ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1981

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, №2, 1981 Механика

А. А. БАБЛОЯН, Н. О. ГУЛКАНЯН

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОЕДИНЕНИЯ ИЗ ТРЕХ ПОЛУПОЛОС ИЗ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ*

1. Рассмотрим плоскую контактную задачу для Y-образной области, составленной из двух материалов (I и II) при наличии одной оси симметрии MN (фиг. 1). Предполагается, что между составляющими материалами имеет место полное сцепление, а на гранях заданы внешние нагрузки.

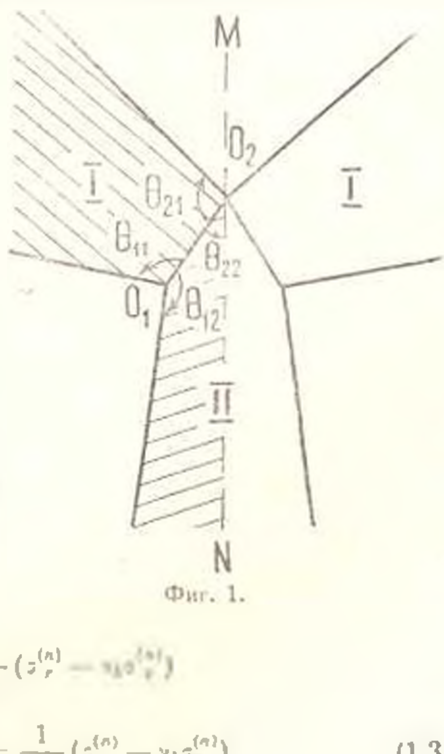
В силу наличия симметрии достаточно рассмотреть только заштрихованную часть области. Обозначим упругие постоянные в области I через ν_1, E_1, а в области II — через ν_2, E_2.

Введем в рассмотрение две полярные системы координат r_n, φ_n ($n = 1, 2$) с полюсами соответственно в точках O_1 и O_2 [1, 2].

Как известно, плоская задача сводится к определению бигармонической функции Эйри, которая для рассматриваемой задачи ищется в виде суммы двух „местных" решений, то есть

$$F = \sum_{n=1}^{2} F_n(r_n, \varphi_n) \tag{1.1}$$

При этом напряжения и перемещения в соответствующих координатах выразятся через функцию напряжений Эйри по следующим формулам:



Фиг. 1.

$$\sigma_r^{(n)}(r_n, \varphi_n) = \frac{1}{r_n}\frac{\partial F}{\partial r_n} + \frac{1}{r_n^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_n^2}$$

$$\sigma_\varphi^{(n)}(r_n, \varphi_n) = \frac{\partial^2 F}{\partial r_n^2} \tag{1.2}$$

$$\tau_{r\varphi}^{(n)}(r_n, \varphi_n) = -\frac{\partial}{\partial r_n}\left(\frac{1}{r_n}\frac{\partial F}{\partial \varphi_n}\right)$$

$$\varepsilon_{rr}^{(n)} = \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r_n} = \frac{1}{E_k}\left(\sigma_r^{(n)} - \nu_k \sigma_\varphi^{(n)}\right)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(n)} = \frac{\partial v_\varphi^{(n)}}{r_n \partial \varphi_n} + \frac{u_r^{(n)}}{r_n} = \frac{1}{E_k}\left(\sigma_\varphi^{(n)} - \nu_k \sigma_r^{(n)}\right) \tag{1.3}$$

* Работа доложена на Всесоюзной конференции по теории упругости в г. Ереване в 1979 г.

$$\gamma_{r\varphi}^{(n)} = \frac{\partial v_\varphi^{(n)}}{\partial r_n} - \frac{v_\varphi^{(n)}}{r_n} + \frac{1}{r_n}\frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial \bar{\varphi}_n} = \frac{2(1+\nu_k)}{E_k}\tau_{r\varphi}^{(n)}(r_n, \bar{\varphi}_n)$$

Здесь
$$\bar{\varphi}_n = \begin{cases} \varphi_1 & \text{при } n = 1 \\ \varphi_2 - \pi & \text{при } n = 2 \end{cases}$$

а «k» принимает значение «1» для верхнего материала (область I) и значение «2» для нижнего материала (область II).

На оси симметрии должны быть выполнены условия

$$\begin{aligned} &\tau_{r_2\varphi_2}^{(2)}(r_2, \theta_{22}) = 0 \\ &v_2(r_2, \theta_{22}) = 0 \end{aligned} \qquad \left(\text{или } \frac{\partial v_{\varphi_2}^{(2)}(r_2, \theta_{22})}{\partial r_2} = 0\right) \tag{1.4}$$

На границе рассматриваемой области заданы условия:

$$\begin{aligned} &\sigma_{\varphi_n}^{(1)}(r_n, \theta_{n1}) = f_{n1}(r_n), \qquad \tau_{r_n\varphi_n}^{(1)}(r_1, \theta_{n1}) = g_{n1}(r_1) \\ &\sigma_{\varphi}^{(2)}(r_1, \theta_{12}) = f_{12}(r_1), \qquad \tau_{r_1\varphi_1}^{(2)}(r_1, \theta_{12}) = g_{12}(r_1) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Потребуем, чтобы каждая из функций $F_n(r_n, \bar{\varphi}_n)$ на линии O_1O_2 удовлетворяла условиям полного сцепления двух материалов, то есть

$$\begin{aligned} &\sigma_{\varphi_n}^{(1)}(r_n, 0) = \sigma_{\varphi}^{(2)}(r_n, 0), \quad \tau_{r_n\varphi_n}^{(1)}(r_n, 0) = \tau_{r_n\varphi_n}^{(2)}(r_n, 0) \\ &u_{r_n}^{(1)}(r_n, 0) = u_{r_n}^{(2)}(r_n, 0), \quad v_{\varphi_n}^{(1)}(r_n, 0) = v_{\varphi_n}^{(2)}(r_n, 0) \end{aligned} \qquad (n = 1, 2) \tag{1.6}$$

Функции $F_n(r_n, \bar{\varphi}_n)$ $(n = 1, 2)$ ищем в виде интеграла Меллина

$$F_n(r_n, \bar{\varphi}_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_n - i\infty}^{c_n + i\infty} \Phi_n(s, \bar{\varphi}_n) r_n^{1-s} ds \qquad (n = 1, 2) \tag{1.7}$$

где

$$-1 + \varepsilon < c_n < 0, \quad 0 < \varepsilon < 1$$

При этом

$$\Phi_n(s, \bar{\varphi}_n) = \int_0^\infty F_n(r_n, \bar{\varphi}_n) r_n^{s-2} dr_n \tag{1.8}$$

Функции $\Phi_n(s, \bar{\varphi}_n)$ представим в виде

$$\Phi_n(s, \bar{\varphi}_n) = \begin{cases} \Phi_{n1}(s, \bar{\varphi}_n) & \text{в области I} \\ \Phi_{n2}(s, \bar{\varphi}_n) & \text{в области II} \end{cases} \tag{1.9}$$

Из (1.8) и (1.9) следует, что функции $\Phi_{nk}(s, \bar{\varphi}_n)$ должны удовлетворять уравнению

$$\Phi_{nk}^{(IV)} + 2(s^2 - 1)\Phi_{nk}'' + (s^2 - 1)^2 \Phi_{nk} = 0 \qquad (1.10)$$

решение которого имеет вид

$$\Phi_{nk}(s, \bar\varphi_n) = A_{nk}\cos(s-1)\bar\varphi_n + B_{nk}\sin(s-1)\bar\varphi_n +$$
$$+ C_{nk}\cos(s+1)\bar\varphi_n + D_{nk}\sin(s+1)\bar\varphi_n \qquad (1.11)$$

Если принять, что между коэффициентами A_{nk}, B_{nk}, C_{nk} и D_{nk} существуют связи

$$A_{n1} + C_{n1} = A_{n2} + C_{n2} = (s-1)^{-1}(\delta_2 C_{n2} - \delta_1 C_{n1}) \qquad (1.12)$$
$$(s-1)B_{n1} + (s+1)D_{n1} = (s-1)B_{n2} + (s+1)D_{n2} = \delta_1 D_{n1} - \delta_2 D_{n2}$$

где

$$\delta_k = \frac{4}{\delta E_k}, \qquad \delta = \frac{1+\nu_1}{E_1} - \frac{1+\nu_2}{E_2} \qquad (k = 1, 2) \qquad (1.13)$$

то условия контакта (1.6) будут удовлетворены тождественно.

Удовлетворяя граничным условиям (1.5), условиям симметрии (1.4) и введя новые неизвестные функции $X_{nk}(s)$, $Y_{nk}(s)$

$$s(s-1)\Phi_{1k}(s, \vartheta_{1k}) = a^s X_{1k}, \qquad s\Phi'_{nk}(s, \vartheta_{nk}) = a^s Y_{nk}(s)$$
$$s(s-1)\Phi_{21}(s, \vartheta_{21}) = a^s X_{21}$$

$$\frac{1}{4(s+1)}\left[\Phi''_{22}(s, \vartheta_{22}) + (s-1)^2\Phi_{22}(s, \vartheta_{22})\right] = a^s X_{22}(s) \quad (n, k = 1, 2) \qquad (1.14)$$

после ряда преобразований для их определения получим следующую систему интегральных уравнений

$$X_{nk}(s) + \int_{L_p}[X_{pk}(\xi)K_{pk}^{(1)}(\xi, s) + Y_{pk}(\xi)K_{pk}^{(2)}(\xi, s) +$$
$$+ X_{pm}(\xi)K_{pk}^{(3)}(\xi, s) + Y_{pm}(\xi)K_{pk}^{(4)}(\xi, s)]\,d\xi = \tilde f_{nk}(s) \qquad (1.15)$$

$$Y_{nk}(s) - \int_{L_p}[X_{pk}(\xi)K_{pk}^{(5)}(\xi, s) + Y_{pk}(\xi)K_{pk}^{(6)}(\xi, s) +$$
$$+ X_{pm}(\xi)K_{pk}^{(7)}(\xi, s) + Y_{pm}(\xi)K_{pk}^{(8)}(\xi, s)]\,d\xi = \tilde g_{nk}(s)$$
$$(n, k = 1, 2) \quad (n + p = k + m = 3)$$

Здесь ядра интегральных уравнений имеют вид

$$K_{pk}^{(q)}(\xi, s) = \frac{B(s+1, \xi - s)}{2\pi i\Delta_p(\xi)}\,k_{pk}^{(q)}(\xi, s) \quad (q = 1, 2, \ldots, 8) \qquad (1.16)$$

где $\mathrm{B}(x, y)$ — эйлеров интеграл первого рода, а функции $k_{pk}^{(q)}(\xi, s)$ определяются формулами

$$k_{pk}^{(1)}(\xi, s) = \alpha_{nk}^{+} M_{pk}^{-} + (-1)^{n-k} \beta_{nk}^{-} N_{pk}^{+} - (-1)^{m} a_{pk}^{-} \cos (s-1) \beta_{nk} +$$

$$+ (-1)^{n} b_{pk}^{+} \sin (s-1) \beta_{nk}$$

$$k_{pk}^{(2)}(\xi, s) = \alpha_{nk}^{+} N_{pk}^{-} - (-1)^{n-k} \beta_{nk}^{-} M_{pk}^{+} - (-1)^{m} b_{pk}^{-} \cos (s-1) \beta_{nk} -$$

$$- (-1)^{n} a_{pk}^{+} \sin (s-1) \beta_{nk}$$

$$k_{pk}^{(3)}(\xi, s) = -\alpha_{nk}^{+} Q_{pm}^{-} + (-1)^{n-k} \beta_{nk}^{-} P_{pm}^{+} + (-1)^{m} a_{pm}^{-} \cos (s-1) \beta_{nk} -$$

$$- (-1)^{n} b_{pm}^{+} \sin (s-1) \beta_{nk}$$

$$k_{pk}^{(4)}(\xi, s) = \alpha_{nk}^{+} P_{pm}^{-} + (-1)^{n-k} \beta_{nk}^{-} Q_{pm}^{+} + (-1)^{m} b_{pm}^{-} \cos (s-1) \beta_{nk} +$$

$$+ (-1)^{n} a_{pm}^{+} \sin (s-1) \beta_{nk} \qquad (1.17)$$

$$k_{pk}^{(5)}(\xi, s) = (-1)^{n-k} \beta_{nk}^{-} M_{pk}^{-} - \alpha_{nk}^{-} N_{pk}^{-} + (-1)^{n} a_{pk}^{-} \sin (s-1) \beta_{nk} +$$

$$+ (-1)^{m} b_{pk}^{+} \cos (s-1) \beta_{nk}$$

$$k_{pk}^{(6)}(\xi, s) = (-1)^{n-k} \beta_{nk}^{+} N_{pk}^{-} + \alpha_{nk}^{-} M_{pk}^{+} + (-1)^{n} b_{pk}^{-} \sin (s-1) \beta_{nk} -$$

$$- (-1)^{m} a_{pk}^{+} \cos (s-1) \beta_{nk}$$

$$k_{pk}^{(7)}(\xi, s) = -(-1)^{n-k} \beta_{nk}^{+} Q_{pm}^{-} - \alpha_{nk}^{-} P_{pm}^{+} - (-1)^{n} a_{pm}^{-} \sin (s-1) \beta_{nk} -$$

$$- (-1)^{m} b_{pm}^{+} \cos (s-1) \beta_{nk}$$

$$k_{pk}^{(8)}(\xi, s) = (-1)^{n-k} \beta_{nk}^{-} P_{pm}^{-} - \alpha_{nk}^{-} Q_{pm}^{+} - (-1)^{n} b_{pm}^{-} \sin (s-1) \beta_{nk} +$$

$$+ (-1)^{m} a_{pm}^{+} \cos (s-1) \beta_{nk}$$

В этих формулах «p» и «k» принимают значения 1 и 2, кроме сочетания $p = 1$, $k = 2$, $q = 1 \div 4$, для этих значений параметров имеем

$$k_{12}^{(1)}(\xi, s) = -M_{12}^{-}(\xi) \sin (s+1) \beta_{22} - N_{12}^{+}(\xi) \cos (s+1) \beta_{22}$$

$$k_{12}^{(2)}(\xi, s) = -N_{12}^{-}(\xi) \sin (s+1) \beta_{22} + M_{12}^{+}(\xi) \cos (s+1) \beta_{22}$$

$$k_{12}^{(3)}(\xi, s) = Q_{11}^{-}(\xi) \sin (s+1) \beta_{22} - P_{11}^{+}(\xi) \cos (s+1) \beta_{22} \qquad (1.17')$$

$$k_{12}^{(4)}(\xi, s) = -P_{11}^{-}(\xi) \sin (s+1) \beta_{22} - Q_{11}^{+}(\xi) \cos (s+1) \beta_{22}$$

Здесь

$$M_{1k}^{+}(\xi) = \delta_1 \delta_2 \gamma_{1k}^{+} + d_{1m} \alpha_{1k}^{-} + (-1)^{k} \delta_k (d_{1m} - \delta_m^{2}) \cos (\xi - 1) \theta_{1k}$$

$$M_{21}^{+}(\xi) = \delta_1 \delta_2 \rho_{21} + \alpha_{21} [S^{+}(\xi, \theta_{22}) + \delta_2 \sin 2\xi\theta_{22}] - \delta_1 S^{-}(\xi, \theta_{22}) \times$$

$$\times \cos (\xi - 1) \theta_{21}$$

$$M_{22}^{+}(\xi) = d_{21} \sin (\xi + 1) \theta_{22}$$

$$M_{22}^{-}(\xi) = \delta_1\delta_2\{-(\xi+1)\cos(\xi-1)\theta_{22} + \cos[\xi(\theta_{22}-2\theta_{21})-\theta_{22}] +$$
$$+ \xi\cos[\xi\theta_{22}-\theta_{22}+2\theta_{21}]\} + \varkappa_{22}^{-} d_{21} + 4\Delta_{21}\delta_2\cos(\xi-1)\theta_{22}$$

$$N_{1k}^{+}(\xi) = \delta_1\delta_2\delta_{1k} - d_{1m}\beta_{1k}^{+} - (-1)^k\delta_k(d_{1m}-\delta_m^2)\sin(\xi-1)\theta_{1k}$$

$$N_{21}^{+}(\xi) = \delta_1\delta_2\mu_{21} - \tilde{\beta}_{21}^{+}[S^{+}(\xi,\theta_{22}) + \delta_2\sin 2\xi\theta_{22}] + \delta_1 S^{+}(\xi,\theta_{22})\sin(\xi-1)\theta_{21}$$

$$N_{22}^{+}(\xi) = \delta_1\delta_2\{S^{+}(\xi,\theta_{21})\cos(\xi-1)\theta_{22} - C_{21}^{-}\sin(\xi-1)\theta_{22}\} -$$
$$- d_{21}\beta_{22}^{+} - 4\delta_2\Delta_{21}\sin(\xi-1)\theta_{22} \tag{1.18}$$

$$N_{22}^{-}(\xi) = -d_{21}\cos(\xi+1)\theta_{22}$$

$$P_{1k}^{+}(\xi) = (-1)^k\delta_k[(-1)^m\delta_m\beta_{1k}^{+} - \tilde{\beta}_{1k}^{+}C_{1m} + \tilde{\alpha}_{1k}S^{+}(\xi,\theta_{1m})]$$

$$P_{21}^{+}(\xi) = \delta_1\{(\delta_1-1)\mu_{21}^{+} + (1\pm\xi)\varkappa_{21}^{+} \mp \xi\chi_{21}^{+}\}$$

$$P_{22}^{-}(\xi) = \delta_2\{\xi\cos(\xi+1)\theta_{22} + (1-\delta_1)\cos(\xi+1)\theta_{22} -$$
$$-\cos[\xi(\theta_{22}+2\theta_{21})+\theta_{22}] - \xi\cos[\xi\theta_{22}+(\theta_{22}-2\theta_{21})]\}$$

$$P_{22}^{+}(\xi) = \delta_2\{S^{+}(\xi,\theta_{21})\tilde{\alpha}_{22} - C_{21}^{-}\tilde{\beta}_{22}^{+} - \delta_1\beta_{22}^{+}\}$$

$$Q_{1k}^{+}(\xi) = (-1)^k\delta_k[(-1)^m\delta_m\alpha_{1k}^{+} - \tilde{\alpha}_{1k}C_{1m} - S^{+}(\xi,\theta_{1m})\tilde{\beta}_{1k}]$$

$$Q_{21}^{+}(\xi) = \delta_1\{(1-\delta_1)\rho_{21}^{+} + \varepsilon_{21}^{+}(\xi\mp 1) - \xi\nu_{21}^{+}\}$$

$$Q_{22}^{+}(\xi) = -\delta_2\{(\xi-1)\sin(\xi+1)\theta_{22} + \sin[\xi(\theta_{22}+2\theta_{21})+\theta_{22}] -$$
$$-\xi\sin[\xi\theta_{22}+\theta_{22}-2\theta_{21}] + \delta_1\sin(\xi+1)\theta_{22}\}$$

$$Q_{22}^{-}(\xi) = -\delta_2[\delta_1\alpha_{22}^{-} + \tilde{\alpha}_{22}C_{21}^{+} + S^{-}(\xi,\theta_{21})\tilde{\beta}_{22}^{+}]$$

$$a_{pk}^{+}(\xi) = \delta_k M_{pk}^{+} + \delta_m Q_{pk}^{+}$$

$$b_{pk}^{+}(\xi) = \delta_k N_{pk}^{+} - \delta_m P_{pk}^{+}$$

При этом

$$a_{1k}^{+}(\xi) = 4\delta_k\Delta_{1m}\tilde{\alpha}_{1k}^{+} + (-1)^m\delta_1\delta_2[S^{-}(\xi,\theta_{1m})\beta_{1k}^{-} - C_{1m}^{+}\alpha_{1k}]$$

$$b_{1k}^{+}(\xi) = -4\delta_k\Delta_{1m}\tilde{\beta}_{1k}^{+} - (-1)^m\delta_1\delta_2[S^{-}(\xi,\theta_{1m})\alpha_{1k}^{-} + C_{1m}^{-}\beta_{1k}]$$

$$a_{21}^{+}(\xi) = \delta_1\{S^{\pm}(\xi,\theta_{22})\tilde{\alpha}_{21}^{+} - \delta_2[(S^{+}(\xi,\theta_{22}-\theta_{21}) -$$
$$- S^{+}(\xi,\theta_{22}))\cos(\xi-1)\theta_{21} + S^{\pm}(\xi,\theta_{21})\mu_{21}^{-} + C_{21}^{\mp}\rho_{21}]\}$$

$$b_{21}^{+}(\xi) = \delta_1\{-\tilde{\beta}_{21}S^{+}(\xi,\theta_{22}) - \delta_2[(S^{-}(\xi,\theta_{22}-\theta_{21}) -$$
$$- S^{+}(\xi,\theta_{22}))\sin(\xi-1)\theta_{21} + S^{+}(\xi,\theta_{21})\rho_{21}^{-} - C_{21}^{\mp}\mu_{21}]\}$$

$$a_{22}^{+}(\xi) = \delta_2\{-\delta_1[C_{21}^{-}\sin(\xi+1)\theta_{22} + S^{+}(\xi,\theta_{21})\cos(\xi+1)\theta_{22}] +$$
$$+ 4(-\delta_1\sin^2\xi\theta_{21} + \Delta_{21})\sin(\xi+1)\theta_{22}\}$$

$$a_{22}^{-}(\xi) = \delta_2\{\delta_1[\alpha_{22}^{-}C_{21}^{-} - \beta_{22}^{+}S^{-}(\xi,\theta_{21})] + 4\Delta_{21}\bar{\alpha}_{22}^{-}\}$$

$$b_{22}^{+}(\xi) = -\delta_2\{\delta_1[S^{+}(\xi,\theta_{21})\alpha_{22}^{-} + \beta_{22}^{+}C_{21}^{+}] + 4\Delta_{21}\bar{\beta}_{22}^{+}\}$$

$$b_{22}^{-}(\xi) = \delta_2\{\delta_1[C_{21}^{-}\cos(\xi+1)\theta_{22} - S^{-}(\xi,\theta_{21})\sin(\xi+1)\theta_{22}] +$$
$$+ 4(\delta_1\sin^2\xi\theta_{21} - \Delta_{21})\cos(\xi+1)\theta_{22}\} \qquad (1.18')$$

$$S^{\pm}(\xi,\theta) = \sin 2\xi\theta \pm \xi\sin 2\theta$$

$$C_{pk}^{\pm}(\xi,\theta_{pk}) = -2(\sin^2\xi\theta_{pk} \pm \xi\sin^2\theta_{pk})$$

$$d_{pk}(\xi,\theta_{pk}) = \delta_k^2 + 4(-1)^k\delta_k\sin^2\xi\theta_{pk} + 4\Delta_{pk}$$

$$\Delta_{pk}(\xi,\theta_{pk}) = \sin^2\xi\theta_{pk} - \xi^2\sin^2\theta_{pk}$$

$$\alpha_{pk}^{\pm}(\xi,\theta_{pk}) = \bar{\alpha}_{pk}^{\pm}(\xi,\theta_{pk}) - (-1)^k\delta_k\cos(\xi \mp 1)\theta_{pk} =$$
$$= 2(1 \mp \xi)\sin\xi\theta_{pk}\sin\theta_{pk}$$

$$\beta_{pk}^{\pm}(\xi,\theta_{pk}) = \bar{\beta}_{pk}^{\pm}(\xi,\theta_{pk}) - (-1)^k\delta_k\sin(\xi \mp 1)\theta_{pk} =$$
$$= (1 \pm \xi)\sin(\xi+1)\theta_{pk} + (1 \mp \xi)\sin(\xi-1)\theta_{pk}$$

$$\varkappa_{21}^{\pm} = 0.5\{\cos[2\xi\theta_{22} - (\xi+1)\theta_{21}] \mp \cos[(\xi+1)\theta_{21} - 2\theta_{22}]\}$$

$$\chi_{21}^{\pm} = 0.5\{\cos[2\xi\theta_{22} - (\xi-1)\theta_{21}] \mp \cos[(\xi-1)\theta_{21} - 2\theta_{22}]\}$$

$$\varepsilon_{21}^{\pm} = 0.5\{\sin[(\xi+1)\theta_{21} - 2\theta_{22}] \mp \sin[2\xi\theta_{22} - (\xi+1)\theta_{21}]\}$$

$$\nu_{21}^{\pm} = 0.5\{\sin[(\xi-1)\theta_{21} - 2\theta_{22}] \mp \sin[(\xi-1)\theta_{21} - 2\xi\theta_{22}]\}$$

$$\gamma_{1k}^{\pm} = 2\sin[\xi(\theta_{1m}+\theta_{1k}) - \theta_{1k}]\sin\xi\theta_{1m} \pm$$
$$\pm 2\xi\sin(\xi\theta_{1k} + \theta_{1m} - \theta_{1k})\sin\theta_{1m}$$

$$\delta_{1k}^{\pm} = 2\cos[\xi(\theta_{1m}+\theta_{1k}) - \theta_{1k}]\sin\xi\theta_{1m} \pm 2\xi\cos[\xi\theta_{1k} + \theta_{1m} - \theta_{1k}]\sin\theta_{1m}$$

$$2\rho_{21}^{\pm} = \sin[(\xi-1)\theta_{21} - 2\xi\theta_{22}] \mp \sin[(\xi-1)\theta_{21} + 2\theta_{22}]$$

$$2\mu_{21}^{\pm} = \cos[2\xi\theta_{22} - (\xi-1)\theta_{21}] \mp \cos[2\theta_{22} + (\xi-1)\theta_{21}]$$

$$\Delta_1(\xi) = 4(\delta_1^2\Delta_{12} + \delta_2^2\Delta_{11}) + 16(\Delta_{11} - \delta_1\sin^2\xi\theta_{11})(\Delta_{12} + \delta_2\sin^2\xi\theta_{12}) -$$
$$- 8\delta_1\delta_2[\sin\xi\theta_{11}\sin\xi\theta_{12}\cos\xi(\theta_{11}+\theta_{12}) - \xi^2\sin\theta_{11}\sin\theta_{12}\cos(\theta_{11}-\theta_{12})]$$

$$\Delta_2(\xi) = \delta_1\delta_2[S^{+}(\xi,\theta_{22}-\theta_{21}) - S^{-}(\xi,\theta_{22})] + 4\delta_2\Delta_{21}\sin 2\xi\theta_{22} + S^{-}(\xi,\theta_{22})d_{21}$$

Свободные члены системы (1.15) выражаются через внешние нагрузки

$$\bar{f}_{nk}(s) = a^{-s} \int_0^a f_{nk}(r_n) r_n^s dr_n$$

$$\bar{g}_{nk}(s) = a^{-s} \int_0^a g_{nk}(r_n) r_n^s dr_n \tag{1.19}$$

При этом

$$\bar{f}_{22}(s) = \bar{g}_{22}(s) = 0$$

В формулах (1.17) функции φ_{nk} и ψ_{nk} зависят от аргументов (s, β_{nk}), где $\beta_{nk} = \pi - |\theta_{nk}|$, а функции M_{nk}, N_{nk}, P_{nk}, Q_{nk}, a_{nk}, b_{nk} зависят от аргумента ξ.

После решения интегральных уравнений старые неизвестные выразятся через X_{nk}, Y_{nk} по формулам

$$\xi \Delta_n(\xi) C_{nk}(\xi) = a^{\xi} [X_{nk} M_{nk}^{-} + Y_{nk} N_{nk}^{-} - X_{nm} Q_{nm}^{-} + Y_{nm} P_{nm}^{-}]$$

$$\xi \Delta_n(\xi) D_{nk}(\xi) = a^{\xi} [X_{nk} N_{nk}^{+} - Y_{nk} M_{nk}^{+} + X_{nm} P_{nm}^{+} - Y_{nm} Q_{nm}^{+}] \tag{1.20}$$

$$\xi (\xi - 1) \Delta_n(\xi) [A_{nk}(\xi) - C_{nk}(\xi)] = a^{\xi} \sum_{k=1}^{2} (-1)^k [X_{nk} a_{nk}^{-} + Y_{nk} b_{nk}^{-}]$$

$$\xi \Delta_n(\xi) [(\xi - 1) B_{nk} - (\xi + 1) D_{nk}] = a^{\xi} \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k-1} [X_{nk} b_{nk}^{+} - Y_{nk} a_{nk}^{+}]$$

которые получаются из решения систем (1.12) и (1.14).

Контактные напряжения на отрезке O_1O_2 $(\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = 0,\ r_1 + r_2 = a)$ в силу (1.12) и (1.11) будут определяться по формулам:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{p,k}^{2} \frac{(-1)^k}{r_p} \int_{L_p} [X_{pk}(\xi) a_{pk}^{-}(\xi) + Y_{pk}(\xi) b_{pk}^{-}] \left(\frac{a}{r_p}\right)^{\xi} \frac{d\xi}{\Delta_p(\xi)} \tag{1.21}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{p,k}^{2} \frac{(-1)^k}{r_p} \int_{L_p} [Y_{pk} a_{pk}^{+} - X_{pk} b_{pk}^{+}] \left(\frac{a}{r_p}\right)^{\xi} \frac{d\xi}{\Delta_p(\xi)}$$

$$\sigma_r^{(k)} = -\sigma_\theta - \frac{2}{\pi i} \sum_{p=1}^{2} \int_{L_p} \xi C_{pk}(\xi) r_p^{-\xi-1} d\xi \tag{1.22}$$

Из (1.22) и (1.20) можно вычислить скачок нормального напряжения σ_r на линии контакта

$$\delta_1 \sigma_r^{(1)} - \delta_2 \sigma_r^{(2)} = (4 - \delta_1 + \delta_2)\, \sigma_\theta$$

Интегралы, входящие в выражения напряжений, можно вычислить с помощью теоремы о вычетах. Из интегральных уравнений (1.15) видно, что неизвестные функции $X_{nk}(s)$ и $Y_{nk}(s)$ имеют полюсы в точках $s = -n$ ($n = 1, 2, \ldots$). Кроме этого, подынтегральные функции имеют полюсы в точках $S = \xi_{pq}$, где $\Delta_p(\xi_{pq}) = 0$.

Если окрестности точек O_1 и O_2 свободны от внешней нагрузки, то напряжения выразятся через степенные ряды

$$a\sigma_\theta = \sum_q \sum_{p,k=1}^{2} \frac{(-1)^k}{\Delta_p(\xi_{pq})}[X_{pk}(\xi_{pq})\, a_{pk}^-(\xi_{pq}) + Y_{pk}(\xi_{pq})\, b_{pk}^-(\xi_{pq})] \times$$

$$\times \left(\frac{a}{r_p}\right)^{\xi_{pq}+1} + R_1$$

$$a\tau_{r\theta} = \sum_q \sum_{p,k=1}^{2} \frac{(-1)^k}{\Delta_p(\xi_{pq})}[Y_{pk}(\xi_{pq})\, a_{pk}^+(\xi_{pq}) - X_{pk}(\xi_{pq})\, b_{pk}^+(\xi_{pq})] \times$$

$$\times \left(\frac{a}{r_p}\right)^{\xi_{pq}+1} + R_2 \qquad (1.23)$$

$$a\sigma_r^{(1)} = -a\sigma_\theta - 4\sum_q \sum_{p=1}^{2} \frac{1}{\Delta_p(\xi_{pq})}[X_{p1}(\xi_{pq})\, M_{p1}^-(\xi_{pq}) +$$

$$+ Y_{p1}(\xi_{pq})\, N_{p1}^-(\xi_{pq}) - X_{p2}(\xi_{pq})\, Q_{p2}^-(\xi_{pq}) + Y_{p2}(\xi_{pq})\, P_{p2}^-(\xi_{pq})] \times$$

$$\times \left(\frac{a}{r_p}\right)^{\xi_{pq}+1} + R_3$$

$$a\sigma_r^{(2)} = -a\sigma_\theta - 4\sum_q \sum_{p=1}^{2} \frac{1}{\Delta_p(\xi_{pq})}[-X_{p1}(\xi_{pq})\, Q_{p1}^-(\xi_{pq}) + Y_{p1}(\xi_{pq})\, P_{p1}^-(\xi_{pq}) +$$

$$+ M_{p2}^-(\xi_{pq})\, X_{p2}(\xi_{pq}) + Y_{p2}(\xi_{pq})\, N_{p2}^-(\xi_{pq})]\left(\frac{a}{r_p}\right)^{\xi_{pq}+1} + R_4$$

где суммирование по q производится по всем ξ_{pq} — корням целых функций $\Delta_p(\xi)$, для которых $\operatorname{Re}(\xi_{pq}) < 0$. Регулярные функции $R_k = R_k(r_1, r_2)$ ($r_1 + r_2 = a$, $k = 1 \div 4$) появляются из-за конечности линии контакта.

При получении (1.23) были использованы значения

$$a_{1k}(-1) = 0, \quad b_{1k}(-1) = 0, \quad \Delta_1(-1) = 0$$

Исключением неизвестных $X_{pn}, X_{pm}, Y_{pn}, Y_{pm}$ система сингулярных интегральных уравнений (1.15) сводится к двум независимым системам интегральных уравнений второго рода относительно неизвестных функций $X_{nk}, X_{nm}, Y_{nk}, Y_{nm}$ с непрерывными ядрами

$$X_{nk}(s)[1 + f_{nk}^{(1)}(s)] + Y_{nk}(s)\, f_{nk}^{(2)}(s) + X_{nm}(s)\, f_{nk}^{(3)}(s) + Y_{nm}(s)\, f_{nk}^{(4)}(s) +$$

$$+ \int_{L_n} [X_{nk}(z)\, \bar K_{nk}^{(1)}(z, s) + Y_{nk}(z)\, \bar K_{nk}^{(2)}(z, s) + X_{nm}(z)\, K_{nk}^{(3)}(z, s) +$$

$$+ Y_{nm}(z)\,\overline{K}^{(4)}_{nk}(z, s)]\,dz = \overline{f}_{nk}(s) - \int_{L_p} [\overline{f}_{pk}(z)\,K^{(1)}_{pk}(z, s) +$$

$$+ \overline{g}_{pk}(z)\,K^{(2)}_{pk}(z, s) + \overline{f}_{pm}(z)\,K^{(3)}_{pk}(z, s) + \overline{g}_{pm}(z)\,K^{(4)}_{pk}(z, s)]\,dz \qquad (1.24)$$

$$X_{nk}(s)\,\gamma^{(5)}_{nk}(s) + Y_{nk}(s)[1 + \gamma^{(6)}_{nk}(s)] + X_{nm}(s)\,\gamma^{(7)}_{nk}(s) + Y_{nm}(s)\,\gamma^{(8)}_{nk}(s) +$$

$$+ \int_{L_n} [X_{nk}(z)\,\overline{K}^{(5)}_{nk}(z, s) + Y_{nk}(z)\,\overline{K}^{(6)}_{nk}(z, s) + X_{nm}(z)\,\overline{K}^{(7)}_{nk}(z, s) +$$

$$+ Y_{nm}(z)\,\overline{K}^{(8)}_{nk}(z, s)]\,dz = \overline{g}_{nk}(s) - \int_{L_p} [\overline{f}_{pk}(z)\,K^{(5)}_{pk}(z, s) +$$

$$+ \overline{g}_{pk}(z)\,K^{(6)}_{pk}(z, s) + \overline{f}_{pm}(z)\,K^{(7)}_{pk}(z, s) + \overline{g}_{pm}(z)\,K^{(8)}_{pk}(z, s)]\,dz$$

$$(n, k = 1, 2; \quad n + p = k + m = 3)$$

где

$$\overline{K}^{(q)}_{nk}(z, s) = \frac{\Gamma(s+1)}{4\pi^2\Gamma(z+1)} \int_{L_n} \frac{\Gamma(z-\xi)\,\Gamma(\xi-s)}{\Delta_n(z)\,\Delta_p(\xi)}\,\overline{K}^{(q)}_{nk}(z, \xi, s)\,d\xi$$

$$4\Delta_1(s)\,\Delta_2(s)\,\gamma^{(q)}_{nk}(s) = -\overline{K}^{(q)}_{nk}(s, s, s) \quad (q = 1, 2, \ldots, 8) \qquad (1.25)$$

$$\overline{k}^{(q)}_{nk}(z, \xi, s) = k^{(q)}_{nk}(z, \xi)\,k^{(1)}_{pk}(\xi, s) + k^{(q-4)}_{nk}(z, \xi)\,k^{(2)}_{pk}(\xi, s) +$$
$$+ k^{(l)}_{nm}(z, \xi)\,k^{(3)}_{pk}(\xi, s) + k^{(l+4)}_{nm}(z, \xi)\,k^{(4)}_{pk}(\xi, s)$$

$$\overline{k}^{(q+4)}_{nk}(z, \xi, s) = k^{(q)}_{nk}(z, \xi)\,k^{(5)}_{pk}(\xi, s) + k^{(q-4)}_{nk}(z, \xi)\,k^{(6)}_{pk}(\xi, s) +$$
$$+ k^{(l)}_{nm}(z, \xi)\,k^{(7)}_{pk}(\xi, s) + k^{(l+4)}_{nm}(z, \xi)\,k^{(8)}_{pk}(\xi, s)$$

$$l = l(q), \quad l(1) = 3, \quad l(2) = 4, \quad l(3) = 1, \quad l(4) = 2.$$

При этом была использована формула Пуанкаре-Бертрана перестановки сингулярных интегралов

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau}\,d\tau_1 = -\pi^2\varphi(t, t) + \int_L d\tau_1 \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)\,d\tau}{(\tau - t)(\tau_1 - \tau)}$$

Свободные члены в (1.24) ограничены по модулю. При соблюдении условий $\theta_{11} - \theta_{12} > \pi$, $\theta_{22} - \theta_{21} > \pi$ из (1.25) и (1.17), а также из свойств функций $H(x, y)$ следует, что

$$\int_{L_n}\int_{L_n} |\overline{K}^{(q)}_{nk}(z, s)|^p\,dz\,ds < \infty \qquad (p > 1) \qquad (1.26)$$

то есть уравнения (1.24) являются фредгольмовыми.

Система интегральных уравнений (1.15) может быть сведена также к решению бесконечной системы линейных уравнений.

Для этого представим неизвестные функции $X_{nk}(s)$ и $Y_{nk}(s)$ в виде рядов по функциям $\tilde{H}_q(s)$

$$X_{nk}(s) = \sum_{q=0}^{\infty} x_{nk}^{(q)} \tilde{H}_q(s) \quad (n,\ k = 1,\ 2)$$
$$Y_{nk}(s) = \sum_{q=0}^{\infty} y_{nk}^{(q)} \tilde{H}_q(s) \qquad (s \in L_n) \tag{1.27}$$

где $\tilde{H}_q(s)$ — функции, связанные с многочленами Чебышева—Эрмита [4] следующим образом:

$$\tilde{H}_q(s) = l^q H_q\left(\frac{s-c}{l}\right), \quad s = c + i\eta \tag{1.28}$$

Подставляя (1.26) в (1.15), после некоторых преобразований для определения неизвестных коэффициентов разложений (1.27), получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$x_{nk}^{(l)} + \sum_{q=0}^{\infty} \left[A_{pk,lq}^{(1)} x_{pk}^{(q)} + A_{pk,lq}^{(2)} y_{pk}^{(q)} + A_{pk,lq}^{(3)} x_{pm}^{(q)} + A_{pk,lq}^{(4)} y_{pm}^{(q)}\right] = F_{nk,l}$$

$$y_{nk}^{(l)} + \sum_{q=0}^{\infty} \left[A_{pk,lq}^{(5)} x_{pk}^{(q)} + A_{pk,lq}^{(6)} y_{pk}^{(q)} + A_{pk,lq}^{(7)} x_{pm}^{(q)} + A_{pk,lq}^{(8)} y_{pm}^{(q)}\right] = G_{nk,l}$$

$$n,\ k = 1,\ 2; \quad n + p = 3; \quad k + m = 3; \quad l = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

где коэффициенты при неизвестных и свободные члены определяются соответственно по формулам

$$A_{pk,lq}^{(\nu)} = \frac{(-2)^{-l-1}}{l!\sqrt{\pi}} \int_{L_p}\int_{L_n} \frac{B(s-1,\ 3-s)}{\Delta_p(\xi)} K_{pk}^{(\nu)}(\xi,\ s)\tilde{H}_q(\xi)\tilde{H}_l(\xi)\, e^{(s-c)^2} d\xi\, ds$$

$$F_{nk,l} = \frac{(-2)^{-l}}{l!\sqrt{\pi}} \int_{L_n} \tilde{f}_{nk}(s)\tilde{H}_l(s)\, a^{-l} e^{(s-c)^2}\, ds$$

$$G_{nk,l} = \frac{(-2)^{-l}}{l!\sqrt{\pi}} \int_{L_n} \tilde{g}_{nk}(s)\tilde{H}_l(s)\, a^{-l} e^{(s-c)^2}\, ds$$

Заметим, что как коэффициенты, так и свободные члены бесконечной системы — действительные числа.

Использованием оценки (1.26) нетрудно доказать, что бесконечные системы являются квазивполне регулярными.

При некоторых значениях углов θ_{pk} из общего решения задачи могут быть получены решения для бесконечной плоскости с двумя горизонтальными трещинами и одной вертикальной (или, наоборот), для полуплоскости с двумя симметрично расположенными полубесконечными трещинами, для полосы с полубесконечной трещиной, для T-образного тела и др.

Отметим, что аналогичные задачи другим методом рассмотрены Нуллером Б. М. [5]. Ворович И. И. [6] предложил приближенный метод для решения таких задач. Некоторые частные случаи рассмотрены Боджи Д. Б. [7]. Чобаняном К. С. [8] экспериментальным методом исследована задача для составной полосы без трещины.

2. Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) Если принять, что $E_2=\infty$, то есть принять, что нижний материал абсолютно жесткий, то получим решение плоской задачи для бесконечного треугольника (фиг. 2), когда на линии O_1O_2 заданы нулевые перемещения, а на боковых ребрах верхнего материала заданы напряжения. При этом

$$\delta_2=0, \quad \delta_1=4(1+\nu_1)^{-1}$$

$$a_{p2}=b_{p2}=Q_{p2}=P_{p2}=0$$

$$K^{(3)}_{p1}=K^{(4)}_{p1}=K^{(7)}_{p1}=K^{(8)}_{p1}=0$$

Решение этой задачи сводится к решению системы из четырех сингулярных уравнений относительно неизвестных X_{p1} и Y_{p1} $(p=1,\ 2)$

$$X_{p1}(s)+\int\limits_{L_n}\frac{B(s+1,\ \xi-s)}{2\pi i d_{p2}(\xi)}\left[X_{n1}(\xi)K^{(1)}_{n1}(\xi,\ s)+Y_{n1}(\xi)K^{(2)}_{n1}(\xi,\ s)\right]d\xi=\tilde{f}_{p1}(s)$$

$$Y_{p1}(s)+\int\limits_{L_n}\frac{B(s+1,\ \xi-s)}{2\pi i d_{p2}(\xi)}\left[X_{n1}(\xi)K^{(5)}_{n1}(\xi,\ s)+Y_{n1}(\xi)K^{(6)}_{n1}(\xi,\ s)\right]d\xi=\tilde{g}_{p1}(s) \qquad (2.1)$$

Здесь

$$K^{(1)}_{p1}(\xi,\ s)=\bar{\alpha}^{+}_{p1}(\xi)\bar{\alpha}^{-}_{n1}(s)+(-1)^n\bar{\beta}^{+}_{p1}(\xi)\bar{\beta}^{-}_{n1}(s)$$

$$K^{(2)}_{p1}(\xi,\ s)=-\left[(-1)^n\bar{\beta}^{-}_{n1}(s)\bar{\alpha}^{+}_{p1}(\xi)+\bar{\beta}^{+}_{p1}(\xi)\bar{\alpha}^{-}_{n1}(s)\right]$$

$$K^{(5)}_{p1}(\xi,\ s)=\tilde{\beta}^{+}_{p1}(\xi)\bar{\alpha}^{-}_{n1}(s)+(-1)^n\tilde{\alpha}^{+}_{p1}(\xi)\tilde{\beta}^{-}_{n1}(s) \qquad (2.2)$$

$$K^{(6)}_{p1}(\xi,\ s)=(-1)^n\tilde{\beta}^{+}_{p1}(\xi)\bar{\beta}^{-}_{n1}(s)+\bar{\alpha}^{+}_{p1}(\xi)\bar{\alpha}^{-}_{n1}(s)$$

Суммирование в этом случае по индексу «q» при вычислении напряжений (1.23) производится по корням ξ_{pq} трансцендентного уравнения

$$d_{p1}(\xi,\ \theta_{p2})=0 \quad (\mathrm{Re}\,\xi<0)$$

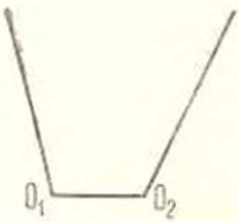
2) Пусть $E_1=\infty$, тогда

$$\delta_1=0, \quad \delta_2=-4(1-\nu_2)^{-1}$$

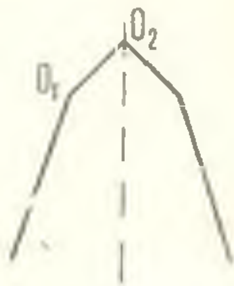
$$Q_{p1}(\xi)=P_{p1}(\xi)=a_{p1}(\xi)=b_{p1}(\xi)=0 \qquad (2.3)$$

$$K^{(3)}_{p2}=K^{(4)}_{p2}=K^{(7)}_{p2}=K^{(8)}_{p2}=0$$

В этом случае получим решение для бесконечного симметричного четырехугольника (фиг. 3), на боковых гранях которого заданы напряжения, а на ломаной части границы — нулевые перемещения.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Решение этой задачи сводится к решению системы уравнений:

$$X_{12}(s) + \int\limits_{L_1} \frac{B(s+1,\ \xi - s)}{2\pi i \bar{S}^{+}(\xi,\ \theta_{22})} [X_{22}(\xi) K_{22}^{(1)}(\xi,\ s) +$$

$$+ Y_{22}(\xi) K_{22}^{(2)}(\xi,\ s)]\, d\xi = \bar{f}_{12}(s) \qquad (2.4)$$

$$Y_{12}(s) + \int\limits_{L_1} \frac{B(s+1,\ \xi - s)}{2\pi i \bar{S}^{+}(\xi,\ \theta_{22})} [X_{22}(\xi) K_{22}^{(5)}(\xi,\ s) +$$

$$+ Y_{22}(\xi) K_{22}^{(6)}(\xi,\ s)]\, d\xi = \bar{g}_{12}(s)$$

$$X_{22}(s) + \int\limits_{L_1} \frac{B(s+1,\ \xi - s)}{2\pi i a_{12}} [X_{12}(\xi) K_{12}^{(1)}(\xi,\ s) + Y_{12}(\xi) K_{12}^{(2)}(\xi,\ s)]\, d\xi = 0$$

$$Y_{22}(s) + \int\limits_{L_1} \frac{B(s+1,\ \xi - s)}{2\pi i a_{12}} [X_{12}(\xi) K_{12}^{(5)}(\xi,\ s) + Y_{12}(\xi) K_{12}^{(6)}(\xi,\ s)]\, d\xi = 0$$

где ядра имеют вид

$$K_{22}^{(1)}(\xi,\ s) = \bar{\alpha}_{12}^{+}(s)\bar{\alpha}_{22}(\xi) + \bar{\beta}_{12}^{-}(s)\bar{\beta}_{22}^{+}(\xi)$$

$$K_{22}^{(2)}(\xi,\ s) = -\tilde{\alpha}_{12}^{+}(s)\cos(\xi+1)\theta_{22} + \bar{\beta}_{12}^{-}(s)\sin(\xi+1)\theta_{22}$$

$$K_{22}^{(5)}(\xi,\ s) = -\tilde{\beta}_{12}^{+}(s)\tilde{\alpha}_{22}^{-}(\xi) + \tilde{\alpha}_{12}^{-}(s)\bar{\beta}_{22}^{+}(\xi) \qquad (2.5)$$

$$K_{22}^{(6)}(\xi,\ s) = \bar{\beta}_{12}^{+}(s)\cos(\xi+1)\theta_{22} + \tilde{\alpha}_{12}^{-}(s)\sin(\xi+1)\theta_{22}$$

$$K_{12}^{(1)}(\xi,\ s) = \bar{\beta}_{12}^{+}(\xi)\cos(s+1)\beta_{22} - \bar{\alpha}_{12}^{-}(\xi)\sin(s+1)\beta_{22}$$

$$K_{12}^{(2)}(\xi,\ s) = \bar{\beta}_{12}^{-}(\xi)\sin(s+1)\beta_{22} + \bar{\alpha}_{12}^{+}(\xi)\cos(s+1)\beta_{22}$$

$$K_{12}^{(5)}(\xi, s) = \bar{\beta}_{22}^{+}(s)\,\bar{\alpha}_{12}^{-}(\xi) + \bar{\alpha}_{22}^{-}(s)\,\bar{\beta}_{12}^{+}(\xi)$$

$$K_{12}^{(6)}(\xi, s) = -\bar{\beta}_{12}^{-}(\xi)\,\bar{\beta}_{22}^{+}(s) + \bar{\alpha}_{22}^{-}(s)\,\bar{\alpha}_{12}^{+}(\xi)$$

$$\bar{S}^{+}(\xi, \theta_{22}) = S^{+}(\xi, \theta_{22}) + \delta_2 \sin 2\xi\theta_{22}$$

Отметим, что, как и в общем случае, системы сингулярных интегральных уравнений (3.1) и (2.4) исключением неизвестных могут быть сведены к двум неизвестным регулярным интегральным уравнениям Фредгольма, каждое из которых содержит по два уравнения, а также могут быть сведены к бесконечным системам.

3) При $E_1 = E_2$ и $\nu_1 = \nu_2$ имеем случай одинаковых материалов, при этом $\delta_1 = \delta_2 = \infty$. В этом случае выражения ядер сингулярных интегральных уравнений (1.15) сильно упрощаются. Все величины в выражениях ядер, зависящие от ξ, заменяются следующими величинами:

$$\Delta_1(\xi) = 4\{\sin^2 \xi(\theta_{11} - \theta_{12}) - \xi^2 \sin^2(\theta_{11} - \theta_{12})\}$$

$$\Delta_2(\xi) = S^{+}(\xi, \theta_{22} - \theta_{21})$$

$$M_{1k}^{\pm}(\xi) = -Q_{1k}^{\pm}(\xi) = -2\sin[\theta_{1k} + \xi\theta_{1m}]\sin \xi(\theta_{1m} - \theta_{1k}) \mp$$
$$\mp 2\xi \sin(\xi\theta_{1k} + \theta_{1m})\sin(\theta_{1k} - \theta_{1m})$$

$$M_{21}(\xi) = -Q_{21}(\xi) = \rho_{21}(\xi)$$

$$M_{22}^{+}(\xi) = -Q_{22}^{+}(\xi) = \sin(\xi - 1)\theta_{22}$$

$$M_{22}^{-}(\xi) = -Q_{22}^{-}(\xi) = 2\sin(\theta_{22} + \xi\theta_{21})\sin \xi(\theta_{22} - \theta_{21}) +$$
$$+ 2\xi \sin(\xi\theta_{22} + \theta_{21})\sin(\theta_{22} - \theta_{21})$$

$$N_{1k}^{\pm}(\xi) = P_{1k}^{\pm}(\xi) = 2\sin \xi(\theta_{1m} - \theta_{1k})\cos(\xi\theta_{1m} + \theta_{1k}) \pm$$
$$\pm 2\xi \sin(\theta_{1m} - \theta_{1k})\cos(\theta_{1m} + \xi\theta_{1k})$$

$$N_{21}(\xi) = P_{21}(\xi) = \mu_{21}(\xi)$$

$$N_{22}^{+}(\xi) = P_{22}^{+}(\xi) = 2\sin \xi(\theta_{21} - \theta_{22})\cos(\xi\theta_{21} + \theta_{22}) +$$
$$+ 2\xi \sin(\theta_{21} - \theta_{22})\cos(\xi\theta_{22} + \theta_{21})$$

$$N_{22}^{-}(\xi) = P_{22}^{-}(\xi) = -\cos(\xi - 1)\theta_{22}$$

$$a_{1k}^{\pm}(\xi) = 4\Delta_{1m}(-1)^k \cos(\xi - 1)\theta_{1k} + (-1)^m [S_{1m}^{\pm}\beta_{1k}^{\pm} - C_{1m}\alpha_{1k}^{\pm}]$$

$$b_{1k}^{\pm}(\xi) = (-1)^m [S_{1m}\alpha_{1k}^{\pm} + C_{1m}\beta_{1k}^{\pm}] - 4(-1)^k \Delta_{1m} \sin(\xi - 1)\theta_{1k}$$

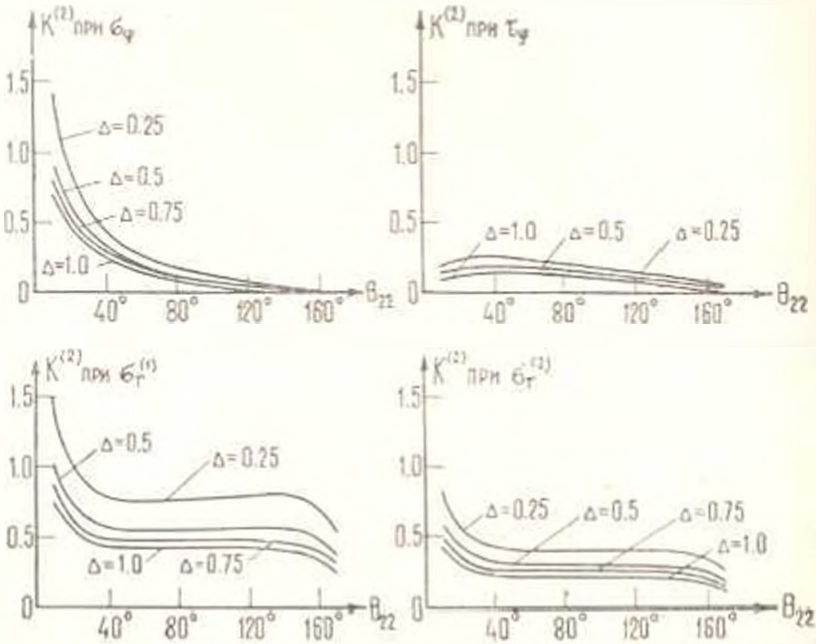
$$a_{21}(\xi) = -S^{+}(\theta_{22} - \theta_{21})\cos(\xi - 1)\theta_{21} - S_{21}\mu_{21} - C_{21}\rho_{21}$$

$$b_{21}(\xi) = S^{+}(\theta_{22} - \theta_{21})\sin(\xi - 1)\theta_{21} + S_{21}\rho_{21} - C_{21}\mu_{21}$$

$$a_{22}^{+}(\xi) = -\left[C_{21}^{+}\sin(\xi+1)\theta_{22} - S_{21}^{+}\cos(\xi+1)\theta_{22}\right] -$$
$$- 4\sin^2\xi\theta_{21}\sin(\xi+1)\theta_{22}$$
$$a_{22}^{-}(\xi) = \alpha_{22}^{-}C_{21}^{-} - \beta_{22}^{-}S_{21}^{-} + 4\Delta_{21}\cos(\xi-1)\theta_{22}$$
$$b_{22}^{+}(\xi) = -\left[S_{21}^{+}\alpha_{22}^{+} - \beta_{22}^{+}C_{21}^{+} + 4\Delta_{21}\sin(\xi-1)\theta_{22}\right]$$
$$b_{22}^{-}(\xi) = C_{21}^{-}\cos(\xi+1)\theta_{22} - S_{21}^{-}\sin(\xi+1)\theta_{22} + 4\sin^2\xi\theta_{21}\cos(\xi+1)\theta_{22}$$

3. В качестве числового примера рассмотрим бесконечную составную полосу с полубесконечной трещиной, когда материалы соединены под углом (фиг. 4), а также составные области, представленные на фиг. 8—11.

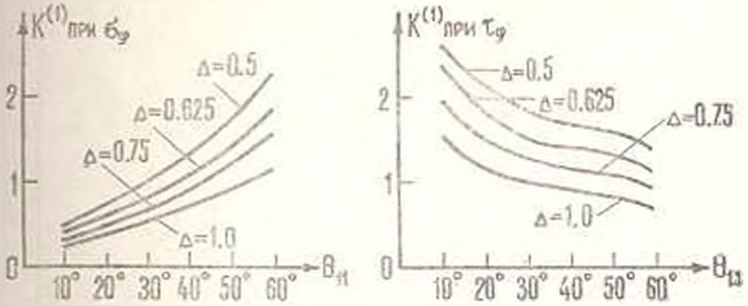
Фиг. 4.



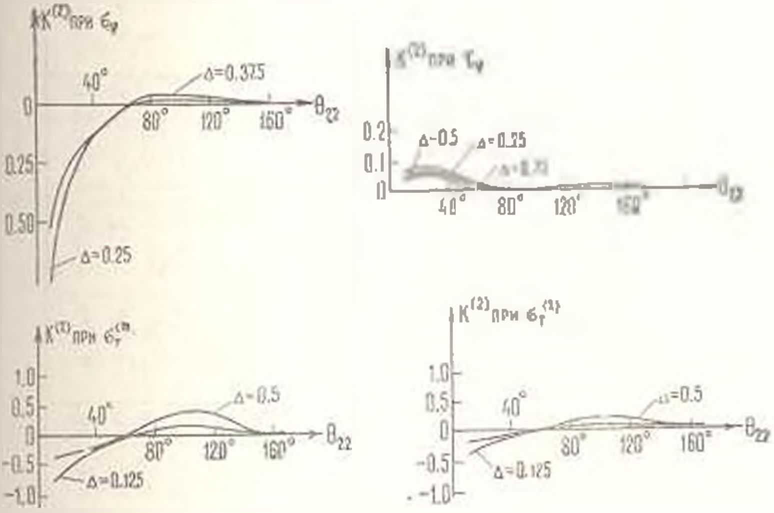
Фиг. 5.

Расчеты выполнены на ЭВМ «ЕС 1022». Для всех областей принято $E_2/E_1 = 2$, $\nu_1 = 0.33$, $\nu_2 = 0.25$, а также принято, что внешние нагрузки приложены в виде сосредоточенных сил, действующих на расстоянии «с» от ближайшего угла, то есть

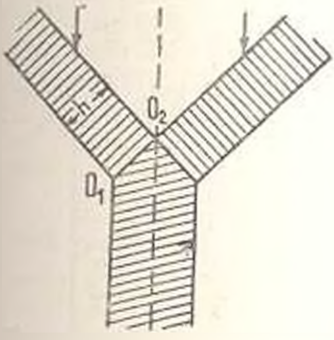
$$f_{nk}(r_n) = P_{nk}\delta(r_n - c), \quad g_{nk}(r_n) = Q_{nk}\delta(r_n - c)$$

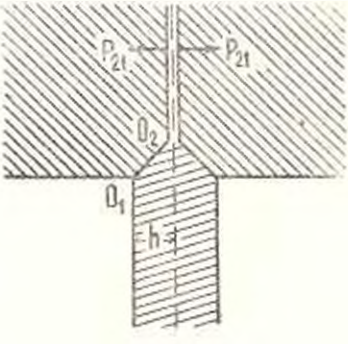


Фиг.



Фиг. 7.





Фиг. 9.

θ_{11}	ξ_{11}	ξ_{21}	θ_{11}
10°	0.9125	0.4823	60°
20°	0.8777	0.4655	70°
30°	0.8793	0.4497	80°
40°	0.9043	0.4356	90°
50°	0.9430	0.4243	100°

№№ фиг.	θ_{11}	$-\theta_{12}$	$-\theta_{21}$	θ_{22}	ξ_{11}	ξ_{21}
8	90°	135°	90°	90°	0.658	0.434
9	135°	135°	135°	45°	0.557	0.429
10	120°	180°	60°	90°	0.50	0.429
10	100°	200°	80°	70°	0.491	0.422
10	80°	220°	100°	50°	0.469	0.430
11	150°	120°	30°	60°	0.571	0.411

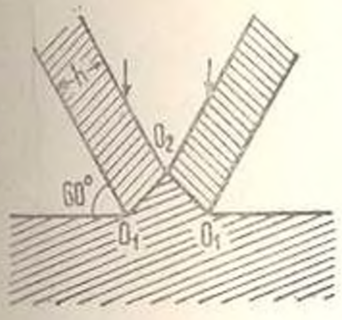
Таблица 1

ξ_{11}	ξ_{21}	θ_{11}	ξ_{11}	ξ_{21}	θ_{11}	ξ_{11}	ξ_{21}
0.9821	0.4170	110°	—	0.4451	160°	—	0.4971
—	0.4144	120°	—	0.4582	170°	—	0.4996
—	0.4166	130°	—	0.4709			
—	0.4231	140°	—	0.4822			
—	0.4330	150°	—	0.4912			

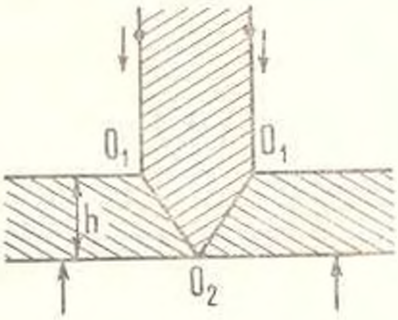
Таблица 2

$K^{(1)}$ при				$K^{(2)}$ при			
σ_r	σ_θ	$\sigma_r^{(1)}$	$\sigma_r^{(2)}$	σ_r	σ_θ	$\sigma_r^{(1)}$	$\sigma_r^{(2)}$
−0.288	−0.155	−0.175	−0.109	−0.100	0.127	−0.193	−0.104
0.165	0.022	0.145	0.085	0.206	0.137	0.421	0.226
−0.227	−0.078	−0.420	−0.227	0.025	0.162	0.132	0.068
−0.182	−0.095	−0.493	−0.260	0.020	0.181	0.071	0.037
−0.144	−0.087	−0.544	−0.283	0.006	0.201	0.005	0.003
−0.148	0.061	−0.126	−0.074	−3.899	0.267	−6.03	−3.308

В табл. 1. приведены значения наименьших по модулю корней ξ_{1k} и ξ_{2k} (для которых $|\mathrm{Re}\,\xi_{pk}| < 1$) соответственно функций $\Delta_1(\xi)$ и $\Delta_2(\xi)$ для полосы с полубесконечной трещиной (фиг. 4), а в табл. 2 — для областей, изображенных на фиг. 8—11.



Фиг. 10.



Фиг. 11.

Для различных точек приложения внешних нагрузок (то есть различных $\Delta = c/h$, см. фиг. 4—11) в зависимости от угла наклона линии соединения материалов первые коэффициенты в разложениях (1.23), то есть коэффициенты интенсивности концентрации напряжений $K^{(p)}$ $(p = 1, 2)$ у полюсов O_1 и O_2.

Результаты вычислений для бесконечной полосы приведены на фиг. 5—7, при этом фиг. 5 соответствует случаю приложения нагрузок, когда $P_{21} = -1$, а остальные нагрузки равны нулю, фиг. 6 и 7 — случаю, когда $Q_{11} = 1$, $Q_{12} = -1$, а остальные силы равны нулю.

Из фиг. 5 видно, что коэффициент концентрации $K^{(2)}$ у полюса O_2 при σ_θ, $\tau_{r\theta}$, $\sigma_r^{(1)}$ и $\sigma_r^{(2)}$ в пределах изменения угла θ_{22} от 60° до 140° практически остается постоянным. Из фиг. 6 имеем, что коэффициент концентрации $K^{(1)}$ у полюса O_1 при σ_θ при изменении угла θ_{11} от 10° до 60° минимальное значение принимает при $\theta_{11} = 10°$, а $K^{(1)}$ при $\tau_{r\theta}$ — при $\theta_{11} = 60°$.

Заметим, что в обоих случаях значения коэффициентов $K^{(p)}$ $(p = 1, 2)$ при удалении точки приложения внешних нагрузок, то есть при увеличении отношения $\Delta = c/h$, до значения $\Delta = 1$, по абсолютному значению уменьшаются. Из фиг. 7 следует, что коэффициенты концентрации $K^{(2)}$ при σ_θ и $\tau_{r\theta}$ получаются минимальными, когда θ_{22} принимает значения, бо́льшие 60°, а коэффициенты концентрации $K^{(2)}$ при $\sigma_r^{(1)}$ и $\sigma_r^{(2)}$ получают минимальные значения при изменении угла θ_{22} в пределах от 50° до 70° и свыше 130°.

В табл. 2 приведены значения этих же коэффициентов для областей, изображенных на фиг. 8—11, для $\Delta = 1$.

Отметим, что аналогичным, как в данной статье, образом можно рассмотреть несимметричные задачи.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 19 I 1981

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ն. Օ. ԳՈՒԼԿԱՆՅԱՆ

ՏԱՐԲԵՐ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ԵՐԵՔ ԿԻՍԱՇԵՐՏԵՐԻ ՄԻԱՑՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐ

Ամփոփում

Դիտարկված է հարթ կոնտակտային խնդիր Y-աձև տիրույթի համար, որը բաղկացած է երկու տարբեր նյութերից՝ սիմետրիայի մեկ MN (ֆիգ. 1) առանցքի առկայության դեպքում։ Ենթադրվում է, որ միացված նյութերի միջև տեղի ունի լրիվ ամրակցում, իսկ եզրային պայմանները տրված են լարումներով։ Ստացված են կոնտակտային լարումները՝ որոնց առանձնահատկությունները առանձնացված են։

Բերված են թվային օրինակներ։

A PLANE PROBLEM FOR A COUPLING OF THREE SEMISTRIPS OF DIFFERENT MATERIALS

A. A. BABLOYAN, N. O. GULKANIAN

Summary

A plane contact problem for Y shape region, composed of two materials, with one axis of symmetry, is considered. A complete coupling is assumed between the composing materials and boundary conditions are given in stresses. Formulas for contact stresses with singled out particularities are obtained. Numerical examples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

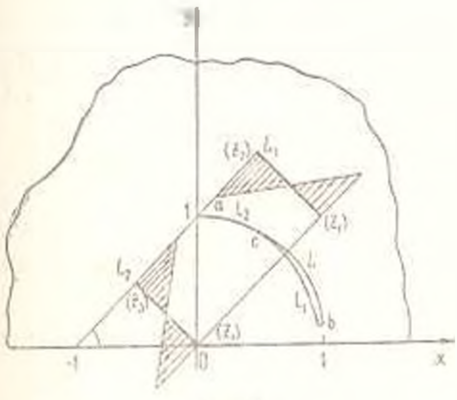
1. *Баблоян А. А., Гулканян Н. О.* Плоская задача теории упругости для области, составленной из двух усеченных клиньев. Докл. АН Армянской ССР, 1976, т. LXII, № 3.
2. *Баблоян А. А.* Плоская контактная задача для двух усеченных клиньев. Докл. АН Армянской ССР, 1977, т. LXV, № 5.
3. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., изд. «Наука», 1965.
4. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М.–Л., изд-во техн.-теор. лит., 1953.
5. *Нуллер Б. М.* О [illegible] решении. Изв. ВНИИГ, 1978, т. 124.
6. Развитие теории контактных задач в СССР. М., «Наука», 1976.
7. *Боджи Д. Б.* Плоская статическая задача о нагруженной трещине, заканчивающейся на границе раздела двух материалов. Прикл. мех. тр. ASME, 1971, т. 38, сер. E, № 4.
8. *Чобанян К. С.* Материалы заявки № ОТ-6436 на открытие, 1971 (Диплом № 102).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIV, № 2, 1981 Механика

Б. Я. КАНТОР, Е. А. СТРЕЛЬНИКОВА, А. А. ФИАЛЬШТИНСКИЙ

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРИВОЛИНЕЙНЫМ РАЗРЕЗОМ

1. *Постановка задачи.* Пусть свободная (защемленная) анизотропная полуплоскость, ослабленная криволинейным разрезом L, находится под действием усилий, распределенных вдоль двух параллельных отрезков L_1 и L_2 (фиг. 1).



Фиг. 1.

Будем предполагать, что L — простая разомкнутая дуга Ляпунова [9] с концами a и b, не имеющая общих точек с границей полуплоскости. Внешние усилия, действующие в полуплоскости, будем учитывать потенциалами $\Phi_{10}(z_1)$ и $\Phi_{20}(z_2)$; берега разреза L считаем свободными от нагрузок.

Допустим, что на части l_1 разреза L происходит раскрытие, а на участке l_2 — смыкание берегов. При этом l_1 и l_2 заранее не заданы.

Требуется описать поле напряжений в окрестности трещины и определить участок контакта l_2.

Рассмотрим сначала краевую задачу в предположении, что участки l_1 и l_2 известны. Участок l_1 является зоной раскрытия, поэтому граничные условия на нем можно записать в виде

$$N^+ = N^- = 0, \quad T^+ = T^- = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $N^\pm$ и $T^\pm$ — соответственно нормальное и касательное усилия на L, верхний знак относится к левому, нижний — к правому берегам разреза при движении от начала разреза (точка a) к концу (точка b).

Красвые условия на l_2 при отсутствии сил трения определяются из условий контакта

$$N^+ = N^-, \quad T^+ = T^- = 0, \quad u_n^+ = u_n^- = 0, \quad u_n = u\cos\psi \pm v\sin\psi \qquad (1.2)$$

Здесь u, v — соответствующие компоненты вектора смещении, ψ — угол между положительным направлением нормали к левому берегу в точке t и осью $0x$.

Согласно [10], напряжения и смещения в анизотропной пластинке выражаются через аналитические функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\mathrm{Re}\,[\mu_1^2\Phi_1(z_1) + \mu_2^2\Phi_2(z_2)] \\ \sigma_y &= 2\mathrm{Re}\,[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -2\mathrm{Re}\,[\mu_1\Phi_1(z_1) + \mu_2\Phi_2(z_2)] \\ u &= 2\mathrm{Re}\,[s_1\varphi_1(z_1) + s_2\varphi_2(z_2)] \\ v &= 2\mathrm{Re}\,[q_1\varphi_1(z_1) + q_2\varphi_2(z_2)] \end{aligned} \qquad (1.3)$$

$$s_\nu = a_{11}\mu_\nu^2 + a_{12} - a_{16}\mu_\nu, \quad q_\nu = a_{12}\mu_\nu + \frac{a_{22}}{\mu_\nu} - a_{26}$$

$$\Phi_\nu(z_\nu) = \varphi_\nu'(z_\nu), \quad z_\nu = x + \mu_\nu y, \quad \nu = 1, 2$$

Здесь μ_1, μ_2 — характеристические числа.

Можно показать, что комплексные потенциалы $\Phi_1(z_1)$, $\Phi_2(z_2)$ для анизотропной полуплоскости, находящейся под действием сосредоточенной силы $\vec{P}(P\cos\omega,\ P\sin\omega)$, приложенной в точке z_0, представляются следующим образом:

$$\Phi_\nu(z_\nu) = \frac{A_\nu}{z_\nu - z_{\nu 0}} + \sum_{n=1}^{2}\gamma_{\nu n}\frac{\overline{A}_n}{z_\nu - \overline{z}_{n0}}$$

$$z_{\nu 0} = \mathrm{Re}\,z_0 + \mu_\nu\,\mathrm{Im}\,z_0, \quad \nu = 1, 2 \qquad (1.4)$$

Здесь константы $\gamma_{\nu n}$ в случае жесткого защемления имеют вид

$$\gamma_{11} = \frac{\overline{p}_1 q_2 - \overline{q}_1 p_2}{p_2 q_1 - p_1 q_2}, \qquad \gamma_{12} = \frac{\overline{p}_2 q_2 - p_2 \overline{q}_2}{p_2 q_1 - p_1 q_2}$$

$$\gamma_{21} = \frac{p_1 \overline{q}_1 - \overline{p}_1 q_1}{p_2 q_1 - p_1 q_2}, \qquad \gamma_{22} = \frac{p_1 \overline{q}_2 - \overline{p}_2 q_1}{p_2 q_1 - p_1 q_2}$$

а в случае свободного края определяются формулами

$$\gamma_{11} = \frac{\mu_2 - \overline{\mu}_1}{\mu_1 - \mu_2}, \quad \gamma_{12} = \frac{\mu_2 - \overline{\mu}_2}{\mu_1 - \mu_2}, \quad \gamma_{21} = \frac{\overline{\mu}_1 - \mu_1}{\mu_1 - \mu_2}, \quad \gamma_{22} = \frac{\overline{\mu}_2 - \mu_1}{\mu_1 - \mu_2}$$

Постоянные A_ν ($\nu = 1, 2$) выражаются через P и ω при помощи системы четырех линейных алгебраических уравнений (два условия однозначности смещений и два статических условия).

Функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$, определяющие напряжения в полуплоскости с разрезом, представим, используя (1.4), в виде

$$\Phi_1(z_1) = \Phi_{10}(z_1) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{p(t)}{t_1 - z_1}\,dt_1 -$$

$$- \frac{\gamma_{11}}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{p(t)\,dt_1}}{\bar t_1 - z_1} - \frac{\gamma_{12}}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{q(t)\,dt_2}}{\bar t_2 - z_1}$$

$$\Phi_2(z_2) = \Phi_{20}(z_2) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{q(t)}{t_2 - z_2}\,dt_2 -$$

$$- \frac{\gamma_{21}}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{p(t)\,dt_1}}{\bar t_1 - z_2} - \frac{\gamma_{22}}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{q(t)\,dt_2}}{\bar t_2 - z_2}$$

$$\operatorname{Im} z_\nu > 0, \quad t_\nu = \operatorname{Re} t + \mu_\nu \operatorname{Im} t, \quad t \in L, \quad \nu = 1,2 \tag{1.5}$$

Функции $\Phi_1(z_1) - \Phi_{10}(z_1)$, $\Phi_2(z_2) - \Phi_{20}(z_2)$, определяемые равенствами (1.5), автоматически обеспечивают выполнение условий $u = v = 0$ на границе полуплоскости в случае жесткого защемления и $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ в случае свободного края.

2. *Основная система уравнений.* Краевым условиям на берегах разреза (1.1), (1.2), учитывая соотношения (1.3), можно придать вид

$$a(\psi)\Phi_1^{\pm}(t_1) + b(\psi)\overline{\Phi_1^{\pm}(t_1)} + \Phi_2^{\pm}(t_2) = 0, \quad t \in l_1$$

$$\operatorname{Re}\{\Phi_1^{\pm}(t_1)[(1-\mu_1^2)\sin 2\psi - 2\mu_1\cos 2\psi] +$$

$$+ \Phi_2^{\pm}(t_2)[(1-\mu_2^2)\sin 2\psi - 2\mu_1\cos 2\psi]\} = 0$$

$$\operatorname{Re}\{(s_1\cos\psi + q_1\sin\psi)[\varphi_1^{+}(t_1) - \varphi_1^{-}(t_1)] +$$

$$+ (s_2\cos\psi + q_2\sin\psi)[\varphi_2^{+}(t_2) - \varphi_2^{-}(t_2)]\} = 0$$

$$a(\psi)[\Phi_1^{+}(t_1) - \Phi_1^{-}(t_1)] + b(\psi)[\overline{\Phi_1^{+}(t_1)} - \overline{\Phi_1^{-}(t_1)}] +$$

$$+ [\Phi_2^{+}(t_2) - \Phi_2^{-}(t_2)] = 0, \; t \in l_2$$

$$a(\psi) = a_0\frac{a_1(\psi)}{a_2(\psi)}, \quad b(\psi) = b_0\frac{\overline{a_1(\psi)}}{a_2(\psi)}$$

$$a_1(\psi) = \mu_1\cos\psi - \sin\psi, \quad a_2(\psi) = \mu_2\cos\psi - \sin\psi$$

$$a_0 = \frac{\mu_1 - \bar\mu_2}{\mu_2 - \bar\mu_2}, \quad b_0 = \frac{\bar\mu_1 - \bar\mu_2}{\mu_2 - \bar\mu_2} \tag{2.1}$$

Верхний знак относится к левому, нижний — к правому берегам разреза. Заметив, что разность первого и второго предельных равенств (2.1) представляет собой пятое равенство, получим, после подстановки предельных значений функций (1.5), связь между искомыми функциями $p(t)$ и $q(t)$, именно

$$q(t) = -a(\cdot)\,p(t) - b(\cdot)\,\overline{p(t)},\; t \in l_1 \cup l_2 = L \tag{2.2}$$

Получим теперь представления комплексных потенциалов $\Phi_{\nu 0}(z_\nu)$ $(\nu = 1, 2)$, определяющих напряжения в анизотропной полуплоскости, находящейся под действием усилий, распределенных вдоль отрезков L_1 и L_2.

Обозначив концы отрезков L_1 и L_2 через z_1, z_2 и z_3, z_4 соответственно, положим

$$z_{ki} = \operatorname{Re} z_i + \mu_k \operatorname{Im} z_i, \quad k = 1,2 \quad i = \overline{1,4}$$

Тогда уравнения отрезков L_i можно записать в виде

$$t_{ki}(\beta) = 0.5\,[(z_{k,2i} - z_{k,2i-1})\beta + (z_{k,2i} + z_{k,2i-1})]$$

$$k = 1,2, \quad i = 1,2, \quad -1 \leqslant \beta \leqslant 1$$

Пусть вдоль L_1 действует распределенная нагрузка $p_1(\beta)$, определяемая формулой

$$p_1(\beta) = \frac{\beta_0 - \beta}{1 + \beta_0}, \quad \beta_0 = \text{const}, \quad -1 < \beta_0 < 1$$

Предположим, что вдоль L_2 действует распределенная нагрузка $p_2(\beta) = -p_1(\beta)$. Для нахождения $\Phi_{\nu 0}(z_\nu)$, $\nu = 1,2$ проинтегрируем выражения

$$\sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+1} p_k(\beta) \left\{ \frac{A_k}{z_k - t_{ki}(\beta)} + \sum_{n=1}^{2} \gamma_{kn} \frac{\bar A_n}{z_k - t_{ni}(\beta)} \right\}, \quad k = 1, 2 \tag{2.3}$$

по β в пределах от -1 до $+1$. Получим

$$\Phi_{k0}(z_k) = \frac{s_0}{2(1+\beta_0)} \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+1} \left\{ \frac{A_k}{M_k^2} [z_k - t_{ki}(\beta_0)] \ln \frac{z_k - t_{ki}(1)}{z_k - t_{ki}(-1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{2} \frac{\gamma_{kn} \bar A_n}{\bar M_n^2} [z_k - t_{ni}(\beta_0)] \ln \frac{z_k - t_{ni}(1)}{z_k - t_{ni}(-1)} \right\}, \quad k = 1, 2 \tag{2.4}$$

Здесь A_k $(k = 1, 2)$ определяются из системы четырех линейных алгебраических уравнений [10], s_i — длина отрезка L_i, M_k определяются формулами

$$M_k = 0.5\,(z_{k2} - z_{k1}) = 0.5\,(z_{k3} - z_{k4}),\; k = 1, 2$$

Таким образом, предельные значения функций (1.5) имеют вид

$$\Phi_1(t_{10}) = \Phi_{10}(t_{10}) \pm \frac{1}{2} p(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p(t)\,dt_1}{t_1 - t_{10}} -$$

$$- \frac{\bar\gamma_{11}}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{p(t)\,dt_1}}{\bar t_1 - \bar t_{10}} - \frac{\bar\gamma_{12}}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{q(t)\,dt_2}}{\bar t_2 - \bar t_{20}}$$

$$\Phi_2^{\pm}(t_{20}) = \Phi_{20}(t_{20}) \pm \frac{1}{2}q(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{q(t)\,dt_2}{t_2 - t_{20}} -$$

$$-\frac{\gamma_{21}}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{p(t)}\,d\overline{t_1}}{\overline{t_1} - \overline{t_{10}}} - \frac{\gamma_{22}}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{q(t)}\,d\overline{t_2}}{\overline{t_2} - \overline{t_{20}}} \tag{2.5}$$

где $\Phi_{\nu 0}(t_{\nu 0})$ $(\nu = 1,2)$ определяются формулами (2.4).

Используя равенства (2.2) и (2.5), приведем краевые условия (2.1) к системе сингулярных интегральных уравнений

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\overline{b_{12}(\psi_0)}\ \overline{b(\psi_0)}}{\pi i}\int_L \frac{p(t)}{\overline{t_2} - \overline{t_{20}}}\,d\overline{t_2} + \int_L G_1(t, t_0)\,p(t)\,dt_2\right\} = N_1(t_0)$$

$$t_0 \in L$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\overline{b_{22}(\psi_0)}\ \overline{b(\psi_0)}}{\pi i}\int_L \frac{p(t)}{\overline{t_2} - \overline{t_{20}}}\,d\overline{t_2} + \int_L G_2(t, t_0)\,p(t)\,dt_1\right\} = N_2(t_0)$$

$$t_0 \in l_1$$

$$\operatorname{Re}\left\{ a(t_0)\,p(t_0) + \int_L G_3(t, t_0)\,p(t)\,dt_1 \right\} = 0,\ t_0 \in l_2 \tag{2.6}$$

Здесь

$$b_{1\nu}(\psi_0) = -2(\mu_\nu \cos\psi_0 - \sin\psi_0)(\mu_\nu \sin\psi_0 + \cos\psi_0)$$

$$b_{2\nu}(\psi_0) = (\mu_\nu \cos\psi_0 - \sin\psi_0)^2; \quad \nu = 1,\ 2$$

$$a(\psi_0) = (\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \overline{\mu_2})(\cos\psi_0 + \overline{\mu_1}\sin\psi_0)(\mu_1\cos\psi_0 - \sin\psi_0)$$

$$2\pi i\,G_k(t, t_0) = \frac{b_{k1}(\psi_0)}{t_1 - t_{10}} - \frac{\mu_1 - \overline{\mu_2}}{\mu_2 - \overline{\mu_2}}\,\frac{b_{k2}(\psi_0)}{t_2 - t_{20}} +$$

$$+\frac{\mu_1 - \mu_2}{\overline{\mu_2} - \mu_2}\,\frac{\overline{b_{k2}(\psi_0)}}{\overline{t_2} - \overline{t_{20}}} - \overline{b_{k2}(\psi_0)}\,\frac{\overline{b(\psi)} - \overline{b(\psi_0)}}{\overline{t_2} - \overline{t_{20}}}\,\frac{\overline{\mu_2}\cos\psi - \sin\psi}{\mu_1\cos\psi - \sin\psi} +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{2}\overline{b_{k\nu}(\psi_0)}\sum_{n=1}^{2}(-1)^n\frac{\gamma_{\nu n}}{\overline{t_n} - \overline{t_{n0}}} + 2\operatorname{Re}\left\{ b_{k2}(\psi_0)\,\gamma_{12}\,\frac{\overline{\mu_1} - \overline{\mu_2}}{\mu_2 - \overline{\mu_2}}\,\frac{1}{t_2 - t_{20}}\right\}$$

$$G_3(t, t_0) = \begin{cases} (\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \overline{\mu_2})(\cos\psi_0 + \overline{\mu_1}\sin\psi_0)\left.\dfrac{d\overline{t_1}}{ds}\right|_{s = s_0}, & t \in [a, t_0] \\ 0 & t \in (t_0, b] \end{cases}$$

$$N_k(t_0) = -\operatorname{Re}\left\{\sum_{\nu=1}^{2} b_{k\nu}(\psi_0)\,\Phi_{k\nu}(t_{\nu 0})\right\}, \quad k = 1,\ 2$$

Теорема. Если L — простая разомкнутая дуга Ляпунова, кривизна которой удовлетворяет условию Гельдера, а функции $b(\psi)$, $b_{1\nu}(\psi)$, $b_{2\nu}(\psi)$,

$\alpha(\psi)$ дважды непрерывно дифференцируемы на L, то система сингулярных интегральных уравнений (2.6) разрешима при любой правой части, удовлетворяющей на L условию Гельдера всюду, кроме конечного числа точек; причем решение определяется с точностью до одной вещественной постоянной.

Доказательство. Воспользуемся методами, изложенными в [11]. Приведем систему (2.6) к виду

$$A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)}{t-t_0}\,dt+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\Omega(t,t_0)\varphi(t)\,dt=N(t_0)$$

Здесь

$$A(t_0)=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad t_0\in l_2;\ \begin{pmatrix}0&0\\\alpha&\bar\alpha\end{pmatrix},\ t_0\in l_1\right\}$$

$$B(t_0)=\left\{\begin{pmatrix}\bar\beta&-\beta\\\bar\beta_1&-\beta_1\end{pmatrix},\quad t_0\in l_1;\ \begin{pmatrix}\bar\beta&-\beta\\0&0\end{pmatrix},\quad t_0\in l_2\right\}$$

$$N(t_0)=\{N_1(t_0),\quad t_0\in l_1;\quad N_2(t_0),\quad t_0\in l_2\}$$

$$\varphi(t)=\{\varphi_1,\varphi_2\},\quad \varphi_1=p(t),\quad \varphi_2=\overline{p(t)}$$

$$\beta=\overline{b_{12}(\psi_0)}\ \overline{b(\psi_0)},\ \beta_1=\overline{b_{22}(\psi_0)}\ \overline{b(\psi_0)},\quad \alpha=\alpha(\psi_0)$$

Обозначив $S=A+B$, $D=A-B$ и проверив, что $\det S\neq 0$, $\det D\neq 0$ всюду на L, устанавливаем, что рассматриваемая система относится к нормальному типу. Поэтому (2.6) можно свести к неоднородной задаче сопряжения Гильберта

$$\Phi^+(t_0)=g(t_0)\Phi^-(t_0)+b(t_0)\tag{2.7}$$

где

$$g(t_0)=S^{-1}(t_0)D(t_0),\ b(t_0)=S^{-1}(t_0)N(t_0)$$

Обозначим $c_1=a$, $c_2=c$, $c_3=b$ (a и b — концы разреза L, c — точка перехода участка раскрытия l_1 в участок контакта l_2). Будем искать решения (2.7) в классе $h(c_2)$, то есть ограниченные в c_2 и неограниченные в точках c_1 и c_3. Для выяснения вопроса о разрешимости (2.7) в классе $h(c_2)$ найдем частные и суммарный индексы этой задачи. Суммарный индекс вычислим по формуле [11]

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\det g}{\det\overset{1}{x}_0\det\overset{2}{x}_0\det\overset{3}{x}_0}\right]_L$$

где $\det\overset{i}{x}_0=(z-z_0)^{\rho_{1i}}(z-z_0)^{\rho_{2i}}$; ρ_{ik} — характеристические числа матриц $g^{-1}(c_i+0)\,g(c_i-0)$; $i=\overline{1,3}$, $k=1,2$. Получим $\varkappa=1$. С другой стороны, $\varkappa=\varkappa_1+\varkappa_2$. Определим $-\varkappa_1$ — наинизший порядок исчезающих на бесконечности решений однородной задачи сопряжения, соответствующей (2.7). Произведем конформное отображение плоскости с разрезом L на плоскость с разрезом l вдоль некоторого отрезка вещественной оси. При этом l_1 и l_2 перейдут в отрезки l_1', l_2' соответственно ($l_1' \cup l_2' = l'$). Введем в рассмотрение функцию $\Psi(z)$, положив $\Psi(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}$. Как показано в [9], на l' будут справедливы равенства $\Psi^-(t) = \overline{\Phi^+(t)}$, $\Psi^+(t) = \overline{\Phi^-(t)}$, использовав которые придем к следующей граничной задаче:

$$\gamma\Phi^+ + \Psi^+ = -(\gamma\Phi^- + \Psi^-)$$

$$\delta\Phi^+ + \Psi^+ = -(\delta\Phi^- + \Psi^-), \quad t \in l_1'$$

$$\gamma\Phi^+ + \Psi^+ = \gamma\Phi^- + \Psi^-$$

$$\delta\Phi^+ + \Psi^+ = -(\delta\Phi^- + \Psi^-), \quad t \in l_2' \tag{2.8}$$

Здесь γ, δ — непрерывные на l и ограниченные на бесконечности функции. Положим теперь $\Omega^\pm = \gamma\Phi^\pm + \Psi^\pm$, $\Xi^\pm = \delta\Phi^\pm + \Psi^\pm$. Тогда условия (2.8) запишутся в виде:

$$\Omega^+ = -\Omega^-, \quad t \in l_1'; \quad \Omega^+ = \Omega^-, \quad t \in l_2'; \quad \Xi^+ = -\Xi^-, \quad t \in l' \tag{2.9}$$

Однако (2.9) нельзя решать как задачу сопряжения, ибо $\Omega(z)$, $\Xi(z)$ могут иметь особенности в конечной части плоскости. Выразив $\Psi^\pm$ через $\Omega^\pm$, $\Xi^\pm$ и подставив в (2.8), придем к двум неоднородным краевым задачам для функции $\Phi(z)$ с неизвестными разрывными правыми частями:

$$\Phi^+ = -\Phi^-, \quad t \in l_1'; \quad \Phi^+ = -\Phi^- - \frac{2\Omega^-}{\delta - \gamma}, \quad t \in l_2' \tag{2.10}$$

$$\Phi^+ = -\Phi^-; \quad t \in l_1'; \quad \Phi^+ = \Phi^- - \frac{2\Xi^-}{\delta - \gamma}, \quad t \in l_2' \tag{2.11}$$

Решения (2.10) и (2.11) отыскиваются в классе $h(c_2)$. Для задачи (2.10) точка c_2 является особенной, поэтому решение в ней необходимо ограничено. Индексы задач (2.10) и (2.11) равны 1 и 0 соответственно.

Исчезающее на бесконечности решение (2.10) в рассматриваемом классе дается формулой [9]

$$\Phi(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int\limits_{l_2'} \frac{2\Omega^- dt}{X_0^+(t)(\gamma - \delta)(t - z)} + CX_0(z) \tag{2.12}$$

а для задачи (2.11) таким решением будет

$$\Phi(z) = \frac{X_1(z)}{2\pi i} \int\limits_{l_2'} \frac{2\Xi^- dt}{X_1^+(t)(\gamma - \delta)(t - z)} \tag{2.13}$$

Здесь $X_0(z)$, $X_1(z)$ — канонические решения однородных задач, соответствующих (2.10) и (2.11), имеющие на бесконечности порядки -1 и 0 соответственно. Вычисляя интегралы типа Коши, фигурирующие в (2.12), (2.13) и приравнивая полученные правые части, придем к равенству

$$0 = \frac{2[\Omega(z) - \Xi(z)]}{\gamma(z) - \delta(z)} + CX_0(z) - X_0(z)\sum_{i=1}^{n} G_i(z) + X_*(z)\sum_{i=1}^{m} F_i(z)$$

где $G_i(z)$, $F_i(z)$ — главные части подынтегральных функций в (2.12), (2.13) в их полюсах. Отсюда

$$\Phi(z) = C_1X_0(z) + \frac{1}{2}\left[X_0(z)\sum_{i=1}^{n} G_i(z) - X_*(z)\sum_{i=1}^{m} F_i(z)\right]$$

Из полученного представления следует, что порядок на бесконечности решения $\Phi(z)$ равен -1, т. е. $\varkappa_1 = 1$. Поскольку $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2$, а $\varkappa = 1$, то $\varkappa_2 = 0$. В [11] доказано, что если все частные индексы класса h неотрицательны, то условие разрешимости соблюдено при произвольной правой части, почти всюду удовлетворяющей условию Гельдера, и решение соответствующей системы сингулярных уравнений содержит $\varkappa$ произвольных постоянных. В рассматриваемом случае $\varkappa = 1$, поэтому решение системы (2.6) определяется с точностью до одной (вещественной) постоянной. Для нахождения этой постоянной воспользуемся условием однозначности касательных смещений

$$\mathrm{Re}\left\{(\mu_1 - \mu_2)(\bar{\mu}_2 - \mu_1)(\mu_1\cos\psi(b) - \sin\psi(b))\int_a^b p(t)\,dt_1\right\} = 0 \qquad (2.14)$$

Таким образом, система уравнений (2.6) допускает единственное решение в классе $h(c)$ при дополнительном условии (2.14), при этом нормальные и касательные напряжения будут ограничены в точке c и неограничены в точках a и b.

3. *Решение контактной задачи.* Предлагается следующий путь решения поставленной задачи. Вначале решается задача о равновесии свободной (защемленной) анизотропной полуплоскости, ослабленной криволинейным разрезом, берега которого не контактируют [12]. Если на L найдется зона $l_1^{(1)}$, в которой происходит «налегание» одного берега разреза на другой, что соответствует выполнению условия $u_n^+ + u_n^- > 0$, то $l_1^{(1)}$ принимается в качестве первого приближения для участка контакта l_1. Затем решается контактная задача при заданном $l_1^{(1)}$, что соответствует решению системы уравнений (2.6), (2.14). При этом вычисляется контактное давление N_n^- и находится точка на L, в которой N^+ обращается в нуль. Эта точка может не совпасть с концом участка, выбранного в качестве предыдущего приближения для зоны контакта. Используем ее для построения следующего приближения. Таким образом, приходим к итерационному процессу, который заканчивается при достижении нужной точности. Вычисления показали, что для достижения точности $\varepsilon = 10^{-3}$ обычно требуется 3—4 итерации.

Для решения системы (2.6), (2.14) использован метод Мультоппа [13], позволяющий свести ее к системе линейных алгебраических уравнений. Метод реализован в программе на языке ФОРТРАН для ЭВМ «БЭСМ-6».

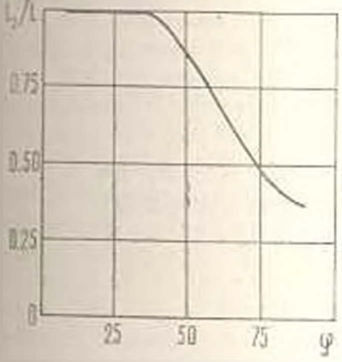
В качестве примера рассмотрена пластина из стеклопластика АГ–4С ($E_1=2.1\cdot10^5$ кг/см², $E_2=1.6\cdot10^5$ кг/см², $G=0.42\cdot10^5$ кг/см², $\nu_2=0.09$, $\gamma_1=2.128\,i$, $\gamma_2=0.539\,i$), ослабленная разрезом в виде дуги эллипса L:

$$x=R_1\sin\frac{\beta+1}{2}\varphi,\quad y=R_2\cos\frac{\beta+1}{2}\varphi,\quad -1<\beta<1$$

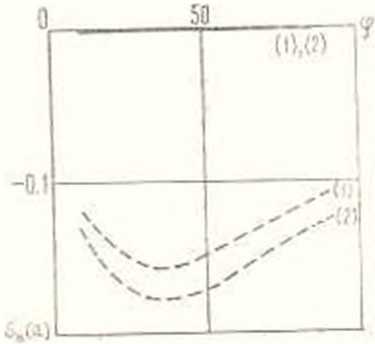
в условиях свободного края.

Контур разреза делится на 20 частей. Дальнейшее увеличение числа узлов не привело к существенному изменению результатов.

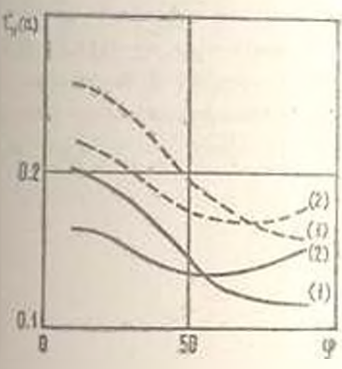
Результаты расчетов приведены на фиг. 2—6. На фиг. 2 представлено изменение ширины зоны контакта берегов трещины. На фиг. 3, 4 изображены графики коэффициентов интенсивности нормальных σ_N и касательных τ_N напряжений, вычисленных в вершине a. Графики тех же величин, относящихся к вершине b, даны на фиг. 5, 6. Здесь величины, вычисленные без учета контакта берегов, изображены пунктирными линиями. Сплошными линиями даны те же величины, найденные с учетом частичного смыкания берегов. Кривые (1) на всех графиках отвечают отношению $R_2/R_1=1$, кривые (2) — отношению $R_2/R_1=0.5$.



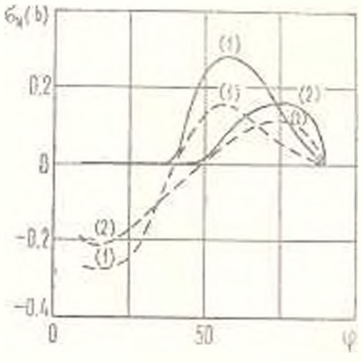
Фиг. 2.



Фиг. 3

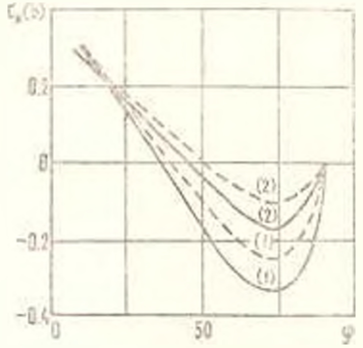


Фиг. 4.



Фиг. 5.

Как видим, при малых углах охвата φ, берега трещины контактируют по всей длине. При этом коэффициенты интенсивности касательных напряжений отличны от нуля. Учет контакта берегов приводит к значительному уменьшению коэффициентов интенсивности в зоне сжатия. С ростом φ увеличивается зона раскрытия и соответственно уменьшается зона контакта (фиг. 2). Оказывается, что учет контакта берегов приводит к увеличению (в некоторых случаях почти вдвое) коэффициентов интенсивности как нормальных, так и касательных напряжений. При подходе к границе полуплоскости ($\varphi \to \pi/2$) наблюдается стремление коэффициентов интенсивности напряжений к нулю (фиг. 5, 6), что объясняется выходом трещины на свободную поверхность.



Фиг. 6.

Таким образом, учет контакта берегов важен при прогнозировании развития трещины, так как при определенных нагрузках приводит к значительному изменению коэффициентов интенсивности напряжений.

Институт проблем
машиностроения АН УССР

Поступила 21 I 19

Բ. Յա. ԿԱՆՏՈՐ, Ե. Ա. ՍՏՐԵԼՆԻԿՈՎԱ, Լ. Ա. ՖԻԼՇՏԻՆՍԿԻ

ԿՈՐԱԳԻԾ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է կորագիծ կտրվածքով թուլացված անիզոտրոպ կիսահարթության համար առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը ազատ եզրի կամ կոշտ ամրացման պայմաններում։ Կոլոսով-Մուսխելիշվիլու կոմպլեքս պոտենցիալների ինտեգրալ ներկայացումների օգտագործմամբ դիտարկվող խնդիրը բերվել է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի, որի լուծմամբ որոշվում է ճեղքի ափերի շրջակայքում լարված-դեֆորմացված վիճակը։ Տրվում է լարումների ինտենսիվության գործակիցների վրա կտրվածքի ափերի մասնակիորեն միացման հաշվառման ազդեցության թվային վերլուծությունը։

A CONTACT PROBLEM IN THE ELASTICITY THEORY FOR ANISOTROPIC SEMI-PLATE WEAKENED BY A CURVILINEAR CRACK

B. Ya. KANTOR, E. A. STRELNICOVA, L. A. FILSHTINSKY

S u m m a r y

The plane problem of elasticity is studied for a semi-infinite free or clamped plate weakened by a curvilinear crack. Using an integral representation for complex potential of stress the above mentioned problem is reduced to a system of singular integral equations. The stressed-strained state is determined near the vertices of the crack by solving this system. The numerical analysis of an influence of the "overlapping" on the stress intensity factors is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Koiter W. T.* On the flexural rigidity of a beam, weakened by transverse saw cuts. Proc. Koninkl. nederl. acad. wet., 1956, B. 59, 4, p. 354—374.
2. *Тоноян В. С., Мелкумян С. А.* Контактная задача для полуплоскости с вертикальным разрезом. Докл. АН Арм. ССР, 1970, 51, 3, с. 144—149.
3. *Тоноян В. С., Мелкумян С. А.* Об одной задаче для полуплоскости с вертикальным конечным разрезом. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, 25, 3, с. 3—17.
4. *Тоноян В. С., Мелкумян С. А.* О симметричном вдавливании двух жестких одинаковых штампов в упругую полуплоскость с вертикальным полубесконечным разрезом. Докл. АН Арм. ССР, 1973, 57, 5, с. 282—288.
5. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев, «Наукова думка», 1976, 444 с.
6. *Ioakimidis N. I., Theocaris P. S.* A system of curvilinear cracks in an isotropic elastic half-plate. Int. J. Fract., 1979, 15, No. 4, p. 299—309.
7. *[illegible] Р. М.* О напряженном состоянии полуплоскости с налегающими трещинами. 1980, 13 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 12 февраля 1980, № 539-80 Деп.).
8. *Hasebe N., Inohara S.* Stress analysis of a semi-infinite plate with an oblique edge crack. Ing.-Arch., 1980, 49, No. 1, p. 51—62.
9. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968, 708 с.
10. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957, 464 с.
11. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М., «Наука», 1970, 379 с.
12. *Фильштинский Л. А.* Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде. Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 5, с. 91—97.
13. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной теории упругости. М., «Наука», 1973, 304 с.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ СС

Մեխանիկա XXXIV, № 2, 1981 Механ

А. Г. БАГДОЕВ, Г. С. БЕЗИРГЕНЯН

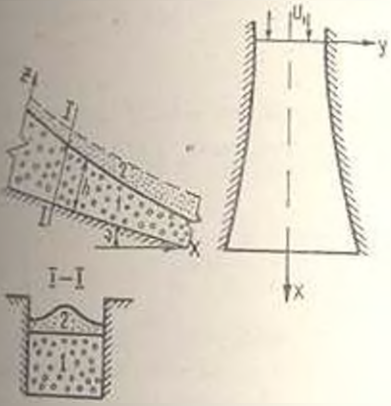
ИССЛЕДОВАНИЕ АЭРИРОВАННОГО ПОТОКА НА ОТКРЫТОМ ВОДОВОДЕ С ПОСТОЯННЫМ ПРОДОЛЬНЫМ УКЛОНОМ ДН

В работе в предположении, что в любом поперечном сечении рас- сматриваемого участка открытого водовода с плоским наклонным дн где концентрация по глубине распределена равномерно, а смесь являе гомогенной, выведены уравнения движения и неразрывности, уравнен характеристик. Предложен численный алгоритм решения полученных пла- новых уравнений, на основании которого можно подсчитать глубины и ско- рости аэрированного потока при заданном очертании боковых стен то есть решать прямую задачу, не прибегая к существующим полуэмпири- ческим гидравлическим методам. Получено уравнение коротких волн, опи- сывающее нелинейный процесс распространения слабых возмущений в окрестности линейной характеристики. Приведенное решение этого урав- нения позволяет качественно и количественно исследовать волновую зо- ну, что для однофазного потока проделано в [17]. Из полученного урав- ния коротких волн следует, что ГГА для плановых аэрированных потоков не имеет места. Показано, что в аэрированном потоке стационарное волно- вое движение всегда устойчиво. Для монохроматических волн, которые об- разуются на свободной поверхности из-за наличия дисперсии и дисси- пации, выведено уравнение модуляций.

С возрастанием кинетичности потока (числа Фруда Fr.) он знач- тельно аэрируется, так как быстро текущий поток обладает свойством сасывания воздуха и учет аэрации становится необходимым. Математи- ское условие возникновения аэрации описывается как потеря устойчив- сти нестационарного волнового движения [11, 12, 14]. К настоящему вре- мени имеющиеся формулы для расчета характеристик аэрированных по- токов или получены из уравнений одномерного движения [10—14], или носят эмпирический характер [12].

По гидродинамической теории изучение многофазных потоков в лите- ратуре имеются две группы работ. Первая группа работ относится к гомо- генным смесям [1, 2, 3, 8]. В таких многофазных потоках относительн перемещение (диффузионное движение) разноплотностных сред незначи- тельное и им можно пренебречь, так как в таких смесях разные фазы пере- мешаны на молекулярном уровне [6], например, случай смеси воды с га- зовыми пузырьками. Пузырьки настолько малы, что сила тяжести не вы- зывает существенного относительного движения пузырьков воздуха. Вто- рая группа работ относится к гетерогенным многофазным потокам [4—12, 9], то есть к таким смесям, когда диффузионное движение разноплот ных сред значительно и им пренебречь нельзя, например, случай взвешанных частиц в разных средах. Гетерогенные смеси, в отличие от гомогенных, характеризуются наличием в них макроскопических неоднородностей [6].

1. Рассмотрим аэрированное движение потока несжимаемой жидкости на переходном участке открытого водовода с произвольно постоянным продольным уклоном дна (фиг. 1). Для математического описания такого потока (смесь воды и пузырков воздуха) обычно берется двухслойная модель, которая имеет наибольшее распространение [11 — 14]. Согласно такой модели аэрированный поток разделяется на два слоя: верхний—воздухокапельный (воздушная пелена) и нижний—водовоздушный (фиг. 1). За свободную поверхность принимается поверхность раздела двух слоев, на которой концентрация ρ в отличие от работ [10—12, 14] предполагается переменной. Отметим, что все нижепроведенные исследования относятся к воздушному слою, толщина которого в несколько раз больше толщины воздухокапельного слоя, и в практических расчетах последним можно пренебречь.



Фиг. 1.

В рассматриваемом случае вполне можно допускать, что пузырьки газа настолько малы, что они движутся вместе с жидкостью, и смесь можно считать единой сплошной средой.

Уравнения движения и неразрывности суспензии для водовоздушного слоя с учетом турбулентного трения запишутся в обычной форме:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=g\sin\gamma-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-T_x \tag{1.1}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-T_y \tag{1.2}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-g\cos\gamma-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-T_z \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial(\rho hu)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho hv)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho hw)}{\partial z}=0 \tag{1.4}$$

где u, v, w — осредненные по элементу объема смеси водовоздушного слоя компоненты скорости соответственно по координатным осям Ox, Oy, Oz (фиг. 1), p, ρ — соответственно осредненные значения давления и плотности смеси, T_x, T_y, T_z — осредненные значения компонентов турбулентного трения по координатным осям, ν — уклон дна относительно горизонтальной плоскости, g — ускорение силы тяжести.

Величины, относящиеся к газовой фазе, обозначим индексом г, а к жидкой — индексом ж. Тогда

$$\rho = \rho_г\beta + (1 - \beta)\rho_ж \sim (1 - \beta)\rho_ж, \quad (\rho_г \ll \rho_ж) \tag{1.5}$$

причем в дальнейшем для общности удержано слагаемое $\rho_г\beta$.

Предполагая, что в смеси движение газа происходит изотермично [1], а пузырьки имеют сферическую форму, можем написать

$$p_г R^3 = \text{const} \tag{1.6}$$

Соотношение между $p_г$ и p аналогично соотношению между давлением в изолированном пузырьке, пульсирующем в безграничной жидкости, и давлением вдали от него [1, 2]

$$p_г - p = \rho_ж R \frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2}\rho_ж\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{4\mu_ж}{R}\frac{dR}{dt} \tag{1.7}$$

где $\mu_ж$ — динамический коэффициент вязкости жидкости.

Отметим, что в правой части уравнения (1.7) оставлены члены, характеризующие малую дисперсию и диссипацию, связанные с размерами пузырьков. Учет этих слагаемых в (1.7) существенен в окрестности стационарной волны, отделяющей в плане область одномерного течения от двухмерного, где они описывают структуру решения (см. п. 4).

Условие прилипания газовых пузырьков к жидкости записывается в форме

$$\frac{\beta\rho_г}{(1 - \beta)\rho_ж} = \text{const} \tag{1.8}$$

Система исходных дифференциальных и алгебраических уравнений замкнута (восемь уравнений с восемью неизвестными: u, v, w, h, ρ, p, β, R).

Проведем осреднение уравнений (1.1)—(1.4) на основе допущений мелкой воды (w — мало, u, v, w и β по z меняются незначительно). Отметим, что в случае, когда β по глубине потока меняется значительно, как например, в работе [10] (применяется степенная форма изменения β от z), то осреднить исходные уравнения не удается. В этом случае течение строго пространственное и такое течение не может быть описано обыкновенным дифференциальным уравнением [10, 13].

Согласно сделанным допущениям, из уравнения (1.3) получаем

$$p = p_0 + g\bar{\rho}(h - z)\cos\nu \tag{1.9}$$

где $\bar{\rho}$ — осредненное значение ρ по глубине, а p_0 — величина давления на поверхности раздела. Оно не равно атмосферному, так как над аэрированным потоком находится область воздухокапельного потока, в котором давление больше атмосферного. (В дальнейшем с целью упрощения записи черточку опускаем.)

Подставляя полученное выражение (1.9) для давления в уравнение (1.1), (1.2) и проведя осреднение по глубине, получаем

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{g\cos\nu}{\rho h}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^2}{2}\right)+g\sin\nu-T_x \tag{1.10}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{g\cos\nu}{\rho h}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho h^2}{2}\right)-T_y \tag{1.11}$$

После осреднения уравнения неразрывности его можно переписать в следующей форме:

$$\frac{\partial(\rho uh)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vh)}{\partial y}=0 \tag{1.12}$$

Подставляя выражение p из (1.9) в (1.8) и проведя осреднение по z, находим

$$p_z=p_0+1/2\,g\rho h\cos\nu+m \tag{1.13}$$

где $m=\rho_ж R\frac{d^2R}{dt^2}+3/2\,\rho_ж\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+\frac{4\mu_ж}{R}\frac{dR}{dt}$.

Таким образом, в предположении, что концентрация по глубине потока распределена равномерно и имеют место допущения мелкой воды, система исходных уравнений после осреднения свелась к системе (1.10)—(1.12), описывающей плановое движение аэрированного потока на открытых водоводах с плоским наклонным дном.

2. В случае конечных возмущений для расчета параметров аэрированного потока можно применить известный из газовой динамики метод характеристик. С этой целью исключим из уравнений движения и неразрывности производные по ρ. Логарифмируя и дифференцируя соотношения (1.5) и (1.8), получаем

$$\frac{d\rho}{dp_z}=\frac{\rho\beta}{p_z}=\frac{\beta[(1-\beta)\rho_ж+\rho_г\beta]}{p+m}$$

Так как слагаемые, входящие в правую часть уравнения (1.7), малы, то $dp_z-dp=dm\simeq 0$.
Следовательно,

$$\frac{1}{c^2}=\frac{d\rho}{dp}\simeq\frac{\beta\{(1-\beta)\rho_ж+\rho_г\beta\}}{p_0+1/2\rho gh\cos\nu} \tag{2.1}$$

где c — скорость распространения звука в смеси.

Из формулы (2.1) следует, что скорость звука в жидкости с пузырьками газа значительно меньше, чем скорость звука в чистом газе.

После проведения некоторых преобразований систему уравнений (1.10)—(1.12) можно переписать в следующей форме:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin \nu - 1/2\, g \cos \nu (1 + A) \frac{\partial h}{\partial x} -$$

$$- \frac{gh \cos \nu}{2\rho c^2} A \frac{\partial m}{\partial x} - T_x \tag{2.2}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - 1/2\, g \cos \nu (1 + A) \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{gh \cos \nu}{2\rho c^2} A \frac{\partial m}{\partial y} - T_y \tag{2.3}$$

$$A \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{h}{\rho c^2} A \left(u \frac{\partial m}{\partial x} + v \frac{\partial m}{\partial y} \right) = 0 \tag{2.4}$$

где

$$A = (1 - gh \cos \nu / 2c^2)^{-1}$$

Полученные уравнения (2.2)—(2.4) существенно отличаются от известных плановых уравнений движения однофазного потока, приведенных в [15], не только слагаемыми, содержащими релаксационные и диссипативные члены, но и выражением A, характеризующим двухкомпонентность среды.

Отметим, что при выводе уравнений характеристик и вообще всюду, кроме малой окрестности вышеотмеченной волны, слагаемым m, входящим в выражение p_1, вследствие малости радиуса пузырьков (в равновесном состоянии $R \simeq 10^{-4}$ *см*) можно пренебречь по сравнению с $1/2 \rho g h \cos \nu$ и положить $p_1 \simeq p$. Умножая уравнение (2.2) на u, а уравнение (2.3) на v и складывая, с использованием уравнения неразрывности (2.4) получаем

$$\left(1 - \frac{u^2}{gh \cos \nu} - \frac{gh \cos \nu}{4c^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{uv}{gh \cos \nu} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) +$$

$$+ \left(1 - \frac{v^2}{gh \cos \nu} - \frac{gh \cos \nu}{4c^2}\right) \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{u}{h} \operatorname{tg} \nu + u T_x + v T_y \tag{2.5}$$

Обозначим

$$a_0 = 1 - \frac{u^2}{gh \cos \nu} - \frac{gh \cos \nu}{4c^2}, \quad a_1 = - \frac{uv}{gh \cos \nu}$$

$$a_2 = 1 - \frac{v^2}{gh \cos \nu} - \frac{gh \cos \nu}{4c^2}, \quad a_3 = - \frac{u}{h} \operatorname{tg} \nu + \vec{V} \cdot \vec{T}$$

Тогда, вводя величину вихря $\omega = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$, с учетом сделанных обозначений уравнение (2.5) можем переписать в следующей форме:

$$a_0 \frac{\partial u}{\partial x} + 2a_1 \frac{\partial u}{\partial y} + a_2 \frac{\partial v}{\partial y} = - a_1 \omega + a_3 \tag{2.6}$$

Считая на каждом шагу ω известным [15] и записывая соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x}+y'\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{du}{dx},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}+y'\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{dv}{dx}-\omega$$

вдоль кривой $y=y(x)$, можно получить уравнение характеристик

$$y'=\frac{1}{\mathrm{Fr}_{a_1}-1}\left[\frac{uv}{c_a^2}\pm\sqrt{\mathrm{Fr}_a-1}\right] \tag{2.7}$$

где $\mathrm{Fr}_a=V^2/c_a^2$ — эффективное число для смеси, $c_a=\sqrt{gh\cos\nu}\times\times\sqrt{1-\beta/2(1-p_0/p)}$ — скорость распространения слабых возмущений в смеси, а $\mathrm{Fr}_{a_1}=u^2/c_a^2$. Отметим, что скорость распространения слабых возмущений в смеси меньше, чем в однофазном бурном течении несжимаемой жидкости по наклонной плоскости.

Как видно из уравнения характеристик (2.7), для того, чтобы характеристики первого и второго семейства были действительными, необходимо и достаточно выполнение условия

$$V>\sqrt{gh\cos\nu\left(1-\frac{gh\cos\nu}{4c^2}\right)}=c_a=V_{кр} \tag{2.8}$$

Отметим, что критическая скорость аэрированного потока приблизительно в 6.6 раз меньше скорости возникновения аэрации [11, 12].

Следовательно, в аэрированном потоке семейства характеристик всегда действительны.

Уравнение совместности вдоль характеристик записывается в форме

$$\frac{du}{dx}-y'_{1,2}\frac{dv}{dx}=\mp\sqrt{\frac{\mathrm{Fr}_a-1}{\mathrm{Fr}_{a_1}-1}}\,\omega+\frac{a_3}{a_0} \tag{2.9}$$

Для вычисления параметров течения по характеристикам выведем уравнение для изменения полного гидростатического напора аэрированного потока. С этой целью перепишем уравнение движения в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}-gx\sin\nu\right)+1/2\,g\cos\nu\,(1+A)\frac{\partial h}{\partial x}=v\omega-T_x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V^2}{2}-gx\sin\nu\right)+1/2\,g\cos\nu\,(1+A)\frac{\partial h}{\partial y}=-u\omega-T_y$$

Умножая первое уравнение на dx, а второе — на dy и складывая, получаем

$$d\left(\frac{v^2}{2}-gx\sin\nu\right)+1/2\,g\cos\nu\,(1+A)\,dh=-\frac{\omega}{\rho h}\,d\Psi-\vec{T}\cdot d\vec{s}$$

где Ψ — функция тока $\left(u=1/\rho h\dfrac{\partial\Psi}{\partial y},\ v=-1/\rho h\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}\right)$, $\vec{T}$ — вектор сил трения $\left(\vec{T}=\lambda\frac{v\cdot\vec{V}}{2h}\right)$ в квадратичной области сопротивления, λ — коэффициент Шези, $\vec{ds}$ — вектор вдоль касательной к линии тока ($\vec{ds}$ = $=\{dx, dy\}$).

Как следует из выражения (2.1) и (2.4), $A = A(h, \beta)$. Но легко показать, что $\beta = \beta(h)$. Следовательно, $A = A(h)$, то есть смесь несжимаемой жидкости с газовыми пузырьками является баротропной. Таким образом, левая часть уравнения изменения гидродинамического напора является полным дифференциалом, то есть

$$dH = -\frac{\omega}{gh}d\Psi - \vec{T}\cdot\vec{ds} \qquad (2.10)$$

где

$$H = \frac{V^2}{2g} - x\sin\gamma + 1/2h\cos\gamma\left|1 + 1/h\int A(h)\,dh\right| \qquad (2.11)$$

— полный гидродинамический напор для аэрированного потока.

Вдоль линии тока уравнение (2.10) запишется в форме

$$dH = -\vec{T}\cdot\vec{ds} \qquad (2.12)$$

Таким образом, задача расчета параметров аэрированного потока при конечных возмущениях сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.7), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), которое можно реализовать только численно, определяя на каждом шагу сначала напор H из (2. 12), а затем x, y, ω, u, v, h соответственно из (2. 12), (2.10), (2.9) и (2.11).

Изложенный метод характеристик отличается от стандартного метода, известного в газовой динамике, тем, что задача интегрирования с тремя семействами характеристик сведена к задаче интегрирования с двумя семействами характеристик. Следует еще отметить, что полученные уравнения характеристик отличаются от известных в газовой динамике уравнений характеристик не только из-за двухфазности среды, но и из-за несостоятельности ГГА (см. п. 3).

3. Выведем из плановых уравнений движения и неразрывности (2.2)—(2.4) нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее нелинейный процесс распространения стационарных возмущений в узкой области, охватывающей окрестность стационарной волны $y = y_0(x)$

$(y_0'(x) = (\mathrm{Fr}_{a_{(0)}} - 1)^{-1/2}$, $\mathrm{Fr}_{a_{(0)}} = \frac{u_{(0)}^2}{gh_{(0)}\cos\gamma}\,\frac{2A_{(0)}}{1+A_{(0)}}$ — число Фруда в одномерном аэрированном потоке).

Вводя лучевую переменную $\xi = y - y_0(x)$ и переходя в уравнениях (2.2)—(2.4) от декартовых координат x, y к координатам x, ξ, получаем

$$u\left(\frac{\partial u}{\partial x}-y_0'\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+v\frac{\partial u}{\partial \xi}=g\sin\nu-1/2\,g\cos\nu(1+A)\left(\frac{\partial h}{\partial x}-y_0'\frac{\partial h}{\partial \xi}\right)+$$

$$+y_0'\frac{gh\cos\nu}{2\rho c^2}A\frac{\partial m}{\partial \xi}-T_x$$

$$u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-y_0'\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)+v\frac{\partial v}{\partial \xi}=-1/2\,g\cos\nu(1+A)\frac{\partial h}{\partial \xi}-$$

$$-\frac{gh\cos\nu}{2\rho c^2}A\frac{\partial m}{\partial \xi}-T_y$$

$$A\left[u\left(\frac{\partial h}{\partial x}-y_0'\frac{\partial h}{\partial \xi}\right)+v\frac{\partial h}{\partial \xi}\right]+h\left(\frac{\partial u}{\partial x}-y_0'\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)+$$

$$+\frac{h}{\rho c^2}A\left(-y_0'u\frac{\partial m}{\partial \xi}+v\frac{\partial m}{\partial \xi}\right)=0$$

Так как в окрестности линейной характеристики $y=y_0(x)$ течение мало отличается от одномерного, то решение этих уравнений можем искать в форме

$$u=u_{(0)}+\bar u,\qquad v=\bar v,\quad h=h_{(0)}+\bar h \tag{3.1}$$

где $\bar u$, $\bar v$, $\bar h$ — возмущенные значения u, v, h (малые добавки и необязательно, чтобы все имели одинаковый порядок малости), а индексом (0) (как и ниже) обозначены значения рассматриваемых параметров в одномерном движении.

Подставляя выражения u, v, h из (3.1) в преобразованные уравнения движения и неразрывности, отбрасывая в первых двух из полученных уравнений члены $\bar u\partial\bar u/\partial x$, $\bar u\partial\bar v/\partial x$, а в третьем — члены

$$A_{(0)}\bar u\frac{\partial\bar h}{\partial x},\qquad \bar A\frac{\partial\bar h}{\partial x},\qquad \bar A\bar u\frac{\partial\bar h}{dx},\qquad \bar A\bar u\frac{dh_{(0)}}{dx}$$

$$A_0\bar u\bar v\frac{\partial\bar h}{\partial \xi},\qquad \bar A u_{(0)}\bar v\frac{\partial\bar h}{\partial \xi},\qquad \bar A\bar u\bar v\frac{\partial\bar h}{\partial \xi}$$

и приравнивая в них члены первого порядка малости $o(\bar u)$, с учетом уравнений одномерного движения получаем уравнение первого приближения (вследствие их громоздкости эти уравнения не приводятся).

Уравнения движения одномерного движения в рассматриваемом случае имеют вид

$$u_{(0)}\frac{du_{(0)}}{dx}=g\sin\nu-1/2\,g\cos\nu(1+A_{(0)})\frac{dh_{(0)}}{dx}-T_{x_{(0)}} \tag{3.2}$$

$$A_{(0)}u_{(0)}\frac{dh_{(0)}}{dx}+h_{(0)}\frac{du_{(0)}}{dx}=0 \tag{3.3}$$

которые при отсутствии пузырьков ($\beta = 0$, $A_{(0)} = 1$) сводятся к известному уравнению гидравлики одномерного движения.

Приравнивая в уравнениях первого приближения члены, содержащие производные $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial v}{\partial \xi}$, $\frac{\partial h}{\partial \xi}$ линейно, и интегрируя выписанные уравнения, получим алгебраические соотношения, из которых находим условия совместности

$$h = -2\frac{u_{(0)}}{g\cos\nu}\frac{1}{1+A_{(0)}}\bar{u}, \qquad v = -\frac{\bar{u}}{y_0'} \tag{3.4}$$

(Третье соотношение тождественно выполняется, так как оно дает уравнение линейной характеристики).

Заменяя в членах уравнений первого приближения, содержащих производные по x от h, v, а также в нелинейных членах h, v выражением (3.4), с использованием уравнений нулевого приближения находим

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\mathrm{Fr}^2_{a_{(0)}}}{2(\mathrm{Fr}_{a_{(0)}}-1)^{3/2}}(2+1/A_0)\left[1+\frac{1-2p_*/p_{r(0)}A_{(0)}}{c^2_{(0)}(2+1/A_{(0)})(1+1/A_{(0)})^2}\times\right.$$

$$\left.\times u^2_{(0)}\frac{\sqrt{\mathrm{Fr}_{a_{(0)}}-1}}{\mathrm{Fr}^2_{a_{(0)}}}\right]\frac{\bar{u}}{u_{(0)}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}+$$

$$+\frac{1}{2(\mathrm{Fr}_{a_{(0)}}-1)}\left[\frac{(4+3/A_{(0)})\mathrm{Fr}_{a_{(0)}}+2}{(1+1/A_{(0)})(\mathrm{Fr}_{a_{(0)}}-1)}\frac{\mathrm{tg}\,\nu}{h_{(0)}}+\right. \tag{3.5}$$

$$+\frac{\mathrm{Fr}_{a_{(0)}}}{2A_{(0)}}\frac{d\ln(1+A_{(0)})}{dx}-\frac{gh_{(0)}\cos\nu}{2c_0^2}\mathrm{Fr}_{a_{(0)}}\left(\frac{1}{(1+A_0)\sqrt{\mathrm{Fr}_{a_{(0)}}-1}}-A_{(0)}\right)\times$$

$$\left.\times(1-2p_*/p_{r(0)}A_{(0)})\frac{d\ln u_{(0)}}{dx}\right]\bar{u}=$$

$$=\frac{3}{4}\frac{A_{(0)}u_{(0)}}{c^2_{(0)}(1+1/A_{(0)})p_{r(0)}}\frac{1}{(\mathrm{Fr}_{a_{(0)}}-1)^{3/2}}\times$$

$$\times(c_{*(0)}-y_0'/A_{(0)}\mathrm{Fr}_{a_{(0)}}+2y_0'A_{(0)}u^2_{(0)})\left(\rho_* u_0 y_0'\partial^2\bar{u}/\partial\xi^2-4\mu_*/R_0\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\xi^2}\right)$$

Если в уравнении (3.5) отбросить правую часть, то его решение запишется в виде

$$\bar{u} = f(\xi)\exp\left\{-\int_0^x R(t)\,dt\right\} \tag{3.6}$$

$$\xi = f(\zeta)\int\limits_{x_{cr}}^{x} \frac{C}{a_{(0)}} \exp\left\{-\int\limits_0^x R(t)\,dt\right\} + \zeta \tag{3.7}$$

где через R и C соответственно обозначены коэффициенты при u и $u\partial u/\partial\xi$ в уравнении (3.5).

Полученное решение уравнения коротких волн (3.5) позволяет исследовать возникновение, развитие и затухание косых прыжков в зависимости от форм боковых очертаний рассматриваемого участка [17], то есть структуру варьированного потока в окрестности линейной характеристики

$$y = b_0 - \int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{\mathrm{Fr}_{a_{(0)}} - 1}}$$

4. Перепишем уравнение (3.5) в следующей форме:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + R\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + C\bar{u} = E\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \xi^3} + F\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} \tag{4.1}$$

где через E и F — соответственно обозначены коэффициенты при $\partial^3 u/\partial\xi^3$ и $\partial^2 u/\partial\xi^2$.

После замены в (4.1) $\bar{u}$ через U по формуле $u = e^{-Cx}U$ уравнение (4.1) примет вид

$$\frac{\partial U}{\partial x} + Re^{-Cx}U\frac{\partial U}{\partial \xi} = E\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + F\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \tag{4.2}$$

Решение (4.2) ищем в форме разложения монохроматических волн

$$U = U_1 e^{i\tau+\sigma x} + U_1^* e^{-i\tau+\sigma x} + U_2 e^{2i\tau+2\sigma x} + U_2^* e^{-2i\tau+2\sigma x} + U_0 \tag{4.3}$$

где U_1, U_1^*, U_2, U_2^* — комплексно-сопряженные амплитуды, τ — основной эйконал, а σ — характеристика затухания, которая подлежит определению. В разложении (4.3) все функции, кроме эйконала, предполагаются медленно меняющимися функциями.

Обозначим $\alpha = \partial\tau/\partial x$, $\beta = \partial\tau/\partial y$.

Вычисляя производные U по ξ и x, подставляя их выражения в (4.2) и приравнивая в полученном уравнении члены при $e^{2i\tau}$, $e^{i\tau}$ и свободные члены, соответственно получаем

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + (i\alpha + \sigma + iE\beta^3 + F\beta^2)\,U_1 + Re^{-Cx}\,i\,(U_1^* U_2 e^{2\sigma x} + U_0 U_1)\,\beta +$$

$$+ (3E\beta - 2iF)\,\beta\frac{\partial U_1}{\partial \xi} - (3iE\beta + F)\,\frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi^2} = 0 \tag{4.4}$$

$$(2i\alpha + 2\sigma + 8Ei\beta^3 + 4F\beta^2)\,U_2 + iRe^{-Cx}\,U_1^2\beta = 0 \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} + Re^{-Cx}\left(U_0\frac{\partial U_0}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\xi}|U_1|^2 e^{2\sigma x}\right) = E\frac{\partial^3 U_0}{\partial\xi^3} + F\frac{\partial^2 U_0}{\partial\xi^2} \tag{4.6}$$

В уравнении (4.4) приравнивая нулю коэффициент при U_1, получаем дисперсионное соотношение

$$i\alpha + \sigma + iE\beta^3 + F\beta^2 = 0$$

отсюда $\alpha = -E\beta^3$, $\sigma = -F\beta^2$.
Подставляя выражения α и σ в (4.5), получаем уравнение для выражения U_2 через U_1

$$2(3iE\beta + F)\beta^2 U_2 = -Rie^{-Cx}U_1^2\beta \tag{4.7}$$

Предполагая, что в (4.6) дисперсионные и диссипативные члены малы, получаем

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} = -Re^{-Cx+2\sigma x}\frac{\partial}{\partial\xi}|U_1|^2 \tag{4.8}$$

Следуя Уизему [18], приравниваем в (4.4) первые производные, так как по порядку каждый из них больше производной второго порядка, но их сумма того же порядка

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + (3E\beta - 2iF)\beta\frac{\partial U_1}{\partial\xi} = 0,\ \text{отсюда}\ \frac{\partial}{\partial x} \simeq (-3E\beta - 2iF)\beta\frac{\partial}{\partial\xi} \tag{4.9}$$

Считая [18], что U_0 связано с основным волновым движением таким же соотношением, с использованием (4.8) получаем

$$U_0 = \frac{Re^{-Cx+2\sigma x}|U_1|^2}{(3E\beta - 2iF)\beta} \tag{4.10}$$

Подставляя выражения U_2 и U_0 соответственно из (4.7) и (4.10) в (4.4), окончательно получаем уравнение модуляций для комплексной амплитуды U_1

$$\begin{gathered}\frac{\partial U_1}{\partial x} + (3E\beta - 2iF)\beta\frac{\partial U_1}{\partial\xi} - (3iE\beta + F)\frac{\partial^2 U_1}{\partial\xi^2} \\ -\frac{R^2}{18E^2\beta^2}e^{-2(C+\sigma)x}[(4 - i)F + 3(1 - 2i)E\beta]|U_1|^2 U_1 = 0\end{gathered} \tag{4.11}$$

Отметим, что на быстротоках подобные волны образуются из-за наличия дисперсии или на некотором расстоянии от входного сечения, или всюду — при наличии волнистой стенки.

Институт механики
АН Армянской ССР

НИИ водных проблем и
гидротехники Армянской
ССР

Поступила 16 VII 1979

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Գ. Ս. ԲԵՍԻՐԳԵՆՅԱՆ

ԱԷՐԱՑՎԱԾ ՀՈՍԱՆՔԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲԱՑ ՋՐԱՀՈՍԱՆՔԻ ՎՐԱ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ստացված են ջրի և գազի լուծույթի համար պլանային շարժման հավասարումները։ Դուրս են բերված կարճ ալիքների հավասարումը։ Ցույց է տրված, որ ստացիոնար աէրացված հոսանքի ալիքային շարժումը միշտ կայուն է։

THE INVESTIGATION OF AERATION FLOW IN THE OPEN CANAL

A. G. BAGDOEV, G. S. BESIRGENIAN

S u m m a r y

The problem of propagation of nonlinear waves on the surface of steady aeration flow with small depth is considered. In the assumption of uniform distribution of concentration in flow depth for homogenous gas-fluid mixture the plane equations of motions are derived.

The equations of characteristics are obtained and a numerical method for solution of the equations is suggested. The equations of short waves, describing the nonlinear process of propagation of weak disturbances in the neighbourhood of a linear wave is derived.

It is shown that in steady aeration flow the wave motion is always stable.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Ван Вейгарден.* Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа. Реология суспензий. М., изд. «Мир», 1975.
2. *Бэчелор Г. К.* Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости. Механика. сб. пер. ин. статей, 1968, № 3.
3. *Коварко Б. С.* Движение смеси жидкости с газовыми пузырьками. Тр. международного симпозиума в Ленинграде, М., изд. «Наука», 1973.
4. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1, 2, М., изд. «Наука», 1970.
5. *Рахматулин Х. А.* Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, 1956, т. 20, № 2.
6. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М., изд. «Наука», 1978.
7. *Баренблатт Г. И.* О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке. ПММ, 1953, т. XVII, вып. 3.
8. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван, изд. АН АрмССР, 1961.
9. *Нордансккий С. В., Куликовский А. Г.* О движении жидкости, содержащей мелкие частицы. Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1977, № 4.
10. *Войнич-Сяноженцкий Т. Г.* Некоторые вопросы устойчивости потоков и их свободной поверхности при течении с большими скоростями. Тр. координационных совещаний по гидротехнике, 1963, вып. VII.

11. *Войнич-Сяноженцкий Т. Г.* О критериальном условии возникновения аэрации плавно изменяющихся бурных потоков. Тр. I Закавказской конференции молодых научных специалистов. Ереван, 1960.
12. *Войнич-Сяноженцкий Т. Г., Саквареладзе В. В.* Критерии аэрации плавноизменяющихся бурных потоков и их экспериментальная проверка. Плавноизменяющееся неравномерное движение аэрированных потоков. Тр. координационных совещаний по гидротехнике, 1969, вып. 52.
13. *Картвелишвили Н. А.* Волнообразование на быстротоках. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 1.
14. Рекомендации по гидравлическому расчету водопропускных трактов безнапорных водосбросов на аэрацию и волнообразование, под ред. Гунько Ф. Г., Исаченко Н. Б., Л., ВНИИГ, 1978.
15. *Емцев Б. Т.* Двухмерные бурные потоки. М., изд. «Энергия», 1961.
16. *Лайтхилл М. Дж.* Высшие приближения. Сб. «Общая теория аэродинамики больших скоростей», М., 1962.
17. *Баглоев Л. Г., Безиргенян Г. С.* Исследование сверхкритического течения в открытом водоводе конфузорной формы с произвольным продольным уклоном. Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. XXVIII, № 2.
18. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 2, 1981 Механика

Ф. М. ПОЛАДЯН

КРУЧЕНИЕ КРИВОЙ РАЗНОСТЕННОЙ ТРУБЫ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассматривается задача о кручении круговой разностенной трубы, материал которой обладает свойством нелинейной наследственной ползучести [1].

Пусть полый стержень с круговой осью и постоянным поперечным сечением находится под воздействием перерезывающих сил P и крутящих моментов PR (R — радиус оси стержня), приложенных на торцевых сечениях (фиг. 1).

Решение такой задачи для упрочняющегося материала приведено в работах [2, 3]. Задача о кручении тонкостенных призматических стержней с учетом нелинейной ползучести исследована в [4].

§ 1. *Основные уравнения задачи.* Принимаем, что для материала стержня справедливы соотношения нелинейно-наследственной теории ползучести Н. Х. Арутюняна [1]

$$2G\varepsilon_{ij} = s_{ij} - \int_{\tau_1}^{t} s_{ij} f(\tau_0) K(t, \tau)\, d\tau \tag{1.1}$$

где $G = E/3$, а E принимается постоянным, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$, δ_{ij} — символ Кронекера, σ — среднее давление, $f(\tau_0)$ — некоторая функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести для данного материала, τ_0 — интенсивность касательных напряжений, $K(t, \tau) = 3G \dfrac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}$, $C(t, \tau)$ — мера ползучести при одноосном напряженном состоянии.

Воспользуемся тороидальными координатами α, β, γ: $x = \rho\cos\gamma$, $y = \rho\sin\gamma$, $z = H\sin\beta$, где $\rho = a\,\mathrm{sh}\,\alpha\,(\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta)^{-1}$, $H = a \times (\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta)^{-1}$; здесь $0 \leqslant \alpha \leqslant \infty$, $-\pi \leqslant \beta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi$ (фиг. 2).

Для компонентов деформации будем иметь [5]

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_\alpha}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\beta}{H}\right), \quad 2\varepsilon_{\alpha\gamma} = \frac{H}{\rho}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{u_\alpha}{H}\right) + \frac{\rho}{H}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\gamma}{\rho}\right)\Big|_{(\alpha,\beta)}$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\alpha}{H}\right) + \frac{1}{H^2}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}u_\alpha + \frac{\partial H}{\partial\beta}u_\beta\right)\Big|_{(\alpha,\beta)}$$

$$\varepsilon_{\gamma\gamma} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma} + \frac{1}{H\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}u_\alpha + \frac{\partial\rho}{\partial\beta}u_\beta\right) \tag{1.2}$$

Положим, что все компоненты напряжения, за исключением $\sigma_{\alpha\gamma}$ и $\sigma_{\beta\gamma}$, в любой момент времени t равны нулю, тогда из уравнений равновесия остается [5]

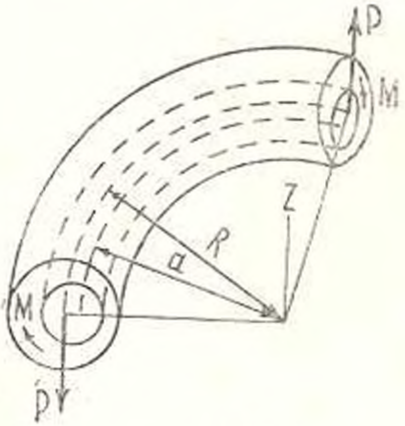
$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(H\rho^2\sigma_{\alpha\gamma}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(H\rho^2\sigma_{\beta\gamma}\right)=0 \tag{1.3}$$

а из остальных следует, что напряженное состояние стержня не зависит от γ, следовательно, тензор деформации также не зависит от γ. Перемещения из (1.2) представим в виде

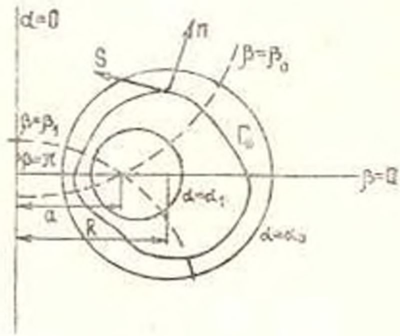
$$u_\alpha=u_{\alpha0}+\int F_\alpha d\gamma\Big|_{(\alpha,\beta)},\qquad F_\alpha=2\rho\varepsilon_{\alpha\gamma}-\frac{\rho^2}{H}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\gamma}{\rho}\right)\Big|_{(\alpha,\beta)}$$

$$u_\gamma=u_{\gamma0}+\int\left(\rho\varepsilon_{\gamma\gamma}-\frac{1}{H}\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}u_\alpha-\frac{1}{H}\frac{\partial\rho}{\partial\beta}u_\beta\right)d\gamma \tag{1.4}$$

где $u_{\alpha0}$, $u_{\beta0}$, $u_{\gamma0}$ — произвольные функции α, β и t.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Подставляя (1.4) в (1.2) и учитывая указанное обстоятельство, получим

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}=\frac{1}{H}\frac{\partial u_{\alpha0}}{\partial\alpha}+\frac{1}{H^2}\frac{\partial H}{\partial\beta}u_{\beta0}\Big|_{(\alpha,\beta)},\qquad 2\varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_{\beta0}}{H}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_{\alpha0}}{H}\right) \tag{1.5}$$

а относительно F_α, F_β приходим к системе трех дифференциальных уравнений, решением которой будет

$$F_\alpha=(D_0+D_1z)\frac{1}{H}\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}+(D-D_1\rho)\frac{1}{H}\frac{\partial z}{\partial\alpha}\Big|_{(\alpha,\beta)} \tag{1.6}$$

где D_0, D_1, D — произвольные функции от t.

Исключая из (1.4) u_γ и используя (1.6), получаем уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{H}{\rho}\tau_{\beta\gamma}\right)-\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{H}{\rho}\tau_{\alpha\gamma}\right)=D\frac{H^2}{\rho^2} \tag{1.7}$$

Полагая в (1.5) равными нулю все компоненты деформации, кроме $\varepsilon_{\alpha\gamma}$ и $\varepsilon_{\beta\gamma}$, получаем систему относительно $u_{\alpha 0}$, $u_{\beta 0}$, решением которой будет

$$u_{\alpha 0}=-\frac{N_1}{H}\frac{\partial \rho}{\partial \alpha}-\frac{N_2}{H}\frac{\partial z}{\partial \alpha}\Bigg|_{(\alpha,\beta)} \tag{1.8}$$

где

$$N_1=\frac{A}{4}(\rho^2-z^2)+\frac{B}{2}\rho z+\frac{C_1}{2}\rho-E_1 z$$

$$N_2=\frac{A}{2}\rho z-\frac{B}{4}(\rho^2-z^2)+\frac{C_1}{2}z-E_1\rho$$

здесь A, B_1, C_1, E_1 — произвольные функции от t.

После подстановки (1.6) и (1.8) в (1.4) получаем выражения для перемещений u_α, u_β, u_γ.

Вводя функцию напряжений

$$\tau_{\alpha\gamma}=-\frac{1}{H\rho^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}, \quad \tau_{\beta\gamma}=\frac{1}{H\rho^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \tag{1.9}$$

от (1.1) и (1.7) приходим к основному уравнению задачи

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right)-$$

$$-\int_{\tau_1}^{t}\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{f(\tau_0)}{\rho^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right]+\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{f(\tau_0)}{\rho^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right]\right\}K(t,\tau)\,d\tau=DG\frac{H^2}{\rho^2} \tag{1.10}$$

где

$$\tau_0=\frac{1}{H\rho^2}\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right)^2} \tag{1.11}$$

Таким образом, задача приводится к определению функций $\Phi(\alpha, \beta, t)$ из нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.10) при граничных условиях

$$\Phi(\alpha_0, \beta, t)=0, \quad \Phi(\alpha_1, \beta, t)=b(t) \tag{1.12}$$

где $b(t)$—неизвестная функция t, а $\alpha=\alpha_0$, $\alpha=\alpha_1$ соответствуют линиям внешнего и внутреннего контура (фиг. 2).

Крутящий момент выражается формулой

$$M=\iint_{\Omega}\left[(\rho-R)\tau_{\beta\gamma}-z\tau_{\alpha\gamma}\right]d\Omega \tag{1.13}$$

где

$$d\Omega = H^2 d\alpha d\beta = d\rho\, dz$$

Переходя от $\tau_{\alpha\gamma}$, $\tau_{\beta\gamma}$ к $\tau_{\rho\gamma}$, $\tau_{z\gamma}$ и подставляя в (1.13), после применения формулы Грина-Остроградского получим

$$M = -\oint_{\Gamma} \Phi d\left(\frac{z}{\rho}\right) - R \oint_{\Gamma} \frac{\Phi}{\rho^2}\, dz + 2R \iint_{\Omega} \frac{\Phi}{\rho^3}\, d\Omega$$

Принимая $\Phi = 0$ на внешном контуре, для двухсвязной области получим

$$M = -R\Phi_1(t) \oint_{\Gamma_1} \frac{dz}{\rho^2} + 2R \iint_{\Omega} \frac{\Phi}{\rho^3}\, d\Omega \tag{1.14}$$

где $\Phi_1(t)$ — значение Φ на контуре Γ_1.

§ 2. *Обобщение теоремы Бредта.* Пусть Γ_* — замкнутая кривая, целиком лежащая в поперечном сечении скручиваемого стержня. Область, ограниченную контуром Γ_*, обозначим через Ω_* (фиг. 2). Интегрируя обе части уравнения (1.10) в области Ω_* и переходя к контурному интегралу, получим

$$\int_{\Gamma_*} \frac{1}{\rho^3} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \int_{\tau_1}^{t} f(\tau_0) \frac{\partial \Phi}{\partial n} K(t, \tau)\, d\tau \right] ds = \frac{DG}{2} \int_{\Gamma_*} \frac{dz}{\rho^2} \tag{2.1}$$

где n — направление внешней нормали к контуру Γ_*, а s — дуга этого контура. Формула (2.1) представляет собой обобщение теоремы Бредта о циркуляции деформации сдвигов при кручении стержня с кривой осью при произвольном законе нелинейной связи между деформациями ползучести и напряжениями.

§ 3. *Решение интегро-дифференциального уравнения* (1.10). Положим, что

$$f(\tau_0) = 1 + \lambda \tau_0^2 \tag{3.1}$$

где λ—физический параметр, характеризующий нелинейный закон ползучести. Решение уравнения (1.10) ищем в виде ряда

$$\Phi(\alpha, \beta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(\alpha, \beta, t) \tag{3.2}$$

где Φ_0 соответствует случаю линейно-упругого материала. Подставляя (3.2) в (1.10) и (1.11), приходим к системе рекуррентных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \beta^2} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \beta} = H^2 \tau_n \tag{3.3}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

здесь

$$\varphi_0(t) = GD(t) + \int_{\tau_1}^{t} D(\tau) R(t, \tau)\, d\tau \tag{3.4}$$

а $\varphi_n(\alpha, \beta, t)$ при $n \geqslant 1$ определяются соотношениями

$$\varphi_n(\alpha, \beta, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\tau_1}^{t} N(t, \tau)\left(\omega_k \varphi_{n-1-k} + \operatorname{grad} \Phi_k \operatorname{grad} \varphi_{n-1-k}\right) d\tau \tag{3.5}$$

где

$$N(t, \tau) = K(t, \tau) + \int_{\tau}^{t} R(t, \xi) K(\xi, \tau)\, d\xi \tag{3.6}$$

$$\omega_k = \rho^{-1} \sum_{i=0}^{k} \operatorname{grad} \Phi_i \operatorname{grad} \Phi_{k-i} \tag{3.7}$$

а $R(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau)$. Если

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau)\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right] \tag{3.8}$$

то

$$R(t, \tau) = \gamma_0 - \eta'(\tau) + \left[\eta''(\tau) - \eta'^2(\tau) - \gamma_0 \eta'(\tau)\right] e^{\eta(\tau)} \int_{\tau}^{t} e^{-\eta(x)} dx \tag{3.9}$$

где

$$\eta(t) = \gamma_0 \int_{\tau_1}^{t} \left[1 - 3G\varphi(\tau)\right] d\tau$$

причем, согласно [1] $\varphi(\tau) = C_0 + A_1 \tau^{-1}$, где C_0, A_1 и γ_0 — некоторые постоянные, характеризующие свойство ползучести материала.

Вводя новую функцию $\Psi_n(\alpha, \beta, t)$ при помощи подстановки

$$\Phi_n(\alpha, \beta, t) = (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{-1/2} \operatorname{sh}^2 \alpha \Psi_n(\alpha, \beta, t)$$

из (3.3) получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \beta^2} + \operatorname{cth} \alpha \frac{\partial \Psi_n}{\partial \alpha} - \left(-\frac{1}{4} + \frac{4}{\operatorname{sh}^2 \alpha}\right) \Psi_n = $$

$$= \frac{H^2 (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{1/2}}{\operatorname{sh}^2 \alpha}\, \varphi_n \tag{3.10}$$

Из (1.12) получим $\Psi_n(\alpha_0, \beta, t) = 0$ на внешней окружности, а на внутренней $\Psi_n(\alpha_1, \beta, t) = b_n^1 (\operatorname{ch} \alpha_1 - \cos \beta)^{1/2} \operatorname{sh}^{-2} \alpha_1$, где $b_0^1 = b(t)$, $b_1^1 = b_2^1 = \ldots = 0$.

Введем функцию

$$Z_n^m(\alpha, \beta) = P_n^m(\operatorname{ch}\alpha)\, Q_n^m(\operatorname{ch}\beta) - P_n^m(\operatorname{ch}\beta)\, Q_n^m(\operatorname{ch}\alpha)$$

где $P_n^m(x)$ и $Q_n^m(x)$ — присоединенные сферические функции соответственно первого и второго рода m-го порядка n-го индекса.

Решая уравнения (3.10), удовлетворяющие указанным выше условиям и переходя к $\Phi_n(\alpha, \beta, t)$, получим

$$\Phi_n(\alpha, \beta, t) = \frac{b_n^1(t)}{2\pi\, \mathrm{sh}^2\alpha_1} \frac{\mathrm{sh}^2\alpha}{(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)^{3/2}} \int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\eta)^{3/2} L(\alpha, \beta; \eta)\, d\eta +$$

$$+ \frac{\mathrm{sh}^2\alpha}{2\pi(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)^{3/2}} \iint_{\Omega} \varphi_n(\xi, \eta, t)(\operatorname{ch}\xi - \cos\eta)^{3/2}\, \Gamma(\alpha, \beta; \xi, \eta)\, d\Omega \quad (3.11)$$

где

$$L(\alpha, \beta; \eta) = \frac{Z_{-1/2}^2(\alpha_0, \alpha)}{Z_{-1/2}^2(\alpha_0, \alpha_1)} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_{n-1/2}^2(\alpha_0, \alpha)}{Z_{n-1/2}^2(\alpha_0, \alpha_1)} \cos n(\beta - \eta)$$

а $\Gamma(\alpha, \beta; \xi, \eta)$ — функция Грина для данной задачи, причем $\Gamma(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B(\alpha, \beta; \xi, \eta)$ при $\xi \leqslant \alpha$, где

$$B(\alpha, \beta; \xi, \eta) = \frac{16}{9} Z_{-1/2}^2(\xi, \alpha_0) \frac{Z_{-1/2}^2(\alpha_1, \alpha)}{Z_{-1/2}^2(\alpha_0, \alpha_1)} +$$

$$+ 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_{n-1/2}^2(\xi, \alpha_0)\, Z_{n-1/2}^2(\alpha_1, \alpha)}{(n^2 - 9/4)(n^2 - 1/4)\, Z_{n-1/2}^2(\alpha_0, \alpha_1)} \cos n(\beta - \eta)$$

$$\text{и } \Gamma(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B(\xi, \eta; \alpha, \beta) \text{ при } \alpha \leqslant \xi$$

§ 4. *Определение функции* $b(t)$. Для определения функции $b(t)$ воспользуемся обобщенной теоремой Бредта (2.1), которая в данном случае принимает следующий вид:

$$\int_{\beta_1}^{\pi} \frac{1}{\rho^3}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} - \int_0^t f(\tau_1)\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} k(t, \tau)\, d\tau\right] d\beta = \frac{\pi DG}{a\, \mathrm{sh}^2\alpha_1} \quad (4.1)$$

Если в общем решении (3.2) ограничиться первыми двумя приближениями, то из (3.11) получим

$$\Phi(\alpha, \beta, t) = m_1 b(t) + m_2\varphi_0(t) + \int_0^t N(t, \tau)\left[n_1 b^3(\tau) + \right.$$

$$\left. + n_2 b^2(\tau)\varphi_0(\tau) + n_3 b(\tau)\varphi_0^2(\tau) + n_4\varphi_0^3(\tau)\right] d\tau + O(\varepsilon^2) \quad (4.2)$$

где

$$m_1 = m_1(\alpha, \beta) = \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha}{2\pi \operatorname{sh}^2 \alpha_1 (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{3/2}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{ch} \alpha_1 - \cos \eta)^{3/2} L(\alpha, \beta; \eta)\, d\eta$$

$$m_2 = m_2(\alpha, \beta) = \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha}{2\pi (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{3/2}} \iint\limits_{\Omega} (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta)^{1/2} \Gamma(\alpha, \beta; \xi, \eta)\, d\Omega,$$

а $n_i = n_i(\alpha, \beta)$ определяются через m_1, m_2.

Пользуясь методом решения, изложенным выше и ограничиваясь только первыми двумя приближениями $b(t)$ и $\varphi_0(t)$, получим

$$b(t) = b_0(t) + \lambda b_1(t) + O(\lambda^2), \quad \varphi_0(t) = \varphi_{00}(t) + \lambda \varphi_{01}(t) + O(\lambda^2)$$

Подставляя (4.2) в (1.14), (4.1) и пользуясь (4.3), получим

$$b(t) = Z(t) + \int\limits_{t_0}^{t} Z(\tau) K(t, \tau)\, d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \left[Z(\tau) + \int\limits_{t_0}^{\tau} Z(x) K(\tau, x)\, dx \right] \times$$

$$\times R(t, \tau)\, d\tau + k_1 \lambda \left[g_*(t) + \int\limits_{t_0}^{t} g_*(\tau) K(t, \tau)\, d\tau \right] + O(\lambda^2)$$

где

$$Z(t) = k_2 [k_3 M(t) + \lambda h(t)]$$

$$h(t) = \int\limits_{t_0}^{t} N(t, \tau) (k_4 b_0^3 + k_5 b_0^2 \varphi_{00} + k_6 b_0 \varphi_{00}^2 + k_7 \varphi_{00}^3)\, d\tau$$

$$g_*(t) = -\int\limits_{t_0}^{t} N(t, \tau) Y(\tau)\, d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} K(t, \tau)\, d\tau \int\limits_{t_0}^{\tau} N(\tau, x) Y(x)\, dx +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} (k_8 b_0^3 + k_9 b_0^2 \varphi_{00} + k_{10} b_0 \varphi_{00}^2 + k_{11} \varphi_{00}^3) K(t, \tau)\, d\tau$$

$$Y(t) = k_{12} b_0^3 + k_{13} b_0^2 \varphi_{00} + k_{14} b_0 \varphi_{00}^2 + k_{15} \varphi_{00}^3$$

$b_0(t)$, $\varphi_{00}(t)$ определяются из системы

$$b_0(t) - \int\limits_{t_0}^{t} b_0(\tau) K(t, \tau)\, d\tau = k_{16} \left[\varphi_{00} + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi_{00}(\tau) K(t, \tau)\, d\tau \right]$$

$$\varphi_{00}(t) = k_3 M(t) + k_{17} b_0(t)$$

а коэффициенты k_i — постоянные и определяются через m_1, m_2.

§ 5. *Исследование сходимости ряда* (3.2). Для доказательства существования решения надо показать, что ряд (3.2), где коэффициенты $\Phi_n(\alpha, \beta, t)$ определяются из рекуррентных формул (3.11), сходится абсолютно и равномерно. Для этой цели оценим $\Phi_n(\alpha, \beta, t)$ в зависимости от n. Зададимся фиксированным промежутком изменения времени $\tau_1 \leqslant t \leqslant T$ и положим

$$\max|K(t, \tau)| = K_T, \quad \max|R(t, \tau)| = R_T, \quad \tau_1 \leqslant \tau, \quad t \leqslant T$$

Тогда из (3.6) следует, что

$$|N(t, \tau)| \leqslant K_T(1 + R_T T) = N_T \tag{5.1}$$

Вводя норму

$$\|X\| = \max|X| + \sup\frac{|X(A) - X(B)|}{|AB|^{\delta}}$$

где A, B — произвольные точки внутри поперечного сечения стержня, $0 < \delta < 1$, при помощи априорных оценок Шаудера [6], которые в данном случае пишутся в виде

$$\|D^2\Phi_n\| \leqslant c_*\|\varphi_n\| \tag{5.2}$$

где c_* — некоторая постоянная, зависящая от формы области, получаем рекуррентную систему неравенств. Из (3.4), (3.5), (3.7), в силу (5.1) и (5.2) получим

$$\|\Phi_n\| \leqslant \nu\sum_{k=0}^{n}\|\varphi_k\| q_{n-k}$$

где

$$\nu = 2N_T T\mu c_*^2(1 + 6\mu c_*)$$

$$\mu = \max_{(\alpha, \beta)\in\Sigma}\left\{\|H^{-2}\|, \left\|\frac{\partial}{\partial\alpha}(H^{-2}\gamma^{-4})\right\|, \left\|\frac{\partial}{\partial\beta}(H^{-2}\gamma^{-4})\right\|, \|H^{-2}\gamma^{-4}\|\right\}$$

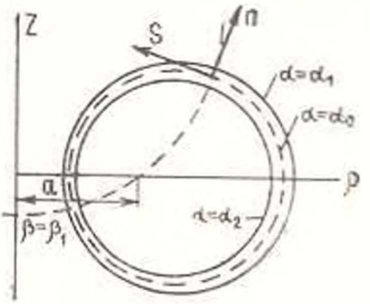
$$q_n = \sum_{k=0}^{n}\|\varphi_k\|\|\varphi_{n-k}\|$$

Рассмотрим ряд с общим членом $\lambda^n\|\varphi_0\|n^{-2}\lambda_*^{-n}$. Методом индукции можно показать, что $\|\varphi_n\| \leqslant \|\varphi_0\|n^{-2}\lambda_*^{-n}$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda^n\|\varphi_n\|$ и ряд (3.2) сходятся абсолютно и равномерно с радиусом сходимости $\lambda = \lambda_* = (364\nu\|\varphi_0\|^2)^{-1}$.

§ 6. *Случай тонкостенной трубы.* Рассмотрим тонкостенный разностенный стержень, сечение которого ограничено двумя неконцентрическими окружностями $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ (фиг. 3). Ввиду тонкостенности стержня положим, что касательные напряжения по всей толщине стенки профиля постоянны и направлены параллельно его средней линии. Отнесем сечение стержня к координатной системе (s, n), где s-координата, отсчитываемая вдоль средней линии профиля Γ_0 от некоторой ее точки, а n-координата, отсчитываемая по нормали к ней. Γ_0 определяется через $\alpha = \alpha_0$, а систему (s, n) можно заменить системой (β, α).

Ввиду тонкостенности стержня, как обычно, Φ принимаем линейной функцией от координаты. Полагая на внешнем контуре $\Phi = 0$, а на внутреннем $\Phi_1(t)$, найдем ($2h(s)$ — толщина стенки стержня)

$$\Phi = \frac{\Phi_1(t)}{2}\left[1 - \frac{2n}{h(s)}\right] \tag{6.1}$$



Фиг. 3

Пренебрегая двойным интегралом в (1.14), получим

$$M(t) = 2\pi \operatorname{ch}\alpha_0 \operatorname{sh}^{-3}\alpha_0 \Phi_1(t) \tag{6.2}$$

Пользуясь обобщенной формулой Бредта (2.1) и соотношениями (6.1) и (6.2), определяем

$$D(t) = \frac{a \operatorname{sh}^3\alpha_0}{2\pi^2 G \operatorname{ch}\alpha_0}\int_{\Gamma_0}\frac{H}{\xi^3 h}\left[M(t) - \int_{\tau_1}^{t} f(\sigma_0)\, M(\tau)\, K(t, \tau)\, d\tau\right] d\beta \tag{6.3}$$

Здесь

$$\sigma_0(t) = \sigma_1(t) = \operatorname{sh}^3\alpha_0 M(t)\left(2\pi \operatorname{ch}\alpha_0 \xi^2 h\right)^{-1}$$

$$h = h(\beta) = H(\alpha_0, \beta)(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Принимая $M(t) = M = \mathrm{const}$ и пользуясь (3.1) и (3.8), получим

$$D(t) = \frac{\operatorname{sh}^3\alpha_0 M}{2\pi a^2 G(\alpha_2 - \alpha_1)}\left\{(2\operatorname{ch}^2\alpha_0 + 3) + 3G\left(C_0 + \frac{A_1}{\gamma_1}\right)\left[1 - e^{-\gamma_1(t-\tau_1)}\right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[(2\operatorname{ch}^2\alpha_0 + 3) + \lambda\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha_0 M}{2\pi a^3 \operatorname{ch}\alpha_0(\alpha_2 - \alpha_1)}\right)^2 c^*\right]\right\} \tag{6.4}$$

где

$$c^* = 2\operatorname{ch}^8\alpha_0 + 36\operatorname{ch}^6\alpha_0 + \frac{189}{2}\operatorname{ch}^4\alpha_0 + \frac{105}{2}\operatorname{ch}^2\alpha_0 + \frac{315}{64}$$

Рассмотрим задачу релаксации напряжений. В начальный момент стержню сообщим крутку $D(\tau_1)$, которая определяется формулой

$$D(\tau_1) = \operatorname{sh}^3\alpha_0(2\operatorname{ch}^2\alpha_0 + 3)\, M(\tau_1)\left[2\pi a^2 G(\alpha_2 - \alpha_1)\right]^{-1} \tag{6.5}$$

Пользуясь обобщенной формулой Бредта (2.1), а также соотношениями (6.1), (6.2), (6.5) и принимая $f(\sigma_*) = 1 + \lambda\sigma_*$ получим

$$\Phi_1(t) - \int_{\tau_1}^{t} \Phi_1(\tau) K(t, \tau)\, d\tau - \lambda_* \int_{\tau_1}^{t} \Phi_1^2(\tau) K(t, \tau)\, d\tau = g \tag{6.6}$$

где

$$\lambda_* = \frac{\lambda (16 \operatorname{ch}^6 \alpha_0 + 120 \operatorname{ch}^4 \alpha_0 - 90 \operatorname{ch}^2 \alpha_0 + 5)}{8\pi a^3 \operatorname{sh}^2 \alpha_0 \operatorname{ch} \alpha_0 (2 \operatorname{ch}^2 \alpha_0 + 3)(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

$$g = \frac{GD(\tau_1)(\alpha_2 - \alpha_1) a^2 \operatorname{sh} \alpha_0}{\operatorname{ch} \alpha_0 (2 \operatorname{ch}^2 \alpha_0 + 3)}$$

Ограничиваясь первыми двумя приближениями, получим выражения крутящего момента

$$\frac{M(t)}{M(\tau_1)} = H_0(t, \tau_1) + \lambda_1 \left[H_1(t, \tau_1) - \int_{\tau_1}^{t} H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau)\, d\tau \right] + O(\lambda_1^2) \tag{6.7}$$

где

$$H_0(t, \tau_1) = 1 - 3G\gamma_0 \varphi(\tau_1) e^{-rt} \int_{\tau_1}^{t} e^{r\tau - p\tau} d\tau$$

$$H_1(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^{t} H_0^2(\tau, \tau_1) K(t, \tau)\, d\tau$$

$$r = \gamma_0(1 + 3GC_0), \quad p = 3GA_1\gamma_0, \quad \lambda_1 = \lambda_* M(\tau_1) \operatorname{sh}^3 \alpha_0 (2\pi \operatorname{ch} \alpha_0)^{-1}$$

Аналогичным образом, ограничиваясь в общем решении (3.2) первыми тремя приближениями, получим

$$\frac{M(t)}{M(\tau_1)} = H_0(t, \tau_1) + \lambda_1 \left[H_1(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^{t} H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau)\, d\tau \right] +$$

$$+ 2\lambda_1^2 \left[H_2(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^{t} H_2(\tau, \tau_1) R(t, \tau)\, d\tau \right] + O(\lambda_1^3) \tag{6.8}$$

где

$$H_2(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^{t} \left[H_0(\tau, \tau_1) H_1(\tau, \tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau} H_1(x, \tau_1) R(\tau, x)\, dx \right] K(t, \tau)\, d\tau$$

а $R(t, \tau)$ определяется из (3.9).

Для старого материала можно положить $A_1 = 0$. Тогда из уравнения (6.6) получим замкнутое решение

$$\frac{M(t)}{M(\tau_1)} = \frac{(g-x_2)\,x_1 - (g-x_1)\,x_2 e^{-\lambda_2(x_1-x_2)(t-\tau_1)}}{g\left[g-x_2-(g-x_1)\,e^{-\lambda_2(x_1-x_2)(t-\tau_1)}\right]} \qquad (6.9)$$

где $\lambda_2 = 3GC_0\gamma_0\lambda_*$, а x_1 и x_2 — корни уравнения

$$\lambda_2 x^2 + \gamma_0(1+3GC_0)\,x - g\gamma_0 = 0$$

Аналогичным образом, если принять (3.1), то решение получается в квадратурах

$$\ln\left|\frac{\Phi_1(t)-\xi}{g-\xi}\right|\sqrt{\frac{g^2+\xi g+p_1+\xi^2}{\Phi_1^2(t)+\xi\Phi_1(t)+p_1+\xi^2}} -$$

$$-\frac{3\xi}{\sqrt{4p_1+3\xi^2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt{4p_1+3\xi^2}\,[\Phi_1(t)-g]}{4p_1+3\xi^2+[2\Phi_1(t)+\xi][2g+\xi]} =$$

$$= A_*(3\xi^2+p_1)(t-\tau_1) \qquad (6.10)$$

где

$$\xi = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{Q}}, \quad Q = \left(\frac{p_1}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

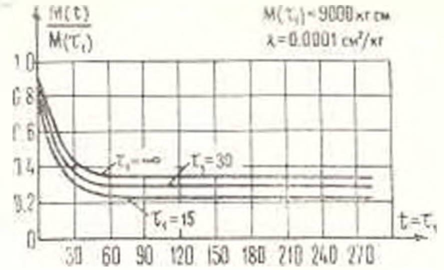
$$p_1 = a^6(1+3GC_0)\,\mathrm{sh}^4\alpha_0(\alpha_2-\alpha_1)^2(2\,\mathrm{ch}^2\alpha_0+3)(3GC_0\lambda c^*)^{-1}$$

$$q = a^6 D(\tau_1)(\alpha_2-\alpha_1)^3\,\mathrm{sh}^3\alpha_0(3\,\mathrm{ch}\,\alpha_0 C_0\lambda c^*)^{-1}$$

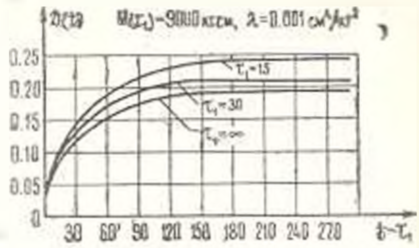
$$A_* = -3GC_0\gamma_0 c^*\left[(\alpha_2-\alpha_1)^2 a^4\,\mathrm{sh}^4\alpha_0(2\,\mathrm{ch}^2\alpha_0+3)\right]^{-1}$$

На ЭВМ „ЕС—1022" при значении параметров $\mathrm{ch}\,\alpha_0 = 3$, $a = 6\sqrt{8}$ *см*, $\alpha_2-\alpha_1 = 1/\sqrt{8}$, $\gamma_0 = 0.026$ *1/день*, $3G = 2\cdot 10^5$ *кг/см²*, $C_0 = 0.9\cdot 10^{-5}$ *см²/кг*, $A_1 = 4.82\cdot 10^{-5}$ *см²/кг день* дано решение задачи ползучести и о релаксации крутящего момента тонкостенного стержня. Вычисления показывают, что значения крутящих моментов, полученные при помощи формул (6.7) и (6.8), отличаются на 10^{-5}, следовательно, в общем решении (3.2) уравнения (6.6) можно ограничиться первыми двумя приближениями. Кроме того, вычисления показывают, что значения крутящих моментов, полученные при помощи формул (6.9) и (6.10), почти совпадают со значениями, полученными при помощи формулы (6.7) при больших значениях τ_1.

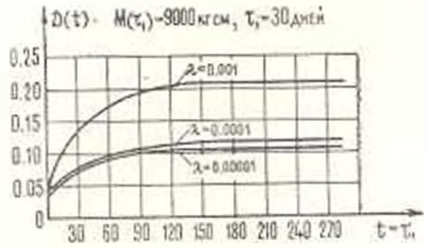
На фиг. 4 показано изменение крутящего момента во времени в зависимости от возраста материала τ_1 и продолжительности действия нагрузки $t-\tau_1$. На фиг. 5 и 6 показано изменение деформации ползучести при различных значениях τ_1 и λ.



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

За постановку задачи и постоянное внимание выражаю благодарность моему научному руководителю проф. М. А. Задояну.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 2 VI 1980

Ն. Մ. ՓԱԼԱԴՅԱՆ

ԿՈՐ ՏԱՐԱՊԱՏ ԽՈՂՈՎԱԿԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է տարապատ կոր խողովակի ոլորումը ոչ-գծային ժառանգական սողքի հաշվառումով։ Օգտագործելով տորական կոորդինատները, կիսադարձային մեթոդով խնդիրը բերվում է ոչ-գծային ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման՝ լարումների ֆունկցիայի նկատմամբ։ Այդ հավասարման լուծումը փնտրվում է աստիճանային շարքի տեսքով, և ապացուցվում է այդ շարքի զուգամիտությունը։

Լուծված են սողքի և ռելաքսացիայի խնդիրները բարակապատ կոր խողովակի համար, և այդ դեպքերի համար կառուցված են գրաֆիկներ թվային օրինակների հիման վրա։

THE TORSION OF A CURVILINEAR PIPE WITH DIFFERENT WALL THICKNESS UNDER NON-LINEAR CREEP

F. M. POLADIAN

S u m m a r y

The torsion of a curvilinear pipe of different wall thickness with non-linear hereditary creep is investigated. By using the toroidal coordinates and the semi-reverse method the problem is reduced to the non-linear integro-differential equation with respect to the stress function.

The solution of this problem is sought in the form of a power series and the series convergence is shown. For a thin-walled curvilinear pipe the problem of creep and relaxation is solved and for these cases graphs are plotted on the basis of numerical examples.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., ГИТТЛ, 1952.
2. *Задоян М. А.* Пластическое кручение неполного тора. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 2.
3. *Задоян М. А.* Пластическое кручение сектора кольца. Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 1.
4. *Александрян Р. А., Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля в условиях неустановившейся ползучести. ПММ, 1958, т. 22, в. 6.
5. *Новожилов В. В.* Теория упругости. М—Л., Судстройиздат, 1962.
6. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIV, № 2, 1981 Механика

С. Н. БОЯРЧЕНКО

ВЫПУЧИВАНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ УПРУГОЙ ПЛИТЫ

В трехмерной постановке исследуется устойчивость упругой плиты с переменным по толщине модулем упругости при комбинированном нагружении.

1. Рассмотрим плиту из несжимаемого неогуковского материала с модулем сдвига μ, убывающим от торцов плиты к срединной поверхности $x_3 = 0$ по закону

$$\mu = \mu_0 \exp[\varkappa(|x_3| - h)] \quad (\varkappa > 0, \ \mu_0 = \mathrm{const})$$

где $2h$ — толщина плиты.

Докритическое состояние представляет собой конечную аффинную деформацию, одна главная ось которой совпадает с осью x_3. Торцы плиты в этом состоянии незагружены. При указанных условиях уравнения нейтрального равновесия в перемещениях в метрике недеформированного тела имеют вид [1]:

$$\nabla^2 \vec{w} - \nabla p \cdot U^{*-2} + \varkappa \, \mathrm{sgn}\, x_3 \, \vec{i}_3 \cdot (\nabla \vec{w} - pU^{*-1} +$$

$$+ \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2} U^{*-1} \cdot (\nabla \vec{w})^T \cdot U^{*-1}) = 0, \quad \nabla \cdot U^{*-1} \cdot \vec{w} = 0 \qquad (1.1)$$

Здесь $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{i}_k$ — набла-оператор в отсчетной конфигурации, $\vec{i}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ — единичные векторы, направленные по главным осям тензора U^*; вектор $\vec{w} = w_k \vec{i}_k$ связан с вектором добавочного перемещения $\vec{v}$ соотношением $\vec{w} = \vec{v} \cdot A^*$, где A^* — тензор поворота в докритическом состоянии; p, как и вектор $\vec{w}$ — неизвестная функция координат, появление которой обусловлено несжимаемостью материала; U^* — положительно определенный квадратный корень из меры деформации Коши докритического состояния,

$$U^* = \lambda_1 \vec{i}_1 \vec{i}_1 + \lambda_2 \vec{i}_2 \vec{i}_2 + \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1} \vec{i}_3 \vec{i}_3$$

Граничные условия при $x_3 = \pm h$, выражающие отсутствие добавочной нагрузки, имеют вид:

$$\vec{i}_3 \cdot (\nabla \vec{w} + p U^{*-1} + \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-2} U^{*-1} \cdot (\nabla \vec{w})^T \cdot U^{*-1}) = 0 \tag{1.2}$$

Требуется отыскать соотношение между параметрами нагружения λ_1 и λ_2, при котором краевая задача (1.1), (1.2) имеет нетривиальные решения.

Пусть x_k ($k = 1, 2, 3$) — декартовы координаты в недеформированном состоянии тела, оси которых направлены по ортам $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$. Введем безразмерные координаты $\zeta_k = x_k/h$. В координатах ζ_k система уравнений (1.1) относительно неизвестных u_k и p примет вид:

$$\begin{gathered}
\nabla^2 u_1 + \lambda_1^{-1} \partial_1 p + t \operatorname{sgn} \zeta_3 (\partial_3 u_1 + \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-1} \partial_1 u_3) = 0 \\
\nabla^2 u_2 + \lambda_2^{-1} \partial_2 p + t \operatorname{sgn} \zeta_3 (\partial_3 u_2 + \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-2} \partial_2 u_3) = 0 \\
\nabla^2 u_3 + \lambda_1 \lambda_2 \partial_3 p + t \operatorname{sgn} \zeta_3 (2\partial_3 u_3 + \lambda_1 \lambda_2 p) = 0 \\
\lambda_1^{-1} \partial_1 u_1 + \lambda_2^{-1} \partial_2 u_2 + \lambda_1 \lambda_2 \partial_3 u_3 = 0
\end{gathered} \tag{1.3}$$

где

$$\partial_k = \frac{\partial}{\partial \zeta_k}; \quad \nabla = \partial_k \vec{i}_k$$

$$t = \varkappa h = \ln [\mu(h)/\mu(0)] \tag{1.4}$$

Вместо (1.2) будем иметь при $\zeta_3 = \pm 1$

$$\begin{gathered}
\partial_3 u_1 + \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-1} \partial_1 u_3 = 0 \\
\partial_3 u_2 + \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-2} \partial_2 u_3 = 0 \\
2\partial_3 u_3 + \lambda_1 \lambda_2 p = 0
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Решение краевой задачи (1.3), (1.5) будем искать в виде

$$\begin{gathered}
u_k = f_k(\zeta_3) \exp[i(\alpha \zeta_1 + \beta \zeta_2)] \quad (k = 1, 2, 3) \\
p = f_4(\zeta_3) \exp[i(\alpha \zeta_1 + \beta \zeta_2)]
\end{gathered} \tag{1.6}$$

Тогда относительно функций $f_k(\zeta_3)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
\ddot{f}_1 + t \operatorname{sgn} \zeta_3 \dot{f}_1 - s f_1 + i\alpha t \operatorname{sgn} \zeta_3 \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-1} f_3 + i\alpha \lambda_1^{-1} f_4 = 0 \\
\ddot{f}_2 + t \operatorname{sgn} \zeta_3 \dot{f}_2 - s f_2 + i\beta t \operatorname{sgn} \zeta_3 \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-2} f_3 + i\beta \lambda_2^{-1} f_4 = 0 \\
\ddot{f}_3 + 2t \operatorname{sgn} \zeta_3 \dot{f}_3 - s f_3 + \lambda_1 \lambda_2 \dot{f}_4 + \lambda_1 \lambda_2 t \operatorname{sgn} \zeta_3 f_4 = 0 \\
i\alpha \lambda_1^{-1} f_1 + i\beta \lambda_2^{-1} f_2 + \lambda_1 \lambda_2 \dot{f}_3 = 0
\end{gathered} \tag{1.7}$$

где $s = \alpha^2 + \beta^2$.

Характеристическое уравнение системы (1.7) имеет следующие корни:

а) при $\zeta_3 > 0$

$$n_{1,2}^{+} = -t/2 \pm \sqrt{t^2/4 + s}, \qquad n_{3,4}^{+} = -t/2 \pm \sqrt{T + X}$$

$$n_{5,6}^{+} = -t/2 \pm \sqrt{T - X}$$

б) при $\zeta_3 < 0$

$$n^-_{1,2} = t/2 \pm \sqrt{t^2/4 + s}, \qquad n^-_{3,4} = t/2 \pm \sqrt{T + X}$$

$$n^-_{5,6} = t/2 \pm \sqrt{T - X}$$

где

$$T = t^2/4 + s(1 + z)/2, \qquad X = \sqrt{s^2(1 - z)^2/4 - t^2 s z}$$

$$z = \nu_1^{-2}\nu_2^{-2}(\alpha^2\nu_1^{-2} + \beta^2\nu_2^{-2})(\alpha^2 + \beta^2)^{-1} \tag{1.8}$$

Обозначим решения в полуплоскости $\zeta_3 > 0$ через u_k^+, p^+, в полуплоскости $\zeta_3 < 0$ — через u_k^-, p^-. Заметим, что $n_{2l}^- = -n_{2l-1}^+$; $n_{2l-1}^- = -n_{2l}^+$ $(l = 1, 2)$. Положим $n_k^- = n_k$ $(k = 1, \ldots, 6)$. Будем предполагать, что среди n_k нет одинаковых корней. Случай кратных корней будет рассмотрен ниже.

Решения системы (1.3) будут иметь вид:

$$u_1^\pm = \Big[\nu_1\alpha^{-1}(A_1 e^{\pm n_1\zeta} + A_2 e^{\pm n_2\zeta}) + \alpha\nu_2 \sum_{j=3}^{6} A_j e^{\pm n_j\zeta}\Big] e^{i\alpha\xi_1} e^{i\beta\xi_2}$$

$$u_2^\pm = \Big[-\nu_2\beta^{-1}(A_1 e^{\pm n_1\zeta} + A_2 e^{\pm n_2\zeta}) + \beta\nu_1 \sum_{j=3}^{6} A_j e^{\pm n_j\zeta}\Big] e^{i\alpha\xi_1} e^{i\beta\xi_2}$$

$$u_3^\pm = \mp i\nu_1^2\nu_2^2 s z \sum_{j=3}^{6} A_j n_j^{-1} e^{\pm n_j\zeta} e^{i\alpha\xi_1} e^{i\beta\xi_2}$$

$$p^\pm = -i\nu_1\nu_2 s z \sum_{j=3}^{6} A_j [n_j] e^{\pm n_j\zeta} e^{i\alpha\xi_1} e^{i\beta\xi_2} \tag{1.9}$$

где

$$[n_j] = (n_j^2 + 2tn_j - s)(n_j - t)^{-1} n_j^{-1}$$

$$\zeta = \zeta_3 \operatorname{sgn} \zeta_3 \tag{1.10}$$

Константы A_k $(k = 1, \ldots, 6)$ связаны условиями неразрывности добавочных перемещений u_k и напряжений, действующих в срединной плоскости плиты. Таким образом, при $\zeta_3 = 0$

$$u_1^+ = u_1^-, \quad u_2^+ = u_2^-, \quad u_3^+ = u_3^-$$

$$\partial_3 u_1^+ + \nu_1^{-2}\nu_2^{-1}\partial_1 u_3^+ = \partial_3 u_1^- + \nu_1^{-2}\nu_2^{-1}\partial_1 u_3^-$$

$$\partial_3 u_2^+ + \nu_1^{-1}\nu_2^{-2}\partial_2 u_3^+ = \partial_3 u_2^- + \nu_1^{-1}\nu_2^{-2}\partial_2 u_3^-$$

$$2\partial_3 u_3^+ + \nu_1\nu_2 p^+ = 2\partial_3 u_3^- + \nu_1\nu_2 p^- \tag{1.11}$$

Разобьем задачу на две независимых задачи, которые будем рассматривать при $\zeta_3 > 0$

A) $u_{1,2}$, p — четные функции, u_3 — нечетная функция ζ_3, то есть

$$u_{1,2} = [u_{1,2}^{+}(\zeta_3) + u_{1,2}^{-}(-\zeta_3)]/2$$

$$u_3 = [u_3^{+}(\zeta_3) - u_3^{-}(-\zeta_3)]/2; \quad p = [p^{+}(\zeta_3) + p^{-}(-\zeta_3)]/2 \tag{1.12}$$

B) $u_{1,2}$, p — нечетные функции, u_3 — четная функция ζ_3, то есть

$$u_{1,2} = [u_{1,2}^{+}(\zeta_3) - u_{1,2}^{-}(-\zeta_3)]/2$$

$$u_3 = [u_3^{+}(\zeta_3) + u_3^{-}(-\zeta_3)]/2, \quad p = [p^{+}(\zeta_3) - p^{-}(-\zeta_3)]/2 \tag{1.13}$$

Задача (A) описывает симметричные, а задача (B) — антисимметричные относительно срединной плоскости, или изгибные, формы бифуркации равновесия плиты.

Используя (1.9), (1.11)—(1.13), получим решения задач (A) и (B), которые здесь не приводятся в силу их громоздкости.

Удовлетворяя граничным условиям (1.5) при $\zeta_3 = 1$, найдем для каждой из задач (A) и (B) уравнение для определения критического соотношения между λ_1 и λ_2.

В задаче (A)

$$\sum_{i=3}^{5} \sum_{j=i+1}^{6} C_{ij}[i, j] \exp(n_i + n_j) = 0 \tag{1.14}$$

где

$$C_{34} = n_6^2 - n_5^2, \quad C_{35} = n_4^2 - n_6^2, \quad C_{36} = n_5^2 - n_4^2$$

$$C_{45} = n_6^2 - n_3^2, \quad C_{46} = n_3^2 - n_5^2, \quad C_{56} = n_4^2 - n_3^2$$

$$[i, j] = (n_i^2 + sz)(n_j^2 + s)(n_j + t)^{-1} - (n_j^2 + sz)(n_i^2 + s)(n_i + t)^{-1}$$

В задаче (B)

$$\sum_{i=3}^{5} \sum_{j=i+1}^{6} D_{ij}[i, j] n_i^{-1} n_j^{-1} \exp(n_i + n_j) = 0 \tag{1.15}$$

где

$$D_{34} = [n_6] - [n_5], \quad D_{35} = [n_4] - [n_6]$$

$$D_{36} = [n_5] - [n_4], \quad D_{45} = [n_6] - [n_3]$$

$$D_{46} = [n_3] - [n_5], \quad D_{56} = [n_4] - [n_3]$$

$[n_i]$ определяются (1.10).

Заметим, что, если

$$1 \leqslant z \leqslant 1 + 2t^2 s^{-1} + 2ts^{-1/2}\sqrt{t^2 + s}$$

то корни n_3 и n_5, n_4 и n_6 будут комплексно-сопряженными. Нетрудно показать, что уравнения (1.14), (1.15) при этом не изменятся и коэффициенты их останутся действительными.

При $t = 0$ уравнения (1.14) и (1.15) переходят, соответственно, в следующие уравнения:

$$(1 + z)^2 \operatorname{cth} \sqrt{sz} = 4z^{3/2} \operatorname{cth} \sqrt{s}$$

$$(1 + z)^2 \operatorname{th} \sqrt{sz} = 4z^{3/2} \operatorname{th} \sqrt{s}$$

Положим $y = -n_1 + n_3 = n_4 - n_2$. Тогда левые части уравнений (1.14), (1.15) можно рассматривать как функции $F_1(n_3, n_4, y)$, $F_2(n_3, n_4, y)$ от y, зависящие от n_3, n_4 как от параметров. Непосредственно проверяется, что $y = 0$ — двукратный корень уравнений (1.14), (1.15).

Пусть характеристическое уравнение системы (1.7) имеет кратные корни $n_1 = n_3$, $n_2 = n_4$ (это единственно возможные кратные корни). Можно показать, что в этом случае уравнения для определения критического соотношения между λ_1 и λ_2 в задачах (А) и (В) будут эквивалентны уравнениям

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} F_1(n_3, n_4, y)\Big|_{y=0} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} F_2(n_3, n_4, y)\Big|_{y=0} = 0$$

Представляет интерес исследование устойчивости сильно неоднородной плиты, то есть решение задачи при больших значениях параметра t. Рассматривая возможные случаи поведения функции $z(t)$ при $t \to \infty$, получим, что единственно возможным является представление в виде ряда по степеням st^{-2}. Для вычисления коэффициентов ряда была составлена алгольная программа, которая, в частности, дает для обеих задач (А) и (В)

$$z(t) \sim 1 + 4st^{-2} - 12 s^2 t^{-4} - 88 s^3 t^{-6} - 856 s^4 t^{-8} + \ldots$$

Значения переменной z зависят и от отношения толщины плиты к длине волны, возникающей в горизонтальной плоскости при потере устойчивости, которое входит в уравнения (1.14), (1.15) посредством параметра s. Можно показать, что, если s стремится к нулю при фиксированных параметрах t и h (что соответствует стремлению к бесконечности длины волны, возникающей в горизонтальной плоскости), то в задаче (А) $z(s) \sim s^{-1}$, а в задаче (В)

$$z(s) = 1 + 4st^{-2}(t^2 - 2t + 2(1 - e^{-t}))(1 - e^{-t})^{-1} + o(s) \qquad (1.16)$$

В случае однородной плиты ($t = 0$) в задаче (В)

$$z(s) = 1 + 4s/3 + o(s)$$

Если параметр s стремится к бесконечности при фиксированных значениях параметра t (то есть при стремлении к нулю длины волны), то решения уравнений (1.14), (1.15) стремятся к решению уравнения $(z + 1)^2 = 4z^{3/2}$, отличному от единицы, откуда $z \approx 11.3565$.

Если неограниченно возрастает толщина плиты h при фиксированных значениях параметра $\varkappa$ и длине волны, возникающей в горизонтальной плоскости, то решения уравнений (1.14), (1.15) приближаются к решению уравнения

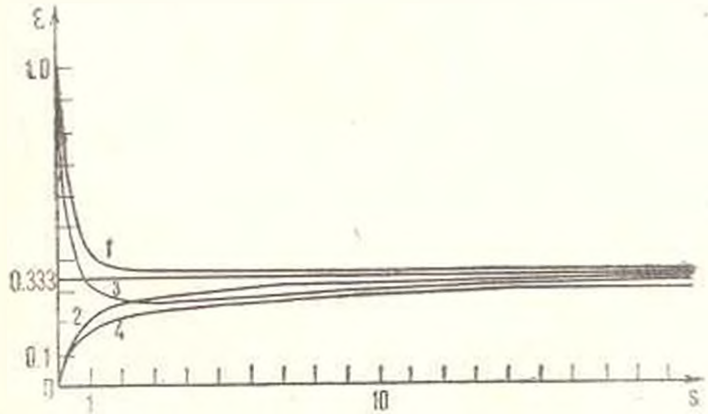
$$n_3^2 n_5^2 - n_3 n_5 (z-1) + \varkappa(\alpha^2+\beta^2)^{1/2} h^{-1} (n_3 + n_3)(z-1) + n_3^2 + n_5^2 + z = 0$$

из которого определяется критическое соотношение между λ_1 и λ_2 в задаче устойчивости неоднородного полупространства.

Корни уравнений (1.14), (1.15) отыскивались численным методом. Результаты счета показали, что при конечных значениях параметра t и при малых или конечных значениях параметра s изгибные формы бифуркации равновесия возникают раньше, чем симметричные. При стремлении к бесконечности параметров t или s решения уравнений (1.14), (1.15) асимптотически совпадают.

Линия, составленная из участков кривых, наиболее близко расположенных к началу координат в плоскости ε_1, ε_2 ($\varepsilon_k = 1 - \lambda_k$), отделяет область устойчивости от области неустойчивости и называется пограничной. Оказывается, что пограничной является линия, составленная из кривой $\varepsilon_2(\varepsilon_1)$ при $\beta = 0$ и $\varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1$ и кривой $\varepsilon_2(\varepsilon_1)$ при $\alpha = 0$ и $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Пограничные кривые расположены симметрично относительно прямой $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. Точка пересечения пограничных кривых с прямой $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ связана с корнями уравнений (1.14), (1.15) соотношением $\varepsilon = 1 - (z(s, t))^{-1/2}$.

Зависимость $\varepsilon(s)$ показана на фиг. 1 для значений параметра $t = 0$ и $t = 1$.



Фиг. 1. График зависимости $\varepsilon(s)$. Цифрами 1, 2 обозначены решения задач (А) и (В) для однородной плиты, цифрами 3, 4 — для неоднородной плиты.

С ростом параметра t точка $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ как в задаче (А), так и в задаче (В), смещается к началу координат вдоль прямой $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, начиная от $\varepsilon = \varepsilon_*$ для однородной плиты ($t = 0$). Изменение положения пограничных кривых в зависимости от значений параметра t показано на фиг. 2 для изгибных форм бифуркации равновесия плиты. Как следует из полученных результатов, неоднородность уменьшает жесткость плиты в целом по сравнению с однородной плитой.

Сравним полученное строгое решение задачи устойчивости с результатами прикладной теории выпучивания оболочек и пластин, основанной на гипотезах Кирхгофа [3]. В рамках этой теории анализ изгибных форм бифуркации равновесия сжатой плиты сводится к решению следующего уравнения для прогиба срединной поверхности $w(x_1, x_2)$:

$$\left((1-\lambda_1^{-4}\lambda_2^{-2})\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \right.$$

$$\left. + (1-\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-4})\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) \times$$

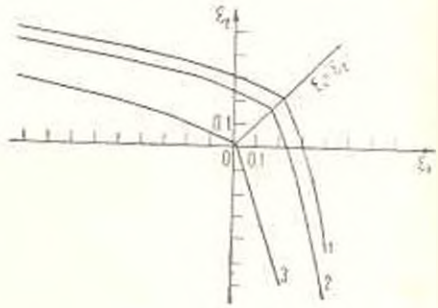
$$\times \int_0^h \mu(x_3)\,dx_3 - \Big((2-\lambda_1 +$$

$$+ \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1})(\lambda_1 + \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}) \times$$

$$\times \lambda_2^{-2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\lambda_1^{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \lambda_2^{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) +$$

$$+ (2-\lambda_2+\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}) \times$$

$$\times (\lambda_2+\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1})\lambda_2^{-2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\lambda_1^{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \lambda_2^{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\Big)\int_0^h \mu(x_3)\,x_3^2\,dx_3 = 0 \qquad (1.17)$$



Фиг. 2. Зависимость пограничных кривых от параметра t для изгибных форм бифуркации равновесия плиты. Кривая 1 соответствует значению $t = 0$, $2 - t = 1$, $3 - t = 30$.

Если уравнение (1.17) линеаризовать относительно начальных деформаций $\varepsilon_k = 1 - \lambda_k$, то в случае однородной плиты ($\mu = \mathrm{const}$) придем к классическому уравнению Сен-Венана [4],

$$4/3\, h^3 \nabla^4 w \mu - \Delta \cdot T \cdot \nabla w = 0$$

где T — тензор напряжений Коши.

Представляя w в виде $w = w_0 e^{i(\alpha x_1 + \beta x_2)/h}$, из (1.17) получим уравнение для определения критического соотношения между λ_1 и λ_2 в принятых ранее обозначениях

$$(1-z)\,t^2(1-e^{-t}) + zs\Big(z + 2z\lambda_1\lambda_2 - 1 +$$

$$+ \frac{2}{s}(\lambda_1^{-1}\alpha^2 + \lambda_2^{-1}\beta^2)\Big)(t^2 - 2t + 2(1-e^{-t})) = 0 \qquad (1.18)$$

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ получим асимптотическую формулу

$$\lambda(s) = 1 - \frac{2}{3}\, s t^{-2}(t^2 - 2t + 2(1-e^{-t}))(1-e^{-t})^{-1} + o(s) \qquad (1.19)$$

которая совпадает с формулой (1.16), если последнюю записать относительно $\lambda = z^{-1/6}$.

Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Обозначим $\lambda_2 = k\lambda_1$, $\beta = \gamma\alpha$, где k, γ — произвольные фиксированные величины. Тогда $z = \lambda_2^{-6} k^{-2} z_0$, где $z_0 = (1 + k^{-2}\gamma^2) \times$ $\times (1 + \gamma^2)^{-1}$.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_{10} + \alpha\lambda_{11} + \alpha^2\lambda_{12} + \ldots$. Приравнивая нулю члены порядка α^0 и α, из обоих уравнений (1.16) и (1.18) получим $\lambda_{10} = k^{-2/3} z_0^{1/6}$, $\lambda_{11} = 0$.

Рассмотрим теперь члены порядка α^2. Из уравнения (1.16) будем иметь

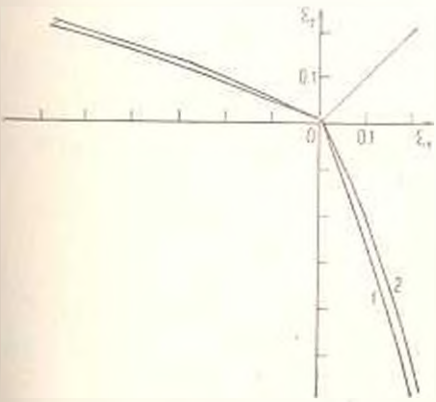
$$\lambda_{12} = -\frac{2}{3} t^{-2} (1 - e^{-t})^{-1} (t^2 - 2t + 2(1 - e^{-t}))(1 + \gamma^2)\lambda_{10} \qquad (1.20)$$

Уравнение (1.18) даст значение

$$\lambda_{12}^k = -\frac{1}{3} t^{-2} (1 - e^{-t})^{-1} (t^2 - 2t + 2(1 - e^{-t}))(1 + \gamma^2)\lambda_{10}(k\lambda_{10}^2 +$$

$$+ \lambda_{10}^{-1}(1 + \gamma^2 k^{-2})(1 + \gamma^2)^{-1}) \qquad (1.21)$$

Из формул (1.20) и (1.21) следует, что как при $\beta = 0$ (то есть $\gamma = 0$) и $k \geqslant 1$, так и при $\alpha = 0$ (то есть $\gamma \to \infty$) и $k < 1$, $\lambda_{12}^k > \lambda_{12}$, следовательно, $\varepsilon_{1,2}^k > \varepsilon_{1,2}$, то есть пограничная кривая, полученная с использованием гипотез Кирхгофа, лежит выше истинной пограничной кривой, если $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$. Эти две кривые имеют единственную общую точку $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Таким образом, в случае равномерного сжатия тонкой плиты теория Кирхгофа дает результаты, близкие к истинным, при комбинированном нагружении эта теория дает завышенные результаты для низшей критической нагрузки даже в случае тонкой плиты. На фиг. 3 показаны истинная пограничная кривая и пограничная кривая, посчитанная по теории Кирхгофа для значений параметров $t = 1$, $s = 0.01$.



Фиг. 3. Цифрой 1 обозначена истинная пограничная кривая, цифрой 2 — кривая, посчитанная по гипотезам Кирхгофа.

Если определять критические значения параметров нагружения численным методом непосредственно из формулы (1.18), то даже в случае равномерного сжатия теория Кирхгофа дает завышенные результаты, погрешность которых увеличивается с ростом параметра s. Так, при $s \sim 10^{-3}$ эта погрешность составляет около 0.001 %, при $s \sim 10^{-2}$ — около 0.006 %, при $s \sim 10^{-1}$ — около 0.8 % по сравнению с точным решением задачи.

2. Приведем примеры конкретных задач, которые можно решить описанным выше методом.

Нетрудно показать, что, если

$$u_k = f_k(\zeta_3)\exp[i(\alpha\zeta_1 - \beta\zeta_2)], \quad p = f_4(\zeta_3)\exp[i(\alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2)]$$

— решения системы (1.3), то $u_k = f_k(\zeta_3)\exp[i(\pm\alpha\zeta_1 \pm \beta\zeta_2)]$

$$p = f_4(\zeta_3)\exp[i(\pm\alpha\zeta_1 \pm \beta\zeta_2)] \qquad (k = 1, 2, 3)$$

и любая их линейная комбинация тоже является решением системы (1.3) В частности, решениями будут

$$u_1 = f_1(\zeta_3)\sin\alpha\zeta_1\cos\beta\zeta_2, \quad u_2 = f_2(\zeta_3)\cos\alpha\zeta_1\sin\beta\zeta_2$$

$$u_3 = -f_3(\zeta_3)\cos\alpha\zeta_1\cos\beta\zeta_2, \quad p = -f_4(\zeta_3)\cos\alpha\zeta_1\cos\beta\zeta_2 \qquad (2.1)$$

а также

$$u_1 = f_1(\zeta_3)\cos\alpha\zeta_1\sin\beta\zeta_2, \quad u_2 = f_2(\zeta_3)\sin\alpha\zeta_1\cos\beta\zeta_2$$

$$u_3 = f_3(\zeta_3)\sin\alpha\zeta_1\sin\beta\zeta_2, \quad p = f_4(\zeta_3)\sin\alpha\zeta_1\sin\beta\zeta_2 \qquad (2.2)$$

Рассмотрим прямоугольную плиту $-a \leqslant \zeta_1 \leqslant a$, $-b \leqslant \zeta_2 \leqslant b$. Положим $\alpha = m\pi/a$, $\beta = n\pi/b$. Тогда решения (2.1) удовлетворяют на боковой поверхности плиты следующим граничным условиям:

1) в задаче (A)

$$u_1 = 0, \quad R_{12} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta_1 = \pm a$$

$$u_2 = 0, \quad R_{21} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta_2 = \pm b$$

Здесь

$$R_{pq} = \vec{R}_p \cdot \vec{i}_q; \quad \vec{R}_p = \pm\int_{-1}^{1} \vec{i}_p \cdot K^* d\zeta_3$$

$$K^* = \mu(\nabla\vec{w} + pU^{*-1} + \varkappa_1^{-2}\varkappa_2^{-2}U^{*-1}\cdot(\nabla\vec{w})^T\cdot U^{*-1}) \qquad (2.3)$$

$$K^{*T} = A^*\cdot\left[\frac{d}{d\eta}D^*(\vec{R} + \eta\vec{w})\right]_{\eta=0}$$

$\vec{R}$ — радиус-вектор частицы в докритическом состоянии, D^* — тензор напряжений Пиола, η — малый параметр;

2) в задаче (B)

$$u_1 = 0, \quad R_{13} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta_1 = \pm a$$

$$u_2 = 0, \quad R_{23} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta_2 = \pm b$$

Следовательно, решения (2.1) описывают выпучивание плиты со «скользящей заделкой».

Решения (2.2) удовлетворяют на боковой поверхности плиты следующим граничным условиям в задаче (B):

$$u_2 = 0, \ u_3 = 0, \ M_{11} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta_1 = \pm a$$

$$u_1 = 0, \ u_3 = 0, \ M_{22} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta_2 = \pm b$$

где

$$M_{11} = \vec{M}_s \cdot \vec{i}_1; \quad \vec{M}_s = \int_{-1}^{1} \vec{i}_s \cdot K^* \zeta_3 \, d\zeta_3$$

Таким образом, решения (2.2) описывают изгибные формы бифуркации равновесия шарнирно опертой плиты.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то задача инвариантна относительно любого поворота координатных осей вокруг оси $O\zeta_3$. Кроме того, решение зависит от параметров α, β только посредством комбинации $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Из сказанного следует, в частности, что критическому значению λ соответствует континуум решений

$$p = f_4(\zeta_3) \exp(i\gamma\zeta_2')$$

где $\zeta_2' = \zeta_2 \cos\varphi - \zeta_1 \sin\varphi$, а φ — любое действительное число. Обозначим $\zeta_1 = r\cos\psi$, $\zeta_2 = r\sin\psi$ и возьмем такую линейную комбинацию указанных решений:

$$p = \frac{1}{2\pi} f_4(\zeta_3) \int_{\psi-2\pi}^{\psi} \exp[i\gamma r \sin(\psi - \varphi)]\, d\varphi = f_4(\zeta_3)\, J_0(\gamma r) \tag{2.4}$$

Здесь использовано известное [2] интегральное представление бесселевой функции. Линейная комбинация (2.4) даст осесимметричные решения.

Рассмотрим задачу об осесимметричной бифуркации равновесия круглой плиты радиуса a из неогуковского материала, сжатой по боковой поверхности равномерным давлением.

Пусть r, θ, ζ_3 — цилиндрические координаты недеформированной плиты; $\bar{e}_r$, $\bar{e}_\theta$, $\bar{i}_3$ — соответствующие им базисные векторы.

Для осесимметричных форм бифуркации $u_\theta = \bar{w} \cdot \bar{e}_\theta = 0$. Используя (2.4) и уравнения нейтрального равновесия в цилиндрических координатах [1], получим

$$u_1 = f_1(\zeta_3)\, J_1(\gamma r)$$

$$u_3 = f_3(\zeta_3)\, J_0(\gamma r)$$

Если выбрать γ так, чтобы $J_1(\gamma a) = 0$, то на боковой поверхности $r = a$ $u_1 = 0$. Пусть $\gamma_n a$ — нули функции $J_1(\gamma a)$. Положим $\gamma = \gamma_n$. Тогда для каждого номера n будем иметь решение

$$u_{1n} = f_{1n}(\zeta_3)\, J_1(\gamma_n r)$$

$$u_{3n} = f_{3n}(\zeta_3)\, J_0(\gamma_n r)$$

$$p_n = f_{4n}(\zeta_3)\, J_0(\gamma_n r)$$

Решения (2.5) удовлетворяют на боковой поверхности плиты следующим краевым условиям:

1) в задаче (A)

$$u_{3n} = 0, \quad M_{r3} = 0 \quad \text{при} \quad r = a$$

2) в задаче (B)

$$u_{3n} = 0, \quad R_{r3} = 0 \quad \text{при} \quad r = a$$

где

$$R_{r3} = \vec{R}_r \cdot \vec{i}_3, \qquad M_{r3} = \vec{M}_r \cdot \vec{i}_3$$

$$\vec{R}_r = \int_{-1}^{1} \vec{e}_r \cdot K^* d\zeta_3, \qquad \vec{M}_r = \int_{-1}^{1} \vec{e}_r \cdot K^* \zeta_3 d\zeta_3$$

K^* определяется (2.3), где

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial \zeta_3}\vec{i}_3, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

$$\vec{w} = u_1\vec{e}_r + u_3\vec{i}_3; \quad U^{*-1} = \lambda^{-1}\vec{e}_r\vec{e}_r + \lambda^2\vec{i}_3\vec{i}_3$$

Решения (2.5) описывают осесимметричную бифуркацию равновесия круглой плиты со «скользящей заделкой» по боковой поверхности. При малой толщине плиты такие краевые условия соответствуют жестко защемленной пластинке.

Автор благодарит Л. М. Зубова за постановку задачи и внимание к работе.

Ростовский государственный
университет

Поступила 11 III 1980

Ս. Ի. ԲՈՅԱՐՉԵՆԿՈ

ԸՍՏ ՀԱՍՏՈՒԹՅԱՆ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԱԼԻ ՈՒՌՈՒՑԻԿԱՆԱԼԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրված է ըստ հաստության փոփոխական առաձգականության մոդուլով առաձգական սալի կայունությունը կոմբինացված բեռնավորման դեպքում։

BUCKLING OF AN ELASTIC PLATE NON-HOMOGENEOUS IN THICKNESS

S. I. BOYARCHENKO

Summary

The stability of an elastic plate with a modulus of elasticity variable in thickness under combined loading is investigated in three-dimensional representation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зубов Л. М.* Выпучивание пластинок из неогуковского материала при аффинной начальной деформации. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
2. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Основы теории специальных функций. М., «Наука», 1974, стр. 178—180.
3. *Зубов Л. М.* Теория малых деформаций предварительно напряженных тонких оболочек. ПММ, 1976, т. 40, вып. 1.
4. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1955.