{e_{33} + a_{33}E_3^0}{\varepsilon_{33}} \frac{\partial u_3}{\partial \tau} \tag{1.2}$$

Под главными членами подразумеваем те члены, которые в данном уравнении по порядку — наибольшие.

Члены, которые содержат отношение скорости упругой волны к скорости света, как малые, пренебрегаются. Тогда для смещения u_3 получается следующее уравнение:

$$-\frac{\partial^2 u_3}{\partial\tau \partial x_3} + D\Delta_{\perp} u_3 - G\frac{\partial^2 u_3}{\partial\tau^2}\frac{\partial u_3}{\partial\tau} = 0 \tag{1.3}$$

Для дальнейших исследований удобно уравнение (1.3) преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_3} - G\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\right) = D\Delta_{\perp}\Psi \tag{1.4}$$

где $\Psi = \partial u_3/\partial\tau$,

$$G = \left[\frac{3c_{33} + C_{333}}{v^2} + \frac{2(e_{33} + a_{33}E_3^0)^2}{v^2\varepsilon_{33}}\left(1 + \frac{3a_{33}}{2\varepsilon_{33}}\right)\right] \Big/ 2c_{33} \tag{1.5}$$

$$D = \frac{v}{2c_{33}}\left\{\frac{(c_{13}+c_{44})^2}{\rho v_p^2} + c_{44} + \left[\frac{(e_{33}+e_{31})(c_{13}+c_{44})}{\rho v_p^2} + e_{15}\right]\frac{(e_{33}+a_{33}E_3^0)}{\varepsilon_{33}} + \right.$$

$$\left. + \left[\left(e_{31}+\frac{\gamma_{11}e_{33}}{\mu_{33}}\right)\frac{(c_{13}-c_{44})}{\rho v_p^2} + \frac{\gamma_{11}e_{15}}{\mu_{33}}\right]\frac{(e_{33}+2a_{33}E_3^0)}{\varepsilon_{33}}\right\} \tag{1.6}$$

$$v_p^2 = v^2 - c_{44}/\rho$$

В выражении (1.6) было пренебрежено малыми членами, содержащими пьезомодули, возведенные в степень выше второй. Из (1.5) видно, что когда $E_3^0 = -e_{33}/a_{33}$ среда ведет себя как чисто упругая с точки зрения нелинейных свойств.

Уравнение (1.4) по своей математической форме совпадает с уравнением нелинейной акустики, выведенным в работах [13, 14] для ограниченных звуковых пучков, распространяющихся в жидких и газообразных средах без диссипации, а также с уравнениями, выведенными в [15, 16], если пренебречь в них диссипацией и дисперсией. Существенное различие заключается в том, что коэффициенты G и D могут быть $G \leq 0$, $D < 0$, что приводит к существенно новым свойствам. $G = 0$ означает, что хотя в среде распространяется интенсивная волна, электрострикционная и упругая нелинейности компенсируют друг друга, и волна распространяется как линейная.

Сперва рассмотрим случай, когда $G = 0$. Тогда для аксиально-симметричного и плоского случаев в безразмерных величинах уравнение (1.4) примет вид

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\tau\,\partial x'} = \frac{N_1}{4}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial R}{\partial\xi}\right), \tag{1.7}$$

где $x' = kx_3$, $N_1 = 4D/k^2a^2$, $R = E_3/E_0$, $\xi = r/a$, E_0 — амплитуда волны, а a — поперечный размер пучка при $x' = 0$, ω — частота, r — радиальная координата, которая в плоском случае совпадает с x_1 или x_2.

Предполагая, что при $x_3 = 0$

$$R = e^{-\xi^2}\sin\theta \tag{1.8}$$

и применяя метод разделения переменных для плоского и цилиндрического случаев, для R получим выражение (IX.2.14) и (IX.2.17) работы [14]. При $N_1 > 0$ все происходит так, как в газодинамике, то есть из-за дифракции звуковая волна расходится, первоначальный плоский фронт при больших N_1x' переходит в цилиндрическую или сферическую волну в смысле затухания решения, а поверхности волны являются эллипсами. В отличие от газодинамики при $N_1 < 0$, хотя амплитуда продолжает оставаться такой же, как и для расходящейся волны, при больших N_1x' фронт волны имеет форму гиперболы.

Когда нелинейные эффекты проявляются сильнее, чем дифракционные, уравнение (1.4) в безразмерных переменных примет вид

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \alpha R\frac{\partial R}{\partial\theta}\right) = 0 \tag{1.9}$$

где $\theta = \omega\tau$, $x = GE_0\omega x_3$, $\alpha = 1$ или -1 в зависимости от знака G. Предположим, что остается в силе условие (1.8). Когда $\alpha = 1$, звуковая волна распространяется, как в газах и жидкостях. При малых $0 < x < 1$ решение уравнения (1.9) можно представить в виде формулы (IX.3.1) из [14], которое при $x > 1$ переходит в пилообразную волну сжатия. Когда $\alpha = -1$, при больших x в среде распространяется пилообразная волна разрежения. В обоих случаях ширина пучка звуковой энергии остается неизменной.

В общем случае при наличии дифракции и нелинейности изучение для больших и малых $N = 2D/c^2\rho_0 GE_0\omega^2$ уравнения (1.4) дает результаты близкие тем, что были получены выше [14].

Когда распространяется ограниченный в пространстве в виде пучка импульс сжатия или разрежения, ограничиваясь приближением нелинейной геометрической акустики, подобно [14] можно показать, что при $G < 0$ импульс сжатия, распространяясь, становится сходящимся, увеличивается длительность импульса, а импульс разрежения расходится, длительность импульса уменьшается. В газах и жидкостях при $G > 0$ имеет место обратный характер распространения пучка.

Уравнение типа (1.4) можно вывести также тогда, когда звуковая волна распространяется в кристалле ромбической кристаллической системы с симметрией ($2mm$) вдоль оси второго порядка. В этой кристаллической системе все постоянные, отличные от нуля, остаются те же, что и в гексагональной и тетрагональной системах, только некоторые равенства модулей, приведенных выше, здесь не осуществляются [8, 11]. Это приводит к тому, что правая часть уравнения (1.4) имеет вид:

$$D_1 \frac{\partial^2 E_3}{\partial x_1^2} + D_2 \frac{\partial^2 E_3}{\partial x_2^2}$$

где $D_1 = D$, а D_2 получается из D заменой c_{44}, c_{13}, e_{13}, e_{15}, ε_{11} на c_{55}, c_{23}, e_{24}, ε_{22}, соответственно. Это означает, что аксиально симметричный пучок в этой кристаллической системе осуществить невозможно. Однако после перехода к координатной системе $x_1' = (\pm D_1)^{-1/2} x_1$, $x_2' = (\pm D_2)^{-1/2} x_2$, получим уравнение (1.4), если в нем положить $D = \pm 1$.

До сих пор мы рассматривали однородную среду. В неоднородной среде для произвольной волны старшие производные от u_3 не меняются [17] и только должно быть добавлено в (1.3) слагаемое, содержащее производную первого порядка $\partial u_3/\partial\tau$, которое того же порядка, что и остальные члены. Не проводя выкладок, можно утверждать, что следует в (1.3) прибавить $\frac{\partial u_3}{\partial \tau} d(\ln\varphi)/dx_3$, φ — одномерное по x_3 (нормали к волне) линейное лучевое решение для $\frac{\partial u_3}{\partial t}$. Значение φ можно определить по уравнению, выражающему сохранение возмущенной энергии волны $\rho v_1^2 \sigma v = \mathrm{const}$, выведенному в [18, 19], $\varphi \approx v_1$ — скорость частиц, σ — площадь фронта волны внутри выбранной лучевой трубки.

2. *Пьезополупроводники.* В этих средах имеются свободные подвижные заряды, которые могут создавать электрический ток. Для простоты будем рассматривать электронный полупроводник. Полученные результаты легко обобщить также на дырочные полупроводники.

Под воздействием звуковой волны происходит перераспределение концентрации электронов, в результате чего первоначальная равновесная концентрация n_0 (независящая от координат и времени) изменяется и концентрация становится зависящей от координат и времени [4—9].

Наличие электронной подсистемы приводит к поглощению и дисперсии звуковой волны. Кроме того, основной является электронная концентрационная нелинейность [4, 5, 9], которая выявляется при меньших интенсивностях, чем другие нелинейности, как например, упругая, электрострикционная. Поэтому в уравнениях (9) — (15) надо пренебрегать всеми нелинейными членами, кроме тех, которые обусловлены концентрационной нелинейностью.

Уравнения (11), (14) и (15) после перехода в них к одномерному приближению и после линеаризации совпадают с ранее полученными уравнениями для пьезополупроводников [4—8].

Упростим уравнения (9) — (15), вводя, как в случае пьезодиэлектриков, малый параметр δ. Величины n и $\tilde{E}$ имеют порядок δ. Отбрасываем в уравнениях (9) и (10) члены выше δ^{2}, в (12) и (13) — выше δ^{-2}, а в уравнениях (11), (14) и (15) — выше δ. Решение полученной системы уравнений ищем в следующем виде:

$$u_1,\ u_2,\ E_1,\ E_2 = \frac{1}{2}\{[u_{01}(x_1, x_2, x_3),\ u_{02}(x_1, x_2, x_3),\ E_{01}(x_1, x_2, x_3),$$

$$E_{02}(x_1, x_2, x_3)] \exp[i(\omega_1 t - kx_3)] + \text{к. с.}\}$$

$$u_3,\ E_3,\ n = \frac{1}{2}\{[u_{03}(x_1, x_2, x_3),\ E_{03}(x_1, x_2, x_3),\ n_{01}(x_1, x_2, x_3)] \times$$

$$\times \exp[i(\omega_1 t - kx_3)] + [u'_{03}(x_1, x_2, x_3),\ E'_{03}(x_1, x_2, x_3),\ n'_{01}(x_1, x_2, x_3)] \times$$

$$\times \exp[2i(\omega_1 t - kx_3)] + \text{к. с.}\} \tag{2.1}$$

где $\omega_1 = \omega + i\alpha$, ω_1 — комплексная частота, α — коэффициент поглощения.

После подстановки (2.1) в упрощенную систему уравнений (9) — (15) получим новую систему дифференциальных уравнений для амплитуд. При выводе этих амплитудных уравнений предполагается, что для амплитуд выполняется неравенство типа

$$\left|\frac{\partial^2 u_{03}}{\partial x_3^2}\right| \ll k \left|\frac{\partial u_{03}}{\partial x_3}\right|$$

Последовательно исключаем амплитуды u_{01}, u_{02}, E_{01}, E_{02}, n_{01}, u_{03}, E_{03}, n_{01} и их комплексно-сопряженные величины. При этом амплитуды E_{03} и n_{01}, стоящие под знаком дифференцирования, а также все амплитуды в нелинейных членах, исключаются с использованием главных членов соответствующих уравнений. Тогда получается следующее уравнение для амплитуды u_{03}:

$$A\Delta_{\perp} u_{03} - 2ikB \frac{\partial u_{03}}{\partial x_3} + Pu_{03} = Cu_{03} |u_{03}|^2 \tag{2.2}$$

Коэффициенты A, B, P и C — комплексные. Если бы $A = B = 1$, $P = 0$, а C было действительной величиной, то уравнение (2.2) совпало бы с известным уравнением нелинейной оптики [20], а при переходе к одномерному приближению ($\Delta_{\perp} = 0$) — с уравнением интенсивности звуковой волны [4, 9].

Аналогичным образом, как в пьезодиэлектриках, уравнение (2.2) можно обобщить для ромбических кристаллов с симметрией ($2\,mm$), однако после замены переменных из-за комплексности коэффициентов новые переменные будут также комплексными.

Соотношение $P = 0$ дает дисперсионное уравнение. Оно комплексное и третьей степени относительно ω_1. Решаем его методом последовательного приближения, считая, что поглощение и дисперсия малы. В качестве нулевого приближения берем частоту звуковой волны в упругой среде $\omega_c^2 = c_{33}k^2/\rho$. Тогда для частоты и поглощения получим

$$\omega = \left(\frac{k^2 c_{33}}{\rho}\right)^{1/2} \left\{1 + \frac{e_{33}^2 k^2}{2c_{33}\varepsilon_{33}} \frac{(v_0 - v_d)^2 + (k^2 d_{33} + \sigma_{33}/\varepsilon_{33})\, d_{33}}{k^2 (v_0 - v_d)^2 + (k^2 d_{33} + \sigma_{33}/\varepsilon_{33})^2}\right\} \tag{2.3}$$

$$\alpha = \frac{e_{33}^2 k v_0}{2c_{33}\varepsilon_{33}} \frac{k (v - v_d)\, \sigma_{33}/\varepsilon_{33}}{k^2 (v_0 - v_d)^2 + (k^2 d_{33} + \sigma_{33}/\varepsilon_{33})^2} \tag{2.4}$$

где $v_d = -\mu_{33} E_3^0$.

Из (2.4) видно, что при $v_0 - v_d < 0$, $\alpha < 0$, то есть звуковая волна усиливается. Это совпадает с полученным ранее результатом [4—8].

В общем виде коэффициенты A, B и C очень громоздки, поэтому надо их упростить. Во-первых, как малыми величинами пренебрежем членами, которые содержат отношение скорости звуковой волны к скорости света. Кроме того, в выражениях для A, B и C можно пренебречь членами, содержащими электромеханическую постоянную $e_{33}^2/2c_{33}\varepsilon_{33}$ во всех тех случаях, пока это пренебрежение не приведет к равенству нулю коэффициентов A, B и C. Электропроводность и коэффициент диффузии также малы, поэтому в суммах сохраняем только члены, содержащие их первый порядок. После этих упрощений, деля уравнение на коэффициент B и отделяя мнимые и действительные части в коэффициентах, получим

$$(A_1 + iA_2)\Delta_{\perp} u_{03} - 2ik \frac{\partial u_{03}}{\partial x_3} = (C_1 + iC_2)\, u_{03} |u_{03}|^2 \tag{2.5}$$

где а) $v_0 - v_d$ немало

$$A_1 = \frac{1}{M}\{(\sigma_{33} + k^2\varepsilon_{33}d_{33})^2 [c_{44} + (c_{33} + c_{44})^2/(c_{33} - c_{44})] +$$

$$+ \varepsilon_{33}^2 k^2 (v_0 - v_d)^2 [c_{44} - (c_{33} + c_{44})/(c_{33} - c_{44})]\} \tag{2.6}$$

$$A_2 = -\frac{1}{M}[2\varepsilon_{33} k (v_0 - v_d)(\sigma_{33} + k^2\varepsilon_{33}d_{33})(c_{33} + c_{44})^2/(c_{33} - c_{44})] \tag{2.7}$$

где

$$M = c_{33}[(\sigma_{33} + k^2\varepsilon_{33}d_{33})^2 + k^2\varepsilon_{33}^2(v_0 - v_d)^2]$$

при

$$k^2\varepsilon_{33}(v_0 - v_d)^2 \gg (\sigma_{33} + k^2\varepsilon_{33}d_{33})$$

$$C_1 = -9p_1k^3(v_0 - v_d)^2(\sigma_{33} + k^2\varepsilon_{33}d_{33})[\varepsilon_{33}(v_0 - v_d) +$$

$$+ 2kd_{33}(\sigma_{33} + k^2\varepsilon_{33}d_{33})]T^{-1}$$

$$C_2 = -18p_1k^3\varepsilon_{33}(v_0 - v_d)^4T^{-1} \tag{2.8}$$

где

$$T = 4c_{33}(\sigma_{33} + k^2\varepsilon_{33}d_{33})\{[\varepsilon_{33}(v_0 - v_d) + 2kd_{33}(\sigma_{33} + k^2\varepsilon_{33}d_{33})]^2 +$$

$$+ 4(v_0 - v_d)^2(\sigma_{33} + k^2\varepsilon_{33}d_{33})^2\}$$

когда

$$k^2\varepsilon_{33}^2(v_0 - v_d) \ll (\sigma_{33} + k^2\varepsilon_{33}d_{33})$$

$$C_1 = 3p_1k^4\varepsilon_{33}^2[v_0(2\sigma_{33} + k^2\varepsilon_{33}d_{33}) - v_d\sigma_{33}]D^{-1}$$

$$C_2 = -9p_1k^4\varepsilon_{33}v_0(v_0 - v_d)\sigma_{33}D^{-1} \tag{2.9}$$

где

$$D = 8c_{33}\varepsilon_{33}^4(v_0 - v_d)^2[(v_d\sigma_{33} + v_0k^2\varepsilon_{33}d_{33})^2 + v_0^2k^2\varepsilon_{33}^2(v_0 - v_d)^2]$$

$$p_1 = e_{33}^4\mu_{33}^2e^{-2at}$$

б) в случае $v_0 - v_d = 0$

$$A_1 = \frac{c_{44}}{\varepsilon_{33}} + \frac{(c_{33} + c_{44})^2}{\varepsilon_{33}(c_{33} - c_{44})}, \quad A_2 = 0 \tag{2.10}$$

$$C_1 = \frac{1}{p}e_{33}^4k^6\mu_{33}^2d_{33}\sigma_{33} \tag{2.11}$$

$$C_2 = \frac{1}{2}c_1\sigma_{33}(\sigma_{33} + 4v_0k\varepsilon_{33}) \tag{2.12}$$

где

$$p = 2c_{33}(\sigma_{33} + k^2d_{33}\varepsilon_{33})^2[4\sigma_{33} + (4v_0k\varepsilon_{33} + \sigma_{33})^2]$$

Решение уравнения (2.5) будем искать в следующем виде:

$$u_{03} = a\exp(iS) \tag{2.13}$$

где a — действительная часть амплитуды, а S — эйконал. После подстановки (2.13) в (2.5), отделяя мнимые и действительные части, получим

$$A_1\Delta_\perp a - A_1 a(\nabla_\perp S)^2 - 2A_2(\nabla_\perp a)(\Delta_\perp S) - A_2 a\Delta_\perp S + 2ak\frac{\partial S}{\partial x_3} = C_1 a^3 \tag{2.14}$$

$$A_2\Delta_\perp a - A_2 a(\nabla_\perp S)^2 + 2A_1(\Delta_\perp a)(\nabla_\perp S) + A_1 a\Delta_\perp S - 2k\frac{\partial a}{\partial x_3} = C_2 a^3 \tag{2.15}$$

где $\nabla_\perp$ — градиент по x_1 и x_2.

Решение этой системы ищем в виде

$$a = a_0(x_3) + a_1(x_1, x_2, x_3), \qquad S = S_0(x_3) + S_1(x_1, x_2, x_3) \tag{2.16}$$

где a_0 и S_0 — медленно меняющиеся амплитуда и эйконал одномерной нелинейной невозмущенной волны. В силу того, что $|\omega_1 t - kx_3|$ намного меньше kx_3 и $\omega_1 t$, можно в выражениях (2.8), (2.9), (2.11) и (2.12) в малом выражении αt в экспоненте положить $t \approx \frac{x_3}{v}$. Как видно, переменные коэффициенты в уравнении (2.5) мало меняются по длине волны.

Подставляя (2.16) в (2.14) и (2.15), исключая S_0, линеаризуя уравнения, получим систему уравнений

$$A_1\Delta_\perp a_1 - A_2 a_0\Delta_\perp S_1 + 2ka_0\frac{\partial S_1}{\partial x_3} - 2a_0^2 C_1 a_1 = 0 \tag{2.17}$$

$$A_2\Delta_\perp a_1 + A_1 a_0\Delta_\perp S_1 - 2k\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - 3C_2 a_0^2 a_1 = 0 \tag{2.18}$$

Поскольку функции a_0, C_2 и C_1 медленно меняются по длине возмущенной волны $2\pi/k_3'$, решения уравнений (2.17) и (2.18) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1' \exp[i(k_3' x_3 + k_2 x_2 + k_1' x_1)] \\ S &= S_1' \exp[i(k_3' x_3 + k_2' x_2 + k_1 x_1)] \end{aligned} \tag{2.19}$$

Подставляя (2.19) в (2.17) и (2.18), получим систему алгебраических уравнений относительно a_1' и S_1', которые имеют ненулевое решение, если детерминант равняется нулю. Из последнего условия находим выражение для k_3, имеющее вид

$$k_3' = \frac{1}{4k}\{i(2A_2 k_\perp^2 + 3a_0^2 C_2) \pm [-(2A_2 k_\perp^2 + 3a_0^2 C_2)^2 +$$

$$+ 4k_\perp^2 [k_\perp^2 (A_2^2 + A_1^2) + a_0^2(3A_2 C_2 + 2A_1 C_1)]]^{1/2}\} \tag{2.20}$$

где $k_\perp^2 = (k_1)^2 + (k_2)^2$.

Условие устойчивости волны имеет вид: $\operatorname{Im} k_3' \geqslant 0$ $(x_3 > 0)$. Теперь видно, что в случае б), когда $A_2 > 0$ и $C_1 > 0$, звуковая волна устойчива.

В случае а) пусть $2A_2k^2_\perp - 3a_0^2C_2 > 0$, тогда имеет место устойчивость при $k^2_\perp(A_2^2 + A_3^2) + a_0^2(3A_2C_2 + 2A_3C_1) > 0$, при обратном знаке имеется неустойчивость. Если же $2A_2k^2_\perp + 3a_0^2C_2 < 0$, имеется неустойчивость. Допустим $v_0 - v_\perp > 0$, тогда усиленное условие неустойчивости будет иметь вид: $k^4a_0^2/k^2_\perp < -2A_2k^4/3c_2$, где c_2 получается из выражения C_2, если подставить в него $\exp(-2\alpha t) \approx 1$. Для CdS, когда $k = 2\cdot 10^{-7}$ *м*, а $\sigma_{33} = 10^{-2}$ *ом*$^{-1}\cdot$*м*$^{-1}$, $k^4a_0^2/k^4_\perp < 4\cdot 10^{-16}$, то есть уменьшение амплитуды a_0 усиливает явление неустойчивости.

Продольная неустойчивость ($k_1 = 0$) всегда имеет место при $C_2 > 0$ и не имеет места при $C_2 < 0$. Амплитуда a_0 не влияет на устойчивость.

Для безразмерной ширины осесимметричных пучков решение имеет вид

$$f^2 = \left(\frac{A_1}{R^2} + \frac{c_1E_0^2A_1}{kR} + \frac{A_1c_1E_0^2}{k^2c_0^2} + 4A_1^2/R_0^2\right)x_3^2 + 2(A_1/R + c_2E_0^2/2k)x_3 + 1.$$

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 22 IX 1980

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Ա. Վ. ՇԵԿՈՅԱՆ

ԵՌԱՉԱՓ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԸ ՊՅԵԶՈԴԻԷԼԵԿՏՐԻԿՆԵՐՈՒՄ ԵՎ ՊՅԵԶՈԿԻՍԱՀԱՂՈՐԴԻՉՆԵՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Արտածված են կարճ ալիքների տարածման հավասարումները եռաչափ պյեզոդիէլեկտրիկ միջավայրի համար։ Հաշվի են առնվում երկրաչափական, առաձգական և էլեկտրոստրիկցիոն ոչ գծայնությունները։ Ցույց է տրվում, որ կարող են առաջանալ խտացման և նոսրացման հարվածային ալիքներ։

Եռաչափ դեպքի համար արտածված են նաև մոդուլացված ալիքների հավասարումները պյեզոկիսահաղորդիչ միջավայրի համար։

Ուսումնասիրված են ալիքների կայունության պայմանները։

THE THREE-DIMENSIONAL NONLINEAR WAVES IN PIEZODIELECTRICS AND PIEZOSEMICONDUCTORS

A. G. BAGDOEV, A. V. SHEKOYAN

S u m m a r y

The derivation of short waves equations in tree-dimensional case when the elastic wave propagates in piezodielectric with geometrical elastic and electrostrictional nonlinearities is presented. It is shown that

rarefaction and compression shock waves may be generated. The derivation of the modulation equation in three-dimensional case for piezosemiconductor is given. The stability condition for quasimonochromatic wave is examined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыжов О. С.* Распространение волн в неоднородных средах. ПМТФ, 1961, № 2
2. *Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные и линейные переходные волновые процессы деформации в термоупругих и упругих телах. Изд. АН Эстонской ССР. Институт кибернетики, Таллин, 1972.
3. *Багдоев А. Г.* Определение окрестности фронтов волн в пространственной задаче. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1977, т. 28, № 6
4. *Гуревич В. Л.* Теория акустических свойств пьезоэлектрических полупроводников. ФТП, 1968, т. 2, № 11.
5. *Пустовойт В. И.* Взаимодействие электронных потоков с упругими волнами решетки. УФН, 1969, т. 97, № 2.
6. *Мак-Фи Дж.* Распространение и усиление звуковых волн в пьезоэлектрических полупроводниках. В кн. «Физическая акустика» под ред. У. Мэзона, т. IV, часть А. М., Изд. «Мир», 1969.
7. *Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б.* Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М., Изд. «Мир», 1972.
8. *Такер Дж., Рэмптон В.* Гиперзвук в физике твердого тела. М., Изд. «Мир», 1975.
9. *Гуляев Ю. В.* К нелинейной теории усиления звука в полупроводниках. ФТТ, 1970, т. 12, № 12.
10. *Левин В. М., Пустовойт В. И.* Теория взаимодействия акустических волн в полупроводниках. ЖЭТФ, 1969, т. 56, № 6
11. *Берлинкур Д., Керан Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях. В кн. «Физическая акустика» под ред. Мэзона, т. I, часть, А. М., «Мир», 1966.
12. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов. М., Изд. «Мир», 1967
13. *Заболотская Е. А., Хохлов Р. В.* Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков. Акуст. ж., 1969, т. 15, № 1
14. *Руденко О. С., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М., Изд. «Наука», 1975.
15. *Багдоев А. Г., Оганян Г. Г.* Распространение модулированных нелинейных волн в релаксирующей газожидкостной смеси. Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1980, № 1.
16. *Оганян Г. Г.* Распространение слабых волн в релаксирующей газожидкостной смеси. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1979, т. XXX, № 2.
17. *Багдоев А. Г., Даноян З. Н.* Исследование движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке. Жур. вычисл. математ. и мат. физики, 1972, т. XII, № 6
18. *Bretherton F. P., Garrett J. R.* Wavetrains inhomogenues moving media. Proc. Roy Soc., 1968, vol. A 302, № 1471.
19. *Бабич В. М.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в случае упругой неоднородной анизотропной среды. В сб. «Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн». Л. Изд. ЛГУ, 1961.
20. *Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.* Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде. УФН, 1967, т. 93, № 1
21. *Федоров Ф. И.* Теория упругих волн в кристаллах. М., «Наука», 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 4, 1981 Механика

М. Х. ГУКАСЯН

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМАХ ОПТИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В работе рассматриваются методы решения линейных управляемых систем уравнений с частными производными и оптимального управления в этих системах. В отличие от систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, задача об управляемости систем с распределенными параметрами оказывается весьма сложной даже в линейном случае. Рассматриваемые в работе алгоритмы основываются на достаточных условиях оптимальности, предложенных В. Ф. Кротовым.

Основным этапом решения оптимизационных задач этим методом является разрешение, так называемой, «элементарной операции» (ЭО).

В статье приводятся новые способы реализации ЭО для линейных систем с распределенными параметрами и квадратичным критерием качества.

1. Постановка задачи

Пусть дано множество T—прямоугольник $0 \leqslant t^j \leqslant t_1^j$ $(j=1,2,\ldots,m)$ векторного пространства R^m. На множестве T определены пары вектор-функций $(x(t),\ u(t))$, удовлетворяющие условиям:

(1°) вектор-функции $x(t)$ непрерывны, кусочно-дифференцируемы и принимают значения из векторного пространства R^n;

(2°) вектор-функции $u(t)$ непрерывны и принимают значения из векторного пространства R^d;

(3°) на множестве T пары $(x(t),\ u(t))$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x^i}{\partial t^j} = a^i_{jl} x^l + b^i_{jk} u^k \quad (i,\ l=1,\ldots,n;\ k=1,\ldots,d;\ j=1,\ldots,m) \tag{1.1}$$

Здесь a^i_{jl}, b^i_{jk} — произвольные заданные числа; по одинаковым значкам k, l, дважды входящим в произведение, подразумевается суммирование.

В точках границы S множества T на функции $x(t)$ могут быть наложены дополнительные условия. Пары вектор-функций $(x(t),\ u(t))$, удовлетворяющие перечисленным выше условиям, обозначим через D.

Условие управляемости процесса означает, что множество D не пусто. Обозначим через W множество функций $q(t)$, заданных на границе S, таких, что для каждой из них найдется пара $\{x(t), u(t)\} \in D$,

$$x(t \in S) = q(t)$$

Введем в рассмотрение также множество E пар функций $x(t)$, $u(t)$, удовлетворяющих (1.1). На множестве E задан функционал I вида

$$\int_T f^0[t, x(t), u(t)]\,dt + F[x(t \in S)]$$

Здесь $f^0(t, x, u)$ — заданная функция, $F[q(t)]$ — функционал, заданный на W.

В этой статье рассматривается случай, когда функция $f^0(t, x, u)$ и функционал F квадратичны по аргументам x и u, более того, мы будем рассматривать тот случай, когда функционал F представляет собой среднеквадратичное отклонение граничных значений фазовых координат процесса от заданных функций. При этих предположениях функционал I запишется следующим образом:

$$I = \int_T (a_i^0 x^{i2} + b_k^0 u^{k2})\,dt + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \int_{T^j} [(x_i^{0j} - h_i^{0j})^2 + (x_i^{1j} - h_i^{1j})^2]\,dt_j \qquad (1.2)$$

где $x_i^{0,1j} = x^i(t^1, t^2, \ldots, t^j_{0,1}, \ldots, t^m)$, а $h_i^{0,1j}$ — заданные функции $m-1$ аргументов $(t^1, t^2, \ldots, t^{j-1}, t^{j+1}, \ldots, t^m)$; T^j — сечение прямоугольника T при произвольном фиксированном значении аргумента t^j; $dt_j = dt^1 \times dt^2 \times \cdots \times dt^{j-1} \times dt^{j+1} \times \cdots \times dt^m$.

Всюду в дальнейшем будем считать, что коэффициенты a_i^0, b_k^0, $(i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, d)$ положительны.

Вид подынтегральных выражений во втором слагаемом может быть легко обобщен с сохранением принципа среднеквадратичного отклонения для функционала F, в частности, можно рассматривать отклонение линейной комбинации фазовых координат процесса от заданной функции.

Рассматриваются следующие задачи.

1. Отыскание допустимого процесса, где требуется найти последовательность процессов $\{\bar{x}_s(t), \bar{u}_s(t)\} \in E$, сходящихся в специально оговоренном смысле к D:

$$\{\bar{x}_s(t), \bar{u}_s(t)\} \to D$$

2. Минимизация функционала I на D, когда помимо п. 1 от последовательности $\{\bar{x}_s, \bar{u}_s\}$ требуется

$$I(\bar{x}_s, \bar{u}_s) \to d = \inf_D I$$

2. Описание метода

В этом пункте мы вкратце изложим метод решения задач 1 и 2, который дан в работе [2] и который опирается на достаточные условия оптимальности

Обозначим $f_j^i(t, x, u)$ правые части дифференциальных уравнений (1.1).

Введем в рассмотрение класс П функций $\varphi(t, x)$, отображающих прямое произведение $T \times R^n$ в R^m, непрерывных и непрерывно-дифференцируемых, а также следующие конструкции:

$$R(t, x, u) = \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} f_j^i(t, x, u) - f^0(t, x, u) + \sum_j \frac{\partial \varphi^j}{\partial t^j}$$

$$G[q(t)] = \sum_j \int_{T^j} \varphi^j[t, x(t)]\Big|_0^{t_j^1} dt_j + F[q(t)]$$

$$L[\varphi, x, u] = G[x(t \in S)] - \int_{T^*} R(t, x, u)\, dt$$

$$\mu(t) = \sup_{(x, u) \in R^n \times R^d} R(t, x, u); \qquad m = \inf_W G[q(t)]$$

$$l(\varphi) = m - \int_{T^*} \mu(t)\, dt$$

На класс П наложим дополнительное условие, чтобы функция $R(t, x, u)$ была определена и непрерывна и были определены величины m, $l(\varphi)$.

Согласно результатам [1], при всех $\varphi \in П$ имеем: 1) $L(x, u) = I(x, u)$, если $(x, u) \in D$; 2) $l(\varphi) \leq d$. Отсюда следует, что если процесс $\bar{x}$, $\bar{u} \in D$ и функция $\bar{\varphi} \in П$ таковы, что $L(\bar{\varphi}, \bar{x}, \bar{u}) = l(\bar{\varphi})$, то

$$I(\bar{x}, \bar{u}) = \min_D I = d = l(\bar{\varphi}) = \max_П l(\varphi)$$

При этом значения $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$ при каждом $t \in T^*$ обеспечивают максимум функции $\bar{R}(t, x, u)$, соответствующей $\bar{\varphi}$, а значения $\bar{x}(t \in S)$ — минимум $\bar{G}[q(t)]$ на W:

$$\bar{R}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \max_{R^n \times R^d} \bar{R}(t, x, u), \qquad t \in T \setminus S$$

$$G[\bar{x}(t \in S)] = \min_W \bar{G}[q(t)]$$

Здесь $T^* = T \setminus S$.

Опираясь на эти факты, в работе [2] предложен способ решения поставленных выше задач: отыскивать последовательность $\{\varphi_s\}$ такую, что

$$I(\varphi_s) \to \max_{\varphi \in \Pi} I(\varphi) = d$$

В той же статье приведены достаточные условия разрешимости этих задач предложенным способом.

Введем в рассмотрение множество $E' \subset E$ пар $x(t)$, $u(t)$ таких, что функция $x(t)$ кусочно-непрерывна и кусочно-дифференцируема.

Пусть имеется функция $\varphi_s(t, x) \in \Pi$, которой соответствует множество $\overline{V}_s^t$ максимумов $R_s(t, x, u)$ на $R^n \times R^q$ при фиксированном значении t, множество $\overline{W}_s$ минимумов G_s на W и множество $\overline{E}_s$ пар $x(t)$, $u(t)$, удовлетворяющих условиям $x(t)$, $u(t) \in \overline{V}_s^t$ при всех $t \in T \setminus S$, $x(t) \in \overline{W}_s$, $t \in S$; $x(t)$, $u(t) \in E'$.

Функция φ_{s+1} ищется в виде

$$\varphi_{s+1} = \varphi_s + \lambda_s \gamma_s(t, x) \tag{2.1}$$

где λ_s и $\gamma_s(t, x)$ — число и функция, подлежащие определению. Введем функционал

$$\delta_s[x(t), u(t)] = \sum_j \int_{T^j} \gamma_s^j[t, x(t)]\Big|_{t^j=0}^{t^j=t_1^j} dt_j - \int_T \left(\frac{\partial \gamma_s^j}{\partial x^i} f_i + \sum_j \frac{\partial \gamma_s^j}{\partial t^j}\right) dt \tag{2.2}$$

Обозначим через $R_s(t, x, u, \lambda)$, $\overline{E}_s(\lambda)$ и т. д. конструкции, соответствующие функции $\varphi = \varphi_s + \lambda\gamma_s$.

Основную роль в вышеупомянутом приеме улучшения функции φ_s играет формула

$$\Delta I_s(\lambda) = \lambda\delta_s(x, u) + [L_s(x, u) - l_s] \tag{2.3}$$

где $\Delta I_s = I_s(\lambda) - I_s$, а $x(t)$, $u(t)$ — произвольная пара вектор-функций из множества $\overline{E}_s(\lambda)$.

Второе слагаемое в правой части формулы (2.3) неотрицательно. Поэтому для положительности ΔI_s достаточно положительности $\lambda\delta_s$.

В работе [2] рассматривается понятие элементарной операции улучшения функции $\varphi_s(t, x)$, которая задается условиями:

функция φ_{s+1} строится в виде (2.1), где $\lambda_s > 0$ и γ_s выбираются произвольно в пределах следующих требований:

$$\delta_s[x, u] > 0$$

хотя бы при одном значении

$$x,\ u \in \overline{E}_{s+1} = \overline{E}_s(\lambda)$$

$$\varphi_{s+1} = \varphi_s + \lambda_s\gamma_s$$

Ясно, что элементарная операция удовлетворяет неравенству

$$\Delta I_s = I_{s+1} - I_s > 0 \tag{2.4}$$

Пусть $q(t)$, $x(t)$, $u(t)$ — единственная совокупность функций, удовлетворяющих условиям

$$q(t) \in \overline{W}_s(\lambda),\ (x(t),\ u(t)) \in \overline{V}_s^t(\lambda)$$

Функция $\delta_s(\lambda) = \delta[x_s(t, \lambda),\ u_s(t, \lambda)]$ является полунепрерывной снизу, откуда следует, что если функция $\gamma_s(t, x)$ такова, что

$$\delta_s(0) > 0 \tag{2.5}$$

то существует $\lambda > 0$ такое, что

$$\delta_s(\lambda) > 0 \tag{2.6}$$

Элементарная операция распадается на два шага: задание функции $\gamma_s(t, x)$, удовлетворяющей (2.5), и отыскание $\lambda_s > 0$, удовлетворяющего (2.6) при заданном $\gamma = \gamma_s$.

Постоянная $\lambda = \lambda_s$ может выбираться в силу усиленного варианта

$$\lambda_s = \begin{cases} \overline{N}, & \text{если } \overline{\lambda}_s \geqslant N \\ \overline{\lambda}_s, & \text{если } \overline{\lambda}_s < N \end{cases}$$

где N — заданное положительное число, не зависящее от s.

В следующем пункте мы займемся способами реализации элементарной операции для рассматриваемой нами задачи.

3. Способы реализации ЭО

Сначала предположим, что значения фазовых координат процесса на границе S заданы. Функция $\gamma_s(t, x)$ разыскивается в виде

$$\gamma_s^j(t, x) = \nu_{is}^j(t) x^i \qquad (j = 1, \dots, m;\quad i = 1, \dots, n)$$

где ν_{is}^j — подлежащие определению непрерывные функции.

Функционал δ_s для рассматриваемого случая запишется следующим образом:

$$\delta_s[\overline{x}, \overline{u}, \nu] = \sum_j \int_{\gamma^j} \sum_{t \in \rho_s^j} \nu_{is}^j(t) \overline{x}_s^i(t) \Big|_{t-0}^{t+0} dt_j + \int_{\gamma} \nu_{is}^j \overline{z}_{js}^i \, dt$$

где ρ_s^j — множество точек разрывов функции x_s по аргументу t^j,

$z_j^i(t) = \dfrac{\partial x^i}{\partial t^j} - f_j^i(t, x, u)$.

Для выполнения условия (2.5) достаточно выбирать непрерывную вектор-функцию $\nu_s(t)$ так, чтобы имело место неравенство

$$\delta[\overline{x}, \overline{u}, \nu] > 0 \tag{3.1}$$

Пусть $\nu^j_s(t)$ — функция, определяемая следующим образом:

$$\nu^j_{is}(t) = \begin{cases} x^j_s(t^j+0) - \bar{x}^j_s(t^j-0), & \text{если } t^j \in \rho^j_s \\ \bar{z}^j_{is} & \text{в остальных точках } T \end{cases} \tag{3.2}$$

Очевидно, что для этой функции условие (3.1) выполняется. Тем не менее, мы не можем брать ее в качестве искомой, поскольку в общем случае функция, определяемая из соотношения (3.2) является кусочно-непрерывной, что противоречит условию непрерывной дифференцируемости, наложенному на функции, принадлежащие классу Π.

Заметим, что функционал $\hat{\delta}$ линеен, а значит и непрерывен по аргументу ν. Поэтому условие (3.1) будет иметь место и для некоторой непрерывно-дифференцируемой функции $\bar{\nu}(t)$, аппроксимирующей функцию $\nu(t)$ с достаточно высокой степенью точности. Кроме того, функция $\bar{\nu}(t)$ может быть выбрана так, чтобы ее значения совпадали со значениями функции $\nu(t)$ в заданных точках, число которых конечно. Ввиду этого, при численном решении можно пользоваться значениями, получаемыми из соотношения (3.2).

Перепишем выражение для $\hat{\delta}_s[\bar{x}, \bar{u}, \nu]$ в несколько ином виде:

$$\hat{\delta}_s[\bar{x}, \bar{u}, \nu] = \int_T \nu^j_{is}\bar{z}^j_{is}\,dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_T \sum_{\bar{T}^j \in \rho^j_s} \bar{\delta}(t^j - \bar{T}^j)\,[\nu^j_{is}(t)\,\bar{x}^j_s(t)|^{\bar{T}^j+0}_{\bar{T}^j-0}]\,dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_T \nu^j_{is}\,[\bar{z}^j_{is} + \sum_{\bar{T}^j \in \rho^j_s} \bar{\delta}(t^j - \bar{T}^j)\,\bar{x}^j_s(t)|^{\bar{T}^j+0}_{\bar{T}^j-0}]\,dt \tag{3.3}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m)$$

Через $\bar{\delta}(\cdot)$ в этом выражении обозначена дельта-функция Дирака. Из (3.3) следует, что приняв

$$\nu^j_{is}(t) = \bar{z}^j_{is} + \sum_{\bar{T}^j \in \rho^j_s} \bar{\delta}(t^j - \bar{T}^j)\,\bar{x}^j_s(t)|^{\bar{T}^j+0}_{\bar{T}^j-0}$$

мы снова придем к неравенству (3.1).

Во многих задачах, в частности в линейных задачах с выпуклым функционалом, функцию $\nu^j(t)$ удобно брать зависящей лишь от j-ой переменной. Для этого случая равенство (3.3) запишется так:

$$\hat{\delta}_s = \sum_{j=1}^{m} \int_0^{t^j_1} \nu^j_{is} \int_{T^j} [\bar{z}^j_{is}(t) + \sum_{\bar{T}^j \in \rho^j_s} \bar{\delta}(t^j - \bar{T}^j)\,\bar{x}^j_s(t)|^{\bar{T}^j+0}_{\bar{T}^j-0}]\,dt_j\,dt^j$$

и в качестве ν^j_{is} можно взять

$$\nu^j_{is}(t) = \int\limits_{T_j} [\bar{z}^j_{is}(t) + \sum_{\bar{t}^j \in \rho^j_s} \bar{\varepsilon}(t^j - \bar{t}^j)\,\bar{x}^j_s(t)\,|^{\bar{t}^j+0}_{\bar{t}^j-0}]\,dt_j$$

Задание функций ν^j в таком виде обеспечивает максимальный рост функционала δ.

Можно предложить еще один способ нахождения функций ν, обеспечивающих условие (2.5).

Будем разыскивать функции ν^j в виде тригонометрического ряда

$$\nu^j_{is} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}^{ij}_{ki} \cos kt^j + \tilde{b}^{ij}_{ki} \sin kt^j$$

Подставляя функции ν^j_{is} в выражение для функционала и производя несложные преобразования, получим соотношение

$$\delta_s[\bar{x}, \bar{u}, \nu] = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}^s_{ki} \Big(A^0_{1s} - \int\limits_{T} A_{1s} dt\Big)^i_k + \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{b}^s_{ki} \Big(A^0_{2s} - \int\limits_{T} A_{2s} dt\Big)^i_k \qquad (3.4)$$

где

$$A^0_{1s} = \sum_{j=1}^{m} \cos kt^j_1 \int\limits_{T^j} \bar{x}^{j1}_{js}\,dt_j - \sum_{j=1}^{m} \cos kt^j_0 \int\limits_{T^j} \bar{x}^{j0}_{js}\,dt_j$$

$$A^0_{2s} = \sum_{j=1}^{m} \sin kt^j_1 \int\limits_{T^j} \bar{x}^{j1}_{js}\,dt_j - \sum_{j=1}^{m} \sin kt^j_0 \int\limits_{T^j} \bar{x}^{j0}_{js}\,dt_j$$

$$A_{1s} = \sum_{j=1}^{m} [\cos kt^j \times a^j_{jl}\bar{x}^l_s + \cos kt^j \times b^j_{ip}\bar{u}^p_s - k \sin kt^j \times \bar{x}^j_s]$$

$$A_{2s} = \sum_{j=1}^{m} [\sin kt^j \times a^j_{il}\bar{x}^l_s + \sin kt^j \times b^j_{ip}\bar{u}^p_s + k \cos kt^j \times \bar{x}^j_s]$$

Здесь

$$\bar{x}^{i0,1}_j = \bar{x}^i(t^1, t^2, \ldots, t^j_{0,1}, \ldots, t^m), \qquad (i, l = 1, \ldots, n;\ p = 1, \ldots, d),$$

$$\tilde{a}^{ij}_{ki} = \tilde{a}^{(j-1)i}_{ki}, \qquad \tilde{b}^{ij}_{ki} = \tilde{b}^{(j-1)i}_{ki}$$

Из (3.4) следует, что для выполнения условия (3.1) достаточно задать

$$\tilde{a}^s_{ki} = L^s_{ki} \operatorname{sign}\Big(A^0_{1s} - \int\limits_{T} A_{1s}\,dt\Big)^i_k$$

$$\tilde{b}^s_{ki} = M^s_{ki} \operatorname{sign}\Big(A^0_{2s} - \int\limits_{T} A_{2s}\,dt\Big)^i_k$$

где L^s_{ki} и M^s_{ki} — произвольные числа, большие нуля.

При доказательстве сходимости применяемого здесь алгоритма в работе [2] используется понятие нормировки функций ν:

1) $|\nu_s(t)| \leqslant 1$;

2) существует число $C \in (0, 1)$ такое, что при всех s

$$\delta_s[\bar{x}_s, \bar{u}_s] > C\{\Delta^1[\bar{z}_s] + \Delta^2[\bar{x}_s(t)]\} \tag{3.5}$$

3) число λ_s выбирается согласно усиленному варианту.

Фигурирующие в условия (3.5) величины Δ^1 и Δ^2 характеризуют отличие элемента $(x, u) \in E'$ от D. Этот элемент не содержится в классе D, если при каких-либо значениях t нарушаются основные уравнения связи $z(t) = 0$, либо имеют место разрывы $x(t)$. В соответствии с этим имеем

$$\Delta^1 = \int\limits_T \sum_{j=1}^{m} |z_j(t)|\, dt, \qquad \Delta^2 = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{T^j} \sum_{t \in \rho^j} |x(t)|_{t^j-0}^{t^j+0} dt_j$$

Сходимость последовательности процессов $\{\bar{x}_s, \bar{u}_s\}$ к D, о которой шла речь в п. 1, понимается в смысле равенств

$$\lim_{s\to\infty} \Delta_s^1 = 0, \qquad \lim_{s\to\infty} \Delta_s^2 = 0$$

Возвращаясь к условиям нормировки 1) и 2), отметим, что они легко учитываются первыми двумя из указанных выше способов реализации ЭО. Для этого достаточно в первом способе под функцией $\bar{\nu}^j$ понимать единичный вектор e^j, совпадающий в каждый момент t с направлением $\bar{\nu}^j$, а во втором — единичный вектор по направлению

$$\int\limits_{T^j} |\bar{z}_j + \sum_{\bar{t}^j \in \rho^j} \bar{\delta}(t^j - \bar{t}^j)\, x(t)|_{t^j-0}^{t^j+0}|\, dt_j$$

Для третьего способа условия нормировки будут выполнены, если в пределах ограничения

$$\sum_{i=0}^{\bar{n}} (|\bar{a}_{ki}^s| + |\tilde{b}_{ki}^s|) < 1 \tag{A}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad s = 1, 2, \ldots)$$

удается удовлетворить условию роста (3.1) функционала δ.

Выше было предложено три способа реализации элементарной операции. Основным преимуществом первых двух из них является то, что они выполнимы всегда, коль скоро выполнима элементарная операция вообще. При этом, второй способ, использующий $\bar{\delta}$-функцию, обладает большей универсальностью, так как он позволяет представить функцию ν одинаковым образом во всех точках рассматриваемой области, что значительно облегчает работу на ЭВМ.

Возможности третьего способа несколько ограничены, поскольку выполнение условия (A) является труднопроверяемым.

4. Процедуры алгоритма

Выпишем конструкцию $R(t, x, u)$, задав функции φ^j линейными относительно фазовых координат

$$\varphi^j = \psi^j_i(t)\, x^i$$

$$R(t, x, u) = \psi^j_i\,(a^i_{jl} x^l + b^i_{jk} u^k) - a^0_i x^{i^2} - b^0_i u^{k^2} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \psi^j_i}{\partial t^j} x^i$$

Найдем значения x и u, доставляющих максимум $R(t, x, u)$.

Простые вычисления показывают, что

$$\bar{x}^{\omega} = \frac{\psi^j_i a^i_{j\omega} + \dfrac{\partial \psi^j_{\omega}}{\partial t^j}}{2a^0_{\omega}} \qquad \omega = 1, 2, \ldots, n \tag{4.1}$$

$$\bar{u}^{\omega'} = \frac{\psi^j_i b^i_{j\omega'}}{2b^0_{\omega'}} \qquad \omega' = 1, 2, \ldots, d \tag{4.2}$$

В этих выражениях $\psi^j_i = \dfrac{\partial \varphi^j}{\partial x^i}$.

Из (4.1) и (4.2) следует соотношение

$$z^k_{\omega} = \frac{\dfrac{\partial \psi^j_i}{\partial t^k} a^i_{j\omega} + \dfrac{\partial^2 \psi^j_{\omega}}{\partial t^j \partial t^k}}{2a^0_{\omega}} - a^{\omega}_{ki}\, \frac{a^l_{ji} \psi^j_l + \dfrac{\partial \psi^j_i}{\partial t^j}}{2a^0_i} - b^{\omega}_{k\omega'} \frac{b^i_{j\omega'} \psi^j_i}{2b^0_{\omega'}} \tag{4.3}$$

Пусть на S-ом шаге нам известны величины

$$\bar{x}^{\omega}_s(t),\ \bar{u}^{\omega'}_s(t),\ \bar{z}^k_{\omega s}(t),\ \psi^j_{is}(t)$$

$$(i,\ \omega = 1, \ldots, n;\quad j,\ k = 1, \ldots, m;\quad \omega' = 1, \ldots, d)$$

Подставив в правые части формул (4.1), (4.2) и (4.3) функции $\psi^j_{is} + \lambda \nu^j_{is}$, мы сможем явно выписать функции $\bar{x}^{\omega}_s(t, \lambda)$, $\bar{u}^{\omega'}_s(t, \lambda)$, $\bar{z}^k_{\omega s}(t, \lambda)$. Далее определяем число λ_s в силу усиленного варианта.

Схема реализации алгоритма выглядит следующим образом. Обозначим через Δ^1_s, Δ^2_s, I_s значения функционалов Δ^1, Δ^2 и I, соответствующие процессу $\{\bar{x}_s, \bar{u}_s\}$ и функции ψ_s на s-ом шаге.

Пусть последовательность $\{\varepsilon_n\}$ такова, что

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0, \qquad \varepsilon_n > 0$$

При данном s проверяем условие

$$\max\,\{\Delta^1_{s+1} - \Delta^1_s,\ \Delta^2_{s+1} - \Delta^2_s,\ I_{s+1} - I_s\} < \varepsilon_n$$

Если это условие выполнено при достаточно большом N, то проверяем условие

$$\max \{\Delta_s^1, \Delta_s^2\} < \varepsilon_N.$$

Если выполнено и это условие, то принимаем $I_s = \bar{I}$ и считаем решение задачи законченным. В противном случае, по одному из способов переходим к $s + 1$.

5. Общий случай

Выше всюду предполагалось, что значения фазовых координат на границе S заданы. Здесь мы рассмотрим общий случай, а именно, будем предполагать, что $2m$ граней исходного параллелепипеда T разбиты на три группы: в первую группу (их число обозначим через k') входят те грани, на которых значения функций $x^i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ не заданы, во вторую группу входят грани (их число обозначим через k''), на которых требуется минимизировать функционал; на остальных гранях значения искомых фазовых координат заданы.

Допустим, кроме того, что противолежащие грани принадлежат одной и той же группе. Это условие может быть легко обобщено и вводится нами лишь для облегчения записи.

Как следует из аппарата достаточных условий, для получения оптимальных значений фазовых координат на границе необходимо изучить на минимум функцию

$$G = \sum_{j=1}^{m} \int_{T^j} \varphi^j [t, x(t)]|_{t_j=0}^{t_j=1} dt_j + F[q(t)], \quad q(t) = x(t \in S)$$

При сделанных выше предположениях функция G принимает вид

$$G[q(t)] = \sum_{j=1}^{k'} \int_{T^j} \varphi^j (t, x)|_{t_j=0}^{t_j=1} dt_j + \sum_{j''=1}^{k''} \int_{T^{j''}} \varphi^{j''} (t, x)|_{t_{j''}=0}^{t_{j''}=1} dt_{j''} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j'=1}^{k'''} [(x_{j'}^{i1} - h_{j'}^{i1})^2 + (x_{j'}^{i0} - h_{j'}^{i0})^2] dt_{j'} \qquad (5.1)$$

Для единственности функций, доставляющих минимум G, добавим к правой части (5.1) слагаемое

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k'} \int_{T^j} [(x_j^{i0})^2 + (x_j^{i1})^2] dt_j, \qquad \varepsilon > 0$$

откуда получим

$$\begin{aligned}
&\bar{x}_j^{i1} = \operatorname*{argmin}_{x_j^{i1} \in W} G[q(t), \varepsilon] = \frac{2h_j^{i1} - \psi_j^i(t_1^i)}{2} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, k'' \end{pmatrix} \\
&\bar{x}_j^{i0} = \operatorname*{argmin}_{x_j^{i0} \in W} G[q(t), \varepsilon] = \frac{2h_j^{i0} - \psi_j^i(t_0^i)}{2} \\
&\bar{x}_j^{i1} = \operatorname*{argmin}_{x_j^{i1}} G[q(t), \varepsilon] = -\frac{\psi_j^i(t_1^i)}{2\varepsilon} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, k' \end{pmatrix} \\
&\bar{x}_j^{i0} = \operatorname*{argmin}_{x_j^{i0}} G[q(t), \varepsilon] = \frac{\psi_j^i(t_0^i)}{2\varepsilon}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Здесь

$$G[q(t), \varepsilon] = G[q(t)] + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k'} [(x_j^{0i})^2 + (x_j^{1i})^2]\, dt_j$$

Полученные значения следует использовать при вычислении функционалов $\hat{\varepsilon}$, l, Δ^1, Δ^2.

Правомерность замены задачи минимизации функции $G[q(t)]$ на задачу минимизации функции $G[q(t), \varepsilon]$ обосновывается следующей леммой:

пусть последовательность функций $\{f_n(x)\}$ сходится при $n \to \infty$ к функции $f_0(x)$, монотонно не возрастая. Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} \inf\limits_x f_n(x) = \inf\limits_x f_0(x)$, и если последовательность точек $\{x_n\}$ такова, что $f_n(x_n) \leqslant \inf\limits_x f_n(x) + \varepsilon_n$, то

$$\lim_{n \to \infty} f_0(x_n) = \inf_x f_0(x)$$

Здесь $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$, $\varepsilon_n > 0$.

Доказательство. По любому $\varepsilon > 0$ существует точка x_0 и номер N такие, что

$$f_0(x_0) \leqslant \inf_x f_0(x) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad f_n(x_0) - f_0(x_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad n > N$$

Тогда

$$0 \leqslant \inf_x f_n(x) - \inf_x f_0(x) \leqslant \inf_x f_n(x) - f_0(x_0) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} \leqslant f_n(x_0) - f_0(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$$

откуда следует первое утверждение.

Для точек $\{x_n\}$ имеем

$$f_0(x_n) \leqslant f_n(x_n) \leqslant \inf_x f_n(x) + \varepsilon_n$$

и так как

$$\lim_{n \to \infty} \inf_x f_n(x) = \inf_x f_0(x)$$

то получим

$$f_0(x_n) - \inf_x f_0(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

и т. д.

Ясно, что функции $G(q, \varepsilon)$ и $G(q)$ удовлетворяют условиям леммы и поэтому при достаточно малых $\varepsilon > 0$ полученные значения функций $\operatorname{argmin} G(q, \varepsilon)$ можно считать хорошими приближениями к оптимальным значениям.

Автор выражает глубокую благодарность В. Ф. Кротову за постоянное внимание к работе.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 25 VI 1980

Մ. Խ. ՂՈՒԿԱՍՅԱՆ

ԲԱՇԽՎԱԾ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ԿԱՌԱՎԱՐՎՈՂ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՕՊՏԻՄԻԶԱՑՄԱՆ ՀԱՇՎԱՅԻՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Նկարագրվում են բաշխված պարամետրերով գծային ղեկավարվող համակարգերի լուծման և օպտիմիզացման հաշվային ալգորիթմները, որոնք հիմնված են Վ. Ֆ. Կրոտովի օպտիմալության բավարար պայմանների վրա։

Բերված են ուսումնասիրվող ալգորիթմների հիմնական գործողության իրականացման միջոցները։

Առաջարկված են գծային խնդիրների լուծման, ինչպես նաև քառակուսային որակի ֆունկցիոնալով խնդիրների համար բերված հաշվային ալգորիթմների իրականացման միջոցները հաշվի առնող սխեմաներ։

ON CALCULATIVE ALGORITHMS FOR THE SOLVING AND OPTIMIZATION OF LINEAR CONTROLLABLE SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

M. Kh. GHUKASIAN

Summary

Calculative algorithms for the solving and optimization of linear controllable systems with distributed parameters, based on the sufficient conditions of V. Krotov's optimality are described. The ways of realization of the basic operation of the studied algorithms are presented. A sufficiently general case of moving boundaries is considered. The solution scheme of linear problems as well as those with a quadratic functional of quality is suggested, taking into account the given ways of realization.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кротов В. Ф., Гурман В. И.* Методы и задачи оптимального управления. М., «Наука», 1973, стр. 434.
2. *Кротов В. Ф.* Вычислительные алгоритмы решения и оптимизации управляемых систем уравнения. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1975, №№ 5, 6.
3. *Кротов В. Ф.* Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий оптимальности, ч. I, II, III — Автоматика и телемеханика, 1962, № 12; 1963, № 5; 1964, № 7

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIV, № 4, 1981 Механика

К. С. КАРАПЕТЯН, К. А. КАРАПЕТЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПРОЧНОСТИ, МОДУЛЯ ДЕФОРМАЦИИ И СТЕПЕНИ АНИЗОТРОПИИ ВЕСЬМА СТАРОГО ТУФОБЕТОНА ПРИ СЖАТИИ ВСЛЕДСТВИЕ ВОДОНАСЫЩЕНИЯ И ВЫСЫХАНИЯ

В работах [5, 6] К. С. Карапетяна впервые было установлено, что бетон по прочности, модулю деформации и деформациям ползучести при сжатии является существенно анизотропным материалом. Дальнейшие многолетние исследования показали, что степень анизотропии бетона по прочности, модулю деформации и деформациям ползучести как при сжатии, так и при растяжении зависит от многочисленных факторов: величины напряжения, размеров поперечного сечения и высоты образца, расхода цемента, влажности среды, продолжительности вибрации бетонной смеси, крупности заполнителя, возраста к моменту испытания и др. [7—14]. Эти исследования полностью подтвердили гипотезу К. С. Карапетяна о причинах анизотропии бетона [5, 6]. Согласно гипотезе автора, причиной анизотропии являются водные прослойки, которые неизбежно образуются под частицами заполнителя в результате внутреннего расслаивания бетона при его укладке и уплотнении. При испарении этих прослоек на их местах остаются пустоты (дефекты), которые ослабляют сечение бетонного элемента и снижают его прочность, увеличивают деформации. Отрицательное влияние дефектов более существенно в том случае, когда призмы испытываются перпендикулярно слоям бетонирования, так как в этом случае ослабление сечения образца дефектами получается наибольшее.

При высокой же влажности среды и особенно в изолированных образцах, когда испарение не имеет места и водные прослойки сохраняются, последние играют положительную роль. Водные прослойки принимают участие в восприятии внешней нагрузки, способствуя работе всего сечения бетонного элемента и улучшению объемно-напряженного состояния.

Специально поставленные К. С. Карапетяном опыты для исследования анизотропных свойств бетона в зависимости от влажности среды показали, что в случае изолированных от влагопотери образцов прочность призм, испытанных перпендикулярно слоям, гораздо больше, а деформации при кратковременном и длительном загружениях меньше, чем призм, испытанных параллельно слоям. Удаление изоляции и в связи с этим испарение и исчезновение водных прослоек приводило к обратному явлению [9].

Для подтверждения своей гипотезы о причинах анизотропии бетона К. С. Карапетяном были поставлены и обратные опыты [13]. При этом он считал, что если испарение приводит к снижению прочности и увеличению деформаций, то водонасыщение сухого бетона логически должно привести к заполнению пустот (дефектов) водой и благодаря восстановлению водных прослоек к росту прочности и уменьшению деформаций, а вместе с этим и к уменьшению степени анизотропии бетона. Опыты полностью подтвердили гипотезу автора. Таким образом, было установлено, что восстановление водных прослоек играет весьма важную роль в повышении прочности и в уменьшении деформаций бетона при сжатии, а вызванное испарением исчезновение водных прослоек, наоборот, приводит к снижению прочности и увеличению деформаций.

Опыты К. С. Карапетяна хотя и дали возможность обнаружить эффект водных прослоек, но они были недостаточными, чтобы количественно оценить роль восстановления и испарения водных прослоек в общем явлении. При этом мы имеем в виду, что опыты были поставлены на сравнительно нестаром бетоне и поэтому наблюдаемое изменение физико-механических и анизотропных свойств бетона при водонасыщении и высыхании являлось результатом наложения одновременно проявляющихся нескольких эффектов.

Учитывая это, авторы по специальной методике поставили две серии новых опытов для исследования влияния водонасыщения и высыхания на прочность и деформации бетона при сжатии с учетом анизотропии, результаты которых и приводятся в данной работе.

§ 1. Методика опытов

При водонасыщении сухого бетона его прочность на сжатие изменяется за счет одновременно проявляющихся трех эффектов. С начала же обводнения прочность бетона снижается за счет адсорбционных явлений, а в дальнейшем происходит упрочнение, вызванное возобновлением процесса твердения (вторичное твердение) и восстановлением водных прослоек в связи с заполнением пустот (дефектов) водой. При этом количественное влияние каждого из этих эффектов зависит от различных факторов и при соответствующих условиях каждый из них может оказаться определяющим в прочности бетона. Поэтому для оценки роли эффекта водных прослоек опыты необходимо было поставить по такой методике, которая дала бы возможность максимально уменьшить влияние других эффектов. Учитывая это, опыты были поставлены нами над весьма старым сухим бетоном, так как в этом случае упрочнение за счет вторичного твердения практически исключается и поэтому вызванный водонасыщением прирост прочности в основном будет обусловлен эффектом водных прослоек.

Оценить роль эффекта водных прослоек можно и обратными опытами, то есть путем исследования влияния высыхания на прочность бетона. В этом случае также опыты следует поставить над весьма старым бетоном с той лишь разницей, что с момента изготовления бетонный элемент должен быть изолирован от влагопотери. В условиях длительной изоляции бетонный элемент имеет возможность нормально твердеть и приобрести максимально возможную прочность и если спустя много лет изоляцию удалить, то это приведет к испарению и исчезновению водных прослоек и тем самым к спаду прочности.

На основании вышеизложенного нами были поставлены опыты как с водонасыщенными, так и с высыхающими образцами. Результаты обеих серий опытов, как будет показано, дают возможность более обоснованно судить о количественном влиянии водных прослоек на прочность, деформативность и степень анизотропии бетона.

Испытанию подвергались цилиндрические образцы диаметром 5.5 *см*, высотой 16.5 *см*, которые выбуривались в двух взаимно перпендикулярных направлениях из бетонного элемента. В качестве таких элементов использовали большие цилиндрические образцы (диаметром 25 *см*, высотой 60 *см*), которые были изготовлены в 1954 г. из туфобетона состава в массе 1 : 1.80 : 2.25, В/Ц = 1.43, Ц = 261 *кг/м³*. Сразу после распалубки часть больших цилиндров была изолирована от влагопотери и хранилась вместе с неизолированными образцами до момента выбуривания из них малых цилиндрических образцов в возрасте 23 лет в обычных лабораторных условиях. В этих же условиях проводились опыты по исследованию влияния водонасыщения и высыхания на прочность и деформативность на малых цилиндрических образцах, выбуренных из неизолированных и изолированных больших цилиндров.

Для краткости дальнейшего изложения впредь под условным обозначением ПЕС мы будем иметь в виду те образцы, которые испытывались перпендикулярно слоям бетонирования, а ПАС—образцы, которые испытывались параллельно слоям бетонирования.

При испытании образцов сжимающая нагрузка повышалась ступенями и после каждой ступени измерялись продольные и поперечные деформации. Под каждой ступенью нагрузки образец выдерживался лишь на время, необходимое для взятия отсчетов по приборам, измеряющим деформации. В опытах первой серии испытывались контрольные сухие образцы и водонасыщенные образцы после водного хранения 1, 3, 7, 30 *сут.* и 3 *мес.* В опытах же второй серии испытывались контрольные изолированные образцы (сразу после выбуривания) и образцы после высыхания 7 *сут.*, а также 1, 3 и 6 *мес.* Ввиду ограниченного количества образцов в каждом случае испытывались по 2—3 образца. В опытах с водонасыщенными образцами максимальный разброс при испытании 2-х образцов составил ± 4.6%, а 3-х образцов — +4.8 и —4.8%. В опытах же с высыхающими образцами максимальный разброс при испытании 2-х образцов составил ±1.8%, а при испытании 3-х образцов — + 4.5 и — 5.1%.

§ 2. Влияние водонасыщения на прочность, деформации (продольные и поперечные) и степень анизотропии туфобетона

Цилиндрические прочности исследованного туфобетона по данным испытаний образцов перпендикулярно (ПЕС) и параллельно (ПАС) слоям бетонирования после различных сроков водного хранения приведены в табл. 1. Как видим, независимо от того, испытываются образцы перпендикулярно слоям (ПЕС) или параллельно слоям (ПАС), сначала водное хранение приводит к адсорбционному спаду прочности бетона, а в дальнейшем — к устойчивому существенному упрочнению.

По данным табл. 1 после суточного водного хранения прочности образцов ПЕС и ПАС снизились соответственно на 4% и 14%, а к 3-м месяцам существенно возросли и уже на 49% и 18% превышают прочности соответствующих контрольных сухих образцов. При этом полностью перекрыты и адсорбционные спады прочности указанных образцов

Таблица 1

Влияние водонасыщения на прочность туфобетона и степень его анизотропии по прочности

Условия хранения образцов	Направление сжимающей нагрузки по отношению к слоям бетона при испытании	% водопоглощения по массе сухого бетона	Цилиндрическая прочность в *МПа*	Отношение прочности водонасыщенных образцов к прочности сухих образцов	Отношение прочности образцов ПАС к прочности образцов ПЕС
Образцы сухие	перпен. парал.	0 0	13.6 16.4	1.00 1.00	1.21
1 *сут* в воде	перпен. парал.	14.9 13.9	13.1 14.1	0.96 0.86	1.08
3 *сут* в воде	перпен. парал.	15.8 15.0	14.1 15.2	1.04 0.93	1.08
7 *сут* в воде	перпен. парал.	17.4 16.0	17.3 16.4	1.27 1.00	0.95
30 *сут* в воде	перпен. парал.	18.9 17.5	18.6 17.7	1.37 1.08	0.95
3 *мес* в воде	перпен. парал.	19.4 18.2	20.2 19.4	1.49 1.18	0.96

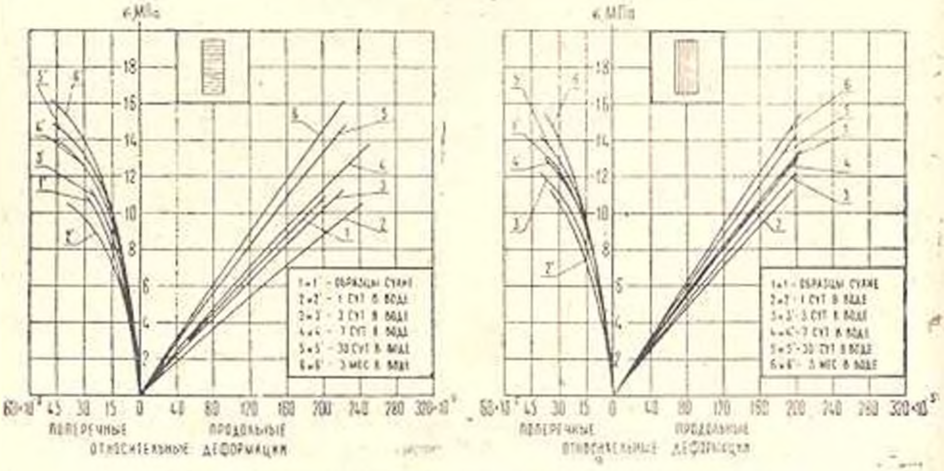
О важной положительной роли эффекта восстановления водных прослоек в упрочнении бетона в результате его водонасыщения свидетельствует тот факт, что в наших опытах до обводнения прочность образцов ПЕС была меньше прочности образцов ПАС, а начиная с 7 *сут.* водного хранения и в последующем до конца опытов имеет место обратное явление. Это говорит о том, что положительный эффект восстановленных водных прослоек для образцов ПЕС оказался более существенным, чем для образцов ПАС. Аналогичное явление наблюдалось и в работах [15, 16].

Конечно, наблюдаемый в наших опытах после суточного водного хранения спад прочности образцов ПЕС и ПАС не представляет полный адсорбционный спад прочности. В действительности адсорбционное понижение прочности было значительно больше, но так как водонасыщение в течение первых суток оказалось весьма значительным (до 77% от общего водопоглощения), то часть понижения прочности уже была компенсирована положительным эффектом восстановленных водных прослоек. Эти опыты наглядно показывают ту важную роль, которую играют восстановленные водные прослойки в упрочнении бетона и одновременно еще раз подтверждают справедливость гипотезы К. С. Карапетяна о причинах анизотропии бетона.

Различное количественное влияние водонасыщения на цилиндрическую прочность образцов ПЕС и ПАС привело к существенному изменению степени анизотропии бетона по прочности. Коэффициент анизотропии бетона по прочности $K_1 = R_{ц}/R_{ц}^{\prime}$ (где $R_{ц}$ и $R_{ц}^{\prime}$ – соответственно прочности образцов ПЕС и ПАС), который для сухих образцов составляет 1.21 на 7 *сут.* водного хранения, снизился до значения 0.95 и в дальнейшем практически оставался неизменным. $K_1 = 0.95$ означает, что в результате водного хранения туфобетон по цилиндрической прочности практически стал изотропным.

Рассмотрим теперь, как влияет водонасыщение на продольные и поперечные деформации образцов ПЕС и ПАС (фиг. 1). Как видим, независимо от направления сжимающей нагрузки по отношению к слоям бетонирования, водное хранение через сутки привело к существенному увеличению как продольных, так и поперечных деформаций, а в дальнейшем—к их заметному уменьшению. Из этих графиков ясно видно, что после суточного водного хранения с увеличением продолжительности водного хранения кривые продольных и поперечных деформаций образцов ПЕС и ПАС все больше приближаются к осям напряжений. В итоге кривые деформаций образцов, которые соответствуют водному хранению 3 *мес.*, уже проходят заметно выше соответствующих кривых деформаций контрольных сухих образцов.

Для получения более ясного количественного представления о влиянии водонасыщения на деформации бетона рассмотрим данные табл. 2, где приведены касательные модули деформации и поперечные деформации при различных напряжениях. По этим данным влияние водонасыщения на модуль деформации качественно имеет тот же характер, что и влияние водонасыщения на цилиндрическую прочность бетона. После суточного водного хранения модуль деформации также снижается, причем более чувствительно, чем прочность бетона. При этом, адсорбционный спад модуля деформации образцов ПЕС несколько больше, чем образцов ПАС и зависит от величины сжимающего напряжения: с увеличением напряжения спад модуля деформации образцов ПЕС увеличивается, а образцов ПАС – уменьшается. После адсорбционного спада модуля деформации дальнейшее водное хранение уже приводит к устойчивому росту модуля деформации во времени и через 3 *мес.*, в зависимости от величины сжимающего напряжения, модуль деформации водонасыщенных образцов ПЕС на 37–39%, а образцов ПАС на 4–24% превышает модуль деформации соответствующих контрольных сухих образцов. При этом полностью перекрыты и начальные адсорбционные спады модулей деформаций указанных образцов.

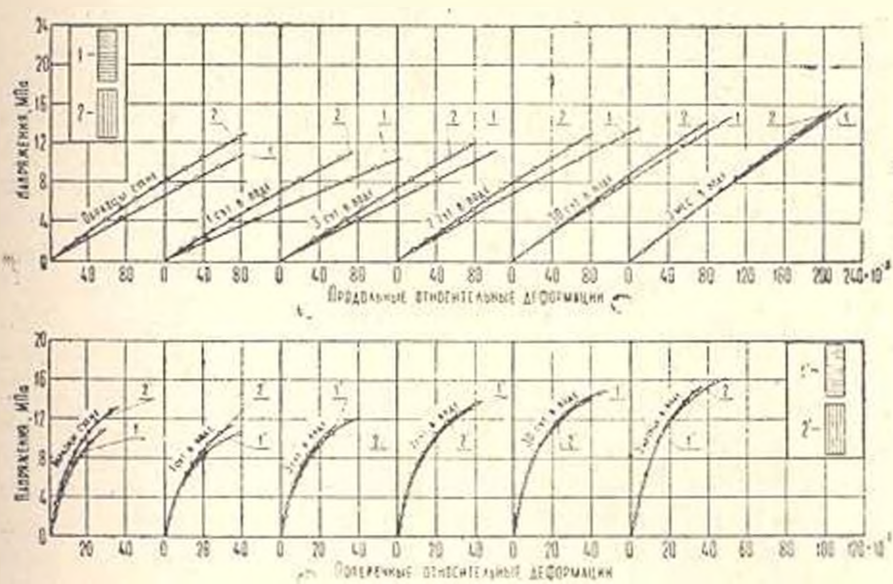


Фиг. 1. Влияние водонасыщения на деформации туфобетона.

Как видно из табл. 2, до обводнения модуль деформации образцов ПЕС был заметно меньше модуля деформации образцов ПАС, а после 3-х *мес.* водного хранения они уже практически равны друг другу. Таким образом, в полном соответствии с закономерностью влияния водонасыщения на прочность бетона, в процессе водного хранения нарастание модуля деформации во времени образцов ПЕС протекало более интенсивно, чем образцов ПАС.

По данным табл. 2 водонасыщение оказывает существенное влияние и на поперечные деформации образцов ПЕС и ПАС. Суточное водное хранение привело к заметному увеличению поперечных деформаций, а в последующем – к их существенному уменьшению.

Рассмотрим теперь как влияет водонасыщение на степень анизотропии по продольным и поперечным деформациям туфобетона. Кривые продольных и поперечных деформаций всех образцов ПЕС и ПАС представлены на фиг. 2. Как видно, на верхнем графике во всех случаях кривая деформаций образцов ПЕС (кривая 1) проходит ниже кривой деформаций образцов ПАС (кривая 2), и с увеличением продолжительности водного хранения расходимость этих кривых уменьшается и в итоге они практически сливаются. Слияние этих кривых при продолжительности водного хранения 3 *мес.* означает, что туфобетон по продольным деформациям стал изотропным. Согласно нижнему графику фиг. 2 аналогичным образом водонасыщение влияет и на поперечные деформации туфобетона, разница заключается лишь в том, что в этом случае слияние кривых поперечных деформаций образцов ПЕС и ПАС происходит гораздо раньше.



Фиг. 2. Влияние водонасыщения на анизотропию деформаций туфобетона

В табл. 2 приведены значения коэффициента анизотропии исследованного туфобетона по модулю деформации $K_1 = E'/E$ (где E и E' – соответственно модули деформации образцов ПЕС и ПАС) в зависимости от продолжительности водного хранения.

При сухих образцах K_1 больше единицы, причем, тем больше, чем меньше сжимающее напряжение. После суточного водного хранения K_1 увеличивается и уже не зависит от величины напряжения, а дальнейшее водное хранение до 3-х *мес.* приводит к устойчивому его уменьшению до значения близкого к единице, то есть туфобетон по модулю деформации практически становится изотропным. Интересно то, что при водонасыщенных образцах степень анизотропии туфобетона по модулю деформации практически не зависит от величины напряжения.

В табл. 2 приведены значения коэффициента анизотропии по поперечным деформациям $K_3 = \varepsilon'_{поп}/\varepsilon_{поп}$ (где $\varepsilon'_{поп}$ и $\varepsilon_{поп}$ — соответственно поперечные деформации образцов ПЕС и ПАС). При сухих образцах K_1 существенно больше единицы и практически не зависит от величины напряжения. В результате суточного водного хранения K_1 уменьшилось особенно чувствительно при напряжении 5*МПа* (K_1 = 0.97). Последнее свидетельствует о том, что туфобетон и по поперечным деформациям стал практически изотропным. При напряжении 10*МПа* то же самое происходит несколько позже — примерно через 2.5 *сут.* водного хранения. После 3-х *сут.* водного хранения K_1 несколько меньше единицы и в дальнейшем изменяется весьма незначительно. Кроме этого

Таблица 2

Влияние водонасыщения на модуль деформации, поперечные деформации туфобетона и степень их анизотропии

Условия хранения образцов	Направление сжимающей нагрузки по отношению к слоям бетона при испытании	Модуль деформации по касательной $\times 10^{-2}$ в *МПа* при напряжении (*МПа*)			Отношение модуля деформации водонасыщенных образцов ПАС к модулю деформации образцов ПЕС при напряжении (*МПа*)			Отношение модуля деформации образцов ПАС к модулю деформации образцов ПЕС при напряжении (*МПа*)			Поперечные деформации $\varepsilon_{поп} \times 10^{5}$ при напряжении (*МПа*)		Отношение поперечных деформаций образцов ПЕС к поперечным деформациям образцов ПАС при напряжении (*МПа*)	
		0	5	10	0	5	10	0	5	10	5	10	5	10
Образцы сухие	перпен. парал.	57 76	54 67	51 59	1.00 1.00	1.00 1.00	1.00 1.00	1.33	1.24	1.16	7.8 6.1	24.2 18.6	1.28	1.30
1 *сут* в воде	перпен. парал.	46 62	43 58	40 54	0.81 0.82	0.80 0.87	0.78 0.92	1.35	1.35	1.35	8.4 8.7	34.2 26.8	0.97	1.28
3 *сут* в воде	перпен. парал.	54 65	51 62	48 59	0.95 0.86	0.94 0.93	0.94 1.00	1.20	1.22	1.22	6.3 6.8	20.5 23.0	0.93	0.89
7 *сут* в воде	перпен. парал.	62 71	57 66	52 62	1.09 0.93	1.06 0.99	1.02 1.05	1.15	1.16	1.19	5.7 6.1	17.7 19.0	0.93	0.93
30 *сут* в воде	перпен. парал.	72 76	68 73	64 69	1.26 1.00	1.26 1.09	1.25 1.17	1.06	1.07	1.08	5.2 5.5	15.7 16.5	0.94	0.95
3 *мес* в воде	перпен. парал.	78 79	75 76	71 73	1.37 1.04	1.39 1.13	1.39 1.24	1.01	1.01	1.03	5.3 5.8	14.9 15.5	0.91	0.96

после 3-х *сут.* водного хранения K_r практически не зависит от величины сжимающего напряжения.

Таким образом, водонасыщение оказывает существенное влияние на прочность, деформации (продольные и поперечные) и анизотропные свойства весьма старого сухого туфобетона при сжатии. Как правило, независимо от того испытываются образцы перпендикулярно или параллельно слоям бетонирования, сначала водное хранение приводит к адсорбционному понижению прочности и увеличению деформаций (продольных и поперечных), а в дальнейшем — к существенному повышению прочности и уменьшению деформаций. При этом, эти изменения в количественном отношении в большой мере зависят от направления сжимающей нагрузки по отношению к слоям бетонирования. Повышение прочности и модуля деформации образцов, испытанных перпендикулярно слоям, гораздо больше, чем образцов, испытанных параллельно слоям, и в результате этого водное хранение приводит к тому, что туфобетон по прочности, модулю деформации и поперечным деформациям становится изотропным. Упрочнение, рост модуля деформации, уменьшение поперечных деформаций и уменьшение степени анизотропии туфобетона являются следствием того, что водное хранение приводит к заполнению образовавшихся под зернами крупного заполнителя бетона пустот (дефектов) водой и тем самым к восстановлению водных прослоек. Положительный эффект восстановленных прослоек в случае испытания образцов перпендикулярно слоям более чувствителен, чем при испытании образцов, параллельно слоям.

В следующем параграфе мы рассмотрим результаты наших опытов с высыхающими образцами, которые еще раз косвенно подтверждают справедливость гипотезы о важной положительной роли эффекта восстановленных водных прослоек при водонасыщении бетона.

§ 3. Влияние высыхания на прочность, деформации (продольные и поперечные) и степень анизотропии туфобетона

Цилиндрические прочности туфобетона по испытаниям образцов ПЕС и ПАС после различных сроков высыхания приведены в табл. 3. Одновременно приводятся данные об уменьшении веса образцов в результате высыхания.

Прежде, чем перейти к анализу данных табл. 3 с точки зрения влияния высыхания на прочность и степень анизотропии туфобетона по прочности, отметим, что объемный вес свежеуложенного туфобетона при изготовлении больших цилиндров составлял 1820 *кг/м³*. Спустя же 23 года, когда из больших неизолированных и изолированных цилиндров были выбурены малые цилиндрические образцы ПЕС и ПАС объемные веса последних соответственно составили: неизолированных образцов 1586 и 1606 *кг/м³*, а изолированных образцов — 1681 и 1687 *кг/м³*.

Таким образом, несмотря на наружную изоляцию за 23 года объемные веса изолированных образцов ПЕС и ПАС соответственно уменьшались на 7.7% и 7.3%, что свидетельствует о ненадежности изоляции, которая была сделана для исключения испарения. Однако, несмотря на это, объемные веса изолированных образцов ПЕС и ПАС оказались все же выше объемных весов таких же неизолированных образцов. Это обстоятельство обусловило более высокую прочность изолированных образцов ПЕС и ПАС (23.1 и 21.8 *МПа*) по сравнению с прочностью таких же неизолированных образцов (13.6 и 16.1 *МПа*). Кроме этого, при изолированных образцах прочность образцов ПЕС хотя и незначительно, но все же больше прочности образцов ПАС, а при неизолированных образцах имеет место обратное явление и разница прочностей более существенна (табл. 1 и 3). Ниже будет показано, что все это весьма закономерно.

Таблица 3

Влияние высыхания на цилиндрическую прочность туфобетона и степень его анизотропии по прочности

Продолжительность высыхания образцов	Направление сжимающей нагрузки по отношению к слоям бетона при испытании	% уменьшения веса образцов по массе изолированных образцов	Цилиндрическая прочность на сжатие в *МПа*	Отношение прочности высыхающих образцов к прочности изолированных образцов	Отношение прочности образцов ПАС к прочности образцов ПЕС
0	перпен. парал.	0 0	23.1 21.8	1.00 1.00	0.94
7 *сут*	перпен. парал.	3.4 3.6	23.2 22.2	1.00 1.02	0.96
1 *мес*	перпен. парал.	5.3 4.9	20.3 21.1	0.88 0.97	1.04
3 *мес*	перпен. парал.	6.0 5.8	17.7 20.4	0.77 0.94	1.15
5 *мес*	перпен. парал	8.2 7.0	16.4 19.5	0.71 0.89	1.19

Из данных табл. 1 и 3 следует, что прочности изолированных образцов ПЕС и ПАС соответственно на 70% и 33% выше прочности таких же неизолированных сухих образцов, то есть даже ненадежная изоляция обеспечила столь высокую прочность. Поэтому, вполне понятно, что если изоляция была бы надежной, то прочности изолированных образцов ПЕС и ПАС были бы еще выше, а их разница еще больше.

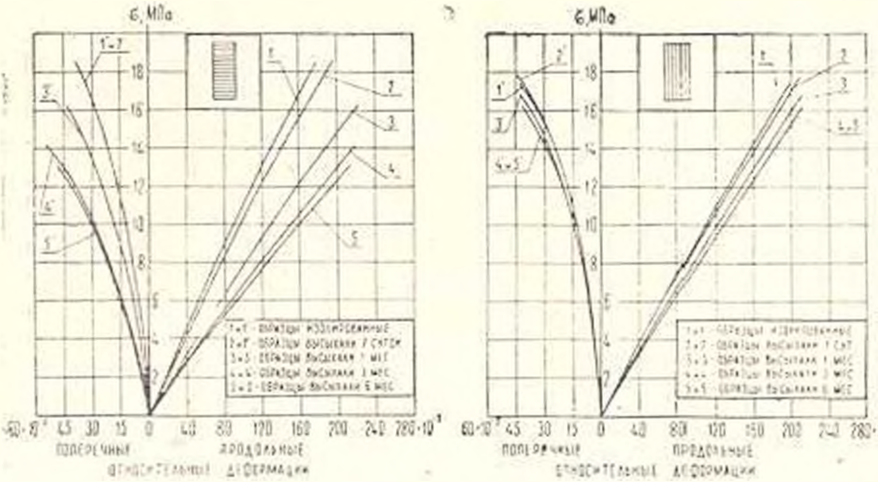
По данным табл. 3 высыхание образцов ПЕС и ПАС в течение первых 7 *сут.* практически не повлияло на их прочность, а дальнейшее высыхание привело к закономерному снижению их прочности. При этом, как и следовало ожидать, спад прочности образцов ПЕС оказался более чувствительным (на 29%), чем образцов ПАС (на 11%). Конечно, спад прочности был бы еще больше, если бы изоляция была надежной. Несовершенность изоляции и в связи с этим испарение и частичное исчезновение водных прослоек до начала выбуривания малых цилиндрических образцов уже привели к снижению прочности больших цилиндров. Таким образом, в полном соответствии с результатами опытов с водонасыщенными образцами (табл. 1), где водонасыщение после адсорбционного спада привело к заметному упрочнению образцов ПЕС и ПАС (особенно чувствительно образцов ПЕС), высыхание привело к обратному явлению — к снижению прочности образцов ПЕС и ПАС (особенно чувствительно образцов ПЕС).

В изолированных образцах коэффициент анизотропии туфобетона по цилиндрической прочности $K_1 = 0.94$ (табл. 3), то есть в этом случае прочность образцов ПЕС больше прочности образцов ПАС. Как и следовало ожидать, с увеличением продолжительности высыхания K_1 закономерно возрастает и через 6 *мес.* приобретает значение 1.19, то есть высыхание привело к увеличению степени анизотропии туфобетона по цилиндрической прочности. Как было уже показано, при водонасыщении сухих образцов наблюдалась обратная картина—уменьшение K_1 с 1.21 (при сухих образцах) до значения 0.96 (при водном хранении 3 *мес.*).

Высыхание оказывает существенное влияние и на деформации (продольные и поперечные) образцов ПЕС и ПАС (фиг. 3). Независимо от направления сжимающей нагрузки по отношению к слоям бетонирования, высыхание привело к увеличению как продольных, так и поперечных деформаций туфобетона. Из обоих графиков фиг. 3 ясно видно, что с увеличением продолжительности высыхания кривые продольных и поперечных деформаций все больше приближаются к осям деформации. При этом влияние высыхания на деформации образцов ПЕС более чувствительно, чем на деформации образцов ПАС.

Более ясное количественное представление о влиянии высыхания на деформации (продольные и поперечные) туфобетона можно получить из данных табл. 4, где приведены касательные модули деформации и поперечные деформации при различных напряжениях. Из этих данных следует, что влияние высыхания на модуль деформации качественно имеет тот же характер, что и влияние высыхания на прочность туфобетона. С момента начала высыхания наблюдается закономерный спад модуля деформации во времени, причем этот спад в случае образцов ПЕС более существенен, чем в случае образцов ПАС. После 6 *мес.* высыхания спад модуля деформации образцов ПЕС независимо от величины напряжения, составил 44%, а образцов ПАС при напряжении 0 и 15 *МПа* — 18% и 9%. Интересно то, что в изолированных образцах модуль деформации образцов ПЕС существенно больше модуля деформации образцов ПАС, а через месячное высыхание и в дальнейшем уже имеет место обратное. При этом, с увеличеньем продолжительности высыхания разница модулей деформаций образцов ПЕС и ПАС увеличивается, что весьма закономерно.

Таким образом, высыхание и в связи с этим исчезновение водных прослоек привело к более чувствительному спаду модуля деформации, чем прочности туфобетона.



Фиг. 3. Влияние высыхания на деформации туфобетона

По данным табл. 4 в результате высыхания поперечные деформации туфобетона также увеличились, причем эти изменения в случае образцов ПЕС оказались весьма существенными, а образцов ПАС — незначительными. Так, например, при напряжении 10 *МПа* после 6 *мес.* высыхания поперечные деформации образцов ПЕС увеличились в 2.5 раза, а образцов ПАС всего — в 1.17 раза.

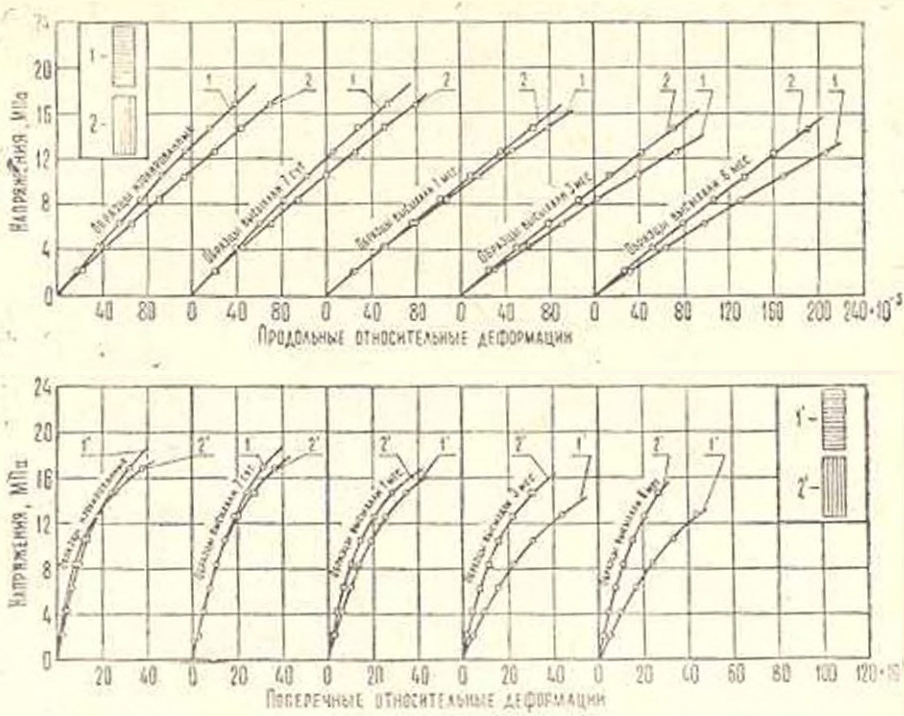
Рассмотрим теперь как влияет высыхание на степень анизотропии туфобетона по продольным и поперечным деформациям туфобетона (фиг. 4). На верхнем графике в изолированных образцах кривая продольных деформаций образцов ПЕС (кривая 1) проходит выше кривой продольных деформаций образцов ПАС (кривая 2). С увеличением продолжительности высыхания до месяца расходимость кривых 1 и 2 уменьшается, но уже кривая 2 проходит несколько выше кривой 1. После месяца дальнейшее высыхание уже приводит к постепенному увеличению расходимости кривых деформаций образцов ПЕС и ПАС, то есть к увеличению степени анизотропии по продольным деформациям.

Качественно аналогичным образом высыхание оказывает влияние и на степень анизотропии по поперечным деформациям туфобетона (нижний график фиг. 4). Разница заключается в том, что по поперечным деформациям туфобетон становится изотропным после более короткого времени высыхания. После этого дальнейшее высыхание приводит к чувствительному увеличению степени анизотропии по поперечным деформациям и всегда кривая деформаций образцов ПАС (кривая 2) проходит выше кривой деформаций образцов ПЕС (кривая 1).

Таблица 1

Влияние высыхания на модуль деформации, поперечные деформации туфобетона и степень их анизотропии

Продолжительность высыхания образцов	Направление сжимающей нагрузки по отношению к слоям бетона при испытании	Модуль деформации по касательной $\times 10^{-2}$ в *МПа* при напряжении (*МПа*)				Отношение модуля деформации высыхающих образцов к модулю деформации изолированных образцов при напряжении (*МПа*)				Отношение модуля деформации образцов ПАС к модулю деформации образцов ПЕС при напряжении (*МПа*)				Поперечные деформации $\varepsilon_{поп} \times 10^5$ при напряжении (*МПа*)			Отношение поперечных деформаций образцов ПЕС к поперечным деформациям образцов ПАС при напряжении (*МПа*)		
		0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10	15	5	10	15	5	10	15
0	перпен. парал.	122 97	112 91	103 86	94 80	1.00 1.00	1.00 1.00	1.00 1.00	1.00 1.00	0.80	0.81	0.83	0.85	5.0 4.6	12.4 12.3	24.7 28.0	1.07	1.01	0.88
7 *сут*	перпен. парал.	114 93	104 88	94 83	85 79	0.93 0.96	0.93 0.97	0.91 0.97	0.90 0.99	0.82	0.85	0.88	0.93	5.3 5.2	13.1 13.4	25.3 28.5	1.02	0.98	0.86
1 *мес*	перпен. парал.	84 86	78 82	71 79	65 75	0.69 0.89	0.70 0.90	0.69 0.92	0.69 0.94	1.02	1.05	1.11	1.15	7.0 5.2	17.9 13.8	36.7 30.8	1.35	1.30	1.19
3 *мес*	перпен. парал.	73 82	67 79	62 76	57 73	0.60 0.85	0.60 0.87	0.60 0.88	0.61 0.91	1.12	1.18	1.23	1.28	11.2 5.4	29.1 14.4	62.8 32.6	2.07	2.02	1.93
6 *мес*	перпен. парал.	68 80	63 78	58 75	53 73	0.56 0.82	0.56 0.86	0.56 0.87	0.56 0.91	1.18	1.24	1.30	1.38	12.2 5.8	30.6 14.4	61.5 28.5	2.10	2.12	2.16



Фиг. 4. Влияние высыхания на анизотропию деформаций туфобетона.

Наглядное представление о количественном изменении степени анизотропии туфобетона по модулю деформации и поперечным деформациям в зависимости от продолжительности высыхания и величины сжимающего напряжения можно получить из данных табл. 4. Как видим, в случае изолированных образцов коэффициент анизотропии туфобетона по модулю деформации $K_з$ при всех рассмотренных напряжениях меньше единицы и с увеличением напряжения от 0 до 15 *МПа* возрастает от 0.80 до 0.85. $K_з < 1$, так как в этом случае модуль деформации образцов ПАС меньше модуля деформации образцов ПЕС. В результате высыхания в течение первого неполного месяца $K_з$ в зависимости от величины напряжения в разное время возрастает до значения, равного единице, то есть туфобетон по модулю деформации становится изотропным. Последующее же высыхание до 6 *мес.* приводит к дальнейшему существенному росту $K_з$, причем тем больше, чем больше напряжение. при повышении напряжения от 0 до 15 *МПа* $K_з$ возрастает от 1.18 до 1.38. $K_з > 1$, так как в результате высыхания модуль деформации образцов ПАС становится больше модуля деформации образцов ПЕС.

Что касается коэффициента анизотропии туфобетона по поперечным деформациям K_4, то последний в случае изолированных образцов при напряжении 5 *МПа* составляет 1.07 и с увеличением напряжения до 15 *МПа* уменьшается до значения 0.88 (табл. 4). После высыхания в течение первых 7 *сут.* K_4 несколько уменьшается, а дальнейшее высыхание до 6 *мес.* приводит к его существенному увеличению, но уже этот коэффициент практически не зависит от величины напряжения — при повышении напряжения от 5 до 15 *МПа* K_r возрастает от 2.10 до 2.16.

Из сравнения конечных значений коэффициентов K_r и K_t следует, что в результате высыхания степень анизотропии туфобетона по поперечным деформациям увеличилась гораздо больше, чем по продольным деформациям.

Таким образом, в полном соответствии с результатами опытов над водонасыщенными образцами, где водонасыщение привело к существенному росту прочности и модуля деформации весьма старого сухого туфобетона, а также к тому, что этот бетон по прочности и модулю деформации стал изотропным, как и следовало ожидать, в опытах с высыхающими образцами получилось обратное явление. Как правило, независимо от того испытываются образцы ПЕС или ПАС, после удаления изоляции высыхание весьма старого изолированного от влагопотери туфобетона приводит к понижению прочности и к увеличению его как продольных, так и поперечных деформаций. При этом, количественное влияние высыхания на прочность и деформативность бетона существенно зависит от направления сжимающей нагрузки по отношению к слоям бетонирования — понижение прочности и увеличение деформаций образцов ПЕС гораздо больше, чем образцов ПАС. По этой причине за короткое время высыхания туфобетон сперва по прочности и деформациям становится изотропным, однако, с дальнейшим высыханием его анизотропные свойства вновь начинают проявляться и степень анизотропии существенно возрастает.

Спад прочности, увеличение деформаций и изменение степени анизотропии бетона являются следствием тех пустот (дефектов), которые остаются на местах водных прослоек после испарения воды. Заметим, что это отрицательное явление, которое происходит в результате испарения во времени, способствует также интенсификации деформации ползучести бетона в процессе его длительного сжатия. При этом, ползучесть бетона за счет этого до сих пор неизвестного механизма в большинстве случаев может оказаться весьма существенной.

§ 4. Практические рекомендации по уменьшению потери доли прочности бетона, вызванные испарением водных прослоек

Как уже отмечалось, наши опыты специально были поставлены над весьма старым изолированным бетоном (возраста 23 лет) с тем, чтобы можно было бы более обоснованно количественно оценить отрицательное влияние испарения водных прослоек на прочность и модуль деформации бетона и, как показали опыты, это влияние весьма существенно. Исходя из механизма данного явления, можно заключить, что при наличии испарения вызванное испарением водных прослоек снижение прочности и модуля деформации будет тем больше, чем моложе бетон.

Сам же этот процесс закончится тем быстрее, чем меньше будет влажность среды.

На основании наших опытов можно сделать также вывод, что при наличии испарения в любое время прочность бетона определяется наложением двух эффектов — положительного эффекта процесса твердения и отрицательного эффекта испарения водных прослоек.

По данным табл. 3 после высыхания в течение 6 *мес.* снижение прочности образцов ПЕС и ПАС соответственно составило 29% и 11%, а снижение модулей деформаций оказалось еще значительнее. Но если учесть, что из-за ненадежной изоляции больших цилиндров еще до момента выбуривания из них малых цилиндрических образцов имело место некоторое испарение, то фактические спады были еще больше. Наконец, эти спады оказались бы более значительными, если опыты проводились бы над молодым бетоном.

Таким образом, учитывая существенное отрицательное влияние испарения водных прослоек на прочность и модуль деформации бетона, необходимо в зависимости от характеристик материалов, применяемых для приготовления бетона, условий производства работ и условий работы бетонных и железобетонных конструкций принять все необходимые меры, чтобы уменьшить, а если возможно, полностью исключить отрицательное влияние этого явления.

Как уже указывалось, причиной неодинаковости свойств бетона в различных направлениях, то есть анизотропии, являются те водные прослойки, которые образуются под зернами крупного заполнителя при укладке и уплотнении бетона. Анализ же вышеописанных новых опытов над высыхающими образцами из весьма старого туфобетона показал, что именно с испарением этих водных прослоек связано снижение прочности и увеличение деформаций этого бетона, а также существенное увеличение степени его анизотропии.

К. С. Карапетян многочисленными опытами установил закономерности изменения степени анизотропии бетона по прочности, модуля деформации и деформациям ползучести при сжатии и растяжения в зависимости от различных факторов [5—15]. На основании этих опытов он пришел к выводу, что все те факторы, которые приводят к уменьшению количества и размеров водных прослоек, а следовательно, и пустот (дефектов), тем самым уменьшают степень анизотропии бетона. Учитывая это, а также результаты вышеописанных новых опытов, можно сделать ряд общих практических рекомендаций, которые позволяют существенно уменьшить и даже полностью исключить вызванное испарением водных прослоек снижение прочности и увеличение деформаций (продольных и поперечных) бетона.

На основании опытов [5—15] и вышеописанных опытов с водонасыщенными и высыхающими образцами из туфобетона можно заключить, что с точки зрения только положения элемента конструкций при бетонировании предпочтительным является горизонтальное положение, так как при этом отрицательное влияние испарения водных прослоек намного меньше. Как известно, для сборного строительства большинство элементов конструкций бетонируется именно в горизонтальном положении. Что касается монолитного строительства, где элементы конструкций бетонируются в рабочем положении, то для уменьшения потери прочности элементов, бетонируемых в вертикальном положении, необходимо принять другие меры.

Как известно, с увеличением размеров поперечного сечения бетонного элемента, влажности среды, продолжительности вибрации бетонной смеси и расхода цемента степень анизотропии бетона по прочности, модулю деформации и деформациям ползучести уменьшается [8—10, 12]. Объясняется это тем, что с увеличением размеров поперечного сечения бетонного элемента отрицательное влияние испарившихся из его наружных слоев водных прослоек на общую прочность и деформации элемента уменьшается. Вполне понятно, что влияние масштабного фактора тесно связано с влажностью среды и чем больше влажность, тем меньше отрицательное влияние испарения водных прослоек. Что касается продолжительности вибрации бетонной смеси и расхода цемента, то с их увеличением уменьшается количество и размеры водных прослоек, а следовательно, и пустот (дефектов), что также приводит к уменьшению потери прочности.

Таким образом, варьируя этими и другими факторами можно существенно уменьшить вызванное испарением водных прослоек снижение прочности и модуля деформации бетона.

Так как вызванное испарением водных прослоек снижение прочности и модуля деформации бетона зависит от масштабного фактора, авторы решили более подробно изучить этот вопрос. Если рассматривать приготовленные из одного и того же бетона два бетонных цилиндра различных диаметров, то в результате высыхания цилиндр малого диаметра может высохнуть полностью и поэтому его прочность окажется меньше, чем прочность большого цилиндра, так как сечение последнего высохнет частично. Высыхание наружных слоев большого цилиндра приведет к тому, что прочность бетона в этой части будет значительно меньше, чем в его невысохшей ядровой части. Все сказанное в полной мере относится и к модулю деформации. К такому заключению мы приходим из сравнения данных табл. 1 и 3, относящихся к прочностям сухих и изолированных образцов — отношение прочности изолированных образцов к прочности сухих образцов по данным испытаний образцов НЕС и НАС соответственно составляет 1,70 и 1,33. Как видим, разница прочностей сухих и изолированных образцов весьма существенна, однако, утверждать, что все это является следствием только испарения водных прослоек нет основания, так как частично это могло быть обусловлено преждевременной стабилизацией процесса твердения также из-за высыхания бетона.

Для экспериментальной проверки как изменяется прочность бетона с наружных слоев в глубь бетонного элемента нами были поставлены специальные опыты по описанной в § 1 методике. На этот раз бетонным элементом, из разных зон сечения которого выбуривались малые цилиндрические образцы (d = 5.5 *см*, h = 18 *см*), был цилиндр диаметром 50 *см*, изготовленный из того же туфобетона, состав которого был приведен в § 1. Большой цилиндр до трехлетнего возраста хранился в воздушно-влажных условиях, а затем до момента выбуривания из него в возрасте 23 лет малых цилиндрических образцов — под открытым небом. Для установления закономерности изменения прочности бетона по поперечному сечению большого цилиндра в радиальных направлениях с наружного слоя до его оси малые цилиндрические образцы выбуривались из 4-х позиций. При этом ось малого цилиндрического образца, выбуренного из позиции 4, совпадала с осью большого цилиндра. Отметим, что в этих опытах образцы испытывались перпендикулярно слоям бетонирования.

Ввиду большого объема данной статьи мы вынуждены привести только некоторые данные этих опытов. В этих опытах прочность малых цилиндрических образцов, выбуренных из позиций 1, 2, 3 и 4 большого цилиндра соответственно, составили 19.1, 24.1, 24.9 и 25.8 *МПа*, а модуль деформации при напряжении 10 *МПа* — 81; 108; 109 и 110 в *МПа* $\times 10^2$. Как видим, прочность и модуль деформации образцов, выбуренных из позиции 1, в результате высыхания существенно меньше, чем тех образцов, которые были выбурены из позиций 2, 3 и 4. Отметим, что глубина высохшего наружного слоя большого цилиндра составляла 9 *см*. При более низкой влажности среды эта глубина была бы еще больше, а прочность, вероятно, еще меньше. По приведенным данным отношение усредненной прочности ядровой части большого цилиндра (средняя прочность позиции 2, 3 и 4) к прочности его наружного высохшего слоя (прочность по позиции 1) составляет 1.3. Соответствующее отношение модулей деформаций также получалось равным 1.3.

Установленный нами тот факт, что прочность наружных слоев большого цилиндра существенно меньше, чем прочность его ядровой части, указывает на необходимость учета этого фактора при проектировании бетонных и железобетонных конструкций. Для этого необходимо в СН и П предусмотреть специальный коэффициент условий работы. При этом, этот коэффициент должен быть установлен в зависимости от размеров сечения элементов конструкций, влажности среды и положения элементов конструкций при бетонировании.

В этих опытах часть образцов, которые были выбурены из позиции 2 ядровой части большого цилиндра (прочность в момент выбуривания составляла 24.1 *МПа*, а модуль деформации при напряжения 10 *МПа* — 108 в *МПа* $\times 10^2$) были испытаны через 4, 8 и 12 *мес* высыхания в обычных лабораторных условиях и их прочности соответственно составили 23.4, 21.9 и 19.8 *МПа*, а модули деформаций при напряжении 10 *МПа* — 72, 69 и 66 в *МПа* $\times 10^2$. Таким образом, эти опыты еще раз показали, что высыхание приводит к снижению прочности и модуля деформации, которое связано с испарением водных прослоек.

По этим данным прочность снизилась на 18%, а модуль деформации — на 39%.

Установленный нами тот факт, что прочность бетона в наружных слоях большого бетонного элемента существенно меньше, чем в его ядровой части, заставляет обратить внимание еще на один важный вопрос. Как известно, существуют стандартные неразрушающие методы определения прочности бетона на сжатие в конструкциях приборами механического действия путем определения косвенных характеристик прочности бетона — величины отскока, размера отпечатка, усилия скалывания ребра конструкции, условного напряжения при отрыве. При этом все эти характеристики определяются на поверхности элемента конструкций. Учитывая результаты наших опытов, приходим к выводу, что полученную такими методами прочность бетона можно отнести ко всему сечению элемента конструкции, если это сечение небольшое. При большом сечении элемента этого делать нельзя, так как прочность его наружных слоев существенно меньше, чем прочность ядровой части. Для учета повышенной прочности ядровой части, площадь которой может оказаться существенной частью общей площади сечения элемента конструкции, необходимо ввести специальный поправочный коэффициент.

Остановимся еще на одной возможности уменьшения потери доли прочности бетона, вызванной испарением водных прослоек. Как известно, уменьшение крупности заполнителя приводит к снижению прочности и к увеличению как кратковременных, так и длительных деформаций бетона. Но вместе с этим, с уменьшением крупности заполнителя степень анизотропии по прочности и деформациям уменьшается, а объясняется это тем, что чем меньше крупность заполнителя, тем меньше размеры пустот (дефектов), которые остаются под зернами заполнителя после испарения водных прослоек [14]. Учитывая это, применением мелкого заполнителя можно существенно уменьшить отрицательное влияние пустот (дефектов) на прочность бетона. Правда, применение мелкого заполнителя требует перерасхода цемента, однако, во многих случаях применение даже мелкозернистых бетонов может оказаться экономически более выгодным.

В заключение данной работы отметим, что наши опыты свидетельствуют о том, что при наличии испарения любые бетонные элементы являются неоднородно наследственно-стареющими телами, свойства которых изменяются во времени в зависимости от координат. Теория ползучести для неоднородно наследственно стареющих сред разработана Н. Х. Арутюняном [1—4].

Основные выводы

1. Водонасыщение оказывает существенное влияние на прочность, деформации (продольные и поперечные) и степень анизотропии весьма старого туфобетона при сжатии. Сначала водное хранение приводит к

некоторому адсорбционному спаду прочности и увеличению деформации, а в дальнейшем — к обратному явлению. При этом, эти изменения в большой степени зависят от продолжительности водного хранения и направления сжимающей нагрузки по отношению к слоям бетонирования.

Прочность сухих образцов, испытанных перпендикулярно слоям, заметно меньше, а деформации больше, чем образцов, испытанных параллельно слоям. Однако, эта разница прочностей и деформаций образцов, испытанных перпендикулярно и параллельно слоям, в результате водного хранения стирается и туфобетон по прочности и деформациям становится изотропным. Объясняется это тем, что положительный эффект, вызванный заполнением образовавшихся под зернами заполнителя пустот (дефектов) водой в случае образцов, испытанных перпендикулярно слоям, более чувствителен, чем в случае образцов, испытанных параллельно слоям.

2. После удаления изоляции высыхание оказывает существенное влияние на прочность, деформации (продольные и поперечные) и степень анизотропии весьма старого туфобетона при сжатии. Высыхание приводит к чувствительному спаду прочности и увеличению деформаций бетона.

Отрицательное влияние высыхания существенно зависит от направления сжимающей нагрузки по отношению к слоям бетонирования — для образцов, испытываемых перпендикулярно слоям это отрицательное влияние гораздо больше, чем для образцов, испытываемых параллельно слоям. По этой причине, а также из-за того, что до удаления изоляции прочность образцов, испытанных перпендикулярно слоям больше, а деформации меньше, чем образцов, испытанных параллельно слоям, по мере испарения туфобетон сначала становится изотропным, а в дальнейшем — существенно анизотропным. Степень анизотропии по модулю деформаций гораздо больше, чем по прочности.

Спад прочности и модуля деформации, а также изменение степени анизотропии бетона является следствием тех пустот (дефектов), которые остаются на местах водных прослоек после их испарения. Испарение водных прослоек способствует также увеличению деформаций усадки и ползучести.

3. С момента изготовления бетонного элемента на положительный процесс его упрочнения во времени накладывается отрицательное влияние тех пустот (дефектов), которые остаются на местах образовавшихся под зернами крупного заполнителя водных прослоек после испарения последних. Снижение прочности и увеличение деформативности за счет этого отрицательного явления зависят от различных факторов и во многих случаях могут оказаться весьма значительными. Учитывая это, необходимо в зависимости от характеристик материалов, применяемых для приготовления бетона, условий производства работ и условий работы бетонных и железобетонных конструкций принять все необходи-

мые меры, чтобы уменьшить, а если возможно, полностью исключить отрицательное влияние этого явления.

Все те факторы, которые уменьшают количество и размеры водных прослоек, а следовательно, и пустот (дефектов), тем самым уменьшают потери доли прочности и деформации бетона.

4. Отрицательное влияние испарения водных прослоек на прочность и деформативность бетона в большой степени зависит от масштабного фактора. При бетонном элементе малого сечения это влияние более существенно, чем при бетонном элементе большого сечения, так как в первом случае высыхание охватывает все сечение, в то время как во втором случае — только часть сечения. Для учета этого отрицательного явления необходимо в СНиП предусмотреть специальный коэффициент условий работы, который, хотя бы на первых порах, должен быть установлен в зависимости от влажности среды, размеров поперечного сечения элемента конструкции и его положения при бетонировании.

5. Поскольку в результате испарения водных прослоек прочность наружных слоев бетонного элемента может оказаться существенно меньше, а деформации больше, чем его ядровой части, существующие неразрушающие методы оценки прочности бетона путем определения косвенных показателей на поверхности для элементов конструкций большого сечения неприемлемы. Этими методами невозможно также оценить прочность бетона в конструкциях в зависимости от направления сжимающей нагрузки по отношению к слоям бетонирования. Для учета повышенной прочности ядровой части бетонного элемента, а также его положения при бетонировании необходимо установить специальные поправочные коэффициенты.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 16 XII 1980

Կ. Ս. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ, Կ. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

ՋՐԱՀԱԳԵՑՄԱՆ ԵՎ ՉՈՐԱՑՄԱՆ ՀԵՏԵՎԱՆՔՈՎ ՇԱՏ ՄԵԾ ՏՈՒՖՈԲԵՏՈՆԻ ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ, ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ԵՎ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊԻԱՅԻ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՍԵՂՄՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում բերված են շատ մեծ տուֆոբետոնի ամրության, դեֆորմացիաների և անիզոտրոպիայի աստիճանի վրա ջրահագեցման և չորացման ազդեցությունների փորձարարական ուսումնասիրության արդյունքները սեղմման դեպքում։

Փորձերը ցույց են տալիս, որ չոր բետոնի ջրահագեցումը բերում է նրա ամրության զգալի աճին և դեֆորմացիաների նվազմանը և բետոնը դառնում է իզոտրոպ։

Չորացման ժամանակ տեղի ունի հակառակ երևույթը—նվազում է բետոնի ամրությունը և աճում են անիզոտրոպիայի աստիճանը և բեռնավորված նմուշի դեֆորմացիաները։

INVESTIGATION OF CHANGE IN STRENGTH, MODULUS OF DEFORMATION AND DEGREE OF ANISOTROPY OF EXTREMELY OLD TUFOCONCRETE UNDER COMPRESSION OWING TO INUNDATION AND DRYING

K. S. KARAPETIAN, K. A. KARAPETIAN

Summary

The paper deals with the results of the experimental investigation of the influence of inundation and drying on strength, deformations (longitudinal and lateral) and degree of anisotropy of extremely old concrete under compression.

The experiments show that inundation of dry concrete results in a considerable increase in its strength, modulus of deformation, and the concrete by its strength and modulus of deformation becomes isotropic. During concrete drying the reverse phenomenon takes place—reduction in strength, modulus of deformation and increase in the degree of anisotropy.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* О теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред. Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 3.
2. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел. Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 3.
3. *Арутюнян Н. Х.* Об уравнениях состояния в нелинейной теории ползучести. Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 3.
4. *Арутюнян Н. Х.* Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела. ПММ, 1977, т. 41, вып. 5.
5. *Карапетян К. С.* Об одном существенном факторе в прочностных и деформативных свойствах бетона. Докл. АН Арм. ССР, 1957, т. 24, № 4.
6. *Карапетян К. С.* Влияние анизотропии на ползучесть бетона. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, 1957, т. 10, № 6.
7. *Карапетян К. С.* Влияние анизотропии на ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от величины напряжения. Докл. АН Арм. ССР, 1964, т. 39, № 1.
8. *Карапетян К. С.* Влияние анизотропии на ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от масштабного фактора. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, 1964, т. 17, № 1.
9. *Карапетян К. С.* Влияние анизотропии на ползучесть бетона в зависимости от влажности среды. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, 1965, т. 18, № 2.
10. *Карапетян К. С.* Влияние анизотропии на ползучесть бетона в зависимости от продолжительности вибрации бетонной смеси. Докл. АН Арм. ССР, 1965, т. 40, № 4.

11. *Карапетян К. С.* Влияние анизотропии на ползучесть бетона в зависимости от высоты опытного образца. Докл. АН Арм. ССР, 1965, т. 40, № 5
12. *Карапетян К. С.* Влияние анизотропии на прочность и ползучесть бетона в зависимости от расхода цемента. Изв. АН Арм ССР, сер. физ. мат. наук, 1965, т. 18, № 5.
13. *Карапетян К. С.* Влияние анизотропии на ползучесть бетона в зависимости от возраста бетона к моменту загружения. Докл. АН Арм. ССР, 1965, т. 41, № 5.
14. *Карапетян К. С.* Влияние анизотропии на ползучесть бетона в зависимости от размеров заполнителя. Докл. АН Арм. ССР, 1966, т. 42, № 2.
15. *Карапетян К. С.* О вторичном твердении и изменении анизотропных свойств бетона при его водонасыщении. Докл. АН Арм. ССР, 1973, т. 57, № 3.
16. *Карапетян К. С., Котикян Р. А., Карапетян К. А.* Исследование анизотропии прочности и модуля деформации весьма старого бетона. Третий Национальный конгресс по теоретической и прикладной механике. Доклады, книга 1, Варна, 1977.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIV, № 4, 1981 Механика

Л. Г. ПЕТРОСЯН

КАЧЕНИЕ ТЯЖЕЛОГО ЦИЛИНДРА ПО ПЛОСКОСТИ, ПОКРЫТОЙ СЛОЕМ ВЯЗКОГО СТРУКТУРНОГО ВЕЩЕСТВА

Механизму влияния твердой поверхности на контактирующую с ней жидкость были посвящены работы многих исследователей. По-видимому, молекулы жидкости, тесно контактирующие с твердым телом, сцепляясь с поверхностью или адсорбируясь на ней, создают поверхностные слои, образующие поверхность раздела соприкасающихся тел. Эти поверхностные слои обладают особыми свойствами, часто резко отличными от свойств того же вещества в объеме фазы. По мнению Кингсбери [1] в области притяжения молекул металла происходит интенсификация вязкости части жидкости. Харди и Ноттейдж [2] и Хенникер [3] также утверждают, что вблизи твердой стенки необычно высока вязкость по сравнению с вязкостью в свободном объеме жидкости.

Для выяснения влияния граничных поверхностей на вязкость тонких пленок смазки между двумя оптически плоскими параллельными круглыми дисками, сближающимися друг с другом, Нидс [4] провел серию экспериментов. Измерения, выполненные им, показали, что с уменьшением толщины слоя увеличивается расхождение между измеренными и расчетными интервалами времени сближения дисков. Фактическое время сближения дисков было больше расчетного, что указывает на некоторое увеличение эффективной вязкости смазки в тонких пленках. Нельзя дать иного объяснения этому эффекту, кроме как предположить, что близость металлической поверхности влияет на вязкость жидкости, заставляя пленку становиться более твердой [5].

Теоретические расчеты вышеуказанных экспериментов были основаны на классической теории континуума. Однако классическая точка зрения налагает сильные ограничения на пределы, в которых континуальное описание макроскопического поведения может успешно отражать тонкую структуру материала. Накопившиеся факты последних лет свидетельствуют о том, что классическая теория континуума Навье-Стокса не может предсказать поведения некоторого класса жидкостей и особенно течений через тонкие капилляры и узкие зазоры, так как не содержит механизма для объяснения наблюдаемых новых физических явлений. Это обстоятельство совместно с другими недостатками классической теории континуума привело исследователей к разработке теории несимметричных-структурных жидкостей (моментная теория). В этой теории введены два независимых кинематических векторных поля, одно из которых представляет поступательные движения частиц жидкости, а другое — вращательные движения частиц [6—9 и др.].

Ниже рассматривается задача качения тяжелого цилиндра по плоскости, покрытой слоем вязкого структурного вещества (несимметричная жидкость).

1. *Приближенные уравнения плоско-параллельного течения для смазочного слоя.* Основные законы механики сплошной среды в дифференциальной форме имеют вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho v_{i,i} = 0, \quad \rho \frac{dv_i}{dt} = \tau_{ji,j} + \rho f_i, \quad \rho I \frac{d\omega_i}{dt} = \epsilon_{ijk}\tau_{jk} + \mu_{ji,j} + \rho c_i$$

$$\rho \frac{du}{dt} = (v_{i,j} - \epsilon_{kji}\omega_k)\tau_{ji} + \omega_{i,j}\mu_{ji} - q_{i,i} \tag{1.1}$$

Здесь ρ — массовая плотность жидкости, v_i — скорость точки, ω_i — средняя угловая скорость вращения частиц, I — скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы, f_i — плотность распределения массовых сил, c_i — внешний массовый момент, ϵ_{ijk} — тензор Леви-Чивиты, u — удельная внутренняя энергия, q_i — вектор теплового потока, τ_{ji} — тензор силовых напряжений, μ_{ji} — тензор моментных напряжений.

Для определяющих уравнений имеем

$$\tau_{(ji)} = (-p + \lambda v_{k,k})\delta_{ji} + \mu(v_{j,i} + v_{i,j}) \tag{1.2}$$

$$\tau_{[ji]} = \mu_r(v_{i,j} - v_{j,i}) - 2\mu_r\epsilon_{mij}\omega_m \tag{1.3}$$

$$\mu_{(ji)} = c_0'\omega_{k,k}\delta_{ji} + c_d'(\omega_{j,i} + \omega_{i,j}) \tag{1.4}$$

$$\mu_{[ji]} = c_a'(\omega_{i,j} - \omega_{j,i}) \tag{1.5}$$

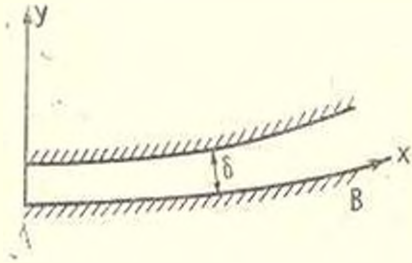
где индексами в круглых скобках обозначены симметричные части тензоров силовых и моментных напряжений, а индексами в квадратных скобках — антисимметричные части соответствующих тензоров, λ, μ, μ_r, c_0', c_d', c_a' — положительные скаляры, характеризующие изотропные свойства среды, p — давление в жидкости.

Подставляя (1.2) — (1.5) в уравнения (1.1) и считая коэффициенты вязкости постоянными по всей жидкости (однородная жидкость), получим уравнения движения структурных жидкостей.

Рассмотрим установившееся плоско-параллельное течение вязкой структурной жидкости между приблизительно параллельными поверхностями, радиусы кривизны которых достаточно велики по сравнению со средней толщиной слоя δ (фиг. 1).

Для изучения движения жидкости выберем ортогональные криволинейные координаты x и y, причем координату x будем отсчитывать вдоль одной из направляющих AB, а координату y по направлению нормали к ней. При этом предполагается, что расстояние δ между поверхностями мало по сравнению с величиной $\frac{\nu + \nu_r}{U}$, где U — характерная скорость течения, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ и $\nu_r = \frac{\mu_r}{\rho}$ — соответственно кинематическая ньютоновская вязкость и кинематическая вращательная вязкость.

Ограничимся анализом двумерного (плоского) установившегося течения несжимаемой жидкости. Массовые силы и моменты будем считать пренебрежимо малыми. Тогда вектор скорости, вектор угловых скоростей и давление будут определяться зависимостями вида



Фиг. 1.

$$\begin{gathered} v = v\,[u\,(x,\ y),\ v\,(x,\ y),\ 0] \\ \omega = \omega\,[0,\ 0,\ \omega\,(x,\ y)] \\ p = p\,(x,\ y) \end{gathered} \tag{1.6}$$

а уравнения движения сведутся к следующему виду:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\begin{gathered} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + (\nu + \nu_r)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + 2\nu_r\frac{\partial \omega}{\partial y} \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + (\nu + \nu_r)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - 2\nu_r\frac{\partial \omega}{\partial x} \\ u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{2\nu_r}{I}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{4\nu_r}{I}\omega + \gamma\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) \end{gathered} \tag{1.7}$$

где $\gamma = \frac{c_a + c_d}{I}$, а $c_a = \frac{c'_a}{\rho}$ и $c_d = \frac{c'_d}{\rho}$ — коэффициенты моментной вязкости.

Ввиду малости δ кривизной координатных линий будем пренебрегать и примем, что для течения в рассматриваемом вязком слое остаются справедливыми уравнения (1.7). Ввиду малости δ будем считать, что составляющая скорости v много меньше u ($v \ll u$) и что, кроме того, вследствие прилипания жидкости к стенкам, изменения u и ω в направлении оси x происходят гораздо медленнее, чем в направлении y, то есть, что $\frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial \omega}{\partial x} \ll \frac{\partial \omega}{\partial y}$.

Тогда, отбрасывая в (1.7) члены v, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial \omega}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$, как малые по сравнению с другими, получим следующие приближенные уравнения установившегося плоско-параллельного течения для вязкого смазочного слоя:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = (\nu + \nu_r)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\nu_r \frac{\partial \omega}{\partial y} \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{1.9}$$

$$(c_a + c_d)\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - 2\nu_r\left(2\omega + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1.11}$$

Уравнения смазочного слоя (1.8)—(1.11) содержат члены, характеризующие несимметричность диады силовых и моментных напряжений.

Аналогичные уравнения для частных задач были получены также в работах [5] и [10], но в работе [10] в уравнении (1.10) опущен член $4\nu_r\omega$. Однако, как показывает анализ порядка величин, этот член имеет такой же порядок, как и два других члена в уравнении (1.10). Исключение этого члена существенно влияет на характеристики движения в смазочном слое [5]. Оценки порядка величин, выполненные в [5], по нашему мнению, не вполне убедительны.*.

---

* Автор [5], вводя безразмерные параметры

$$\bar x = \frac{x}{a}, \quad \bar y = \frac{y}{h}, \quad \bar u = \frac{u}{U}, \quad \bar v = \frac{v}{U}, \quad \bar\omega = \frac{\omega h}{U}, \quad \bar p = \frac{p}{\rho U^2}$$

($2a$ — длина пластины, h — толщина пленки) и пренебрегая v, уравнения поступательных движений записал в безразмерной форме

$$\bar u \frac{\partial \bar u}{\partial \bar x} = -\frac{\partial \bar p}{\partial \bar x} + R_h^{-1}\left(\frac{h^2}{a^2}\frac{\partial^2 \bar u}{\partial \bar x^2} + \frac{\partial^2 \bar u}{\partial \bar y^2}\right) + 2N^2 R_h^{-1}\frac{\partial \bar\omega}{\partial \bar y}$$

$$O = -\frac{\partial \bar p}{\partial \bar y} - 2N^2 R_h^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{\partial \bar\omega}{\partial \bar x}$$

где

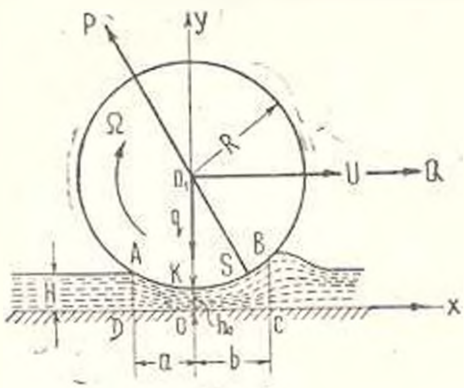
$$R_h = \frac{\rho U a}{\mu + \mu_r}\left(\frac{h}{a}\right)^2 \ll 1, \quad \left(\frac{h}{a}\right) \ll 1, \quad N = \left(\frac{\mu_r}{\mu + \mu_r}\right)^{1/2}$$

Поскольку $R_h \ll 1$ и $\left|\frac{h}{a}\right| \ll 1$, то неубедительно получение из приведенных уравнений соотношений (1.8) и (1.9).

2. *Качение цилиндра по плоскости, покрытой слоем вязкого вещества.* Рассмотрим круглый цилиндр (каток) длины l_0, радиуса R и веса q, катящийся без скольжения с угловой скоростью Ω по горизонтальной плоскости, покрытой слоем вязкого вещества толщины H (фиг. 2). Найдем величину необходимой для качения цилиндра силы тяги Q.

Для решения задачи применим к части вязкого слоя ABCD, находящейся в рассматриваемый момент непосредственно под цилиндром, приближенные уравнения (1.8) – (1.11).

Выбирая оси координат так, как показано на чертеже, и обозначая переменную толщину слоя под цилиндром на расстоянии x от начала координат через h, будем иметь



Фиг. 2.

$$h = h_0 + R - \sqrt{R^2 - x^2} \tag{2.1}$$

где h_0 — толщина вязкого слоя при $x = 0$.

Обозначая абсциссы крайних точек A и B через $-a$ и b и полагая, что мгновенная ось вращения цилиндра проходит через точку $K(0,\ h_0)$, примем для рассматриваемой задачи следующие граничные условия [9, 11]:

$$\begin{array}{llll} \text{при} \quad y = 0 & u = 0, & v = 0, & \omega = 0 \\ \text{при} \quad y = h & u = \Omega(h - h_0), & v = -\Omega x, & \omega = 0 \end{array} \tag{2.2}$$

$$\begin{array}{ll} \text{при} \quad x = -a \ \text{ и } \ x = b & p = 0 \\ \text{при} \quad x = -a & \dfrac{dp}{dx} = 0 \end{array} \tag{2.3}$$

Условия (2.2) выражают предположение о прилипании жидкости к твердой границе. Первое из условий (2.3) означает, что давление вне объема поджатой части вязкого слоя полагается постоянным. Последнее условие принято во избежание отрицательных давлений в слое ABDC вблизи границы AD [11].

Решая уравнения (1.8) и (1.10) и используя граничные условия (2.2) для скорости u и угловой скорости ω, соответственно, получим

$$u = \frac{1}{2\rho\nu}\frac{\partial p}{\partial x}(y^2 - hy) + 2y\left(1 - \frac{h_0}{h}\right)\frac{kh\,\mathrm{sh}\,kh}{kh\,\mathrm{sh}\,kh + 2N^2(1 - \mathrm{ch}\,kh)} +$$

$$+N^2h\left[(e^{ky} - 1)\frac{(e^{-kh} - 1)\left[\frac{1}{2}\Omega\left(1 - \frac{h_0}{h}\right) - \frac{h}{4\rho\nu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(1 + \frac{2N^2}{kh}\right)\right] - \frac{h}{2\rho\nu}\frac{\partial p}{\partial x}}{kh\,\mathrm{sh}\,kh + 2N^2(1 - \mathrm{ch}\,kh)} + \right.$$

$$+\left(e^{-ky}-1\right)\frac{\left(e^{kh}-1\right)\left[\frac{1}{2}\Omega\left(1-\frac{h_0}{h}\right)-\frac{h}{4\rho\nu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(1-\frac{2N^2}{kh}\right)\right]-\frac{h}{2\rho\nu}\frac{\partial p}{\partial x}}{kh\,\mathrm{sh}\,kh+2N^2\left(1-\mathrm{ch}\,kh\right)}\Bigg] \tag{2.4}$$

$$\omega=\left[\frac{1}{2}\Omega\left(1-\frac{h_0}{h}\right)\frac{kh\,\mathrm{sh}\,kh}{kh\,\mathrm{sh}\,kh+2N^2\left(1-\mathrm{ch}\,kh\right)}-\frac{h}{4\rho\nu}\frac{\partial p}{\partial x}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{e^{-ky}\left(e^{kh}-1\right)-e^{ky}\left(e^{-kh}-1\right)}{2\,\mathrm{sh}\,kh}-1\right]+\frac{1}{2\rho\nu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{sh}\,ky}{\mathrm{sh}\,kh}h-y\right) \tag{2.5}$$

Здесь $\quad N=\left(\frac{\nu_r}{\nu+\nu_r}\right)^{1/2}, \qquad l=\left(\frac{c_a+c_d}{4\nu}\right)^{1/2}, \qquad k=\frac{N}{l}$

Для определения давления p обратимся к уравнению неразрывности (1.11). Беря от обоих частей этого уравнения интегралы по y в пределах от 0 до h и принимая во внимание условия (2.2), получим

$$\Omega x=\int_0^h\frac{\partial u}{\partial x}dy=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u\,dy-\frac{\partial h}{\partial x}(u)_h=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u\,dy-\Omega\left(h-h_0\right)\frac{dh}{dx}$$

Откуда, интегрируя по x, находим

$$2\int_0^h u\,dy=\Omega\left(x^2+h^2-2h_0h+C\right) \tag{2.6}$$

Подставляя в левую часть полученного равенства значение u из (2.4) и вычисляя интеграл, будем иметь

$$\frac{h^3}{6\rho\nu}\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\Omega\left(x^2-2h_0h+C\right)}{1+\frac{12l^2}{h^2}-\frac{6Nl}{h}\,\frac{kh\left(1+\mathrm{ch}\,kh\right)-2N^2\,\mathrm{sh}\,kh}{kh\,\mathrm{sh}\,kh+2N^2\left(1-\mathrm{ch}\,kh\right)}} \tag{2.7}$$

Заменяя здесь h его значением из (2.1) и определяя C по последнему из условий (2.3), найдем окончательно

$$\frac{\partial p}{\partial x}=6\rho\nu\Omega\left[1-\frac{h_0}{\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{R^2-x^2}}\right]\frac{a^2-x^2}{h^3f_h\left(N,l,h\right)} \tag{2.8}$$

где

$$f_h\left(N,l,h\right)=1+\frac{12l^2}{h^2}-\frac{6Nl}{h}\,\frac{kh\left(1+\mathrm{ch}\,kh\right)-2N^2\,\mathrm{sh}\,kh}{kh\,\mathrm{sh}\,kh+2N^2\left(1-\mathrm{ch}\,kh\right)} \tag{2.9}$$

Выражения (2.1) и (2.5) вместе с (2.8) дают соответственно законы распределения скоростей и угловых скоростей в слое.

Закон распределения давлений находим из (2.8), принимая во внимание условие (2.3)

$$p(x) = 6\rho\nu\Omega \int_{-a}^{x} \left[1 - \frac{h_0}{\sqrt{R^2 - a^2} + \sqrt{R^2 - x^2}} \right] \frac{a^2 - x^2}{h^3 f_h(N, l, h)}\, dx \tag{2.10}$$

Равнодействующая P сил давлений со стороны слоя на цилиндр будет, очевидно, проходить через центр O_1 цилиндра, а ее проекции на оси координат будут равны

$$P_x = -l_0 \int_{-a}^{a} \frac{p(x)\, x dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \qquad P_y = l_0 \int_{-a}^{a} p(x)\, dx \tag{2.11}$$

При этом абсцисса точки s приложения равнодействующей будет

$$x_s = \frac{P_x R}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2}} \tag{2.12}$$

Переходя к определению сил трения, отметим, что порядок их в рассматриваемой задаче ниже, чем порядок сил давления, так как вязкий слой между поверхностями тонок, в чем мы убедимся на числовых примерах. Поэтому составляющими сил трения можно пренебрегать по сравнению с соответствующими силами давления. В рассматриваемой задаче этот вывод, очевидный для составляющей вдоль оси Oy, нуждается в проверке по отношению к составляющей вдоль оси Ox.

Для оценки величины силы трения ограничимся рассмотрением достаточно тонкого слоя, у которого среднее значение толщины слоя h мало по сравнению с a. Это условие, как видно из (2.1), будет выполнено, если в свою очередь a будет мало по сравнению с R, причем порядок малости величин h/a и a/R будет одинаков, а величина h/R будет иметь порядок a^2/R^2.

Касательная составляющая вектора напряжения на элементе поверхности цилиндра, внутренняя нормаль к которому образует с осью oy угол φ, определяется по формуле

$$\tau_{nt} = \frac{1}{2}(\tau_{xx} - \tau_{yy}) \sin 2\varphi - \tau_{yx} \cos^2\varphi + \tau_{xy} \sin^2\varphi \tag{2.13}$$

В рассматриваемом нами случае имеем

$$\sin\varphi = \frac{x}{R}, \qquad \cos 2\varphi = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R}, \qquad \sin 2\varphi \approx \frac{2x}{R}$$

а для напряжений

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -p + 2\rho\nu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{yx} &= \rho\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \rho\nu_r \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2\rho\nu_r \omega \\ \tau_{yy} &= -p + 2\rho\nu \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\tau_{xy} = \rho\nu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \rho\nu_r\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) - 2\rho\nu_r\omega \tag{2.14}$$

Следовательно, напряжение силы вязкости на поверхности цилиндра будет представляться в виде

$$(\tau_{n\tau})_h = \rho\nu\left[4\frac{\partial u}{\partial x}\frac{x}{R} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(1 - \frac{2x^2}{R^2}\right) - \frac{\nu_r}{\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]_h$$

или приближенно

$$(\tau_{n\tau})_h = -\rho(\nu + \nu_r)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_h + \rho\nu\frac{2x^2}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_h \tag{2.15}$$

так как остальные члены будут пренебрежимо малы. Вычисляя $(\tau_{n\tau})_h$ с помощью (2.1) и (2.8) $\left(\text{причем в (2.8) второе из слагаемых, стоящих в квадратной скобке, заменяется на } \frac{h_0}{2R}\right)$, найдем для проекций на ось ox результирующей силы от касательных напряжений следующее приближенное выражение:

$$F_x = l_0\int_{-a}^{b}(\tau_{n\tau})_h\,dx \approx -3\rho\nu\Omega l_0(1 - N^2)\int_{-a}^{b}\left[\frac{a^2 - x^2}{h^2 f_h(N, l, h)}\left(1 - \frac{h_0}{2R}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{h_0}{h}\right)\frac{kh\,\mathrm{sh}\,kh}{kh\,\mathrm{sh}\,kh + 2N^2(1 - \mathrm{ch}\,kh)}\right]\left(\frac{1}{1 - N^2} - \frac{2x^2}{R^2}\right)dx \tag{2.16}$$

Для момента сил трения относительно оси O_1 цилиндра найдем приближенно:

$$M = -RF_x \tag{2.17}$$

Заметим, что порядок составляющей F_x по сравнению с P_x может быть оценен только после соответствующих конкретных расчетов.

Найденные выше формулы (2.11), (2.12), (2.16) и (2.17) содержат три заранее неизвестных параметра: a, b и h_0. Для их определения воспользуемся [11]:

а) вторым условием (2.3) для давления,

б) условием равновесия веса цилиндра с результирующей силой от давления слоя и

в) предположением, что вблизи точки A, где слой наименее деформирован, можно приближенно считать толщину слоя AD равной заданной толщине недеформированного слоя H. Эти условия могут быть представлены в виде*

$$p(b) = 0, \qquad P_y = q,$$
$$H = h_0 + R - \sqrt{R^2 - a^2} \tag{2.18}$$

* При составлении второго условия проекцией силы трения на ось oy пренебрегается

Составляя уравнение равновесия приложенных к цилиндру сил в проекции на ось ox, для силы тяги находим

$$Q \geqslant -(P_x + F_x) \tag{2.19}$$

В каждом конкретном случае все интегралы, входящие в полученные формулы, можно определить путем численного интегрирования.

Для оценки полученных результатов произведем приближенный подсчет, полагая отношение $\frac{x}{R}$ настолько малым, что в выражениях, входящих под знак интегралов можно положить $\sqrt{R^2 - x^2} = R$ и, следовательно, $h = h_0 = H$.

Тогда из (2.10) найдем

$$p(x) = \frac{6\rho\nu\Omega}{H^3 f_{\text{н}}(N, l, H)} \int\limits_{-a}^{x} (a^2 - x^2)\,dx =$$

$$= \frac{2\rho\nu\Omega}{H^3 f_{\text{н}}(N, l, H)} (2a^3 + 3a^2x - x^3) \tag{2.20}$$

где

$$f_{\text{н}}(N, l, H) = 1 + \frac{12l^2}{H^2} - \frac{6Nl}{H} \, \frac{kH(1 + \operatorname{ch} kH) - 2N^2 \operatorname{sh} kH}{kH \operatorname{sh} kH + 2N^2(1 - \operatorname{ch} kH)}$$

Первое из условий (2.18) приводит к уравнению

$$b^3 - 3a^2b - 2a^3 = 0$$

единственным положительным корнем которого будет $b = 2a$.

Подставляя найденные значения p и b в (2.11), получим

$$P_x = -10.8 \frac{\rho\nu\Omega l_0 a^5}{RH^3 f_{\text{н}}(N, l, H)}, \qquad P_y = 13.5 \frac{\rho\nu\Omega l_0 a^4}{H^3 f_{\text{н}}(N, l, H)} \tag{2.21}$$

Для силы трения при $b = 2a$ найдем из (2.16) значение

$$F_x = -10.8\rho\nu\Omega l_0 a^5 \frac{1 - N^2}{R^2 H^2 f_{\text{н}}(N, l, H)} \left(2 - \frac{H}{R}\right) \tag{2.22}$$

Если во всех полученных выражениях выделить общий множитель $\rho\nu\Omega R l_0$ и заметить, что величины H/a и a/R имеют одинаковый порядок малости, то легко видеть, что P_y, P_x и F_x имеют соответственно порядок a^2/H^2, a/H и a/R. Таким образом, в данном случае в (2.19) величина F_x может быть отброшена как очень малая по сравнению с P_x. Практически ее влияние скажется лишь в том, что она создает момент (2.17) порядка a/R, тормозящий качение.

Используя вторые из равенств (2.18) и (2.21), найдем для определения неизвестной a выражение

$$q = 13.5 \frac{\rho\nu\Omega l_0 a^4}{H^3 f_{\text{н}}(N, l, H)} \tag{2.23}$$

Так как все наши расчеты справедливы при H/a малом, то из (2.23) следует, что полученное решение годится лишь в том случае, если вес единицы длины катка q/l_0 будет очень велик по сравнению с величиной $\rho\nu\Omega R$.

Отбрасывая в (2.19) результирующую силу трения F_x и подставляя в это соотношение значения P_z из (2.21) и a из (2.23), получим

$$Q \geqslant 0.8a \frac{q}{R} \tag{2.24}$$

или

$$Q \geqslant 0.47 \left[\frac{H^2 f_0(N, l, H)}{\rho\nu\Omega} \frac{q}{l_0} \right]^{1/3} \frac{q}{R} \tag{2.25}$$

В последнем выражении коэффициент при $\dfrac{q}{R}$ может рассматриваться как коэффициент трения качения [11]. Величина этого коэффициента, как видно из (2.25), убывает с уменьшением H и веса единицы длины катка q/l_0 и с увеличением $\rho\nu$ и Ω, причем зависимость от последних трех параметров значительно слабее, чем от H. Все эти выводы хорошо согласуются с физическим смыслом задачи. В частности, при $\mu = \rho\nu = \infty$ («абсолютно твердый слой») получается, как и следует ожидать, что коэффициент трения качения равен нулю. Что касается некоторого уменьшения коэффициента трения качения с увеличением скорости движения, то этот факт подтверждается целым рядом экспериментальных данных [12].

3. *Обсуждение результатов.* Отметим, что структурная (несимметричная) жидкость обладает новыми скалярными константами, связанными с учетом вращательного движения частиц. Структурная жидкость характеризуется тремя физическими константами ν, ν_r и $(c_a + c_d)$ в отличие от классической ньютоновской жидкости, которая характеризуется лишь одной константой вязкости ν. Параметр ν_r имеет размерность вязкости. Поскольку он появляется в результате учета вращательного движения частиц, то естественно его назвать вязкостью вращательного движения или просто вращательной вязкостью. Величина ν_r характеризует сопротивление вращательным движениям подобно тому, как сдвиговая ньютоновская вязкость характеризует сопротивление поступательным движениям. Константа $(c_a + c_d)$ имеет размерность $[\nu][L^2]$, и с ее помощью можно составить параметр $l = \left(\dfrac{c_a + c_d}{4\nu}\right)^{1/2}$, который имеет размерность длины. Параметр l может быть отождествлен с некоторой характеристикой вещества, зависящей от размера молекул [5].

Несимметричность жидкости характеризуется двумя безразмерными параметрами.

Параметр связи N, определенный формулой

$$N = \left(\frac{\nu_r}{\nu + \nu_r} \right)^{1/2}$$

характеризует связь уравнений поступательного движения (1.8) и вращательного движения (1.10). Когда $\nu_r \to 0$ ($N \to 0$), эти уравнения разделяются и уравнение движения (1.8) сводится к обычному уравнению Рейнольдса для смазочного слоя.

Второй важный безразмерный параметр L представляет собой отношение начальной толщины слоя к характерной материальной длине, то есть

$$L = \frac{H}{l}$$

Это число характеризует взаимосвязь между геометрией и свойствами жидкости.

Можно ожидать, что эффекты структурных жидкостей будут ярче проявляться либо при большом l (что соответствует большому размеру подструктуры), либо при малой толщине слоя, то есть с уменьшением безразмерного параметра L эффекты структурных жидкостей становятся более ощутимыми.

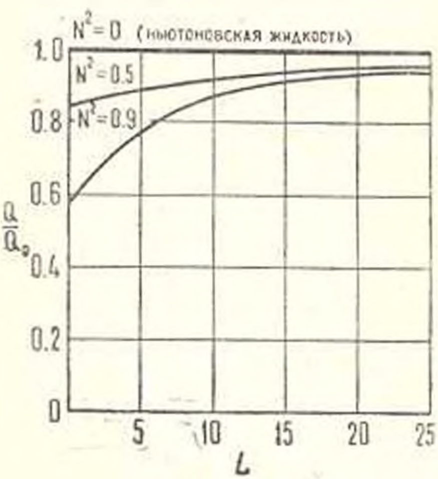
В другом предельном случае $L \to \infty$ мы снова приходим к результатам для ньютоновской жидкости. Это означает, что в данном предельном случае реологические аномалии отсутствуют. Заметим, что $L \to \infty$ соответствует исчезающее малому размеру элемента подструктуры по сравнению с начальной толщиной слоя.

Для безразмерной силы тяги имеем

$$Q^* = \frac{Q}{Q_0} = [f_L(N, L)]^{1/2} \qquad (3.1)$$

где Q_0 — силы тяги для классического решения и

$$f_L(N, L) = 1 + \frac{12}{L^2} - \frac{6N}{L} \frac{NL(1 + \operatorname{ch} NL) - 2N^2 \operatorname{sh} NL}{NL \operatorname{sh} NL + 2N^2(1 - \operatorname{ch} NL)} \qquad (3.2)$$



Фиг. 3.

Выражение (3.1) для безразмерной силы тяги сводится к выведенному Н. А. Слёзкиным при $N \to 0$ или $L \to \infty$

$$\lim_{\substack{L \to \infty \\ \text{или} \\ N \to 0}} f_L(N, L) = 1 \qquad (3.3)$$

В третьем предельном случае $L \to 0$ классическое решение умножается на $(1 - N^2)$

$$\lim_{L \to 0} f_L(N, L) = (1 - N^2) \qquad (3.4)$$

На фиг. 3 показаны графики зависимости безразмерной силы тяги $\frac{Q}{Q_0} = [f_L(N, L)]^{1/2}$ от параметра L для различных значений N.

График показывает, что снижение L соответствует снижению безразмерной силы тяги при всех значениях N, кроме $N = 0$, относящегося к классическому случаю ньютоновской жидкости, когда сила тяги не зависит от изменений L. Заметим, что снижение L соответствует уменьшению толщины вязкого слоя. Итак, чем меньше толщина вязкого слоя, тем более явно выражено влияние подструктуры, вызывающее существенное возрастание эффективной вязкости в тонких слоях.

Ереванский государственный
университет

Поступила 26 X 1979

Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ԾԱՆՐ ԳԼԱՆԻ ԳԼՈՐՈՒՄԸ ՄԱԾՈՒՑԻԿ ՍՏՐՈՒԿՏՈՒՐԱՅԻՆ ՆՅՈՒԹԻ ՇԵՐՏՈՎ ԾԱԾԿՎԱԾ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱՅՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Քննարկվում է ծանր գլանի գլորումը մածուցիկ ստրուկտուրային նյութով ծածկված հարթության վրայով։ Խնդրի լուծման համար կիրառված է ոչ սիմետրիկ (ստրուկտուրային) հեղուկների տեսությունը։ Ստացված է անալիտիկ արտահայտություն գլանի գլորման քարշիչ ուժի համար, իսկ միկրոստրուկտուրային ազդեցությունը պատկերված է գծագրի վրա։

THE ROLLING OF A HEAVY CYLINDER ALONG THE PLANE COVERED WITH A LAYER OF VISCOUS STRUCTURAL SUBSTANCE

L. G. PETROSIAN

S u m m a r y

The rolling of a heavy cylinder along the plane covered with a layer of viscous structural substance is considered. To obtain the solution the theory of asymmetrical (structural) fluids is applied. The analytic expression for the tractive force of the rolling cylinder is obtained, and the influence of microstructure is illustrated by the graph.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kingsbury A.* A New Oil Testing Machine and Some of Its Results. Trans. ASME, 1903, vol. 24, p. 143.
2. *Hardy W., Nottage Al.* Studies in Adhesion-1. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 1926, vol. 112, p. 64.
3. *Henniker J. C.* The Depth of a Surface Zone of a Liquid. Reviews. Modern Physics, 1949, vol. 21, p. 322.

4. *Needs S. J.* Boundary Film Investigations. Trans. ASME, 1940, vol. 62, p. 331.
5. *Пракаш, Синха.* Теория сдавливания пленок микрополярных жидкостей. Тр. американского общества инженеров-механиков. Проблемы трения и смазки, 1976, т. 98, серия F, № 1, с. 147.
6. *Grad H.* Statistical Mechanics, Thermodynamics and Fluid Dynamics of Systems with an Arbitrary Number of Integrals. Commun. Pure, App. Math., 1952, vol. 5, p. 455.
7. *Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В.* Асимметрическая гидромеханика. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
8. *Нгуен Ван Дьеп, Листров А. Т.* О неизотермической модели несимметричных жидкостей. Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1967, № 5.
9. *Петросян Л. Г.* Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжений. Ученые записки ЕГУ, 1976, № 3, 1977, № 2, 1978, № 2.
10. *Agrawal V. K., Ganju K. L., Jain S. C.* Squeeze Film and Externaly Pressurized Bearings Micropolar Fluid Lubricated. Wear, 1972, vol. 19, № 3, p. 259.
11. *Слезкин Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. ГИТТЛ, М., 1955.
12. *Тарг С. М.* Основные задачи теории ламинарных течений. Гостехтеориздат, М.—Л., 1951.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 4, 1981 Механика

А. В. БЕРДАКЧИЕВ

ТРЕХМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ БРУСА ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Постановка связанных задач механики сплошной среды в общем виде дана в [1]. Задачам связанной термоупругости посвящены обзоры [2—5]. В настоящей работе при некоторых граничных условиях даны решения квазистатических задач связанной термоупругости для бруса прямоугольного сечения.

В случае линейной изотропной однородной термоупругой среды при малых деформациях уравнения равновесия и уравнение притока тепла имеют вид [5]

$$\mu\Delta u_i + (\lambda+\mu)\, e_{,i} + X_i = \gamma\theta_{,i} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{1.1}$$

$$\Delta\theta - \frac{1}{\varkappa}\dot\theta - \eta\dot e + Q = 0 \tag{1.2}$$

$$e = u_{k,k}, \qquad \varkappa = \frac{\lambda^0}{c_\varepsilon}, \qquad \eta = \frac{\gamma T_0}{\lambda^0}, \qquad Q = \frac{w}{\lambda^0}, \qquad \gamma = (3\lambda + 2\mu)\,\alpha_0$$

где u_i — вектор перемещения; $\theta = T - T_0$ — перепад температуры (то есть разность между текущей температурой T и некоторой равновесной T_0); λ и μ — постоянные Ламе; λ^0 — коэффициент теплопроводности; c_ε — теплоемкость при постоянной деформации; w — количество тепла, возникающего в единице объема в единицу времени; α_0 — коэффициент теплового расширения. Поскольку случай произвольных объемных сил всегда сводится к случаю, когда объемные силы имеют потенциал [7], то будем считать, что $X_i = C_{,i}$. Компоненты тензора напряжений σ_{ij} и тензора деформаций ε_{ij}:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda e - \gamma\theta)\,\delta_{ij}, \qquad 2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$$

Начальные условия:

$$u_i\big|_{t=0} = f_i(x_k), \qquad \theta\big|_{t=0} = h(x_k) \tag{1.3}$$

где $f_i(x_k)$, $h(x_k)$ — заданные функции координат x_k ($k = 1,\ 2,\ 3$), t — время. Квазистатическая задача связанной термоупругости состоит в интегрировании системы уравнений (1.1), (1.2) при удовлетворении начальным условиям (1.3) и некоторым граничным условиям для u_i и θ, которые мы пока не будем конкретизировать. Интегрируя (1.2) по времени от 0 до t с учетом (1.3), получим

$$\frac{\theta}{\varkappa} = \int_0^t \Delta\theta d\tau - \gamma e + L, \qquad \left(L \equiv \frac{h}{\varkappa} + \gamma f_{k,k} + \int_0^t Q d\tau \right) \tag{1.4}$$

Подставляя выражение для θ (1.4) в (1.1), найдем

$$\mu \Delta u_i + (\lambda_1 + \mu) e_{,i} = \gamma\varkappa \int_0^t (\Delta\theta)_{,i} d\tau + (\gamma\varkappa L - G)_{,i} \tag{1.5}$$

где $\lambda_1 = \lambda + \eta\gamma\varkappa$. Представим u_i в виде $u_i = v_i + w_i$, $e = e_v + e_w$, $e_v = v_{k,k}$, $e_w = w_{k,k}$, где v_i — решение системы

$$\mu \Delta v_i + (\lambda_1 + \mu) e_{v,i} = 0 \tag{1.6}$$

а w_i — любое частное решение системы (1.5). Будем искать w_i в виде $w_i = \Phi_{,i}$. Подставляя это выражение в (1.5) и учитывая, что

$$\Delta (\operatorname{grad} \Phi) = \operatorname{grad} \operatorname{div} (\operatorname{grad} \Phi) - \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\operatorname{grad} \Phi) = \operatorname{grad} \Delta\Phi$$

найдем Φ в виде

$$\Phi = \gamma_1 \int_0^t \theta d\tau + F, \qquad \gamma_1 = \frac{\gamma\varkappa}{\lambda_1 + 2\mu}$$

где F — любое частное решение уравнения $(\lambda_1 + 2\mu) \Delta F = \gamma\varkappa L - G$.

Таким образом,

$$u_i = v_i + \gamma_1 \int_0^t \theta_{,i} d\tau + F_{,i} \tag{1.7}$$

Из (1.7) следует, что

$$e = e_v + \gamma_1 \int_0^t \Delta\theta d\tau + \Delta F \tag{1.8}$$

Подставляя (1.8) в (1.4), получим

$$\theta - k^2 \int_0^t \Delta\theta d\tau = M - \gamma\varkappa e_v \tag{1.9}$$

$$k^2 = \frac{\varkappa(\lambda + 2\mu)}{\lambda_1 + 2\mu}, \qquad M = \frac{\varkappa[(\lambda + 2\mu) L + \gamma G]}{\lambda_1 + 2\mu}$$

Исключая $\int_0^t \Delta\theta d\tau$ из (1.8) и (1.9), найдем более простое выражение для e

$$(\lambda + 2\mu) e = (\lambda_1 + 2\mu) e_v + \gamma\theta - G \tag{1.10}$$

Из (1.9) следует

$$\theta - k^2\Delta\theta = M - \gamma' e_v \tag{1.11}$$

В некоторых задачах v_i, а следовательно, и e_v удается найти, не используя уравнение (1.11). Тогда подставляя найденное значение e_v в (1.11), получим для θ уравнение (1.11) с известной правой частью и с некоторым граничным условием. Найдя θ, по формуле (1.7) определим u_i.

В прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{11} = 2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda e - \gamma\theta = (\lambda + 2\mu)e - \gamma\theta - 2\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) \tag{1.12}$$

$$\sigma_{22} = 2\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda e - \gamma\theta, \qquad \sigma_{33} = 2\mu\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \lambda e - \gamma\theta \tag{1.13}$$

$$\sigma_{12} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right), \qquad \sigma_{13} = \mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)$$

$$\sigma_{23} = \mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \tag{1.14}$$

Систему (1.6) можно записать в форме

$$\varkappa_1\frac{\partial e_v}{\partial x_1} = \frac{\partial \omega_{v3}}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_{v2}}{\partial x_3}, \qquad \varkappa_1\frac{\partial e_v}{\partial x_2} = \frac{\partial \omega_{v1}}{\partial x_3} - \frac{\partial \omega_{v3}}{\partial x_1} \tag{1.15}$$

$$\varkappa_1\frac{\partial e_v}{\partial x_3} = \frac{\partial \omega_{v2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_{v1}}{\partial x_2}, \qquad \left(\varkappa_1 = 2 + \frac{\lambda_1}{\mu}\right) \tag{1.16}$$

$$e_v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \qquad \omega_{v1} = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \tag{1.17}$$

$$\omega_{v2} = \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \qquad \omega_{v3} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \tag{1.18}$$

Пусть дан бесконечный брус прямоугольного поперечного сечения, ось которого параллельна оси Ox_3. В плоскости x_1Ox_2 получим прямоугольник $ABCD$ — поперечное сечение бруса. $x_1 = 0$, $x_1 = a$, $x_2 = 0$, $x_2 = b$ — соответственно уравнения граней AD, BC, AB, CD бруса, которые мы будем именовать так же, как соответствующие стороны прямоугольника $ABCD$. Будем считать, что внешние воздействия симметричны относительно плоскости x_1Ox_2 и периодичны с периодом $2c$ в направлении оси Ox_3. Далее будут даны точные решения задач, когда на одних гранях бруса заданы нормальные смещения, касательные усилия и тепловой поток, а на других — касательные смещения, нормальные усилия и температура. Решение каждой такой задачи будет получено в виде суммы решений более простых задач, которые мы рассмотрим в первую очередь.

Задача 1. На гранях AB и CD заданы граничные условия

$$u_2\big|_{x_2=0}=0,\qquad \sigma_{12}\big|_{x_2=0}=0,\qquad \sigma_{23}\big|_{x_2=0}=0,\qquad \frac{\partial\theta}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=0}=0 \tag{1.19}$$

$$u_2\big|_{x_2=b}=0,\qquad \sigma_{12}\big|_{x_2=b}=0,\qquad \sigma_{23}\big|_{x_2=b}=0,\qquad \frac{\partial\theta}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=b}=0 \tag{1.20}$$

Учитывая наше предположение о характере внешних воздействий, искомые функции разложим в ряды Фурье вида

$$u_1=\sum_{m,\,n=0}^{+\infty} u_{1mn}(x_1,\ t)\cos\alpha_m x_2\cos\beta_n x_3$$

$$u_2=\sum_{m,\,n=0}^{+\infty} u_{2mn}(x_1,\ t)\sin\alpha_m x_2\cos\beta_n x_3$$

$$u_3=\sum_{m,\,n=0}^{+\infty} u_{3mn}(x_1,\ t)\cos\alpha_m x_2\sin\beta_n x_3$$

$$\theta=\sum_{m,\,n=0}^{+\infty} \theta_{mn}(x_1,\ t)\cos\alpha_m x_2\cos\beta_n x_3$$

где $\alpha_m=\dfrac{\pi m}{b}$, $\beta_n=\dfrac{\pi n}{c}$. Граничные условия (1.19), (1.20) удовлетворены. Аналогичные разложения легко выписать и для заданных функций и мы этого делать не будем. Соответствующие коэффициенты разложений будем снабжать индексами m, n, причем в последующих соотношениях суммирование по повторяющимся индексам m и n не производится. Для каждых m, n с учетом (1.10) и (1.12) вместо (1.12)—(1.18) получим

$$\sigma_{11mn}=(\lambda+2\mu)\,e_{mn}-\gamma\theta_{mn}-2\mu\,(\alpha_m u_{2mn}+\beta_n u_{3mn}) \tag{1.21}$$

$$\sigma_{22mn}=2\mu\alpha_m u_{2mn}+\lambda e_{mn}-\gamma\theta_{mn},\qquad \sigma_{33mn}=2\mu\beta_n u_{3mn}+\lambda e_{mn}-\gamma\theta_{mn} \tag{1.22}$$

$$\sigma_{12mn}=\mu\left(\frac{\partial u_{2mn}}{\partial x_1}-\alpha_m u_{1mn}\right),\qquad \sigma_{13mn}=\mu\left(\frac{\partial u_{3mn}}{\partial x_1}-\beta_n u_{1mn}\right)$$

$$\sigma_{23mn}=-\mu\,(\beta_n u_{2mn}+\alpha_m u_{3mn})$$

$$\varkappa_1\frac{\partial e_{vmn}}{\partial x_1}=\Omega_{vmn},\qquad (\Omega_{vmn}=\alpha_m\omega_{v3mn}-\beta_n\omega_{v2mn}) \tag{1.23}$$

$$\varkappa_1\alpha_m e_{vmn}=\frac{\partial\omega_{v3mn}}{\partial x_1}-\beta_n\omega_{v1mn} \tag{1.24}$$

$$\varkappa_1\beta_n e_{vmn}=\alpha_m\omega_{v1mn}-\frac{\partial\omega_{v2mn}}{\partial x_1} \tag{1.25}$$

$$e_{vmn}=\frac{\partial v_{1mn}}{\partial x_1}+\alpha_m v_{2mn}+\beta_n v_{3mn},\qquad \omega_{v1mn}=\beta_n v_{2mn}-\alpha_m v_{3mn} \tag{1.26}$$

$$\omega_{2mn} = -\frac{\partial v_{3mn}}{\partial x_1} - \beta_n v_{1mn}, \qquad \omega_{3mn} = \frac{\partial v_{2mn}}{\partial x_1} + \alpha_m v_{1mn} \quad (1.27)$$

Соотношения (1.7), (1.11) и (1.3) дают

$$u_{1mn} = v_{1mn} + \gamma_1 \int_0^t \frac{\partial \theta_{mn}}{\partial x_1} d\tau + \frac{\partial F_{mn}}{\partial x_1} \quad (1.28)$$

$$u_{2mn} = v_{2mn} - \gamma_1 \alpha_m \int_0^t \theta_{mn} d\tau - \alpha_m F_{mn} \quad (1.29)$$

$$u_{3mn} = v_{3mn} - \gamma_1 \beta_n \int_0^t \theta_{mn} d\tau - \beta_n F_{mn} \quad (1.30)$$

$$\dot\theta_{mn} - k^2 \left(\frac{\partial^2 \theta_{mn}}{\partial x_1^2} - \lambda_{mn}^2 \theta_{mn} \right) = M_{mn} - \gamma_1 \varkappa e_{vmn}, \quad \theta_{mn}|_{t=0} = h_{mn} \quad (1.31)$$

где $\lambda_{mn}^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2$. Умножая (1.24) и (1.25) соответственно на α_m и β_n и складывая, получим

$$\varkappa_2 \lambda_{mn}^2 e_{vmn} = \frac{\partial \Omega_{vmn}}{\partial x_1} \quad (1.32)$$

Подставляя Ω_{vmn} из (1.23) в (1.32), найдем

$$e_{vmn} = c_{1mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) + c_{2mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1) \quad (1.33)$$

$$\Omega_{vmn} = \varkappa_2 \lambda_{mn} [-c_{1mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) + c_{2mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1)] \quad (1.34)$$

где $c_{imn}(t)$ $(i = 1, 2)$ (и далее для $i = 3, 4, 5, 6$) — неизвестные функции времени. Выражая Ω_{vmn} через перемещения с помощью (1.27), получим

$$e_{vmn} = \frac{\partial v_{1mn}}{\partial x_1} + R_{mn}, \qquad \Omega_{vmn} = \lambda_{mn}^2 v_{1mn} + \frac{\partial R_{mn}}{\partial x_1} \quad (1.35)$$

где $R_{mn} \equiv \alpha_m v_{2mn} + \beta_n v_{3mn}$. Поэтому

$$v_{1mn} = \frac{1}{\lambda_{mn}^2} \left(\Omega_{vmn} - \frac{\partial R_{mn}}{\partial x_1} \right), \qquad \frac{\partial^2 R_{mn}}{\partial x_1^2} - \lambda_{mn}^2 R_{mn} = \frac{\partial \Omega_{vmn}}{\partial x_1} - \lambda_{mn}^2 e_{vmn}$$

Откуда с учетом (1.33), (1.34) находим

$$R_{mn} = \lambda_{mn} \varkappa_3 x_1 [c_{1mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) - c_{2mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1)] +$$
$$+ c_{3mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) + c_{4mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1), \quad (2\varkappa_3 = 1 - \varkappa_1) \quad (1.36)$$

$$v_{1mn}(x_1, t) = (\varkappa_2 x_1 - \varkappa_3)\, c_{1mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) +$$

$$+ (\varkappa_2 x_1 + \varkappa_3)\, c_{2mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1) + \frac{1}{\lambda_{mn}} c_{3mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) -$$

$$- \frac{1}{\lambda_{mn}} c_{4mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1), \quad (2\lambda_{mn} \varkappa_3 = 1 + \varkappa_1) \tag{1.37}$$

Умножая (1.24) и (1.25) соответственно на β_n и α_m и почленно вычитая, найдем

$$\omega_{v1mn} = \frac{1}{\lambda_{mn}^2} \left(\alpha_m \frac{\partial \omega_{v2mn}}{\partial x_1} + \beta_n \frac{\partial \omega_{v3mn}}{\partial x_1} \right) \tag{1.38}$$

Подставляя (1.27) в (1.38), получим

$$\frac{\partial^2 \omega_{v1mn}}{\partial x_1^2} - \lambda_{mn}^2 \omega_{v1mn} = 0$$

$$\omega_{v1mn} = c_{5mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) + c_{6mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1) \tag{1.39}$$

Так как

$$\alpha_m v_{2mn} + \beta_n v_{3mn} = R_{mn} \quad \text{и} \quad \beta_n v_{2mn} - \alpha_n v_{3mn} = \omega_{v1mn}$$

то используя (1.36) и (1.39), найдем

$$\lambda_{mn}^2 v_{2mn} = \alpha_m \lambda_{mn} \varkappa_2 x_1 [c_{1mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) - c_{2mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1)] +$$

$$+ \alpha_m [c_{3mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) + c_{4mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1)] +$$

$$+ \beta_n [c_{5mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) + c_{6mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1)] \tag{1.40}$$

$$\lambda_{mn}^2 v_{3mn} = \beta_n \lambda_{mn} \varkappa_2 x_1 [c_{1mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) - c_{2mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1)] +$$

$$+ \beta_n [c_{3mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) + c_{4mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1)] -$$

$$- \alpha_m [c_{5mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) + c_{6mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1)] \tag{1.41}$$

Далее при условиях (1.19), (1.20) мы рассмотрим три вида граничных условий на гранях AD и BC.

Задача 1а. Граничные условия имеют вид (1.19), (1.20) и

$$u_1|_{x_1=0} = \delta_1, \qquad \sigma_{12}|_{x_1=0} = S_1, \qquad \sigma_{13}|_{x_1=0} = T_1, \qquad \left.\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = q_1 \tag{1.42}$$

$$u_1|_{x_1=a} = \delta_2, \qquad \sigma_{12}|_{x_1=a} = S_2, \qquad \sigma_{13}|_{x_1=a} = T_2, \qquad \left.\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right|_{x_1=a} = q_2 \tag{1.43}$$

где правые части в (1.42), (1.43) являются заданными функциями от x_2, x_3, t. Для каждых m, n с учетом (1.22) вместо (1.42), (1.43) получим

$$u_{1mn}|_{x_1=0} = \delta_{1mn}(t), \qquad u_{1mn}|_{x_1=a} = \delta_{2mn}(t) \tag{1.44}$$

$$\mu\left(\frac{\partial u_{2mn}}{\partial x_1} - \alpha_m u_{1mn}\right)\Big|_{x_1=0} = S_{1mn}(t)$$

$$\mu\left(\frac{\partial u_{3mn}}{\partial x_1} - \beta_n u_{1mn}\right)\Big|_{x_1=0} = T_{1mn}(t) \qquad (1.45)$$

$$\mu\left(\frac{\partial u_{2mn}}{\partial x_1} - \alpha_m u_{1mn}\right)\Big|_{x_1=a} = S_{2mn}(t)$$

$$\mu\left(\frac{\partial u_{3mn}}{\partial x_1} - \beta_n u_{1mn}\right)\Big|_{x_1=a} = T_{2mn}(t) \qquad (1.46)$$

$$\frac{\partial \theta_{mn}}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = q_{1mn}(t), \qquad \frac{\partial \theta_{mn}}{\partial x_1}\Big|_{x_1=a} = q_{2mn}(t) \qquad (1.47)$$

Непосредственным подсчетом на основе (1.29), (1.30) найдем

$$\beta_n u_{2mn} - \alpha_m u_{3mn} = \beta_n v_{2mn} - \alpha_m v_{3mn} = \omega_{v1mn} \qquad (1.48)$$

Откуда с учетом (1.44)—(1.46) получим

$$\mu \frac{\partial \omega_{v1mn}}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = \beta_n S_{1mn} - \alpha_m T_{1mn}$$

$$\mu \frac{\partial \omega_{v1mn}}{\partial x_1}\Big|_{x_1=a} = \beta_n S_{2mn} - \alpha_m T_{2mn} \qquad (1.49)$$

Подставляя (1.39) в (1.49), найдем $c_{5mn}(t)$ и $c_{6mn}(t)$. Непосредственным подсчетом на основе (1.28)—(1.30) и (1.35) найдем

$$\lambda_{mn}^2 u_{1mn} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\alpha_m u_{2mn} + \beta_n u_{3mn}) = \lambda_{mn}^2 v_{1mn} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_1}(\alpha_m v_{2mn} + \beta_n v_{3mn}) = \lambda_{mn}^2 v_{1mn} + \frac{\partial R_{mn}}{\partial x_1} = \Omega_{vmn}$$

Откуда, используя (1.44)—(1.46), получим

$$\mu\Omega_{vmn}\big|_{x_1=0} = \alpha_m S_{1mn} + \beta_n T_{1mn} + 2\mu\lambda_{mn}^2 \delta_{1mn} \qquad (1.50)$$

$$\mu\Omega_{vmn}\big|_{x_1=a} = \alpha_m S_{2mn} + \beta_n T_{2mn} + 2\mu\lambda_{mn}^2 \delta_{2mn} \qquad (1.51)$$

Подставляя (1.34) в (1.50), (1.51), найдем $c_{1mn}(t)$ и $c_{2mn}(t)$. Далее условия (1.44) с учетом (1.28) и (1.47) дают

$$\left[v_{1mn} + \gamma_1 \int_0^t q_{1mn}(\tau)\,d\tau + \frac{\partial F_{mn}}{\partial x_1}\right]\Big|_{x_1=0} = \delta_{1mn}(t) \qquad (1.52)$$

$$\left[v_{1mn} + \gamma_1 \int_0^t q_{2mn}(\tau)\,d\tau + \frac{\partial F_{mn}}{\partial x_1}\right]\Big|_{x_1=a} = \delta_{2mn}(t) \qquad (1.53)$$

Подставляя (1.37) в (1.52), (1.53) и учитывая, что $c_{1mn}(t)$ и $c_{2mn}(t)$ уже известны, найдем $c_{3mn}(t)$ и $c_{4mn}(t)$. Введем новую искомую функцию $\bar{\theta}_{mn}(x_1, t)$ с помощью соотношения

$$\theta_{mn}(x_1, t) = \bar{\theta}_{mn}(x_1, t)\exp(-k\delta_{mn}^2 t) + q_{1mn}(t)\,x_1 + \frac{x_1^2}{2a}\left[q_{2mn}(t) - q_{1mn}(t)\right] \tag{1.54}$$

Подставляя (1.54) в (1.31) и (1.47), получим

$$\dot{\bar{\theta}}_{mn} = k^2\frac{\partial^2\bar{\theta}_{mn}}{\partial x_1^2} + \bar{M}_{mn} - \eta\varkappa\exp(k^2\delta_{mn}^2 t)\,e_{vmn} \tag{1.55}$$

$$\left.\frac{\partial\bar{\theta}_{mn}}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial\bar{\theta}_{mn}}{\partial x_1}\right|_{x_1=a} = 0, \qquad \bar{\theta}_{mn}\big|_{t=0} = \bar{\theta}_{mn}^0 \tag{1.56}$$

где $\bar{M}_{mn}$, $\bar{\theta}_{mn}^0$ известны, e_{vmn} нами найдена. Решение задачи (1.55), (1.56) известно [8]. Далее $u_{imn}(x_1, t)$ $(i = 1, 2, 3)$ найдем по (1.28)—(1.30) с учетом (1.37), (1.40), (1.41). Задача решена.

Задача 1b. Граничные условия имеют вид (1.19), (1.20) и

$$u_2\big|_{x_1=0} = g_1, \qquad u_3\big|_{x_1=0} = h_1, \qquad \sigma_{11}\big|_{x_1=0} = p_1, \qquad \theta\big|_{x_1=0} = \theta_1 \tag{1.57}$$

$$u_2\big|_{x_1=a} = g_2, \qquad u_3\big|_{x_1=a} = h_2, \qquad \sigma_{11}\big|_{x_1=a} = p_2, \qquad \theta\big|_{x_1=a} = \theta_2 \tag{1.58}$$

где правые части в (1.57), (1.58) являются заданными функциями от x_2, x_3, t. Для каждых m, n с учетом (1.21) получим

$$u_{2mn}\big|_{x_1=0} = g_{1mn}(t), \qquad u_{3mn}\big|_{x_1=0} = h_{1mn}(t) \tag{1.59}$$

$$u_{2mn}\big|_{x_1=a} = g_{2mn}(t), \qquad u_{3mn}\big|_{x_1=a} = h_{2mn}(t) \tag{1.60}$$

$$(\lambda_1 + 2\mu)\,e_{vmn}\big|_{x_1=0} = p_{1mn}(t) + 2\mu\left[\alpha_m g_{1mn}(t) + \beta_n h_{1mn}(t)\right] + G_{mn}\big|_{x_1=0} \tag{1.61}$$

$$(\lambda_1 + 2\mu)\,e_{vmn}\big|_{x_1=a} = p_{2mn}(t) + 2\mu\left[\alpha_m g_{2mn}(t) + \beta_n h_{2mn}(t)\right] + G_{mn}\big|_{x_1=a} \tag{1.62}$$

$$\theta_{mn}\big|_{x_1=0} = \theta_{1mn}(t), \qquad \theta_{mn}\big|_{x_1=a} = \theta_{2mn}(t) \tag{1.63}$$

Подставляя (1.33) в (1.61), (1.62), найдем $c_{1mn}(t)$ и $c_{2mn}(t)$. Далее из (1.48), (1.59), (1.60) получим

$$\omega_{v1mn}\big|_{x_1=0} = \beta_n g_{1mn}(t) - \alpha_m h_{1mn}(t) \tag{1.64}$$

$$\omega_{v1mn}\big|_{x_1=a} = \beta_n g_{2mn}(t) - \alpha_m h_{2mn}(t) \tag{1.65}$$

Подставляя (1.39) в (1.64), (1.65), найдем $c_{5mn}(t)$, $c_{6mn}(t)$. Далее на основе (1.29), (1.30) найдем

$$\alpha_m u_{2mn} + \beta_n u_{3mn} = R_{mn} - \lambda_{mn}^2 \left(\gamma_1 \int\limits_0^t \theta_{mn} d\tau + F_{mn} \right)$$

Поэтому с учетом (1.59), (1.60), (1.63) получим

$$R_{mn}\big|_{x_1=0} = \lambda_{mn}^2 \left(F_{mn}\big|_{x_1=0} + \gamma_1 \int\limits_0^t \theta_{1mn}(\tau) d\tau \right) + \alpha_m g_{1mn}(t) + \beta_n h_{1mn}(t) \quad (1.66)$$

$$R_{mn}\big|_{x_1=a} = \lambda_{mn}^2 \left(F_{mn}\big|_{x_1=a} + \gamma_1 \int\limits_0^t \theta_{2mn}(\tau) d\tau \right) + \alpha_m g_{2mn}(t) + \beta_n h_{2mn}(t) \quad (1.67)$$

Подставляя (1.36) в (1.66), (1.67) и учитывая, что $c_{1mn}(t)$ и $c_{2mn}(t)$ уже известны, найдем $c_{3mn}(t)$ и $c_{4mn}(t)$. Введем новую искомую функцию $\bar{\theta}_{mn}(x_1, t)$ с помощью соотношения

$$\theta_{mn}(x_1, t) = \bar{\theta}_{mn}(x_1, t) \exp(-k^2 \lambda_{mn}^2 t) + \theta_{1mn}(t) + \frac{x_1}{a} [\theta_{2mn}(t) - \theta_{1mn}(t)] \quad (1.68)$$

Подставляя (1.68) в (1.31) и (1.63), получим

$$\dot{\bar{\theta}}_{mn} = k^2 \frac{\partial^2 \bar{\theta}_{mn}}{\partial x_1^2} + \bar{M}_{mn} - \eta\varkappa \exp(k^2 \lambda_{mn}^2 t)\, e_{vmn} \quad (1.69)$$

$$\bar{\theta}_{mn}\big|_{x_1=0} = 0, \qquad \bar{\theta}_{mn}\big|_{x_1=a} = 0, \qquad \bar{\theta}_{mn}\big|_{t=0} = \bar{\theta}_{mn}^0 \quad (1.70)$$

где $\bar{M}_{mn}$, $\bar{\theta}_{mn}^0$ известны, e_{vmn} нами найдена. Решение задачи (1.69), (1.70) известно [8]. Далее $u_{imn}(x_1, t)$ $(i = 1, 2, 3)$ найдем по (1.28)—(1.30) с учетом (1.37), (1.40), (1.41).

Задача 1с. Граничные условия имеют вид (1.19), (1.20), (1.42), (1.58). Тогда для каждых m, n получим как и ранее первое из соотношений (1.49), (1.50), (1.52) и затем (1.62), (1.65), (1.67). Подставляя (1.39) в первое из соотношений (1.49) и в (1.65), найдем $c_{5mn}(t)$, $c_{6mn}(t)$. Затем, подставляя (1.34) в (1.50) и (1.33) в (1.62), найдем $c_{1mn}(t)$, $c_{2mn}(t)$. Далее, подставляя (1.37) в (1.52) и (1.36) в (1.67) и учитывая, что $c_{1mn}(t)$ и $c_{2mn}(t)$ уже известны, найдем $c_{3mn}(t)$ и $c_{4mn}(t)$. Граничные условия для $\theta_{mn}(t)$

$$\frac{\partial \theta_{mn}}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0} = q_{1mn}(t), \qquad \theta_{mn}\big|_{x_1=a} = \theta_{2mn}(t) \quad (1.71)$$

Введем новую искомую функцию $\bar{\theta}_{mn}(x_1, t)$ с помощью соотношения

$$\theta_{mn}(x_1, t) = \bar{\theta}_{mn}(x_1, t) \exp(-k^2 \lambda_{mn}^2 t) + \theta_{2mn}(t) + (x_1 - a) q_{1mn}(t) \quad (1.72)$$

Подставляя (1.72) в (1.31) и (1.71), получим

$$\dot{\bar{\theta}}_{mn} = k^2 \frac{\partial^2 \bar{\theta}_{mn}}{\partial x_1^2} + \bar{M}_{mn} - \eta \exp(k^2 \lambda_{mn}^2 t)\, e_{vmn} \tag{1.73}$$

$$\left.\frac{\partial \bar{\theta}_{mn}}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = 0, \qquad \bar{\theta}_{mn}\big|_{x_1=a} = 0, \qquad \bar{\theta}_{mn}\big|_{t=0} = \bar{\theta}^0_{mn} \tag{1.74}$$

где $\bar{M}_{mn}$, $\bar{\theta}^0_{mn}$ известны, e_{vmn} нами найдена. Решение задачи (1.73), (1.74) известно [8]. Далее $u_{imn}(x_1, t)$ $(i = 1, 2, 3)$ найдем по (1.28)—(1.30) с учетом (1.37), (1.40), (1.41).

Задача 2. На гранях AD и BC заданы граничные условия вида

$$u_1\big|_{x_1=0} = 0, \quad \sigma_{12}\big|_{x_1=0} = 0, \quad \sigma_{13}\big|_{x_1=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = 0 \tag{1.75}$$

$$u_1\big|_{x_1=a} = 0, \quad \sigma_{12}\big|_{x_1=a} = 0, \quad \sigma_{13}\big|_{x_1=a} = 0, \quad \left.\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right|_{x_1=a} = 0 \tag{1.76}$$

Учитывая наше предположение о характере внешних воздействий, искомые функции разложим в ряды Фурье вида

$$u_1 = \sum_{m,\,n=0}^{+\infty} u^{(2)}_{1mn}(x_2, t) \sin \gamma_m x_1 \cos \beta_n x_3$$

$$u_2 = \sum_{m,\,n=0}^{+\infty} u^{(2)}_{2mn}(x_2, t) \cos \gamma_m x_1 \cos \beta_n x_3$$

$$u_3 = \sum_{m,\,n=0}^{+\infty} u^{(2)}_{3mn}(x_2, t) \cos \gamma_m x_1 \sin \beta_n x_3$$

$$\theta = \sum_{m,\,n=0}^{+\infty} \theta^{(2)}_{mn}(x_2, t) \cos \gamma_m x_1 \cos \beta_n x_3$$

где $\gamma_m = \dfrac{\pi m}{a}$; $\beta_n = \dfrac{\pi n}{c}$. Аналогичные разложения для известных функций легко выписать. Условия (1.75), (1.76) удовлетворены. Так же, как и в первой задаче, точные решения можно получить в следующих случаях.

Задача 2а. Граничные условия имеют вид (1.75), (1.76) и

$$u_2\big|_{x_2=0} = \delta_3, \quad \sigma_{12}\big|_{x_2=0} = S_3, \quad \sigma_{23}\big|_{x_2=0} = T_3, \quad \left.\frac{\partial \theta}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = q_3 \tag{1.77}$$

$$u_2\big|_{x_2=b} = \delta_4, \quad \sigma_{12}\big|_{x_2=b} = S_4, \quad \sigma_{23}\big|_{x_2=b} = T_4, \quad \left.\frac{\partial \theta}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = q_4 \tag{1.78}$$

Задача 2b. Граничные условия имеют вид (1.75), (1.76) и

$$u_1\big|_{x_2=0} = g_3, \quad u_3\big|_{x_2=0} = h_3, \quad \sigma_{22}\big|_{x_2=0} = p_3, \quad \theta\big|_{x_2=0} = \theta_3 \qquad (1.79)$$

$$u_1\big|_{x_2=b} = g_4, \quad u_3\big|_{x_2=b} = h_4, \quad \sigma_{22}\big|_{x_2=b} = p_4, \quad \theta\big|_{x_2=b} = \theta_4 \qquad (1.80)$$

Правые части в (1.77)—(1.80) являются заданными функциями от x_1, x_3, t.

Задача 2c. Граничные условия имеют вид (1.75), (1.76) и (1.78), (1.79). Задачи 2a, 2b, 2c решаются так же, как задачи 1a, 1b, 1c.

Задача 3. На гранях AB и CD заданы граничные условия

$$u_1\big|_{x_2=0} = 0, \quad u_3\big|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{22}\big|_{x_2=0} = 0, \quad \theta\big|_{x_2=0} = 0 \qquad (1.81)$$

$$u_1\big|_{x_2=b} = 0, \quad u_3\big|_{x_2=b} = 0, \quad \sigma_{22}\big|_{x_2=b} = 0, \quad \theta\big|_{x_2=b} = 0 \qquad (1.82)$$

С учетом нашего предположения о характере внешних воздействий искомые функции разложим в ряды Фурье вида

$$u_1 = \sum_{m,n=0}^{+\infty} u^{(3)}_{1mn}(x_1, t) \sin \alpha_m x_2 \cos \beta_n x_3$$

$$u_2 = \sum_{m,n=0}^{+\infty} u^{(3)}_{2mn}(x_1, t) \cos \alpha_m x_2 \cos \beta_n x_3$$

$$u_3 = \sum_{m,n=0}^{+\infty} u^{(3)}_{3mn}(x_1, t) \sin \alpha_m x_2 \sin \beta_n x_3$$

$$\theta = \sum_{m,n=0}^{+\infty} \theta^{(3)}_{mn}(x_1, t) \sin \alpha_m x_2 \cos \beta_n x_3$$

где $\alpha_m = \dfrac{\pi m}{b}$, $\beta_n = \dfrac{\pi n}{c}$. Условия (1.81), (1.82) удовлетворены. Точные решения можно получить в следующих случаях.

Задача 3a. Граничные условия имеют вид (1.81), (1.82), (1.42), (1.43).

Задача 3b. Граничные условия имеют вид (1.81), (1.82), (1.57), (1.58).

Задача 3c. Граничные условия имеют вид (1.81), (1.82), (1.42), (1.58).

Задача 4. На гранях AD и BC заданы граничные условия вида

$$u_2\big|_{x_1=0} = 0, \quad u_3\big|_{x_1=0} = 0, \quad \sigma_{11}\big|_{x_1=0} = 0, \quad \theta\big|_{x_1=0} = 0 \qquad (1.83)$$

$$u_2\big|_{x_1=a} = 0, \quad u_3\big|_{x_1=a} = 0, \quad \sigma_{11}\big|_{x_1=a} = 0, \quad \theta\big|_{x_1=a} = 0 \qquad (1.84)$$

Искомые функции разложим в ряды Фурье вида

$$u_1 = \sum_{m,n=0}^{+\infty} u^{(4)}_{1mn}(x_2, t) \cos \gamma_m x_1 \cos \beta_n x_3$$

$$u_2 = \sum_{m,n=0}^{+\infty} u^{(4)}_{2mn}(x_2, t) \sin \gamma_m x_1 \cos \beta_n x_3$$

$$u_3 = \sum_{m,\, n=0}^{+\infty} u_{3mn}^{(4)}(x_2, t) \sin \gamma_m x_1 \sin \beta_n x_3$$

$$\theta = \sum_{m,\, n=0}^{+\infty} \theta_{mn}^{(4)}(x_2, t) \sin \gamma_m x_1 \cos \beta_n x_3$$

где $\gamma_m = \frac{\pi m}{a}$, $\beta_n = \frac{\pi n}{c}$. Условия (1.83), (1.84) удовлетворены. Точные решения можно получить в следующих случаях.

Задача 4a. Граничные условия имеют вид (1.83), (1.84), (1.77), (1.78).

Задача 4b. Граничные условия имеют вид (1.83), (1.84), (1.79), (1.80).

Задача 4c. Граничные условия имеют вид (1.83), (1.84), (1.78), (1.79).

Задача 5. На гранях AD и BC заданы граничные условия вида (1.75), (1.84). Искомые функции разложим в ряды Фурье вида

$$u_1 = \sum_{m,\, n=0}^{+\infty} u_{1mn}^{(5)}(x_2, t) \sin \zeta_m x_1 \cos \beta_n x_3$$

$$u_2 = \sum_{m,\, n=0}^{+\infty} u_{2mn}^{(5)}(x_2, t) \cos \zeta_m x_1 \cos \beta_n x_3$$

$$u_3 = \sum_{m,\, n=0}^{+\infty} u_{3mn}^{(5)}(x_2, t) \cos \zeta_m x_1 \sin \beta_n x_3$$

$$\theta = \sum_{m,\, n=0}^{+\infty} \theta_{mn}^{(5)}(x_2, t) \cos \zeta_m x_1 \cos \beta_n x_3$$

где $\zeta_m = \frac{(2m+1)\pi}{2a}$, $\beta_n = \frac{\pi n}{c}$. Аналогичные разложения для известных функций легко выписать, используя соотношения

$$\int_0^a \sin \zeta_m x \sin \zeta_k x dx = \int_0^a \cos \zeta_m x \cos \zeta_k x dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq k \\ \frac{a}{2} & \text{при } m = k \end{cases} \qquad (1.85)$$

Граничные условия (1.75), (1.84) удовлетворены. Точные решения можно получить в следующих случаях.

Задача 5a. Граничные условия имеют вид (1.75), (1.84), (1.77), (1.78).

Задача 5b. Граничные условия имеют вид (1.75), (1.84), (1.79), (1.80).

Задача 5c. Граничные условия имеют вид (1.75), (1.84), (1.78), (1.79).

Задача 6. На гранях AB и CD заданы граничные условия (1.81), (1.20). Искомые функции разложим в ряды Фурье вида

$$u_1 = \sum_{m,\,n=0}^{+\infty} u_{1mn}^{(6)}(x_1,\ t)\sin\zeta_m x_2\cos\beta_n x_3$$

$$u_2 = \sum_{m,\,n=0}^{+\infty} u_{2mn}^{(6)}(x_1,\ t)\cos\zeta_m x_2\sin\beta_n x_3$$

$$u_3 = \sum_{m,\,n=0}^{+\infty} u_{3mn}^{(6)}(x_1,\ t)\sin\zeta_m x_2\sin\beta_n x_3$$

$$\theta = \sum_{m,\,n=0}^{+\infty} \theta_{mn}^{(6)}(x_1,\ t)\sin\zeta_m x_2\cos\beta_n x_3$$

где $\zeta_m = \dfrac{(2m+1)\pi}{2b}$, $\beta_n = \dfrac{\pi n}{c}$. Используя соотношения, аналогичные (1.85), легко выписать соответствующие разложения и для известных функций. Точные решения можно получить в следующих случаях.

Задача 6а. Граничные условия имеют вид (1.81), (1.20), (1.42), (1.43).

Задача 6b. Граничные условия имеют вид (1.81), (1.20), (1.57), (1.58).

Задача 6c. Граничные условия имеют вид (1.81), (1.20), (1.42), (1.58).

Далее, если заданы нормальные смещения, касательные усилия и тепловой поток, то такие граничные условия будем называть граничными условиями первого вида. Если же заданы касательные смещения, нормальные усилия и температура, то такие граничные условия будем называть граничными условиями второго вида. В настоящей работе получены решения для следующих качественно различных видов граничных условий.

1. На всех гранях бруса заданы граничные условия первого вида. Решение такой задачи получим, суммируя решения задач 1а и 2а (причем в одной из этих задач следует взять нулевые X_i и Q).

2. На всех гранях бруса заданы граничные условия второго вида. Решение такой задачи получим как сумму решений задач 3b и 4b.

3. На одной грани, например, AD заданы граничные условия первого вида, а на трех остальных — второго вида. Решение получим, суммируя решения задач 3c и 5b.

4. На одной грани, например, BC, заданы граничные условия второго вида, а на трех остальных — первого вида. Решение получим как сумму решений задач 1c и 5a.

5. На двух противоположных гранях, например, AB и CD заданы граничные условия первого вида, а на двух других — второго вида. Здесь надо взять сумму решений задач 1b и 4a.

6. На двух соседних гранях, например, AD и DC, заданы граничные условия первого вида, а на двух других — второго вида. Надо взять сумму решений задач 5c и 6c.

Автор благодарен профессору механико-математического факультета МГУ Б. Е. Победре за внимание к работе.

Казанский филиал Московского
энергетического института

Поступила 7 V 1980

Ա. Վ. ԲԵՐԴԱԿՉԻԵՎ

ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆԱՁԵՎ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ ՀԵԾԱՆԻ ՀԱՄԱՐ ՋԵՐՄԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԿԱՊԱԿՑՎԱԾ ԵՌԱՉԱՓ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Մի քանի եզրային պայմանների դեպքում տրվում են ուղղանկյունաձև կտրվածքով հեծանի համար կապակցված ջերմաառաձգականության քվազիստատիկ խնդիրների լուծումները։

THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF BOUND THERMOELASTICITY FOR A BEAM OF RECTANGULAR CROSSECTION

A. V. BERDAKCHIYEV

S u m m a r y

For the case of certain boundary conditions the solutions for quasistatic problems of thermoelasticity for a beam of rectangular crossection are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Победря Б. Е.* О связанных задачах механики сплошной среды. В сб.: «Упругость и неупругость», вып. 2. М., изд-во МГУ, 1971, с. 224—253.
2. *Новацкий В.* Обзор работ по динамическим проблемам термоупругости. Сб. переводов «Механика», 1966, № 6, с. 101—142.
3. *Шачнев В. А.* О новых результатах в теории сопряженной термоупругости. Приложение к книге [6], с. 237—250.
4. *Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. В сб.: «Математические методы и физико-механические поля», вып. 2. Киев, «Наукова думка», 1975, с. 42—47.
5. *Новацкий В.* Теория упругости. М., «Мир», 1975, 872 с.
6. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М., «Мир», 1970, 256 с.
7. *Гродский Г. Д.* Интегрирование общих уравнений равновесия изотропного упругого тела при помощи ньютоновых потенциалов и гармонических функций. Изв. АН СССР, отд. мат. и естеств. н., 1935, № 1, с. 587—614.
8. *Бабич В. М. и др.* Линейные уравнения математической физики. СМБ. Под редакцией С. Г. Михлина. М., «Наука», 1964, 368 с.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 4, 1981 Механика

А. Д. ЛИЗАРЕВ

О РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ ТОКОНЕСУЩЕЙ ПЛАСТИНЫ

Задача теории устойчивости токонесущей пластины-полосы шириной a $(0 \leqslant x \leqslant a, \ -\infty < y < \infty)$, помещенной в поперечное магнитное поле, в случае, если деформации не зависят от координаты y, сводится к уравнению [1, 2]

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{2h}{cD} J_0 H_0 \frac{d}{dx}\left(x \frac{dw}{dx}\right) = 0 \tag{1.1}$$

где $2h$ — постоянная толщина пластины, D — цилиндрическая жесткость, J_0 — плотность равномерно распределенного тока, H_0 — вектор напряженности внешнего магнитного поля, перпендикулярный срединной плоскости пластины, c — электродинамическая постоянная. Действующая на пластину постоянная объемная сила $J_0 H_0/c$ приводит к возникновению неоднородного поля нормальных напряжений $\sigma = J_0 H_0 x/c$.

Переходя к безразмерным координатам $\xi = x/a$, умножая все члены уравнения (1.1) на ξ^4 и полагая $a^3 h J_0 H_0/cD = k$, перепишем (1.1) в виде

$$\xi^4 w^{IV} + 2k\xi^5 w'' + 2k\xi^4 w' = 0 \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) принадлежит классу дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\sum_{i=0}^{q+1} z^i (a_i - b_i z^\delta - c_i z^{m\delta}) \frac{d^i w}{dz^i} = 0 \tag{1.3}$$

рассмотренному в [3—5]. Здесь a_i, b_i, c_i, δ — действительные числа, $i = 0, 1, \ldots, q+1$; $m \geqslant 2$ — целое число. К уравнениям класса (1.3) сводятся многие задачи теории колебаний и устойчивости неоднородных механических систем, свойства которых описываются непрерывными функциями координат [3—5]. Будем относить к таким системам стержни, пластины и оболочки, физически и геометрически неоднородные или же с начальными неоднородными полями напряжений. Физическая неоднородность вызывается переменными физико-механическими свойствами материала — модулем упругости, коэффициентом Пуассона и плотностью. Геометрически неоднородными системами будем называть стержни переменного поперечного сечения, пластины и оболочки переменной толщины. Начальная неоднородность напряжений может быть обусловлена, например, различной интенсивностью распределенных сил, приложенных по краям пластины, центробежными силами, влиянием собственного веса, температурными и электромагнитными полями. Возможно наличие нескольких неоднородностей в одном объекте, например, вертикально поставленный изотропный стержень переменного сечения неоднороден геометрически, а напряжения в таком стержне от собственного веса зависят от осевой координаты.

У различных объектов (стержень, пластина, оболочка) при различном характере неоднородности (физическая, геометрическая или же начальное неоднородное поле напряжений) формы колебаний и потери устойчивости описываются уравнениями класса (1.3), которые в разных задачах отличаются только постоянными коэффициентами a_i, b_i, c_i и показателем δ. Так, к уравнениям класса (1.3) приводятся задачи об устойчивости стержня переменного сечения с учетом собственного веса [6], об устойчивости кольцевой пластины при неоднородном поле напряжений [7], о колебаниях кольцевой пластины переменной толщины [8] и многие другие. Полная математическая аналогия обнаруживается между задачами об устойчивости призматического стержня при действии собственного веса [9] и об устойчивости токонесущей пластины. Обе эти задачи сводятся к уравнению вида (1.2).

Построение решений уравнений класса (1.3) для случая, когда все $c_i = 0$, рассмотрено в [4]. Введем параметры

$$\alpha_{ij} = \frac{x_i - u_j}{\delta}, \qquad \beta_{ij} = \frac{x_i - x_j}{\delta} + 1 \tag{1.4}$$

где $i \neq j$, x_i и u_i — корни определяющих уравнений параметров знаменателя и числителя

$$a_0 + \sum_{i=1}^{q+1} a_i \prod_{j=1}^{i} (x - j + 1) = 0 \tag{1.5}$$

$$b_0 + \sum_{i=1}^{p} b_i \prod_{j=1}^{i} (u - j + 1) = 0 \tag{1.6}$$

Если среди корней уравнения (1.5) отсутствуют кратные корни, а также корни, разность которых равна числу, кратному δ, то при любом целом или дробном $\delta > 0$ фундаментальную систему решений уравнения (1.3) можно представить в виде суммы произведений степенных и обобщенных гипергеометрических функций

$$w_i = z^{x_i} {}_pF_q(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ip}; \beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots, \beta_{iq}; \zeta) \tag{1.7}$$

причем аргумент ζ определяется формулой

$$\zeta = \frac{b_p}{a_{q+1}} \frac{z^\delta}{\delta^{q-p+1}}$$

где b_p — коэффициент со старшим индексом p среди отличных от нуля коэффициентов b_i в уравнении (1.3).

При одном или нескольких значениях $\beta_{ij} = 0, -1, -2, \ldots$ уравнение (1.3) имеет соответствующее число частных решений, содержащих $\ln z$ в первой и более высоких степенях.

Уравнение (1.2) принадлежит классу (1.3), причем $p = 2$, $q = 3$:

$$\delta = 3; \quad a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0, \quad a_4 = 1; \quad b_0 = b_3 = b_4 = 0$$

$$b_1 = b_2 = -2k; \quad c_i = 0; \quad \psi = -\frac{2}{9}k\xi^3$$

Определяющее уравнение параметров знаменателя (1.5) имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, определяющее уравнение параметров числителя (1.6) — корни $u_1 = u_2 = 0$. Разность корней $x_4 - x_1$ кратна $\delta = 3$, однако частное решение w_4 может быть записано в форме (1.7), так как частное решение w_1 — постоянная величина. Общее решение уравнения (1.2) имеет вид

$$w = C_1 + C_2\xi F_2 + C_3\xi^2 F_3 + C_4\xi^3 F_4 \tag{1.8}$$

где C_i — постоянные, зависящие от граничных условий,

$$F_2 = {}_1F_2\left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{3};\ \psi\right)$$

$$F_3 = {}_1F_2\left(\frac{2}{3};\ \frac{5}{3},\ \frac{4}{3};\ \psi\right)$$

$$F_4 = {}_2F_3\left(1,\ 1;\ 2,\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3};\ \psi\right)$$

Пусть пластина жестко защемлена по краю $\xi = 1$, а край $\xi = 0$ свободен, что соответствует граничным условиям

$$w''(0) = w'''(0) = w(1) = w'(1) = 0$$

Используя обычную процедуру приравнивания нулю определителя четвертого порядка, составленного из коэффицентов при C_i, получим уравнение устойчивости

$$w_2'(1) = 0 \tag{1.9}$$

Если пластина жестко защемлена по краю $\xi = 1$, а край $\xi = 0$ шарнирно оперт, то

$$w(0) = w''(0) = w(1) = w'(1) = 0$$

а уравнение устойчивости имеет вид

$$w_2(1)\,w_4'(1) - w_2'(1)\,w_4(1) = 0 \tag{1.10}$$

Наконец, если края пластины $\xi = 0$ и $\xi = 1$ жестко защемлены, то

$$w(0) = w'(0) = w(1) = w'(1) = 0$$

Уравнение устойчивости принимает вид

$$w_2(1)\,w_4'(1) - w_3'(1)\,w_4(1) = 0 \tag{1.11}$$

Функции w_2, w_3', w_4' удовлетворяют зависимости

$$\frac{d}{d\xi}\left[\xi^{\beta}{}_pF_q\left(\beta,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_p;\ \beta+1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots,\ \beta_q;\ a\xi^{h}\right)\right] =$$

$$= \beta\xi^{\beta-1}{}_{p-1}F_{q-1}\left(\alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_p;\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots,\ \beta_q;\ a\xi^{h}\right)$$

поэтому уравнения устойчивости (1.9)—(1.11) можно упростить, подставив в них выражения

$$w_2(1) = {}_0F_1\left(\frac{2}{3};\ \psi\right) \tag{1.12}$$

$$w_3'(1) = 2\,{}_0F_1\left(\frac{4}{3};\ \psi\right)$$

$$w_4'(1) = 3\,{}_1F_2\left(1;\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3};\ \psi\right), \qquad \psi = -\frac{2}{9}\,k$$

Используя зависимость (1.12), а также соотношение

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,{}_0F_1\left(\nu+1;\ \frac{z^2}{4}\right)$$

где $J_\nu(z)$ — функция Бесселя, $\Gamma(\nu)$ — гамма-функция, можно показать, что уравнение (1.9) эквивалентно уравнению $J_{-1/3}\left(\frac{4}{3}\right) = 0$, приведенному в [1, 2].

Решение с помощью ЭВМ уравнений (1.9)—(1.11) дало следующие значения критических параметров: $k_1 = 3.9186$, $k_2 = 26.2503$, $k_3 = 37.3143$. Отметим, что при решении уравнения, соответствующего (1.10), методом Бубнова—Галёркина, который, как известно, дает приближенные верхние оценки критических сил, в [2] получено первое приближение $k_1 = 29.03$. Как указано в [10], результаты экспериментальных исследований позволяют принять теоретические значения критических параметров за верхний предел при оценке устойчивости токонесущей пластины.

Построим еще аналитическое решение задачи о колебаниях токонесущей пластины, описываемых дифференциальным уравнением [1, 11]

$$\frac{d^4w}{dx^4} - \frac{\alpha}{D}\frac{d}{dx}\left[\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\frac{dw}{dx}\right] - \lambda^2 w = 0 \tag{1.13}$$

где λ^2 — частотный параметр, $\alpha = 2aJ_0^2/c^2$.

Снова переходя к безразмерным координатам $\xi = x/a$ и умножая все члены уравнения (1.13) на ξ^4, получим

$$\xi^4 w^{IV} - \mu (1 - \xi^2) \xi^2 w'' + 2\mu \xi^3 w' - \lambda^2 \xi^4 w = 0 \qquad (1.14)$$

где $\mu = \alpha/a^2 D$.

Уравнение (1.4) принадлежит классу (1.3), причем $p = 2$, $s = 2$, $q = 3$; $\delta = 2$, $m = 2$; $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4 = 1$; $b_0 = b_1 = b_3 = b_4 = 0$; $b_2 = \mu$; $c_0 = \lambda^2$, $c_1 = -2\mu$, $c_2 = -\mu$, $c_3 = c_4 = 0$.

Стандартная процедура построения решений уравнений (1.3) с отличными от нуля коэффициентами c_i рассмотрена в [5]. Снова введем параметры α_{ij} и β_{ij}, определяемые формулами (1.4), а также параметр

$$\gamma_{in} = (x_i - v_n)\,\delta^{-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots, s) \qquad (1.15)$$

где s — порядок старшей производной, при которой коэффициент c_i в уравнении (1.3) отличен от нуля, а v_n — корни определяющего уравнения

$$f_m(v) = c_0 + \sum_{i=1}^{s} c_i \prod_{j=1}^{i} (v - j + 1) = 0 \qquad (1.16)$$

Если среди корней x_i уравнения (1.5) отсутствуют кратные корни, а также корни, разность которых равна числу, кратному δ, то частные решения уравнения (1.3), в котором хотя бы один из коэффициентов c_i отличен от нуля, представляют собой произведения степенных функций и ${}_{p,s}H_q$-функций:

$$w_i = z^{x_i}\; {}_{p,s}H_q \begin{pmatrix} \alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ip}; & \\ \gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots, \gamma_{is}; & \psi \\ \beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots, \beta_{iq}; & \end{pmatrix} \qquad (1.17)$$

$$ {}_{p,s}H_q(\psi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \frac{\psi^k}{k!} \qquad (1.18)$$

$$\psi = \frac{1}{a_{q+1}} \frac{z^{\delta}}{\delta^{q+1}}$$

Условия сходимости ряда (1.18) рассмотрены в [5]. Коэффициенты D_k в этом ряде при $k \geqslant 3$ можно представить в виде трехдиагональных определителей k-го порядка, которые вычисляются с помощью рекуррентных зависимостей

$$D_k = D_{k-1} g_k + D_{k-m} h_k \qquad (1.19)$$

причем $D_0 = 1$, $D_1 = g_1$

$$g_k = b_p \vartheta^p \frac{\prod\limits_{l=1}^{p} (\alpha_{il} + k - 1)}{\prod\limits_{j=1}^{q+1} (\beta_{ij} + k - 1)}, \qquad h_k = c_l C_{km} \frac{\prod\limits_{n=1}^{l} (\gamma_{ln} + k - m)}{\prod\limits_{j=1}^{q+1} (\beta_{lj} + k - 1)}$$

$C_{km} = a_{q+1}^{m-1} (k - m + 1)_{m-1} \vartheta^{p+(q+1)(m-1)}$, $\quad (\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + n - 1)$ — символ Похгаммера, $l \neq j$.

Обобщенный гипергеометрический ряд ${}_pF_q$ является частным случаем ряда (1.18). Это следует из того, что если в уравнении (1.3) все коэффициенты $c_l = 0$, то в рекуррентных зависимостях (1.19) все $h_k = 0$, а определитель D_k равен тогда произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Определяющее уравнение (1.5) в рассматриваемой задаче имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, уравнение (1.6) — корни $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, уравнение (1.16) — корни

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\lambda^2}{\mu}}\right), \quad \mu \neq 0$$

Хотя разности корней $x_3 - x_1 = x_4 - x_2$ кратны $\delta = 2$, однако логарифмические решения не требуются, так как корни x_1 и x_2 удовлетворяют определяющему уравнению (1.6) и поэтому можно положить $D_1(x_1) = C_1$, $D_1(x_2) = C_2$, где C_l — любые постоянные числа. С учетом этих равенств при $k > 1$ определяются все коэффициенты $D_k(x_1)$ и $D_k(x_2)$ в рядах (1.18), и тогда все частные решения уравнения (1.14) имеют вид (1.17). Аналогичный случай при построении обобщенного степенного ряда рассмотрен в [12].

Таким образом, процедура построения аналитических решений уравнений класса (1.3) в общем случае сводится к решению определяющих уравнений (1.5), (1.6), (1.16), вычислению параметров α_{il}, β_{ij}, γ_{ln} по формулам (1.4), (1.15) и аргумента φ. При численной реализации аналитических решений с помощью ЭВМ для определения коэффициентов D_k ряда (1.18) может быть использован, например, аппарат цепных дробей.

При удовлетворении граничным условиям решений, найденных по описанной процедуре, необходимо определять их производные до n-го порядка. Производные произведения $w_i = z^{x_i} {}_{p,s}H_q(\varphi)$ имеют вид

$$\frac{d^n w_i}{dz^n} = z^{x_i - n} \sum_{k=1}^{\infty} (x_i + k\delta + 1 - n)_n D_k \frac{\varphi^k}{k!}$$

где D_k — те же коэффициенты, что и в ряде (1.18).

Числовые результаты, полученные при реализации предложенных аналитических решений в ${}_pF_q$- и ${}_{p,s}H_q$-функциях, могут быть использованы в качестве эталонных при оценке точности различных приближенных методов.

Институт механики металлополимерных
систем АН БССР
Поступила 5 VI 1980

Ա. Դ. ԼԻԶԱՐԵՎ

ՀՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ՍԱԼԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԵՎ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ցույց է տրվում, որ հոսանքատար սալի-շերտի տատանումների և կայունության տեսության խնդիրները բերվում են նախկինում ուսումնասիրված բազմանդամային գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարումներին։

Այդ հավասարումների համար կառուցվել են հատուկ ֆունկցիաներ պարունակող ճշգրիտ անալիտիկ լուծումներ։

Հոսանքատար սալի կայունության մասին խնդրի համար տարբեր եզրային պայմանների դեպքում բերվում են թվային արդյունքներ։

ON SOLUTION FOR PROBLEMS IN THE VIBRATION AND STABILITY THEORY FOR CURRENT-CARRYING PLATES

A. D. LIZAREV

S u m m a r y

The problems in the vibration and stability theory are shown to be reduced to the previously described class of differential equations with polynomial coefficients. Exact analytical solutions for these equations are constructed in the form of peculiar functions. Numerical results are given for the problem of stability of the current-carrying plate under different boundary conditions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Колебания и устойчивость токонесущей пластинки в поперечном магнитном поле. Докл. АН Арм.ССР, 1973, т. 57, № 5, с. 276—281.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М., Наука, 1977, 272 с.
3. *Лизарев А. Д., Кленов В. И.* О решениях одного класса уравнений устойчивости упругих систем. Тез. докл. V Всесоюзной конф. по проблемам устойчивости в строительной механике. Л., 1977, с. 16—17.

4. *Лизарев А. Д., Кленов В. И.* Об одном обобщении гипергеометрического уравнения. Дифференциальные уравнения, 1976, т. 12, № 12, с. 2170—2174.
5. *Лизарев А. Д., Кленов В. И.* Аналитические решения одного класса уравнений с полиномиальными коэффициентами. Дифференциальные уравнения, 1978, т. 14, № 12, с. 2158—2163.
6. *Лизарев А. Д., Кленов В. И.* Устойчивость стержней переменного сечения при действии собственного веса. Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1978, № 6, с. 37—41.
7. *Лизарев А. Д., Кузьменцов В. П.* Об устойчивости тонкого диска, посаженного на вал. Изв. вузов. Машиностроение, 1979, № 11, с. 17—20.
8. *Лизарев А. Д., Кузьменцов В. П.* Свободные колебания кольцевых пластин переменной толщины. Проблемы прочности, 1980, № 4, с. 96—99.
9. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М., Наука, 1967, 984 с.
10. *Оганесян Р. Н., Косакян Ю. Н., Мартиросян Р. М.* Экспериментальное исследование устойчивости токонесущей пластинки в магнитном поле. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, 27, № 6, с. 68—73.
11. *Амбарцумян С. А., Белубекян М. В.* К задаче колебаний токонесущей пластинки-полосы. В кн.: Тр. X Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластин. Тбилиси, Мецниереба, 1975, с. 3—10.
12. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. 3, ч. 2. М., «Наука», 1974, 672 с.