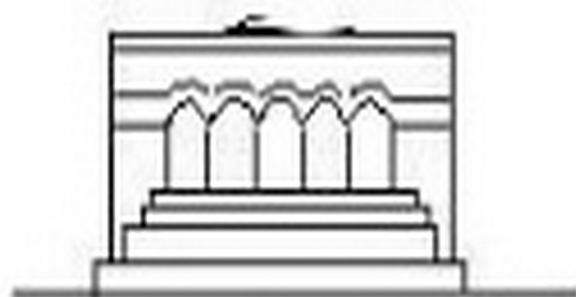


ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS



1981

А. Г. БАГДОЛЯ, А. А. ВАЦЯН

ПРОНИКАНИЕ ТОНКИХ ТЕЛ В УПРУГИЕ СРЕДЫ

Рассматривается задача о проникании тонких твердых тел в первоначально упругие среды. Ряд задач о проникании тел в грунты рассмотрен в [1]. Задача о проникании тел в пластическую среду для малых скоростей рассматривалась в [2].

Проникание тонких тел в жидкость исследовано в [3-5].

В настоящей статье дается решение задачи проникания тонкого твердого тела вращения в первоначально упругую среду.

1. Об одном решении осесимметричной задачи

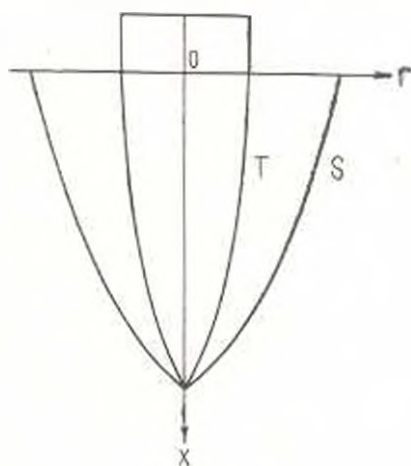
Решение чисто упругой задачи [6, 7] показывает, что вблизи тела следует учитывать неупругое поведение материала, тогда для тонких тел можно ввести поверхность S , отделяющую область упругого поведения материала от области разрушения T (фиг. 1) вблизи тела.

Метод, развитый в настоящей статье, состоит в изучении фронта разрушения, который исходит из вершины тела, упругой области вне S и области разрушения позади S .

Можно ввести ось x по нормали к свободной поверхности среды, занимающей полупространство, а через r обозначить радиальную координату.

Уравнение поверхности тела можно взять в виде $r = r_0(x, t)$, где r_0 мало, t есть время с начала проникания, причем при $t=0$ $r_0=0$.

Уравнение поверхности разрушения берется в виде $r = r_0 \xi_0$, причем предположено $\xi_0 > 1$, но $\xi_0 r_0$ мало, тогда можно для упругого решения вблизи S взять асимптотику для малых ξ_0 , а для решения позади S пользоваться формулами, соответствующими переходу к большим значениям $\frac{r}{r_0}$, что соответствует линейной асимптотике.



Фиг. 1.

Можно сделать различные предположения о характере разрушения среды позади S . Если разрушение происходит вдоль площадок скольжения, то следует пользоваться уравнением пластического течения. При разрушении среды растягивающими кольцевыми напряжениями можно считать, что среда разрушалась вдоль меридиональных трещин и использовать уравнение [12], причем решение задачи о проникании в такую среду дано в [6].

В настоящей статье решается задача для пластической среды.

В области между поверхностями S и T предполагаем, что имеется течение среды, описываемое уравнениями Мизеса [8, 9]

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_{rr}}{\varepsilon_i} &= \frac{\sigma_{rr} - \sigma}{2\tau_s}, & \frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{\varepsilon_i} &= \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma}{2\tau_s}, & \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_i} &= \frac{\sigma_{xx} - \sigma}{2\tau_s}, \\ \frac{dv_r}{dt} &= \frac{\sigma_{rr}}{\tau_s}, & \varepsilon_{r\theta} &= \frac{\partial v_\theta}{\partial r}, & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{v_r}{r}, & \varepsilon_{rx} &= \frac{\partial v_r}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где v_r, v_θ — компоненты скорости частиц, причем для тонких тел $\varepsilon_{rx} \ll |\sigma_{rr}|$, τ_s — постоянный предел текучести, где $6\tau_s^2$ есть правая часть условия текучести

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{xx})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{xx})^2 + 6\tau_s^2 = 6\tau_s^2 \quad (1.2)$$

Уравнение несжимаемости, записанное в основном порядке

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0$$

после интегрирования и удовлетворения кинематического условия на

теле $v_r = \frac{dr_*}{dt}$ дает

$$v_r = \frac{r_*}{r} \frac{dr_*}{dt} \quad (1.3)$$

Для интенсивности скорости деформации получится $\varepsilon_i \approx 2 \frac{v_r}{r}$. Вводя радиальную компоненту вектора перемещений U_r ,

$$\frac{dU_r}{dt} = v_r, \quad \frac{dU_r}{dt} = \frac{\partial U_r}{\partial t} + \frac{\partial U_r}{\partial r} v_r$$

можно после интегрирования найти

$$U_r = r - F(r^2 - r_*^2) \quad (1.4)$$

Условие на теле $r = r_*$, $U_r = r_*$ дает $F(0) = 0$. Считая, что (1.4) имеет место по обе стороны от S , можно из начального условия получить

$$F(r^2 - r_*^2) = -r, \quad U_r = r - \sqrt{r^2 - r_*^2} \quad (1.5)$$

Полученное решение вблизи S , то есть для $r \gg r_k$, дает

$$U_r \approx \frac{r_k^2}{2r} \quad (1.6)$$

В упругой области вне поверхности S решение можно искать методом источников, причем для малых r уравнение S можно записать в виде [6]

$$r = r_k(x, t) \pm 0 \quad (1.7)$$

и, как будет видно из дальнейшего, $\dot{\epsilon}_0 = \text{const}$. Предполагаем, что $\epsilon_0 \gg 1$, но $\dot{\epsilon}_0 r_k$ мало, то есть для малых r_k значение r из (1.7) также мало, поэтому можно записать асимптотическую формулу для вектора упругих перемещений при малых r в виде [6]

$$u_r = \frac{f(x, t)}{r}, \quad u_x \approx 0 \quad (1.8)$$

где $f(x, t)$ — функция, определяемая из граничных условий на поверхности S . Для напряжений в упругой среде имеет место

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \tau_{rr} &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{u_r}{r} \\ \sigma_{xx} &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \sigma_{xr} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial x} \right) \\ \Delta &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Тогда из (1.8) и (1.9) следует *

$$\Delta \approx 0, \quad \sigma_{rr} \approx -2\mu \frac{f(x, t)}{r^2}, \quad \tau_{rr} \approx 2\mu \frac{f(x, t)}{r^2}, \quad \sigma_{xr} = 0 \quad (1.10)$$

Условия из поверхности S при $r = r_k \pm 0$ в силу малости ν , приводятся к непрерывности нормальных перемещений $U = u_r$ и напряжений σ_{rr} по (1.1) и (1.10), причем из (1.1) можно получить в области течения $\sigma_{rr} \approx \sigma - \tau_x$, $\sigma_{\theta\theta} \approx \sigma + \tau_x$, $\sigma_{xx} \approx \sigma$. Для определения σ_{rr} в области течения можно использовать упрощенные уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -2\tau_x$$

откуда

$$\sigma_{rr} = 2\tau_x \ln r + \varphi(x, t) \quad (1.11)$$

где $\varphi(x, t)$ — произвольная функция.

В силу того, что $\xi_0 \gg 1$, и поэтому $U_r \approx \frac{r_k^2}{2r}$, для $r = r_k \xi_0$ из условия $U_r = u$, согласно (1.8) имеем

$$r_k^2 = 2f(x, t) \quad (1.12)$$

Условие непрерывности σ_r при $r = r_k \xi_0$ дает по (1.10) и (1.11)

$$2\tau_3 \ln r_k \xi_0 + \varphi(x, t) = -2\mu \frac{f(x, t)}{r_k^2 \xi_0^2} \quad (1.13)$$

Подставляя $f(x, t)$ из (1.12) в (1.13), получим

$$\varphi(x, t) = -\frac{1}{\xi_0^2} \left(\mu + 2\xi_0^2 \tau_3 \ln r_k \xi_0 \right)$$

и тогда из (1.11) напряжение в области течения будет равно

$$\sigma_{rr} = 2\tau_3 \ln \frac{r}{r_k \xi_0} - \frac{\mu}{\xi_0^2}$$

Подставляя (1.10) в условие (1.2), где $\sigma_{rr} \approx 0$, можно найти

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\tau_3}} \quad (1.14)$$

причем на теле при $r = r_k$

$$\sigma_{rr} = -\tau_3 \left(\ln \frac{\mu}{\tau_3} + 1 \right)$$

Следует отметить, что решение $u_r = r - \sqrt{r^2 - r_k^2}$ приводит к не-прерывности $U_r \approx \frac{r_k^2}{2r}$ при переходе через $r = r_k \xi_0$. Однако асимптотическое сращивание решения $u_r = r + F(r^2 - r_k^2)$, имеющим место при $r > r_k \xi_0$, не единственно, поскольку можно выбрать

$$F = -\sqrt{r^2 - r_k^2} + \frac{c(r^2 - r_k^2)}{(r^2 - r_k^2)^{3/2} + \delta^{3/2}}$$

где $c \sim r_k^2$, $\delta \sim r_k^2$ — постоянные.

Поэтому следует, вообще говоря, для выбора единственного решения взять уравнение энергии на фронте $r = r_k \xi_0$ или уравнение ударной адиабаты [10]

$$e_1 - e_2 = -(v_{r1} - v_{r2}) \frac{\sigma_{rr1} + \sigma_{rr2}}{2\xi_0 \frac{dr_k}{dt} \tau_3} \quad (1.15)$$

где e — энергия на единицу массы, индекс 1 дает величины впереди, а индекс 2 — позади поверхности $r = r_k \xi_0$.

Позади S

$$v_r = \frac{r_*}{r} \frac{dr_*}{dt}, \quad \sigma_{rr} = 2\tau_0 \ln r + \sigma(x, t)$$

Впереди S

$$u_{r1} = \frac{f(x, t)}{r}, \quad \sigma_{r1} = \frac{1}{r} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \quad (1.16)$$

$$\sigma_{rr} \approx 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} = -2\mu \frac{f(x, t)}{r^2} \quad (1.17)$$

Значения $e_{1,2}$ имеют вид [10]

$$e_1 = e_0(T_1) + 2\mu \frac{f}{r_*^2 \xi_0^4} \quad (1.18)$$

$$e_2 = e_0(T_2) + \varepsilon_s + \frac{\varepsilon_s}{2\mu}$$

где $T_{1,2}$ — температура, ε_s — энергия разрушения, $e_0(T) = cT$, а последние слагаемые соответствуют внутренней энергии [11] упругой области и внутренней энергии пластической области в начале ее образования или ее значению на поверхности разрушения S соответственно. Подставляя упругое решение (1.16) в (1.10), можно получить

$$\frac{2\mu f(x, t)}{r_*^2 \xi_0^4} = \tau_0 \quad (1.19)$$

Используя соотношения (1.15), (1.16), (1.17), (1.18), можем найти

$$\frac{\partial f}{\partial t} = r_* \frac{dr_*}{dt} - r_* \frac{\partial r_*}{\partial t} \frac{\tau_0}{\xi_0} (\varepsilon_s + cT_2 - cT_1) \quad (1.20)$$

Предполагая постоянно выражения $\varepsilon_s + cT_2 - cT_1 = e_2 - e_1$ и полагая $f = \frac{1}{2} a r_*^2$, можно из (1.19), (1.20) получить

$$\frac{\tau_0}{\xi_0} = \frac{\mu a}{\tau_0}, \quad a = \frac{1}{1 + \frac{\mu}{\xi_0^2} (\varepsilon_s + cT_2 - cT_1) \tau_0} \quad (1.21)$$

В предположении, что $\tau_0 \frac{\varepsilon_s + cT_2 - cT_1}{\xi_0^2} \mu \ll 1$, получаем $a = 1$ и решение дается (1.16), (1.17).

Решение впереди S $u_r = a \frac{r_*^2}{2t}$

Используя (1.19) и условие при $r = r_* \xi_0$ $\sigma_{rr} = \sigma_{r1}$, из (1.16), (1.17) можно получить для $r < r_* \xi_0$

$$\tau(x, t) = -\tau_0 (1 + 2 \ln r_{\beta} z_0)$$

$$\sigma_{rr} = \tau_0 \left(2 \ln \frac{r}{r_{\beta} z_0} - 1 \right) \quad (1.22)$$

На поверхности тела получится

$$\sigma_{rr} = -\tau_0 \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_0} \right) \quad (1.23)$$

2. Определение движения конуса

Рассмотрим задачу о проникании конуса с углом полураствора β , тогда $r_{\beta} = (f - x)\beta$ и, предполагая, что на теле имеется граничное условие

$$\sigma_{rz} = k_1 \sigma_{rr}$$

где k_1 — коэффициент трения, можно для силы сопротивления проникания получить

$$P = -2\pi \int_0^{f(t)} (f - x) \beta (\beta + k_1) \sigma_{rr} dx$$

или

$$P = -\pi \beta (\beta + k_1) \sigma_{rr} f^2(t) \quad (2.1)$$

Записывая закон движения тела массы m

$$mf''(t) = -P$$

получим после интегрирования с учетом (1.23)

$$f'^2 = V^2 - \frac{2}{3m} \pi \beta (\beta + k_1) \tau_0 \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_0} \right) f^3$$

где V есть начальная скорость тела.

Условие $f'(t) = 0$ даст для максимальной глубины проникания следующее выражение

$$f_{\max}^3 = \frac{3mV^2}{2\pi \tau_0 \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_0} \right) (\beta + k_1) \beta} \quad (2.2)$$

3. Определение максимальной глубины проникания для цилиндрического тела, переходящего в конус

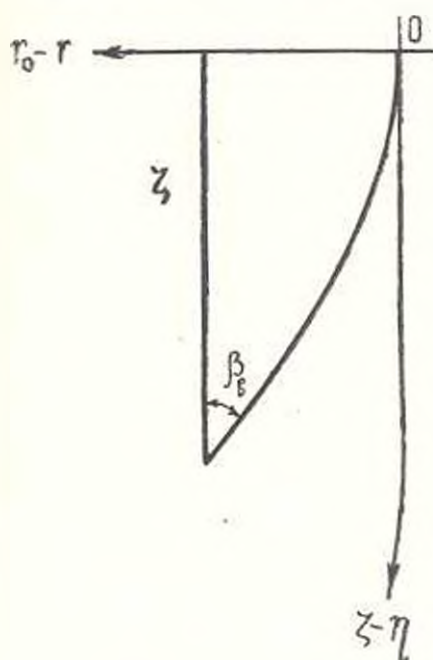
Рассмотрим цилиндрическую часть тела, которая переходит в конический конус с уравнением образующей (фиг. 2)

$$r_{\beta} = r_0 - \beta(\zeta - \eta), \quad \eta = f - x \quad (3.1)$$

Вначале предположено, что вдоль цилиндра среда примыкает к телу и $k_1 \neq 0$.

Для силы сопротивления в момент времени t , соответствующий полному погружению конической части тела, или при $f > \zeta$ можно получить

$$P = 2\pi\tau_s \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_s} \right) \left[\frac{\nu}{\nu+1} \beta k_1 \zeta^{\nu+1} + \frac{1}{2} \beta^2 \zeta^{2\nu} + k_1 r_0 (f - \zeta) \right] \quad (3.2)$$



Фиг. 2.

Уравнение движения в этом случае исследовано ниже. Для задачи с отсутствием силы сопротивления на цилиндрической части ($k_1 = 0$) уравнение движения будет

при $f > \zeta$

$$mf'' = -2\pi\tau_s \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_s} \right) \left[\frac{\nu}{\nu+1} \beta k_1 \zeta^{\nu+1} + \frac{1}{2} \beta^2 \zeta^{2\nu} \right] \quad (3.3)$$

После интегрирования получим

$$\frac{f^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} = -\frac{2\pi\tau_s}{m} \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_s} \right) \left(\frac{\nu}{\nu+1} \beta k_1 \zeta^{\nu+1} + \frac{1}{2} \beta^2 \zeta^{2\nu} \right) (f - \zeta) \quad (3.4)$$

где v_1 — скорость тела в момент, когда $f = \zeta$ или при полном погружении конуса.

При $f < \zeta$ уравнение движения тела имеет вид

$$mf'' = -2\pi\tau_s \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_s} \right) \left[\frac{1}{2} \beta^2 \zeta^{2\nu} + \beta^2 k_1 f - \frac{\beta k_1}{\nu+1} \zeta^{\nu+1} - \beta^2 \zeta (\zeta - f)^{\nu} + \frac{\beta^2}{2} (\zeta - f)^{2\nu} + \frac{\beta k_1}{\nu+1} (\zeta - f)^{\nu+1} \right] \quad (3.5)$$

После интегрирования и складывания с (3.4) с учетом того, что при $f = \zeta$, $f' = V_1$, получим

$$\frac{f'^2}{2} - \frac{V^2}{2} = -\frac{2\pi\tau_0}{m} \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_0}\right) \left[\left(\frac{\nu}{\nu+1} \beta k_1 \zeta^{\nu+1} + \frac{1}{2} \beta^2 \zeta^{2\nu} \right) (f - \zeta) + \right. \\ \left. + \frac{\beta^2}{2} + \zeta^{2\nu+1} + \beta \zeta^{\nu+2} k_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\nu+1} \right) - \right. \\ \left. - \beta^2 \zeta^{2\nu+1} \frac{3\nu+1}{2(\nu+1)(\nu+1)} + \frac{\beta k_1 \zeta^{\nu+2}}{(\nu+1)(\nu+2)} \right]$$

где V — начальная скорость.

При $f' = 0$, $f = f_{\max}$ и для $f_{\max}$ получится

$$f_{\max} = \frac{1}{\frac{\nu}{\nu+1} \beta k_1 \zeta^{\nu+1} + \frac{1}{2} \beta^2 \zeta^{2\nu}} \left[\frac{m V^2}{4\pi\tau_0 \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_0}\right)} + \right. \\ \left. + \beta^2 \zeta^{2\nu+1} \frac{\nu^2}{(2\nu+1)(\nu+1)} - \frac{\nu \beta k_1 \zeta^{\nu+2}}{2(\nu+2)} \right] + \zeta \quad (3.6)$$

При $\nu = 1$, то есть для тела с прямолинейной конусной частью,

$$f_{\max} = \frac{m V^2}{2\pi\tau_0 \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_0}\right) \beta (\beta + k_1) \zeta^2} + \frac{2}{3} \zeta \quad (3.7)$$

Отметим, что определение $f_{\max}$ для погружения криволинейного конуса, то есть формулы, подобной (2.2), при $\nu \neq 1$ является довольно сложной задачей и в настоящей работе не рассмотрено.

Вычислим $f_{\max}$ с учетом, что на цилиндрической части $k_1 \neq 0$. Для силы сопротивления имеем формулу (3.2). Проводя те же рассуждения для $f_{\max}$, будем иметь формулу при $f_{\max} > \zeta$

$$f_{\max} = - \left(\frac{\beta \zeta^\nu}{2k_1} - \frac{\zeta}{\nu+1} \right) + \left[\left(\frac{\beta \zeta^\nu}{2k_1} - \frac{\zeta}{\nu+1} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\beta}{k_1} \frac{3\nu+1}{2(\nu+1)(\nu+1)} \zeta^{\nu+1} - \frac{2\zeta^2}{(\nu+1)(\nu+2)} + \right. \\ \left. + \frac{m V^2}{2\pi\tau_0 \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_0}\right) \beta k_1 \zeta^\nu} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

Формулы (3.6), (3.8) верны при $\zeta < f_{\max}$ или при $\zeta < \zeta_0$, где критическая высота конуса, для которой $\zeta_0 = f_{\max}$, дается (2.2) (фиг. 3). При $\zeta > \zeta_0$ для $f_{\max}$ имеет место (2.2).

При $\nu = 1$ формула (3.8) переходит в формулу

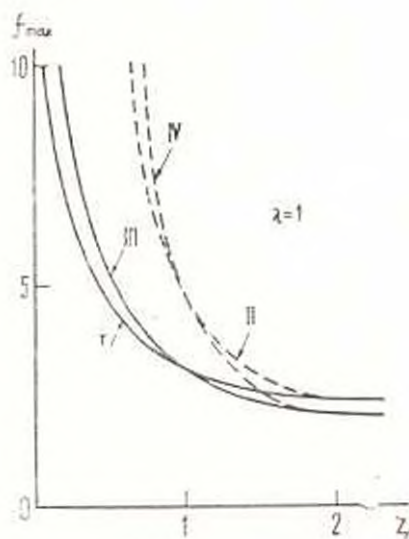
$$f_{\max} = -\frac{K}{2} + \left\{ \frac{K^2}{4} - \frac{1}{\pi k_1 \zeta_0^2} \left[\frac{mv^2}{-2\tau_s \left(1 + \ln \frac{\mu a}{\tau_s} \right)} + \frac{\pi \beta \left(\frac{\beta}{\zeta_0} + k_1 \right) \zeta_0^2}{\zeta_0} \right] + \frac{\beta^2}{k_1} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

где $K = \frac{\beta \zeta_0}{k_1} - \tau_s$, ζ_0^2 дается (2.2).

На фиг. 3 приведены зависимости $f_{\max}$ от ζ для конического тела, переходящего в цилиндр для $\beta \approx 0.22 \text{ рад см}^{-1}$, $k_1 = 0.15$, $a = 1$. Кривые I, II соответствуют прямому конусу, кривые III, IV — конусу с криволинейной образующей:

- I — $\nu = 1$ $k_1 \neq 0$ (на цилиндре),
- II — $\nu = 1$ $k_1 = 0$ (на цилиндре),
- III — $\nu = 1.3$ $k_1 \neq 0$ (на цилиндре),
- IV — $\nu = 1.3$ $k_1 = 0$ (на цилиндре).

$$\lambda = \frac{mv^2}{2\tau_s \left(1 + \ln \frac{\mu}{\tau_s} \right)} = 1$$



Фиг. 3.

Как видно из кривых, наименьшее значение $f_{\max}$ (при $\nu = 1$) соответствует $\zeta > \zeta_0$, то есть погружению конуса.

4. Экспериментальное исследование проникания

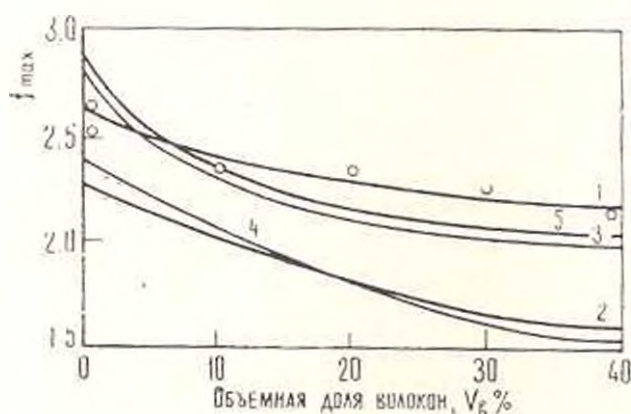
Для экспериментального исследования проникания в [12] применялся композиционный материал, полученный армированием железного порошка марки ПЖ2М произвольно ориентированными дискретными стальными волокнами, изготовленными из мерной резной стальной проволоки диаметром 0.28 мм марки сталь-55 с отношением длины волокна к диаметру $L/d = 100$.

В качестве проникающего тела использовалось тонкое твердое тело.

Результаты исследований, приведенные на фиг. 4, показывают, что наибольшая глубина достигается для образцов, полученных из неармированного материала ($V_n = 0$), а с увеличением объемной доли армирующих волокон V_n глубина проникания тела уменьшается. Это свя-

зано с тем, что в композиционном материале армирующие волокна образуют прочный каркас, жесткость которого растет с увеличением концентрации волокон, препятствующих прониканию тела.

При этом волокна испытывают растягивающие напряжения. После проникания размер кратера не превышал 1.3—1.4 диаметра тела. В процессе проникания в железный образец образовались незначительные трещины, которые занимали небольшой участок.



Фиг. 4.

По формулам (2.2), (3.5), (3.7) при $\alpha = 1$ и по формуле (3.5) при $\alpha = 0.8$ (фиг. 4) (соответственно кривые 2, 3, 4, 5. Кривая 1 — экспериментальная) были рассчитаны глубины проникания тела в неармированный железный образец и композиционный материал с различной долей волокон.

Приближенный расчет прочностных характеристик и модуля сдвига для композиционного материала с различной долей армирующих волокон проводился согласно [13].

Прочность композиции при армировании дискретными волокнами рассчитывалась по формуле [13, 14]

$$\sigma_u = \sigma_v V_v \left[\frac{(1 - \alpha) l_{up}}{l} \right] + \sigma_m (1 - V_v)$$

где σ_u — предел прочности при растяжении волокна; σ_m — напряжение течения материала матрицы (армируемого материала) в момент разрушения волокон (принимается равным пределу текучести матрицы [14]); l — длина дискретного волокна; l_{up} — наименьшая длина, при которой дискретное волокно может разрушаться в композиции (рассчитывается по [5]); $\alpha = 0.5$, если напряжение, развиваемое в волокнах, возрастает линейно от концов к середине.

Считая $\sigma_x \sim \sigma_y$, τ определяли из $\tau = \frac{\sigma_x}{\sqrt{3}}$. Модуль сдвига вычисляли по формуле

$$G_u = \frac{G_v G_m}{G_m (1 - V_v) + G_v V_v}$$

Из фиг. 4 видно, что с экспериментальными данными больше всего сходятся кривые 4, 5, полученные по формуле (3.6), то есть при отсутствии силы трения из цилиндрической части, что объясняется появлением кратера с размером, большим диаметра проникающего тела. При этом наилучшее соответствие получено с учетом энергетических эффектов (кривая 5, фиг. 4).

Были проделаны также эксперименты по прониканию в образцы, сделанные из дюралюминия с $\tau_0 = 45 \text{ кг/см}^2$, $\mu = 0.7 \cdot 10^9 \text{ кг/см}^2$. Глубина проникания тела для всех образцов оказалась равной $(4.5 \pm 1) \text{ мм}$. Из опытов найдено, что $\varepsilon_0 = \text{const}$, то есть поверхность S подобна поверхности T . Расчеты по формулам (3.6) и (3.8) дают соответственно $\varepsilon_{0.1} = 4.45 \text{ см}$, $f_{0.1} = 3.28 \text{ см}$. Как и прежде, хорошее соответствие с экспериментом дает формула (3.6).

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 18 I 1980

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՎ, Ա. Ա. ՎԱՆՏՅԱՆ

ԲԱՐԱԿ ՄԱՐԻՄԵՆՆԵՐԻ ՆԵՐՔԱՓԱՆՑՈՒՄԸ ԱՌԱՋԳԱՎԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻՐԻ ՄԵՋ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Դիտարկված է սուր ծայրով, բարակ, պատմուն պինդ մարմնի ներթափանցումը նախապես առաձգական միջավայրի մեջ: Ընթացում է, որ ներթափանցման պահից առաջանում է մարմնի ծայրից սկզբող փայլաման ճակատ: Ճակատի հետևի մասում միջավայրի շարժումը նկարագրվում է իզևալական պլաստիկական փեճակի հավասարումներով: Ճակատի առջևի մասում միջավայրը առաձգական է: Տրվում է խնդրի էֆֆեկտիվ լուծումը: Որոշվում է ներթափանցման առավելագույն խորությունը կոնի և գլանի վերածվող կորագիծ տեսքով կոնի համար: Վերջինի համար կատարված են հաշվարկներ դանային մասի և միջավայրի, ինչպես շփման առկայության, այնպես էլ նրա բացակայության դեպքերում: Ելույթ է տրվում, որ դանային մասում շրջման բացակայության դեպքի ներթափանցման խնդրի համար ստացվում է լավ համապատասխանություն մետաղական բաղադրյալ նյութերում ներթափանցման խնդրի համար ստացված փորձնական արդյունքների հետ:

THE PENETRATION OF THIN BODIES INTO ELASTIC MEDIA

A. G. BAGDOV, A. A. VANTSYAN

S u m m a r y

The problem of penetration of a thin pointed body of revolution into an initially elastic medium is considered.

It is supposed that from the penetration moment a fracture front propagating from the body's vertex is formed.

Behind the front the motion of the medium determined by the equations for an ideal plastic problem takes place. Ahead of it the medium is elastic. An effective solution of the problem is given. The maximal depth of penetration for a cone and a body shaped as a curvelinear cone converting to a cylinder is determined. For the latter the calculations are made both for the cases of presence and absence of friction of the medium against the cylindrical part of the body.

It is shown that in the problem without friction along the cylindrical part a good agreement with the experimental curve, obtained for the problem of penetration into metal composites, is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматуллин Х. А., Сагомонян А. Я., Алексеев Н. А. Вопросы динамики грунтов. М., МГУ, 1964.
2. Ишлинский А. Ю. Осесимметричная задача пластичности и проба Бриллея. ПММ, 1944, т. VIII, вып. 3.
3. Григорян С. С. Некоторые вопросы газодинамики тонких тел. Кандидатская диссертация. МГУ, 1956.
4. Сагомонян А. Я. Проникание. М., МГУ, 1977.
5. Багдоев А. Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды. Ереван, Изд. АН Армянской ССР, 1961.
6. Багдоев А. Г. Проникание тонкого тела вращения в упругую среду. Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1977, т. 30, № 5.
7. Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н., Саркисян Г. А. Решение некоторых нестационарных задач взаимодействия тел с упругими преградами. Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 3.
8. Ионов В. Н., Огибалов П. М. Напряжения в телах при импульсных нагружениях. М., «Высшая школа», 1975.
9. Ньюшан А. А. Механика сплошной среды. М., МГУ, 1978.
10. Григорян С. С. Некоторые вопросы математической теории деформации горных пород. ПММ, 1967, т. 31, № 4.
11. Мистеров В. А., Берковский В. С. Теория пластической деформации и обработки металлов давлением. М., «Металлургия», 1974.
12. Багдоев А. Г., Минасян Б. И. Исследование проникания тонкого твердого тела в металлы. Изв. АН Армянской ССР, серия техн. наук, 1979, т. 32, № 3.
13. Карпинос Д. М., Тучинский Л. Н., Вишняков Л. Р. Новые композиционные материалы. Киев, «Высшая школа», 1977.
14. Францевич И. Н., Карпинос Д. М. Композиционные материалы волокнистого строения. Киев, «Наукова Думка», 1970.

А. С. РАВИНОВИЧ

О РЕШЕНИИ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ШЕРОХОВАТЫХ ТЕЛ С БЛИЗКИМИ РАДИУСАМИ

Рассматривается задача о сжатии двух упругих шероховатых тел, одно из которых имеет круговой цилиндрический вырез, а другое представляет собой круговой цилиндр, вставленный в этот вырез, причем радиусы цилиндра и выреза близки. Эта задача в случае идеально гладких тел изучалась в [1]. Исследуемая нами задача для шероховатых тел приводится к нелинейному интегральному уравнению относительно номинального давления. Предлагается эффективный итерационный метод решения этого уравнения.

1. Представим поверхности контактирующих тел в виде двух гладких цилиндрических поверхностей F_1 и F_2 с радиусами r_1 и r_2 , покрытых микронеровностями (волнистости считаем отсутствующими). Задачу будем считать плоской и рассматривать ее в дальнейшем в плоскости Π , перпендикулярной оси цилиндра и делящей его пополам. Окружности, по которым пересекаются поверхности F_1 и F_2 с плоскостью Π , обозначим через F_1^* и F_2^* , а центры окружностей — через O_1 и O_2 . Сжимающие силы в плоскости Π считаем приложенными симметрично по отношению к прямой, соединяющей центры O_1 и O_2 (в дальнейшем индекс 1 будет соответствовать круговому цилиндру, а индекс 2 — телу с вырезом).

Обозначим, также как и в [1], δ — сближение тел; u_1 и u_2 — нормальные упругие перемещения точек окружностей F_1^* и F_2^* ; φ — угол между прямой O_1O_2 и произвольным радиусом окружности F_1^* , изменяющейся на участке контакта в пределах $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$. Зависимость между номинальным давлением p (при отсутствии волнистости оно совпадает с контурным давлением) и сближением δ поверхностей тел вследствие деформации микронеровностей представим степенной функцией $\delta = M p^{\frac{1}{m}}(\varphi)$ ($1 \leq m \leq 3$) [2].

Обозначим $H = H_1 + H_2$, где H_1 и H_2 — максимальные высоты микронеровностей контактирующих тел.

Рассмотрим две точки A_1 и A_2 , лежащие соответственно на окружностях F_1^* и F_2^* и находящиеся после сжатия тел на прямой, параллельной прямой O_1O_2 . Угол φ между прямыми O_1O_2 и O_1A_1 выберем в пределах $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$. После сжатия тел расстояния между окруж-

ностями F_1^* и F_2^* , взятое на прямой O_1A_1 , будет равно $H - Mp^{\frac{1}{m}}(\varphi)$, поэтому расстояние Δ между точками A_1 и A_2 станет равным следующему выражению:

$$\Delta = \frac{H - Mp^{\frac{1}{m}}(\varphi)}{\cos \varphi}$$

Пусть в результате упругих перемещений точка A_1 переходит в A_1' , и A_2 — в A_2' . Проведя рассуждения, аналогичные [1] (стр. 143, 144), получим при $|\varphi| \leq \varphi_0$

$$u_{1r} + u_{2r} = (p - H) \cos \varphi - (r_2 - r_1)(1 - \cos \varphi)$$

где p — расстояние между точками A_1' и A_2' .

Так как для выбранных точек $p = a + \Delta$ (ввиду параллельности прямых $A_1'A_2'$ и O_1O_2), то на участке контакта имеем следующее равенство:

$$u_{1r} + u_{2r} = a \cos \varphi - Mp^{\frac{1}{m}}(\varphi) - (r_2 - r_1 - H)(1 - \cos \varphi) \quad (1.1)$$

Рассматривая задачу в постановке, предложенной в [1], и используя приведенные там же формулы для u_{1r} и u_{2r} (стр. 145), получим следующее нелинейное интегральное уравнение относительно номинального давления:

$$\begin{aligned} Mp^{\frac{1}{m}}(\varphi) - 2(\theta_1 r_1 + \theta_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi} p(\varphi') \cos(\varphi - \varphi') \ln \lg \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} d\varphi' + \\ + (x_1 r_1 + x_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi} p(\varphi') \sin |\varphi - \varphi'| d\varphi' - 2\theta_1 r_1 \int_{-\varphi_0}^{\varphi} p(\varphi') d\varphi' = \\ = a \cos \varphi - (r_2 - r_1 - H)(1 - \cos \varphi) \quad (-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0) \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$\theta_i = \frac{1 - \mu_i^2}{\pi E_i}, \quad x_i = \frac{(1 + \mu_i)(1 - 2\mu_i)}{2E_i} \quad (i = 1, 2)$$

E_i , μ_i — модули упругости и коэффициенты Пуассона контактирующих тел.

Сделаем замену переменной

$$\varphi' = 2 \arctg(at), \quad \varphi = 2 \arctg(ax)$$

где

$$a = \lg \frac{\varphi_0}{2}$$

Положим

$$q^m(x) = \frac{p(2 \arctg(ax))}{(1 + a^2 x^2)^2} \quad (1.3)$$

Уравнение (1.2) при $\varepsilon_0 \ll \frac{\pi}{2}$ примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & Mq(x)(1+a^2x^2)^{1+\frac{2}{m}} - 4a(b_1r_1 + b_2r_2) \int_{-1}^1 q^n(t) \ln \left(\frac{|a(t-x)|}{1+a^2tx} \right) \times \\
 & \times [(1-a^2x^2)(1-a^2t) + 4a^2tx] dt + 4a^2(x_1r_1 + x_2r_2) \int_{-1}^1 q^n(t)(1+a^2tx) \times \\
 & \times |t-x| dt - 4b_1ar_1(1+a^2x^2) \int_{-1}^1 q^n(t)(1+a^2t^2) dt = \\
 & = (H+r_1-r_2)(1+a^2x^2) + (x+r_2-r_1-H)(1-a^2x^2) \quad (1.4) \\
 & \quad (|x| \leq 1)
 \end{aligned}$$

Преобразуем, используя четность $q(x)$, следующий интеграл:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 q^n(t)(1+a^2tx)|t-x| dt = \int_{-1}^x q^n(t)(1+a^2tx)(x-t) dt + \\
 & + \int_x^1 q^n(t)(1+a^2tx)(t-x) dt = 2 \int_0^x q^n(t)(1+a^2tx)(x-t) dt + \\
 & + \int_0^1 q^n(t)(1+a^2tx)(t-x) dt + \int_{-1}^0 q^n(t)(1+a^2tx)(x-t) dt = \\
 & = 2 \int_0^x q^n(t)(1+a^2tx)(x-t) dt + \int_0^1 q^n(t)[(1+a^2tx)(t-x) + \\
 & + (1+a^2tx)(x+t)] dt = 2 \int_0^x q^n(t)(1+a^2tx)(x-t) dt + \\
 & + 2(1-a^2x^2) \int_0^1 tq^n(t) dt \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

Из (1.4) и (1.5) имеем

$$\begin{aligned}
 & K(1+a^2x^2)^{1+\frac{2}{m}} q(x) + \int_{-1}^1 q^n(t)[(1-a^2x^2)(1-a^2t^2) + 4a^2tx] \times \\
 & \times \ln \left(\frac{1+a^2tx}{|t-x|} \right) dt + \lambda \int_0^x q^n(t)(1+a^2tx)(x-t) dt = S_1 - S_2 x^2 \quad (1.6)
 \end{aligned}$$

$$K = \frac{M}{4a (\theta_1 r_1 + \theta_2 r_2)}, \quad \lambda = \frac{2a (x_1 r_1 + x_2 r_2)}{\theta_1 r_1 + \theta_2 r_2}$$

$$S_1 = 2 \ln a \int_0^1 q^n(t) (1 - a^2 t^2) dt - \lambda \int_0^1 t q^n(t) dt$$

$$+ \frac{x + 8\theta_1 a r_1 \int_0^1 q^n(t) (1 + a^2 t^2) dt}{4a (\theta_1 r_1 + \theta_2 r_2)}$$

$$S_2 = 2a^2 \ln a \int_0^1 q^n(t) (1 - a^2 t^2) dt - \lambda a^2 \int_0^1 t q^n(t) dt +$$

$$a^2 (2(r_2 - r_1 - H) + x) - 8\theta_1 a^2 r_1 \int_0^1 q^n(t) (1 + a^2 t^2) dt$$

$$+ \frac{4a (\theta_1 r_1 + \theta_2 r_2)}$$

Неизвестные функции $q^n(x)$ и $q(x)$ будем искать в виде

$$q^n(x) = b_n \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{\gamma}_l x^{2l} (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \tilde{\gamma}_0 = 1 \quad (1.7)$$

$$q(x) = b_0 \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l x^{2l} (1 - x^2)^{\frac{1}{2m}}, \quad \gamma_0 = 1$$

Числа $\tilde{\gamma}_l$ и γ_l при $l \geq 1$ связаны соотношением

$$\tilde{\gamma}_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-j+1)}{j!} \sum_{\substack{l_1+l_2+\dots+l_{j-1}=j-1 \\ l_1 \geq 1, l_2 \geq 1, \dots, l_{j-1} \geq 1}} \tilde{\gamma}_{l_1} \tilde{\gamma}_{l_2} \dots \tilde{\gamma}_{l_{j-1}} \quad (1.8)$$

Положим

$$N(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l x^l$$

$$J(x) = \int_{-1}^1 N(t) \sqrt{1-t^2} \ln \left| \frac{t-1}{t-x} \right| dt \quad (1.9)$$

Вычисление интеграла (1.9) и разложение его в ряд Маклорена приводят к следующему равенству:

$$J(x) - J(-1) \frac{(1-x^2)}{2} = \pi (1-x^2) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{l+k} \gamma_{l-k} x^{2k} \quad (1.10)$$

где

$$v_{k,k} = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(2i-3)!!}{(2k+i-2i+2)(2i)!!}$$

$$(0)!! = (-1)!! = 1; \quad (-3)!! = -1$$

Достаточными условиями для выполнения (1.10) являются сходимость ряда Маклорена функции $N(x)$ и абсолютная сходимость двойного ряда в (1.10) при $|x| \leq 1$.

В случае четной функции $N(x)$ формула (1.10) получена в [2]. Отметим, что в этом случае, как нетрудно убедиться, делая замену переменной $\tau = -t$, интеграл $J(-1) = 0$.

Таблица 1

$k \backslash l$	0	1	2	3	5	7	10	15
0	0.5000	0.0000	-0.0208	-0.0208	-0.0161	-0.0125	-0.0091	-0.0060
1	0.3333	0.0333	0.0012	-0.0062	0.0083	-0.0075	-0.0061	-0.0044
2	0.2500	0.0417	0.0104	0.0010	-0.0039	-0.0046	0.0043	-0.0034
3	0.2000	0.0429	0.0147	0.0050	-0.0011	-0.0027	-0.0030	-0.0026
5	0.1429	0.0397	0.0175	0.0086	0.0019	-0.0003	-0.0014	-0.0016
7	0.1111	0.0353	0.0176	0.0099	0.0035	0.0010	-0.0004	-0.0010
10	0.0833	0.0298	0.0164	0.0102	0.0045	0.0021	0.0005	-0.0004
15	0.0588	0.0232	0.0140	0.0094	0.0050	0.0029	0.0013	0.0003
25	0.0370	0.0160	0.0104	0.0076	0.0046	0.0030	0.0018	0.0008
50	0.0192	0.0089	0.0062	0.0048	0.0033	0.0024	0.0017	0.0010

Значения чисел $v_{k,k}$ приведены в табл. 1. Из этой таблицы видно, что числа $v_{k,k}$, начиная с $k=1$, становятся весьма малыми по сравнению с единицей. Формула (1.10) и указанное свойство чисел $v_{k,k}$ являются центральными в дальнейших рассуждениях.

Используя условие

$$p(\tau_0) = 0 \quad (1.11)$$

из (1.6) имеем

$$S_2 = S_1 - \int_{-1}^1 q^n(t) [(1-a^2)(1-a^2t^2) + 4a^2t] \ln \left(\frac{1+a^2t}{1-t} \right) dt - \\ - \int_0^1 q^n(t) (1+a^2t)(1-t) dt \quad (1.12)$$

Преобразуем (1.6), разлагая $\ln(1+a^2tx)$ в ряд Маклорена и используя (1.12), к виду

$$\begin{aligned}
& K(1+a^2x^2)^{1+\frac{2}{n}}q(x) + (1-a^2x^2) \int_{-1}^1 q^n(t)(1-a^2t^2) \ln \left| \frac{t-1}{t-x} \right| dt + \\
& + 4a^2x \left(\int_{-1}^1 tq^n(t) \ln \left| \frac{t-1}{t-x} \right| dt - \frac{(1-x)}{2} \int_{-1}^1 tq^n(t) \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| dt \right) + \\
& + \int_{-1}^1 q^n(t) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} (a^2tx)^{i+1} [(1-a^2x^2)(1-a^2t^2) + 4a^2tx] dt = \\
& = \int_{-1}^1 q^n(t) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} (a^2t)^{i+1} [(1-a^2)(1-a^2t^2) + 4a^2t] dt + \\
& + 2 \left| \int_0^x q^n(t)(1+a^2tx)(x-t) dt - \int_0^x q^n(t)(1+a^2t)(1-t) dt \right| = \\
& = c(1-x^2)
\end{aligned} \tag{1.13}$$

где

$$\begin{aligned}
c = S_1 + \int_{-1}^1 q^n(t)(1-a^2t^2) \ln(1-t) dt - \int_{-1}^1 q^n(t) \ln(1+a^2t) \times \\
\times [(1-a^2)(1-a^2t^2) + 4a^2t] dt - 2 \int_0^1 q^n(t)(1+a^2t)(1-t) dt
\end{aligned}$$

Отметим, что при получении (1.13) использовалось равенство

$$\int_{-1}^1 tq^n(t) \ln(1-t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 tq^n(t) \ln \left(\frac{1-t}{1+t} \right) dt = 0$$

которое справедливо, так как в силу четности $q(t)$ имеем, делая в интеграле замену переменной $\tau = -t$:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 tq^n(t) \ln(1-t) dt &= - \int_{-1}^1 \tau q^n(\tau) \ln(1+\tau) d\tau = \\
&= - \int_{-1}^1 tq^n(t) \ln(1+t) dt
\end{aligned}$$

Подставим в уравнение (1.13) вместо $q(x)$ и $q^n(x)$ выражения (1.7) и разделим это уравнение на $-b_0(1-x^2)$. Разлагая левую часть получающегося уравнения в ряд Маклорена, используя формулу (1.10)

и приравнявая выражения при одинаковых степенях x в левой и правой частях этого уравнения, получим следующую бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений относительно чисел δ_0 и γ_i :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^l \gamma_i s_{i-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \{ (\delta_{l+k} - a^2 \delta_{l+k-1}) v_{2l+k} - a^2 (\delta_{l+k-1} - a^2 \delta_{l+k-2}) v_{2l-2+k} \} + \\ & + 4a^2 \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{l+k-1} v_{2l-1+k} - \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i h_{i,l} + \frac{\lambda}{\pi} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{g_i}{2(i+1)} \times \\ & \times \left(\frac{1}{2i+1} + a^2 \frac{(1-\beta_{l-1-i})}{2i+3} \right) - \frac{\lambda}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i f_i = \frac{d}{\pi b_0} \beta_l \quad (1.14) \\ & (l=0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

где

$$\xi = \frac{K}{\pi b_0^{(m-1)/m}} \quad (1.15)$$

s_i — коэффициенты при x^i ряда Маклорена функции

$$(1-x)^{\frac{m}{m-1}} (1+a^2 x)^{1+\frac{2}{m}}$$

$$\gamma_0 = \delta_0 = 1, \quad \delta_{-1} = \delta_{-2} = v_{-1,k} = v_{-2,k} = 0, \quad d = c + 8a' \int_0^1 t^2 q''(t) dt$$

$$h_{i,l} = \sum_{k=1}^{\infty} a^{4k+2} \{ \gamma_{k,l} \psi_{2k} + \gamma_{k+1,l} a^2 (4\psi_{2k+1} - \psi_{2k} - \psi_{2k+2}) + \gamma_{k+1,l} a^4 \psi_{2k+2} \}$$

$$\gamma_i = \frac{(2i-1)!!}{(2i+2)!!}, \quad g_i = -\sum_{j=0}^i \delta_j \gamma_{i-j}, \quad \psi_i = \frac{1}{i} \quad (i \geq 2), \quad \psi_0 = \psi_1 = 0$$

$$\sum_{i=0}^{-1} = 0, \quad f_i = \frac{\pi}{2} \frac{(2i-1)!!}{(2i+2)!!} - (1-a^2) \frac{(2i)!!}{(2i+3)!!} - \frac{\pi a^2}{2} \frac{(2i+1)!!}{(2i+4)!!}$$

$$(-3)!! = -1, \quad (-1)!! = (0)!! = 1, \quad \beta_0 = 1, \quad \beta_i = 0 \quad (i \geq 1)$$

Из бесконечной системы (1.14) при $l \geq 1$ получаем следующую бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений относительно чисел γ_i :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^l \gamma_i s_{i-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \{ (\delta_{l+k} - a^2 \delta_{l+k-1}) v_{2l+k} - a^2 (\delta_{l+k-1} - a^2 \delta_{l+k-2}) v_{2l-2+k} \} + \\ & + 4a^2 \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{l+k-1} v_{2l-1+k} - \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i h_{i,l} + \\ & + \frac{\lambda}{\pi} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{g_i}{2(i+1)} \left(\frac{1}{2i+1} + \frac{a^2 (1-\beta_{l-1-i})}{2i+3} \right) - \frac{\lambda}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i f_i = 0 \quad (1.16) \\ & (l=1, 2, \dots, \quad \delta_{-1} = 0, \quad \gamma_0 = \delta_0 = 1) \end{aligned}$$

При $l \geq 1$ числа δ_l выражаются через числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$ по формуле (1.8).

Для решения рассматриваемой контактной задачи необходимо найти решение системы (1.16) при любых возможных значениях параметров $m, \varphi_0, \xi, \lambda$. Если решение этой системы найдено, то числа h_0 и α легко определяются через числа ξ и φ_0 из первого уравнения системы (1.14) и соотношения (1.12), так как их нахождение сведется к решению двух линейных алгебраических уравнений. Для нахождения чисел ξ и φ_0 служат соотношение (1.15) и условие равновесия

$$\int_0^1 q^n(t) (1 - a^2 t^2) dt = \frac{P}{4a r_1} \quad (1.17)$$

где P — сжимающая сила.

2. В дальнейшем будем считать, что входящие в рассматриваемую задачу параметры m и φ_0 удовлетворяют следующим неравенствам: $1 \leq m \leq 3$, $0 < \varphi_0 \leq 70^\circ$. Этими неравенствами охватываются обычно встречающиеся случаи. Параметр λ , как нетрудно убедиться, удовлетворяет неравенству

$$\pi \alpha \frac{1 - 2\mu_{\max}}{1 - \mu_{\max}} \leq \lambda \leq \pi \alpha \frac{1 - 2\mu_{\min}}{1 - \mu_{\min}}$$

где

$$\mu_{\max} = \max(\mu_1, \mu_2), \quad \mu_{\min} = \min(\mu_1, \mu_2)$$

Для обычно встречающихся значений μ у металлических тел имеем

$$0.8\alpha \leq \lambda \leq 2.3\alpha \quad (2.1)$$

Перейдем к решению системы (1.16). Для ее решения предлагается эффективный итерационный метод, являющийся обобщением метода, предложенного в [2]. Идея этого метода основана на следующих важных свойствах коэффициентов, входящих в (1.16):

1) числа $\gamma_{l,k}$, начиная с $k = 1$, становятся весьма малыми по сравнению с единицей, что было отмечено выше;

2) несложные расчеты показывают, что числа $h_{l,i}$ при $l \geq 1$ и $i \geq l + 1$ и числа f_i при $i \geq 2$ также весьма малы по сравнению с единицей.

Перепишем систему (1.16) в виде

$$\begin{aligned} & \xi \sum_{i=0}^l \gamma_i s_{l-i} + \delta_{l-2} w_{l-2} + \delta_{l-1} w_{l-1} + \delta_l w_{l,0} + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{l+k} w_{l,k} - \sum_{i=0}^l \delta_i h_{l,i} = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{l+k} h_{l-k,1} + \frac{\lambda}{\pi} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{g_i}{2(i+1)} \left(\frac{1}{2(i+1)} + \frac{a^2(1 - \frac{2}{2i+1})}{2i+3} \right) - \\ & - \frac{\lambda}{\pi} \sum_{i=0}^l \delta_i f_i - \frac{\lambda}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{l+k} f_{l+k} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\delta_{-1} = 0, \quad \gamma_0 = \delta_0 = 1, \quad w_{l,k} = v_{l,k} - a^2(4v_{l-1,k+1} - v_{l-2,k+1} - v_{2l-k+1} - \\ + a^2 v_{2l-2,k+1}), \quad v_{l,k} = 0 \quad \text{при } k < 0$$

По предлагаемому методу последовательные приближения $\gamma_l^{(n)}$ (n — номер приближения, $n = 1, 2, \dots$) находятся из следующей бесконечной системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^l \gamma_l^{(n)} s_{l-1} + \delta_{l-2}^{(n)} w_{l,-2} + \delta_{l-1}^{(n)} w_{l,-1} - \delta_l^{(n)} w_{l,0} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{l-k}^{(n-1)} w_{l,k} - \sum_{l=0}^l \gamma_l^{(n)} h_{l,l} - \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{l+k}^{(n-1)} h_{l+k,l} + \\ & + \frac{\lambda}{\pi} \sum_{l=0}^{l-1} \frac{g_l^{(n)}}{2(l+1)} \left(\frac{1}{2l+1} + \frac{a^2(1-\beta_{l-1-l})}{2l+3} \right) - \frac{\lambda}{\pi} \sum_{j=0}^l \gamma_j^{(n)} f_j - \\ & - \frac{\lambda}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{l+k}^{(n-1)} f_{l+k} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\delta_{-1}^{(n)} = 0, \quad \gamma_0^{(n)} = \delta_0^{(n)} = 1, \quad \delta_{l+1}^{(n)} = 0$$

При $n > 1$ и $l \geq 1$ под числом $\delta_l^{(n)}$ понимается число, равное правой части формулы (1.8) при $\gamma_i = \gamma_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, \dots, l$). Под числом $g_l^{(n)}$ понимаем выражение

$$g_l^{(n)} = - \sum_{j=0}^l \delta_j^{(n-1)} r_{l-1-j}$$

Система (2.3) легко разрешима относительно чисел $\gamma_l^{(n)}$. Из (1.8) и (2.3) получаем

$$\begin{aligned} \gamma_l^{(n)} = & - \frac{1}{\left[\xi + m \left(w_{l,0} - h_{l,l} - \frac{\lambda}{\pi} f_l \right) \right]} \left\{ \gamma_l^{(n)} \left(w_{l,0} - h_{l,l} - \frac{\lambda}{\pi} f_l \right) + \right. \\ & + \sum_{l=0}^{l-1} \left\{ \xi s_{l-1} \gamma_l^{(n)} - \delta_l^{(n)} \left(\frac{\lambda}{\pi} f_l + h_{l,l} \right) + \right. \\ & + \frac{\lambda g_l^{(n)}}{2\pi(l+1)} \left(\frac{1}{2l+1} + \frac{a^2(1-\beta_{l-1-l})}{2l+3} \right) \left. \right\} + w_{l,-2} \delta_{l-2}^{(n)} + w_{l,-1} \delta_{l-1}^{(n)} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{l+k}^{(n-1)} \left(w_{l,k} - h_{l+k,l} - \frac{\lambda}{\pi} f_{l+k} \right) \quad (l = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$T_i^{(n)} = \sum_{j=2}^i \frac{m(m-1) \dots (m-j+1)}{j!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_j=i \\ i_1=1, i_2=1, \dots, i_j=1}} \gamma_{i_1}^{(n)} \gamma_{i_2}^{(n)} \dots \gamma_{i_j}^{(n)} \quad (2.5) \quad (i \geq 2)$$

При $i = 1$ коэффициенты $T_i^{(n)} = 0$.

Соотношения (2.4) являются рекуррентными и по ним можно последовательно определить значения чисел $\gamma_i^{(n)}$ при любых i и n .

По формуле (2.4) на ЭЦВМ М-4030 были проведены подробные расчеты последовательных приближений $\gamma_i^{(n)}$ при различных значениях параметров $m, \varepsilon_0, \xi, \lambda$, лежащих в пределах $1 \leq m \leq 3, 0 < \varepsilon_0 \leq 70, 0 \leq \xi \leq \infty$ (ξ неотрицателен), $0.8 \lg \frac{\varepsilon_0}{2} \leq \lambda \leq 2.3 \lg \frac{\varepsilon_0}{2}$ (неравенство

следует из (2.1)). Эти расчеты показали, что последовательные приближения $\gamma_i^{(n)}$ быстро сходятся к решению системы (1.16).

Для произвольного набора чисел $m, \varepsilon_0, \xi, \lambda, P$ введем последовательные приближения $p^{(n)}(\varepsilon)$, определяемые по формуле (1.3) и первой формуле в (1.7) при $\delta_i = \delta_i^{(n)}$, в которой величину $\delta_i^{(n)}$ вычислим из условия равновесия (1.17). Величинам $K^{(n)}, \alpha^{(n)}, (r_2 - r_1 - H)^{(n)}$ будут соответствовать числа, определяемые из соотношений (1.15), (1.12) и первого уравнения системы (1.14). Эти величины сходятся соответственно к величинам $K, \alpha, (r_2 - r_1 - H)$.

Таблица 2

ε		$x=0.20$	$x=0.40$	$x=0.60$	$x=0.80$	$x=0.90$	$x=0.95$
0.40	$n=2$	0.97513	0.90524	0.80257	0.68238	0.61993	0.58853
	$n=5$	0.97492	0.90455	0.80143	0.68100	0.61842	0.58684
	$n=6$	0.97492	0.90454	0.80142	0.68101	0.61846	0.58691
0.05	$n=2$	0.96780	0.87436	0.72245	0.46753	0.22217	0.07710
	$n=5$	0.96715	0.87178	0.71659	0.46224	0.22361	0.07075
	$n=6$	0.96716	0.87183	0.71679	0.46251	0.22351	0.07121
0.10	$n=2$	0.96147	0.84754	0.65399	0.33390	0.11485	0.02648
	$n=5$	0.96096	0.84590	0.65203	0.33482	0.11618	0.02909
	$n=6$	0.96097	0.84592	0.65207	0.33482	0.11618	0.02924
0.25	$n=2$	0.94491	0.78187	0.51522	0.17744	0.04363	0.00999
	$n=5$	0.94489	0.78200	0.51569	0.17750	0.04347	0.00890
	$n=6$	0.94489	0.78199	0.51567	0.17749	0.04346	0.00887
0.75	$n=2$	0.91312	0.67388	0.35316	0.08418	0.01689	0.00329
	$n=5$	0.91277	0.67282	0.35189	0.08373	0.01681	0.00331
	$n=6$	0.91277	0.67282	0.35189	0.08373	0.01681	0.00331
2.00	$n=2$	0.88767	0.60191	0.27371	0.05635	0.01059	0.00198
	$n=5$	0.88732	0.60109	0.27509	0.05621	0.01057	0.00198
	$n=6$	0.88732	0.60109	0.27509	0.05621	0.01057	0.00198
5.00	$n=2$	0.87416	0.56797	0.24517	0.04725	0.00868	0.00161
	$n=5$	0.87404	0.56773	0.24501	0.04722	0.00867	0.00161
	$n=6$	0.87404	0.56773	0.24501	0.04722	0.00867	0.00161

Последовательные приближения $p^{(n)}(\varphi)$ быстро сходятся к функции $p(\varphi)$, причем уже начиная с $n = 2$, выражение $|p^{(n)}(\varphi) - p(\varphi)|$ при любых значениях φ на участке контакта составляет доли процента от $p(0)$.

Для иллюстрации эффективности предложенного метода в табл. 2 приведены значения функции

$$\frac{p(2\arctg(ax))}{p(0)(1+a^2x^2)^2(1-x^2)^2}$$

получаемые по второму ($n = 2$), пятому ($n = 5$) и шестому ($n = 6$) приближениям при $m = 2.9$, $a = 0.5$ ($\tau_0 \approx 53^\circ$), $\mu_1 = \mu_2 = 0.267$ ($\beta = 1$), $E_1 = E_2$ и при различных ξ .

Московский научно-исследовательский
и проектный институт систем сетевого
планирования и управления
в промышленности

Поступила 28 VI 1979

Ա. Ս. ՐԱԲԻՆՈՎԻՉ

ՄԱՏԻԿ ՀԱՌԱՎԵՂՆԵՐՈՎ ԱՆՀԱՐՔ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԿՆԴՐԻ ԼՈՒՈՐԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մոտիկ շառավիղներ ունեցող անհարթ մարմինների համար դիտարկվող կոնտակտային խնդիրը բերված է նորմալ ճնշման նկատմամբ ոչ դժային ինտեգրալ հավասարման: Տվյալ հավասարման լուծման համար առաջարկված է արագ դուզամիտվող իտեռացիոն պրոցես: Կատարված հաշվարկների ցույց են տվել, որ այդ պրոցեսում երկրորդ մոտափորոթյունը պրակտիկորեն համընկնում է հավասարման լուծման հետ:

ON SOLUTION OF A CONTACT PROBLEM FOR ROUGH SOLIDS WITH CLOSE RADII

A. S. RABINOVICH

S u m m a r y

The contact problem for rough solids with close radii is reduced to a non-linear integral equation with respect to nominal pressure. A rapidly approximated iteration process is suggested for the solution of the equation. The calculations show that in this process the second approximation practically coincides with the solution of the equation.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Штерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
2. Рабинович А. С. О решении контактных задач для шероховатых тел. Изв. АН СССР, МТТ, 1979, № 1.

Լ. Ժ. ԱԶԱՅԱՆ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПРИ ДИФРАКЦИИ СИЛЬНОЙ МАГНИТОГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОКОЛО УГЛА, БЛИЗКОГО К РАЗВЕРНУТОМУ

В настоящей работе рассматривается нестационарная пространственная задача о движении электропроводящей сжимаемой жидкости в магнитном поле при дифракции сильной магнитогазодинамической ударной волны около угла, стороны которого образуют угол, близкий к π . При отсутствии магнитного поля данная задача рассмотрена в [1]. Исследование слабых ударных волн дано в [2], [3]. Задачи о взаимодействии сильных ударных волн с тонкими телами изучались в [4, 5].

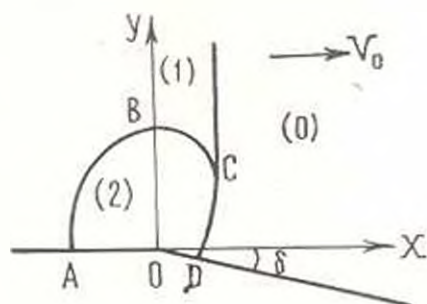
Как указано в [6], в магнитной газодинамике почти отсутствуют результаты по решению пространственных нестационарных задач, вместе с тем решение задач по отражению магнитогазодинамических ударных волн от преград представляет как теоретический, так и практический интерес. В работах [11—13] дается решение ряда задач о дифракции сильных магнитогазодинамических ударных волн и проникании клина в жидкость методом Смирнова—Соболева [7].

В § 1 настоящей работы рассматривается задача о дифракции сильной магнитогазодинамической ударной волны около угла, близкого к π , причем плоскость ударной волны до начала дифракции перпендикулярна, а начальное магнитное поле параллельно одной из сторон угла. Здесь определены параметры газа за скачком, и методами [7] и [1] приведено решение соответствующей граничной задачи.

В § 2 проведено устранение особенностей линейного решения на магнитозвуковой волне методом [2].

§ 1. Пусть плоская сильная магнитогазодинамическая ударная волна движется со скоростью U_n в покоящемся электропроводящем газе, ограниченном плоской стенкой, стороны которой образуют угол $(\pi - \delta)$, выпуклый по отношению к течению. Ударная волна перпендикулярна одной из сторон стенки, начальное магнитное поле B_0 предположено перпендикулярным плоскости скачка и постоянным. Начало координат O системы (X, Y) выбрано в вершине угла, направление осей OX, OY указано на фиг. 1. После достижения скачком вершины угла O имеет место дифракционная картина (фиг. 1). Так как угол δ мал, то влияние

угла можно рассматривать как малое возмущение скачка, причем искривленную часть скачка CD можно рассматривать как результат падения ударной волны, сопровождаемого дифракцией. Область неравномерного течения $ABCD$ примыкает к области равномерного течения за фронтом невозмущенного скачка по дуге магнитозвуковой волны ABC , последняя образует границу, до которой дошла волна возмущения, порожденная малым углом δ . В обычной газодинамике граница ABC будет представлять собой дугу окружности радиуса ct , где c — местная скорость звука. Пусть индексом 0 обозначены параметры покоящегося газа впереди магнитогазодинамической ударной волны, индекс 1 будем приписывать давлению P , плотности ρ , скорости частиц газа q , магнитному полю B , местной скорости звука c за фронтом невозмущенной ударной волны (прямолинейный участок скачка), а в области неравномерного течения $ABCD$ всем величинам будем приписывать индекс 2. Определим течение позади невозмущенной ударной волны. Так как вектор $\vec{B}$, перпендикулярен плоскости скачка (параллелен скоростям частиц газа), то параметры газа за прямолинейной частью скачка определяются из соотношений на прямом скачке уплотнения газовой динамики [1].



Фиг. 1.

$$P_1 = \frac{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)}{\gamma(\gamma + 1)M^2} \rho_0 U_0^2, \quad q_1 = \frac{(\gamma + 1)M^2}{(\gamma - 1)M^2 + 2} U_0, \quad (1.1)$$

$$q_1 = \frac{2(M^2 - 1)}{(\gamma - 1)M^2} U_0$$

Здесь $M = \frac{U_0}{c_0}$ — число Маха падающей ударной волны. Для $\gamma = \frac{7}{5}$ значения этих величин даны в [1]. Введем обозначение

$$M_1 = \frac{q_1}{c_1} = \frac{q_1}{(\gamma P_1 / \rho_1)^{\frac{1}{\gamma}}} = \frac{2(M^2 - 1)}{[2\gamma M^2 - (\gamma - 1)]^{\frac{1}{2}} [(\gamma - 1)M^2 + 2]^{\frac{1}{2}}} \quad (1.2)$$

Здесь, как и в соответствующей задаче газовой динамики [1], возможны дозвуковое и сверхзвуковое течения газа.

Для определенности рассмотрим случай $M_1 < 1$, причем для $M_1 > 1$ рассмотрение изменится незначительно [1]. В области неравномерного течения $ABCD$ параметры P_2 , ρ_2 , q_2 , B_2 будут отличаться от параметров с индексом 1 на величины порядка δ и для нахождения величин

$$p^* = \frac{P_2 - P_1}{\rho_1 q_1 c_1}, \quad \tau = \frac{r_2 - r_1}{r_1}, \quad \bar{q} = \frac{\bar{q}_2 - \bar{q}_1}{q_1}, \quad \bar{\delta} = \frac{\bar{\delta}_2 - \bar{\delta}_1}{\nu_1^{\frac{1}{2}} q_1} \quad (1.3)$$

может быть применена теория возмущений. Линеаризуя по $\bar{\delta}$ уравнения магнитной гидродинамики, получим в переменных $x = X - q_1 t$, $y =$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_x}{\partial t} &= -\frac{B_1}{c_1^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -c_1 \frac{\partial p^*}{\partial y} + \frac{B_1}{4\pi c_1^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} - \frac{\partial b_z}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial b_y}{\partial t} &= \frac{B_1}{c_1^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial p^*}{\partial t} = -c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -c_1 \frac{\partial p^*}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь u , v — проекции вектора q на оси Ox , Oy . Учитывая автономность задачи, можно ввести координаты

$$\xi = \frac{X - q_1 t}{c_1 t}, \quad \eta = \frac{y}{c_1 t}$$

и сократить число измерений задачи с трех до двух. Тогда уравнения (1.4) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial b_x}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial b_x}{\partial \eta} &= -\frac{B_1}{c_1^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad \xi \frac{\partial p^*}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial p^*}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ \xi \frac{\partial b_y}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial b_y}{\partial \eta} &= -\frac{B_1}{c_1^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial p^*}{\partial \xi} \\ \xi \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial v}{\partial \eta} &= \frac{\partial p^*}{\partial \eta} - \frac{B_1}{4\pi c_1^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial b_x}{\partial \xi} - \frac{\partial b_z}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

На плоскости ξ , η область неравномерного течения имеет вид (фиг. 2). В линейной постановке кривая CD (фиг. 1) заменяется отрезком $C_1 D_1$ прямой линией $\xi = k_0$ (фиг. 2), причем на $C_1 D_1$

$$\xi = \frac{U_0 - q_1}{c_1} = \left| \frac{(\gamma - 1)M^2 + 2}{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)} \right|^{\frac{1}{2}} = k_0 < 1$$

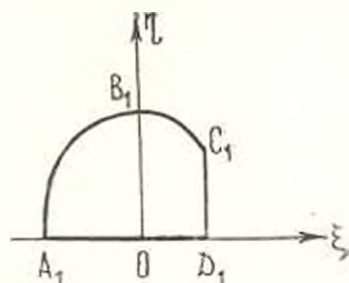
а стенка AOD аппроксимируется прямолинейным отрезком $A_1 O D_1$, ось $\eta = 0$. Граничное условие на стенке выражается равенством $v = 0$ для $\xi < -M_1$ и $v = -\frac{1}{2}$ для $\xi > -M_1$, где $(-M_1, 0)$ — координаты вершины угла в системе (ξ, η) . На граничной дуге $A_1 B_1 C_1$

$$p^* = 0 \quad (1.6)$$

так как дуга $A_1B_1C_1$ является поверхностью слабого разрыва, на которой все функции, в частности, давление непрерывны.

Далее с использованием граничных условий на стенке и дуге $A_1B_1C_1$ показывается, что задача определения течения в области дифракции может быть решена независимо от задачи определения магнитного поля внутри клина [8]. Действительно, из второго уравнения системы (1.5) получаем, что при $\eta = 0$ (на стенке) $b_y = \text{const}$. В силу непрерывности функций на дуге $A_1B_1C_1$ (на $A_1B_1C_1$ имеем $B_1 = B_2$, $\bar{b} = 0$) принимаем, что для $\xi < -M_1$ (слева от вершины) $b_y = 0$, тогда, как следует из (1.5), для $\xi > -M_1$

$$b_y = -\frac{B_1 \bar{b}}{\frac{1}{2} q_1}$$



Фиг. 2.

Проекция вектора $\vec{B}_1$ на нормаль к стенке будет

$$\vec{B}_{1n} = B_{1n} + q_1 \frac{1}{2} \vec{b}_y = 0$$

Отсюда видно, что силовые линии магнитного поля обтекают стенку, следовательно, данная задача решается вне зависимости от задачи определения магнитного поля в клине, который может быть как проводящим, так и диэлектриком [8].

Найдем граничное условие для возмущенного давления P^* на стенке и в окрестности вершины угла. Из системы (1.4) можно получить

$$\left[\frac{c_1 B_1^2}{4\pi q_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(\frac{B_1^2}{4\pi q_1 c_1} + c_1 \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \frac{\partial P^*}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{B_1^2}{4\pi q_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1.7)$$

При $y = 0$ правая часть (1.7) обращается в нуль, следовательно, на стенке можно полагать

$$\frac{\partial P^*}{\partial y} = \frac{\partial P^*}{\partial t} = 0 \quad (1.8)$$

Условие в вершине угла получается из (1.7), где учтено, что на стенке $v = v(X)(-\hat{y})$, $X = x + q_1 t$, что позволяет полагать $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_1 = q_1 \frac{\partial}{\partial X}$.

Здесь $\sigma(X)$ — единичная функция. Тогда из (1.7) получается при $y = \eta = 0$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-M_1-\eta}^{-M_1+\eta} \frac{\partial P^*}{\partial x} d\xi = \frac{c_1 q_1 \bar{b} (4\pi q_1^2 - B_1^2)}{B_1^2 (q_1^2 - c_1^2) + 4\pi q_1 c_1^2 q_1^2} \quad (1.9)$$

Для того, чтобы найти граничное условие на $\xi = k_0$, представим возмущенный фронт волны в виде

$$\xi = k_0 + f(\eta)$$

где $f(\eta)$ — функция, определяющая неизвестную форму возмущенной ударной волны CD . Записывая соотношения магнитной газодинамики [8], выполняющиеся на скачке CD и линеаризуя их относительно потока за прямолинейным скачком, получим систему уравнений, решение которой после исключения функции f имеет вид

$$u = AP^*, \quad \gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} = B \frac{\partial P^*}{\partial \eta} - b_1 = 0, \quad \gamma \frac{\partial b_1}{\partial \eta} = C \frac{\partial P^*}{\partial \eta} \quad (1.10)$$

на $\xi = k_0$

где коэффициенты A, B, C следующие:

$$A = \left| \frac{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma - 1)M^2 + 2} \right|^{\frac{1}{2}} \frac{(M^2 + 1)}{2M^2}$$

$$B = \frac{(\gamma + 1)(M^2 - 1)}{2[(\gamma - 1)M^2 + 2 - \tilde{a}_1^2(\gamma + 1)M^2]}$$

$$C = \frac{\tilde{a}_1(\gamma + 1)(M^2 - 1)}{2[\tilde{a}_1^2(\gamma + 1)M^2 - (\gamma - 1)M^2 - 2]} \left| \frac{4\pi(\gamma + 1)M^2}{(\gamma - 1)M^2 + 2} \right|^{\frac{1}{2}}$$

$$\tilde{a}_1^2 = \frac{B_0^2}{4\pi\gamma_0 U_1^2}$$

Исключая из уравнений (1.10) u , v , b_1 с помощью уравнений движения (1.5), получим граничное условие на $\xi = k_0$ для одной только функции P^*

$$\frac{\partial P^*}{\partial \eta} \frac{d\xi}{d\eta} = \frac{(A_0 - k_0)\gamma_0 - Bk_0\gamma_1^{-1}}{1 - k_0^2} \quad (1.12)$$

В дополнение к (1.12) берется также условие на $\xi = k_0$, получаемое из (1.10), а также из условий $v = 0$ в точке C , и $v = -\tilde{v}$ в точке D ,

$$\int \frac{\partial v}{\partial \eta} d\eta = \int \frac{B}{\gamma_1} \frac{\partial P^*}{\partial \eta} d\eta = \tilde{v} \quad (1.13)$$

где интегрирование ведется вдоль скачка CD .

Итак, решается система уравнений (1.4) или (1.5) в области дифракции A, B, C, D (фиг. 2) с граничными условиями (1.6), (1.8), (1.9), (1.12) и (1.13). Для решения сформулированной граничной задачи применяется метод Смирнова—Соболева [7], который справедлив для произвольной гиперболической системы уравнений с постоянными ко-

эффицентами для трех независимых переменных x, y, t . Метод Смирнова—Соболева позволяет привести сформулированную задачу к граничной задаче аналитической функции и далее решать уравнение Лапласа с заданными граничными условиями. Согласно этому методу, решение системы (1.4) ищется в виде действительной части аналитической функции комплексного переменного z

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{Re} V_r(z), & v &= \operatorname{Re} V_s(z), & b_r &= \operatorname{Re} B_r(z) \\ & & b_s &= \operatorname{Re} B_s(z), & P &= \operatorname{Re} P(z) \end{aligned} \quad (1.14)$$

где z — комплексная переменная, зависящая от x, y, t в виде

$$\alpha x + \beta(z) y = t \quad (1.15)$$

Подставляя (1.14) в (1.4) и пользуясь (1.15), можно получить соотношения

$$\begin{aligned} V_r'(z) &= \alpha c_1 P'(z), & V_s'(z) &= \frac{\beta_1}{\mu_0} P'(z) \\ B_r(z) &= \frac{B_1 c_1}{\frac{1}{\beta_1}} \frac{\beta_1}{\mu_0} P'(z), & B_s(z) &= -\frac{B_1 c_1}{\frac{1}{\beta_1}} \frac{\alpha \beta_1}{\mu_0} P'(z) \end{aligned} \quad (1.16)$$

где

$$\mu_0 = 1 - \frac{B_1^2}{4\pi c_1^2} (\alpha^2 - \beta^2)$$

и дисперсионное уравнение для $\beta(z)$, решение которого в переменных $\alpha_1 = c_1 \alpha$, $\beta_1 = c_1 \beta$ имеет вид

$$\beta(z) = \sqrt{\frac{(1 - \alpha^2)(1 - \alpha_1^2 z^2)}{1 + \alpha_1^2 - \alpha_1^2 \alpha^2}} \quad (1.17)$$

где

$$\alpha_1^2 = \frac{B_1^2}{4\pi c_1^2}$$

Здесь и далее индекс 1 отброшен.

Полагая в (1.15) z действительным и постоянным, получаем уравнение плоских волн. Уравнение точечной магнитозвуковой волны A, B, C_1 , произведенной в момент $t = 0$ вершиной угла, дается как оплывающая плоских волн в виде

$$\begin{cases} t = t_{\text{аифр}}(x, y) \\ \alpha_0 x + \beta(\alpha_0) y = t_{\text{аифр}} \\ x + \beta'(\alpha_0) y = 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

где параметры $\alpha_0, \beta(\alpha_0)$ — действительны. Вне точечной магнитозвуковой волны уравнение (1.15) имеет действительные значения $\alpha_0, \beta(\alpha_0)$, а внутри — α имеет комплексные значения.

Введем комплексную плоскость $K = \frac{1}{z} = \xi + i\eta$. В плоскости K стенке AOD и магнитозвуковой волне $A_1B_1C_1$ будет соответствовать часть действительной оси $O\xi$, что же касается отрезка C_1D_1 , то при использовании функции $\vartheta(z)$ в виде (1.17) образом C_1D_1 будет довольно сложная кривая. В дальнейшем для того, чтобы привести задачу к решению уравнения Лапласа для возмущенного давления P^* в некоторой канонической области, предполагаем параметр a_1^2 малым и заменяем $\vartheta(z)$ формулой

$$\vartheta(z) \approx \beta_1(z) = \left. \frac{\partial \beta_1(z)}{\partial a_1^2} \right|_{a_1^2=0} a_1^2 = \left(1 - \frac{a_1^2}{2}\right) \sqrt{1 - \xi^2} \quad (1.19)$$

Тогда вблизи ударной волны C_1D_1 получим

$$\xi = \frac{\zeta}{1 - (\eta')^2}, \quad \eta = \frac{\eta' \sqrt{1 - \zeta^2 - (\eta')^2}}{1 - (\eta')^2}, \quad \eta' = \eta \left(1 - \frac{a_1^2}{2}\right) \quad (1.20)$$

Функция (1.20) отображает область плоскости ξ, η на верхнюю полу-плоскость комплексной плоскости ζ, η с выброшенной частью, ограниченной кривой и частью действительной оси

$$\zeta^2 + \eta^2 - \frac{1 + k_0^2}{k_0} \zeta - 1 = 0 \quad (1.21)$$

$$k_0 < \zeta < \frac{1}{k_0}$$

Промежутки

$$-\infty < \zeta < -1, \quad -1 < \zeta < k_0, \quad \frac{1}{k_0} < \zeta < \infty \quad (1.21')$$

соответствуют дуге A_1B_1 , стенке A_1OD_1 и дуге B_1C_1 , кривая (1.21) соответствует скачку C_1D_1 . Таким образом, P^* как действительная часть аналитической функции $P(z)$ будет удовлетворять уравнению Лапласа в переменных ζ, η в области, определяемой соотношениями (1.21) и (1.21'). Далее совершается конформное отображение

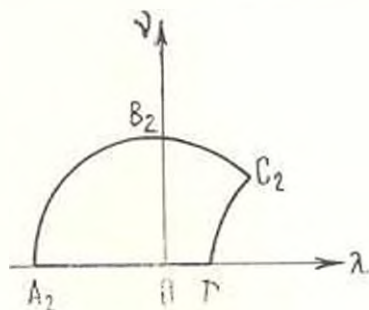
$$K = \frac{2z}{1 + z^2}, \quad K = \xi + i\eta, \quad z = \lambda + i\mu = re^{i\theta} \quad (1.22)$$

переводящее образ области дифракции в плоскости K на область $A_2B_2C_2D_2$ в комплексной плоскости $\lambda = r \cos \theta$, $\mu = r \sin \theta$, ограниченной отрезком $-1 < \lambda < \frac{1 - k_0^2}{k_0}$, $\mu = 0$, дугой окружности единичного радиуса $r = 1$ и дугой окружности

$$2r \cos \theta = k_0 (1 + \mu^2) \quad (1.23)$$

с центром в точке $\left(\frac{1}{k_0}, 0\right)$, которая пересекает окружность $\rho = 1$ в точке (k_0, k_0) под прямым углом (фиг. 3), здесь $k_0 = \sqrt{1 - k_1^2}$. Здесь следует отметить, что в результате этого отображения мы получаем область такой же формы, что и в обычной газодинамике [1]. Преобразуем (1.9) и (1.12) к переменным ρ, θ . Согласно (1.20) и (1.22) связь между плоскостями ξ, η и ρ, θ можно взять в виде

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{2\rho}{1 + \rho^2} \cos \theta \\ \eta &= \frac{2\rho}{1 + \rho^2} \sin \theta\end{aligned}\quad (1.24)$$



Фиг. 3.

Опуская громоздкие, но простые выкладки, получаем условие (1.9) в плоскости ρ, θ в виде

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int \frac{\partial P^*}{\partial s} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - M_1^2}} \frac{(4\pi_1 q_1^2 - B_1^2) c_1 q_1 \delta}{4\pi_1 q_1^2 c_1^2 + B_1^2 (q_1^2 - c_1^2)} \quad (1.25)$$

где

$$M_1 = M_1 + \frac{a_1^2 (1 - M_1^2)}{2M_1}$$

Условие (1.12) в плоскости ρ, θ запишется в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial P^* / \partial n}{\partial P^* / \partial s} &= \frac{[(A + k_0)(k_0^*)^2 - k_0 (k_0^*)^3] k_0 \operatorname{tg} \theta - B (k_0^*)^2 \operatorname{ctg} \theta}{(k_0^*)^2 (1 - k_0^2 \sec^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} \\ k_0^* &= \sqrt{1 - k_1^2}, \quad k_0^* = k_0 + a_1^2 (k_0^*)^2 / 4 k_0\end{aligned}\quad (1.26)$$

n, s отсчитываются по нормали и касательной к (1.23).

Интегральное условие на ударной волне CD дается формулой (1.13), где

$$\eta' = \eta \left(1 - \frac{a_1^2}{2}\right) = k_0 \operatorname{tg} \theta \quad (1.27)$$

Соотношение (1.27) имеет место на ударной волне.

На дуге A, B, C , давление непрерывно, следовательно,

$$P^* = 0 \quad \text{на } ABC \quad (1.28)$$

а на стенке

$$\frac{\partial P^*}{\partial n} = 0 \quad (1.29)$$

Таким образом, сложную краевую задачу о дифракции магнитогазодинамической ударной волны путем аппроксимации функции $B(z)$, примененной лишь в окрестности ударной волны C, D_1 , удалось привести в плоскости ρ, θ к следующей краевой задаче для функции P^+ . Ищется функция $P^+(\rho, \theta)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа в области, границы которой определяются соотношениями

$$-1 < \lambda < \frac{1-k_0^2}{k_0}, \quad \lambda^2 + \mu^2 = 1$$

и (1.23) (фиг. 3) при граничных условиях (1.25) — (1.29).

Эта граничная задача лишь значениями постоянных отличается от соответствующей газодинамической задачи, поэтому далее применяется метод Лайтхилла [1].

Так как в плоскости ρ, θ граничные условия неудобны, то применяются дополнительные конформные преобразования

$$Z = \zeta_1 + i\zeta_2 = (k_0 + ik_0)\left(i - \frac{2k_0}{z - (k_0 + ik_0)}\right), \quad z = re^{i\theta} \quad (1.30)$$

$$\zeta_1 = \frac{1}{2}(Z^2 + Z^{-2}), \quad Z^2 = \zeta_1 + (\zeta_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (1.31)$$

Преобразование (1.30) переводит область плоскости ρ, θ в первый квадрант с выброшенной четвертью единичного круга с центром в начале координат на плоскости Z . При этом дуге A, B, C_1 , на которой $\rho = 1$, соответствует часть мнимой оси O, D_1 , отрезок A, OD_1 переходит в дугу окружности единичного радиуса, а дуга C, D_1 окружности (1.23) переходит в часть действительной оси O, ζ_1 .

Граничные условия (1.25) — (1.29) преобразуются к переменным ζ_1, ζ_2 . Здесь приводится только условие (1.26), записанное в плоскости Z

$$\frac{\partial P^+ / \partial n}{\partial P^+ / \partial s} = \frac{[(A + k_0)(k_0^2)^2 - k_0(k_0^2)^2]k_0(Z^2 - 1)}{Z^2 + 1} - \frac{Bk_0(k_0^2)^2(Z^2 + 1)}{k_0(Z^2 - 1)} \\ \left(\frac{2(k_0^2)^2 Z}{Z^2 + 1} \right)$$

Преобразование (1.31) переводит область плоскости Z в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости ζ_1 , причем волне A, B, C_1 будет соответствовать отрезок действительной оси $-\infty < \zeta_1 < -1$, стенке будет соответствовать промежуток $-1 < \zeta_1 < 1$, а ударной волне C, D_1 — промежуток $1 < \zeta_1 < \infty$. Условие (1.26) на ударной волне C, D_1 в плоскости ζ_1 запишется в виде

$$\frac{\partial P^+ / \partial y_1}{\partial P^+ / \partial x_1} = \frac{\frac{Bk_0(k_0^2)^2}{(k_0^2)^2}(\zeta_1 - 1)}{(\zeta_1^2 + 2(\zeta_1 - 1))} - \frac{[(A + k_0)(k_0^2)^2 - k_0(k_0^2)^2](\zeta_1 - 1)}{(\zeta_1^2 + 2(\zeta_1 - 1))} \quad (1.32)$$

при $y_1 = 0$, $1 < x_1 < \infty$. На интервале $-1 < x_1 < 1$, $y_1 = 0$ имеем

$$\frac{\partial P^*}{\partial y_1} = 0 \quad (1.33)$$

причем в окрестности вершины угла условие (1.25) примет вид

$$\lim_{y_1 \rightarrow 0} \int \frac{\partial P^*}{\partial y_1} dx_1 = \frac{1}{1 - M_1^2} \frac{(4\pi_0 q_1^2 - B_1^2) c_1 q_1^2}{4\pi_0 q_1^2 c_1^2 - B_1^2 (q_1^2 - c_1^2)} \quad (1.34)$$

В плоскости z , вершине угла соответствует точка

$$z_1 = - \frac{(M_1 - k_0)^2 - (M_1^2 - 1)(k_0)^2}{(M_1 k_0 + 1)^2} \quad (x_0 > -1)$$

На интервале $-\infty < x_1 < -1$, $y_1 = 0$ имеем

$$\frac{\partial P^*}{\partial x_1} = 0 \quad (1.35)$$

Интегральное условие на $C_1 D_1$ примет вид

$$\int \frac{B}{k_0} \left(\frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial P^*}{\partial x_1} dx_1 = \lambda \quad (1.36)$$

Здесь использовано соотношение

$$z_1 = k_0 \left(\frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

имеющее место на $C_1 D_1$.

Таким образом, пришли к следующей краевой задаче: решить уравнение Лапласа для возмущенного давления $P^*(x_1, y_1)$ в области, представляющей собой верхнюю полуплоскость комплексной плоскости z , при граничных условиях (1.32) — (1.36). Решение для функции

$$w(z_1) = \frac{\partial P^*}{\partial y_1} + i \frac{\partial P^*}{\partial x_1}$$

находится методом Титхилла в виде [1]

$$w(z_1) = \frac{D E [E(z_1 - x_0) - 1]}{(z_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (z_1 - x_0) [z_1 - i(z_1 - 1)^{\frac{1}{2}}] [\beta_0 + i(z_1 - 1)^{\frac{1}{2}}]} \quad (1.37)$$

где D и E определяются из граничных условий (1.34) и (1.36)

$$D = \frac{c_1 q_1 (4\pi_0 q_1^2 - B_1^2) [z_1 + (1 - x_0)^{\frac{1}{2}}] [\beta_0 + (1 - x_0)^{\frac{1}{2}}] [1 - x_1^2]^{\frac{1}{2}}}{\pi [1 - M_1^2]^{\frac{1}{2}} [4\pi_0 q_1^2 c_1^2 - B_1^2 (q_1^2 - c_1^2)]}$$

$$\frac{(1 - M_1^2)^{\frac{1}{2}} (M_1 k_0 + 1)^2 [4\pi\rho_1 q_1^2 c_1^2 + B_1^2 (q_1^2 - c_1^2)]}{2B(M_1 + k_0)(1 - M_1^2)^{\frac{1}{2}} (4\pi\rho_1 q_1^2 - B_1^2) c_1 q_1} =$$

$$= F \frac{(a_* + \beta_*)(\beta_* + \gamma_*)}{\alpha_* \beta_*} - \frac{\alpha_* + \beta_* + \gamma_*}{\alpha_* \beta_* \gamma_*}$$

где $\gamma_* = 1 - x_0 = 2(M_1 + k_0)^2 / (M_1 k_0 + 1)^2$, а α_* и β_* определяются из уравнений

$$\alpha_* + \beta_* = \frac{1}{2} \frac{(k_0)^4}{|(A + k_0)(k_0^*)^2 - k_0(k_0^*)^2| (k_0^*)^2 - Bk_0(k_0^*)^2}$$

$$\alpha_* \beta_* = \frac{2Bk_0(k_0^*)^2}{|(A + k_0)(k_0^*)^2 - k_0(k_0^*)^2| (k_0^*)^2 - Bk_0(k_0^*)^2}$$

Таким образом, получено решение задачи о дифракции сильной магнитогазодинамической ударной волны около угла, близкого к развернутому, в форме (1.37).

Определим форму искривленной ударной волны CD (в линейной постановке для ударной волны имеем $\bar{z} = k_0$, $f(\tau) = 0$). Наклон касательной в произвольной точке ударной волны к оси $O\tau$ определяется по формуле

$$\frac{d\bar{z}}{d\tau} = f'(\tau)$$

Из соотношений, которые должны выполняться на косом скачке уплотнения в магнитной газодинамике [8], можно получить

$$\psi = - \left[1 + \frac{\bar{a}_1^2 (\tau + 1) M^2}{(\tau - 1) M^2 + 2} \right] f' \quad (1.38)$$

Согласно уравнению (1.10) на ударной волне CD , имеет место

$$\psi = \psi_0 + \int_0^{\tau} \frac{B}{\eta} d\tau^*$$

где ψ_0 есть значение ψ в точке D , которое равно $-\bar{\psi}$, то есть

$$\tau = -\bar{\tau} + \int_{\bar{\tau}}^{\tau} \frac{B}{\eta} d\tau^* \quad (1.39)$$

Подставляя (1.39) в (1.38), получим

$$\begin{aligned}
 f' &= \left[1 + \frac{\bar{a}_1^2 (\gamma + 1) M^2}{(\gamma - 1) M^2 + 2} \right]^{-1} \left(z - \int_0^z \frac{B}{\eta} \frac{\partial P^*}{\partial \eta} d\eta \right) = \\
 &= \left[1 + \frac{\bar{a}_1^2 (\gamma + 1) M^2}{(\gamma - 1) M^2 + 2} \right]^{-1} \left[z - \int_1^z \frac{B}{k_0} \left(\frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} \right)^{\frac{1}{2}} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{D\bar{\phi} [E(x_1 - x_0) - 1] (z_0 + \beta_*) (x_1 - 1)^{\frac{1}{2}}}{(x_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (x_1 - x_0) (z_0^2 + x_1 - 1) (\beta_0^2 + x_1 - 1)} dx_1 \right] \quad (1.40)
 \end{aligned}$$

Далее основное внимание уделяется исследованию полученного решения в окрестности фронта магнитозвуковой волны ABC .

§ 2. Уравнение магнитозвуковой волны ABC дается формулой (1.18). Полагая вблизи волны $z = z_0 + z'$, подставляя в уравнение (1.15) и учитывая (1.18), получим

$$z' = -i \sqrt{\frac{2}{-\beta^*(z_0) y}} \sqrt{t - t_{\text{инф}}} \quad (2.1)$$

Из формул (1.22), (1.30), (1.31), (2.1) вблизи части $-\infty < x_1 < -1$ действительной оси Ox_1 , соответствующей волне ABC , можно получить

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(l^2 + \frac{1}{l^2} \right), \quad y_1 = \frac{l_1(\theta)}{l} \sqrt{t - t_{\text{инф}}} \quad (2.2)$$

где

$$c_1 z_0 = \cos \theta, \quad k_0 = \cos \varphi, \quad l = i \frac{\cos \varphi - \cos \theta}{1 - \cos(\varphi - \theta)}$$

$$l_1(\theta) = \frac{\sin \varphi [(\cos \varphi - \cos \theta)^2 - [1 - \cos(\theta - \varphi)]^2] c_1}{\sin \theta [1 - \cos(\theta - \varphi)]^2 (\cos \varphi - \cos \theta)^2} \sqrt{\frac{2(\beta - \alpha_0 \beta')}{-\beta^*(\alpha_0)}}$$

Из формулы (1.37) на интервале $-\infty < x_1 < -1$ действительной оси плоскости z_1 , соответствующем магнитозвуковой волне ABC , имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P^*}{\partial y_1} &= a_1(\theta) \\
 a_1(\theta) &= \frac{D\bar{\phi} [E(x_1 - 1) - 1]}{(x_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (x_1 - x_0) [z_0 + (1 - x_1)^{\frac{1}{2}}] [\beta_0 + (1 - x_1)^{\frac{1}{2}}]} \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Из (2.3) с учетом того, что впереди волны ABC $P^* = 0$, получим

$$P = \rho_1 q_1 c_1 P^* = \frac{B(\theta)}{\sqrt{t}} \sqrt{z} \quad z = t - t_{\text{инф}} \quad (2.4)$$

где

$$B(\theta) = \rho_1 q_1 c_1 a_1(\theta) l_1(\theta)$$

Полученное линейное решение (2.4) имеет особенность на волне ABC , так как на ней производная $\frac{\partial P}{\partial t}$ бесконечна. Для устранения особенности линейного решения вблизи волны и получения равномерно точного нелинейного решения применим метод [2] замены в линейном решении (2.4) характеристической переменной. Тогда нелинейное решение в окрестности волны ABC получится в виде

$$P = \frac{B(\theta)}{1-t} \sqrt{y_0} \quad (2.5)$$

где $y_0 = \text{const}$ есть уже уравнение нелинейных характеристик позади волны ABC . Уравнение характеристики можно получить из уравнения для скорости поверхности волны $F(x, y, t) = 0$

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\text{grad } F|} = C_n + V_n \quad (2.6)$$

где $C_n + V_n$ есть нормальная скорость магнитозвуковой волны, V_n — нормальная к волне скорость частицы, причем имеет место уравнение в нелинейной задаче [8]

$$C_n^2 - (c_1^2 + a_1^2) C_n^2 + c_1^2 a_{1n}^2 = 0, \quad a_1^2 = \frac{B_1^2}{4\pi p_1}, \quad a_{1n}^2 = \frac{B_{1n}^2}{4\pi p_1} \quad (2.7)$$

C_n — нормальная скорость волны относительно частиц газа. Для скорости магнитозвуковой волны имеем в первом порядке относительно возмущенного давления P

$$C_n + V_n = c_n + U_n + x^0 P$$

где $c_n + U_n$ — нормальная скорость волны для невозмущенного потока. Значение x^0 можно получить из (2.7), записанного в первом порядке относительно P , с использованием условий совместности на волне или (1.16) в виде

$$x^0 = -\frac{\gamma+1}{2} \frac{c_n^2 - a_1^2}{c_1^2 + a_1^2 - 2c_n^2} + \frac{3}{2} \frac{c_1^2 - c_n^2}{c_1^2 + a_1^2 - 2c_n^2}$$

Из уравнения (2.6) в силу соотношений

$$|\text{grad } F| = -|\text{grad } z| \left| \frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{z,v} = \left| \frac{\partial F}{\partial t} \right| + \frac{\partial F}{\partial z}, \quad |\text{grad } z| = \frac{1}{c_n + U_n}$$

получится [9]

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{x^0}{c_n} P, \quad \text{где } c_n' = c_n + U_n \quad (2.8)$$

Подставляя (2.5) в (2.8) и интегрируя, получим уравнение нелинейных характеристик

$$\tau = -\sqrt{y_2} \int_0^t \frac{x^0}{c_n} \frac{B(\theta)}{\sqrt{t}} dt + y_2 \quad (2.9)$$

Формулы (2.5) и (2.9) дают параметрическое представление нелинейного решения в окрестности волны ABC . Условие на слабой ударной волне можно получить в виде [9]

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{x^0}{c_n} \frac{p}{2} \quad (2.10)$$

Подставляя (2.9) в (2.10) и интегрируя, получим формулу, выражающую p через t на ударной волне

$$p = \frac{3}{2} \frac{x^0}{c_n} B(\theta) \sqrt{t} \quad (2.11)$$

Из этой формулы видно, что ударная волна существует при $B(\theta) > 0$, то есть при $\theta < 0$, при $B(\theta) < 0$, $\theta > 0$ имеет место непрерывный переход (действительной ударной волны не существует). Давление находится по формуле (2.5) в виде

$$p = \frac{3}{2} \frac{x^0}{c_n} B^2(\theta) \quad (2.12)$$

то есть p есть малая порядка δ^2 . Уравнение ударной волны получится в виде

$$\tau = -\frac{3}{4} \left(\frac{x^0}{c_n} \right)^2 B^2(\theta) t = t - t_{\text{авф}}, \quad (2.13)$$

то есть ударная волна находится впереди магнитозвуковой волны $\tau = 0$. Вблизи точки C , в которой $\theta = \pi$, можно полагать $\theta - \pi = \theta'$,

$$t \approx t \frac{2 \sin \varphi}{\varphi}, \quad x_1 \approx \frac{1}{2} B$$

и, согласно (2.2), (2.3), (2.4), получится

$$\frac{B(\theta)}{2} = \frac{2DEq_1 c_1 \theta'}{(a_2 \theta' + \sqrt{2} \sin \varphi) (\theta' \varphi_2 + \sqrt{2} \sin \varphi) (\sin \varphi + \theta' \cos \varphi)}$$

откуда видно, что при $\theta' = 0$, то есть в точке C , $B(\theta) = 0$ и ударная волна в этой точке затухает. В газовой динамике этот факт отмечен в [10].

В заключение автор благодарит А. Г. Багдоева за постановку задачи, обсуждение результатов и ценные советы.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 28 II 1980

Լ. Դ. ԱԶԱՏԻԱՆ

ՀԵՂՈՒԿԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՓԹՎԱՆԻՆ ՄՈՏԻԿ
ԱՆԿՅԱՆ ՇՈՒՐՋԸ ՈՒԺԵՂ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱԶԱԳԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՀԱՐՎԱՄԱՅԻՆ
ԱՂԻՔԻ ԳԻՖՐԱԿՑԻԱՅԻ ԺԱՄԱՆԱԿ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքում դիտարկվում է ուժեղ մագնիսազաղաղիչնամիկական հարվածային ալիքի դիֆրակցիայի խնդիրը պատի շուրջը, որի կողմերը կազմում են շարժման ուղղության նկատմամբ ($\pi - \delta$) ուռուցիկ անկյուն: Հաստատուն ինտենսիվություն ունեցող հարվածային ալիքի նստում շարժման պարամետրերի համար գտնված են անալիտիկ առնչություններ: Սմիրնով-Սոբոլևի մեթոդի կիրառումից հետո անալիտիկ ֆունկցիաների որոշման համար ստացվում է եզրային խնդիր, որը լուծվում է Լայթիլիի մեթոդով: Կատարվում է ստացված դժային լուծման եզակիության վերացումը արագ մագնիսակուստիկ ալիքի վրա, ինչպես նաև ուսումնասիրվում է դժային լուծումը զանդաղ մագնիսակուստիկ ալիքի եզակի կետի շրջակայքում:

THE DETERMINATION OF MOTION PARAMETERS
OF THE FLUID IN THE PROBLEM FOR DIFFRACTION
OF A STRONG MAGNETOGASDYNAMIC SHOCK WAVE
AT THE ANGLE CLOSE TO A BLUNT ONE

L. D. AZATIAN

S u m m a r y

The problem for diffraction of a strong magnetogasdynamic shock wave near the wall, with sides forming $(\pi - \delta)$ angle, convex to the flow, is considered. The analytical relations for the motion parameters behind the shock wave of constant strength are found. Applying the Smirnov—Sobolev method, the boundary value problem for determination of analytical functions is obtained and solved by the Lighthill method. The elimination of the singularity of the obtained linear solution on a fast magnetoacoustic wave is carried out.

The investigation of the linear solution in the vicinity of a singular point of a slow magnetoacoustic wave is also made.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lighthill M. J. The diffraction of blast. I. Proceedings of the Royal Society, London, A 198, 1949.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
3. Рысков О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 5.
4. Григорян С. С. О движении тонкого твердого тела под действием сильной ударной волны. Изв. АН СССР, ОИИ, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
5. Лудлофф. Аэродинамика взрывных волн. Проблемы механики. Сб. статей под редакцией Р. Мизеса и Т. Кармана, М., Изд. ИЛ, 1955.
6. Колган М. Н., Коробейников В. И., Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Механика разреженного газа и магнитная гидродинамика. Механика в СССР за 50 лет, механика жидкости и газа, т. 2, М., «Наука», 1970.
7. Франк и Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, Л.—М., ОНТИ, 1937.
8. Калихан Л. Е. Элементы магнитной газодинамики. М., Атомиздат, 1964.
9. Багдоев А. Г., Даноян З. И. Исследование движения среды в окрестности точки касания ударных волн. Ж. вычис. матем. и матем. физики, 1972, т. 12, № 6.
10. Tal H. S. Strength of reflected shock in Mach reflection. J. Aeronaut. Sci., 1951, v. 18, № 11.
11. Азатян Л. Д., Багдоев А. Г. Некоторые задачи дифракции волн в электропроводящей жидкости. Краткие тезисы докладов VI Всесоюзного симпозиума по «Теории дифракции и распространению волн», кн. 2, Ереван, 1973.
12. Азатян Л. Д., Багдоев А. Г. Проникновение клина в электропроводящую жидкость в присутствии магнитного поля. Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1976, т. XXIX, № 2.
13. Азатян Л. Д. Задача о дифракции сильной магнитогазодинамической ударной волны около клина. Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 5.

Л. В. АБРАМЯН

К УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

В настоящей работе рассматривается устойчивость равномерно сжатой в одном направлении ортотропной прямоугольной пластинки с конечной сдвиговой жесткостью при следующих граничных условиях: стороны, к которым приложены усилия, свободно оперты, а на двух других заданы смешанные граничные условия: часть кромки защемлена, а остальная часть шарнирно оперта.

Подобные задачи для изотропной пластинки без учета поперечных сдвигов рассматривались в работах [1], [2].

1. Уравнения устойчивости ортотропной пластинки конечной сдвиговой жесткости имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{12P}{h^3} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \\ \left[B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y^2} \right] w - \frac{h^2}{10} \left[a_{33} \left(B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi + a_{44} (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right] + \varphi = 0 \\ \left[B_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x^2} \right] w - \frac{h^2}{10} \left[a_{44} \left(B_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varphi + a_{33} (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right] + \varphi = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь сохранены обозначения [3].

Имеем следующие граничные условия (фиг. 1):

на краях $x = 0, a$

$$w = \varphi = 0 \quad (1.2)$$

$$M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{h^2}{10} \left(a_{33} D_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_{44} D_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0$$

на краях $y = \pm b$

$$w = \varphi = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq c$$

$$w = \varphi = 0 \quad \text{при } c < x \leq a \quad (1.3)$$

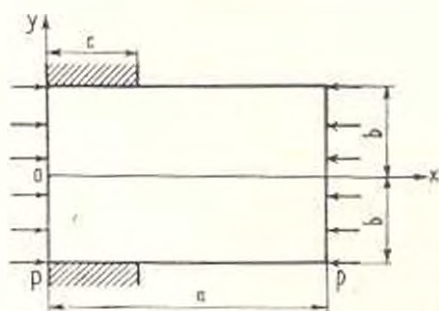
$$M_x = -D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h^2}{10} \left(a_{44} D_{22} \frac{\partial \psi}{\partial y} + a_{22} D_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0$$

Решение системы (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2), ищем в виде рядов

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x$$

$$\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(y) \cos \frac{m\pi}{a} x \quad (1.4)$$

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x$$



Фиг. 1.

Подставляя (1.4) в (1.1) и исключая функции $\Phi_m(y)$ и $\psi_m(y)$, придем к следующему дифференциальному уравнению для $W_m(y)$:

$$\begin{aligned} h^2 W_m^{VI}(y) + \left[h^2 \lambda^2 \left\{ -\frac{a_{44}}{a_{55}} - \frac{B_{11}}{B_{66}} + \frac{B_{12}}{B_{22}} \left(2 + \frac{B_{12}}{B_{66}} \right) \right\} - \frac{10}{a_{22} B_{66}} + \right. \\ \left. + \frac{12P\lambda^2 h a_{44}}{10} \right] W_m^{IV}(y) + \lambda^2 \left[h^2 \lambda^2 \left\{ \frac{a_{44}}{a_{55}} \left| \frac{B_{11}}{B_{66}} - \frac{B_{12}}{B_{22}} \left(2 + \frac{B_{12}}{B_{66}} \right) \right| + \frac{B_{11}}{B_{22}} \right\} + \right. \\ \left. + \frac{20}{a_{22} B_{22}} \left(2 + \frac{B_{12}}{B_{66}} \right) - \frac{12P}{h^2} \left| \frac{a_{44} h^4 \lambda^2}{10} \right| \left| \frac{B_{11}}{B_{66}} - \frac{B_{12}}{B_{22}} \left(2 + \frac{B_{12}}{B_{66}} \right) \right| + \right. \\ \left. + \frac{h^2}{B_{11}} \left(1 + \frac{a_{44}}{a_{55}} \frac{B_{22}}{B_{66}} \right) \right] W_m^{II}(y) + \frac{\lambda^2}{a_{55} B_{22} B_{66}} (10 + h^2 \lambda^2 a_{44} B_{66}) \left[-B_{11} \lambda^2 + \right. \\ \left. + \frac{12P}{10h^2} (10 + h^2 \lambda^2 B_{11} a_{55}) \right] W_m(y) = 0 \quad (1.5) \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{m\pi}{a}$$

Учитывая, что в уравнении (1.5) участвуют лишь четные производные, характеристическое уравнение представим в виде ($W_m(y) = e^{vy}$)

$$Z^4 + a_1 Z^2 + a_2 Z + a_3 = 0 \quad (1.6)$$

где

$$Z = h^2 v^2 \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{10}{a_{35} B_{66}} - \mu \left[\frac{a_{44}}{a_{35}} + \frac{B_{11}}{B_{66}} - \frac{B_{12}}{B_{22}} \left(2 + \frac{B_{12}}{B_{66}} \right) - \frac{12P a_{44}}{10h} \right] \\
a_2 &= \mu \left[\frac{20}{a_{35} B_{22}} \left(2 + \frac{B_{12}}{B_{66}} \right) + \mu \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} + \frac{a_{44}}{a_{35}} \left[\frac{B_{11}}{B_{66}} - \frac{B_{12}}{B_{22}} \left(2 + \frac{B_{12}}{B_{66}} \right) \right] \right) \right] - \\
&\quad - \frac{12P}{h} \left\{ \frac{1}{10} \left[\frac{B_{11}}{B_{66}} - \frac{B_{12}}{B_{22}} \left(2 + \frac{B_{12}}{B_{66}} \right) \right] + \frac{1}{B_{22}} \left(1 + \frac{a_{44}}{a_{35}} \frac{B_{22}}{B_{66}} \right) \right\} \\
a_3 &= \mu \frac{B_{11}}{a_{35} B_{22} B_{66}} \left(10 + \mu a_{11} B_{66} \right) \left[\frac{12P}{10h B_{11}} (10 + \mu B_{11} a_{35}) - \mu \right] \\
\mu &= h^2 \epsilon^2
\end{aligned} \tag{1.8}$$

При фиксированных значениях P и упругих коэффициентов характер корней уравнения (1.6) находится в зависимости от числа полутолщины m . Численное исследование показывает, что при этом возможны три случая:

а) $1 \leq m \leq m_*$, один из корней уравнения (1.6) отрицательный, а два других — положительные. Этот вариант для случая неупругой прямоугольной пластинки с однородными граничными условиями подробно исследован в работе [4];

б) $m_1 < m \leq m_*$, все три корня положительные;

в) $m > m_*$, действительный корень — положительный, а два других — комплексно-сопряженные.

Понятно, что m_1 и m_* в зависимости от геометрических и физических параметров пластинки принимают различные значения.

Общие решения (1.5) для каждого из перечисленных случаев будут:

$$\begin{aligned}
\text{а) } W_m(y) &= C_m^{(1)} \sin \omega_1 y + C_m^{(2)} \cos \omega_1 y + C_m^{(3)} \operatorname{sh} \omega_2 y + \\
&\quad + C_m^{(4)} \operatorname{ch} \omega_2 y + C_m^{(5)} \operatorname{sh} \omega_3 y + C_m^{(6)} \operatorname{ch} \omega_3 y
\end{aligned} \tag{1.9}$$

где

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{\sqrt{-Z_1}}{h} = \frac{1}{h} \left[2 \sqrt{-\frac{\xi}{3}} \cos \left(\frac{\vartheta}{3} - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{a_1}{3} \right]^{1/2}, \\
\omega_2 &= \frac{\sqrt{Z_2}}{h} = \frac{1}{h} \left[-2 \sqrt{-\frac{\xi}{3}} \cos \left(\frac{\vartheta}{3} + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{a_1}{3} \right]^{1/2}, \\
\omega_3 &= \frac{\sqrt{Z_3}}{h} = \frac{1}{h} \left[2 \sqrt{-\frac{\xi}{3}} \cos \frac{\vartheta}{3} - \frac{a_1}{3} \right]^{1/2}, \quad \xi = a_2 - \frac{a_1^2}{3}, \\
q &= 2 \left(\frac{a_1}{3} \right)^3 - \frac{a_1 a_2}{3} + a_3, \quad \cos \vartheta = -\frac{q}{2 \sqrt{-\left(\frac{\xi}{3} \right)^3}}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } W_m(y) = & C_m^{(1)} \operatorname{sh} \omega_1 y + C_m^{(2)} \operatorname{ch} \omega_1 y + C_m^{(3)} \operatorname{sh} \omega_2 y + \\ & + C_m^{(4)} \operatorname{ch} \omega_2 y + C_m^{(5)} \operatorname{sh} \omega_3 y + C_m^{(6)} \operatorname{ch} \omega_3 y \end{aligned} \quad (1.11)$$

где ω_2 и ω_3 , как и в случае а), принимают значения (1.10), а ω_1 будет:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{Z_1}}{h} = \frac{1}{h} \left[-2 \sqrt{-\frac{\xi}{3}} \cos\left(\frac{\delta}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{a_1}{3} \right]^{1/2}, \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \text{в) } W_m(y) = & C_m^{(1)} \operatorname{sh} \omega_1 y + C_m^{(2)} \operatorname{ch} \omega_1 y + (C_m^{(3)} \cos ty + C_m^{(4)} \sin ty) \operatorname{ch} sy + \\ & + (C_m^{(5)} \cos ty + C_m^{(6)} \sin ty) \operatorname{sh} sy \end{aligned} \quad (1.13)$$

где

$$\omega_1 = \frac{1}{h} \sqrt{-2\alpha - a_1} \quad (1.14)$$

$$s = \frac{1}{h} \left[\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \eta^2}}{2} \right]^{1/2}, \quad t = \frac{1}{h} \frac{\eta}{|2(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \eta^2})|^{1/2}}$$

здесь α и η определяются следующим образом:

при $\xi > 0$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\xi}{3}} \operatorname{ctg} 2\delta - \frac{a_1}{3}, \quad \eta = \sqrt{\xi} \operatorname{cosec} 2\delta$$

$$\operatorname{tg} \delta = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}}, \quad \operatorname{tg} \pi = \frac{2}{q} \sqrt{\left(\frac{\xi}{3}\right)^3}$$

при $\xi < 0$

$$\alpha = \sqrt{-\frac{\xi}{3}} \operatorname{cosec} 2\delta - \frac{a_1}{3}, \quad \eta = \sqrt{-\xi} \operatorname{ctg} 2\delta$$

$$\operatorname{tg} \delta = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}}, \quad \sin \pi = \frac{2}{q} \sqrt{\left(-\frac{\xi}{3}\right)^3}$$

В дальнейшем, при определении критических усилий из бесконечных систем уравнений (1.25), вполне достаточно оставить столько уравнений, число которых меньше, чем m . Только поэтому формулы для случая $m > m_2$ не приводятся.

Имея выражения $W_m(y)$, для определения $\Phi_m(y)$ и $\psi_m(y)$ получаем неоднородные дифференциальные уравнения. Не вдаваясь в подробности, приводим общие решения этих уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } \Phi_m(y) = & C_m^{(1)} A_1 \sin \omega_1 y + C_m^{(2)} A_1 \cos \omega_1 y + \Phi_m^2(y) \\ \psi_m(y) = & -C_m^{(1)} B_1 \cos \omega_1 y + C_m^{(2)} B_1 \sin \omega_1 y + \psi_m^1(y) \\ \text{б) } \Phi_m(y) = & C_m^{(1)} A_1' \operatorname{sh} \omega_1 y + C_m^{(2)} A_1' \operatorname{ch} \omega_1 y + \Phi_m^2(y) \\ \psi_m(y) = & C_m^{(1)} B_1' \operatorname{ch} \omega_1 y + C_m^{(2)} B_1' \operatorname{sh} \omega_1 y + \psi_m^1(y) \end{aligned} \quad (1.15)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\Phi_m^I(y) &= C_m^{(3)} A_2 \operatorname{sh} \omega_2 y + C_m^{(4)} A_2 \operatorname{ch} \omega_2 y + C_m^{(5)} A_3 \operatorname{sh} \omega_3 y + C_m^{(6)} A_3 \operatorname{ch} \omega_3 y \\ \psi_m^I(y) &= C_m^{(3)} B_2 \operatorname{ch} \omega_2 y + C_m^{(4)} B_2 \operatorname{sh} \omega_2 y + C_m^{(5)} B_3 \operatorname{ch} \omega_3 y + C_m^{(6)} B_3 \operatorname{sh} \omega_3 y \\ A_1 &= \frac{-g_0 + g_1 \omega_1^2}{-G_0 + G_1 \omega_1^2}, \quad A_1 = \frac{g_0 + g_1 \omega_1^2}{G_0 + G_1 \omega_1^2}, \quad A_2 = \frac{g_0 + g_1 \omega_1^2}{(G_0 + G_1 \omega_1^2)} \\ A_3 &= \frac{g_0 + g_1 \omega_1^2}{G_0 + G_1 \omega_1^2}, \quad B_i = \frac{\lambda}{\omega_i} \left(A_i - \frac{12P_i}{h^2} \right) \quad (i = 1, 2, 3)\end{aligned}\quad (1.16)$$

$$\begin{aligned}g_0 &= \left| \frac{12Pa_{44}}{10h} \left(\frac{B_{12} + B_{22}}{B_{44}} \right) - \frac{B_{22}}{B_{44}} \right| p^2, \quad g_1 = h^2 p^2 \frac{B_{12} + 2B_{22}}{B_{44}} \\ G_0 &= -\frac{a_{33} h^2}{10} \left| \frac{10}{a_{33} B_{44}} + p \left(\frac{B_{12}}{B_{44}} - \frac{a_{44}}{a_{33}} \frac{B_{12} + B_{22}}{B_{44}} \right) \right|, \quad G_1 = \frac{a_{33} h^2}{10}\end{aligned}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.3), для коэффициентов $C_m^{(1)}$ и $C_m^{(2)}$ получаем следующие системы уравнений:

1) для асимметричных форм потери устойчивости

$$\begin{aligned}& \sum_{m=1}^{m_1} C_m^{(1)} \frac{\sin \omega_1 b}{A_3 - A_2} [(A_2 - A_1) (\omega_3 \operatorname{cth} \omega_3 b - \omega_2 \operatorname{cth} \omega_2 b) + \\& + (A_2 - A_2') (\omega_1 \operatorname{cth} \omega_1 b - \omega_2 \operatorname{cth} \omega_2 b)] \sin \frac{m\pi}{a} x + \\& + \sum_{m=m_1+1}^{m_2} C_m^{(1)} \frac{\sin \omega_1 b}{A_3 - A_2} [(A_2 - A_1) (\omega_3 \operatorname{cth} \omega_3 b - \omega_2 \operatorname{cth} \omega_2 b) + \\& + (A_2 - A_2') (\omega_1 \operatorname{cth} \omega_1 b - \omega_2 \operatorname{cth} \omega_2 b)] \sin \frac{m\pi}{a} x + \sum_{m=m_1+1}^{\infty} \dots = 0 \\& (0 \leq x \leq c)\end{aligned}\quad (1.17)$$

$$\begin{aligned}& \sum_{m=1}^{m_1} C_m^{(1)} \frac{\sin \omega_1 b}{A_3 - A_2} [(A_2 - A_1) (M_1 - M_2) + (A_2 - A_2') (M_1 - M_2)] \sin \frac{m\pi}{a} x + \\& + \sum_{m=m_1+1}^{m_2} C_m^{(1)} \frac{\sin \omega_1 b}{A_3 - A_2} [(A_2 - A_1) (M_1 - M_2) + \\& + (A_2 - A_2') (M_1 - M_2)] \sin \frac{m\pi}{a} x + \dots = 0 \\& (c < x \leq 0)\end{aligned}$$

2) для симметричных форм потери устойчивости

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(2)} \frac{\cos \omega_1 b}{A_2 - A_2} [(A_2 - A_1) (\omega_1 \operatorname{th} \omega_1 b - \omega_2 \operatorname{th} \omega_2 b) - (A_1 - A_2) (\omega_1 \operatorname{tg} \omega_1 b + \\ + \omega_2 \operatorname{th} \omega_2 b)] \sin \frac{m\pi}{a} x + \sum_{n=n_1+1}^{\infty} C_n^{(2)} \frac{\operatorname{ch} \omega_1 b}{A_1 - A_2} [(A_2 - A_1) (\omega_1 \operatorname{th} \omega_1 b - \omega_2 \operatorname{th} \omega_2 b) + \\ + (A_1 - A_2) (\omega_1 \operatorname{th} \omega_1 b - \omega_2 \operatorname{th} \omega_2 b)] \sin \frac{m\pi}{a} x + \dots = 0 \\ (0 \leq x \leq c) \quad (1.18)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(2)} \frac{\cos \omega_1 b}{A_2 - A_2} [(A_2 - A_1) (M_1 - M_2) + (A_1 - A_2) (M_1 - M_2)] \sin \frac{m\pi}{a} x + \\ + \sum_{n=n_1+1}^{\infty} C_n^{(2)} \frac{\operatorname{ch} \omega_1 b}{A_1 - A_2} [(A_2 - A_1) (M_1 - M_2) + \\ + (A_1 - A_2) (M_1 - M_2)] \sin \frac{m\pi}{a} x + \dots = 0 \\ (c < x \leq a)$$

где

$$M_1 = D_{22} \omega_1^2 + \frac{h^2}{10} (a_{44} D_{22} B_1 \omega_1 - a_{55} D_{12} A_1) \\ M_1' = -D_{22} \omega_1^2 + \frac{h^2}{10} (a_{44} D_{22} B_1 \omega_1 - a_{55} D_{12} A_1) \\ M_2 = -D_{22} \omega_2^2 + \frac{h^2}{10} (a_{44} D_{22} B_2 \omega_2 - a_{55} D_{12} A_2) \\ M_2' = -D_{22} \omega_2^2 + \frac{h^2}{10} (a_{44} D_{22} B_2 \omega_2 - a_{55} D_{12} A_2) \quad (1.19)$$

а для коэффициентов $C_m^{(3)}$, $C_m^{(4)}$, $C_m^{(5)}$, $C_m^{(6)}$ имеем:

$$\text{а) } C_m^{(3)} = C_m^{(1)} \frac{\sin \omega_1 b}{\operatorname{sh} \omega_2 b} \frac{A_1 - A_2}{A_2 - A_2}, \quad C_m^{(5)} = C_m^{(1)} \frac{\sin \omega_1 b}{\operatorname{sh} \omega_1 b} \frac{A_2 - A_1}{A_1 - A_1} \\ C_m^{(4)} = C_m^{(2)} \frac{\cos \omega_1 b}{\operatorname{ch} \omega_2 b} \frac{A_1 - A_2}{A_2 - A_2}, \quad C_m^{(6)} = C_m^{(2)} \frac{\cos \omega_1 b}{\operatorname{ch} \omega_1 b} \frac{A_2 - A_1}{A_1 - A_1} \quad (1.20) \\ \text{б) } C_m^{(3)} = C_m^{(1)} \frac{\operatorname{sh} \omega_1 b}{\operatorname{sh} \omega_2 b} \frac{A_1 - A_2}{A_2 - A_2}, \quad C_m^{(5)} = C_m^{(1)} \frac{\operatorname{sh} \omega_1 b}{\operatorname{sh} \omega_1 b} \frac{A_2 - A_1}{A_1 - A_2} \\ C_m^{(4)} = C_m^{(2)} \frac{\operatorname{ch} \omega_1 b}{\operatorname{ch} \omega_2 b} \frac{A_1 - A_2}{A_2 - A_2}, \quad C_m^{(6)} = C_m^{(2)} \frac{\operatorname{ch} \omega_1 b}{\operatorname{ch} \omega_1 b} \frac{A_2 - A_1}{A_1 - A_2}$$

Учитывая, что наименьшее значение критического усилия получается в случае симметрии по отношению к оси x , в дальнейшем будем рассматривать лишь систему (1.18). В то же время отметим, что все дальнейшее исследование системы (1.18) аналогичным образом можно распространить и на (1.17).

Вводя обозначения

$$X_m = C_m^{(2)} \frac{\cos \omega_1 b}{A_3 - A_2} \frac{(A_2 - A_1)(M_3 - M_2) + (A_3 - A_2)(M_1 - M_2)}{m} \quad (1 \leq m \leq m_1) \quad (1.21)$$

$$X_m = C_m^{(2)} \frac{\operatorname{ch} \omega_1 b}{A_3 - A_2} \frac{(A_2 - A_1)(M_3 - M_2) + (A_3 - A_2)(M_1 - M_2)}{m} \quad (m_1 < m \leq m_2)$$

$$\varphi = \frac{\pi x}{a}, \quad \psi = \frac{\pi \zeta}{b}$$

из (1.18) получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_m (1 - N_m) \sin m \varphi = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \beta) \quad (1.22)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m X_m \sin m \psi = 0 \quad (\beta < \psi \leq \pi)$$

где

$$N_m = 1 - m \frac{(A_2 - A_1)(\omega_3 \operatorname{th} \omega_3 b - \omega_2 \operatorname{th} \omega_2 b) - (A_3 - A_2)(\omega_1 \operatorname{tg} \omega_1 b + \omega_2 \operatorname{th} \omega_2 b)}{(A_2 - A_1)(M_3 - M_2) + (A_3 - A_2)(M_1 - M_2)} \quad (1 \leq m \leq m_1) \quad (1.23)$$

$$N_m = 1 - m \frac{(A_2 - A_1)(\omega_3 \operatorname{th} \omega_3 b - \omega_2 \operatorname{th} \omega_2 b) + (A_3 - A_2)(\omega_1 \operatorname{th} \omega_1 b - \omega_2 \operatorname{th} \omega_2 b)}{(A_2 - A_1)(M_3 - M_2) + (A_3 - A_2)(M_1 - M_2)} \quad (m_1 < m \leq m_2)$$

Продифференцируем первое уравнение (1.22) по φ , умножим на $\cos \varphi / 2 \cdot (\cos \varphi - \cos \theta)^{-1/2}$, а затем проинтегрируем по φ от 0 до θ . Второе уравнение умножим на $\cos \psi / 2 \cdot (\cos \psi - \cos \varphi)^{-1/2}$ и проинтегрируем по φ от θ до π .

После перечисленных преобразований, используя формулы для интегральных представлений полиномов Лежандра [5]

$$y_m(\cos \theta) = P_{m-1}(\cos \theta) + P_m(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos m\varphi \cdot \cos \varphi/2}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} d\varphi =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\varphi \cdot \cos \varphi/2}{\sqrt{\cos \theta - \cos \varphi}} d\varphi$$

$$z_m(\cos \theta) = P_{m-1}(\cos \theta) - P_m(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\varphi \cdot \sin \varphi/2}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} d\varphi =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos m\varphi \cdot \sin \varphi/2}{\sqrt{\cos \theta - \cos \varphi}} d\varphi$$

парные ряды-уравнения сведем к виду

$$\sum_{m=1}^{\infty} m X_m (1 - N_m) y_m(\cos \theta) = 0 \quad (0 < \theta < \beta) \quad (1.24)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m X_m y_m(\cos \theta) = 0 \quad (\beta < \theta < \pi)$$

Согласно [6] для определения неизвестных коэффициентов X_m получим следующую бесконечную систему линейных однородных алгебраических уравнений:

$$X_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} N_m X_m \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.25)$$

где

$$a_{nm} = \frac{m}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_m(\cos \theta) y_n(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta =$$

$$= \frac{m}{2} \frac{ny_m(\cos \beta) z_n(\cos \beta) - my_n(\cos \beta) z_m(\cos \beta)}{n^2 - m^2} \quad (1.26)$$

$$a_{nn} = \frac{n}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_n^2(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{1}{4} \left[2 - 2P_{n-1}(\cos \beta) P_n(\cos \beta) + \right.$$

$$\left. + P_{n-1}^2(\cos \beta) - P_n^2(\cos \beta) - 4 \sum_{k=1}^{n-1} P_k(\cos \beta) [\cos \beta P_k(\cos \beta) - P_{k+1}(\cos \beta)] \right]$$

Для существования нетривиальных решений необходимо, чтобы определитель системы однородных уравнений

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} N_m X_m - X_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.27)$$

разнялся нулю. Раскрывая определитель, составленный из усеченной системы уравнений (1.27), получим трансцендентное уравнение, решения которого являются собственными значениями рассматриваемой задачи. Наименьшее собственное значение будет критическим усилием.

2. Так как в случае ортотропного материала зависимость корней ω характеристического уравнения от параметра m неявная, то доказать сходимость процесса итераций не удастся. Покажем это на примере трансверсально изотропного материала [7] ($B_{11} = B_{22} = B_{12} + 2B_{66} = E/(1 - \nu^2)$, $B_{12} + B_{66} = E/2(1 - \nu)$, $a_{11} = a_{22} = 1/G'$).

Используя решение [8] для трансверсально изотропной пластинки и удовлетворяя граничным условиям (1.3), после преобразований, аналогичных преобразованиям § 1, парные ряды, представляющие симметричную форму потери устойчивости, опять приводим к системе (1.22). Выражение N_m в этом случае (при $m > m_1$) будет

$$N_m = 1 - m \frac{\omega_1 \operatorname{th} \omega_1 b - \omega_2 \operatorname{th} \omega_2 b}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \frac{\pi \left(2 - \frac{kP}{2I} \right)}{a} \quad (2.1)$$

где

$$\omega_{1,2} = \left[\lambda^2 \left(1 - \frac{kP}{2D} \right) \pm \sqrt{\frac{P\lambda^2}{D} \left(1 + \frac{k^2 P \lambda^2}{4D} \right)} \right]^{1/2} \quad (2.2)$$

Здесь сохранены обозначения [3].

После несложных преобразований выражения (2.2) приводим к виду

$$\omega_1 = \lambda \left(1 - \frac{kP}{2D} - \frac{1}{2k\lambda^2} \right), \quad \omega_2 = \lambda \left(1 + \frac{1}{2k\lambda^2} \right) \quad (2.3)$$

Учитывая (2.3), а также то обстоятельство, что при больших m $\operatorname{th} \omega_1 b \rightarrow \operatorname{th} \omega_2 b \rightarrow 1$, из (2.1) получаем, что N_m имеет экспоненциальный порядок убывания, то есть

$$N_m \approx e^{-\tilde{m}}, \quad \text{где } \tilde{m} = 2mb/a \quad (2.4)$$

Далее, поскольку функции $y_m(x)$ и $z_m(x)$ являются линейными комбинациями полиномов Чебышева, то при больших m для них будем иметь следующую оценку [5], [6]

$$\frac{|y_m(x)|}{|z_m(x)|} \leq \frac{1}{m^{1/2}}, \quad (m \gg 1) \quad |x| < 1 - \varepsilon \quad (2.5)$$

Процесс итераций будет сходящимся, если, согласно [9], определитель бесконечной матрицы коэффициентов системы (1.27) будет нормальным. Для этого необходимо, чтобы ряд $\sum_{n, m=1}^{\infty} |a_{nm} \Lambda_m|$ был сходящимся. Это требование можно заменить условием сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{nn} N_n| \quad \text{и} \quad \sum_{\substack{n, m=1 \\ n \neq m}}^{\infty} (a_{nm} N_m)^2$$

Приведем именно такое доказательство, то есть докажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{nn} N_n| < \infty \quad \sum_{\substack{n, m=1 \\ n \neq m}}^{\infty} a_{nm}^2 N_m^2 < \infty$$

С учетом (1.26), (2.4) и (2.5) получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{nn} N_n| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} N_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_n^2 (\cos \theta) \lg \frac{\theta}{2} d\theta < \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\delta} = \frac{e^{-\delta}}{1 - e^{-\delta}} < \infty \\ \sum_{\substack{n, m=1 \\ n \neq m}}^{\infty} a_{nm}^2 N_m^2 &= \sum_{\substack{n, m=1 \\ n \neq m}}^{\infty} \frac{m^2}{4} \frac{(ny_m z_n - my_n z_m)^2}{(n^2 - m^2)^2} e^{-2m\delta} = \\ &= \sum_{\substack{n, m=1 \\ n \neq m}}^{\infty} \frac{m^2}{4} \frac{n^2 y_n^2 z_n^2 - 2nmy_n y_m z_n z_m + m^2 y_n^2 z_m^2}{(n^2 - m^2)^2} e^{-2m\delta} < \\ &< \sum_{\substack{n, m=1 \\ n \neq m}}^{\infty} \frac{m^2}{4} \frac{n^2 \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m} + 2nm \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m} + m^2 \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}}{(n^2 - m^2)^2} e^{-2m\delta} = \\ &= \sum_{\substack{n, m=1 \\ n \neq m}}^{\infty} \frac{m^2}{4} \frac{(n+m)^2 e^{-2m\delta}}{nm(n^2 - m^2)^2} = \frac{1}{4} \sum_{\substack{n, m=1 \\ n \neq m}}^{\infty} \frac{m e^{-2m\delta}}{n(n-m)^2} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-2m\delta} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} \frac{1}{n(n-m)^2} < \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2m\delta} \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{3}{m^2} \right) < \infty \end{aligned}$$

3. Приведем некоторые результаты численных вычислений, которые проводились на ЭВМ «Минск-22» с программой, составленной на языке «Алгол». Были введены следующие обозначения [3]:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = k_1, \quad \frac{E_1}{G_{12}} = k_2, \quad \frac{E_1}{G_{13}} = \frac{E_2}{G_{23}} = k_3$$

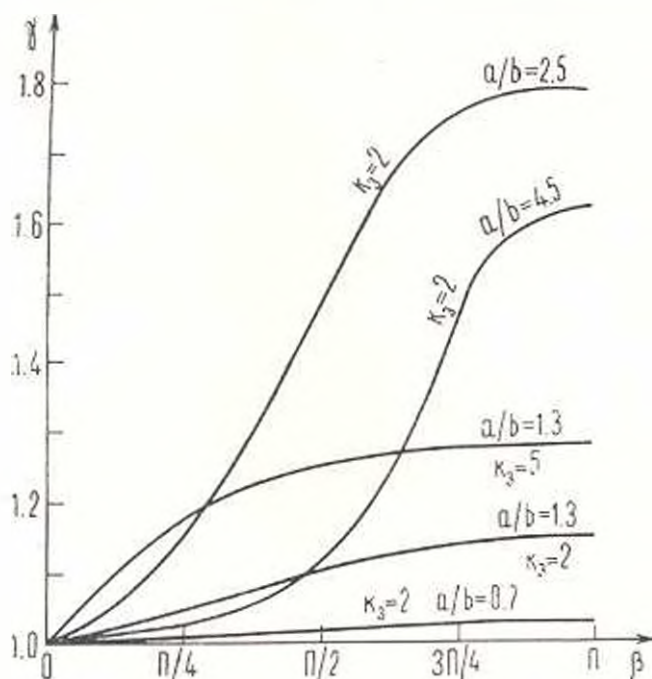
Рассматривались пластинки с параметрами

$$\frac{h}{b} = \frac{1}{5}, \quad k_1 = k_2 = 5, \quad k_3 = 2; 5, \quad \nu_1 = 0.3$$

при различных значениях отношений сторон a/b и разных длинах защемления ξ . В тех случаях, когда $a/b \leq 1.3$, сходимость процесса была достигнута уже при решении определителей второго и третьего по-

рядка, а при $a/b > 1.3$ — восьмого и десятого. Полученные результаты практически совпадали (наибольшее отклонение результатов составило 0.9%).

Для наглядности полученных результатов на фиг. 2 приведены кривые изменения безразмерных усилий $P(2b)^2/\pi^2 D_{11}$ (вычисленные из определителей третьего ($a/b \leq 1.3$) и десятого ($a/b > 1.3$) порядка) в зависимости от длины участка защемления (β). По оси абсцисс отложено β , а по оси ординат — безразмерный параметр γ , равный отношению критического усилия для данного β к усилию, когда стороны $y = \pm b$ полностью свободно оперты ($\beta = 0$).



Фиг. 2.

В том случае, когда все края пластинки шарнирно оперты ($\beta = 0$), и системе (1.18) первое уравнение отпадает и остается только второе. Нетривиальное решение при этом получается при условии:

$$\omega_1 b = \frac{n\pi}{2} \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (3.1)$$

Очевидно, минимальное значение критического усилия получается при $n = 1$. Значения безразмерных усилий, вычисленных по (3.1), совпадают с приведенными в [3] решениями.

Когда края пластинки $y = \pm b$ полностью заделаны ($\beta = \pi$), коэффициенты a_{nm} в определителе системы (1.27) будут

$$a_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m \\ 1 & \text{при } n = m \end{cases}$$

В, следовательно, из определителя получим

$$N_m - 1 = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.2)$$

откуда для определения критического усилия получается следующее трансцендентное уравнение:

$$(A_2 - A_1)(\omega_1 \operatorname{th} \omega_1 b - \omega_2 \operatorname{th} \omega_2 b) - (A_3 - A_2)(\omega_1 \operatorname{tg} \omega_1 b + \omega_2 \operatorname{th} \omega_2 b) \quad (3.3)$$

Легко заметить, что уравнение (3.3) получается также из системы (1.18), если принять $c = a$.

В заключение выражаю благодарность Л. А. Мовсисяну за постоянное внимание, оказанное при выполнении настоящей работы.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 2 XI 1979

Լ. Վ. ԱՐԱՄԻԱՆ

ՕՐՏՈՏՐՈՊ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱՐԵՐՅԱԼ
ԽԱՌԸ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ԿԵԳԳՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Դիտարկվում է վերջավոր սահմանի կոշտություն ունեցող օրտոտրոպ ուղղանկյուն սալ, որի երկու հանդիպակաց կողմերը ազատ հենված են, իսկ մյուս երկու կողմերի համար տրված են խառք պայմաններ: Ուժերը կիրառված են ազատ հենված կողմերի վրա:

Սալի կայունության խնդրի հավասարումների լուծումները փնտրվում են Ֆուրյեի շարքերի տեսքով: Եղբային պայմաններին բավարարելով ինտեգրման հաստատունների որոշման համար ստացվում են զույգ շարք-հավասարումներ, որոնք ընթացում են դժային հանրահաշվական համառոտ հավասարումների փոխարինման: Ընդհանուր դեպքում ինտեգրալային առաջադրանքները որոշվում են այդ սխեմայի որոշիչի դրոշմի լինելու պայմանից: Բերվում են թվային արդյունքներ:

ON THE STABILITY OF ORTHOTROPIC RECTANGULAR PLATE WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS

L. V. ABRAMIAN

S u m m a r y

The stability of an orthotropic rectangular plate with finite shear stiffness is determined. The two opposite sides of the plate are freely supported; for the other two sides mixed boundary conditions are given. The forces are applied to those two opposite sides which are freely supported.

The solutions of equations on the stability of the plate are taken in Fourier series. Satisfying boundary conditions for the constants of integration, dual series—equations are obtained, which are reduced to an infinite set of linear homogeneous equations. The values of critical forces are defined by equating the determinant of the set to zero. Numerical results are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовисян Г. А. К определению критических усилий потери устойчивости прямоугольных пластин при смешанных граничных условиях. Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1971, т. XXIV, № 6.
2. Кир. Сталь. Задачи о собственных значениях прямоугольных пластин при смешанных краевых условиях. Труды американского общества инженеров-механиков. ИМ, 1972, № 2.
3. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М., «Наука», 1967.
4. Киракосян Р. М. Об устойчивости неупругой прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по двум противоположным сторонам, с учетом поперечных сдвигов. Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1977, т. XXX, № 2.
5. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М., ГИИТЛ, 1953.
6. Библоян А. А. Решение некоторых парных уравнений. ПММ, 1967, т. 31, в. 4.
7. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев, «Наукова думка», 1973.
8. Мелконян А. П., Хачатрян А. А. Об устойчивости прямоугольных трансверсально изотропных пластинок. ПМ, АН УССР, 1966, т. 11, в. 2.
9. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Физматгиз, 1962.

Н. П. РОГАЧЕВА

УТОЧНЕННАЯ ТЕОРИЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

На основе приближенного интегрирования [1] трехмерных уравнений пьезоупругости выводится уточненная линейная теория тонких пьезокерамических оболочек, равномерно поляризованных в нормальном к срединной поверхности направлении.

1. Рассмотрим произвольную пьезокерамическую оболочку.

Выберем триортогональную систему координат x_1, x_2, γ следующим образом: пусть координатные линии x_1, x_2 совпадают с линиями главных кривизин срединной поверхности оболочки, а координатная линия γ им ортогональна.

Выпишем систему уравнений пьезоупругости в выбранных координатах.

Все используемые здесь обозначения, относящиеся к неэлектрическим величинам, взяты из [1], а обозначения, относящиеся к электроупругости и электростатике, заимствованы из [2], [3].

Уравнения движения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_1} \frac{\partial \tau_i}{\partial x_1} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + k_j (\tau_i - \tau_j) + k_i (\tau_{ij} + \tau_{ji}) + \\ & + \frac{1}{a_i} \frac{\partial}{\partial \gamma} (a_i^2 \tau_{i3}) - \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = 0 \\ & - \frac{\tau_1}{R_1} - \frac{\tau_2}{R_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + k_2 \tau_{13} + k_1 \tau_{23} + \frac{\partial \tau_3}{\partial \gamma} - \rho \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Уравнения пьезоэффекта

$$\begin{aligned} \tau_i &= \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu^2)} \left(\frac{a_j}{a_i} e_i + \nu e_j \right) - \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E} \frac{1}{1 - \nu} \frac{\tau_3}{a_i} - \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \frac{a_j}{1 - \nu} E_j \\ \tau_{ij} &= \frac{1}{s_{66}^E} \left(\frac{a_i}{a_j} m_i + m_j \right) \\ \frac{\partial v_3}{\partial \gamma} &= s_{13}^E \left(\frac{\tau_1}{a_2} + \frac{\tau_2}{a_1} \right) + s_{33}^E \frac{\tau_3}{a_1 a_2} + d_{31} E_1 \\ \frac{\partial v_i}{\partial \gamma} + \frac{g_i}{a_i} &= s_{44}^E \frac{\tau_{i3}}{a_j} + d_{13} E_i \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$D_i = \epsilon_{ij}^T E_j + d_{i3} \frac{\tau_{33}}{a_j} \quad (1.2)$$

$$D_3 = \epsilon_{33}^T E_3 + d_{31} \left(\frac{\tau_{11}}{a_1} + \frac{\tau_{22}}{a_2} \right) + d_{33} \frac{\tau_{33}}{a_1 a_2}$$

Уравнения вынужденной электростатики диэлектриков

$$\operatorname{div} D = 0, \quad E = -\operatorname{grad} \varphi \quad (1.3)$$

Здесь и далее из каждого равенства, содержащего индексы i и j , можно получить два различных — одно, полагая $i = 1, j = 2$, другое, полагая $i = 2, j = 1$.

В (1.1)–(1.2) для удобства дальнейших выкладок вместо симметричного тензора напряжений $\sigma_{ij}, \sigma_{ji}, \sigma_{33}, \sigma_3$ введен несимметричный тензор $\tau_{ij}, \tau_{ji}, \tau_{33}, \tau_3$ следующими формулами:

$$\begin{aligned} \tau_i &= \left(1 + \frac{\gamma}{R_j}\right) \sigma_i, & \tau_{ij} &= \left(1 + \frac{\gamma}{R_i}\right) \sigma_{ij} \\ \tau_{33} &= \tau_{33} = \left(1 + \frac{\gamma}{R_j}\right) \sigma_{33}, & \tau_3 &= \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) \sigma_3 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для краткости записи в уравнениях (1.1), (1.2) введены обозначения, которые расшифровываются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{v_i}{R_i} - k_i v_j, & \sigma_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - k_j v_j \\ k_i &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_3}{\partial x_i} - \frac{v_i}{R_i}, & a_i &= 1 + \frac{\gamma}{R_i}, & k_i &= \frac{1}{A_i} \frac{1}{A_j} \frac{\partial A_i}{\partial x_j}, & \gamma &= -\frac{s_{ij}^F}{s_{ii}^F} \end{aligned} \quad (1.5)$$

В предыдущих формулах v_i, v_3 — перемещения, A_i — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности, R_i — ее главные радиусы кривизны, $s_{ii}^F, s_{33}^F, s_{13}^F, s_{23}^F, s_{12}^F$ — упругие податливости при нулевом электрическом поле, d_{31}, d_{13}, d_{32} — пьезоэлектрические постоянные, $\epsilon_{ij}^T, \epsilon_{33}^T$ — диэлектрические проницаемости при нулевых напряжениях, E — вектор напряженности электрического поля, D — вектор электрической индукции.

Для построения теории пьезокерамических оболочек надо рассмотреть краевую задачу, заключающуюся в интегрировании уравнений (1.1)–(1.3) с учетом условий на лицевых поверхностях $x_i = \pm h$ для напряжений

$$\left. \frac{\tau_{33}}{a_j} \right|_{x_i = \pm h} = \tau_i, \quad \left. \frac{\tau_3}{a_1 a_2} \right|_{x_i = \pm h} = \pm q_3 \quad (1.6)$$

и условий для электрических величин. Различные варианты последних приведены в [4]. Например, в случае возбуждения колебаний электри-

ческим полем на электродах, покрывающих лицевые поверхности оболочки, задается значение потенциала

$$\varphi|_{z=1} = \pm V(t) \quad (1.7)$$

Если колебания вызываются механической нагрузкой и оболочка не имеет электродов, то условия на лицевых поверхностях записываются следующим образом (внешняя среда — вакуум или воздух):

$$D_3|_{z=1} = 0 \quad (1.8)$$

Чтобы получить условия на внешней поверхности оболочки, надо в (1.6) — (1.8) оставить только плюсы, условия на внутренней поверхности получаются, если взять минусы.

2. Для напряженно-деформированного состояния примем следующее асимптотическое представление:

$$\begin{aligned} \frac{v_i}{s_{11}^E R} &= \tau_i^c v_{i,c}, & \frac{v_3}{s_{11}^E R} &= \tau_i^c v_{3,c}, & (\tau_{1,c}, \tau_{1,f}) &= (\tau_{1,c}, \tau_{1,f}), \\ \tau_{1,c} &= \tau_1^{1-c} \tau_{1,c}, & \tau_2 &= \tau_1^{1-c} \tau_{2,c}, & \frac{d_{31}}{s_{11}^E} E_3 &= E_{3,c}, \\ \frac{d_{31}}{s_{11}^E} E_1 &= \tau_1^{1-c} E_{1,c}, & \frac{d_{31}}{s_{11}^E s_{11}^E} D_1 &= \tau_1^{1-c} D_{1,c}, \\ \frac{d_{31}}{s_{11}^E s_{11}^E} D_3 &= D_{3,c}, & \frac{d_{31}}{s_{11}^E R} \dot{\varphi} &= \tau_1^{1-c} \dot{\varphi}_c \end{aligned} \quad (2.1)$$

где число c определяется формулой

$$c = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq s \leq 1/2 \\ -1 + 2s & \text{при } 1/2 \leq s < 1 \end{cases}$$

Здесь η — относительная полутолщина оболочки, R — характерный радиус, s , согласно терминологии, принятой в [1], — показатель изменчивости внутреннего напряженного состояния.

Величины $v_{i,c}, \dots, \dot{\varphi}_c$ имеют одинаковый асимптотический порядок (при $\eta \rightarrow 0$) и одинаковую размерность.

Подтверждением принятой асимптотики служат физические соображения и тот факт, что с помощью (2.1) можно построить в первом приближении непротиворечивую систему дифференциальных уравнений.

Выполним в уравнениях пьезоупругости обычное для асимптотических методов растяжение масштаба по координатам

$$\alpha_i = \tau_1^r R \hat{\alpha}_i, \quad \tau = \tau_1^r R \hat{\tau}, \quad t = \tau_1^r V \sqrt{2s_{11}^E} \hat{t} \quad (2.2)$$

Здесь r — показатель изменчивости по времени.

Подставим (2.1), (2.2) в исходные уравнения (1.1)–(1.6), в результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_1} \frac{\partial \tau_{1j}^*}{\partial \xi_j} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial \tau_{1j}^*}{\partial \xi_j} + \gamma^2 R k_j (\tau_{1j}^* - \tau_{2j}^*) + \gamma^2 R k_j (\tau_{1j}^* + \tau_{2j}^*) + \\ & + \frac{1}{a_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} (a_i^2 \tau_{1i}^*) - \gamma^{2-2\alpha} \frac{\partial^2 \psi_{1i}^*}{\partial \xi_i^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} & - \gamma^2 R \left(\frac{\tau_{1j}^*}{R_1} + \frac{\tau_{2j}^*}{R_2} \right) + \gamma^{1-2\alpha} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \tau_{1j}^*}{\partial \xi_j} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \tau_{2j}^*}{\partial \xi_j} \right) + \\ & + \gamma^{1-2\alpha} R (k_1 \tau_{1j}^* + k_2 \tau_{2j}^*) + \frac{\partial \tau_{2j}^*}{\partial \xi_j} - \gamma^{1-2\alpha} \frac{\partial^2 \psi_{2j}^*}{\partial \xi_j^2} = 0 \\ \tau_{1j}^* &= \frac{1}{1-\gamma^2} \left(\frac{a_j}{a_i} e_{ij} + \gamma e_{ij} \right) - \gamma^{1-\alpha} \frac{S_{31}^E}{S_{11}^E (1-\gamma)} \tau_{3j}^* - \frac{d_{31} a_j}{S_{11}^E (1-\gamma)} E_{3j}^* \\ \tau_{1j}^* &= \frac{S_{11}^E}{S_{66}^E} \left(\frac{a_i}{a_j} m_{ij} + m_{ij} \right) \\ \frac{d \psi_{3j}^*}{d \xi_j} &= \gamma^{2-2\alpha} \frac{S_{31}^E}{S_{11}^E} \frac{1}{a_1 a_2} \tau_{3j}^* + \gamma^{1-\alpha} \frac{S_{13}^E}{S_{11}^E} \left(\frac{\tau_{1j}^*}{a_2} + \frac{\tau_{2j}^*}{a_1} \right) + \gamma^{1-\alpha} \frac{d_{33}}{d_{31}} E_{3j}^* \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\frac{d \psi_{1j}^*}{d \xi_j} + \gamma^{1-2\alpha} \frac{g_{1j}}{a_i} = \gamma^{2-2\alpha} \frac{S_{44}^E}{S_{11}^E} \frac{\tau_{3j}^*}{a_j} + \gamma^{2-2\alpha} \frac{d_{15}}{d_{31}} E_{1j}^*$$

$$D_{1j}^* = E_{1j}^* + \frac{d_{31} d_{1j}}{S_{11}^E \varepsilon_{11}^E} \frac{\tau_{3j}^*}{a_j}$$

$$D_{2j}^* = E_{2j}^* + \frac{d_{31}^2}{S_{11}^E \varepsilon_{31}^E} \left(\frac{\tau_{1j}^*}{a_2} + \frac{\tau_{2j}^*}{a_1} \right) + \gamma^{1-\alpha} \frac{d_{31} d_{32}}{\varepsilon_{31}^E S_{11}^E} \frac{\tau_{3j}^*}{a_1 a_2}$$

$$\frac{\partial D_{3j}^*}{\partial \xi_j} + \gamma^{2-2\alpha} \frac{\varepsilon_{31}^E}{\varepsilon_{33}^E} \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial D_{1j}^*}{\partial \xi_j} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial D_{2j}^*}{\partial \xi_j} + \gamma^2 R (k_1 D_{2j}^* + k_2 D_{1j}^*) \right] = 0 \quad (2.5)$$

$$E_{3j}^* = - \frac{\partial \psi_{3j}^*}{\partial \xi_j}, \quad E_{1j}^* = - \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_{1j}^*}{\partial \xi_j}$$

$$e_{ij}^* = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \psi_{1j}^*}{\partial \xi_i} + \gamma^2 R k_j \psi_{1j}^* + \gamma^2 \frac{R}{R_i} \psi_{2j}^*, \quad m_{ij}^* = \frac{1}{A_j} \frac{\partial \psi_{1j}^*}{\partial \xi_j} - \gamma^2 R k_j \psi_{1j}^* \quad (2.6)$$

$$e_{1j}^* = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \psi_{1j}^*}{\partial \xi_i} - \gamma^{2\alpha} \frac{R}{R_i} \psi_{1j}^*, \quad a_i = 1 + \gamma^2 \frac{R}{R_i}$$

Так же, как и теории неэлектрических оболочек, в дальнейшем ограничимся значениями $r \ll c$ (случай $r > c$ требует специального рассмотрения).

3. Для того, чтобы трехмерные уравнения пьезоупругости приближенно свести к двумерным, выполним интегрирование уравнений (2.3) — (2.6) по z по схеме, изложенной в [1]. В полученных асимптотических разложениях будем отбрасывать члены порядка ε , где

$$\varepsilon = O(\gamma^{2-2s}) \quad (3.1)$$

В результате интегрирования каждая из искомых величин (перемещения, напряжения, компоненты вектора напряженности электрического поля, компоненты вектора электрической индукции, разность потенциалов) будет представлена в виде полинома по z и остатка ряда, наибольшие члены которого — малые величины порядка γ^{2-2s} .

$$P = \sum_{l=0}^n \gamma^l a_l P_l + O(\gamma^{2-2s}), \quad a_0 = 1 \quad (3.2)$$

Наибольшие степени полиномов и коэффициенты a_l для различных величин задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} n=1, \quad a_1 &= \gamma^{1-2s+\varepsilon} && \text{для } v_{1,0}, e_{1,0}, m_{1,0}, E_{2,0}, \tau_{1,0}, \tau_{1,1} \\ n=1, \quad a_1 &= \gamma^{1-\varepsilon} && \text{для } v_{2,0}, E_{1,0} \\ n=2, \quad a_1 &= 1, \quad a_2 = \gamma^{1-2s+\varepsilon} && \text{для } E_{1,0}, \tau_{1,0}, D_{1,0}, u_1 \\ n=3, \quad a_1 &= 1, \quad a_2 = \gamma^{1-2s+\varepsilon}, \quad a_3 = \gamma^{1-1-2s} && \text{для } \tau_{2,0} \\ n=0 &&& \text{для } D_{2,0} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Подставим (3.2), (3.3) в уравнения (2.3) — (2.6). После приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях z получим систему дифференциальных уравнений, которая содержит 50 уравнений и столько же неизвестных.

Так как уравнения равновесия пьезокерамической оболочки имеют обычный вид, выпишем здесь только уравнения состояния и уравнения вынужденной электростатики

$$\begin{aligned} \tau_{1,0} &= \frac{1}{1-\gamma^2} (e_{1,0} + \gamma e_{2,0}) + \gamma^{1-\varepsilon} \frac{s_{11}^E}{s_{11}^E} \frac{1}{1-\gamma} \tau_{3,0} - \frac{1}{1-\gamma} E_{3,0} \\ \tau_{1,1} &= \frac{1}{1-\gamma^2} \left[e_{1,1} + \gamma e_{2,1} + \gamma^{2s-\varepsilon} \left(\frac{R}{R_i} - \frac{R}{R_j} \right) e_{1,0} \right] + \\ &+ \gamma^{2s-2\varepsilon} \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E} \frac{1}{1-\gamma} \tau_{3,1} - \frac{1}{1-\gamma} E_{3,1} - \gamma^{2s-\varepsilon} \frac{R}{R_j} \frac{1}{1-\gamma} E_{3,0} \\ \tau_{1,2} &= \frac{s_{11}^E}{s_{66}^E} (m_{1,0} + m_{2,0}) \\ \tau_{1,2,1} &= \frac{s_{11}^E}{s_{66}^E} \left[m_{1,1} + m_{2,1} + \gamma^{2s-\varepsilon} \left(\frac{R}{R_i} - \frac{R}{R_j} \right) m_{1,0} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
v_{3,2} &= \frac{s_{12}^k}{s_{11}^k} (\tau_{1,0} + \tau_{2,0}) + \frac{d_{33}}{d_{11}} E_{3,0} \\
v_{1,1} &= -g_{1,0} \\
D_{1,0} &= E_{1,0} + \frac{d_{31}d_{15}}{s_{11}^k \varepsilon_{11}^k} \tau_{13,0} \\
D_{1,1} &= E_{1,1} + \frac{d_{31}d_{15}}{s_{11}^k \varepsilon_{11}^k} \left(\tau_{13,1} - \gamma^1 \frac{R}{R_j} \tau_{13,0} \right) \\
D_{1,2} &= E_{1,2} + \frac{d_{31}d_{15}}{s_{11}^k \varepsilon_{11}^k} \left(\tau_{13,2} - \gamma^{2s-c} \frac{R}{R_j} \tau_{13,1} \right) \\
D_{3,0} &= E_{3,0} + \frac{d_{11}}{s_{11}^k \varepsilon_{33}^k} (\tau_{1,0} + \tau_{2,0}) + \gamma^{1-c} \frac{d_{32}d_{33}}{\varepsilon_{33}^k \varepsilon_{11}^k} \tau_{3,0} \\
E_{3,1} + \frac{d_{31}^2}{s_{11}^k \varepsilon_{33}^k} \left[\tau_{1,1} + \tau_{2,1} - \gamma^{2s-c} R \left(\frac{\tau_{1,0}}{R_2} + \frac{\tau_{2,0}}{R_1} \right) + \gamma^{2s-2c} \tau_{3,1} \right] &= 0 \\
E_{3,0} = -\frac{1}{2} \gamma_{1,1}, \quad E_{3,1} = -\frac{1}{2} \gamma_{2,2}, \quad E_{1,k} = -\frac{1}{A_i} \frac{\partial \gamma_{k,1}}{\partial \xi_i} \quad (k=0,1,2) \\
\tau_{13,0} + \gamma^{1-2s-c} \tau_{13,2} &= \frac{1}{2} \left[q_1^+ - q_1^- + \gamma^1 \frac{R}{R_j} (q_1^+ + q_1^-) \right] \\
\tau_{13,1} &= \frac{1}{2} \left[q_1^+ + q_1^- + \gamma^1 \frac{R}{R_j} (q_1^+ - q_1^-) \right] \\
\tau_{3,0} + \gamma^{1-2s+c} \tau_{3,2} &= \frac{1}{2} \left[q_3^+ - q_3^- + \gamma^1 \left(\frac{R}{R_1} + \frac{R}{R_2} \right) (q_3^+ + q_3^-) \right] \\
\tau_{3,1} + \gamma^{2-4s+2c} \tau_{3,3} &= \frac{1}{2} \left[q_3^+ + q_3^- + \gamma^1 \left(\frac{R}{R_1} + \frac{R}{R_2} \right) (q_3^+ - q_3^-) \right]
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Величины $e_{i,0}$, $g_{i,0}$, $m_{i,0}$, $w_{i,1}$ расшифровываются по формулам (2.6), в которых звездочку следует заменить нуликом или единицей соответственно, а для $e_{i,1}$ и $g_{i,1}$ имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned}
e_{i,1} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_{i,1}}{\partial \xi_i} + \gamma^1 R k_j v_{j,1} + \gamma^{2s-c} R \frac{v_{3,1}}{R_1} \\
g_{i,1} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_{i,1}}{\partial \xi_i} - \gamma^1 R \frac{v_{i,1}}{R_i}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

4. Перейдем в полученных уравнениях к принятым в теории оболочек обозначениям.

Перемещения срединной поверхности оболочки u_i, w связаны с трехмерными перемещениями v_i, v_3 с учетом (2.1), (3.2), (3.3) следующим образом:

$$u_i = v_i|_{z=0} = \gamma_i^c R s_{11}^E v_{i,0}, \quad w = -v_3|_{z=0} = -\gamma_i^c R s_{11}^E v_{3,0} \quad (3.6)$$

Усилия и моменты выражаются через напряжения с учетом формул (2.1), (3.2), (3.3) так:

$$\begin{aligned} T_i &= \int_{-h}^{+h} \tau_i d\gamma = 2h \tau_{i,0}, & S_{ij} &= \int_{-h}^{+h} \tau_{ij} d\gamma = 2h \tau_{ij,0} \\ G_i &= - \int_{-h}^{+h} \tau_i \gamma d\gamma = - \frac{2h^3}{3} \gamma^{1-2\nu} \tau_{i,1} \\ H_{ij} &= \int_{-h}^{+h} \tau_{ij} \gamma d\gamma = \frac{2h^3}{3} \gamma^{1-2\nu} \tau_{ij,1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Опуская громоздкие, но простые выкладки, выпишем некоторые промежуточные результаты

$$\begin{aligned} e_{i,0} &= \frac{1}{s_{11}^E} \varepsilon_i, & m_{i,0} &= \frac{1}{s_{11}^E} w, \\ g_{i,0} &= \gamma^{1-\nu} \frac{1}{s_{11}^E} \gamma_i, & v_{i,1} &= -\gamma^{1-\nu} \frac{1}{s_{11}^E} \gamma_i \\ v_{3,1} &= \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E (1-\nu)} (e_{i,0} + e_{i,0}) + \left[\frac{d_{31}}{d_{31}} - \frac{2s_{13}^E}{s_{11}^E (1-\nu)} \right] E_{3,0} \end{aligned} \quad (3.8)$$

После преобразования формул (3.4) с помощью (3.6) — (3.8) получим следующие соотношения:

уравнения состояния пьезоупругих оболочек

$$\begin{aligned} \tau_i &= \frac{2h}{s_{11}^E (1-\nu^2)} (\varepsilon_i + \nu \varepsilon_j) - \frac{2hd_{31}}{s_{11}^E (1-\nu)} E_3^{(0)} + \left[\frac{hs_{13}^E}{s_{11}^E (1-\nu)} (q_3^+ - q_3^-) \right] \\ S_{ij} &= \frac{2h}{s_{11}^E} w, & H_{ij} &= \frac{4h^3}{3s_{11}^E} \left(\varepsilon_i - \frac{w}{2R_i} \right) \\ G_i &= - \frac{2h^3}{3s_{11}^E (1-\nu^2)} (\varepsilon_i + \nu \varepsilon_j) + \frac{2h^3}{3(1-\nu)} \frac{d_{31}}{s_{11}^E} E_3^{(1)} + \\ &+ \frac{2h^3}{3s_{11}^E (1-\nu^2)} \left[\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_j} \right) \varepsilon_i + \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E (1-\nu)} \left(\frac{1}{R_i} + \frac{\nu}{R_j} \right) (\varepsilon_i + \varepsilon_j) + \right. \\ &+ \left(d_{31} - \frac{2s_{13}^E d_{31}}{(1-\nu)s_{11}^E} \right) \left(\frac{1}{R_i} + \frac{\nu}{R_j} \right) E_3^{(0)} - \frac{d_{31}(1+\nu)}{R_j} E_3^{(0)} + \\ &+ \left. \frac{s_{13}^E (1+\nu)}{2h} (q_3^+ + q_3^-) \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для электрических величин имеют место следующие формулы

$$E_2 = E_2^{(0)} + \gamma E_2^{(1)}, \quad E_i = E_i^{(0)} + \gamma E_i^{(1)} + \gamma^2 E_i^{(2)}, \quad D_3 = D_3^{(0)} \quad (3.10)$$

$$D_i = D_i^{(0)} + \gamma D_i^{(1)} + \gamma^2 D_i^{(2)}, \quad \psi = \psi^0 + \gamma \psi^1 + \gamma^2 \psi^{(2)}$$

где

$$\frac{2k^2}{3} E_3^{(0)} = \frac{d_{33}}{\epsilon_{33}} (G_1 + G_2) + \left| \frac{d_{31}}{\epsilon_{31}} \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} \right) - \frac{k^2}{3} \frac{d_{33}}{\epsilon_{33}} (q_1^+ + q_1^-) \right|$$

$$E_2^{(0)} = -\psi^{(1)}, \quad E_3^{(1)} = -2\psi^{(2)}, \quad E_i = -\frac{1}{A_i} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x_i} \quad (i = 0, 1, 2) \quad (3.11)$$

$$D_3^{(0)} = \epsilon_{33} E_3^{(0)} + \frac{d_{33}}{2h} (T_1 + T_2) + \left| \frac{d_{33}}{2} (q_3^+ - q_3^-) \right|$$

$$D_i^{(0)} = \epsilon_{ii} E_i^{(0)} + \frac{3d_{15}}{2h} N_i - d_{15} (q_i^+ - q_i^-)$$

$$D_i^{(1)} = \epsilon_{ii} E_i^{(1)} + \frac{d_{15}}{2h} (q_i^+ + q_i^-) - \left| \frac{d_{15}}{2R_i} (q_i^+ - q_i^-) \right|$$

$$D_i^{(2)} = \epsilon_{ii} E_i^{(2)} - \frac{3d_{15}}{2h^2} N_i + \frac{3d_{15}}{2h^2} (q_i^+ - q_i^-) - \left| \frac{d_{15}}{2hR_i} (q_i^+ + q_i^-) \right|$$

Члены, заключенные в квадратные скобки, малы. Они порядка γ^1 по сравнению с главными членами. Если ими пренебречь, то получим соотношения электроупругости, совпадающие с приведенными в [3] и имеющими погрешность $O(\gamma^1)$.

Так же, как для неэлектрических оболочек [1], точность (3.1) является предельной в рамках гипотез Кирхгоффа—Лява (если составить более точные двумерные уравнения, то повысится порядок системы дифференциальных уравнений, потребуется учет поперечных сдвигов и других малых величин, которыми пренебрегают в теориях типа Лява).

Уравнения равновесия вместе с соотношениями электроупругости (3.9), формулами (3.10), (3.11) и крайними условиями составляют полную систему.

Опишем схему расчета пьезокерамической оболочки в случае условий для электрических величин (1.7), (1.8).

Из условия (1.7) и формул (3.10), (3.11) найдем, что

$$E_3^{(0)} = -\psi^{(1)} = -V \quad (3.12)$$

где V — известная величина.

Из условия (1.8) и формулы (3.11) для $D_3^{(0)}$ найдем, что

$$E_3^{(0)} = -\frac{d_{33}}{2h\epsilon_{33}} (T_1 + T_2) - \frac{d_{33}}{2\epsilon_{33}} (q_3^+ - q_3^-) \quad (3.13)$$

Подставим в уравнения состояния (3.9) вместо $E_3^{(0)}$ его значение (3.12) или (3.13), соответствующее рассматриваемому случаю, и исключим из соотношений электроупругости для изгибающих моментов $E_3^{(1)}$ с помощью первой формулы (3.11). В результате получим соотношения упругости (3.9) почти такого же вида, как в обычной теории оболочек. Различие заключается в смысле коэффициентов, стоящих перед компонентами деформаций. Проинтегрировав преобразованные таким образом уравнения состояния совместно с уравнениями равновесия, формулами деформации-смещения, удовлетворив механическим граничным условиям на краях оболочки, найдем усилия, моменты, перемещения.

После того как решена механическая задача, все электрические величины можно вычислить с помощью алгебраических действий над уже найденными усилиями и моментами.

Автор благодарит А. Л. Гольдштейнера за постоянное внимание к работе и ценные консультации.

Институт проблем механики
АН СССР

Получила 31 III 1980

Ն. Ն. ՌՈՇԱՉԻՈՎԱ

ՊԵՆԵՏՐԱՆԻՆԻ ԽԱՆՈՒՅՆԵՐԻ ՀԵՊԵՏՈՒՄ ՏՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտարկվում է էլեկտրոստատիկական դեֆորմացված վիճակ, որն առաջանում է պլեոկերամիկ թաղանթներում մեխանիկական և էլեկտրական բեռնափորման տարրեր պայմանների ժամանակ:

Ա. Ա. Պոշտախովայի կողմից մշակված փոքր պարամետրով համասարումների սխեմայի մոտավոր ինտեգրման մեթոդով պլեոկերամիկականության եռաչափ համասարումները բերվում են պլեոկերամիկ թաղանթների երկչափ համասարումներին: Վառուցված համասարումների սխեմայի, ինչպես և Գիրխով-Լյաֆի ախյի առաջադրանքների համասարումները, ունի ութերորդ կարգի: Ճշգրտումը հնարավոր է դառնում ուղղահայացի երկարացման և միջին մակերևույթին ուղղահայաց լարումների նախաժամանակ հաշիվին: Պլեոկերամիկ թաղանթների համար, որոնք որպես **օրենք** ունեն միջին հաստություն, ճշտություն ապահովի բարձրացումը շատ էական է և նա ստացվում է էլեկտրոստատիկականության համասարումների ոչ մեծ բարդացման դեպք:

THE REFINED THEORY OF PIEZOCERAMIC SHELLS

N. N. ROZACHOVA

S u m m a r y

Electroelastic deformation of piezoceramic shells under different conditions of mechanical and electrical loading is considered.

Reduction of three-dimensional equations of piezoelasticity to two-dimensional equations of piezoceramic shells is performed, making use of Gol'denveizer's method of approximate integration of systems of differential equations with a small parameter. A system of the eighth order is obtained the same as in Kirchhoff—Love's theories. The refinement consists in taking into account the change in length of the normal as well as the effect of stresses in the direction of the normal to the middle surface. For piezoceramic shells, which usually have a moderate thickness, that approach is essential and it can be achieved by means of a generalization of the equations of piezoelasticity.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., «Наука», 1976.
- 2 Методы и приборы ультразвуковых исследований. Под ред. У. Мэсона. М., «Мир», 1966.
- 3 Борисейко В. А., Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Соотношения электроупругости для пьезокерамических оболочек вращения. Прикл. механика, 1976, т. XII, № 2.
- 4 Улитко А. Ф. К теории колебания пьезокерамических тел. В кн. «Тепловые напряжения в элементах конструкций», 15, К., «Наукова думка», 1975.

Г. С. ГРИГОРЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ
МАТЕРИАЛА

Проблема устойчивости в условиях ползучести материала, поставленная, по-видимому, впервые в [1], разрабатывалась в различных аспектах и для различных деформируемых систем во многих исследованиях [2--4, 17]. В [16а, б] был предложен метод определения критического значения $q_{кр}$ грузового параметра в тонкостенных конструкциях, гибких по Г. Карману [7], основанный на теории устойчивости движения А. М. Ляпунова [5]. В дальнейшем, имея в виду теорию устойчивости движения в конечном интервале времени, основы которой, сформулированные впервые Н. Г. Четаевым, развиты в хорошо известных работах Н. Д. Моисеева, Г. В. Каменкова, Г. Н. Дубошина, А. А. Лебедева, С. К. Персидского, К. А. Абгаряна и др., был предложен метод определения $q_{кр}$ [16, в], исходя из достаточных условий устойчивости С. К. Персидского [18]. В [16, а, б] задачи об устойчивости железобетонных оболочек решались в первом приближении методом Бубнова—Галеркина. В настоящей работе излагается метод, учитывающий второе приближение по Бубнову—Галеркину (симметричная и антисимметричная формы потери устойчивости).

§ 1. Имея в виду линейную ограниченную ползучесть материала [6, 8], полагая, что коэффициент Пуассона при этом не меняется [6, 9--11], рассматривая пологую длинную круговую, гибкую по Г. Карману, цилиндрическую панель радиуса R и толщины h , при размере панели вдоль образующей, значительно превышающем размер b вдоль дуги так, что изогнутую срединную поверхность ее можно считать цилиндрической, полагая панель шарнирно закрепленной неподвижными, жесткими, продольными ребрами и нагруженной равномерно распределенным давлением интенсивности q с выпуклой стороны, приходим к следующему уравнению равновесия:

$$D \frac{\partial^4 w(y, t)}{\partial y^4} + p(t) \left[\frac{\partial^2 w(y, t)}{\partial y^2} + \frac{1}{R} w \right] = q \quad (1.1)$$

где

$$\bar{D} = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \bar{E} \quad (1.2)$$

$$p(t) = \frac{h}{b(1-\nu^2)} \bar{E} \left[-\frac{1}{2} \int_0^b \left(\frac{\partial w(y, t)}{\partial y} \right)^2 dy + \int_0^b \frac{w(y, t)}{R} dy \right]$$

$\bar{E}$ — некоторый ограниченный линейный оператор, связывающий напряжения (σ) и деформации (ϵ) при осевом растяжении — сжатии в момент времени t соотношением

$$\sigma = \bar{E} \epsilon \quad (1.3)$$

В (1.1) использована перестановка операций по геометрическим координатам и тех же операций по времени. Вывод уравнения, соответствующего (1.1) при упругой работе материала, см. [13].

Исходя из линейной теории ползучести Маслова — Арутюняна и полагая $E = \text{const}$, взамен (1.3) будем иметь [6]*

$$\sigma'' + \gamma \sigma' = E(\epsilon'' + \eta' \epsilon'), \quad \eta' = \gamma \left(1 + C_0 + \frac{A_1}{t} \right) \quad (1.4)$$

где γ , C_0 , A_1 — постоянные.

В случае вязко-упругого материала Кельвина взамен (1.3) будем иметь [10]

$$\sigma' + \lambda \sigma = E(\epsilon' + \mu \epsilon) \quad (1.5)$$

где E , μ , λ — постоянные.

Известны и другие соотношения, связывающие σ и ϵ при линейной ползучести материала. Например, [15]

$$\left(p_2 \frac{d^2}{dt^2} + p_1 \frac{d}{dt} + p_0 \right) \sigma = \left(q_2 \frac{d^2}{dt^2} + q_1 \frac{d}{dt} + q_0 \right) \epsilon \quad (1.6)$$

где p_i , q_i ($i = 0, 1, 2$) — постоянные.

Соотношение (1.6) имеет в виду т. н. линейную четырехзвенную модель вязко-упругого материала. Получение на основе (1.5) и (1.6) результатов, аналогичных приведенным ниже, причем более простых, не представляет трудностей.

* В [16, 6] рассматривались оболочки, состоящие из трех симметрично расположенных слоев, имеющих различные упругие и реологические характеристики, в [4] — устойчивость в бесконечном и конечном интервалах времени (по А. М. Липучову и Н. Г. Чегасву, соответственно) стержня из неоднородно стареющего материала, упругие и реологические характеристики которого меняются во времени в зависимости от геометрических координат. Теорию ползучести неоднородно стареющих тел см. в [19, а, б].

§ 2. В соответствии с методом Бубнова—Галеркина (второе приближение, симметричная форма), примем

$$w(y, t) = \theta_1(t) \sin \beta y + \theta_2(t) \sin 3\beta y \quad (2.1)$$

и выпишем уравнения

$$\int_0^b X \sin \beta y dy = 0, \quad \int_0^b X \sin 3\beta y dy = 0 \quad (2.2)$$

где, в соответствии с (1.1),

$$X = \bar{D} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \right) - q \quad (2.3)$$

Подстановка (2.1) в (1.2) и (2.2) с учетом (2.3) дает

$$\begin{aligned} \bar{E} \left(\frac{2}{\pi} y_1 + \frac{2}{3\pi} y_2 - 3a_1 y_1^2 - 27a_2 y_2^2 \right) &= E y_0 \\ \bar{E} y_1 &= (a_1 y_1 y_2 - 3a_2 y_2 + 4q_0) E \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$243 \bar{E} y_2 = (27a_1 y_1 y_2 - 3a_2 y_2 + 4q_0) E$$

$$y_1 = \frac{\theta_1}{R} \quad y_2 = \frac{\theta_2}{R} \quad y_3 = \frac{p(1-\nu^2)}{Eh} \quad \xi = \frac{\pi}{b} \quad (2.5)$$

$$a_1 = \frac{12}{\beta^2 h^2} \quad a_2 = \frac{16}{\pi R^2 h^2 \beta^2} \quad a_3 = \frac{\beta^2 R^2}{12} \quad q_0 = \frac{12q(1-\nu^2)}{\pi \beta^2 h^3 E R}$$

На основе (1.4) перепишем (2.4) в виде

$$\sum_j b_{kj} y'_{k-3} = b_k \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (2.6)$$

Здесь приняты обозначения:

$$y'_k = y_{k+3} \quad y''_k = y'_{k+3} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= 1 - a_1 y_1 & b_{12} &= 0 & b_{13} &= 3a_2 - a_1 y_1 \\ b_{21} &= 0 & b_{22} &= 243 - 27a_1 y_1 & b_{23} &= 3a_2 - 27a_1 y_2 \\ b_{31} &= \frac{2}{\pi} - 6a_1 y_1 & b_{32} &= \frac{2}{3\pi} - 54a_2 y_2 & b_{33} &= -1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} b_1 &= -\gamma y_1 + 2a_1 y_4 y_6 + \gamma' a_1 (y_3 y_4 + y_1 y_6) - 3a_2 \gamma' y_6 \\ b_2 &= -243 \gamma y_2 + 54a_1 y_3 y_6 + 27a_1 \gamma' (y_3 y_5 + y_2 y_6) - 3a_2 \gamma' y_4 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$b_3 = \gamma' y_4 - \frac{2}{\pi} \gamma y_4 - \frac{2}{3\pi} \gamma y_5 + 6a_1 (y_4^2 + \gamma y_1 y_4) + 54a_2 (y_5^2 + \gamma y_2 y_5)$$

Учитывая, что определитель $|b_{ij}| \neq 0$ ($i, j = 1, 2, 3$), решим (2.6) относительно y_{k+1} и окончательно запишем

$$y'_k = y_{k+1}, \quad y'_{k+1} = -\frac{|a_{ij}^{(k)}|}{|b_{ij}|} \quad (2.10)$$

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} b_{ij} & j \neq k \\ b_k & j = k \end{cases} \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

Из (2.5) — (2.9) следует

$$|a_{ij}^{(k)}| = |a_{ij}^{(k)}| (y_1, y_2, \dots, y_6, t); \quad |b_{ij}| = |b_{ij}| (y_1, y_2, y_3) \quad (2.11)$$

Таким образом, уравнение равновесия (1.1) приведено к нелинейной системе из шести дифференциальных уравнений первого порядка (2.10), разрешенных относительно производных. Правые части ее содержат t явно.

Пусть заданному фиксированному значению грузового параметра q_0 соответствует частное решение

$$y_i(t) = f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (2.12)$$

системы (2.10), проходящее при $t=t_0$ через точку

$$f_i(t_0) = f_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (2.13)$$

Принимая в (2.4) $t=t_0$ и учитывая (2.12) и (2.13), напомним

$$\begin{aligned} f_1^0 &= a_1 f_1^0 f_3^0 - 3a_2 f_3^0 + 4q_0 \\ 243 f_2^0 &= 27a_1 f_2^0 f_3^0 - 3a_2 f_3^0 + 4q_0 \\ f_3^0 &= \frac{2}{\pi} f_1^0 + \frac{2}{3\pi} f_2^0 - 3a_1 f_1^{02} - 27a_2 f_2^{02} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Следуя [14] и обозначив

$$\varphi = \frac{f_2^0}{f_1^0} \quad (2.15)$$

из первых двух уравнений (2.14) получим

$$\varphi = \frac{1 - a_1 f_3^0}{243 - 27a_1 f_3^0} \quad (2.16)$$

При этом система (2.14) сводится к кубическому уравнению

$$\begin{aligned} 3a_1 a_2 (1 + 9\varphi^2) f_1^{03} - \left[\frac{2a_1}{\pi} \left(1 + \frac{\varphi}{3} \right) + 9a_2 a_1 (1 + 9\varphi^2) \right] f_1^{02} + \\ + \left[\frac{6}{\pi} a_2 \left(1 + \frac{\varphi}{3} \right) + 1 \right] f_1^0 - 4q_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Полагая ψ и f_1^0 известными, получим

$$f_3^0 = \frac{f_1^0 - 4q_0}{a_1 f_1^0 - 3a_2}, \quad f_2^0 = \psi f_1^0 \quad (2.18)$$

При малых нагрузках $\psi \approx \frac{1}{243}$, при больших нагрузках $\psi \approx \frac{1}{27}$ [14].

Если ставится задача определения верхней критической нагрузки, следует исходить из значений, близких к $\psi \approx \frac{1}{27}$, принимая при этом f_1^0 равным наименьшему действительному корню кубического уравнения (2.17).

Продифференцировав, далее, (2.4) по t , приравняв $t = t_0$ [6], учитывая (2.7), (2.12), (2.13) и считая f_k^0 уже известными, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных f_{k+1}^0 ($k = 1, 2, 3$)

$$\sum_j m_{kj} f_{j+3}^0 = m_k \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} m_{11} &= 1 - a_1 f_3^0 & m_{12} &= 0 & m_{13} &= 3a_2 - a_1 f_1^0 \\ m_{21} &= 0 & m_{22} &= 243 - 27a_1 f_3^0 & m_{23} &= 3a_2 - 27a_1 f_2^0 \\ m_{31} &= \frac{2}{\pi} - 6a_3 f_1^0 & m_{32} &= \frac{2}{3\pi} - 54a_3 f_3^0 & m_{33} &= -1 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$m_1 = 7\pi^0 f_1^0 \quad m_2 = 2437\pi^0 f_2^0$$

$$m_3 = 7\pi^0 \left(\frac{2}{\pi} f_1^0 + \frac{2}{3\pi} f_2^0 - 3a_3 f_1^0 - 27a_3 f_2^0 \right) \quad \pi^0 = C_0 + \frac{A_1}{t_0} \quad (2.21)$$

Учитывая, что $|m_{kj}| \neq 0$, получаем

$$f_{k+1}^0 = \frac{|n_{kj}^{(k)}|}{|m_{kj}|} \quad n_{ij}^{(k)} = \begin{cases} m_{ij} & j \neq k \\ m_k & j = k \end{cases} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (2.22)$$

§ 3. Пусть требуется определить верхнее критическое значение грузового параметра $q_{0кр}$ такое, что при

$$q_0 < q_{0кр} \quad (3.1)$$

равновесие рассматриваемой панели в условиях ограниченной ползучести материала устойчиво, а при

$$q_0 > q_{0кр} \quad (3.2)$$

нестойчиво. В [13] справедливо отмечается, что нижняя критическая нагрузка при ползучести не может являться характеристикой несущей способности.

Поскольку уравнение равновесия (1.1) рассматриваемой панели сведено к системе дифференциальных уравнений (2.10), можно поставленную задачу определения $q_{0, \text{пр}}$ по (3.1), (3.2) заменить задачей определения $q_{0, \text{р}}$ такого, что при (3.1) частное решение (2.12) системы дифференциальных уравнений (2.10), проходящее при $t=t_0$ через точку (2.13), устойчиво, а при (3.2) — неустойчиво.

Кажущееся противоречие в таком подходе является следствием того, что задача об устойчивости равновесия сведена к задаче об устойчивости движения, это объясняется тем, что ползучесть является медленным процессом, который может быть рассмотрен и как состояние равновесия, и как состояние движения. Напряженно-деформированное состояние находящейся под нагрузкой системы при ползучести материала, рассматриваемое, обычно, как состояние равновесия, как сделано выше при получении уравнения (1.1), в последующих выкладках рассматривается как состояние движения, что обосновывается полученной системой дифференциальных уравнений (2.10).

Этот подход лежит в основе предложенной в [16а] методики расчета на устойчивость в условиях ползучести материала, позволяющей использовать хорошо разработанный аппарат теории устойчивости движения А. М. Ляпунова, что открывает, по мнению автора, широкие возможности.

Приведем доказанное А. М. Ляпуновым положение ([5], № 14), что «... при решении вопросов устойчивости достаточно будет рассматривать только значения t , большие сколь угодно больших T , и заменять рассмотрение начальных значений функций x рассмотрением их значений, соответствующих $t=T$ ».

В дальнейшем это утверждение упоминается как Положение (*) Ляпунова.

Выпишем также следующие хорошо известные теоремы Ляпунова, относящиеся к установившемуся движению.

Теорема 1. Когда определяющее уравнение, соответствующее системе дифференциальных уравнений возмущенного движения, имеет корни с отрицательными вещественными частями, то каковы бы ни были остальные его корни для невозмущенного движения будет существовать известная условная устойчивость. А именно, в случае существования k таких корней движение это будет устойчивым для возмущений, подчиненных некоторым $n-k$ уравнениям вида

$$F_j(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n-k) \quad (3.3)$$

в которых F_j суть голоморфные функции начальных значений a , функций x , обращающиеся в нули, когда все a делаются нулями и которые позволяют выражать все эти значения как голоморфные функции k независимых величин.

Теорема II. Когда между корнями определяющего уравнения находятся такие, вещественные части которых положительны, невозможное движение неустойчиво.

Вернемся к системе дифференциальных уравнений (2.10). Переходя к уравнениям в возмущениях подстановкой

$$x_s(t) = y_s(t) - f_s(t) \quad (s = 1, 2, \dots, 6) \quad (3.4)$$

где $x_s(t)$ — возмущения, запишем

$$\dot{x}_s = x_{s+3}, \quad \dot{x}_{s+3} = \frac{|a_{ij}^{(k)}|(f_1 + x_1, \dots, f_6 + x_6, t)}{|b_{ij}|(f_1 + x_1, f_2 + x_2, f_3 + x_3)} - \frac{|a_{ij}^{(k)}|(f_1, \dots, f_6, t)}{|b_{ij}|(f_1, f_2, f_3)} \quad (3.5)$$

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} b_{ij} & j \neq k \\ b_k & j = k \end{cases}$$

$$(i, j, k = 1, 2, 3)$$

Задача об устойчивости частного решения (2.12) системы дифференциальных уравнений (2.10) равносильна задаче об устойчивости нулевого решения

$$x_1 = x_2 = \dots = x_6 = 0 \quad (3.6)$$

системы дифференциальных уравнений (3.5), которое эта система, как нетрудно убедиться, имеет.

Разложив правые части системы (3.5) в ряд по степеням x_s и оставив только линейные части, выпишем систему уравнений первого приближения, соответствующую системе (3.5)

$$\dot{x}_k = x_{k+3}, \quad \dot{x}_{k+3} = p_{k+3,1}(t)x_1 + p_{k+3,2}(t)x_2 + \dots + p_{k+3,3k}(t)x_k \quad (3.7) \\ (k = 1, 2, 3)$$

Имея в виду ограниченную ползучесть материала, примем

$$f_k|_{t=T} = \bar{f}_k = \text{const} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (3.8)$$

При этом будем иметь

$$\bar{f}_{k+3} = f_k|_{t=T} = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad (3.9)$$

Из (2.8) — (2.10), (3.8) и (3.9) следует

$$\bar{b}_k = b_k|_{t=T} = 0, \quad |a_{ij}^{(k)}|(y_1, \dots, y_6, t)|_{t=T} = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

При этом, принимая, в соответствии с Положением (*) Ляпунова, $t > T$ и обозначив

$$c_{k+3,s} = p_{k+3,s}|_{t=T} \quad (k = 1, 2, 3; \quad s = 1, 2, \dots, 6)$$

приходим к следующему определяющему уравнению системы (3.5):

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} - \lambda & c_{45} & c_{46} \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} - \lambda & c_{56} \\ 0 & 0 & 0 & c_{64} & c_{65} & c_{66} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.10)$$

$$c_{44} = \frac{1}{B} (B_{24} \bar{b}_{12} \bar{b}_{21} - B_{14} \bar{b}_{32} \bar{b}_{23} + B_{34} \bar{b}_{22} \bar{b}_{12})$$

$$c_{45} = \frac{1}{B} (B_{25} \bar{b}_{12} \bar{b}_{22} - B_{25} \bar{b}_{22} \bar{b}_{12})$$

$$c_{46} = \frac{1}{B} (B_{26} \bar{b}_{22} \bar{b}_{12} + B_{26} \bar{b}_{22} \bar{b}_{12} - B_{16} \bar{b}_{22} - B_{36} \bar{b}_{23} \bar{b}_{12})$$

$$c_{54} = \frac{1}{B} (B_{24} \bar{b}_{22} \bar{b}_{12} + B_{24} \bar{b}_{11} - B_{24} \bar{b}_{21} \bar{b}_{12} - B_{34} \bar{b}_{22} \bar{b}_{12})$$

$$c_{55} = \frac{1}{B} (B_{25} \bar{b}_{11} - B_{25} \bar{b}_{21} \bar{b}_{12} + B_{25} \bar{b}_{12} + B_{25} \bar{b}_{22} \bar{b}_{11}) \quad (3.11)$$

$$c_{56} = \frac{1}{B} (B_{26} \bar{b}_{12} \bar{b}_{22} - B_{26} \bar{b}_{11} - B_{26} \bar{b}_{21} \bar{b}_{12})$$

$$c_{64} = \frac{1}{B} (B_{34} \bar{b}_{11} \bar{b}_{22} - B_{14} \bar{b}_{21} \bar{b}_{22} - B_{21} \bar{b}_{12} \bar{b}_{11})$$

$$c_{65} = \frac{1}{B} (B_{25} \bar{b}_{22} \bar{b}_{11} - B_{25} \bar{b}_{11} \bar{b}_{22})$$

$$c_{66} = \frac{1}{B} (B_{26} \bar{b}_{22} \bar{b}_{11} - B_{16} \bar{b}_{21} \bar{b}_{22} - B_{36} \bar{b}_{11} \bar{b}_{22})$$

$$B_{ij} = \frac{\partial b_i}{\partial x_j}, \quad \bar{b}_{ij} = b_{ij}|_{t=T}, \quad B = \|b_{ij}\|_{t=T} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Уравнение (3.10) имеет три нулевых корня, а остальные три определяются как корни уравнения

$$\lambda^3 + k_1 \lambda^2 + k_2 \lambda + k_3 = 0 \quad (3.12)$$

Нетрудно показать, что возмущения, введенные в (3.4), подчиняются трем *уравнениям ниже* (3.3). Учитывая (2.5) и приняв $x_i^0 = 1, x_j^0 = 0$, считаем, что будут удовлетворены все условия приведенной выше теоремы Л. А. М. Ляпунова (при $n = 6, k = 2$). Поэтому еще один ко-

ренье уравнения (3.10) может быть принят равным нулю без нарушения условий этой теоремы. Таким образом, взамен (3.12) получим

$$\lambda^2 - k_1\lambda + k_2 = 0 \quad (3.13)$$

Для невозмущенного движения, то есть решения (3.6) системы (3.5), будет иметь место: а) — известная условная устойчивость, если вещественные части корней уравнения (3.13) отрицательны; б) — неустойчивость, если вещественная часть хотя бы одного из этих корней положительна. Если же не выполнены ни условие а), ни условие б), то устойчивость или неустойчивость решения (3.6) системы (3.5) не могут быть установлены на основе рассмотрения лишь линейного приближения (3.7) — критический случай. Этот случай в настоящей работе не рассматривается.

Будем вычислять частные решения (2.12) системы дифференциальных уравнений (2.10) при увеличиваемых с малым шагом фиксированных q_0 , начиная с некоторого его достаточно малого значения, при котором заведомо имеет место устойчивость. Вычисления при каждом фиксированном q_0 будем доводить до t_{n+1} , при котором числовые значения функций $f_i(t_n)$ и $f_i(t_{n+1})$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) отличаются друг от друга на малые величины. Принимая $t_n > T$, вычислим ϵ_{ik} ($i, k = 4, 5, 6$) по (3.11) и, решив уравнение (3.13), определим его корни.

Возможны, вообще говоря, следующие случаи:

Случай 1. Существует q_{01} такое, что при всяком $q_0 < q_{01}$ имеет место устойчивость, а при всяком $q_0 > q_{01}$ — неустойчивость. При этом, в соответствии с (3.1), (3.2), будем иметь $q_{0\text{кр}} = q_{01}$.

Случай 2. Существует q_{01} такое, что при всяком $q_0 < q_{01}$ имеет место критический случай, а при всяком $q_0 > q_{01}$ — неустойчивость. При этом, на основе рассмотрения лишь первого приближения, то есть системы (3.7), не удается определить величину $q_{0\text{кр}}$. Можно будет лишь утверждать, что $q_{0\text{кр}} < q_{01}$.

Случай 3. Существуют $q_{02} > q_{01} > 0$ такие, что при $q_0 < q_{01}$ имеет место устойчивость, при $q_{01} < q_0 < q_{02}$ имеет место критический случай, а при $q_0 > q_{02}$ — неустойчивость. В этом случае, на основе рассмотрения системы уравнений (3.7), можно лишь утверждать, что $q_{01} < q_{0\text{кр}} < q_{02}$. Предлагаемый метод определения $q_{0\text{кр}}$ будет, очевидно, тем более эффективным, чем более узка вилка (q_{01}, q_{02}).

Случай 4. При любом $q_0 > 0$ имеет место критический случай. При этом нет возможности определить $q_{0\text{кр}}$ на основе рассмотрения лишь системы уравнений (3.7).

Заметим в заключение, что приведенные выше соображения о выборе числового значения $\lambda = \frac{f_1^0}{f_1^1}$ содержат определенный произвол, поэтому вычисления должны быть проведены при различных значениях λ . Некому значению $q_{0\text{кр}}$, очевидно, соответствует то значение λ , при котором имеет место $q_{0\text{кр}}^{\text{min}}$.

§ 4. Имея в виду несимметричную форму, во втором приближении в методе Бубнова—Галеркина примем

$$\omega(y, t) = b_1(t) \sin 2y + b_3(t) \sin 23y \quad (4.1)$$

и выпишем уравнения

$$\int_0^b X \sin 2y dy = 0 \quad \int_0^b X \sin 23y dy = 0 \quad (4.2)$$

Здесь X имеет вид (2.3). Подставляя (2.3) в (4.2) и (4.1), получим уравнения, которые приводятся к виду (2.10), где, однако, взамен (2.8) и (2.9) приняты обозначения

$$\begin{aligned} b_{11} &= 1 - a_1 y_1 & b_{12} &= 0 & b_{13} &= 3a_2 - a_1 y_2 \\ b_{21} &= 0 & b_{22} &= 4 - a_1 y_3 & b_{23} &= -a_1 y_2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$b_{31} = \frac{2}{\pi} - a_3 y_1 \quad b_{32} = -8a_2 y_2 \quad b_{33} = -1$$

$$\begin{aligned} b_1 &= -\gamma y_1 + 2a_1 y_1 y_2 + a_1 \gamma' (y_2 y_1 + y_1 y_2) - 3a_2 \gamma' y_2 \\ b_2 &= -4\gamma y_3 + 2a_1 y_3 y_2 + a_1 \gamma' (y_2 y_3 + y_2 y_2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$b_3 = -\frac{2}{\pi} \gamma y_4 + 2a_3 (y_1^2 + \gamma y_1 y_1) + 8a_2 (y_2^2 + \gamma y_2 y_2) - \gamma' y_4$$

Таким образом, уравнение равновесия (4.1), соответствующее несимметричной форме второго члена разложения в методе Бубнова—Галеркина, также сведено к системе дифференциальных уравнений вида (2.10). Следовательно, задача определения q_{cr} в этом случае решается изложенным выше методом. Подробности опускаем.

З а к л ю ч е н и е

На основе теории устойчивости движения А. М. Ляпунова разработан для гибких тонкостенных конструкций метод определения критического значения q_{cr} грузового параметра в условиях линейной ограниченной ползучести материала. Метод реализован на основе теории ползучести Маслосла—Арутюняна, отмечается возможность его применения также и на основе различных известных линейных дифференциальных соотношений вязко-упругих материалов.

ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ ՆՅՈՒԹԻ ՍՈՎԷԻ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ

Ա մ փ ո վ ո ՚ մ

Իարակ, ճկուն, երկար, շրջանային, գլանաձև պանելի որինակի վրա նյութի սահմանափակ զծային սողրի պայմաններում կրիտիկական բևոթ որոշման համար ուռացարկվում է շարժման կալունության Ա. Ս. Լյապունովի տեսության մի քանի թեորեմների վրա հիմնված մեթոդ: Դիտարկվում են համալսի և հակահամալսի ձևերով կալունության կորստի թուրնովի-Գալյորկինի մեթոդի երկրորդ մոտավորությունները: Թնդիրը բերված է ածանցյալների նկատմամբ լուծված առաջին կարգի վեց դիֆերենցիալ համասարտմների զծային համակարգի մասնավոր լուծումների հաշվմանը էՄ-ով բևոթ պարամետրի տրված փոքր քայլով աճող արժեքների համար: Շարադրումը կատարվում է Մասլովի-Հարդիլյունյանի սահմանափակ զծային սողրի տեսության հիման վրա, նշվում է մեթոդի կիրառման հնարավորությունը նաև առաձգական-մածուցիկ նյութի համար հայտնի այլ զծային դիֆերենցիալ առնությունների ակնառումով:

Մեթոդի հիմունքները, պարզաբանված Բուրնովի-Գալյորկինի մեթոդի առաջին մոտավորությամբ, հրապարակված են 1962 և 1964 թթ.:

ON STABILITY IN CREEP

G. S. GRIGORIAN

S u m m a r y

A long, thin, shallow, flexible, circular cylindrical panel is used as an example to develop a method of stability calculation in linear limited creep based on some Lapunov's theorems of stability of motion. The second approximation of Bubnov—Galerkin method concerned with symmetric and antisymmetric forms of stability loss is considered. The problem is reduced to computerization of partial solutions of a nonlinear system of six first order ordinary differential equations solvable for derivatives, when the load parameter increases with a given small step and to verification of their Lapunov stability. The principles of the method, illustrated by a first step approximation of the Bubnov—Galerkin method, were published in 1962 and 1964.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ржаницын А. И. Процессы деформирования конструкции из упругих элементов. ДАН СССР, 1956, т. 52, вып. 1.
2. Работнов Ю. И. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.

3. Прокопюк Н. Е., Линник А. С. О влиянии ограниченной нелинейной ползучести на устойчивость сжатых стержней. Стр. мех. и расчет сооружений, 1973, № 3.
4. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Г. Об устойчивости неоднородно-стареющих вязко-упругих стержней. ПММ, 1979, т. 43, вып. 1.
5. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М., ГТТИ, 1950.
6. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М., ГТИ, 1952.
7. Kargan Th. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. Enzykl. der math. Wiss., 1910, IV (4), 348—351.
8. Согоян А. С. О некоторых закономерностях ползучести древесины. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, 1958, т. XI, № 2.
9. Douglas Mc. Henry, A new Aspect of Creep in Concrets and its Application to Design. ASTM, 1949, vol. 43, p. 1069—1087.
10. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М., ГТТИ, 1949.
11. Пакирин Н. Я. Некоторые вопросы расчета армированного и неармированного бетона с учетом ползучести. М., М., 1957.
12. Работкин Ю. И. Равновесие упругой среды с последствием. ПММ, 1948, т. XIII, вып. 1.
13. Прокопюк Н. Е., Милутова Н. А., Михеева Н. Р. О возможности перехода к новым равновесным формам нелинейно-деформирующихся систем в условиях неустановившейся ползучести. Стр. мех. и расчет сооруже., 1977, № 5.
14. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М., ГИТТЛ, 1956.
15. Басно Д. Теория линейной вязко-упругости. Библиотека сб. «Механика», М., «Мир», 1965.
16. Григоря Г. С. а) К расчету прочности и устойчивости тонких железобетонных оболочек с учетом ползучести бетона. ЦНИИСК. Совещание по вопросам ползучести стр. материалов и конструкций (тезисы докл.), М., 1962.
б) К расчету прочности, жесткости и устойчивости гибких оболочек и стержней в условиях ползучести. Ползучесть строительных материалов и конструкций. Сб. тр. под ред. А. Р. Ржаницына. М., Стройиздат, 1964.
в) К расчету устойчивости в ограниченном интервале времени. Изв. АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, 1965, т. XVIII, № 3.
17. Варнаусо П. Устойчивость пологой арки при ограниченной ползучести материала. Стр. мех. и расчет сооруже., 1973, № 2.
18. Персидский С. К. а) Об устойчивости на конечном промежутке. Вестн. АН Казахской ССР, 1959, вып. 9 (172).
б) Некоторые вопросы теории устойчивости движения. Канд. диссертация, МГУ, 1960.
19. Арутюнян Н. Х. а) Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел. Изв. АН СССР, МГТ, 1976, № 2.
б) О теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред. Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 3.