ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 3, 1981 Механика

А. Г. АВЕТИСЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННОЙ ВЕРШИНЫ СОСТАВНОГО УПРУГОГО КЛИНА

Исследование напряженного состояния вблизи края поверхности контакта составного упругого тела проведено в работах [1—11].

В настоящей работе при помощи местного решения плоской задачи теории упругости [4] исследуется напряженное состояние около края поверхности соединения в композиции, представляющей из себя спай трех плоских клиньев, соединенных по боковым сторонам. Края составного клина заделаны. Материалы боковых клиньев одинаковы и углы раствора равны. На замыкающей части контура составного клина задана внешняя нагрузка, обуславливающая плоскую деформацию или плоское напряженное состояние.

Решение рассматриваемой задачи приводится к отысканию корня трансцендентного уравнения.

Анализ результатов вычислений, проведенных для трех серий значений пяти параметров задачи для плоского напряженного состояния составного клина, показывает, что характер напряженного состояния около рассматриваемого края поверхности соединения существенным образом зависит от упругих деформативных характеристик соединенных материалов и от геометрии соединения.

1. Пусть тело изготовлено из трех спаянных между собой по боковым поверхностям цилиндрических тел. Поперечным сечением тела является составной клин с заделанными краями и углом раствора $2(\alpha+\beta)$. Материалы боковых клиньев одинаковы с одинаковым углом раствора α, а между боковыми клиньями расположен клин из другого материала с углом раствора 2β (фиг. 1).

Фиг. 1.

Вследствие симметричности задачи на линии симметрии выполняются условия симметрии или идентичные им условия гладкого контакта и можно считать, что одновременно рассматривается аналогичная задача для клина, составленного из двух материалов с углом раствора $\alpha+\beta$, сторона $\varphi=\alpha$

(в полярной системе координат r, φ) которого заделана, а на стороне $\varphi = -\beta$ выполняются условия гладкого контакта. Линия контакта материалов принимается за полярную ось ($\varphi = 0$), на замкнутой части контура действует внешняя нагрузка (фиг. 1).

При отсутствии массовых сил компоненты напряжений через функцию напряжений Эри Φ в полярных координатах выражаются формулами

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) \tag{1.1}$$

Функция $\Phi(r, \varphi)$ в областях I и II (фиг. 1) удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\Delta^2\Phi_i = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)^2 \Phi_i = 0 \quad i = 1,\ 2 \tag{1.2}$$

Решение уравнения (1.2) в областях I и II имеет вид [4]

$$\Phi_i = r^{\lambda+1}\,\Theta_i(\lambda, \varphi) \tag{1.3}$$

где

$$\Theta_i = A_{i1}\sin(\lambda+1)\varphi + A_{i2}\cos(\lambda+1)\varphi + A_{i3}\sin(\lambda-1)\varphi + A_{i4}\cos(\lambda-1)\varphi \tag{1.4}$$

A_{ij} ($i = 1,\ 2$; $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$) — постоянные интегрирования; λ — некоторый параметр.

Краевые условия и условия на линии контакта в случае плоского напряженного состояния через функцию Φ имеют следующий вид [12]:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\varphi^2} - \nu_1\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r^2} = 0$$

$$(2+\nu_1)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial r^2\partial\varphi} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r\partial\varphi} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}\right) + \frac{3}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r\partial\varphi} -$$

$$-\frac{2}{r^3}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial\varphi^3} = 0 \qquad \text{при} \quad \varphi = \alpha \tag{1.5}$$

$$(2+\nu_2)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3\Phi_2}{\partial r^2\partial\varphi} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial r\partial\varphi} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi}\right) + \frac{3}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial r\partial\varphi} -$$

$$-\frac{2}{r^3}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^3\Phi_2}{\partial\varphi^3} = 0$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial r\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi} = 0 \qquad \text{при} \quad \varphi = -\beta$$

$$\Phi_1 = \Phi_2, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi}$$

$$\frac{1}{E_1}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\varphi^2} - \nu_1\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{E_2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\varphi^2} - \nu_2\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial r^2}\right) \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{E_1}\left[(2+\nu_1)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial r^2\partial\varphi}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r\partial\varphi}+\frac{2}{r^3}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r\partial\varphi}-\frac{2}{r^3}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial\varphi^3}\right]=$$

$$=\frac{1}{E_2}\left[(2+\nu_2)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3\Phi_2}{\partial r^2\partial\varphi}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial r\partial\varphi}+\frac{2}{r^3}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial r\partial\varphi}-\frac{2}{r^3}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3\Phi_2}{\partial\varphi^3}\right] \qquad \text{при } \varphi=0$$

где E_i и ν_i $(i=1, 2)$ — модули упругости и коэффициенты Пуассона материалов. Для плоской деформации вместо ν_i подставляется $\nu_i/(1-\nu_i)$.

Удовлетворяя (1.5) и (1.6), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования A_{ij} $(i=1, 2;$ $j=1, 2, 3, 4)$

$$\lambda[\nu_1^+\lambda^+ s_1^+ A_{11}+\nu_1^+\lambda^+ c_1^+ A_{12}+(\nu_1^+\lambda^+-4)s_1^- A_{13}+(\nu_1^+\lambda^+-4)c_1^- A_{14}]=0$$

$$\lambda^-\lambda[\nu_1^+\lambda^- c_1^+ A_{11}-\nu_1^+\lambda^- s_1^+ A_{12}+(\nu_1^+\lambda^-+4)c_1^- A_{13}-(\nu_1^+\lambda^-+4)s_1^- A_{14}]=0$$

$$\lambda[\nu_2^+\lambda^- c_2^+ A_{21}+\nu_2^+\lambda^+ s_2^+ A_{22}+(\nu_2^+\lambda^-+4)c_2^- A_{23}+(\nu_2^+\lambda^-+4)s_2^- A_{24}]=0$$

$$\lambda(\lambda^+ c_2^+ A_{21}+\lambda^+ s_2^+ A_{22}+\lambda^- c_2^- A_{23}+\lambda^- s_2^- A_{24})=0$$

$$\lambda\left\{\frac{1}{E_1}[\nu_1^+\lambda^- A_{12}+(\nu_1^+\lambda^--4)A_{14}]-\frac{1}{E_2}[\nu_2^+\lambda^+ A_{22}+(\nu_2^+\lambda^+-4)A_{24}]\right\}=0$$

$$\lambda^-\lambda\left\{\frac{1}{E_1}[\nu_1^+\lambda^+ A_{11}+(\nu_1^+\lambda^-+4)A_{13}]-\frac{1}{E_2}[\nu_2^+\lambda^+ A_{21}+(\nu_2^+\lambda^-+4)A_{23}]\right\}=0$$

$$A_{12}+A_{14}-A_{22}-A_{24}=0 \tag{1.7}$$

$$\lambda^- A_{11}+\lambda^- A_{13}-\lambda^+ A_{21}-\lambda^- A_{23}=0$$

В системе (1.7) для краткости приняты обозначения

$$s_1^+=\sin(\lambda+1)\alpha,\ s_2^+=\sin(\lambda+1)\beta,\ s_1^-=\sin(\lambda-1)\alpha,\ s_2^-=\sin(\lambda-1)\beta$$

$$c_1^+=\cos(\lambda+1)\alpha,\ c_2^+=\cos(\lambda+1)\beta,\ c_1^-=\cos(\lambda-1)\alpha,\ c_2^-=\cos(\lambda-1)\beta$$

$$\lambda^+=\lambda+1,\quad \lambda^-=\lambda-1,\ \nu_i^+=\nu_i+1\quad i=1,\ 2$$

Для существования нетривиального решения однородной системы (1.7) необходимо, чтобы ее определитель равнялся нулю

$$\Delta(\lambda,\ \mu,\ \nu_1,\ \nu_2,\ \alpha,\ \beta)=0$$

который после ряда громоздких преобразований приводится к трансцендентному уравнению относительно λ

$$\Delta=-\frac{64\lambda^6\lambda^{-3}\lambda^{+3}}{E_1}\left\{m_1^2\mu\lambda\sin 2(\alpha+\beta)+\left[m_1^2-m_1^2\mu-\right.\right.$$

$$\left.-m_1^2\frac{m_1-\mu m_2}{2}+2\left(\frac{m_1-m_2\mu}{4}\right)^2(m_1^2-4m_1+8)\right](\lambda\sin 2\beta+\sin 2\lambda\beta)+$$

$$+\frac{m_1-\mu m_2}{2}\mu(m_1^2-4m_1+8)\sin 2\lambda\beta+m_1(m_1-4)\frac{m_1-\mu m_2}{2}\Big(1-$$

$$-\frac{m_1-\mu m_2}{4}\Big)(\lambda\sin 2\beta\cos 2\lambda\alpha+\sin 2\lambda\beta\cos 2\lambda\alpha)-$$

$$-\mu m_1(m_1-4)\frac{m_1-\mu m_2}{2}\sin 2\lambda\beta\cos 2\lambda\alpha+$$

$$+2m_1^2\left(\frac{m_1-\mu m_2}{4}\right)^2(\cos 2\alpha-1)(\lambda^3\sin 2\beta+\lambda^2\sin 2\lambda\beta)+$$

$$+\mu m_1^2\frac{m_1-\mu m_2}{2}(\cos 2\alpha-1)\lambda^2\sin 2\lambda\beta+$$

$$+\mu m_1(m_1-4)\sin 2\lambda(\alpha+\beta)\Big\}=0 \tag{1.8}$$

где

$$\mu=\frac{E_1}{E_2},\quad m_i=\nu_i+1,\quad i=1,\ 2$$

Трехкратный корень $\lambda=1$ уравнения $\Delta=0$ исключен, так как ему соответствует тривиальное решение рассматриваемой краевой задачи для Θ.

В следующих частных случаях уравнение (1.8) примет вид

при $\beta=0$
$$\lambda\sin 2\alpha+\frac{m_1-4}{m_1}\sin 2\lambda\alpha=0 \tag{1.9}$$

при $\alpha=0$
$$\lambda\sin 2\beta+\frac{m_2-4}{m_2}\sin 2\lambda\beta=0 \tag{1.10}$$

при $\mu=1,\quad \nu_1=\nu_2=\nu,\quad m=\nu+1$

$$\lambda\sin 2(\alpha+\beta)+\frac{m-4}{m}\sin 2\lambda(\alpha+\beta)=0 \tag{1.11}$$

а при $\mu=0$

$$\lambda\sin 2\beta+\sin 2\lambda\beta=0 \tag{1.12}$$

$$\lambda^2\sin^2\alpha-\left(\frac{m_1-4}{m_1}\right)^2\sin^2\lambda\alpha=0 \tag{1.13}$$

Уравнения (1.9) — (1.11) соответствуют известным случаям однородного клина с различными граничными условиями [1].

Для каждой комбинации конкретных значений параметров α, β, μ, ν_1 и ν_2 уравнение (1.8) имеет бесконечное множество корней, расположенных в комплексной плоскости λ симметрично относительно осей координат. Корням (1.8), имеющим отрицательные действительные части, соответствуют решения, которые для вершины клина не имеют смысла. Остальные корни (1.8), которым соответствуют нетривиальные решения, пронумеруем по порядку возрастания действительных частей. При равных действительных частях нумерация ведется по возрастанию мнимой части. Принимаем, что все эти корни простые.

Решение плоской задачи теории упругости в рассматриваемой области может быть представлено в виде ряда [13]

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} r^{\lambda_k+1}\,\Theta(\varphi, \lambda_k) \tag{1.14}$$

где

$$\Theta(\varphi, \lambda_k) = \begin{cases} \Theta_1(\varphi, \lambda_k) & \text{при} \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha \\ \Theta_2(\varphi, \lambda_k) & \text{при} \quad -\beta \leqslant \varphi \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.15}$$

Система функций $\Theta(\varphi, \lambda_k)$ в интервале $(-\beta, \alpha)$ является четырехкратно полной в классе действительных функций, непрерывных со своими производными до четвертого порядка в интервалах $(-\beta, 0)$, $(0, \alpha)$ и удовлетворяющих условиям (1.14) и (1.15) [4, 6].

Из (1.1) и (1.14) видно, что если $0 \leqslant \mathrm{Re}\,(\lambda_1) < 1$, то напряжения при приближении к угловой точке линии раздела областей неограниченно возрастают, причем порядок особенности напряжений при этом равен $|\mathrm{Re}\,(\lambda_1) - 1|$. А если $\mathrm{Re}\,\lambda_1 > 1$, то напряжения затухают при $r \to 0$.

Таким образом, исследование характера напряженного состояния в окрестности края поверхности соединения нагруженного составного тела при заданных граничных условиях приводится к отысканию корней с наименьшей положительной действительной частью трансцендентного уравнения (1.8).

Искомый корень уравнения (1.8) вычислен на ЭВМ для следующих значений параметров задачи:

$$\nu_1,\ \nu_2 = 0.2,\ 0.3,\ 0.4$$

$$\mu = 2^{-n};\ n = 0, 1, 2, 4, 5, 6;\ \mu = 2^m;\ m = 1, 2, 4, 6;\ \mu = 1 \pm 2^{-k},$$
$$k = 1, 2, 4, 6;$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} n_1,\ \alpha = \frac{\pi}{24} q,\ q = 1, 2, \ldots, 11 + 2n_1,\ n_1 = -1, 0, 1.$$

В табл. 1, 2, 3 приведены значения наименьших положительных действительных частей корней трансцендентного уравнения (1.8) для некоторых комбинаций указанных значений параметров, характерных для рассматриваемой задачи.

2. Анализ результатов вычислений, проведенных для трех серий значений пяти параметров задачи (α, β, μ, ν_1 и ν_2), позволяет выявить следующие общие закономерности характера напряжений вблизи вершины составного клина:

а) $$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$$

При одинаковых значениях коэффициентов Пуассона ($\nu_1 = \nu_2$, табл. 1) вблизи вершины клина ($r \to 0$) напряжения затухают, если $0.5 < \mu < 64$,

Таблица 1

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$$

	μ	$\alpha = \frac{\pi}{24} q$						
		$q = 1$	3	5	6	7	8	9
$\nu_1 = \nu_2 = 0.2$	0.25	0.9432	0.7567	0.6751	0.6630	0.6736	0.7180	0.8294
	0.50	1.0457	0.9424	0.8854	0.8779	0.8886	0.9240	0.9947
	0.75	1.0866	1.0138	1.0164	1.0105	1.0202	1.0381	1.0681
	1.0	1.1081	1.1081	1.1084	1.1084	1.1084	1.1084	1.1084
	128	1.1778	1.3795	1.6281	1.3866	1.21474	1.0911	1.0048
$\nu_1 = 0.4$ $\nu_2 = 0.2$	0.25	0.9577	0.7738	0.6924	0.6761	0.6817	0.7208	0.8262
	0.5	1.0537	0.9570	0.8983	0.8875	0.8935	0.9232	0.9865
	0.75	1.0920	1.0516	1.0207	1.0144	1.0168	1.0300	1.0545
	1.0	1.1125	1.1113	1.1027	1.0981	1.0941	1.0910	1.0887
	64.0	1.1771	1.3762	1.4629	1.2519	1.1018	0.9959	0.9209
	128	1.177						
$\nu_1 = 0.2$ $\nu_2 = 0.4$	0.25	0.9355	0.7555	0.6755	0.6643	0.6755	0.7209	0.8324
	0.5	1.0283	0.9348	0.8847	0.8799	0.8929	0.9295	0.9991
	0.9375	1.0791	1.0746	1.0834	1.0902	1.0968	1.1021	1.1058
	1.0	1.0829	1.0868	1.1031	1.1113	1.1163	1.1170	1.1139
	64.0	1.1114	1.3030	1.6061	1.3959	1.2269	1.1077	1.0305
	128.0							

при любых значениях угла β, где $\mu = \frac{E_1}{E_2}$, а E_1, ν_1 и α соответствуют (материалу) клину с заделанным краем. В этом случае характер напряжений соответствует характеру напряжений около вершины однородного клина при $\alpha < \pi$.

Если $\mu < 0.5$, то вблизи вершины составного клина затухание напряжений невозможно и напряжения имеют особенности. С увеличением α в интервале $0 < \alpha < \alpha_1$ порядок особенности напряжений увеличивается, а в интервале $\alpha_1 < \alpha < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$ уменьшается. Предельный угол α_1 находится в $6\frac{\pi}{24} < \alpha_1 < 7\frac{\pi}{24}$. Изменения значений коэффициентов Пуассона почти не влияют на интервал малонапряженности, но несколько изменяют порядок особенности напряжений.

При $\beta = 0$ задача приводится к однородому клину с заделанными краями с углом раствора $2\alpha < \pi$, и около вершины этого клина напряжения затухают [6].

Если $\mu > 64$ и $\alpha > 7\frac{\pi}{24}$, вблизи вершины клина затухание напряжений невозможно. Интервал изменения значений параметров задачи, при котором появляется особенность напряжений, увеличивается при увеличении μ.

б) $$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

При одинаковых значениях коэффициентов Пуассона материалов ($\nu_1 = \nu_2 = 0.2$, 0.3, 0.4, табл. 2) около вершины клина независимо от углов α и β напряжения затухают, если $\mu > 1$, имеют конечные значения, если $\mu = 1$, и бесконечно возрастают (имеют особенность), если $\mu < 1$.

С увеличением значения коэффициентов Пуассона порядок особенности напряжений уменьшается.

При различных значениях коэффициентов Пуассона ($\nu_1 \neq \nu_2$) указанные интервалы существенно изменяются.

Если увеличивается ν_1 (соответствующий материалу с заделанным краем), то при малых значениях угла α интервал изменения значений μ, соответствующий зоне малонапряженности, уменьшается ($\mu > 0.75$, $\nu_1 = 0.4$, $\nu_2 = 0.2$).

Если увеличивается ν_2, интервал изменения значений параметров задачи, при котором напряжения около края поверхности контакта имеют особенности, увеличивается при малых значениях α и уменьшается при больших значениях α (табл. 2).

Таблица 2

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

	μ	$\alpha = \frac{\pi}{24} q$								
		$q = 1$	3	5	6	7	8	9	10	11
$\nu_1 = \nu_2 = 0.2$	0.98437	0.999	0.998	0.996	0.9954	0.9951	0.9953	0.9959	0.9970	0.998
	1.0					1.0				
	1.0156	1.0007	1.0023	1.0039	1.0045	1.0048	1.0046	1.0040	1.0030	1.0016
	16.0	1.0470	1.1662	1.3565	1.4213	1.2560	1.1422	1.0626	1.0109	0.9870
	64.0	1.0495	1.1753	1.3763	1.3931	1.2199	1.0961	1.0055	0.9410	0.9047
	128.0	1.0500	1.1768	1.3792	1.3872	1.2130	1.0872	0.9939	0.9252	0.8806
$\nu_1 = 0.4$, $\nu_2 = 0.2$	0.75	0.9918	0.9702	0.9445	0.9336	0.9264	0.9246	0.9303	0.9452	0.9695
	0.9375	1.0030	1.0044	0.9985	0.9944	0.9906	0.9882	0.9879	0.9901	0.9944
	0.98437	1.0051	1.0114	1.0099	1.0072	1.0041	1.0013	0.9994	0.9987	0.9990
	1.0	1.0058	1.0136	1.0135	1.0113	1.0084	1.0055	1.0031	1.0014	1.0005
	4	1.0389	1.1326	1.2445	1.2522	1.1979	1.1370	1.0888	1.0532	1.0260
	16	1.0475	1.1668	1.3355	1.2665	1.1337	1.0365	0.9696	0.9304	0.9256
	64	1.0496	1.1755	1.3675	1.2488	1.0974	0.9873	0.9070	0.8508	0.8240
$\nu_1 = 0.2$, $\nu_2 = 0.4$	0.9375	0.9919	0.9803	0.9787	0.9814	0.9856	0.9900	0.9940	0.9969	0.9988
	0.98437	0.9941	0.9871	0.9906	0.9955	1.0009	1.0053	1.0074	1.0068	1.0040
	1.0	0.9948	0.9893	0.9944	1.0	1.0089	1.0102	1.0016	1.0099	1.0057
	1.0156	0.9954	0.9914	0.9981	1.0014	1.0107	1.015	1.0158	1.0130	1.0073
	1.0625	0.9973	0.9973	1.0088	1.0173	1.0248	1.0288	1.0277	1.0216	1.0118
	1.25	1.0036	1.0173	1.0459	1.0627	1.0749	1.0773	1.0682	1.0506	1.0263

Таким образом, для получения более широкого интервала малонапряженности около вершины составного клина необходимо, чтобы материал, имеющий заделанный край, имел меньший коэффициент Пуассона ($\nu_1 \ll \nu_2$) и больший угол раствора ($\alpha \gg \beta$), или же больший коэффициент Пуассона и меньший угол раствора.

В этом случае также имеется особенность напряжений вблизи вершины составного клина при достаточно больших значениях α и μ (табл. 2).

в) $$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$$

Как показывает анализ результатов вычислений (некоторые характерные для задачи вычисления приведены в табл. 3), имеется узкий интер-

Таблица 3

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$$

	μ	$\alpha=\frac{\pi}{24}q$							
		$q=2$	4	5	8	9	10	11	12
$\nu_1=\nu_2=2.0$	1.25	0.9270	0.9439	0.9533	0.9774	0.9882	0.9730	0.9623	0.9473
	1.5	0.9383	0.9679	0.9851	1.0315	1.0315	1.0195	0.9985	0.9718
	2	0.9529	1.0000	1.0289	1.1149	1.1066	1.0781	1.0411	1.0000
	4	0.9759	1.0525	1.1028	1.1208	1.1648	1.1061	1.0600	1.0167
	64	0.9985	1.1049	1.1740	1.0929	0.9996	0.9304	0.8800	0.8470
	128	0.9992	1.1066	1.1762	1.0854	0.9908	0.9194	0.8659	0.8283
$\nu_1=0.2$ $\nu_2=0.4$	1.25	0.9322	0.9408	0.9493	0.9885	0.9950	0.9916	0.9788	0.9593
	1.5	0.9427	0.9628	0.9785	1.0465	1.0541	1.0425	1.0173	0.9847
	2	0.9564	0.9918	1.0179	1.1473	1.1472	1.1098	1.0634	1.0142
	4	0.9777	1.0382	1.0814	1.1495	1.1061	1.1470	1.0874	1.0343
	16	0.9943	1.0745	1.1283	1.1596	1.0640	1.0931	0.9642	0.9427
	64	0.9985	1.0836	1.1390	1.0972	1.0034	0.9345	0.8850	0.8535
$\nu_1=0.4$ $\nu_2=0.2$	1.25	0.9352	0.9605	0.9721	0.9917	0.9896	0.9827	0.9718	0.9578
	1.5	0.9452	0.9819	1.0007	1.0365	1.0323	1.0196	1.0008	0.9780
	2	0.9582	1.0106	1.0398	1.0937	1.0791	1.0551	1.0271	0.9965
	4	0.9786	1.0575	1.1059	1.1216	1.0711	1.0337	1.0063	0.9841
	16	0.9946	1.0954	1.1602	1.0226	0.9493	0.8905	0.8671	0.8555
	64	0.9986	1.1051	1.1739	0.9827	0.8998	0.8379	0.7930	0.7644

вал изменения значений параметров задачи, при котором напряжения затухают (в отличие от однородного тела, когда имеется концентрация напряжений при всех значениях параметров задачи). Затухание напряжений возможно при $\mu>1.25$ и $\alpha>\frac{\pi}{12}$, то есть когда клин с углом раствора 2β и с заделанными краями около вершины не имеет особенности напряжений.

Порядок особенности напряжений увеличивается с увеличением угла α до некоторого предела $\alpha<\alpha_1$ и уменьшается при $\alpha>\alpha_1$. Предельный угол α_1 находится в интервале $\frac{9}{24}\pi<\alpha_1<\frac{10}{24}\pi$. Изменение коэффициентов Пуассона почти не влияет на интервал малонапряженности и на значение предельного угла α (табл. 3).

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 9 VII 1980

Ա. Գ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՎԱՐՔԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԵՊԻ ԿՈՇՏ ԱՄՐԱԿՑՎԱԾ ԳԱԳԱԹԻ ՇՐՋԱԿԱՅՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Առաձգականության տեսության հարթ խնդրի տեղական լուծումների օգնությամբ հետազոտվում է լարվածային վիճակը բաղադրյալ հարթ սեպի ամրակցված գագաթի շրջակայքում։ Բաղադրյալ սեպը իրենից ներկայացնում է եզրերով իրար միացված երեք սեպերի միացություն։ Եզրային սեպերի նյութերը միևնույնն են և բացվածքի անկյունները հավասար։

Սեպի եզրագծի փակող մասի վրա տրված է արտաքին բեռնվածք։

Դիտարկվող խնդրի լուծումը բերվում է տրանսցենդենտ հավասարման արմատների որոշմանը։

Հաշվումների արդյունքների վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ լարվածային վիճակի բնույթը միացման մակերևույթի դիտարկվող եզրերի շրջակայքում էապես կախված է միացվող նյութերի առաձգա-դեֆորմատիվ բնութագրիչներից և միացման երկրաչափությունից։

AN INVESTIGATION OF STRESS BEHAVIOUR NEAR THE RIGIDLY FIXED TOP OF A COMPOSITE ELASTIC WEDGE

A. G. AVETISIAN

S u m m a r y

By means of a local solution of the plane problem in the theory of elasticity, the stressed state near the rigidly fixed top of an elastic wedge, representing a combination of three wedges, joined by their lateral sides, is investigated. The materials of the lateral wedges are similar and the angles of opening are equal. On the closed part of the wedge contour an external load is given. The solution of the problem is reduced to the finding of a root of transcendental equations. The analysis of the calculation results shows that the pattern of the stressed state near the edge of the junction surface essentially depends on elastic deformative characteristics of the joined materials and on the geometry of joint.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extention. J. of Appl. Mech., 1952, vol. 19.
2. *Аксентян О. К.* Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, с. 173—186.
3. *Болли Л.* Действие касательных и нормальных нагрузок на прямоугольные упругие клинья, выполненные из разных материалов и соединенные по граням. ПМ, 1968, т. 35, серия Е, № 3.

4. *Чобанян К. С.* Способ повышения вибропрочности соединения. Авт. свид. 307869. «Бюллетень открытия, изобретения...», № 21, 1971.

5. *Чобанян К. С., Геворкян С. Х.* Поведение поля напряжений около угловой точки линии раздела в задаче плоской деформации составного упругого тела. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1971, т. 24, № 5.

6. *Аветисян А. Г., Чобанян К. С.* Характер напряжений в заделанной окрестности края поверхности соединения составного тела, нагруженного в условиях плоской задачи теории упругости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, т. 25, № 6.

7. *Аветисян А. Г.* Особенности напряжений в составном теле при контурных условиях гладкого контакта. «Исследования по теории пластин и оболочек». Вып. 12, Казань, изд-то КГУ, 1976.

8. *Knein M.* Zur Theorie der Druckversuchs. Abhand der Aerodynamische Inst. u. d. Techn. Hochschule, Aachen, Germany, 1927, v. 7, pp. 43–62.

9. *Rao A. K.* Stress concentrations and singularities at interface corners. ZAMM. 1971, 51, s. 395–406.

10. *Hein V. L. and Erdogan F.* Stress singularities in a two-material wedge. Int. Journ. of Fracture Mech., 1971, 7, № 3, pp. 317—330.

11. *Theocaris P. S., Gdoutos E. E. and Thireos C. G.* Stress Singularities in a Bi-wedge Under Various Boundary Conditions. Acta mechanica, 1978, vol. 29, № 1—4, pp. 55—73.

12. *Чобанян К. С.* О функции напряжений для плоской задачи теории упругости составных тел. Докл. АН Арм. ССР, 1961, т. 32, № 2.

13. *Ворович И. И.* О поведении основных краевых задач плоской теории упругости в окрестности особых точек границы. Тезисы докладов на III Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике. М., 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIV, № 3, 1981 Механика

М. И. ТЕПЛЫЙ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВНУТРЕННЕМ КОНТАКТЕ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА И ДВУХ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ КОЛЕЦ, СОЕДИНЕННЫХ ПОСРЕДСТВОМ НАТЯГА

§ 1. *Постановка задачи. Вывод уравнений.* Рассмотрим упругое изотропное концентрическое кольцо S_1 единичной толщины с внутренним R_0 и внешним R_1 радиусами (фиг. 1). На части внешнего контура кольца S_1, определяемой углом $2\beta_0$, приложены заданные напряжения: нормальные (радиальные) $q_1(\alpha)$ и касательные $q_2(\alpha)$. В отверстие кольцевой области S_1 вставлено с натягом Δ кольцо (втулка) S_0, причем $\Delta = R_3 - R_0$, где R_3 — радиус внешней поверхности кольца S_0. Предполагаем, что контакт между кольцами S_0 и S_1 осуществляется по всей их поверхности соприкосновения, то есть по дуге $(0, 2\pi)$. С внутренней поверхностью кольцевой области S_0, радиус которой R_4, контактирует упругий цилиндр (диск) S_2 радиуса R_2, в центре которого приложена сосредоточенная сила, причем радиус цилиндра R_2 несколько меньше радиуса внутренней поверхности кольца S_0 $(R_2 < R_4)$. Трением между кольцами S_0, S_1 и диском S_2 пренебрегаем.

Фиг. 1.

Введем систему прямоугольных декартовых координат xOy, к которой отнесены области S_0, S_1 (или S_2), причем так, что начало этой системы совпадает с центрами круговых отверстий в кольцевых областях S_0 и S_1 (с центром цилиндра S_2), а ось Ox — с линией действия силы P_0, приложенной в центре диска. Обозначим через α полярный угол точек границ областей S_0, S_1, S_2, отсчитываемый от оси Ox против хода часовой стрелки.

В соответствии с постановкой задачи на контурах L_0, L_1, L_2, L_3, L_4 рассматриваемых областей S_0, S_1, S_2 имеем следующие граничные условия:

$$\sigma(\alpha) = \begin{cases} 0 \text{ на } L_0, L_2, L_3, L_4 \\ q_1(\alpha) \text{ на } L_1 \text{ при } \pi - \beta_0 \leq \alpha \leq \pi + \beta_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\sigma_r(\alpha) = \begin{cases} -p(\alpha) \text{ на } L_2 \text{ и } L_1 \text{ при } -\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0 \\ -q(\alpha) \text{ на } L_0 \text{ и } L_3 \text{ при } 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi \\ q_1(\alpha) \text{ на } L_1 \text{ при } \pi - \beta_0 \leqslant \alpha \leqslant \pi + \beta_0 \\ 0 \text{ на } L_2 \text{ и } L_4 \text{ при } -\alpha_0 \geqslant \alpha \geqslant \alpha_0 \text{ и на } L_1 \text{ при} \\ \qquad \pi - \beta_0 \geqslant \alpha \geqslant \pi + \beta_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

$$k_2(\alpha) = k_1(\alpha) \text{ на } L_2 \text{ и } L_1 \text{ при } -\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0 \tag{1.3}$$

$$k_0(\alpha) = k_3(\alpha) \text{ на } L_0 \text{ и } L_3 \text{ при } \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi \tag{1.4}$$

Здесь $-\alpha_0$ и α_0 — полярные углы конечных точек области контакта между телами S_2 и S_1; $k_2(\alpha)$ и $k_1(\alpha)$ — кривизны границ тел S_2 и S_1, деформированных при их посадке с натягом; $k_0(\alpha)$ и $k_3(\alpha)$ — кривизны границ тел S_0 и S_3, деформированных при их посадке с зазором и действии внешней нагрузки; $p(\alpha)$ — контактное давление в области контакта между телами S_2 и S_1; $q(\alpha)$ — контактное давление, возникающее на посадочной поверхности между кольцами S_0 и S_3.

Задача состоит в определении контактных давлений $p(\alpha)$ и $q(\alpha)$, величины угла контакта $2\alpha_0$, а также в установлении условия, при котором не нарушается контакт между контактирующими кольцами S_2 и S_1.

Принятая схема нагружения контактирующих тел позволит использовать результаты решения рассматриваемой задачи для расчета напряжений в проушинах и головках шатунов.

В известных работах [1, 2] рассматриваются задачи о вдавливании кругового диска в тонкое упругое кольцевое покрытие, подкрепляющее контур отверстия в неограниченной плоскости или внутренний контур кольцевой области. В этих работах принимается геометрическая гипотеза Кирхгофа—Лява теории тонких оболочек.

Для вывода уравнений поставленной задачи воспользуемся условиями (1.3) и (1.4), выражающими равенство кривизн деформированных границ тел S_0, S_1, S_2 в области контакта.

Кривизна деформированного контура круговой области радиуса R определяется формулой

$$k(\alpha) = \frac{1}{R} - \frac{v_r + v_r^{''}}{R^2} \tag{1.5}$$

где $v_r(\alpha)$ — радиальное смещение точек рассматриваемого контура; $v_r^{''} = \dfrac{d^2 v_r}{d\alpha^2}$.

Сумму радиального смещения v_r и его второй производной $v_r^{''}$ можно выразить на основании [3] следующим образом: для точек контура кругового отверстия в двусвязной области (круговое концентрическое кольцо) или односвязной области (бесконечная плоскость с круговым отверстием)

$$v_r + v_r^{''} = \operatorname{Re} \frac{R}{2G_j} \{ \varkappa_j [\Phi_j^{-}(t_0) - t_0 \Phi_j^{'-}(t_0)] + \Phi_j^{+}(t_0) - t_0 \Phi_j^{'+}(t_0) \} \tag{1.6}$$

для точек контуров конечной односвязной области (круговой диск) или двусвязной области (внешний контур)

$$v_r + v_r'' = \mathrm{Re}\,\frac{R}{2G_j}\left\{\varkappa_j\left[\Phi_j^+(t_0) - t_0\Phi_j^{'+}(t_0)\right] + \Phi_j^-(t_0) - t_0\Phi_j^{'-}(t_0)\right\} \quad (1.7)$$

Здесь $\Phi_j^+(t_0)$ и $\Phi_j^-(t_0)$ — граничные значения функции Колосона—Мусхелишвили $\Phi_j(z)$ при $z \to t_0$, причем $z = re^{i\alpha}$ $(i = \sqrt{-1})$, $t_0 = Re^{i\alpha}$ — точка на контуре радиуса R, $j = 0, 1, 2$ соответственно для областей S_0, S_1 и S_2; $\Phi'^{\pm}(t_0) = \frac{d\Phi^{\pm}(t_0)}{dt_0}$; $\varkappa_j = 3 - 4\nu_j$ для плоской деформации и $\varkappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$ для случая плоского напряженного состояния; $G_j = E_j/2(1 + \nu_j)$, а E_j и ν_j — соответственно модули Юнга и коэффициенты Пуассона для материалов колец $S_0(j = 0)$, $S_1(j = 1)$ и цилиндра $S_2(j = 2)$. В формулах (1.6) и (1.7) под R следует подразумевать радиус того контура, для которого определяется сумма $v_r + v_r''$.

Таким образом, для отыскания суммы радиального смещения и его второй производной необходимо иметь функции Колосова—Мусхелишвили $\Phi_j(z)$ для областей S_0, S_1 и S_2.

На основании известного комплексного представления плоской задачи теории упругости [3] найдены следующие выражения для функций $\Phi_j(z)$:

для области S_0

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{p(t)\,dt}{t - z} + \frac{\varkappa_0 P_0}{2\pi(1 + \varkappa_0)}\,\frac{1}{z} + \frac{\lambda^2}{4\pi}c_0 -$$

$$- \frac{\varkappa_0 P_0(1 - \lambda^2)}{\pi(1 + \varkappa_0)R_3^2}z - \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{R_3^k}\lambda^k(\lambda^2 k - k - 1)c_k -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{q(t_1)\,dt_1}{t_1 - z} + \frac{1}{4\pi}d_0 + a_0 + a_1 z - \sum_{k=2}^{\infty}(a_k z^k + a_{-k}z^{-k}) \quad (1.8)$$

где $z = re^{i\alpha}$ $(R_4 \leqslant r \leqslant R_3)$; $\lambda = R_4/R_3$; $t = R_1 e^{i\theta}$; $t_1 = R_2 e^{i\theta}$ (θ — полярный угол, отсчитываемый от оси Ox против хода часовой стрелки);

$$d_0 = \int\limits_0^{2\pi} q(\alpha)\,d\alpha, \quad c_0 = \int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p(\alpha)\,d\alpha \quad (1.9)$$

$$c_k = \int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha \quad (1.10)$$

$$a_0 = -\frac{\lambda^2}{4\pi(1 - \lambda^2)}(d_0 - \lambda^2 c_0), \quad a_1 = -\frac{\lambda^3 A_{-1}}{R_3(1 - \lambda^4)}$$

$$a_k = \frac{1}{R_3^k D_k}\lambda^{k+2}\left[(1 - \lambda^{-2k+2})A_{-k} - (k+1)(1 - \lambda^2)\lambda^{-2k}A_k\right] \quad (k = \pm 2, \pm 3, \cdots)$$

$$A_{-1} = \frac{\lambda}{2\pi} \left| \lambda (\lambda^2 - 2) c_1 + d_1 + \frac{2 \varkappa_0 P_0 (1 - \lambda^2)}{(1 + \varkappa_0) R_0} \right|$$

$$A_k = - \frac{\lambda^k}{2\pi} \left[\lambda^k [(k - 1)(\lambda^2 k - k - 1)(1 - \lambda^{-2})] c_k + (k - k\lambda^{-2} - 1) d_k \right]$$

$$A_{-k} = \frac{\lambda^k}{2\pi} [\lambda^k (\lambda^2 k - k - 1) c_k + d_k]$$

$$D_k = \lambda^{-2k-2} (1 - \lambda^{2k})^2 - k^2 (1 - \lambda^2)^2$$

$$c_1 = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p(\alpha) \cos \alpha \, d\alpha, \quad d_1 = \int_0^{2\pi} q(\alpha) \cos \alpha \, d\alpha \tag{1.11}$$

$$d_k = \int_0^{2\pi} q(\alpha) \cos k\alpha \, d\alpha \tag{1.12}$$

для области S_1

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{q(t)\, dt}{t - z} + \frac{\varkappa_1 P_0}{2\pi (1 + \varkappa_1) z} + b_0 + b_1 z + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k + \sum_{k=2}^{\infty} b_{-k} z^{-k} \tag{1.13}$$

где $z = re^{i\alpha}$ $(R_0 \leqslant r \leqslant R_1)$; $t = R_0 e^{i\theta}$

$$b_k = \frac{1}{D_k^{*} R_1^k} [(1 + k)(1 - \rho^2) A_k^{*} - (1 - \rho^{-2k+2}) A_{-k}^{*}] \quad (k = \pm 2, \pm 3, \cdots)$$

$$D_k^{*} = \rho^{-2k-2} (1 - \rho^{2k})^2 - k^2 (1 - \rho^2)^2, \qquad \rho = \frac{R_0}{R_1}$$

$$A_k^{*} = \frac{1}{2\pi} \rho^k d_k + B_k, \quad A_{-k}^{*} = - \frac{1}{2\pi} \rho^k (\rho^2 k - k - 1) d_k + B_{-k}$$

$$b_0 = \frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left(B_0 + \frac{\rho^2 d_0}{2\pi} \right), \quad B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi - \beta_0}^{\pi + \beta_0} q_1(\alpha)\, d\alpha \tag{1.14}$$

$$B_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi - \beta_0}^{\pi + \beta_0} (q_1(\alpha) \cos k\alpha - q_2(\alpha) \sin k\alpha)\, d\alpha \tag{1.15}$$

$$B_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi - \beta_0}^{\pi + \beta_0} (q_1(\alpha) \cos k\alpha + q_2(\alpha) \sin k\alpha)\, d\alpha$$

$$b_1 = \frac{A_{-1}^{*}}{R_1 (1 - \rho^4)}, \quad A_{-1}^{*} = - \frac{1}{2\pi} \rho (\rho^2 - 2) d_1 - \frac{\varkappa_1 \rho d_1 (1 - \rho^2)}{\pi (1 + \varkappa_1)} + B_{-1}$$

$$B_{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi - \beta_0}^{\pi + \beta_0} (q_1(\alpha) \cos \alpha + q_2(\alpha) \sin \alpha)\, d\alpha \tag{1.16}$$

для области S_2

$$\Phi_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{p(t)\,dt}{t-z} + \frac{P_0 z}{\pi R_2^2(1+\varkappa_2)} -$$

$$-\frac{P_0}{2\pi(1+\varkappa_2)}\frac{1}{z} + \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{p(t)}{t}\,dt \tag{1.17}$$

где

$$z = re^{i\theta} \quad (0 \leqslant r \leqslant R_2); \quad t = R_2 e^{i\alpha}$$

На основании граничных условий (1.1)—(1.4) и выражений (1.6)—(1.17) приходим к следующей системе интегральных уравнений для определения контактных давлений $p(\alpha)$ и $q(\alpha)$:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\alpha}{2}\,q'(\vartheta)\,d\vartheta = \gamma_1 q(\alpha) + M_0 - \gamma_4\frac{2P_0}{\pi R_0}\cos\alpha +$$

$$+2\sum_{k=2}^{\infty}M_k\cos k\alpha + \frac{4\gamma_5\Delta G_0}{R_0}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi \tag{1.18}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\vartheta}{2}\,p'(\vartheta)\,d\vartheta + 2\gamma_6 p(\alpha) + \frac{\gamma_7}{\pi(1-\lambda^2)}(d_0 - C_0) -$$

$$-\frac{4\gamma_8 P_0}{\pi R_4}\cos\alpha + 2\gamma_7\sum_{k=2}^{\infty}L_k\cos k\alpha = \frac{8\varepsilon\gamma_9 G_0}{R_4}, \quad -\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0 \tag{1.19}$$

Здесь $\varepsilon = R_4 - R_2$ — радиальный зазор:

$$\gamma_1 = \frac{1}{h_1}[(\varkappa_1 - 1)\,G_0 - (\varkappa_0 - 1)\,G_1], \quad \gamma_2 = \frac{1}{h_1}(\varkappa_0 + 1)\,G_1$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{h_1}(\varkappa_1 + 1)\,G_0, \quad \gamma_4 = \frac{1}{h_1}(\varkappa_1 G_0 + G_1), \quad \gamma_5 = \frac{1}{h_1}G_1$$

$$h_1 = (1+\varkappa_1)\,G_0 + (1+\varkappa_0)\,G_1, \quad \gamma_6 = \frac{1}{h_2}[(\varkappa_0 - 1)\,G_2 - (\varkappa_2 - 1)\,G_0]$$

$$\gamma_7 = \frac{1}{h_2}(\varkappa_0 + 1)\,G_2, \quad \gamma_8 = \frac{1}{h_2}(\varkappa_0 G_2 + G_0), \quad \gamma_9 = \frac{1}{h_2}G_2$$

$$h_2 = (1+\varkappa_0)\,G_2 + (1+\varkappa_2)\,G_0$$

$$P_0 = R_2\int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0}p(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha \tag{1.20}$$

$$M_0 = \frac{\gamma_2\lambda^2}{2\pi(1-\lambda^2)}\,c_0 - \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\gamma_3}{1-\rho^2} + \frac{\gamma_2\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)d_0 - \frac{\gamma_3 B_0}{1-\rho^2}$$

$$M_k = \left\{ \gamma_1 \frac{N_k}{2\pi} - \frac{\gamma_2}{2\pi}[(k-1)\,Y_k - (k+1)\,E_k] \right\} d_k +$$

$$+ \gamma_2 \left\{ \frac{1}{2\pi} k\lambda^k [\lambda^2 (k-1) - k - 1] - \frac{k-1}{2\pi} X_k + \frac{k+1}{2\pi} \Gamma_k \right\} c_k + \gamma_3 S_k$$

$$N_k = \frac{1}{D_k^*}[(k^2-1)(1-\rho^2)\rho^{2k} + (\rho^{2k} - \rho^2)(k-1)(\rho^2 k - k - 1) -$$

$$- (k^2-1)(1-\rho^2)(\rho^2 k - k - 1) + (k+1)(1-\rho^{2k+2})]$$

$$S_k = \frac{1}{D_k^*} \{[(k^2-1)\,\rho^k (1-\rho^2) + (k+1)\,\rho^{-k} (1-\rho^{2k+2})]\, B_k -$$

$$- [(k-1)\,\rho^k (1-\rho^{-2k+2}) + \rho^{-k}(1-k^2)(1-\rho^2)]\, B_{-k}\}$$

$$L_k = \left\{ \frac{1}{\pi}[(k-1)\,\lambda^k X_k - (k+1)\,\lambda^{-k} \Gamma_k] - \frac{1}{\pi}(k-1)\,\lambda^{2k} (\lambda^2 k -\right.$$

$$\left. - k - 1) \right\} c_k + \left\{ \frac{1}{\pi}[(k-1)\,\lambda^k Y_k - (k+1)\,\lambda^{-k} E_k] -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi}(k-1)\,\lambda^k \right\} d_k$$

$$X_k = \frac{\lambda^k}{D_k} \left\{ (\lambda^2 k - k - 1)[\lambda^{2k+2} - \lambda^4 - (k^2-1)(1-\lambda^2)^2] + (k+1)(1-\lambda^2) \right\}$$

$$Y_k = \frac{\lambda^k}{D_k}[\lambda^{2k} - \lambda^2 + (k+1)(1-\lambda^2)(k - k\lambda^{-2} - 1)]$$

$$\Gamma_k = \frac{\lambda^k}{D_k}[(k-1)(1-\lambda^2)(\lambda^2 k - k - 1) + \lambda^{2k+2} - 1]$$

$$E_k = -\frac{\lambda^k}{D_k}[\lambda^{2k} + k - k\lambda^{-2} - 1]$$

Из (1.19) вытекает уравнение, полученное в [4] для случая внутреннего контакта диска и кольца при заданных напряжениях $q_1(\alpha)$ и $q_2(\alpha)$.

§ 2. *Решение уравнения (1.18).* Применяя к этому уравнению формулы обращения Гильберта [5] и вычисляя при этом необходимые интегралы, получим

$$q''(\alpha) + \gamma_1^2 q(\alpha) = -\gamma_1 M_0 - \gamma_4 (1 - \gamma_1) \frac{2 P_0}{\pi R_0} \cos\alpha -$$

$$- \frac{4\Delta \gamma_1 \gamma_3 G_3}{R_0} + 2 \sum_{k=2}^{\infty} (k - \gamma_1)\, M_k \cos k\alpha \qquad (2.1)$$

Следовательно, задача об определении контактного давления $q(\alpha)$ на посадочной поверхности колец S_1 и S_2 свелась к дифференциальному уравнению, имеющему точное решение

Решая известными методами уравнение (2.1), находим

$$q(\alpha) = -\frac{M_0}{\gamma_1} - \frac{4\gamma_5 \Delta G_0}{\gamma_1 R_0} + \frac{2\gamma_4 P_0}{\pi(1+\gamma_1)R_0}\cos\alpha - 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{M_k}{\gamma_1+k}\cos k\alpha \qquad (2.2)$$

Предположим, что при $\alpha = \pi$ контактное давление $q(\alpha)$ обращается в нуль, то есть $q(\pi) = 0$. Для этого случая найдем натяг $\Delta = \Delta_{min}$. Из формулы (2.2) при $\alpha = \pi$ получим

$$\Delta_{min} = -\frac{M_0 R_0}{4\gamma_5 G_0} - \frac{\gamma_1 P_0}{4\pi\gamma_5 G_0} - \frac{\gamma_1 R_0}{2\gamma_5 G_0}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{M_k}{\gamma_1+k}\cos k\pi \qquad (2.3)$$

С учетом (2.3) формула (2.2) получает вид

$$q_{min}(\alpha) = \frac{P_0}{\pi R_0}(1+\cos\alpha) - 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{M_k}{\gamma_1+k}(\cos k\alpha - \cos k\pi) \qquad (2.4)$$

где $q_{min}(\alpha)$ — контактное давление при $\Delta = \Delta_{min}$.

На основании выражений (1.9), (1.11), (1.12) и (2.2) находим

$$d_0 = -\frac{\gamma_2\lambda^2(1-\rho^2)c_0 + 2\pi\gamma_3(1-\lambda^2)B_0}{(1-\lambda^2)[\gamma_1(1-\rho^2)-\gamma_3]-\gamma_2\lambda^2(1-\rho^2)} -$$

$$-\frac{8\pi\Delta G_0\gamma_5(1-\rho^2)(1-\lambda^2)}{R_0\{(1-\lambda^2)[\gamma_1(1-\rho^2)-\gamma_3]-\gamma_2\lambda^2(1-\rho^2)\}}, \quad d_1 = \lambda\frac{P_0}{R_4} \qquad (2.5)$$

$$d_k = -\frac{2\pi\gamma_3 S_k + \gamma_2\{k\lambda^k[\lambda^2(k-1)-k-1] - (k-1)X_k + (k+1)\Gamma_k\}c_k}{\gamma_1 + k + \gamma_3 N_k - \gamma_2[(k-1)Y_k - (k+1)E_k]} \qquad (2.6)$$

§ 3. *Приближенное решение уравнения (1.19).* В уравнении (1.19) произведем замену переменных, полагая $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = a\cos\theta$, $\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = a\cos\vartheta$ $\left(a = \operatorname{tg}\frac{\alpha_0}{2}\right)$. В таком случае это уравнение с учетом (2.5) и (2.6) запишется так:

$$\frac{1+a^2\cos^2\theta}{\pi a}\int_0^{\pi}\frac{p'(\vartheta_1)\,d\vartheta_1}{\cos\vartheta_1-\cos\theta} + 2\gamma_6 p(\theta) - \frac{\gamma_7}{\pi(1-\lambda^2)}c_0 +$$

$$+\frac{P_0}{R_4}\left[\frac{4\gamma_4\gamma_7\lambda}{\pi(1+\gamma_1)(1-\lambda^2)} - \frac{4\gamma_6}{\pi}\,\frac{1-a^2\cos^2\theta}{1+a^2\cos^2\theta}\right] +$$

$$+2\gamma_1\sum_{k=2}^{\infty}\left\{\left[L_1^*\cos(2k\operatorname{arc\,tg}(a\cos\theta)) + \frac{2M_1^*\cos k\pi}{(1-\lambda^2)(\gamma_1+k)}\right]c_k +\right.$$

$$\left.+\frac{P_0}{R_4}\left[L_2^*\cos(2k\operatorname{arc\,tg}(a\cos\theta)) + \frac{2M_2^*\cos k\pi}{(1-\lambda^2)(\gamma_1+k)}\right]\right\} =$$

$$= \frac{4\gamma_6 a E_0}{(1+\nu_0)R_4}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \qquad (3.1)$$

Здесь

$$M_1^* = \frac{\gamma_2}{2\pi} \frac{(\gamma_1 + k)\{k\lambda^k[\lambda^2(k-1) - k - 1] - (k-1)X_k + (k+1)\Gamma_k\}}{\gamma_1 + k + \gamma_3 N_k - \gamma_2[(k-1)Y_k - (k+1)E_k]}$$

$$M_2^* = \frac{\gamma_3 S_k^*(\gamma_1 + k)}{\gamma_1 + k + \gamma_3 N_k - \gamma_2[(k-1)Y_k - (k+1)E_k]}$$

$$L_1^* = \frac{1}{\pi}\{(k-1)\lambda^k X_k - (k+1)\lambda^{-k}\Gamma_k - (k-1)\lambda^{2k}(\lambda^2 k - k - 1) -$$

$$- \gamma_2 \frac{k\lambda^k[\lambda^2(k-1) - k - 1] - (k-1)X_k + (k+1)\Gamma_k}{\gamma_1 + k + \gamma_3 N_k - \gamma_2[(k-1)Y_k - (k+1)E_k]}[(k-1)\lambda^k Y_k -$$

$$- (k+1)\lambda^{-k}E_k - (k-1)\lambda^k]\}$$

$$L_2^* = - \frac{2\gamma_3 S_k^*[(k-1)\lambda^k Y_k - (k+1)\lambda^{-k}E_k - (k-1)\lambda^k]}{\gamma_1 + k + \gamma_3 N_k - \gamma_2[(k-1)Y_k - (k+1)E_k]}$$

$$S_k^* = S_k \frac{R_1}{P_0}.$$

Искомое контактное давление $p(\theta)$ представим в виде

$$p(\theta) = \frac{\pi E_0}{R_1} \sum_{m=1}^{2N-1} b_m \sin m\theta, \quad m = 1, 3, \cdots, 2N-1 \tag{3.2}$$

Удовлетворяя уравнению (3.1) в конечном числе N равноотстоящих точек θ_μ, приходим к следующей системе уравнений для определения коэффициентов b_m:

$$\sum_{m=1}^{2N-1} b_m A_{m\mu} = \frac{4\gamma_0}{1+\nu_0} \quad (\mu = 1, 2, \cdots, N) \tag{3.3}$$

где

$$A_{m\mu} = \frac{m(1 + a^2\cos^2\theta_\mu)\sin m\theta_\mu}{a\sin\theta_\mu} + 2\gamma_6 \sin m\theta_\mu -$$

$$- \frac{2\gamma_1}{1-\lambda^2}\sin\frac{m\pi}{2}\,\mathrm{tg}^m\frac{\alpha_0}{4} + 8m\cos\frac{\alpha_0}{2}\sin\frac{m\pi}{2}\,\mathrm{tg}^m\frac{\alpha_0}{4}\Big(\frac{\lambda\gamma_7}{2(1-\lambda^2)} -$$

$$- \gamma_8\frac{1 - a^2\cos^2\theta_\mu}{1 + a^2\cos^2\theta_\mu}\Big) + 4\gamma_7\sum_{k=2}^{\infty}\Big\{2a\,J_{km}\Big[L_1^*\cos(2k\,\mathrm{arc\,tg}(a\cos\theta_\mu)) +$$

$$+ \frac{2M_1^*\cos k\pi}{(1-\lambda^2)(\gamma_1 + k)}\Big] + \pi\cos\frac{\alpha_0}{2}\,m\sin\frac{m\pi}{2}\,\mathrm{tg}^m\frac{\alpha_0}{4}\Big[\frac{2M_2^*\cos k\pi}{(1-\lambda^2)(\gamma_1+k)} +$$

$$+ L_2^*\cos(2k\,\mathrm{arc\,tg}(a\cos\theta_\mu))\Big]\Big\}, \quad \theta_\mu = \frac{\mu\pi}{2N} \tag{3.4}$$

Связь между постоянными c_0, P_0 и c_1 и неизвестными коэффициентами b_m имеет вид

$$c_0 = 2\pi\frac{E_0}{R_1}H_2, \quad H_2 = \sum_{m=1}^{2N-1} b_m \sin\frac{m\pi}{2}\,\mathrm{tg}^m\frac{\alpha_0}{4} \tag{3.5}$$

$$P_0 = 2\pi\varepsilon E_0 \cos\frac{\alpha_0}{2} H_1, \quad H = \sum_{m=1}^{2N-1} b_m\, m \sin\frac{m\pi}{2} \operatorname{tg}^m \frac{\alpha_0}{4} \tag{3.6}$$

$$c_k = 4a\frac{\varepsilon E_0}{R_1}\sum_{m=1}^{2N-1} b_m J_{km} \tag{3.7}$$

где

$$J_{km} = \int_0^1 \frac{\sin\,(m \arccos x)\cos(2k \operatorname{arctg} ax)}{1+a^2x^2}\,dx$$

Для получения выражений (3.4)—(3.7) необходимо ряд (3.3) подставить в уравнение (3.1) и равенства (1.9), (1.10), (1.20) и вычислить необходимые интегралы.

Решив систему уравнений (3.3) для заданных угла контакта α_0 и упругих постоянных контактирующих тел, найдем коэффициенты b_m, подставив которые в (3.2), получим функцию распределения контактного давления $p(\alpha)$. Затем с помощью формул (2.3) и (2.4) можно определить контактное давление $q(\alpha)$, действующее на посадочной поверхности между кольцами S_1 и S_2, и величину минимального натяга Δ_{min}, при котором $q(\pi)=0$. Эти формулы с учетом (2.5), (2.6) и (3.5)—(3.7) принимают вид

$$q_{min}(\alpha) = \frac{\varepsilon E_0}{R_1}\Big\{2\gamma(1+\cos\alpha)\cos\frac{\alpha_0}{2}H_1 -$$

$$-4\sum_{k=2}^{\infty}\Big[2a M_1^*\sum_{m=1}^{2N-1} b_m J_{km} + \pi M_2^* \cos\frac{\alpha_0}{2} H_1\Big]\frac{\cos k\alpha - \cos k\pi}{\gamma_1+k}\Big\} \tag{3.8}$$

$$\Delta_{min} = \varepsilon(1+\nu_0)\Big\{-\frac{\gamma_2\lambda^2}{2\gamma_5(1-\lambda^2)}H_2 + \frac{\pi\gamma_3 B_0^*}{\gamma_5(1-\rho^2)}\cos\frac{\alpha_0}{2}H_2 -$$

$$-\frac{(1-\lambda^2)[\gamma_1(1-\rho^2)-\gamma_3]-\gamma_2\lambda^2(1-\rho^2)}{\gamma_5(1-\rho^2)(1-\lambda^2)}\Big[H_1\cos\frac{\alpha_0}{2} +$$

$$+\frac{2}{\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\Big(2aM_1^*\sum_{m=1}^{2N-1} b_m J_{km} + \pi M_2^* H_1\cos\frac{\alpha_0}{2}\Big)\frac{\cos k\pi}{\gamma_1+k}\Big]\Big\} \tag{3.9}$$

где

$$B_0^* = B_0\frac{R_1}{P_0}.$$

§ 4. *Числовой пример.* Предположим, что напряжения $q_1(\alpha)$ и $q_2(\alpha)$ представлены выражениями

$$\begin{aligned} q_1(\alpha) &= A(1+\cos n\alpha) \\ q_2(\alpha) &= -A\sin n\alpha, \quad n = 2, 3, \cdots \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $\pi-\beta_0 \leqslant \alpha \leqslant \pi+\beta_0$; $2\beta_0$ — угол, определяющий протяженность участка внешней поверхности кольца S_1, к которой приложены напряжения q_1 и q_2; $q_1(\beta_0) = q_2(\beta_0) = 0$ (последнее условие удовлетворяется, когда $n = 2$ соответствует $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$, $n = 3$, — $\beta_0 = \frac{\pi}{3}$ и т. д.).

Постоянную A найдем из условия равновесия внешних сил, действующих на контактирующие тела. Это условие имеет вид

$$P_0 = R_1 \int_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0} [q_1(\alpha) \cos \alpha - q_2(\alpha) \sin \alpha] \, d\alpha \tag{4.2}$$

Подставив в равенство (4.2) формулы (4.1), найдем

$$A = \frac{(n-1) \lambda \varphi P_0}{2[(n-1) \sin \beta_0 - \sin (n-1) \beta_0] R_1}$$

Кроме того, на основании выражений (1.14), (1.15) находим

$$B_0 = \frac{A \beta_0}{\pi}$$

$$B_k = \frac{A}{\pi} \left[\frac{(-1)^k}{k} \sin k\beta_0 + \frac{1}{n-k} \cos (n-k) \pi \sin (n-k) \beta_0 \right]$$

$$B_{-k} = \frac{A}{\pi} \left[\frac{(-1)^k}{k} \sin k\beta_0 + \frac{1}{n+k} \cos (n+k) \pi \sin (n+k) \beta_0 \right]$$

Таблица 1

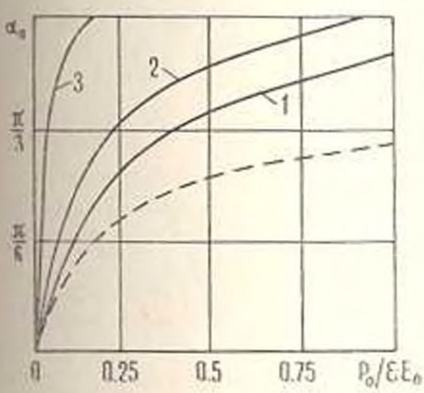
Параметр $\varphi = \frac{R_4}{R_3}$		Угол контакта β_0		
		$\frac{2}{9}\pi$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4}{9}\pi$
0.5	b_1	0.1725	0.2712	0.5455
	b_3	0.0062	0.0387	0.1058
	b_5	0.0017	−0.0091	−0.0397
	b_7	0.0005	0.0008	0.0023
	b_9	0.0001	0.0005	0.0013
	b_{11}	0	0.0001	0.0002
	P_0/E_0	0.1798	0.3983	0.9772
	Δ_{min}/ε	0.0347	0.1386	0.5166
	$p(0) R_1/E_0$	0.1744	0.2808	0.5775
	$q(0) R_1/E_0$	0.1417	0.2099	0.4254
0.6	b_1	0.1007	0.1548	0.3171
	b_3	0.0138	0.0493	0.1135
	b_5	0.0017	0.0068	−0.0166
	b_7	0.0003	0	−0.0021
	b_9	0	0.0005	0.0018
	b_{11}	0.0001	0.0001	0.0002
	P_0/E_0	0.1050	0.2279	0.5673
	Δ_{min}/ε	0.0408	0.1293	0.4209
	$p(0) R_1/E_0$	0.1025	0.1621	0.3354
	$q(0) R_1/E_0$	0.0766	0.1001	0.2212

Числовые расчеты проведены для случая, когда контактирующие тела находятся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, т.

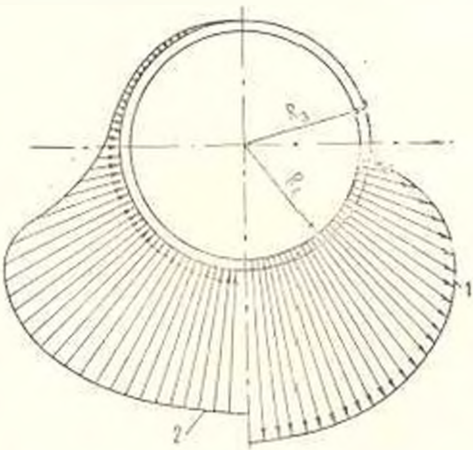
есть когда $\varkappa_j = (3-\nu_j)/(1+\nu_j)$. Кроме того, принято $E_1 = E_2 = 2E_0$; $\nu_1 = \nu_2 = \nu_0 = 0.3$; $\beta_0 = \dfrac{\pi}{4}$; $n = 4$; $\lambda = 0.9$. Параметр ρ кольца S_1 принимал значения 0.5; 0.6; 0.8.

При указанных значениях параметров вычисления проводились на ЭВМ «ЕС—1020» при $N = 6$.

Значения коэффициентов b_m $(m = 1, 3, \cdots, 11)$, величин $P_0/\varepsilon E_0$, $\Delta_{\alpha|\alpha}$ и контактных давлений $p(\alpha)$ и $q(\alpha)$ при $\alpha = 0$ приведены в табл. 1, а на фиг. 2 показана зависимость между углом контакта α_0 и величиной $P_0/\varepsilon E_0$, причем кривая 1 соответствует $\rho = 0.5$, кривая $2 - \rho = 0.6$, кривая $3 - \rho = 0.8$. Штриховая кривая на этой фигуре построена для случая, когда $R_0 \to \infty$ и $R_1 \to \infty$ (задача о давлении диска S_2 на границу кругового отверстия в бесконечной плоскости).



Фиг. 2.



Фиг. 3.

На фиг. 3 показано распределение контактных давлений $p(\alpha)$ и $q(\alpha)$ для случая, когда $\alpha_0 = \dfrac{4}{9}\pi$, $\rho = 0.5$, $\lambda = 0.9$ и $\beta_0 = \dfrac{\pi}{4}$, причем кривая 1 выражает изменение контактного давления $p(\alpha)$ на внутренней поверхности кольца S_0, а кривая 2 — контактного давления $q(\alpha)$ на внешней его поверхности.

Дрогобычский педагогический
институт им. Ив. Франко

Поступила 15 IV 1980

Ր. Ի. ՏՅՈՊԻ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԳԼԱՆԻ ԵՎ ՁԳՎԱԾՔԻ ՄԻՋՈՑՈՎ ՄԻԱՑՎԱԾ ԵՐԿՈՒ ՀԱՄԱԿԵՆՏՐՈՆ ՕՂԱԿՆԵՐԻ ՆԵՐՔԻՆ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ՄԱՍԻՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Լուծված է առաձգական գլանի և երկու համակենտրոն օղակների կոնտակտի ժամանակ առաջացած լարումների բաշխման վերաբերյալ խնդիրը։

Օղակները իրար հետ միացված են ձգվածքի միջոցով, իսկ գլանը դրված է ներքին օղակի անցքի մեջ բացվածքով։

Խնդիրը բերվել է երկու ինտեգրալ հավասարումներից կազմված սիս-տեմի լուծմանը։ Տրված է խնդրի թվային լուծումը։

SOLUTION FOR THE PROBLEM IN INTERNAL CONTRACT OF AN ELASTIC CYLINDER WITH TWO CONCENTRIC RINGS CONNECTED BY TENSION

M. I. TEPLY

S u m m a r y

The problem in distribution of stresses resulting at the contact of an elastic circular cylinder with two concentric rings has been solved. The rings are connected by tighness and the cylinder is inserted into a circular hole in the internal ring with a gap. The problem is reduced to the solution of a system of two integral equations. The numeral olution for the problem is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мхитарян С. М., Торосян Ф. С.* О контактном взаимодействии кругового диска с бесконечной пластины с круговым отверстием, подкрепленным тонким кольцевым покрытием. Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1978, т. 31, № 5.
2. *Торосян Ф. С.* О внутреннем контактном взаимодействии кругового диска и кругового кольца, подкрепленного на обводе отверстия тонким кольцевым покрытием. Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1979, т. 32, № 1.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
4. *Теплый М. И.* Задача о внутреннем контакте цилиндра и кольца при наличии зазора или натяга. Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории упругости. Ереван, АН Армянской ССР, 1979.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIV, № 3, 1981 Механика

А. Г. БАГДОЕВ, А. А. ВАНЦЯН

ПРОНИКАНИЕ ТОНКОГО ТЕЛА В МЕТАЛЛЫ И ГРУНТЫ

Проникание тел в пластические и сыпучие среды рассматривалось в [1—5]. Проникание тонких тел в сжимаемую жидкость исследовалось в [6—8]. Проникание тонких тел в первоначально упругие среды с образованием фронта пластических разрушений или фронта меридиональных трещин [9] рассмотрено в [10—12]. В настоящей статье рассматривается проникание тонких тел в металлы и грунты. Показано, что решение в основном порядке, использованное в работах [10—12], для идеально пластической среды позади фронта разрушения верно лишь при пренебрежении диссипации энергии на фронте. Получено более точное решение с помощью уравнения ударной адиабаты [9]. Найдены значения максимальной глубины проникания для тела, состоящего из цилиндра, переходящего в конус (криволинейный).

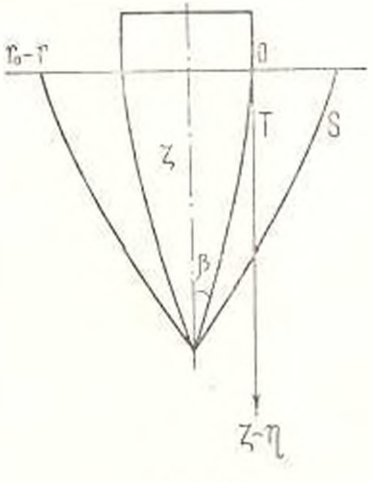
Проведены эксперименты по прониканию в различные металлы и композиты. Показано хорошее соответствие с результатами расчетов по полученным формулам. Дается обобщение результатов на вязкопластические среды, уравнения состояния которых описаны в [13—16]. С помощью полученных решений основного порядка, используя соотношения работ [10, 11], можно получить решения в порядке β^2, где β — полуугол раствора тела. Полученные решения верны всюду, кроме малой окрестности свободной поверхности среды и вершины тела.

§ 1. *Решение задачи для идеально-пластического течения вблизи тела*

В настоящей статье дается решение задачи проникания тонкого твердого тела вращения в первоначально упругую среду.

Решение чисто упругой задачи [10, 11] показывает, что вблизи тела следует учитывать неупругое поведение материала, тогда для тонких тел можно ввести поверхность S, отделяющую область разрушения от области упругого поведения материала (фиг. 1) вблизи тела.

Метод, развитый в настоящей статье, состоит в изучении фронта разрушения, который исходит из вершины тела, упругой области вне S и области разрушения позади S.



Фиг. 1.

Можно ввести ось X по нормали к свободной поверхности среды, занимающей полупространство, а через r обозначить радиальную координату. Уравнение поверхности тела можно взять в виде $r = r_k(x, t)$, где r_k мало, t есть время с начала проникания, причем при $t = 0$ $r_k = 0$. Уравнение поверхности разрушения берется в виде $r = r_k\xi_0$, причем предположено $\xi_0 \gg 1$, но $\xi_0 r_k$ мало, тогда можно для упругого решения вблизи S взять асимптотику для малых r, а для решения позади S пользоваться формулами, соответствующими переходу к большим значениям r/r_k, что соответствует линейной асимптотике.

Можно сделать различные предположения о характере разрушения среды позади S. Если разрушение происходит вдоль площадок скольжения, то следует пользоваться уравнением пластического течения. При разрушении среды растягивающими кольцевыми напряжениями можно считать, что среда разрушалась вдоль меридиональных трещин и использовать уравнение [12], причем решение задачи о проникании в такую среду дано в [10]. В настоящей статье решается задача для пластической среды. В области между поверхностями S и T предполагаем, что имеется течение среды, описываемое уравнениями Мизеса [4, 14]

$$\frac{\varepsilon_{rr}}{\varepsilon_i} = \frac{\sigma_{rr} - \sigma}{2\tau_s}, \quad \frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{\varepsilon_i} = \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma}{2\tau_s}, \quad \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_i} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma}{2\tau_s}$$

$$\frac{\varepsilon_{xr}}{\varepsilon_i} = \frac{\sigma_{xr}}{\tau_s}, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r}, \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \tag{1.1}$$

где v_r, v_x — компоненты скорости частиц, причем для тонких тел $|\varepsilon_{xx}| \ll |\varepsilon_{rr}|$, τ_s — постоянный предел текучести, $6\tau_s^2$ есть правая часть условия текучести

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{xx})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{xx})^2 + 6\sigma_{xr}^2 = 6\tau_s^2 \tag{1.2}$$

Уравнение несжимаемости, записанное в основном порядке

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0$$

после интегрирования и удовлетворения кинематического условия на теле $v_r = \dfrac{\partial r_k}{\partial t}$ дает

$$v_r = \frac{r_k}{r}\frac{\partial r_k}{\partial t} \tag{1.3}$$

Для интенсивности скоростей деформации получится $\varepsilon_i \approx 2\dfrac{v_r}{r}$.

Вводя радиальную компоненту вектора перемещений U

$$\frac{dU_r}{dt} = v_r, \quad \frac{dU_r}{dt} = \frac{\partial U_r}{\partial t} + \frac{\partial U_r}{\partial r} v_r$$

можно после интегрирования найти

$$U_r = r + F(r^2 - r_k^2) \tag{1.4}$$

Для определения функции F и решения позади фронта $r = r_k\xi_0$ в [11] было дано решение

$$U_r = r - \sqrt{r^2 - r_k^2} \tag{1.5}$$

удовлетворяющее граничному условию на теле и условию асимптотического сращивания с (1.9). Однако можно показать, что указанное сращивание не единственно. Поэтому следует, вообще говоря, для выбора единственного решения взять уравнение энергии на фронте $r = r_k\xi_0$ или уравнение ударной адиабаты [9]

$$e_1 - e_2 = -(v_{r_1} - v_{r_2})\frac{\sigma_{rr_1} + \sigma_{rr_2}}{2\rho_1\xi_0\dfrac{\partial r_k}{\partial t}} \tag{1.6}$$

где e — энергия на единицу массы, индекс 1 дает величины впереди, а индекс 2 — позади поверхности $r = r_k\xi_0$, значения $e_{1,2}$ имеют вид [9]

$$\begin{gathered} e_1 = e_0(T_1) + 2\mu\frac{f^2}{r_k^2\xi_0^4} \\ e_2 = e_0(T_2) + \varepsilon_* + \frac{\tau_*^2}{2\mu} \end{gathered} \tag{1.7}$$

где $T_{1,2}$ — температура, ε_* — энергия разрушения, $e_0(T) = CT$, последние слагаемые соответствуют внутренней энергии [13] упругой области и внутренней энергии пластической области в начале ее образования или ее значению на поверхности разрушения S.

В упругой области вне поверхности S решение можно искать методом источников в виде [10]

$$u_r = \frac{f(x, t)}{r}, \quad u_x \approx 0 \tag{1.8}$$

где $f(x, t)$ — функция, определяемая из граничных условий на поверхности S. Для напряжений в упругой среде имеет место

$$\begin{gathered} \sigma_{rr} = \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda\Delta + 2\mu\frac{u_r}{r} \\ \sigma_{xx} = \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \sigma_{xr} = \mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r}\right) \\ \Delta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \end{gathered} \tag{1.9}$$

Тогда из (1.8) и (1.9) следует впереди S

$$\Delta \approx 0, \quad \sigma_{rr} = -2\mu\frac{f(x, t)}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} \approx 2\mu\frac{f(x, t)}{r^2}, \quad \sigma_{xx} = 0 \tag{1.10}$$

$$u_{r_1} = \frac{f(x, t)}{r}, \quad v_{r_1} = \frac{1}{r}\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \tag{1.11}$$

Подставляя упругое решение (1.11) в (1.2), можно получить

$$\frac{2\mu f(x,\ t)}{r_k^2\xi_0^2}=\tau_s \tag{1.12}$$

Используя соотношения (1.6), (1.7), (1.11) и $\sigma_{rr_e} \approx \sigma_{rr_1}$, можем пайти

$$\frac{\partial f}{\partial t}=r_k\frac{\partial r_k}{\partial t}-r_k\frac{\partial r_k}{\partial t}\frac{\xi_0^2}{\tau_s}(\varepsilon_s+CT_2-CT_1) \tag{1.13}$$

Предполагая постоянство выражения $\varepsilon_s + CT_2 - CT_1 = e_2 - e_1$, можно из (1.12) и (1.13) получить

$$f=\frac{1}{2}ar_k^2\xi_0^2=\frac{\mu a}{\tau_s},\quad a=\frac{1}{1+\frac{\mu}{\tau_s^2}\rho_1(\varepsilon_s+CT_2-CT_1)} \tag{1.14}$$

В предположении, что $\frac{\mu}{\tau_s^2}\rho_1(\varepsilon_s+CT_2-CT_1)\ll 1$, получаем $a=1$ в формуле (1.11) и решение дается (1.5). Решение впереди S

$$u_r=a\frac{r_k^2}{2r} \tag{1.15}$$

Для определения σ_{rr} в области течения можно использовать упрощенные уравнения движения

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}=0,\quad \sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}=-2\tau_s \tag{1.16}$$

откуда

$$\sigma_{rr}=2\tau_s\ln r+\varphi(x,\ t) \tag{1.17}$$

где $\varphi(x,\ t)$ — произвольная функция.

Используя условие непрерывности σ_{rr} при $r=r_k\xi_0$, с учетом (1.10), (1.17) и (1.14) получим

$$\sigma_{rr}=\tau_s\left(2\ln\frac{r}{r_k\xi_0}-1\right) \tag{1.18}$$

причем на теле при $r=r_k$

$$\sigma_{rr}=-\tau_s\left(\ln\frac{\mu a}{\tau_s}+1\right) \tag{1.19}$$

Решение позади S найдется путем приравнивания (1.4) к (1.15) при $r=r_k\xi_0$ и получится

$$F(r^2-r_k^2)=\frac{\sqrt{r^2-r_k^2}}{\sqrt{\xi_0^2-1}}\left(\frac{a}{2\xi_0}-\xi_0\right) \tag{1.20}$$

$$U_r=r+\frac{\sqrt{r^2-r_k^2}}{\sqrt{\xi_0^2-1}}\left(\frac{a}{2\xi_0}-\xi_0\right) \tag{1.21}$$

Используя формулу для плотности

$$\rho = \rho_0\left(1 - \frac{\partial u_r}{\partial r}\right)\left(1 - \frac{u_r}{r}\right)$$

получим

$$\text{при } r > r_k \xi_0 \quad \rho = \rho_0\left(1 - \frac{a^2 r_k^4}{4 r^4}\right)$$

$$\text{при } r < r_k \xi_0 \quad \rho = \rho_0\left(\frac{a}{2\xi_0} - \xi_0\right)^2 \frac{1}{\xi_0^2 - 1} \approx \rho_0\left(1 - \frac{a}{\xi_0^2} + \frac{1}{\xi_0^2}\right)$$

то есть плотность постоянна и имеется волна сжатия.

§ 2. *Определение глубины проникания*

Рассмотрим задачу о проникании конуса с углом полураствора β, тогда $r_k = (l - x)\beta$. Предполагая, что на теле имеет место граничное условие $\tau_{rx} = k_1 \sigma_{rr}$, где k_1 — коэффициент трения, можно для силы сопротивления прониканию получить

$$P = -2\pi \int_0^{l(t)} (l - x)\, \beta(\beta + k_1)\, \sigma_{rr}\, dx$$

или

$$P = -\pi\beta(\beta + k_1)\, \sigma_{rr}\, l^2(t) \tag{2.1}$$

Записывая закон движения тела массы m $m l'' = -P$, получим после интегрирования и с учетом (1.22)

$$l'^2 = V^2 - \frac{2}{3m}\pi\beta(\beta + k_1)\tau_s\left(1 + \ln\frac{\rho a}{\tau_s}\right) l^3$$

где V — начальная скорость тела. Условие $l'(t) = 0$ дает для максимальной глубины проникания следующее выражение:

$$l^3_{\max} = \frac{2 m V^2}{2\pi\tau_s\left(1 + \ln\frac{\rho a}{\tau_s}\right)\beta(\beta + k_1)} \tag{2.2}$$

§ 3. *Определение максимальной глубины проникания для цилиндрического тела, переходящего в конус*

Рассмотрим цилиндрическую часть тела, которая переходит в криволинейный конус с уравнением образующей (фиг. 1)

$$r_k = r_0 - \beta(\zeta - \eta)^\nu, \quad \eta = l - x \tag{3.1}$$

Вначале предположено, что вдоль цилиндра среда примыкает к телу и $k_1 \neq 0$. Для силы сопротивления в момент времени t, соответствующий полному погружению конической части тела, или при $l > \zeta$, можно получить

$$P = 2\pi\tau_s\left(1 + \ln\frac{\rho a}{\tau_s}\right)\left[\frac{\nu}{\nu + 1}\beta r_0 \zeta^{\nu+1} + \frac{1}{2}\beta^2\zeta^{2\nu} + k_1 r_0 (l - \zeta)\right] \tag{3.2}$$

Уравнение движения в этом случае исследовано ниже. Для задачи с отсутствием трения на цилиндрической части ($k_1 = 0$) уравнение движения будет при $f > \zeta$

$$mf'' = -2\pi\tau_s\left(1 + \ln\frac{\mu a}{\tau_s}\right)\left|\frac{\nu}{\nu+1}\beta k_1\zeta^{\nu+1} + \frac{1}{2}\beta^2\zeta^{2\nu}\right| \qquad (3.3)$$

После интегрирования получим

$$\frac{f'^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} = -\frac{2\pi\tau_s}{m}\left(1 + \ln\frac{\mu a}{\tau_s}\right)\left(\frac{\nu}{\nu+1}\beta k_1\zeta^{\nu+1} + \frac{1}{2}\beta^2\zeta^{2\nu}\right)(f-\zeta) \qquad (3.4)$$

где V_1 — скорость тела в момент, когда $f = \zeta$ или при полном погружении конуса. При $f < \zeta$ уравнение движения тела имеет вид:

$$mf'' = -2\pi\tau_s\left(1 + \ln\frac{\mu a}{\tau_s}\right)\left[\frac{1}{2}\beta^2\zeta^{2\nu} + \beta\zeta^{\nu}k_1 f - \frac{\beta k_1}{\nu+1}\zeta^{\nu+1} - \right.$$

$$\left. - \beta^2\zeta^{\nu}(\zeta - f)^{\nu} + \frac{\beta^2}{2}(\zeta - f)^{2\nu} + \frac{\beta k_1}{\nu+1}(\zeta - f)^{\nu+1}\right| \qquad (3.5)$$

После интегрирования и складывания с (3.4) с учетом того, что при $f = \zeta$ $f' = V_1$, получим

$$\frac{f'^2}{2} - \frac{V^2}{2} = -\frac{2\pi\tau_s}{m}\left(1 + \ln\frac{\mu a}{\tau_s}\right)\left|\left(\frac{\nu}{\nu+1}\beta k_1\zeta^{\nu+1} + \frac{1}{2}\beta^2\zeta^{2\nu}\right)(f-\zeta) + \right.$$

$$\left. + \beta^2\zeta^{2\nu+1}\frac{\nu^2}{(\nu+1)(2\nu+1)} + \beta\zeta^{\nu+2}k_1\frac{\nu}{2(\nu+2)}\right|$$

где V — начальная скорость.

При $f' = 0$ $f = f_{max}$ и для f_{max} получится

$$f_{max} = \frac{1}{\dfrac{\nu}{\nu+1}\beta k_1\zeta^{\nu+1} + \dfrac{1}{2}\beta^2\zeta^{2\nu}}\left[\frac{mV^2}{4\pi\tau_s\left(1 + \ln\dfrac{\mu a}{\tau_s}\right)} + \right.$$

$$\left. + \beta^2\zeta^{2\nu+1}\frac{\nu^2}{(2\nu+1)(\nu+1)} - \frac{\beta k_1\zeta^{\nu+2}\nu}{2(\nu+2)}\right] + \zeta \qquad (3.6)$$

При $\nu = 1$, то есть для тела с прямолинейной конусной частью,

$$f_{max} = \frac{mV^2}{2\pi\tau_s\left(1 + \ln\dfrac{\mu a}{\tau_s}\right)\beta(\beta + k_1)\zeta^2} + \frac{2}{3}\zeta \qquad (3.7)$$

Отметим, что определение f_{max} для погружения криволинейного конуса, то есть формулы, подобной (2.2), при $\nu \neq 1$ является довольно сложной задачей и в настоящей работе не рассмотрено.

Вычислим f_{max} с учетом того, что на цилиндрической части $k_1 \neq 0$.

Для силы сопротивления имеем формулу (3.2). Проводя те же рассуждения для f_{max}, будем иметь формулу при $f_{max} > \zeta$ или $\xi \geqslant \zeta$,

$$f_{max} = -\left(\frac{\beta\zeta^{\nu}}{2k_1} - \frac{\zeta}{\nu+1}\right) + \left[\left(\frac{\beta\zeta^{\nu}}{2k_1} - \frac{\zeta}{\nu+1}\right)^2 + \frac{\beta}{k_1}\,\frac{3\nu+1}{(2\nu+1)(\nu+1)}\,\zeta^{\nu+1} - \frac{2\zeta^2}{(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{mV^2}{2\pi\tau_s\left(1+\ln\frac{\mu a}{\tau_s}\right)\beta k_1\zeta^{\nu}}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (3.8)$$

При $\nu=1$ формула (3.8) переходит в формулу

$$f_{max} = -\frac{K}{2} + \left\{\frac{K^2}{4} + \frac{1}{\pi k_1\beta\zeta}\left[\frac{mV^2}{2\tau_s\left(1+\ln\frac{\mu a}{\tau_s}\right)} - \frac{\pi\beta(\beta+k_1)\zeta^3}{\zeta}\right] + \frac{2\zeta^2}{k_1}\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (3.9)$$

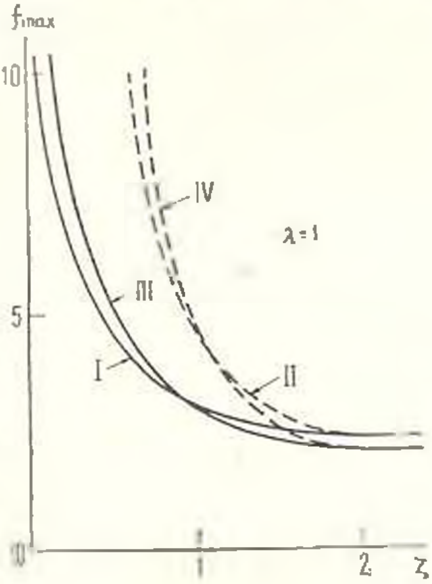
где $K=\frac{\beta\zeta}{k_1}-\zeta$, $f_{max}=\zeta_0$ дается (2.2).

На фиг. 2 приведены зависимости f_{max} от ζ для конического тела, переходящего в цилиндр для $\beta\approx 0.22$ *рад см*$^{1-\nu}$, $k_1=0.15$, $a=1$. Кривые I, II соответствуют прямому конусу, кривые III, IV — конусу с криволинейной образующей:

I — $\nu=1$, $k_1\neq 0$ (на цилиндре),
II — $\nu=1$, $k_1=0$ (на цилиндре),
III — $\nu=1.3$, $k_1\neq 0$ (на цилиндре),
IV — $\nu=1.3$, $k_1=0$ (на цилиндре)

и принято, что

$$\lambda=\frac{mV^2}{2\pi\tau_s\left(1+\ln\frac{\mu}{\tau_s}\right)}=1$$



Фиг. 2.

Как видно из кривых, наименьшее значение f_{max} (при $\nu=1$) соответствует $\zeta>\zeta_0$, то есть погружению конуса.

Выражения (3.8), (3.9) выполняются при $\zeta<f<f_0$, где f_0 — высота тела. При $f>f_0$ и $k_1\neq 0$ следует интегрировать по поверхности тела при вычислении P. Тогда получим при $f>f_0$

$$P = 2\pi\int_{f=\zeta}^{f} r_k(\beta+k_1)(-\sigma_{rr})\,dx + 2\pi\int_{f=f_0}^{f=\zeta} r_0 k_1(-\sigma_{rr})\,dx =$$

$$
= 2\pi\tau_s\left(1+\ln\frac{\mu a}{\tau_s}\right)\left\{\frac{\nu}{\nu+1}\beta k_1\zeta^{\nu+1}+\frac{1}{2}\beta^2\zeta^{2\nu}+k_1 r_0(f_0-\zeta)\right\}
$$

Записывая $mf'' = -P$, интегрируя от $f=f_0$, $f'=V_0$ до данных значений f, f', полагая в (3.4) $f=f_0$, $f'=V_0$ и складывая полученные уравнения, можно получить для глубины проникания при полном погружении тела

$$
f_{\max} = f_0 + \frac{\dfrac{mV_0^2}{4\pi\tau_s\left(1+\ln\dfrac{\mu a}{\tau_s}\right)}+\dfrac{\beta^2(3\nu+1)\zeta^{2\nu+1}}{2(2\nu+1)(\nu+1)}-\dfrac{\beta k_1\zeta^{\nu+2}}{(\nu+1)(\nu+2)}}{\dfrac{\nu}{\nu+1}\beta k_1\zeta^{\nu+1}+\dfrac{1}{2}\beta^2\zeta^{2\nu}+k_1 r_0(f_0-\zeta)} -
$$

$$
-\frac{\beta k_1\zeta^{\nu}\left[\dfrac{f_0^2}{2}+\left(\dfrac{\beta\zeta^{\nu}}{2k_1}-\dfrac{\zeta}{\nu+1}\right)f_0\right]}{\dfrac{\nu}{\nu+1}\beta k_1\zeta^{\nu+1}+\dfrac{1}{2}\beta^2\zeta^{2\nu}+k_1 r_0(f_0-\zeta)} \qquad (3.10)
$$

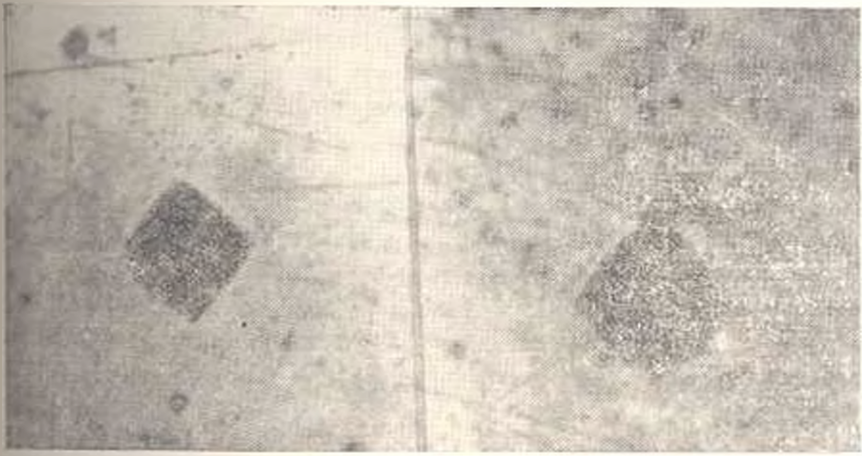
При $k_1=0$ на цилиндре для всех $f>\zeta_0$, в том числе и для $f>f_0'$ имеет место формула (3.6).

§ 4. *Экспериментальное исследование проникания*

Для экспериментального исследования проникания в разные металлы были использованы в качестве материалов для образцов алюминий, дюраль, латунь, медь. В качестве проникающего тела использовалось тонкое твердое тело.

Для определения параметра a в формулах (3.6)—(3.10) было проведено исследование материалов на микротвердость. Из испытываемых образцов вырезались пластинки, перпендикулярные оси проникания. После специальной обработки на полированной поверхности образцов микротвердомером ПМТ-3 по нескольким направлениям от кратера было рассмотрено поведение материала после вдавливания силой 10 г четырехгранной алмазной пирамиды. После снятия нагрузки выяснилось, что отпечатки имели форму квадратов (фиг. 3а), в окрестности кратера отпечатки имели форму криволинейных четырехугольников (фиг. 3б). Причем граница между областями регулярных и искаженных отпечатков принимается в качестве границы пластической области. Таким образом, там, где отпечатки становились квадратными, предполагалось наличие границы области разрушения, то есть определялась величина ξ_m, которая оказалась постоянной. Подставляя значение a в формулу (1.14), можно подсчитать диссипацию энергии $\varepsilon_s + CT_s - CT_1$ на фронте $r=r_k\xi_m$ в разных материалах. В таблице приведены теоретические и экспериментальные данные характерных величин.

Результаты исследования, приведенные в таблице, показывают, что разные материалы ведут себя качественно по-разному. В тех материалах, в которых при проникании тела имеется касание со средой цилиндрической части, для определения максимальной глубины проникания хорошее соответствие с экспериментом дают формулы (3.8), (3.10). Сказанное относится к образцам из алюминия, латуни. Причем для латуни имеется неполное проникание и используется (3.8), а для алюминия $l_{max} > l_0$ и используется (3.10). В тех материалах, ширина кратера которых больше, чем диаметр



а б

Фиг. 3.

тела, при проникании имеет место неполное касание вдоль цилиндрической части тела, и хорошее соответствие с результатами эксперимента дает расчет по формуле (3.6), где принято $k_1 = 0$ на цилиндрической части тела. Сказанное относится к дюралюминию, меди. Таким образом, имеется соответствие между теоретическими и опытными данными значений ξ_0 и

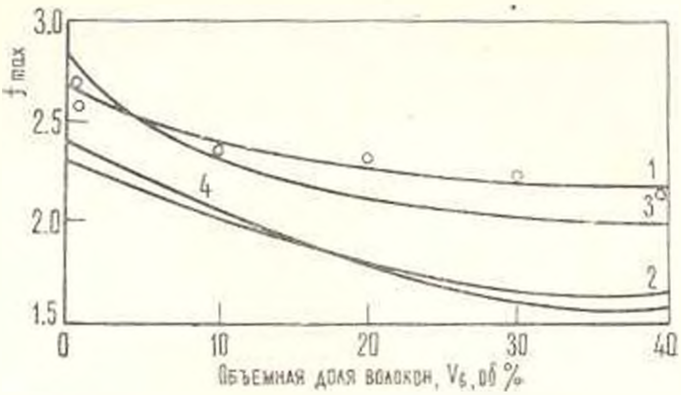
Таблица

Величина / Материал	$\times 10^{-6}$ $\frac{кг}{см^2}$	σ_s $\frac{кг}{см^2}$	a	l_{max} $(k_1 = 0)$ см	l_{max} $(k_1 = 0)$ см	l_{max} эксп. см	$\frac{\gamma}{\sigma_s^2}(\varepsilon_s + C\Delta T)$	ξ_0 эксп.	Коэф. трения
Дюраль	0.26	3000	0.65	4.45	4.28	4.5	0.54	7	0.15
Латунь	0.44	2911.8	0.54	3.82	2.19	2.2	0.85	9	0.25
Медь	0,44	2205.9	0.48	3.11	2.72	3	1.08	9	0.23
Алюминий	0,26	441.2	0.20	14.4	10.53	10	4	10	0.15

l_{max} для всех материалов. Разумеется, рассматриваемая теория не подходит для случая полного плавления проникающего тела, что наблюдалось в опытах по прониканию в образцы из легированной стали и бронзы. Кроме того, представляет интерес проникание в хрупкие вещества, для которых значения ξ_0 и σ_{kk} получены в работе [10]. Следует заметить, что полученные в [10] значения ξ_0 велики, то есть для хрупких тел получается большая область разрушения, поэтому соотношения [10] могут быть использованы лишь для определения порядков величин. То же [10] относится к наличию фронта трещин, за которым следует фронт течения.

В силу того, что $a < 1$, получается $\varepsilon_s + C\Delta T > 0$, и имеет место увеличение f_{max} в сравнении со значениями, полученными при $a = 1$, то есть чем больше податливость материала, определяемая по f_{max}, тем больше сила ударной волны, через которую можно выразить диссипацию энергии [18, 9]. Значения μ и τ_s взяты из [19], причем согласно [15] для динамических задач τ_s увеличено в 1.5 раза. Значение k_1 взято по [20].

Для экспериментального исследования проникания в [12] применялся композиционный материал, полученный армированием железного порошка марки ПЖ2М произвольно ориентированными дискретными стальными волокнами. В качестве проникающего тела использовалось тонкое твердое тело. На фиг. 4 кривая 1 дает результаты экспериментальных данных для различных объемных долей волокон, кривые 2, 3, 4 рассчитаны соответственно по формулам (2.2), (3.6), (3.8).



Фиг. 4. 1 — кривая, полученная экспериментально. 2 — кривая, рассчитанная по формуле (2.2). 3 — кривая, рассчитанная по формуле (3.6). 4 — кривая, рассчитанная по формуле (3.8).

Результаты исследований, приведенные на фиг. 5, показывают, что наибольшая глубина достигается для образцов, полученных из неармированного материала, а с увеличением объемной доли армирующих волокон глубина проникания тела уменьшается.

После проникания размер кратера превышал в 1.3—1.4 раза диаметр тела. Из фиг. 4 видно, что с экспериментальными данными больше всего сходится кривая 3, полученная по формуле (3.6), то есть при отсутствии силы трения на цилиндрической части, что объясняется появлением кратера с размером, большим диаметра проникающего тела.

§ 5. *Проникание в вязко-пластическую и в сыпучую среды*

Можно также рассмотреть случай вязкотекучего материала позади S. Определяющие уравнения вместо (1.1) можно взять в форме уравнений Купера—Симонса [14, 15, 23]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{s_{ij} - s}{2\eta}, \ldots, \quad \eta = \eta_f + \frac{\tau_s + k\varepsilon_i^n}{\varepsilon_i} \qquad (5.1)$$

где $\varepsilon_r \approx 2\frac{v_r}{r}$, ρ есть постоянная плотность материала среды, ν — динамический коэффициент вязкости, τ_s, k, n — постоянные. Вычисления § 1 могут быть приведены для рассматриваемой общей задачи и дают для распределения напряжения в разрушенной области

$$\sigma_{rr} = -\frac{\mu}{\xi_0^3} + 2\tau_s \ln\frac{r}{r_k\xi_0} - 2\nu\rho r_k^2\frac{\partial r_k}{\partial t}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_k^3\xi_0^3}\right) -$$

$$- \frac{k}{n}\left(2r_k^2\frac{\partial r_k}{\partial t}\right)^n\left(\frac{1}{r^{2n}} - \frac{1}{\xi_0^{2n} r_k^{2n}}\right) \tag{5.2}$$

где ξ_0 определяется из условия (1.2), записанного для упругого решения

$$\frac{\mu}{\xi_0^3} = \tau_s + k\left(2\frac{\partial r_k}{r_k\partial t}\frac{1}{\xi_0^3}\right)^n + 2\nu\rho\frac{\partial r_k}{r_k\partial t}\frac{1}{\xi_0^3} \tag{5.3}$$

Если условие на поверхности $r = r_k\xi_0$ зависит только от компонент тензора напряжений [9], можно полагать $k = \nu = 0$ в (5.3). Можно видеть, что в общем случае поверхность фронта разрушения не подобна поверхности тела. Можно показать, что для $\frac{2}{3} < n < 1$ имеется расходимость интеграла

$$-\int_{x_1}^{x} 2\pi r_k\left(-\frac{\partial r_k}{\partial x} - k_1\right)\sigma_{rr}\,dx$$

представляющего силу сопротивления P, вычисленную согласно (5.2) для конуса. Для $k = 0$ распределение напряжений на теле может быть записано в виде

$$\sigma_{rr} \approx -\tau_s\left(1 + \ln\frac{\mu}{\tau_s}\right) - 2\nu\rho\frac{\partial r_k}{r_k\partial t} \tag{5.4}$$

Эффекты вязкости существенны только для начального момента и для окрестности вершины тела. Уравнение движения конического тела дает

$$f'' = -\frac{\pi}{m}\left(\tau_s\ln\frac{\mu}{\tau_s} + \tau_s\right)\beta(\beta + k_1)f^2 - \frac{4\pi\nu\rho}{m}\beta(\beta + k_1)ff' \tag{5.5}$$

Последнее уравнение имеет форму уравнений Эйлера—Понселе—Резаля [3], но с переменным коэффициентом f при втором члене.

Для простоты рассмотрим среду, в которой $\nu = \tau_s = 0$ [21]. Тогда по (5.1), (5.2), (5.3) получится значение $\sigma_{\theta\theta}$, причем максимальное растягивающее значение в области $r \leqslant r_k\xi_0$ будет при $r = r_k\xi_0$

$$\sigma_{\theta\theta} = \gamma\left(\frac{\partial r_k}{r_k\partial t}\right)^{\frac{n}{1-n}}, \quad \gamma = \mu\left(\frac{k}{\mu}\right)^{\frac{1}{1-n}}2^{\frac{n}{1-n}}$$

Вводя трещиноватость среды ψ, используем уравнения [21]

$$A(N+1)\int\limits_{0}^{t_1} \sigma_{max}^N \, dt_1 = 1 \tag{5.6}$$

где A, N — константы, $\sigma_{max} = \sigma_{\theta\theta}$, а в качестве t_1 удобно взять максимальное время с момента прохождения тела через данное сечение $x = \mathrm{const}$.

Для конуса, проникающего с постоянной скоростью V, получится для времени разрушения образца

$$t_1 = \left| A(N+1)\lambda \frac{1-n}{1-Nn-n} \right|^{\frac{1-n}{1-Nn-n}} \tag{5.7}$$

Полученное соотношение верно при выполнении условия $\frac{1}{n} > N+1$, что выполняется для ряда металлов [21, 22], например, для стали $\frac{1}{n} = 10$. Соотношения для вязко-пластической среды так же, как и формулы § 1 и § 2, можно применять и для грунта. Для последнего можно также учесть кулоновское трение и записать [17, 21]

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\tau_0}{1-k} + \frac{1-k}{1+k}\sigma_{rr}, \quad \tau_0 = 2\tau_s \tag{5.8}$$

Тогда можно внести изменения во все соотношения § 1. Уравнение движения дает вместо (1.18)

$$\sigma_{rr} = \frac{\tau_s}{k}\left(1 - \frac{r_k^{\nu}}{r^{\nu}}\right) + \frac{r_k^{\nu}}{r^{\nu}}\bar{\sigma}_{rr}, \quad \nu = \frac{2k}{1+k} \tag{5.9}$$

где $\bar{\sigma}_{rr}$ есть значение σ_{rr} на теле ($r = r_k$). Решение для скоростей и перемещений можно снова взять в виде (1.15), а σ_{rr} в упругой области дается (1.10). Условие непрерывности σ_{rr} на поверхности разрушения дает

$$\frac{\tau_s}{k}\left(1 - \frac{1}{\xi_0^{\nu}}\right) + \frac{1}{\xi_0^{\nu}}\bar{\sigma}_{rr} = -\frac{\mu\alpha}{\xi_0^2} \tag{5.10}$$

ξ_0 определяется из условия (5.8), поставленного на поверхности $r = r_k\xi_0$ для упругого решения (1.10), причем с учетом $\sigma_{rr} \approx -\sigma_{\theta\theta}$ оно дает снова (1.14). Таким образом, в задаче проникания для сыпучей среды ξ_0 снова дается (1.14), но $\bar{\sigma}_{rr}$ из (5.10) обобщает значение (1.19), переходя в него для $k = 0$. Поскольку напряжение на теле постоянно, можно после соответствующей замены σ_{rr} на $\bar{\sigma}_{rr}$ пользоваться соотношениями § 2 и для данной задачи.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 16 IV 1980

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Ա. Ա. ՎԱՆՑՅԱՆ

ԲԱՐԱԿ ՄԱՐՄՆԻ ՆԵՐԹԱՓԱՆՑՈՒՄԸ ՄԵՏԱՂՆԵՐԻ ԵՎ ԲՆԱՀՈՂԵՐԻ ՄԵՋ

Ամփոփում

Դիտարկվում է բարակ մարմինների ներթափանցումը մետաղների և գետնի մեջ։

Բարակ մարմնի առաձգամածուցիկապլաստիկ միջավայրերի մեջ ներթափանցման ժամանակ փոքր շփման գործակցի համար միջավայրի շարժման հավասարումներում պահվում են միայն ըստ շառավղային կոորդինատի ածանցյալները։ Ենթադրվում է նաև, որ միջավայրի քայքայման ճակատի առջևում միջավայրը առաձգական է, իսկ ճակատի ետևում միջավայրի համար տեղի ունի պլաստիկական հոսունություն։ Հաշվի առնելով այդ և օգտվելով համապատասխան հավասարումներից, քայքայման ճակատի վրա տրված և հարվածի ադիաբատի պայմաններից որոշվում են միջավայրի մասնիկների արագությունները և առաջացած լարումները ներթափանցվող մարմնի շրջակայքում։

Որոշվում է նաև կոնաձև ծայր ունեցող գլանային մարմնի ներթափանցման առավելագույն խորությունը։

Կատարված են փորձեր տարբեր մետաղների և կոմպոզիտների մեջ բարակ մարմինների ներթափանցման վերաբերյալ և ցույց է տրվում տեսական ճանապարհով ստացված արդյունքների հետ նրանց լավ համապատասխանությունը։

Տրվում է մածուցիկապլաստիկ և սորուն միջավայրերի համար արդյունքների ընդհանրացումը։

THE PENETRATION OF A THIN BODY IN METALS AND SOIL

A. G. BAGDOEV, A. A. VANTSIAN

Summary

The problem in penetration of thin bodies into metals and soil is considered. On penetration of thin bodies for a small value of friction coefficient between the medium and body, on determination of the main part of the solution in equations of medium, only the derivatives over the radial coordinate are retained and the front of fracture is also introduced ahead of which the medium is elastic. Assuming that behind the front there is a plastic flow of medium, from the equation of incompressibility, from the conditions on the fracture front, including the shock adiabatic curve and from the equation of medium motion the particles velocities and stresses near the body are determined. The values of maximal depth of penetration for the body consisting of a tapering cylinder (curvelinear) are found. The experiments on penetration into various metals and composites are made.

The good agreement with the results of calculations on determination of the penetration depth and the radius of the fracture surface by the obtained formula is shown. The generalization of results for viscoplastic media and soil is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bachman M. K., Goldsmith W.* The mechanics of penetration of projectiles into targets. International Journal of Engineering Science. 1978, vol. 16, № 11.
2. *Ишлинский А. Ю.* Осесимметричная задача пластичности и проба Бринеля. ПММ 1944, т. 8, вып. 3.
3. *Аллен У., Мейфилд Э.* и *Морисон Г.* Динамика проникания снаряда в песок. В сб. переводов «Механика», 1957, № 6.
4. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.—Л., ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948.
5. *Wilkins M. L.* Mechanics of penetration and perforation. International Journal of Engineering Science. 1978, vol. 16, № 11.
6. *Григорян С. С.* Некоторые вопросы газодинамики тонких тел. Кандидатская диссертация, МГУ, 1956.
7. *Сагомонян А. Я.* Проникание. МГУ, 1974.
8. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды. Ереван, Изд. АН Арм.ССР, 1961.
9. *Григорян С. С.* Некоторые вопросы математической теории деформации горных пород. ПММ, 1967, т. 31, № 4.
10. *Багдоев А. Г.* Проникание тонкого тела вращения в упругую среду. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1977, т. 30, № 5.
11. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н., Саркисян Г. А.* Решение некоторых нестационарных задач взаимодействия тел с упругими преградами. Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 3.
12. *Багдоев А. Г., Минасян Б. Ц.* Исследование проникания тонкого твердого тела в металлы. Изв. АН Арм.ССР, серия техн. наук, 1979, т. 32, № 3.
13. *Мастеров В. А., Берковский В. С.* Теория пластической деформации и обработки металлов давлением. М., «Металлургия», 1974.
14. *Ольшак В., Мруз З., Пежина П.* Современное состояние теории пластичности. М., Мир, 1964.
15. *Ионов В. А., Огибалов П. М.* Напряжения в телах при импульсных нагружениях. М., «Высшая школа», 1975.
16. *Зволинский Н. В., Подъяпольский Г. С., Флитман Л. М.* Теоретические аспекты проблемы взрыва в грунтах. Изв. АН СССР, серия физика земли, 1973, № 1.
17. *Николаевский В. Н.* О формулировке определяющих уравнений для плоского движения кулоновской сплошной среды. ПММ, 1968, т. 32, № 5.
18. *Курант Р., Фридрихс.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., ИЛ, 1950.
19. *Феодосьев В. И.* Сопротивление материалов. М., «Наука», 1970.
20. *Енохович А. С.* Справочник по физике. М., «Просвещение», 1978.
21. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. М.—Л., Физматгиз, 1960.
22. *Wojno W. and Wierzbicki T.* On perturbation solution for impulsively loaded viscoplastic structures. Journal of Applied Mathematics and Physics ZAMP, 1979, vol. 30

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

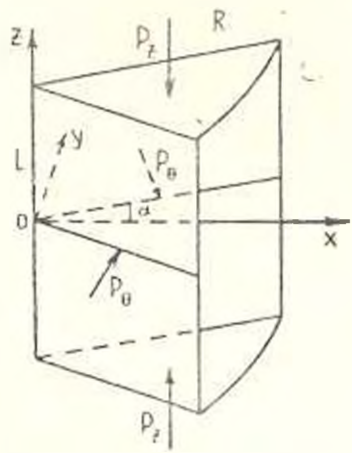
Մեխանիկա XXXIV, № 3, 1981 Механика

Ж. Г. АПИКЯН, М. А. ЗАДОЯН

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ТЕЧЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНОГО КЛИНА МЕЖДУ ЖЕСТКИМИ ШЕРОХОВАТЫМИ ПЛИТАМИ

Сжатие прямоугольной массы жестко-пластического материала между жесткими параллельными шероховатыми плитами рассмотрено в [1]. Плоское и осесимметричное пластические течения через клинообразный и конусообразный каналы рассмотрены в работах [1—3]. В настоящей работе рассматривается пространственная задача прочности клина из несжимаемого пластически неоднородного анизотропного материала. Принимается, что материал подчиняется соотношениям жестко-пластического тела Мизеса—Хилла [1].

1. Пусть пространственный клин (фиг. 1) сжимается шероховатыми жесткими наклонными плитами $\theta = \pm\alpha$, вращающимися вокруг продольной оси z с угловой скоростью ω. Одновременно клин вдавливается в торцевых сечениях $z = \pm l$ жесткими шероховатыми плитами при заданных скоростях перемещений w_0. Далее, как обычно, принимается, что касательное напряжение $\tau_{r\theta}$, возникающее между плитами и клином, равняется предельному значению mk, где k — пластическая постоянная, а $m\,(0 \leqslant m \leqslant 1)$ — показатель степени шероховатости плит. Принимаем, что плиты обладают свойством шероховатости только вдоль радиального направления, а в направлении оси z они идеально гладки. Учитывая эти условия, полуобратным способом принимаем, что $\tau_{\theta z} = \tau_{rz} = 0$ по всему объему клина. На свободной поверхности условие отсутствия нормального и касательного напряжений заменяется условием равенства нулю главного вектора напряжений.



Фиг. 1.

Исходя из характера напряженно-деформированного состояния, полуобратным способом [4] принимаем, что для рассматриваемой задачи тензор скоростей деформации не зависит от r и z.

Ввиду симметрии поставленной задачи рассматривается напряженное состояние клина $(0 \leqslant \theta \leqslant \alpha,\ 0 \leqslant z \leqslant l,\ 0 \leqslant r \leqslant R)$.

Очевидно, будем иметь следующие граничные условия:

$$\tau_{r\theta}\big|_{\theta=0} = 0, \quad \tau_{r\theta}\big|_{\theta=\alpha} = -mk, \quad v\big|_{\theta=0} = 0, \quad v\big|_{\theta=\alpha} = -\omega r \tag{1.1}$$

$$w\big|_{z=0} = 0, \quad w\big|_{z=l} = -w_0, \quad \int_0^{\alpha} (\sigma_r \cos\theta - \tau_{r\theta} \sin\theta)\, d\theta\Big|_{r=R} = 0 \tag{1.2}$$

Принимается, что в каждой точке тела анизотропные свойства «подобны», то есть принимается, что параметры анизотропии пропорциональны пластически неоднородной функции. Таким образом, условие пластичности Мизеса—Хилла берется в виде

$$a_{11}(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + a_{22}(\sigma_z - \sigma_r)^2 + a_{33}(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 2a_{12}\tau_{r\theta}^2 = e^{2\lambda\theta} \tag{1.3}$$

Соотношения между скоростями перемещений, скоростями деформаций и компонентами напряжений имеют вид

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \beta e^{-2\lambda\theta}[a_{33}(\sigma_r - \sigma_\theta) + a_{22}(\sigma_r - \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \beta e^{-2\lambda\theta}[a_{11}(\sigma_\theta - \sigma_z) + a_{33}(\sigma_\theta - \sigma_r)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \beta e^{-2\lambda\theta}[a_{22}(\sigma_z - \sigma_r) + a_{11}(\sigma_z - \sigma_\theta)] \tag{1.4}$$

$$2\xi_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 2\beta e^{-2\lambda\theta} a_{12}\tau_{r\theta}$$

Дифференциальные уравнения равновесия имеют вид

$$r\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0, \quad \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2\tau_{r\theta} = 0 \tag{1.5}$$

Учитывая граничные условия и используя соотношения (1.4), находим [4]

$$u = r\varepsilon_r, \quad v = \frac{w_0}{l} r\theta - 2r\int_0^{\theta} \varepsilon_r\, d\theta, \quad w = -\frac{w_0}{l} z \tag{1.6}$$

$$\varepsilon_r = A_0 + 2\int_{\alpha}^{\theta} \xi_{r\theta}\, d\theta, \quad \varepsilon_z = -\frac{w_0}{l}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{w_0}{l} - \varepsilon_r \tag{1.7}$$

Из соотношений (1.4) также имеем

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{a_{12}}{\varkappa}[(a_{11} + a_{22})\varepsilon_r + a_{22}\varepsilon_z]\frac{\tau_{r\theta}}{\xi_{r\theta}}$$

$$\sigma_z - \sigma_\theta = \frac{a_{12}}{\varkappa}[a_{22}\varepsilon_r + (a_{22} + a_{33})\varepsilon_z]\frac{\tau_{r\theta}}{\xi_{r\theta}} \tag{1.8}$$

$$\sigma_r - \sigma_z = \frac{a_{12}}{\varkappa}(a_{11}\varepsilon_r - a_{33}\varepsilon_z)\frac{\tau_{r\theta}}{\tau_{r\theta}}$$

где

$$\varkappa = a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22}$$

Из (1.5) и (1.8) следует

$$\frac{d\tau_{r\theta}}{d\theta} + \frac{a_{12}}{\varkappa}[(a_{11} + a_{22})\varepsilon_r + a_{22}\varepsilon_z]\frac{\tau_{r\theta}}{\tau_{r\theta}} + M = 0 \qquad (1.9)$$

$$\tau_\theta = M\ln r + N - 2\int_0^\theta \tau_{r\theta}\,d\theta \qquad (1.10)$$

где M, N — произвольные постоянные.

Из (1.3), (1.8)—(1.10) имеем

$$\frac{\tau_{r\theta}}{\tau_{r\theta}} = \frac{\sqrt{\varkappa}}{a_{12}}T - \frac{\sqrt{a_{11} + a_{22}}}{a_{12}\varepsilon_z}\frac{\Omega}{k} \qquad (1.11)$$

где

$$\frac{\Omega}{k} = \sqrt{e^{2\lambda\theta} - 2a_{12}\tau_{r\theta}^2 - \frac{\varkappa}{a_{11} + a_{22}}(\tau'_{r\theta} + M)^2}$$

$$T = \sqrt{\frac{e^{2\lambda\theta} - 2a_{12}\tau_{r\theta}^2}{(a_{11} + a_{22})\varepsilon_r^2 + 2a_{22}\varepsilon_r\varepsilon_z + (a_{22} + a_{33})\varepsilon_z^2}}$$

После некоторых преобразований из (1.7), (1.9)—(1.11) найдем

$$\Omega\frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{\Omega}\left(\frac{d\tau_{r\theta}}{d\theta} + M\right)\right] + 2a_{12}\frac{a_{11} + a_{22}}{\Omega}\tau_{r\theta} = 0 \qquad (1.12)$$

Разрешая уравнение (1.12) относительно старшей производной, получим

$$\tau''_{r\theta} = 2a_{12}\tau_{r\theta}\left[\frac{M}{f}(\tau'_{r\theta} + M) - \frac{a_{11} + a_{22}}{\varkappa}\right] + \lambda\frac{e^{2\lambda\theta}}{f}(\tau'_{r\theta} + M) \qquad (1.13)$$

где

$$f = e^{2\lambda\theta} - 2a_{12}\tau_{r\theta}^2$$

Полагая $\tau_{r\theta} = k\tau$, $M = kM_0$, $N = kN_0$, из (1.13) имеем

$$\tau'' = 2a_{12}\tau\left[\frac{k^2M_0}{f}(\tau' + M_0) - \frac{a_{11} + a_{22}}{\varkappa}\right] + \lambda\frac{e^{2\lambda\theta}}{f}(\tau' + M_0) \qquad (1.14)$$

2. Можно показать, что при малом угле α решение задачи приводится к квадратуре. Оставив первые члены в соответствующих разложениях при малом α, найдем

$$\varepsilon_r \approx A_0, \quad \tau \approx -\frac{m}{\alpha}\theta, \quad A_0 \approx \frac{\omega}{2\alpha}, \quad M_0 \approx \frac{m}{\alpha} \qquad (2.1)$$

Сделаем замену независимой переменной θ в уравнении (1.14) $x = M_0\theta$. В результате получим уравнение

$$\frac{d^2\tau}{dx^2}=2a_{12}\tau\left[\frac{k^2}{f_1}\left(\frac{d\tau}{dx}+1\right)-\frac{a_{11}+a_{22}}{\varkappa M_0^2}\right]+\frac{\lambda}{M_0}\frac{e^{\frac{2\lambda}{M_0}\tau}}{f_1}\left(\frac{d\tau}{dx}+1\right) \qquad (2.2)$$

где

$$f_1=e^{\frac{2\lambda}{M_0}\tau}-2a_{12}k^2\tau^2$$

Пренебрегая малыми членами в уравнении (2.2), найдем

$$\frac{d^2\tau}{dx^2}=2a_{12}k^2\frac{\tau}{f_2}\left(\frac{d\tau}{dx}+1\right),\quad f_2=1-2a_{12}k^2\tau^2 \qquad (2.3)$$

Уравнение (2.3) явно не содержит независимой переменной x. Сделав замену $\tau'=\varphi(\tau)$, из уравнения (2.3) получаем

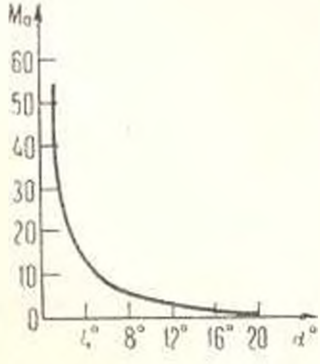
$$\frac{2a_{12}k^2\tau d\tau}{1-2a_{12}k^2\tau^2}=\frac{\varphi d\varphi}{\varphi+1} \qquad (2.4)$$

интеграл которого будет

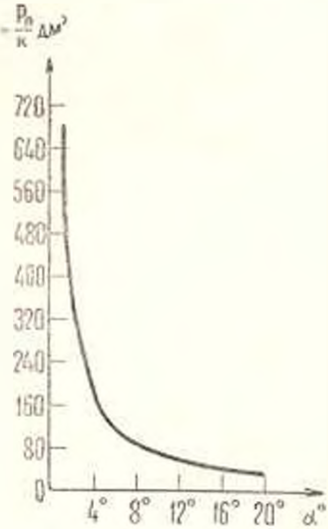
$$\tau=-\frac{1}{\sqrt{2a_{12}}k}\sqrt{1-\frac{(\varphi+1)^2}{(\varphi_0+1)^2}e^{-2(\varphi-\varphi_0)}} \qquad (2.5)$$

здесь φ_0 — произвольная постоянная. С другой стороны, имеем

$$\theta=-\frac{1}{\sqrt{2a_{12}}kM_0}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{(\varphi+1)^2e^{2(\varphi_0-\varphi)}\,d\varphi}{(\varphi_0+1)^2\sqrt{1-\frac{(\varphi+1)^2}{(\varphi_0+1)^2}e^{-2(\varphi-\varphi_0)}}} \qquad (2.6)$$



Фиг. 2.

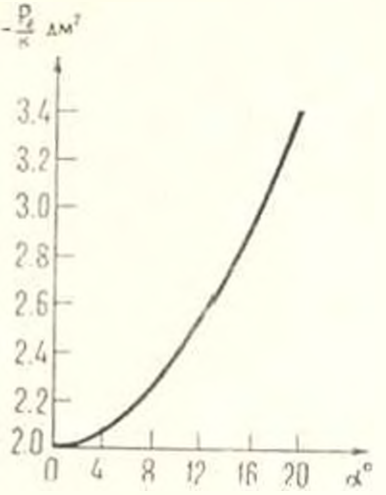


Фиг. 3.

Соотношения (2.5), (2.6) дают связь $\tau=\tau(\theta)$ в параметрической форме. Произвольные постоянные φ_0, M_0 определяются из условий

$$\tau(\alpha) = -m_1 \frac{d\tau(0)}{d\theta} = M_0\tau_0 \tag{2.7}$$

3. Проведено численное исследование задачи при следующих значениях параметров:



Фиг. 4

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{8k^2}, \quad a_{33} = \frac{1}{10k^2},$$

$$a_{12} = \frac{1}{4k^2}, \quad \lambda = 0, \quad l = 30 \text{ см},$$

$$R = 20 \text{ см}, \quad w_0 = 0.3 \text{ см/сек},$$

$$\omega = 0.01 \text{ сек}^{-1}, \quad \alpha = 1^\circ, 2^\circ, \ldots, 20^\circ.$$

Приведены графики зависимостей M_r, P_θ/k, P_z/k от α, где

$$P_\theta = 2l\int_0^R \sigma_\theta(r, \alpha)\, dr, \quad P_z = 2\int_0^R\int_0^\alpha \sigma_z(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta$$

суммарные давления соответственно на гранях $\theta = \pm\alpha$ и $z = \pm l$ (фиг. 2—4).

Вычислены также соответствующие значения M_{r}, P_θ/k, P_z/k для изотропного материала. Сравнение величин для изотропного и анизотропного случаев показывает, что анизотропия несущественна при малых углах раствора клина и эффект от анизотропии возрастает с увеличением угла α. Так, при $\alpha = 1^\circ$ величины M_r, P_θ/k, P_z/k в анизотропном случае отличаются от соответствующих величин в изотропном случае на 0.2%, 0.6%, 0.7% соответственно, а при $\alpha = 20^\circ$ — уже на 12.4%, 13.4%, 9%.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 25 IX 1980

Ժ. Գ. ԱՊԻԿՅԱՆ, Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

ՊԼԱՍՏԻԿՈՐԵՆ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՍԵՊԻ ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ՀՈՍՔԸ ԿՈՇՏ ԱՆՀԱՐԹ ՍԱԼԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է անսեղմելի պլաստիկորեն անհամասեռ անիզոտրոպ նյութից սեպի ամրության տարածական խնդիրը։

Ենթադրելով լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակի բնույթից կիսահակադարձ եղանակով ընդունված է, որ դեֆորմացիաների արագության տենզորը կախված է միայն բևեռային անկյունից, և լարման մի բաղադրիչի համար ստացված է երկրորդ կարգի սովորական ոչ-գծային դիֆերենցիալ հավասարում։ Սեպի բացվածքի փոքր անկյան դեպքում խնդրի լուծումը բերվում է կվադրատուրայի։ Բերված է թվային օրինակ։

SPACE FLOW OF A PLASTICALLY ANISOTROPIC WEDGE BETWEEN RIGID ROUGH PLATES

J. G. APIKIAN, M. A. ZADOIAN

S u m m a r y

The space problem in strength of a wedge of incompressible plastic non-homogeneous anisotropic material is considered. Proceeding from the pattern of the stress-strain state, using a half-inverse method, it is assumed that the deformation velocity tensor depends on the polar angle only, and the ordinary non-linear differential equation of second order is obtained for the stress component. For a small angle of the wedge opening the solution of the problem is reduced to quadratures A numerical example is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М., Гостехтеориздат, 1956.
2. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М., «Высшая школа», 1969.
3. *Шилд Р. Т.* Пластическое течение в сходящемся коническом канале. Сб. переводов «Механика», 1956, № 3.
4. *Задоян М. А.* Частное решение уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах. ДАН СССР, 1964, т. 157, № 1.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

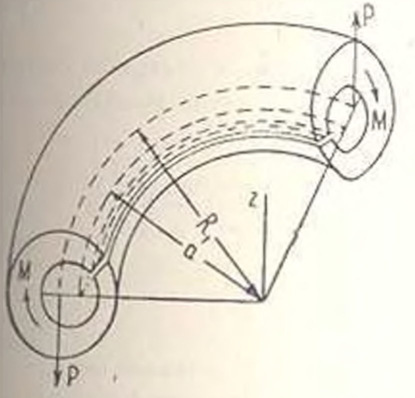
Մեխանիկա XXXIV, № 3, 1981 Механика

Ф. М. ПОЛАДЯН

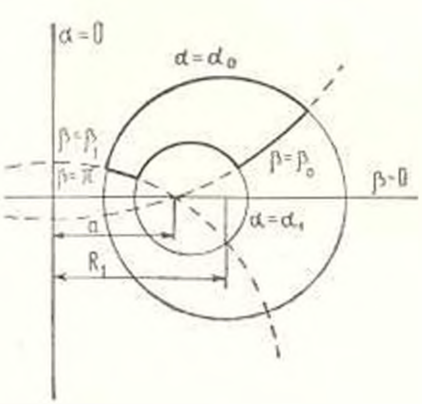
КРУЧЕНИЕ КРИВОГО ПОЛОГО СТЕРЖНЯ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ЩЕЛЯМИ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассматривается задача о кручении кривого полого стержня с криволинейными щелями, материал которого обладает свойством нелинейной наследственной ползучести [1].

Пусть кривой полый стержень со щелью постоянного поперечного сечения находится под воздействием перерезывающих сил P и крутящих моментов PR_1 (R_1 — радиус оси стержня), приложенных на торцевых сечениях (фиг. 1).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Решение такой задачи для упрочняющегося материала приведено в работах [2, 3].

§ 1. *Основные уравнения задачи.* Принимаем, что для материала стержня справедливы соотношения нелинейно-наследственной теории ползучести Н. Х. Арутюняна [1]

$$2Ge_{ij} = s_{ij} - \int_{\tau_1}^{t} s_{ij} f(\sigma_0) K(t, \tau)\, d\tau \tag{1.1}$$

где $G = E/3$, E предполагается постоянным, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$, δ_{ij} — символ Кронекера, σ — среднее давление, $f(\sigma_0)$ — некоторая функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести для данного материала, σ_0 — интенсивность касательных напряжений, $K(t, \tau) = 3G \dfrac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}$, $C(t, \tau)$ — мера ползучести при одноосном напряженном состоянии.

Воспользуемся тороидальными координатами α, β, γ:

$x = \rho \cos \gamma$, $y = \rho \sin \gamma$, $z = H \sin \beta$, где $\rho = a\,(\operatorname{sh} \alpha\,(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{-1}$

$H = a\,(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{-1}$, здесь $0 \leqslant \alpha \leqslant \infty$, $-\pi \leqslant \beta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi$ (фиг. 2).

Для компонентов деформации будем иметь [4]

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u_\alpha}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{u_\beta}{H}\right), \quad 2\varepsilon_{\alpha\gamma} = \frac{H}{\rho} \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{u_\alpha}{H}\right) + \frac{\rho}{H} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{u_\gamma}{\rho}\right)\Bigg|_{(\alpha,\beta)}$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{u_\alpha}{H}\right) + \frac{1}{H^2}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} u_\alpha + \frac{\partial H}{\partial \beta} u_\beta\right)\Bigg|_{(\alpha,\beta)} \tag{1.2}$$

$$\varepsilon_{\gamma\gamma} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{1}{H\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \alpha} u_\alpha + \frac{\partial \rho}{\partial \beta} u_\beta\right)$$

Положим, что все компоненты напряжения, кроме $\sigma_{\alpha\gamma}$ и $\sigma_{\beta\gamma}$, в любой момент времени t равны нулю. Тогда из уравнений равновесия остается [4]

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(H\rho^2 \sigma_{\alpha\gamma}) + \frac{\partial}{\partial \beta}(H\rho^2 \sigma_{\beta\gamma}) = 0 \tag{1.3}$$

а из остальных уравнений следует, что напряженное состояние стержня не зависит от γ, следовательно, тензор деформации также не зависит от γ. Из (1.2) перемещения представим в виде

$$u_\alpha = u_{\alpha 0} + \int F_\alpha \, d\gamma\Big|_{(\alpha,\beta)}, \quad F_\alpha = 2\rho\varepsilon_{\alpha\gamma} - \frac{\rho^2}{H} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{u_\gamma}{\rho}\right)\Bigg|_{(\alpha,\beta)}$$

$$u_\gamma = u_{\gamma 0} + \int \left(\rho\varepsilon_{\gamma\gamma} - \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} u_\alpha - \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial \beta} u_\beta\right) d\gamma \tag{1.4}$$

где $u_{\alpha 0}$, $u_{\beta 0}$, $u_{\gamma 0}$ — произвольные функции α, β и t.

Подставляя (1.4) в (1.2) и учитывая указанное обстоятельство, получим

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{H} \frac{\partial u_{\alpha 0}}{\partial \alpha} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial \beta} u_{\beta 0}\Bigg|_{(\alpha,\beta)}, \quad 2\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{u_{\beta 0}}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u_{\alpha 0}}{H}\right) \tag{1.5}$$

а относительно F_α, F_β приходим к системе трех дифференциальных уравнений, решение которой будет

$$F_\alpha = (D_0 + D_1 z) \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} + (D - D_1 \rho) \frac{1}{H} \frac{\partial z}{\partial \alpha}\Bigg|_{(\alpha,\beta)} \tag{1.6}$$

где D_0, D_1, D — произвольные функции от t.

Исключая из (1.4) u_γ и используя (1.6), получим уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{H}{\rho} \varepsilon_{\beta\gamma}\right) - \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{H}{\rho} \varepsilon_{\alpha\gamma}\right) = D \frac{H^2}{\rho^2} \tag{1.7}$$

Полагая в (1.5) равными нулю все компоненты деформации, кроме $\varepsilon_{\alpha\gamma}$ и $\varepsilon_{\beta\gamma}$, получим систему относительно $u_{\alpha 0}$, $u_{\beta 0}$, решение которой будет

$$u_{\alpha 0} = -\frac{N_1}{H}\frac{\partial \rho}{\partial \alpha} - \frac{N_2}{H}\frac{\partial z}{\partial \alpha}\Big|_{(\alpha,\, \beta)} \tag{1.8}$$

где

$$N_1 = \frac{A}{4}(\rho^2 - z^2) + \frac{B_1}{2}\rho z + \frac{C_1}{2}\rho - E_1 z$$

$$N_2 = \frac{A}{2}\rho z - \frac{B_1}{4}(\rho^2 - z^2) + \frac{C_1}{2} z + E_1 \rho$$

A, B_1, C_1, E_1 — произвольные функции от t.

После подстановки (1.6) и (1.8) в (1.4) получим выражения для перемещений u_α, u_β, u_γ.

Вводя функцию напряжений

$$\tau_{\alpha\gamma} = -\frac{1}{H\rho^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}, \quad \tau_{\beta\gamma} = \frac{1}{H\rho^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \tag{1.9}$$

от (1.1) и (1.7) приходим к основному уравнению задачи

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{\rho^3}\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{\rho^3}\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right) -$$

$$-\int_{\tau_1}^{t}\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{f(\tau_0)}{\rho^3}\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right] + \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{f(\tau_0)}{\rho^3}\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right]\right\} K(t, \tau)\, d\tau = \dot{D}G\frac{H^2}{\rho^3} \tag{1.10}$$

где

$$\tau_0 = \frac{1}{H\rho^2}\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right)^2} \tag{1.11}$$

Таким образом, задача приводится к определению функции Φ из нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.10) при условии $\Phi(\alpha, \beta, t) = \mathrm{const}$ на контуре.

Рассмотрим случай, когда поперечное сечение представляет криволинейный прямоугольник (фиг. 2). Тогда граничные условия примут следующий вид:

$$\Phi(\alpha_0, \beta, t) = \Phi(\alpha_1, \beta, t) = \Phi(\alpha, \beta_0, t) = \Phi(\alpha, \beta_1, t) = 0 \tag{1.12}$$

Крутящий момент выражается формулой

$$M = \iint_\Omega [(\rho - R_1)\tau_{z\gamma} - z\tau_{\rho\gamma}]\, d\Omega \tag{1.13}$$

где

$$d\Omega = H^2\, d\alpha\, d\beta = d\rho\, dz.$$

Переходя от $\tau_{\alpha\gamma}$, $\tau_{\beta\gamma}$ к $\tau_{\rho\gamma}$, $\tau_{z\gamma}$ и подставляя в (1.13), после применения формулы Грина-Остроградского получим:

$$M = 2R_1 \iint_{\Omega} \frac{\Phi}{\rho^3}\, d\Omega$$

§ 2. *Решение интегро-дифференциального уравнения* (1.10). Положим, что

$$f(\sigma_0) = 1 + \lambda \sigma_0^2 \tag{2.1}$$

где λ — физический параметр, характеризующий нелинейный закон ползучести. Решение уравнения (1.10) ищем в виде ряда

$$\Phi(\alpha, \beta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(\alpha, \beta, t) \tag{2.2}$$

где Φ_0 соответствует случаю линейно-упругого материала.

Подставляя (2.2) в (1.10) и (1.11), приходим к системе рекуррентных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \beta^2} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \beta} = H \varphi_n \tag{2.3}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

где

$$\varphi_0(t) = GD(t) + G \int_{\tau_1}^{t} D(\tau) R(t, \tau)\, d\tau \tag{2.4}$$

а $\varphi_n(\alpha, \beta, t)$ при $n \geqslant 1$ определяются соотношениями

$$\varphi_n(\alpha, \beta, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\tau_1}^{t} N(t, \tau) (\omega_k \varphi_{n-1-k} + \operatorname{grad} \Phi_k \operatorname{grad} \omega_{n-1-k})\, d\tau \tag{2.5}$$

Здесь

$$N(t, \tau) = K(t, \tau) + \int_{\tau}^{t} R(t, \xi) K(\xi, \tau)\, d\xi \tag{2.6}$$

$$\omega_n = \rho^{-4} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{grad} \Phi_k \operatorname{grad} \Phi_{n-k} \tag{2.7}$$

$R(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau)$. Если

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau)\left[1 - e^{-\gamma_0 (t-\tau)}\right]$$

то

$$R(t, \tau) = \gamma_0 - \eta'(\tau) + \left[\eta''(\tau) + \eta'^2(\tau) - \gamma_0 \eta'(\tau)\right] e^{\eta(\tau)} \int_{\tau}^{t} e^{-\eta(x)}\, dx$$

$$\eta(t) = \gamma_0 \int_{\tau_1}^{t} [1 + 3G\varphi(\tau)]\, d\tau$$

причем, согласно [1], $\varphi(\tau) = C_0 + A_1 \tau^{-1}$, где C_0, A_1, γ_0 — некоторые постоянные, характеризующие свойство ползучести материала.

Вводя новую функцию $\Psi_n(\alpha, \beta, t)$ при помощи соотношения $\Phi_n(\alpha, \beta, t) = (\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)^{-3/2} \operatorname{sh}^2\alpha \, \Psi_n(\alpha, \beta, t)$, из (2.3) получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{\partial^2\Psi_n}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\Psi_n}{\partial\beta^2} + \operatorname{cth}\alpha \frac{\partial\Psi_n}{\partial\alpha} + \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{\operatorname{sh}^2\alpha}\right)\Psi_n = \frac{H^2(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)^{3/2}}{\operatorname{sh}^2\alpha}\varphi_n \tag{2.8}$$

а из (1.12) получим

$$\Psi_n(\alpha_0, \beta, t) = \Psi_n(\alpha_1, \beta, t) = \Psi_n(\alpha, \beta_0, t) = \Psi_n(\alpha, \beta_1, t) = 0 \tag{2.9}$$

Решая уравнение (2.8) при граничных условиях (2.9) и переходя к $\Psi_n(\alpha, \beta, t) = \Phi_n$, получим

$$\Phi_n = \frac{\operatorname{sh}^2\alpha(\beta_1 - \beta_0)^{-1}}{(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)^{3/2}} \iint_{\Omega} \varphi_n(\xi, \eta, t)(\operatorname{ch}\xi - \cos\eta)^{1/2} \Gamma(\alpha, \beta; \xi, \eta) \, d\Omega \tag{2.10}$$

Здесь $\Gamma(\alpha, \beta; \xi, \eta)$ — функция Грина для данной задачи, причем $\Gamma(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B(\alpha, \beta; \xi, \eta)$ при $\xi \leqslant \alpha$, где

$$B(\alpha, \beta; \xi, \eta) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z^2_{\mu_n - 1/2}(\xi, \alpha_0) Z^2_{\mu_n - 1/2}(\alpha_1, \alpha)}{(\mu_n^2 - 9/4)(\mu_n^2 - 1/4) Z^2_{\mu_n - 1/2}(\alpha_0, \alpha_1)} \times$$

$$\times \sin\mu_n(\beta - \beta_0) \sin\mu_n(\eta - \beta_0) \tag{2.11}$$

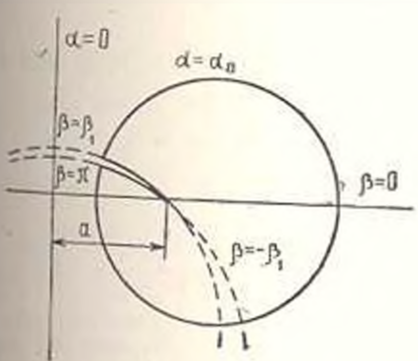
и $\Gamma(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B(\xi, \eta; \alpha, \beta)$ при $\alpha \leqslant \xi$, а $\mu_n = \dfrac{\pi n}{\beta_1 - \beta_0}$

$$Z_n^m(\alpha, \beta) = P_n^m(\operatorname{ch}\alpha) Q_n^m(\operatorname{ch}\beta) - P_n^m(\operatorname{ch}\beta) Q_n^m(\operatorname{ch}\alpha)$$

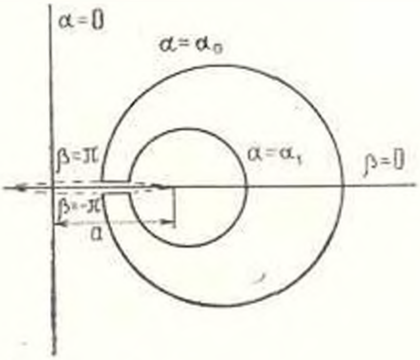
где $P_n^m(x)$ и $Q_n^m(x)$ — присоединенные сферические функции соответственно первого и второго рода m-го порядка n-го индекса.

Рассмотрим ряд частных случаев этого решения.

1. Переходя в (2.10) и (2.11) к пределу при $\alpha_1 \to \infty$, $\beta_0 \to -\beta_1 \neq 0, \pi$, получим решение задачи для соответствующей области (фиг. 3). Тогда



Фиг. 3.



Фиг. 4.

$$\Phi_n = \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha}{2\beta_1 (\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)^{3/2}} \int\int \varphi_n(\xi, \eta, t)(\operatorname{ch}\xi - \cos\eta)^{3/2}\, \Gamma_0(\alpha, \beta; \xi, \eta)\, d\Omega$$

где

$$\Gamma_0(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B_0(\alpha, \beta; \xi, \eta) \text{ при } \xi \leqslant \alpha, \text{ причем}$$

$$B_0(\alpha, \beta; \xi, \eta) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z^2_{\mu_n - 1/2}(\alpha_0, \xi)\, Q^2_{\mu_n - 1/2}(\operatorname{ch}\alpha)}{(\mu_n^2 - 9/4)(\mu_n^2 - 1/4)\, Q^2_{\mu_n - 1/2}(\operatorname{ch}\alpha_0)} \times$$

$$\times \sin\mu_n(\beta + \beta_1) \sin\mu_n(\eta + \beta_1)$$

и $\Gamma_0(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B_0(\xi, \eta; \alpha, \beta)$ при $\alpha \leqslant \xi$; здесь $\mu_n = \dfrac{\pi n}{2\beta_1}$.

2. Переходя в (2.10) и (2.11) к пределу при $\beta_0 \to -\pi$, $\beta_1 \to \pi$, получим решение задачи для соответствующей области (фиг. 4). Тогда

$$\Phi_n = \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha}{2\pi (\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)^{3/2}} \int\int \varphi_n(\xi, \eta, t)(\operatorname{ch}\xi - \cos\eta)^{3/2} [\Gamma^*(\alpha, \beta; \xi, \eta) +$$

$$+ \frac{1}{\operatorname{sh}\xi} \Gamma_1^*(\alpha, \beta; \xi, \eta)]\, d\Omega \tag{2.12}$$

где

$$\Gamma^*(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B^*(\alpha, \beta; \xi, \eta), \quad \Gamma_1^*(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B_1^*(\alpha, \beta; \xi, \eta)$$

при $\xi \leqslant \alpha$, причем

$$B^*(\alpha, \beta; \xi, \eta) = 32 \sum_{n=2,4,5,6,7,\ldots}^{\infty} \frac{Z^2_{n-1/2}(\xi, \alpha_0)\, Z^2_{n-1/2}(\alpha_1, \alpha)}{(n^2 - 9)(n^2 - 1)\, Z^2_{n-1/2}(\alpha_0, \alpha_1)} \times$$

$$\times \sin\frac{n}{2}(\beta + \pi) \sin\frac{n}{2}(\eta + \pi)$$

$$B_1^*(\alpha, \beta; \xi, \eta) = \frac{\Pi_1(\xi, \alpha_0)\, \Pi_1(\alpha, \alpha_1)}{\Pi_1(\alpha_0, \alpha_1)} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\eta}{2} +$$

$$+ \frac{\Pi_2(\xi, \alpha_0)\, \Pi_2(\alpha, \alpha_1)}{\Pi_2(\alpha_0, \alpha_1)} \cos\frac{3}{2}\beta \cos\frac{3}{2}\eta$$

и $\Gamma^*(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B^*(\xi, \eta; \alpha, \beta)$, $\Gamma_1^*(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B_1^*(\xi, \eta; \alpha, \beta)$ при $\alpha \leqslant \xi$.

Здесь

$$\Pi_1(\alpha, \beta) = \frac{\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{sh}^2\alpha} \frac{\operatorname{ch}^2\beta + 1}{\operatorname{sh}^2\beta} - \frac{\operatorname{ch}\beta}{\operatorname{sh}^2\beta} \frac{\operatorname{ch}^2\alpha + 1}{\operatorname{sh}^2\alpha}$$

$$\Pi_2(\alpha, \beta) = \frac{1}{\operatorname{sh}^2\alpha} \frac{1}{\operatorname{sh}^2\beta}\left(\frac{\operatorname{ch}^3\beta}{3} - \operatorname{ch}\beta\right) - \frac{1}{\operatorname{sh}^2\beta} \frac{1}{\operatorname{sh}^2\alpha}\left(\frac{\operatorname{ch}^3\alpha}{3} - \operatorname{ch}\alpha\right)$$

3. Переходя в (2.12) и (2.13) к пределу при $\alpha_1 \to \infty$, получим решение задачи для сплошного круга с криволинейной щелью (фиг. 5). Тогда

$$\Phi_n = \frac{\operatorname{sh}^2\alpha}{2\pi(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)^{3/2}}\iint\limits_{\Omega}\varphi_n(\xi,\eta,t)(\operatorname{ch}\xi-\cos\eta)^{3/2}[\Gamma_0^*(\alpha,\beta;\xi,\eta)+$$

$$+\frac{1}{\operatorname{sh}\xi}\Gamma_{10}^*(\alpha,\beta;\xi,\eta)]\,d\Omega$$

где

$\Gamma_0^*(\alpha,\beta;\xi,\eta)=B_0^*(\alpha,\beta;\xi,\eta)$, $\Gamma_{10}^*(\alpha,\beta;\xi,\eta)=B_{10}^*(\alpha,\beta;\xi,\eta)$ при $\xi\leqslant\alpha$

причем

$$B_0^*(\alpha,\beta;\xi,\eta)=32\sum_{n=2,4,5,6,7,\ldots}\frac{Z_{(n-1)/2}^2(\alpha_0,\xi)\,Q_{(n-1)/2}^2(\operatorname{ch}\alpha)}{(n^2-9)(n^2-1)\,Q_{(n-1)/2}^2(\operatorname{ch}\alpha)}\times$$

$$\times\sin\frac{n}{2}(\beta+\pi)\sin\frac{n}{2}(\eta+\pi)$$

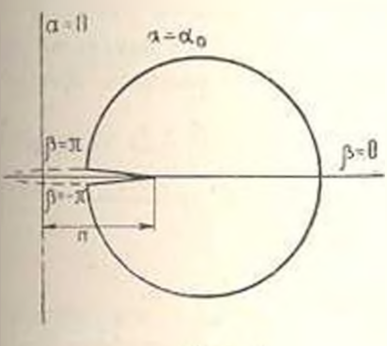
$$B_{10}^*(\alpha,\beta;\xi,\eta)=\frac{\Pi_1(\xi,\alpha_0)\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}^2\alpha_0}{\operatorname{sh}^2\alpha\operatorname{ch}\alpha_0}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\eta}{2}+$$

$$+\frac{\Pi_3(\xi,\alpha_0)\operatorname{sh}^2\alpha_0}{\operatorname{sh}^2\alpha}\cos\frac{3}{2}\beta\cos\frac{3}{2}\eta$$

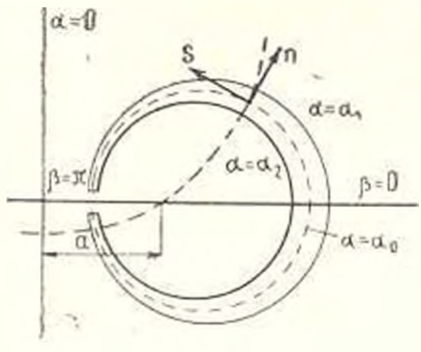
и

$\Gamma_0^*(\alpha,\beta;\xi,\eta)=B_0^*(\xi,\eta;\alpha,\beta)$, $\Gamma_{10}^*(\alpha,\beta;\xi,\eta)=B_{10}^*(\xi,\eta;\alpha,\beta)$ при $\alpha\leqslant\xi$.

§ 3. *Исследование сходимости ряда* (2.2). Для доказательства существования решения надо показать, что ряд (2.2), где коэффициенты определяются из рекуррентных формул (2.10), сходится абсолютно и равномер-



Фиг. 5.



Фиг. 6.

но. С этой целью оценим $\Phi_n(\alpha,\beta,t)$. Возьмем фиксированный промежуток $\tau_1\leqslant t\leqslant T$ и положим

$$\max|K(t,\tau)|=K_T,\ \max|R(t,\tau)|=R_T,\ \tau_1\leqslant\tau,\ t\leqslant T \tag{3.1}$$

Тогда из (2.6) и (3.1) следует, что

$$|N(t,\tau)|\leqslant K_T(1+R_TT)=N_T \tag{3.2}$$

Вводя норму

$$|X|=\max|X|+\sup\frac{|X(A)-X(B)|}{|AB|^{\lambda}}$$

где A, B — произвольные точки внутри поперечного сечения стержня, $0 < \delta < 1$, при помощи априорных оценок Шаудера [5], которые в данном случае пишутся в виде

$$\|D^2\Phi_n\| \leqslant c_* \|\varphi_n\| \tag{3.3}$$

где c_* — некоторая постоянная, зависящая от формы области, и пользуясь (2.4), (2.5), (2.7), (3.2) и (3.3), получим рекуррентную систему неравенств

$$\|\varphi_{n+1}\| \leqslant \nu \sum_{k=0}^{n} \|\varphi_k\| \, q_{n-k}$$

где

$$\nu = 2\, N_T\, T \mu c_*^2 (1 + 6\,\mu\, c_*)$$

$$\mu = \max_{(\alpha,\beta)\in\Omega} \left\{ \|H^{-2}\|, \left\|\frac{\partial}{\partial\alpha}(H^{-2}\rho^{-4})\right\|, \left\|\frac{\partial}{\partial\beta}(H^{-2}\rho^{-4})\right\|, \|H^{-2}\rho^{-4}\| \right\}$$

$$q_n = \sum_{k=0}^{n} \|\varphi_k\| \|\varphi_{n-k}\|$$

Рассмотрим ряд с общим членом $t^n \|\varphi_0\| n^{-2} t_*^{-n}$. Методом индукции можно показать, что $\|\varphi_n\| \leqslant \|\varphi_0\| n^{-2} t_*^{-n}$. Следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} t^n \|\varphi_n\|$, а поэтому и ряд (2.2) сходятся абсолютно и равномерно с радиусом сходимости $t = t_* = (364\, \nu \|\varphi_0\|^2)^{-1}$.

§ 4. *Тонкостенный стержень открытого профиля.* Пусть поперечное сечение тонкостенного стержня представляет криволинейный открытый профиль, симметрично расположенный относительно средней линии $\alpha = \alpha_0$ (фиг. 6). Для тонкостенных призматических стержней эта задача исследована в [6]. В этом случае в уравнении (1.10) можно пренебречь производной по β и заменить его уравнением вида

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\rho^3}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{f(\sigma_0)}{\rho^3}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right] K(t,\tau)\, d\tau = DG\frac{H^2}{\rho^3} \tag{4.1}$$

где

$$\sigma_0 = \sigma_{\beta z} = \frac{1}{H\rho^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}$$

Интегрируя (4.1) и принимая во внимание, что $\sigma_0 = 0$ при $\alpha = \alpha_0$, получим

$$\sigma_0(t) - \int_{t_0}^{t} f(\sigma_0)\,\sigma_0\, K(t,\tau)\, d\tau = DGg \tag{4.2}$$

где

$$g = g(\alpha, \beta) = (\operatorname{ch}\alpha_0 - \cos\beta)(\alpha - \alpha_0)(a \operatorname{sh}^2\alpha_0)^{-1}$$

Если к этому уравнению применить вышеизложенный метод и удовлетвориться только первыми двумя приближениями, то для $\sigma_0(t)$ получим

$$\sigma_0(t) = Gg\{H_0(t) + \lambda Gg[H_1(t) + \int_{\tau_1}^{t} H_1(\tau) R(t, \tau)\, d\tau]\} + 0(\lambda^2) \qquad (4.3)$$

где

$$H_0(t) = D(t) + \int_{\tau_1}^{t} D(\tau) R(t, \tau)\, d\tau, \quad H_1(t) = \int_{\tau_1}^{t} H_0^2(\tau) K(t, \tau)\, d\tau \qquad (4.4)$$

здесь принято $f(\sigma_0) = 1 + \lambda\sigma_0$.

Пользуясь (1.13) и (4.3), получим

$$H_0(t) + \lambda k_1 \int_{\tau_1}^{t} [H_0^2(\tau) + \int_{\tau_1}^{\tau} H_0^2(x) R(\tau, x)\, dx] K(t, \tau)\, d\tau = k_2 \qquad (4.5)$$

где

$$k_1 = GJ_2 J_1^{-1}, \quad k_2 = M(GJ_1)^{-1}$$

$$J_1 = -\iint_{\Omega} \left(\frac{\rho - a\operatorname{cth}\alpha_0}{H}\frac{\partial z}{\partial \beta} + \frac{z}{H}\frac{\partial \rho}{\partial \beta}\right) g(\alpha, \beta)\, d\Omega$$

$$J_2 = -\iint_{\Omega} \left(\frac{\rho - a\operatorname{cth}\alpha_0}{H}\frac{\partial z}{\partial \beta} + \frac{z}{H}\frac{\partial \rho}{\partial \beta}\right) [g(\alpha, \beta)]^2\, d\Omega$$

Если к уравнению (4.5) применить вышеизложенный метод и удовлетвориться только первыми двумя приближениями, то для неизвестной функции $H_0(t)$ получим

$$H_0(t) = k_2\{1 + \lambda k_1 k_2 [3\, GC(t, \tau_1) - \int_{\tau_1}^{t}\int_{\tau_1}^{\tau} R(t, x) K(t, \tau)\, dx d\tau]\} + 0(\lambda^2)$$

Решая (4.4) относительно $D(t)$, будем иметь

$$D(t) = H_0(t) + \int_{\tau_1}^{t} H_0(\tau) K(t, \tau)\, d\tau$$

Рассмотрим задачу релаксации напряжений. В начальный момент стержню сообщим крутку $D(\tau_1)$, оставляя ее во времени неизменной. Тогда интегральное уравнение (4.2) примет вид

$$\sigma_0(t) - \int_{\tau_1}^{t} f(\sigma_0)\sigma_0 K(t, \tau)\, d\tau = D(\tau_1)\, Gg \qquad (4.6)$$

Если к уравнению (4.6) применить вышеизложенный метод и удовлетвориться только первыми двумя приближениями, пользуясь (1.13), получим

$$M(t)/M(\tau_1) = H_0^*(t) + \lambda k_3 [H_1^*(t) + \int_{\tau_1}^{t} H_1^*(\tau) R(t, \tau)\, d\tau] + 0(\lambda^2) \qquad (4.7)$$

где

$$H_0^*(t) = 1 - 3\,G\gamma_0\,(C_0 + A_1\tau_1^{-1})\,e^{r\tau_1}\tau_1^{p}\,r^{p-1}[\Phi_*(rt,\ p) - \Phi_*(r\tau_1,\ p)]$$

$$p = 3G\gamma_0 A_1,\ r = \gamma_0(1 + 3\,GC_0),\ H_1^*(t) = \int\limits_{\tau_1}^{t}[H_0^*(\tau)]^2 K(t,\ \tau)\,d\tau$$

$k_3 = D(\tau_1)\,G\,J_2 J_1^{-1}$, $\Phi_*(\xi,\ p) = \int\limits_{0}^{\xi} e^{-\tau}\tau^{-p}\,d\tau$ — неполная гамма-функция.

Аналогичным образом, ограничиваясь в общем решении интегрального уравнения (4.6) первыми тремя приближениями, для определения релаксации крутящего момента получим следующую формулу:

$$M(t)/M(\tau_1) = H_0^*(t) + \lambda k_3[H_1^*(t) + \int\limits_{\tau_1}^{t} H_1^*(\tau)\,R(t,\ \tau)\,d\tau] +$$
$$+ \lambda^2 k_4[H_2^*(t) + \int\limits_{\tau_1}^{t} H_2^*(\tau)\,R(t,\ \tau)\,d\tau] + 0(\lambda^3) \tag{4.8}$$

где

$$H_2^*(t) = \int\limits_{\tau_1}^{t}[H_0^*(\tau)\,H_1^*(\tau) + \int\limits_{\tau_1}^{\tau} H_1^*(x)\,R(t,\ x)\,dx]\,K(t,\ \tau)\,d\tau$$

$$k_4 = 2[GD(\tau_1)]^2 J_3 J_1^{-1},\ J_3 = \iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\rho - a\,\mathrm{cth}\,\alpha_0}{H}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{z}{H}\frac{\partial \rho}{\partial \beta}\right)[g(\alpha,\ \beta)]^3\,d\Omega$$

Рассмотрим частный случай. Для старого материала можно положить $\varphi(\tau) = C_0$. Тогда из (4.6) получим замкнутое решение

$$\alpha_0(t) = \frac{(\omega - x_2)\,x_1 - x_2(\omega - x_1)\,e^{A^*(t-\tau_1)(x_2-x_1)}}{\omega - x_2 - (\omega - x_1)\,e^{A^*(t-\tau_1)(x_2-x_1)}}$$

где $\omega = D(\tau_1)\,Gg$, $A^* = -3\,GC_0\gamma_0$, а x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^2 + \gamma_0(1 + 3\,GC_0)\,x - \omega\gamma_0 = 0$$

Аналогичным образом, если принять $f(\alpha_0) = 1 + k\alpha_0^2$, то решение получается в квадратурах

$$\ln\left|\frac{\alpha_0(t) - \xi_*}{\omega - \xi_*}\right|\sqrt{\frac{\omega^2 + \xi_*\omega + p_* + \xi_*^2}{\alpha_0^2(t) + \xi_*\alpha_0(t) + p_* + \xi_*^2}} -$$
$$- \frac{3\,\xi_*}{\sqrt{4p_* + 3\,\xi_*^2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt{4p_* + 3\,\xi_*^2}\,[\alpha_0(t) - \omega]}{4p_* + 3\,\xi_*^2 + [2\,\alpha_0(t) + \xi_*](2\,\omega + \xi_*)} =$$
$$= A_*(3\,\xi_*^2 + p_*)(t - \tau_1)$$

где

$$A_* = -3\,GC_0\gamma_0\lambda, \quad p_* = (1+3\,GC_0)\,(3\,GC_0\lambda)^{-1}$$

$$\xi_* = \sqrt[3]{-\frac{q_*}{2}+\sqrt{Q_*}} + \sqrt[3]{-\frac{q_*}{2}-\sqrt{Q_*}}, \quad q_* = -D(\tau_1)\,g\,(3\,C_0\lambda)^{-1}$$

$$Q_* = \left(\frac{p_*}{3}\right)^3 + \left(\frac{q_*}{2}\right)^2$$

На ЭВМ „ЕС-1022" при значениях параметров $\operatorname{ch}\alpha_0 = 3$,

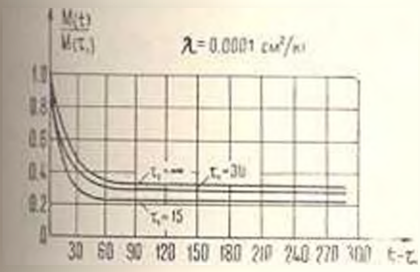
$$a = 6\sqrt{8}\ \textit{см}, \quad \alpha_0 - \alpha_1 = (2\sqrt{8})^{-1}, \quad A_1 = 4.82\cdot 10^{-5}\,\textit{см}^2\ \textit{день/кг},$$

$$C_0 = 0.9\cdot 10^{-5}\ \textit{см}^2/\textit{кг}, \quad 3\,G = 2\cdot 10^5\ \textit{кг/см}^2, \quad \gamma_0 = 0.026\ \frac{1}{\textit{день}},$$

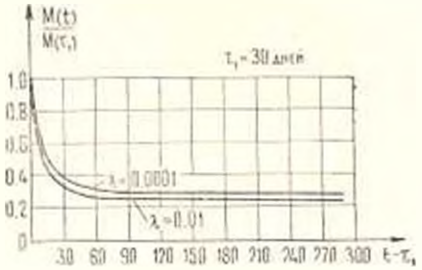
$$M(\tau_1) = 500\ \textit{кгсм}$$

дано решение задачи о релаксации крутящего момента тонкостенного стержня. Вычисления показывают, что значения $M(t)/M(\tau_1)$, полученные при помощи формул (4.7) и (4.8), отличаются на 10^{-5}, следовательно, в общем решении (2.2) уравнения (4.6) можно ограничиться первыми двумя приближениями.

На фиг. 7 и 8 показано изменение крутящего момента во времени при различных значениях τ_1 и λ.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

За постановку задачи и постоянное внимание выражаю благодарность моему научному руководителю проф. М. А. Задояну.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступило 2 X 1980

Յ. Մ. ՓՈԼԱԴՅԱՆ

ԿՈՐԱՑԻԾ ՃԵՂՔՈՎ ԿՈՐ ՍՆԱՄԵՋ ՁՈՂԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրվում է կորացիծ ճեղքով կոր սնամեջ ձողի ոլորումը ոչ գծային ժառանգական սողքի դեպքում: Օգտագործելով Բորականի կոորդինատները, կիսահակադարձային մեթոդով խնդիրը լարումների ֆունկցիայի նկատ-

մամբ բերվում է ոչ-գծային ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման, որի լուծումը փնտրվում է աստիճանային շարքի օգնությամբ և ապացուցվում է այդ շարքի զուգամիտությունը: Դիտարկվում են մի քանի մասնավոր դեպքեր: Բարակապատ բաց պրոֆիլով ձողի համար լուծված են սողքի և ռելաքսացիայի խնդիրները: Վերջինիս համար բերված թվային օրինակների հիման վրա կառուցված են գրաֆիկներ:

THE TORSION OF A CURVED HOLLOW CORE WITH CURVILINEAR SLOTS UNDER NON-LINEAR CREEP

F. M. POLADIAN

Summary

The torsion of a curved hollow core with curvilinear slots is considered under non-linear hereditary creep. By using toroidal coordinates and the semi-reverse method the problem is reduced to the non-linear integro-differential equation with respect to the stress function. The solution of this equation is obtained in the form of a power series and the series convergence is proved.

Some particular cases are treated.

For a thin-walled core of an open section the problem of creep and relaxation is solved. Graphs for relaxation are plotted on the basis of numerical examples.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., ГИТТЛ, 1952.
2. *Задоян М. А.* Пластическое кручение неполного тора. ДАН СССР, 1975, т. 223, № 2.
3. *Задоян М. А.* Пластическое кручение сектора кольца. Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 1.
4. *Новожилов В. В.* Теория упругости. М.—Л., Судстройиздат, 1962.
5. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1965.
6. *Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Кручение тонкостенных стержней открытого профиля в условиях неустановившейся ползучести. Изв. АН СССР, механика и машиностроение, 1959, № 6.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 3, 1981 Механика

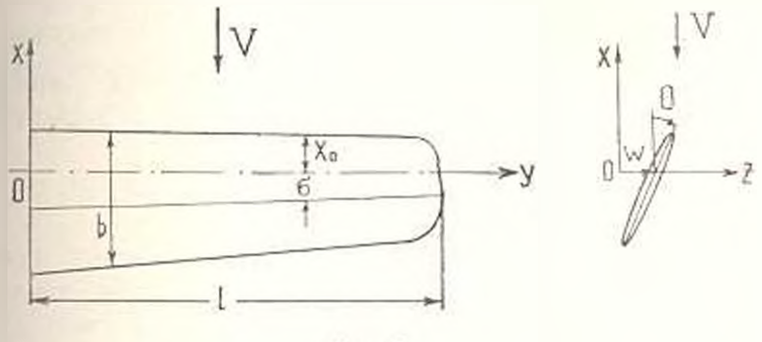
А. П. СЕЙРАНЯН

ВЛИЯНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МАСС И ЖЕСТКОСТЕЙ НА КРИТИЧЕСКУЮ СКОРОСТЬ ФЛАТТЕРА

Исследуется влияние распределений масс и жесткостей крыла большого удлинения на критическую скорость изгибно-крутильного флаттера в несжимаемом потоке газа. Выведены соотношения, описывающие изменение флаттерных характеристик в зависимости от вариаций масс и жесткостей по размаху крыла. Описан алгоритм перераспределения этих величин с целью повышения критической скорости флаттера. Приведены и проанализированы результаты численных расчетов.

Задачи оптимизации флаттерных характеристик в дискретной постановке рассматривались в работах [1—4].

1. Рассмотрим колебания тонкого крыла в несжимаемом потоке газа. Предполагается, что крыло представляет собой упругую балку тонкостенного сечения с прямой упругой осью Oy, перпендикулярной фюзеляжу (фиг. 1). Ось Oz направлена перпендикулярно вверх к плоскости чертежа. Ось инерции показана на фиг. 1 сплошной линией.



Фиг. 1.

Деформация крыла характеризуется перемещением $w(x, t)$ и углом поворота $\Theta(x, t)$ относительно упругой оси. Уравнения движения крыла в потоке имеют вид [5, 6]

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m\sigma\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = L_a \\
-\frac{\partial}{\partial y}\left(GJ\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right) - m\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_m\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = M_a
\end{gathered} \qquad (1.1)
$$

В этих уравнениях EI и GJ — жесткости на изгиб и кручение, m и I_m — масса и массовый момент инерции, приходящиеся на единицу размаха, σ — расстояние между упругой осью и осью инерции, L_a и M_a — соответственно аэродинамические сила и момент относительно упругой оси на единицу размаха.

Для описания аэродинамических сил примем гипотезу стационарности [5, 6], согласно которой аэродинамические характеристики крыла в неустановившемся движении заменяются в каждый момент времени характеристиками того же крыла, движущегося с постоянной линейной и угловой скоростями, равными скоростям действительного движения. Выражения для L_a и M_a записываются в виде

$$L_a = C_y^{\alpha} \rho V^2 b \left[\theta + \frac{b}{V}\left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b}\right)\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{1}{V}\frac{\partial w}{\partial t} \right]$$

$$M_a = C_m^{\alpha} \rho V^2 b^2 \left[\theta + \frac{b}{V}\left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} - \frac{\pi}{16\,C_m^{\alpha}}\right)\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{1}{V}\frac{\partial w}{\partial t} \right] \tag{1.2}$$

где b — хорда крыла, x_0 — расстояние от передней кромки до упругой оси, ρ — плотность газа, V — скорость потока. Теоретические значения аэродинамических коэффициентов C_y^{α} и C_m^{α} для тонкого крыла бесконечного размаха составляют соответственно $C_y^{\alpha} = \pi$, $C_m^{\alpha} = \pi(x_0/b - 0.25)$. Граничные условия для w и θ имеют вид

$$w = \frac{\partial w}{\partial y} = \theta = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \tag{1.3}$$

$$EI\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(EI\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = GJ\,\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = l$$

Система уравнений (1.1)—(1.3) представляет собой линейную однородную краевую задачу. Решение уравнений (1.1)—(1.3) будем искать в виде

$$w(y, t) = u(y)\,e^{\lambda t}, \quad \theta(y, t) = v(y)\,e^{\lambda t} \tag{1.4}$$

где λ — собственное значение, $u(y)$, $v(y)$ — собственные функции. В силу неконсервативности задачи λ, $u(y)$, $v(y)$ — вообще говоря, комплексные величины, $\lambda = q + i\omega$, $u(y) = u_1(y) + iu_2(y)$, $v(y) = v_1(y) + iv_2(y)$, i — мнимая единица. В зависимости от скорости потока V амплитуда колебаний может убывать с течением времени ($\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, устойчивость), либо возрастать ($\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, неустойчивость). Различают два типа потери устойчивости: колебательный тип (флаттер) и апериодический (дивергенция) [7]. Критическая скорость флаттера V_f характеризуется соотношениями $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, $\mathrm{Im}\,\lambda = \omega \neq 0$, где ω — частота флаттера, а критическая скорость дивергенции V_d — равенством $\lambda = 0$.

Запишем уравнения движения крыла при флаттере. Для этого в (1.4) положим $\lambda = i\omega$. Подставим затем выражения (1.4) в (1.1)—(1.3) и используем в них $V = V_f$. В результате придем к системе уравнений для собственных функций $u(y)$, $v(y)$. Искомыми величинами также являются критическая скорость флаттера V_f и частота флаттера ω

$$Lf=\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix}=0 \qquad (1.5)$$

где L_{ij} — линейные дифференциальные операторы вида

$$L_{11}=\frac{d^2}{dy^2}\left(EI\frac{d^2}{dy^2}\right)-m\omega^2+i\omega C_y^\alpha \rho V_f b$$

$$L_{12}=m\sigma\omega^2-C_y^\alpha\rho V_f^2 b-i\omega C_y^\alpha\rho V_f\left(\frac{3}{4}-\frac{x_0}{b}\right)b^2 \qquad (1.6)$$

$$L_{21}=m\sigma\omega^2+i\omega C_m^\alpha\rho V_f b^2$$

$$L_{22}=-\frac{d}{dy}\left(GJ\frac{d}{dy}\right)-I_m\omega^2-C_m^\alpha\rho V_f^2 b^2-$$

$$-C_m^\alpha\rho V_f b^3\left(\frac{3}{4}-\frac{x_0}{b}-\frac{\pi}{16C_m^\alpha}\right)i\omega$$

Граничные условия для функций u и v следуют из условий (1.3)

$$u=\frac{du}{dy}=v=0 \quad \text{при } y=0$$

$$EI\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(EI\frac{d^2u}{dy^2}\right)=GJ\frac{dv}{dy}=0 \quad \text{при } y=l \qquad (1.7)$$

Рассмотрим теперь задачу о дивергенции крыла в потоке газа. Для этого в выражениях (1.4)—(1.6) положим $\lambda=0$. В результате придем к самосопряженной и положительно определенной задаче на собственные значения [9]

$$\frac{d}{dy}\left(GJ\frac{dv_d}{dy}\right)+C_m^\alpha\rho V_d^2 b^2 v_d=0 \qquad (1.8)$$

$$v_d(0)=0, \quad \left(GJ\frac{dv_d}{dy}\right)_{y=l}=0$$

Здесь через $v_d(y)$ обозначена собственная функция дивергенции. Критическая скорость дивергенции V_d определяется наименьшим собственным значением задачи (1.8).

Введем управляющую функцию $h(y)$. Предположим, что сечение крыла плоскостью $y=\text{const}$ представляет собой тонкостенный замкнутый профиль произвольного вида. Если изменить толщины всех силовых элементов профиля в h раз, то жесткостные и массовые характеристики этого сечения EI, GJ, I_m, m также изменятся в h раз, а величины σ, x_0 останутся неизменными. Поэтому можно положить

$$EI(y)=EI_0(y)h(y), \quad GJ(y)=GJ_0(y)h(y)$$

$$I_m(y)=I_{m_0}(y)h(y), \quad m(y)=m_0(y)h(y) \qquad (1.9)$$

где EI_0, GJ_0, I_{m0}, m_0 — некоторые фиксированные начальные распределения массовых и жесткостных характеристик.

Функция $h(y)$ будет служить безразмерной управляющей функцией. По смыслу $h(y) \geqslant 0$. Варьирование ею приводит к перераспределению масс и жесткостей и, следовательно, к изменению критических скоростей флаттера и дивергенции.

Наша цель состоит в исследовании влияния различных распределений $h(y)$ на критическую скорость флаттера, а также в том, чтобы целенаправленным изменением $h(y)$ добиться увеличения критической скорости потери устойчивости, сохраняя полную массу крыла неизменной.

2. Вычислим приращение критической скорости флаттера в зависимости от вариации δh.

Введем в рассмотрение сопряженную [8] к (1.5), (1.7) задачу о флаттере, которая потребуется в дальнейшем

$$L^T p = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} \\ L_{12} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = 0 \tag{2.1}$$

Операторы L_{ij} определяются выражениями (1.6). Функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ — комплексные величины $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, $\psi = \psi_1 + i\psi_2$. Граничные условия для них имеют вид

$$\varphi = \frac{d\varphi}{dy} = \psi = 0 \quad \text{при} \quad y = 0$$

$$EI\frac{d^2\varphi}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(EI\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right) = GJ\frac{d\psi}{dy} = 0 \quad \text{при} \quad y = l \tag{2.2}$$

В силу сопряженности краевых задач можно показать, что критическая скорость и частота в задачах (1.5), (1.7) и (2.1), (2.2) совпадают. Эти задачи линейны и однородны относительно вектор-функций f и p, поэтому f и p определены с точностью до произвольного комплексного множителя.

Перейдем к вычислению вариаций. Для этого вернемся к задаче о флаттере (1.5), (1.7) с учетом (1.9). Вариация $\delta h(y)$ приводит к приращениям величин V_f, ω и комплексной вектор-функции $f(y)$. Приращения $\delta h(y)$, δV_f, $\delta\omega$ — действительные величины, вариация комплексной функции $\delta f(y)$ имеет вид

$$\delta f(y) = \begin{pmatrix} \delta u_1(y) + i\delta u_2(y) \\ \delta v_1(y) + i\delta v_2(y) \end{pmatrix}$$

Запишем для задачи (1.5), (1.7) уравнения в вариациях

$$K(\delta h)f + L_{V_f} f\delta V_f + L_\omega f\delta\omega + L\delta f = 0 \tag{2.3}$$

$$\delta u = \frac{d}{dy}\delta u = \delta v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0$$

$$EI_0\delta h\frac{d^2u}{dy^2}+EI\frac{d^2\delta u}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(EI_0\delta h\frac{d^2u}{dy^2}+EI\frac{d^2\delta u}{dy^2}\right)=$$

$$=GJ_0\delta h\frac{dv}{dy}+GJ\frac{d}{dy}\delta v=0 \quad \text{при} \quad y=l$$

где матрицы L_{V_f} и L_ω получаются из матрицы L, см. (1.5), (1.6), формальным дифференцированием по параметрам V_f и ω соответственно, а матричный оператор $K(\delta h)$ имеет вид

$$K(\delta h)=\begin{pmatrix} \frac{d^2}{dy^2}\left(EI_0\delta h\frac{d^2}{dy^2}\right)-m_0\omega^2\delta h, & m_0\sigma\omega^2\delta h \\ m_0\sigma\omega^2\delta h, & -\frac{d}{dy}\left(GJ_0\delta h\frac{d}{dy}\right)-I_{m_0}\omega^2\delta h \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Умножим уравнение (2.3) слева на вектор-функцию строку $p^T(y)=(\varphi(y), \psi(y))$, где p является решением сопряженной задачи (2.1), (2.2) и результат проинтегрируем от 0 до l

$$\int_0^l [p^T K(\delta h)f+(p^T L_{V_f}f)\delta V_f+(p^T L_\omega f)\delta\omega+p^T L\delta f]\,dy=0 \tag{2.5}$$

Интегрируя далее по частям и учитывая граничные условия (2.2), (2.4), можно убедиться в том, что

$$\int_0^l (p^T L\delta f)\,dy=\int_0^l (\delta f L^T p)\,dy=0$$

(последнее равенство справедливо в силу (2.1)), а первый член в (2.5) приводится к виду

$$\int_0^l p^T K(\delta h) f\,dy=\int_0^l H\,\delta h\,dy$$

$$H=EI_0\frac{d^2u}{dy^2}\frac{d^2\varphi}{dy^2}+GJ_0\frac{dv}{dy}\frac{d\psi}{dy}+\omega^2 p^T\begin{pmatrix}-m_0 & m_0\sigma \\ m_0\sigma & -I_{m_0}\end{pmatrix}f \tag{2.6}$$

Введем также обозначения

$$A=\int_0^l (p^T L_{V_f}f)\,dy, \quad B=\int_0^l (p^T L_\omega f)\,dy \tag{2.7}$$

В результате (2.5) примет вид

$$\int_0^l H\delta h\,dy+A\delta V_f+B\delta\omega=0 \tag{2.8}$$

Отметим, что функция H представляет собой комплексную функцию действительного переменного y, а константы A и B — комплексные числа. Умножим (2.8) на комплексно сопряженную к B величину $\overline{B}$ и от результата возьмем мнимую часть. В силу того, что $\mathrm{Im}\,(B\overline{B}) = 0$ и δV_f, $\delta\omega$ — действительные величины, приходим к выражению для вариации

$$\delta V_f = \int_0^l g\,\delta h\,dy, \quad g = -\frac{\mathrm{Im}\,(H\overline{B})}{\mathrm{Im}\,(A\overline{B})} \tag{2.9}$$

Таким образом, функция g является градиентом функционала критической скорости флаттера по управляющей функции h.

Аналогично из (2.8) можно найти также вариацию частоты флаттера

$$\delta\omega = \int_0^l e\,\delta h\,dy, \quad e = -\frac{\mathrm{Im}\,(H\overline{A})}{\mathrm{Im}\,(B\overline{A})} \tag{2.10}$$

Таким образом, для определения градиентов g и e следует решить прямую и сопряженную задачи о флаттере (1.5), (1.7); (2.1), (2.2) и определить комплексные вектор-функции $f\,(y)$, $p\,(y)$ и значения V_f и ω. По ним согласно (2.6), (2.7) следует вычислить комплексные константы A и B и функцию H, а затем из (2.9), (2.10) найти градиенты g и e.

Описанный в этом параграфе способ вычисления градиентов от флаттерных характеристик по управляющей функции $h\,(y)$ можно использовать при вычислении градиентов по любым другим независимым функциям или параметрам задачи. Знание градиента от критической скорости флаттера по различным распределениям и параметрам позволяет рациональным образом улучшить флаттерные характеристики конструкции.

3. Выведем необходимые условия максимума критической скорости флаттера при заданной полной массе материала, из которого изготовлено крыло.

Ограничение на полную массу характеризуется постоянством интеграла

$$M = \int_0^l h\,(y)\,m_0(y)\,dy = \int_0^l m_0\,(y)\,dy \tag{3.1}$$

Градиент функционала M по h равен m_0. Рассмотрим дополнительное ограничение на управляющую функцию $h\,(y)$

$$h_{\min} \leqslant h\,(y) \leqslant h_{\max} \tag{3.2}$$

С учетом выражения для градиента критической скорости флаттера (2.9) и условия (3.1) запишем первую вариацию

$$\delta V_f = \int_0^l (g\,(y) + \mu m_0\,(y))\,\delta h\,(y)\,dy \tag{3.3}$$

Здесь μ — неизвестный множитель Лагранжа.

Если функция $h_0(y)$ такова, что функционал V_f достигает своего максимума, то $\delta V_f \leqslant 0$ на произвольных вариациях δh, удовлетворяющих ограничению (3.2). Отсюда с использованием выражения (3.3) получим необходимые условия локального максимума функционала V_f при ограничениях (3.1), (3.2)

$$
\begin{array}{ll}
g(y) + \mu m_0(y) > 0 & h_0(y) = h_{\max} \\
g(y) + \mu m_0(y) = 0 & h_{\min} < h_0(y) < h_{\max} \\
g(y) + \mu m_0(y) < 0 & h_0(y) = h_{\min}
\end{array}
\tag{3.4}
$$

где множитель μ определяется изопериметрическим условием (3.1).

Основываясь на необходимых условиях экстремума, запишем итерационную формулу

$$
h^{(n+1)} = h^{(n)} + \delta h^{(n)}, \quad \delta h^{(n)} = \alpha^{(n)} [g^{(n)}(y) + \mu^{(n)} m_0(y)] \tag{3.5}
$$

где верхний индекс в скобках (n) означает номер итерации; $\alpha^{(n)}$ — шаг по градиенту, выбираемый вычислителем,

$$
\alpha^{(n)} > 0; \quad \mu^{(n)} = -\int_{\Omega^{(n)}} m_0 g^{(n)} dy \Big/ \int_{\Omega^{(n)}} m_0^2 \, dy,
$$

$\Omega^{(n)}$ — область, в которой $h_{\min} < h^{(n)} < h_{\max}$, $\Omega^{(n)} \subset [0, l]$. Начальную функцию $h^{(0)}(y)$ следует выбирать удовлетворяющей ограничениям (3.1), (3.2). После выполнения очередной итерации по формуле (3.5) проверяется ограничение (3.2) и в случае его нарушения функция $\delta h^{(n)}$ исправляется на допустимую следующим образом:

$$
\delta h^{(n)} > h_{\max} - h^{(n)} \qquad \qquad \delta h^{(n)} = h_{\max} - h^{(n)}
$$

если , то (3.6)

$$
\delta h^{(n)} < h_{\min} - h^{(n)} \qquad \qquad \delta h^{(n)} = h_{\min} - h^{(n)}
$$

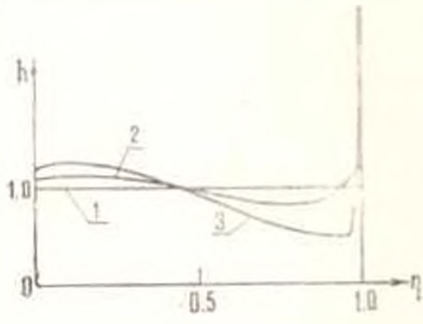
Из соотношений (3.3), (3.5) следует, что при отсутствии ограничения (3.2) на каждом шаге итерационной процедуры выполняется условие (3.1), и критическая скорость флаттера возрастает $\delta V_f \geqslant 0$. Можно показать, что это утверждение остается справедливым и при наличии ограничения (3.2).

На каждом шаге градиентной процедуры по h для вычисления следующего приближения следует решать прямую и сопряженную задачу о флаттере. Решение задачи о флаттере (1.5), (1.7) в данной работе осуществлялось методом последовательных приближений, изложенным в [5]. Решение сопряженной задачи о флаттере (2.1), (2.2) также осуществлялось методом последовательных приближений по аналогичной программе. Получающиеся в прямой и сопряженной задаче значения V_f и ω сравнивались, что являлось одним из признаков верной работы алгоритма решения флаттерной задачи.

Кроме задачи о флаттере, на каждом шаге градиентной процедуры решалась задача о дивергенции (1.8). Решение этой задачи осуществлялось методом последовательных приближений, изложенным в [9]. В результате определялась критическая скорость дивергенции V_d.

Опишем весь ход вычислительного процесса: 1) задается приближение $h^{(n)}(y)$, удовлетворяющее ограничениям (3.1), (3.2); 2) решаются прямая и сопряженная задачи о флаттере (1.5), (1.7), (2.1), (2.2) и находятся функции $u^{(n)}$, $v^{(n)}$, $\varphi^{(n)}$, $\psi^{(n)}$, их производные и значения $V_f^{(n)}$ и $\omega^{(n)}$; 3) вычисляются величины $H^{(n)}(y)$, $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ согласно (2.6), (2.7) и находится градиент $g^{(n)}(y)$; 4) определяется область $\Omega^{(n)}$, находится константа $\mu^{(n)}$ и вычисляется вариация $\delta h^{(n)}(y)$ согласно (3.5), (3.6), определяется $h^{(n+1)}(y)$ и т. д.

4. В качестве примера рассматривалось прямоугольное крыло с постоянными по размаху характеристиками. Исходные данные EI_0, GJ_0, I_{m0}, m_0, b, l, σ, x_0, C_y^α, C_m^α брались из [5], крыло № 3. Значение плотности газа при расчетах полагалось равным $\rho = 0.125$ *кг/м³*. Для удобства расчетов вводилась безразмерная переменная $\eta = y/l$. Отрезок $[0, 1]$ разбивался на $N = 20, 40$ равных промежутков, численное интегрирование осуществлялось методом трапеций. В ограничении (3.2) полагалось $h_{min} = 0$, $h_{max} = 4.5$. Изопериметрическое условие (3.1) ввиду постоянства m_0 принимает вид



Фиг. 2

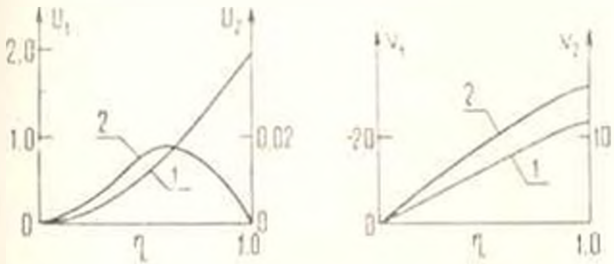
$$\int_0^1 h(\eta)\, d\eta = 1.$$

В качестве начального приближения возьмем функцию $h^{(0)}(\eta) = 1$. На фиг. 2 цифрами 1, 2, 3 показано поведение распределений $h(\eta)$ в зависимости от возрастающего числа итераций. Остановка итерационного процесса (3.5), (3.6) производилась при выполнении необходимых условий локального максимума (3.4) с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$.

Функция $h_*(\eta)$, реализующая максимум критической скорости флаттера, отмечена на фиг. 2 цифрой 3. Функция $h_*(\eta)$ независимо от параметра h_{max} выходит на верхнее ограничение при $\eta \to 1$. Физически это означает, что для повышения скорости флаттера на свободном конце крыла следует сосредоточить массу.

Критическая скорость флаттера со значения $V_f = 29.4$ *м/сек*, соответствующего начальному приближению $h^{(0)}(\eta) = 1$, повышается до величины $V_f = 30.9$ *м/сек* для распределения $h_*(\eta)$. При этом частота флаттера ω изменяется от начального значения 107.1 *сек*$^{-1}$ до 112.4 *сек*$^{-1}$. Таким образом, выигрыш в критической скорости флаттера невелик, он составляет $\approx 5\%$. Отметим, что критическая скорость дивергенции для распределений $h(\eta)$, представленных на фиг. 2, значительно превышает соответствующую скорость флаттера.

Собственные функции $u(\eta) = u_1(\eta) + iu_2(\eta)$, $v(\eta) = v_1(\eta) + iv_2(\eta)$, соответствующие распределению $h_*(\eta)$, представлены на фиг. 3. Эти функции определены с точностью до произвольного комплексного множителя. В работе была использована следующая нормировка собственных функций u и v: $u(1) = 2$. Отметим, что в ходе итерации характер этих кривых не изменялся.



Фиг. 3.

К распределению $h_*(\eta)$, описанному выше, можно придти, начиная итерационный процесс не только с функции $h^{(0)}(\eta) = 1$, но и с других начальных приближений, например, с $h^{(0)}(\eta) = 1.95 - 1.9\,\eta$ и пр.

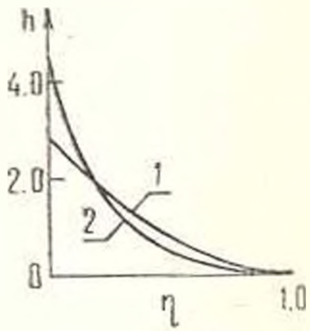
Однако оказывается, что функция $h_*(\eta)$ реализует лишь локальный максимум функционала критической скорости флаттера при заданной полной массе. Так начальное приближение $h_1(\eta) = 2.7\,(1-\eta)^2 + 0.1$, помеченное на фиг. 4 цифрой 1, хотя и приводит к небольшому значению критической скорости $V_f = 29.1$ *м/сек* ($V_d = 57.5$ *м/сек*), однако градиент функционала $g_1(\eta)$ при этом распределении оказывается большим по абсолютной величине (фиг. 5).

Отметим, что функция $g_1(\eta)$ в отличие от градиентов в случае распределений, представленных на фиг. 2, на отрезке $[0, 1]$ меняет знак. Из рассмотрения фиг. 5 следует, что особенно чувствительным к вариациям распределений $h(\eta)$ оказывается свободный конец крыла ($\eta \to 1$). Незначительное уменьшение материала в этой области может привести к заметному повышению значений V_f.

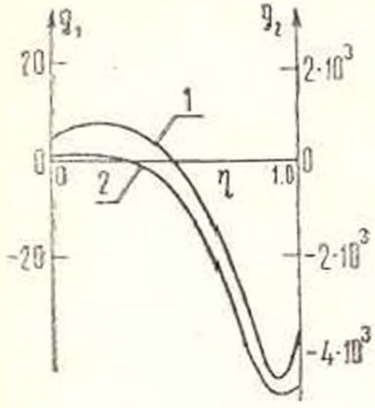
Из того, что градиент $g_1(\eta)$ принимает на отрезке $[0, 1]$ отрицательные значения, следует вывод о том, что функционал V_f можно повышать, уменьшая при этом полную массу крыла. Таким образом, существуют распределения $h(\eta)$, для которых уменьшение веса не противоречит повышению критической скорости флаттера.

Несколько итераций с малым шагом от распределения $h_1(\eta)$ приводят к значительному повышению критической скорости флаттера. Распределение $h_2(\eta)$, отмеченное цифрой 2 на фиг. 4, обладает значением $V_f =$ $= 48.3$ *м/сек.*, однако при этом оказывается $V_d = 48.0$ *м/сек* $< V_f$. Поэтому конструкция крыла с таким распределением материала теряет устойчивость по дивергенции. Выигрыш в критической скорости потери устойчивости по сравнению с исходным вариантом составляет $\approx 63\%$.

Интересно отметить, что в ходе итерационного процесса от распределения $h_1(\eta)$ к $h_2(\eta)$ характер колебаний при флаттере существенно изменяется. На формах колебаний $u(\eta)$, $v(\eta)$ появляются узлы. Частота флаттера при этом возрастает от значения $\omega_1 = 224.5$ сек$^{-1}$ до величины $\omega_2 = 262.0$ сек$^{-1}$.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Институт проблем
механики АН СССР

Поступила 23 IV 1980

Ա. Պ. ՍԵՅՐԱՆՅԱՆ

ԶԱՆԳՎԱԾՆԵՐԻ ԵՎ ԿՈՇՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԲԱՇԽՈՒՄՆԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ՖԼԱՏԵՐԻ ԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է զանգվածների և կոշտությունների բաշխումների ազդեցությունը չսեղմվող գազի հոսքում թևի ծռման-ոլորման ֆլատերի կրիտիկական արագության վրա։ Ստացվել են արտահայտություններ ֆլատերի կրիտիկական արագության գրադիենտների և ըստ թևի բացվածքի զանգվածների և կոշտությունների բաշխումների ֆլատերի ժամանակ տատանումների հաճախականության համար։ Նկարագրված է այդ մեծությունների վերաբաշխման ալգորիթմը ֆլատերի կրիտիկական արագության մեծացման նպատակով, երբ սահմանափակվում է թևի լրիվ զանգվածը։ Բերվում են և վերլուծվում թվային հաշվումների արդյունքները։

INFLUENCE OF MASS AND STIFFNESS DISTRIBUTIONS ON FLUTTER VELOCITY

A. P. SEYRANIAN

Summary

Influence of spanwise mass and stiffness distributions of a wing in incompressible gas flow on the bending—torsional flutter velocity is investigated. The gradients of flutter velocity and flutter frequency are

obtained. The algorithm for redistribution of these values is proposed to increase the critical velocity of flutter with the constraints on the total weight of a wing. Numerical results are presented and discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Буньков В. Г.* Расчет оптимальных флаттерных характеристик методом градиента. Тр. ЦАГИ, 1969, № 1166.
2. *Бирюк В. И.* О задаче оптимального проектирования конструкции крыла из условий прочности и аэроупругости. Ученые записки ЦАГИ, 1972, № 4.
3. *Haftka R. T., Starnes J. H. Jr., Barton F. W., Dixon S. C.* Comparison of two types of structural optimization procedures for flutter requirements. AIAA J. · 1975, vol. 13, № 10.
4. *McIntosh S. C. Jr., Ashley H.* On the optimization of discrete structures with aeroelastic constraints. Computers and Structures, 1978, vol. 8, № 3/4.
5. *Гроссман Е. П.* Флаттер. Тр. ЦАГИ, 1937, № 284.
6. *Фын Я. Ц.* Введение в теорию аэроупругости. М., Физматгиз, 1959.
7. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1976.
9. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М., «Мир», 1969.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIV, № 3, 1981 Механика

В. М. СМОЛЬСКИЙ

ОЦЕНКА ХАРАКТЕРИСТИК ВРЕМЕНИ ДО РАЗРУШЕНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНЫХ НАГРУЗОК ДЛЯ УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИНЫ

Задача оценки надежности, долговечности и ресурса летательного аппарата, подверженного в процессе эксплуатации случайному нагружению, обычно разбивается на следующие важные задачи: определение спектра случайных нагрузок, действующих на летательный аппарат; определение переходной функции наиболее «опасного» элемента конструкции летательного аппарата как линейной колебательной системы; определение характеристик времени до разрушения этого элемента конструкции от действия случайного нагружения.

Концепция наиболее «опасного» элемента естественна при оценке ресурса и долговечности конструкции в целом, так как расчет на прочность и проектирование конструкции осуществляется по предельным статическим, а не динамическим нагрузкам, поэтому конструкция летательного аппарата является относительно равнопрочной, в то время как по критериям долговечности и ресурса содержит «узкие места».

Первая из перечисленных задач является задачей измерения и успешно решается экспериментально [1]; для решения второй задачи, которая является задачей теории колебаний, имеются испытанные расчетные методы [2, 3]; третья задача непосредственно связана с процессом разрушения, ей и посвящена настоящая работа.

Задачей оценки характеристик времени до разрушения под действием случайной нагрузки интенсивно занимаются с 60-х годов нашего века. Первые работы в этом направлении связаны с эвристическими подходами: подмечались закономерности при разрушении от циклических нагрузок различной амплитуды и осуществлялся прямой перенос их на разрушение при случайном нагружении, при этом подмеченные эмпирические закономерности высказывались в виде гипотез. Наиболее часто употребляемой из них является гипотеза линейного суммирования повреждений. Зная кривую усталости материала и пользуясь гипотезой линейного суммирования повреждений, можно связать среднее время до разрушения конструкции с параметрами случайной нагрузки и экспериментально определяемыми постоянными. Хотя этот подход применяется на практике и в настоящее время, результаты его применения нельзя считать надежными для оценки долговечности элемента конструкции.

Другой эвристический подход связан с идентификацией процесса накопления повреждений дискретным марковским процессом с конечным числом состояний [4]. С течением времени повреждения необратимо переходят из одного состояния в другое, и изменяется вероятность перехода из текущего состояния в конечное. При таком подходе требуется осуществлять вычисление степеней матриц, порядок которых равен числу состояний, в то время как накопление повреждения в первом порядке происходит вдоль траектории некоторого дифференциального уравнения. В связи с этим в последнее время успешно развиваются подходы, связанные с идентификацией процесса накопления повреждений непрерывной марковской переменной. Для случая процесса, однородного по временной и пространственной координатам, в [5] определена плотность вероятности времени до разрушения. Однако, процесс накопления повреждений является ограниченным и, следовательно, не является однородным по пространственной координате.

В 70-х годах с помощью механики разрушения удалось вскрыть механизм усталостного разрушения и важность «усталостной» части кинетической диаграммы при действии случайных нагрузок. Установлено [6], что при размерах дефектов, характерных для усталостного разрушения, влияние случайных выбросов значительно весомее, чем на ранней стадии зарождения трещины. Поэтому в настоящей работе уравнение скорости роста усталостной трещины, полученное в [7], приближенно заменено стохастическим дифференциальным уравнением с белым шумом, для которого аналитически выписаны моменты и плотность вероятности времени достижения трещиной критической длины. Для выяснения границ применимости предлагаемого упрощения распределение времени до разрушения сравнивается с логарифмически нормальным распределением.

В [7] для усталостного распространения трещины в пластине при случайных нагрузках получена формула

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{l}\right)=\begin{cases}\dfrac{2\beta\pi^2}{K_C^4}\xi^3\dot{\xi}, & \xi>0\wedge\dot{\xi}>0\\ 0, & \xi\leqslant 0\vee\dot{\xi}\leqslant 0\end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь $2l$ — длина растущей трещины, много меньшая длины и ширины пластины, $\xi(t)$ — нормально действующая к трещине случайная нагрузка, K_C и β — постоянные материала пластины. Нам требуется определить характеристики времени первого достижения процессом $\xi(t)$ другого случайного процесса $K_C/\sqrt{\pi l}$. С целью упрощения уравнения (1.1) введем обозначения

$$I=I_1,\ D^2=\frac{4D_1^3}{D_2},\ D_1=I_2-I_1^2,\ D_2=I_4-I_3^2 \tag{1.2}$$

$$I_k=B\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty f_k(x,\ y,\ z)\,p(x,\ y,\ z)\ dz\,dy\,dx,\ k=1,2,3,4,$$

$$B=\frac{2\beta\pi^2}{K_C^4},\ f_1=x^3y,\ f_3=3x^2y^2+x^3z,\ f_{2n}=Bf_{2n-1}^2,\quad n=1,\ 2,$$

где $p(x, y, z)$ — совместная плотность вероятности процесса $\xi(t)$ и его двух первых производных.

Приближенно заменим уравнение с кусочной правой частью (1.1) следующим стохастическим уравнением:

$$\frac{du}{dt} = -l - \sqrt{D}\, w(t) \quad \left(u = \frac{1}{t}\right) \tag{1.3}$$

где l и D определяются соотношениями (1.2), а $w(t)$ — белый шум ($K_w(\tau) = D\delta(\tau)$, $Mw = 0$). Тогда плотность вероятности достижения процессом $u(t)$ постоянной границы u_1 в момент t, если при $t = 0$ $u = u_0$, удовлетворяет возвратному уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial f}{\partial t} - l\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{D}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0 \tag{1.4}$$

в области $t > 0$, $u > 0$ и граничным условиям

$$f(0, u) = \delta(u - u_0), \ u > 0; \ f(t, u_1) = 0, \ t > 0 \tag{1.5}$$

Моменты распределения времени достижения постоянной границы можно определить [8], не решая задачу (1.4)—(1.5), из решения итерационных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \frac{1}{2} D \frac{d^2 T_n}{du^2} + l \frac{d T_n}{du} = -n T_{n-1}, \ T_0 = 1 \\ T_n(u_1) = T_n(\infty) = 0, \ n = 1, 2, \cdots \end{gathered} \tag{1.6}$$

Моменты распределения времени до разрушения, следуя В. В. Болотину [9], можно получить в виде

$$J_n = \int\limits_0^{\frac{K_C}{\sqrt{\pi l_1}}} T_n\left(\frac{1}{t}\right) p_\xi\left(\frac{K_c}{\sqrt{\pi l}}\right) d\left(\frac{K_c}{\sqrt{\pi l}}\right), \ n = 1, 2, \cdots \tag{1.7}$$

где $p_\xi(x)$ — плотность вероятности $\xi(t)$. В дальнейшем будут использованы первые два момента

$$J_1 = \frac{1}{l l_0} - \frac{Q_1}{l}, \ J_2 = \frac{1}{l^2 l_0^2} - \frac{D}{l^3 l_0} - Q_1\left(\frac{2}{l^2 l_0} - \frac{D}{l^3}\right) + \frac{Q_2}{l^2} \tag{1.8}$$

где

$$Q_n = \int\limits_0^\infty x^{2n} p_\xi(x)\, dx, \ n = 1, 2, \ p_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x, y, z)\, dy dz$$

В [10] решена задача (1.4), (1.5) с помощью преобразования Лапласа. Плотность вероятности $f(t)$ времени достижения постоянной границы u_1 можно записать в виде

$$tf(t) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\xi + \eta}{\sqrt{\pi}} \exp[-(\eta - \xi)^2] - \xi^2[1 - \Phi(\eta)] \times\right. \tag{1.9}$$

$$\times \exp\left[2\xi(\eta-\xi)\right] + \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \exp\left[2\xi(\eta-\xi)-\eta^2\right]\Bigg\} \qquad (1.9)$$

где

$$1 < 2\eta, \quad \xi = \frac{l}{\sqrt{2Dt}}, \quad \eta = \frac{u_0-u_1}{\sqrt{2Dt}}, \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Сравним плотность распределения (1.9) с логарифмически нормальной плотностью распределения. Плотность распределения случайной величины $u = \ln t$ будет $f_u(x) = \exp(x) f(\exp(x))$ и потому $tf(t)$ надо сравнить с функцией

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln t - a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Сравнение проведено на равномерном шаге по переменной x ($a - 3\sigma \leqslant x = \ln t \leqslant a + 3\sigma$), параметры a и σ определялись методом наименьших квадратов, а начальные их значения после введения обозначений $a_1 = l/\sqrt{D}$, $a_2 = (u_0 - u_1)/\sqrt{D}$ и использования (1.8) приближенно получены в виде

$$a = \ln(a_2/a_1), \quad \sigma = \ln(1 + 1/\sqrt{a_1 a_2}).$$

Для расчета взяты значения $a_1 = 10^4$, a_2 менялось от 2 до 10 с шагом 2. При этих исходных значениях и абсолютной точности поиска 10^{-4} метод наименьших квадратов срабатывал вхолостую: исходные значения сразу оказывались оптимальными. Результаты сравнения сведены в табл. 1, из которой видно, что уклонение распределения (1.9) от логарифмически нормального незначительно.

Таблица 1

Значения функций $f_u(x)$ (сверху) и $g(x)$ (снизу, нормальное распределение) при различных значениях a_2 и x; внизу даны значения a и σ

x \ a_2	2	4	6	8	10
$a-3\sigma$	0.647 0.629	0.908 0.889	1.11 1.09	1.28 1.25	1.42 1.4
$a-2\sigma$	7.74 7.66	10.9 10.8	13.3 13.2	15.4 15.3	17.2 17.1
$a-\sigma$	34.3 31.3	48.5 48.5	59.4 59.4	68.6 68.6	76.6 76.7
a	56.4 56.6	79.8 80	97.7 97.9	112.8 113.1	126.1 126.4
a	8.517	7.824	7.418	7.13	6.91
$\sigma \cdot 10^2$	0.705	0.499	0.407	0.353	0.316

Таким образом, результаты расчета обосновывают допустимость упрощения (1.3) для оценки надежности элемента конструкции и теоретически доказывают логарифмически нормальное распределение долговечности.

Московский авиационный
институт

Поступила 3 V 1979

Վ. Մ. ՍՄՈԼՍԿԻ

ՃԵՂՔԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ՊԱՐԶԵՑՎԱԾ ՄՈԴԵԼԻ ՀԱՄԱՐ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ԲԵՌՆՎԱԾՔՆԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ ՄԻՆՉԵՎ ՔԱՅՔԱՅՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿԻ ՈՐՈՇԻՉՆԵՐԻ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆԸ

Ամփոփում

Պատահական բեռնվածքների ազդեցության տակ ճեղքի աճման արագության հավասարումը փոխարինվում է ստոխաստիկ դիֆերենցիալ հավասարումով, որի համար ստացվել են ճեղքի կրիտիկական երկարությունը հասնելու ժամանակի որոշիչները։

EVALUATION OF TIME CHARACTERISTICS BEFORE FRACTURE UNDER A STOCHASTICAL LOAD FOR A SIMPLIFIED MODEL OF A CRACK GROWTH

V. M. SMOLSKY

Summary

The equation for the rate of crack growth under a stochastical load is substituted for a stochastical differential equation for which the time characteristics of the crack's reaching a critical length are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Райхер В. Л.* Гипотеза спектрального суммирования и ее применение для определения усталостной долговечности при действии случайных нагрузок. Тр. ЦАГИ, М., 1969, вып. 1134, 39 с.
2. *Пархомовский Я. М.* О приближенном решении некоторых краевых задач прочности самолета. Ученые записки ЦАГИ, 1977, т. 8, № 6, 93—106.
3. *Шмылкин В. А., Чижов Б. Я., Башкин В. Н.* Расчет частот и форм собственных колебаний самолета с крылом большого удлинения методом начальных параметров. Тр. ЦАГИ, М., 1975, вып. 1662, 15 с.
4. *Когаев В. П.* Оценка распределения долговечности при варьируемых амплитудах методом перемножения стохастических матриц. Машиноведение, 1976, № 4, 72—79.
5. *Тарнопольский Г. Н.* К теории накопления повреждений. Тр. Новосибирского ин-та инж. жел.-дор. тр-та, 1970, вып. 96, 184—188.
6. *Matolcsy M.* General fatigue problems of stochastically loaded (vehicle) structures. Materialprufung, 1976, Vol. 18, № 4, 115—122.

7. *Черепанов Г. П., Смольский В. М.* К расчету среднего времени до разрушения панели с трещиной от случайной нагрузки. Машиноведение, 1978, № 6, 58—60.
8. *Смольский В. М.* К оценке моментов распределения времени до разрушения панели с трещиной от случайной нагрузки. Машиноведение, 1980, № 2, с. 117—119.
9. *Болотин В. В.* Статистические методы в строительной механике. М., «Стройиздат», 1965, 279 с.
10. *Смольский В. М.* Об одной возможности оценки распределения долговечности панелей и фюзеляжа. «Прочность, устойчивость и колебания тонкостенных конструкций». М., 1980, 53—56.