ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1980

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 1, 1980 Механика

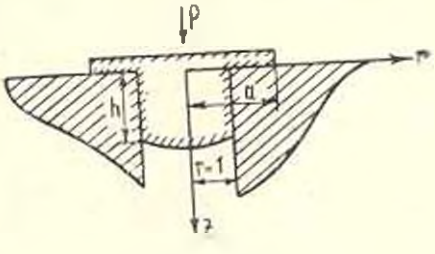
В. С. МАКАРЯН, С. О. ПАПОЯН

ОБ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВЫЕМКОЙ

В работе исследуется осесимметричная деформация упругого изотропного полупространства с вертикальной полубесконечной цилиндрической выемкой, когда в цилиндрическую выемку вдавливается круговой в плане штамп, имеющий в осевом сечении T-образную форму. На плоской поверхности полупространства вне штампа заданы нормальные усилия, а цилиндрическая поверхность вне штампа свободна от напряжений. Близкие по постановке задачи рассмотрены в работах [1, 2, 3]. Более подробный обзор работ, посвященных граничным задачам для полупространства с цилиндрической выемкой можно найти в [1].

При помощи интегральных преобразований Фурье и Вебера-Орра решение задачи сводится к системе парных интегральных уравнений, содержащих комбинации бесселевых функций и тригонометрическую функцию. После преобразований система сводится к квазивполне регулярным системам линейных алгебраических уравнений.

1. Пусть упругое полупространство ($z > 0$) содержит в себе выходящую на свою границу ($z=0$) полубесконечную цилиндрическую выемку постоянного радиуса ($r=1$). При этом ось цилиндрической выемки перпендикулярна к граничной плоскости полупространства и совпадает с осью штампа. В цилиндрическую выемку вдавливается круговой в плане штамп, имеющий в осевом сечении T-образную форму (фиг. 1). На участках контакта ($z=0$, $1 \leqslant r \leqslant a$), ($r=1$, $0 \leqslant z \leqslant h$) трение отсутствует. При этом глубина h неизвестна и подлежит определению.



Фиг. 1.

Граничные условия задачи запишутся в виде

$$\tau_{rz}\big|_{z=0} = 0 \quad (1 < r < \infty), \qquad \tau_{rz}\big|_{r=1} = 0 \quad (0 < z < \infty) \tag{1.1}$$

$$\sigma_z\big|_{z=0} = \varphi(r) \quad (r > a), \qquad \sigma_r\big|_{r=1} = 0 \quad (h < z < \infty) \tag{1.2}$$

$$u_z\big|_{z=0} = C \quad (1 \leqslant r \leqslant a), \qquad u_r\big|_{r=1} = \Psi(z) \quad (0 \leqslant z \leqslant h) \tag{1.3}$$

где $\Psi(z)$ — параболическая функция, определяющая форму цилиндрической поверхности T-образного штампа.

2. Бигармоническую функцию Лява представим в виде суммы интегралов Фурье и Фурье—Вебера

$$\Phi(r, z) = \int_0^\infty [A(\mu) + \mu z B(\mu)] e^{-\mu z} W_0(\mu r)\, d\mu +$$

$$+ \int_0^\infty [C(\mu) K_0(\mu r) + \mu D(\mu) r K_1(\mu r)] \sin \mu z\, d\mu \tag{2.1}$$

$$(1 \leqslant r < \infty), \quad (0 \leqslant z < \infty)$$

где $K_n(x)$ — функция Бесселя второго рода от мнимого аргумента,

$$W_n(\mu r) = J_n(\mu r)\, Y_1(\mu) - Y_n(\mu r)\, J_1(\mu)$$

$J_n(x)$, $Y_n(x)$ — функции Бесселя от действительного аргумента соответственно первого и второго рода. Отметим, что имеют место соотношения

$$W_1(\mu) = 0, \qquad W_0(\mu) = -\frac{2}{\pi\mu} \tag{2.2}$$

Функции $A(\mu)$, $B(\mu)$, $C(\mu)$ и $D(\mu)$ неизвестны и подлежат определению.

Пользуясь известными формулами, выражающими компоненты напряжений и перемещений через бигармоническую функцию Лява (2.1), и удовлетворяя условиям (1.1), при помощи интегральных преобразований Фурье и Вебера—Орра функции $A(\mu)$ и $C(\mu)$ выразим через фучкции $B(\mu)$ и $D(\mu)$:

$$A(\mu) = 2\nu B(\mu), \quad K_1(\mu)\, C(\mu) = [2(1-\nu) K_1(\mu) - \mu K_0(\mu)]\, D(\mu) \tag{2.3}$$

Удовлетворение смешанных условии (1.2—1.3) приводит к следующей системе из двух парных интегральных уравнений, содержащих комбинации бесселевых функций и тригонометрическую функцию:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty B^*(\mu)\, W_0(\mu r)\, d\mu = -\frac{GC}{1-\nu} \quad (1 \leqslant r \leqslant a) \\ &\int_0^\infty \mu B^*(\mu)\, W_0(\mu r)\, d\mu - \int_0^\infty \mu D^*(\mu) \left[2K_0(\mu r) - \mu r K_1(\mu r) + \right. \\ &\qquad \left. + \mu \frac{K_0(\mu)}{K_1(\mu)} K_0(\mu r) \right] d\mu - \tau(r) = 0 \quad (a < r < \infty) \end{aligned}\right. \tag{2.4}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty D^*(\mu)\, K_1(\mu) \cos \mu z\, d\mu = \frac{G\Psi(z)}{1-\nu} \quad (0 \leqslant z \leqslant h) \\ &\int_0^\infty \mu D^*(\mu)\, K_1(\mu)\, Z(\mu) \cos \mu z\, d\mu - \int_0^\infty \mu B^*(\mu) (1 - \mu z) e^{-\mu z} W_0(\mu) d\mu = 0 \\ &\qquad\qquad (h < z < \infty) \end{aligned}\right. \tag{2.5}$$

Здесь

$$B^*(\mu)=\mu^2 B(\mu),\quad D^*(\mu)=\mu^2 D(\mu)$$

$$Z(\mu)=\mu\left[1-\frac{K_0^2(\mu)}{K_1^2(\mu)}\right]+\frac{2(1-\nu)}{\mu}$$

G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона.

Доопределим первое уравнение в (2.4) на интервале ($r>a$) и второе — в (2.5) на интервале ($0<z<h$)

$$\int_0^\infty B^*(\mu)W_1(\mu r)\,d\mu=\begin{cases}-\dfrac{GC}{1-\nu} & (1<r<a)\\[2ex] -\dfrac{G}{1-\nu}f(r) & (r>a)\end{cases}\tag{2.6}$$

$$\int_0^\infty \mu D^*(\mu)K_1(\mu)Z(\mu)\cos\mu z\,d\mu-\int_0^\infty \mu B^*(\mu)(1-\mu z)e^{-\mu z}W_0(\mu)\,d\mu=$$

$$=\begin{cases}-p(z) & (0<z<h)\\ 0 & (h<z<\infty)\end{cases}\tag{2.7}$$

Дифференцируя (2.6) по r, (2.7) по z и применяя к ним соответственно преобразования Вебера—Орра и Фурье, функции $B^*(\mu)$ и $D^*(\mu)$ выразим через новые функции $p(z)$ и $f(r)$

$$B^*(\mu)=\frac{G}{(1-\nu)\Delta(\mu)}\int_a^\infty rf'(r)W_1(\mu r)\,d\mu=\frac{G}{1-\nu}\bar{f}(\mu)$$

$$D^*(\mu)=-\frac{8\mu G(1-\nu)^{-1}}{\pi^2 K_1(\mu)Z(\mu)}\int_0^\infty\frac{\xi\bar{f}(\xi)\,d\xi}{(\xi^2+\mu^2)^2}-\tag{2.8}$$

$$-\frac{2}{\pi\mu K_1(\mu)Z(\mu)}\int_0^h p(z)\cos\mu z\,dz$$

где

$$\Delta(\mu)=Y_1^2(\mu)+J_1^2(\mu)$$

Подставляя значения (2.8) во второе уравнение (2.4) и в первое уравнение (2.5), для определения неизвестных функций $f'(t)$ и $p(z)$ получим следующую систему двух интегральных уравнений

$$\int_0^\infty tf'(t)\,dt\int_0^\infty \mu\left[\frac{W_0(\mu r)W_1(\mu t)}{\Delta(\mu)}-\frac{2}{\pi}\frac{M(\mu r)}{K_1^2(\mu)Z(\mu)}\right]tK_0(\mu t)K_1(\mu)-$$

$$
- K_0(\mu) K_1(\mu t)] \frac{1}{\mu} d\mu + \frac{2}{\pi} \frac{1-\nu}{G} \int_0^h p(z)\, dz \int_0^\infty \frac{M(\mu r) \cos \mu z d\mu}{K_1(\mu) Z(\mu)} -
$$

$$
- \frac{1-\nu}{G} \varphi(r) = 0 \quad (a < r < \infty) \tag{2.9}
$$

$$
\int_0^h p(y) dy \int_0^\infty \frac{\sin \mu z \cos \mu y d\mu}{Z(\mu)} + \frac{G}{1-\nu} \int_a^\infty t f'(t)\, dt \int_0^\infty \frac{\mu \sin \mu z}{K_1^2(\mu) Z(\mu)} [K_0(\mu) K_1(\mu t) -
$$

$$
- t K_0(\mu t) K_1(\mu)]\, d\mu - \frac{\pi G}{2(1-\nu)} \Psi'(z) = 0 \quad (0 < z < h) \tag{2.10}
$$

где

$$
M(\mu r) = 2K_1(\mu r) - \mu r K_1(\mu r) + \mu \frac{K_0(\mu)}{K_1(\mu)} K_0(\mu r)
$$

Таким образом, решение задачи свелось к решению системы (2.9), (2.10). После определения функции $p(z)$ и $f'(t)$ все неизвестные будут определены.

3. Пользуясь интегральными соотношениями [4]

$$
W_1(\mu r) = \frac{2}{\pi r} \int_r^\infty \frac{y dy}{\sqrt{y^2 - r^2}} [\sin \mu y J_1(\mu) - \cos \mu y Y_1(\mu)]
$$

$$
K_0(\mu r) = \int_r^\infty \frac{e^{-\mu y} dy}{\sqrt{y^2 - r^2}}, \quad r K_1(\mu r) = \int_r^\infty \frac{y e^{-\mu y} dy}{\sqrt{y^2 - r^2}}
$$

от функции $f'(t)$ перейдем к функции

$$
H(t) = t \int_a^t \frac{f'(r)\, dr}{\sqrt{t^2 - r^2}}
$$

следующим образом:

$$
\int_a^\infty x f'(x)\, W_1(\mu x)\, dx = -\frac{2}{\pi} \int_a^\infty f'(x)\, dx \int_x^\infty \frac{t [\cos \mu t Y_1(\mu) - \sin \mu t J_1(\mu)]\, dt}{\sqrt{t^2 - x^2}} =
$$

$$
= -\frac{2}{\pi} \int_a^\infty t [\cos \mu t Y_1(\mu) - \sin \mu t J_1(\mu)]\, dt \int_a^t \frac{f'(x)\, dx}{\sqrt{t^2 - x^2}} =
$$

$$
= -\frac{2}{\pi} \int_a^\infty H(t) [\cos \mu t Y_1(\mu) - \sin \mu t J_1(\mu)]\, dt
$$

$$\int_a^\infty z^2 f'(z)\,K_0(\beta z)\,dz=\int_a^\infty f'(z)\left[\int_z^\infty \frac{t^2 e^{-\beta t}dt}{\sqrt{t^2-z^2}}-\frac{1}{\beta}\int_z^\infty \frac{te^{-\beta t}dt}{\sqrt{t^2-z^2}}\right]=$$

$$=\int_a^\infty f'(z)\,dz\int_a^\infty \frac{t^2 e^{-\beta t}dt}{\sqrt{t^2-z^2}}-\frac{1}{\beta}\int_a^\infty f'(z)\,dz\int_z^\infty \frac{te^{-\beta t}dt}{\sqrt{t^2-z^2}}=$$

$$=\int_a^\infty t^2 e^{-\beta t}dt\int_a^t \frac{f'(z)\,dz}{\sqrt{t^2-z^2}}-\frac{1}{\beta}\int_a^\infty te^{-\beta t}dt\int_a^t \frac{f'(z)\,dz}{\sqrt{t^2-z^2}}=$$

$$=\int_a^\infty H(t)\left[te^{-\beta t}-\frac{e^{-\beta t}}{\beta}\right]dt$$

$$\int_a^\infty zf'(z)\,K_1(\beta z)\,dz=\int_a^\infty f'(z)\,dz\int_z^\infty \frac{te^{-\beta t}dt}{\sqrt{t^2-z^2}}=$$

$$=\int_a^\infty te^{-\beta t}dt\int_a^t \frac{f'(z)\,dz}{\sqrt{t^2-z^2}}=\int_a^\infty H(t)\,e^{-\beta t}\,dt$$

после чего применив к уравнению (2.9) оператор

$$I\varphi=\int_t^\infty \frac{r\varphi(r)\,dr}{\sqrt{r^2-t^2}}$$

и учитывая интегральное соотношение [4]

$$\mu\int_t^\infty \frac{rW_0(\mu r)\,dr}{\sqrt{r^2-t^2}}=\cos\mu t\,Y_1(\mu)-\sin\mu t\,J_1(\mu)$$

для определения неизвестных функций $H(t)$ и $p(z)$ получим следующую систему интегральных уравнений:

$$H(x)=\int_a^\infty H(t)\,K_{11}(t,x)\,dt+\int_{-h}^{h} p(t)\,K_{12}(t,x)\,dt+\Phi_1(x)\quad(a<x<\infty)\tag{3.1}$$

$$\int_{-h}^{h} p(y)\,dy\left[\frac{1}{x-y}-\frac{1-2\nu}{2}\pi\,\mathrm{sign}\,(x-y)+K_{21}(x,y)\right]+$$

$$+\int_a^\infty H(y)\,K_{22}(x,y)\,dy+\Phi_2(x)=0\quad(-h<x<h)\tag{3.2}$$

Здесь введены обозначения

$$K_{11}(t, x) = \int_0^\infty \left\{ \frac{\left[1 - \mu x + \mu \frac{K_0(\mu)}{K_1(\mu)}\right]\left[1 - \mu t + \mu \frac{K_0(\mu)}{K_1(\mu)}\right]}{\mu K_1^2(\mu) Z(\mu)} + \frac{I_1(\mu)}{K_1(\mu)} \right\} e^{-\mu(x+t)} d\mu$$

$$K_{12}(t, x) = \frac{1-\nu}{2G} \int_0^\infty \frac{\left[1 - \mu x + \mu \frac{K_0(\mu)}{K_1(\mu)}\right] e^{-\mu x} \cos \mu t d\mu}{\mu K_1(\mu) Z(\mu)}$$

$$K_{21}(x, t) = \int_0^\infty \frac{\sin \mu x \cos \mu t}{\gamma Z(\mu)} \left\{ (1 - 2\nu - \mu) \left[\left(1 - \frac{K_0^2(\mu)}{K_1^2(\mu)}\right) \mu - 1 \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2(1-\nu)(1-2\nu)}{\mu} - 1 \right\} d\mu$$

$$K_{22}(x, t) = \frac{2G}{1-\nu} \int_0^\infty \frac{\left[1 - \mu t + \mu \frac{K_0(\mu)}{K_1(\mu)}\right] \sin \mu x e^{-\mu t} d\mu}{K_1(\mu) Z(\mu)}$$

$$\Phi_1(x) = -\frac{1-\nu}{G} \int_x^\infty \frac{r \varphi(r) dr}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad \Phi_2(x) = -\frac{\pi G}{1-\nu} \Psi'(x)$$

Заметим, что интегралы $K_{11}(t, x)$, $K_{12}(t, x)$ и $K_{22}(t, x)$ сходятся равномерно по обеим переменным в интервалах их изменяемости и являются бесконечно дифференцируемыми функциями по обеим переменным. Функция $K_{21}(t, x)$ имеет суммируемую квадратом производную по обеим переменным в квадрате $|-h < x < h; -h < t < h|$.

Кроме того, имеет место также оценка

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |K_{11}(x, t)| dx dt < \infty$$

Допустим, что известные функции $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ заданы таким образом, что $\Phi(x)$ является непрерывной функцией от x $(-h < x < h)$, а $\Phi_1(x)$ имеет на бесконечности порядок выше $0(1/x)$.

4. Для сведения системы интегральных уравнений (3.1), (3.2) к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений функции $\overline{H}(x) = \frac{1}{x} H\left(\frac{1}{x}\right)$ и $p(x)$ представим в виде рядов соответственно по многочленам Лежандра и Чебышева первого рода

$$\overline{H}(x) = \sum_{n=1}^\infty a(4n-1) Y_n P_{2n-1}(ax) \tag{4.1}$$

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{T_{2n}(x/h)\,h}{\sqrt{h^2 - x^2}} \tag{4.2}$$

Подставляя (4.1) и (4.2) в (3.2), получим следующие бесконечные системы линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$

$$X_n = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} X_m A^{(2)}_{m,n} + \sum_{m=1}^{\infty} Y_m B^{(2)}_{m,n} + b^{(2)}_n \tag{4.3}$$

$$Y_n = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m B^{(1)}_{m,n} + \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} X_m A^{(1)}_{m,n} + b^{(1)}_n \tag{4.4}$$

где

$$A^{(1)}_{m,n} = \frac{1}{2}\int_0^{1/a} P_{2n-1}(ax)\,dx \int_{-h}^{h} \sqrt{h^2 - y^2}\, U_{2m-1}(y/h) \left| x^{-1} K_{12}\left(\frac{1}{x}, y\right)\right|_y' dy$$

$$B^{(1)}_{m,n} = \int_0^{1/a} P_{2n-1}(ax)\,dx \int_0^{1/a} [P_{2(m-1)}(ay) - P_{2m}(ay)] \left|(yx)^{-1} K_{11}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)\right|_y' dy$$

$$A^{(2)}_{m,n} = \frac{1}{\pi^2 h^2}\int_{-h}^{h} \sqrt{h^2 - x^2}\, U_{2n-1}(x/h)\,dx \int_{-h}^{h} \sqrt{h^2 - y^2}\, U_{2m-1}(y/h) \times$$

$$\times [K_{21}(x, y)]_y' dy - \frac{16h(1-2\nu)mn}{\pi[1 + 16(n^2 - m^2)^2 - 8n^2 - 8m^2]}$$

$$B^{(2)}_{m,n} = \frac{2}{\pi^2 h^2}\int_{-h}^{h} \sqrt{h^2 - x^2}\, U_{2n-1}(x/h)\,dx \int_0^{1/a} [P_{2(m-1)}(ay) -$$

$$- P_{2m}(ay)] \left| y^{-1} K_{22}\left(x, \frac{1}{y}\right)\right|_y' dy$$

$$b^{(1)}_n = \int_0^{1/a} P_{2n-1}(ax)\,\Phi_1(1/x)\,x^{-1} dx +$$

$$+ X_0 h \int_0^{1/a} P_{2n-1}(ax)\,dx \int_{-h}^{h} \frac{K_{12}(1/x, y)\,dy}{x\sqrt{h^2 - y^2}}$$

$$b^{(2)}_n = \frac{2}{\pi^2 h^2}\int_{-h}^{h} U_{2n-1}(x/h)\sqrt{h^2 - x^2}\,\Phi_2(x)\,dx +$$

$$+ \frac{2X_0}{\pi^2 h}\int_{-h}^{h} \sqrt{h^2 - x^2}\, U_{2n-1}(x/h)\,dx \int_{-h}^{h} \frac{K_{21}(x, y)\,dy}{\sqrt{h^2 - y^2}} - \frac{(1-2\nu)X_0 h}{\pi(4n^2 - 1)^2} 16n$$

Коэффициент X_n определяется из первого уравнения (2.5)

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n X_n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n + \frac{\pi G}{2(1-\nu)} \int_0^h \Psi(z)\, dz = 0$$

где

$$A_n = \frac{\pi h}{2}(-1)^n \int_0^{\infty} \frac{\sin \mu h J_{2n}(\mu h)\, d\mu}{\mu^2 Z(\mu)}$$

$$B_n = \frac{G}{1-\nu} \int_0^{1/a} \left[P_{2(n-1)}(y) - P_{2n}(y)\right] dy \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\left[1 - \mu/y + \mu \dfrac{K_0(\mu)}{K_1(\mu)}\right] \sin \mu h e^{-\mu/y}\, d\mu}{y \mu^2 K_1(\mu) Z(\mu)} \right\}_y$$

Учитывая свойства функций $K_{11}(x, t)$, $K_{12}(x, t)$, $K_{21}(x, t)$ и $K_{22}(x, t)$, а также асимптотическое представление [4]

$$P_n(\cos\theta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \frac{\cos\left[(n+1/2)\theta - \dfrac{\pi}{4}\right]}{(\sin\theta)^{1/2}}$$

для больших n получаем, что системы (4.3) и (4.4) квазивполне регулярны. Величина зоны контакта $z = h$ определяется из условия ограниченности нормальных напряжений

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n(h) = 0$$

Равнодействующая контактных напряжений $\sigma_z|_{z=0}$ $(1 < r < a)$ определяется из условия равновесия штампа

$$\int_1^a \sigma_z(r, z)|_{z=0}\, r dr = -\frac{P}{2\pi}$$

Авторы выражают благодарность проф. Б. А. Абрамяну за внимание к работе.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 30 XI 1979

Վ. Ս. ՄԱԿԱՐՅԱՆ, Ս. Հ. ՊԱՊՈՅԱՆ

ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՓՈՐՎԱԾՔՈՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ՄԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է կիսաանվերջ գլանային փորվածքով առաձգական կիսատարածության համար կոնտակտային խնդիրը, երբ փորվածքի մեջ սեղմվում է T-ի ձև ունեցող դրոշմը։

Վեբեր-Օրրի և Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների օգնությամբ խնդրի լուծումը բերվում է զույգ ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը։ Օգտագործելով Ջերիշեի և Լեժանդրի բազմանդամները վերջինիս լուծումը հանգեցվում է քվազի-լիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգերի լուծմանը։

ON THE CONTACT PROBLEM FOR ELASTIC SEMI-SPACE WITH SEMI-INFINITE CYLINDRICAL CAVITY

V. S. MAKARIAN, S. H. PAPOYAN

Summary

The contact problem for elastic semi-space with semi-infinite cylindical cavity is considered, where a punch of T-shape in its axial section is pressed in the cavity.

By means of Fourier and Weber-Orre's transforms the solution of the problem is reduced to a system of dual integral equations with combinations of Bessel's functions and a trigonometric function. After transformations the system is reduced to quasi-quite regular infinite systems of linear algebraic equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Некоторые осесимметричные контактные задачи для полупространства и упругого слоя с вертикальным цилиндрическим отверстием. Известия АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, № 2, 1969.
2. *Srivastav R. P., Narain Prem.* Stress distribution due to pressurized exterior crak in an infinite isotropic elastic medium with coaxial cylindrical cavity. Int. J. Engng. Sci., vol, 4, No 6, 1966.
3. *Bandyopadhyay K. K. and Kassir M. K.* Contact problems for solids containing cavities. J. of the Engng. Mech. Div., 1978, 104, No. 6.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 2. Функции Бесселя. М., 1966.
5. *Титчмарш Е.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. 1. М., Иниздат, 1960.
6. *Попов Г. Я.* О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1969, 33, вып. 3.
7. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками. ПММ, 1972, 36, вып. 5.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 1, 1980 Механика

Д. В. ГРИЛИЦКИЙ, А. А. ЕВТУШЕНКО, Г. Т. СУЛИМ

ПОЛУПЛОСКОСТЬ С ПРОИЗВОЛЬНО-ОРИЕНТИРОВАННЫМ ЛИНЕЙНЫМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

В последнее время напряженно-деформируемое состояние исследовано для большого числа геометрических объектов, содержащих дефекты типа трещин, включений, в том числе и тонкостенных. В работах [1—3] решены задачи плоской теории упругости для однородной и кусочно-однородной плоскости с тонким упругим включением конечной длины.

В данной работе предложена методика решения задач для полуплоскости с произвольно расположенным тонкостенным упругим включением. С помощью интегрального преобразования Фурье проблема сформулирована в виде системы интегральных уравнений с сингулярными ядрами типа Коши относительно неизвестных скачков напряжений и производных от смещений на кромках включения. Соответствующие системы интегральных уравнений для трещины и абсолютно жесткого включения получены как частные случаи. Приводится численный пример.

1. *Постановка задачи и вывод интегральных уравнений*

Рассмотрим упругую изотропную полуплоскость $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$, содержащую прямолинейное тонкостенное упругое включение ширины $2h$, срединная линия которого определяется условиями $a \leqslant s \leqslant b$, $\theta = \theta_0$ $(0 \leqslant \theta < \pi/2)$. Здесь, для удобства, наряду с декартовой системой координат xoy, введена система координат nos, полученная из системы xoy поворотом на угол θ_0. Предполагается, что внутри полуплоскости действует произвольная система сосредоточенных сил, а также однородное поле напряжений на бесконечности. Граница $L = \{(x, y)$: $-\infty < x < \infty, y = 0\}$ полуплоскости и кромки включения свободны от внешних усилий. Требуется определить напряженно-деформируемое состояние в теле, в частности, коэффициенты интенсивности напряжений на торцах $s = a$, $s = b$ включения.

Предположение о малой толщине включения позволяет моделировать его скачком напряжений и производных от смещений в однородной полуплоскости на отрезке, совпадающем со срединной линией реального включения:

$$\begin{gathered}
[\sigma_{nn}(s, +0) - i\sigma_{ns}(s, +0)] - [\sigma_{nn}(s, -0) - i\sigma_{ns}(s, -0)] = f_1(s) - if_2(s) \\
[u_s(s, +0) + iv_s(s, +0)] - [u_s(s, -0) + iv_s(s, -0)] = f_3(s) + if_4(s) \qquad (1.1) \\
(f_j(s) = 0, \ s \overline{\in} [a, b], \quad j = 1, 2, 3, 4)
\end{gathered}$$

Здесь $u_s = \dfrac{\partial u}{\partial s}$, $v_s = \dfrac{\partial v}{\partial s}$.

В рамках линейной теории упругости исследуемую проблему можно рассматривать как наложение двух задач: первой граничной задачи для полуплоскости без включения (задача «0») и смешанной граничной задачи для полуплоскости с математическим разрезом вдоль отрезка $[a, b]$ при следующих граничных условиях:

$$\sigma^*_{xy}(x, 0) = \sigma^*_{yy}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} \sigma^*_{nn}(s, \pm 0) &= \sigma_{nn}(s, \pm 0) - \sigma^0_{nn}(s, 0) \\ \sigma^*_{sn}(s, \pm 0) &= \sigma_{sn}(s, \pm 0) - \sigma^0_{sn}(s, 0) \\ u^*_s(s, \pm 0) &= u_s(s, \pm 0) - u^0_s(s, 0) \\ v^*_s(s, \pm 0) &= v_s(s, \pm 0) - v^0_s(s, 0) \end{aligned} \tag{1.3}$$

(задача „*").

Отметим, что решение задачи „*" на кромках щели будет иметь те же скачки $f_j(s)$ ($j = 1, 2, 3, 4$), что и изучаемая задача.

В свою очередь, функцию напряжений $\Phi^*(s, n)$ задачи „*" представим в виде

$$\Phi^*(s, n) = \Phi^1(s, n) + \Phi^2(s, n) \tag{1.4}$$

где $\Phi^1(s, n)$ определяет решение для неограниченной плоскости со скачками $f_j(s)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) на соответствующем разрезе (задача «1»); $\Phi^2(x, y)$ — функция напряжений для сплошной полуплоскости, загруженной вдоль границы L усилиями, которые равны по величине и противоположны по знаку напряжениям, определяемым на L функцией $\Phi^1(s, n)$ (задача «2»).

При отсутствии объемных сил решение уравнений равновесия для двумерного упругого тела сводится к решению бигармонического уравнения [5]

$$\Delta_2\Delta_2\Phi^1 = 0$$

общее решение которого с помощью интегрального преобразования Фурье представим в форме

$$\Phi^1(s, n) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^1(\zeta, n)\exp(-i\zeta s)\,d\zeta \tag{1.5}$$

где

$$\begin{aligned} &[A_1(\zeta) + n\xi A_2(\zeta)]\exp(-n\xi), \quad n > 0 \\ &[A_3(\zeta) + n\xi A_4(\zeta)]\exp(n\xi), \quad n < 0 \end{aligned}$$

$\xi = |\zeta|$, $A_i(\zeta)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) — в общем случае комплексные функции, определяемые из граничных условий задачи.

Принимая во внимание, что граничные условия задачи «1» записываются аналогично (1.1), а компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\sigma^1_{nn} = \frac{\partial^2 \Phi^1}{\partial s^2}, \quad \sigma^1_{ss} = \frac{\partial^2 \Phi^1}{\partial n^2}, \quad \sigma^1_{sn} = -\frac{\partial^2 \Phi^1}{\partial s \partial n}$$

с помощью закона Гука получаем алгебраическую систему уравнений для определения $A_j(\xi)$ в виде несобственных интегралов от неизвестных пока функций $f_j(s)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$. Интегрируя по ξ с использованием трансформант Фурье [6], находим

$$\sigma^1_{ss}(s, n) = (2\pi)^{-1} \int_a^b \{[k_1^1/k_0^1 g_1(s, n) + m_1 g_2(s, n)] f_1(t) +$$

$$+ [m_2 g_3(s, n) + m_3 g_4(s, n)] f_2(t) + [g_1(s, n) + g_2(s, n)] f_3(t)/(2k_0^1) +$$

$$+ [g_3(s, n) - g_4(s, n)] f_4(t)/(2k_0^1)\} \, dt$$

$$\sigma^1_{nn}(s, n) = (2\pi)^{-1} \int_a^b \{[g_1(s, n) - m_1 g_2(s, n)] f_1(t) +$$

$$+ [m_3 g_3(s, n) - m_1 g_4(s, n)] f_2(t) - g_2(s, n) f_3(t)/(2k_0^1) +$$

$$+ [g_3(s, n) + g_4(s, n)] f_4(t)/(2k_0^1)\} \, dt$$

$$\sigma^1_{sn}(s, n) = (2\pi)^{-1} \int_a^b \{[-m_3 g_3(s, n) + m_1 g_4(s, n)] f_1(t) +$$

$$+ [g_1(s, n) + m_1 g_2(s, n)] f_2(t) + [g_3(s, n) - g_4(s, n)] f_3(t)/(2k_0^1) -$$

$$- g_2(s, n) f_4(t)/(2k_0^1)\} \, dt$$

$$u^1_s(s, n) = (2\pi)^{-1} \int_a^b \{m_1^2 g_2(s, n) f_1(t) 2k_0^1 +$$

$$+ [m_4 g_3(s, n) + m_1^2 g_4(s, n)] f_2(t) 2k_0^1 + [g_1(s, n) + m_1 g_2(s, n)] f_3(t) +$$

$$+ [m_3 g_3(s, n) - m_1 g_4(s, n)] f_4(t)\} \, dt$$

$$v^1_s(s, n) = (2\pi)^{-1} \int_a^b \{[m_4 g_3(s, n) - m_1^2 g_4(s, n)] f_1(t) 2k_0^1 +$$

$$- m_1^2 g_2(s, n) f_2(t) 2k_0^1 - [m_3 g_3(s, n) + m_1 g_4(s, n)] f_3(t) +$$

$$+ [g_1(s, n) - [m_1 g_2(s, n)] f_4(t)\} \, dt \qquad (1.6)$$

Здесь

$$g_1(s,\ n) = \frac{2n}{(t-s)^2+n^2}, \qquad g_2(s,\ n) = n\,\frac{(t-s)^2-n^2}{[(t-s)^2+n^2]^2}$$

$$g_3(s,\ n) = \frac{t-s}{(t-s)^2+n^2}, \qquad g_4(s,\ n) = \frac{2n^2(t-s)}{[(t-s)^2+n^2]^2}$$

$$m_1 = (1 + k_1^1/k_0^1)/2, \qquad m_2 = -(1 + k_2^1/k_0^1)/2$$

$$m_3 = (3 - k_2^1/k_0^1)/2, \qquad m_4 = (m_2 - k_1^1/k_0^1 m_3)/2$$

$$k_0^p = (1+\varkappa_p)/(8\mu_p), \quad k_1^p = (3-\varkappa_p)/(8\mu_p), \quad k_2^p = (5+\varkappa_p)/(8\mu_p)$$

$$\mu_p = E_p/[2(1+\nu_p)]$$

$$\varkappa_p = \begin{cases} 3-4\nu_p & \text{— в случае плоской деформации;} \\ (3-\nu_p)/(1+\nu_p) & \text{— в случае обобщенного плоского напряженного состояния;} \end{cases}$$

E_p, ν_p — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала матрицы ($p=1$) и включения ($p=0$) соответственно.

С помощью интегрального представления функции напряжений $\Phi^2(x,\ y)$

$$\Phi^2(x,\ y) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(\zeta,\ y)\, e^{-i\zeta x}\, d\zeta \tag{1.7}$$

где

$$\varphi^2(\zeta,\ y) = [B_1(\zeta) + \zeta y B_2(\zeta)] \exp(-\zeta y)$$

Согласно формулам (1.2), (1.4) имеем

$$\frac{\partial^2\Phi^2}{\partial x^2} = -\alpha^2 \frac{\partial^2\Phi^1}{\partial n^2} - \beta^2 \frac{\partial^2\Phi^1}{\partial s^2} - 2\alpha\beta \frac{\partial^2\Phi^1}{\partial s \partial n}$$

$$\frac{\partial^2\Phi^2}{\partial x \partial y} = -\alpha\beta \left(\frac{\partial^2\Phi^1}{\partial s^2} - \frac{\partial^2\Phi^1}{\partial n^2} \right) - (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2\Phi^1}{\partial s \partial n} \text{ на } L$$

$$(\alpha = \cos\theta_0, \quad \beta = \sin\theta_0)$$

Отсюда, учитывая (1.5), (1.7), нетрудно записать систему двух алгебраических уравнений для определения неизвестных $B_j(\zeta)$ ($j=1,\ 2$). Решив эту систему и производя несложные выкладки, получим

$$\sigma_{xx}^2(x,\ y) = (\pi)^{-1} \sum_{j=1}^{4} \int\limits_a^b S_{1j}(x,\ y,\ t) f_j(t)\, dt$$

$$\sigma_{yy}^2(x,\ y) = (\pi)^{-1} \sum_{j=1}^{4} \int\limits_a^b S_{2j}(x,\ y,\ t) f_j(t)\, dt$$

$$\sigma^2_{xy}(x, y) = (\pi)^{-1} \sum_{j=1}^{4} \int_a^b S_{3j}(x, y, t) f_j(t)\, dt$$

$$u^2_*(x, y) = k^1_0 \sigma^2_{xx}(x, y) - k^1_1 \sigma^2_{yy}(x, y)$$

$$v^2_*(x, y) = (\pi)^{-1} \sum_{j=1}^{4} \int_a^b S_{4j}(x, y, t) f_j(t)\, dt \tag{1.8}$$

где $S_{ij}(x, y, t)$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ — вполне регулярные функции, явные выражения которых не приводятся вследствие некоторой их громоздкости.

Имея функции $\Phi^1(s, n)$, $\Phi^2(x, y)$, путем суммирования определяем напряженно-деформируемое состояние рассматриваемого тела в любой его точке:

$$\sigma_{nn}(s, n) = \sigma^0_{nn}(s, n) + \sigma^1_{nn}(s, n) + \sigma^2_{nn}(s, n)$$

$$\sigma_{sn}(s, n) = \sigma^0_{sn}(s, n) + \sigma^1_{sn}(s, n) + \sigma^2_{sn}(s, n)$$

$$u_*(s, n) = u^0_*(s, n) + u^1_*(s, n) + u^2_*(s, n)$$

$$v_*(s, n) = v^0_*(s, n) + v^1_*(s, n) + v^2_*(s, n) \tag{1.9}$$

Переходя в (1.9) к пределу, когда $n \to +0$, получим следующие выражения характеристик напряженно-деформируемого состояния на верхнем берегу включения

$$\sigma_{nn}(s, +0) = \sigma^0_{nn}(s) + f_1(s)/2 + m_3 t_2(s) + t_4(s)/(2k^1_0) + K_1(s)$$

$$\sigma_{sn}(s, +0) = \sigma^0_{sn}(s) + f_2(s)/2 - m_3 t_1(s) + t_3(s)/(2k^1_0) + K_2(s)$$

$$u_*(s, +0) = u^0_*(s) + f_3(s)/2 - m_1 t_4(s) + m_3 t_4(s) + 2k^1_0 K_3(s)$$

$$v_*(s, +0) = v^0_*(s) + f_4(s)/2 + m_1 t_1(s) - m_3 t_1(s) + 2k^1_1 K_4(s) \tag{1.10}$$

Значения для соответствующих величин на нижней кромке включения определяются из (1.1) и (1.10). В соотношениях (1.10) приняты обозначения

$$t_p(s) = (2\pi)^{-1} \int_a^b \frac{f_p(t)\, dt}{t - s}, \qquad K_p(s) = (\pi)^{-1} \sum_{j=1}^{4} \int_a^b R_{pj}(s, t) f_j(t)\, dt$$

$$(p = 1, 2, 3, 4)$$

$$R_{1j}(s, t) = S_{1j}(\beta s, \alpha s, t) + S_{2j}(\beta s, \alpha s, t)\cos 2\theta_0 - S_{3j}(\beta s, \alpha s, t)\sin 2\theta_0$$

$$R_{2j}(s, t) = S_{2j}(\beta s, \alpha s, t)\sin 2\theta_0 + S_{3j}(\beta s, \alpha s, t)\cos 2\theta_0$$

$$R_{3j}(s, t) = m_3 S_{1j}(\beta s, \alpha s, t) - m_1[S_{2j}(\beta s, \alpha s, t)\cos 2\theta_0 - S_{3j}(\beta s, \alpha s, t)\sin 2\theta_0]$$

$$R_{4j}(s, t) = [m_3 S_{1j}(\beta s, \alpha s, t) - m_1 S_{1j}(\beta s, \alpha s, t)]\alpha +$$

$$+ [k^1_2/(2k^1_0)\, S_{3j}(\beta s, \alpha s, t) - S_{4j}(\beta s, \alpha s, t)/2]\beta$$

Подстановка соотношений (1.10) в условия взаимодействия тонкостенного упругого включения с матрицей [3] приводит к системе сингулярных интегральных уравнений

$$t_2(s) + \lambda_{11}t_1(s) + \lambda_1\int_a^b f_2(t)\,dt - \lambda_{12}K_3(s) - \lambda_{13}K_2(s) = F_1(s)$$

$$t_3(s) + \lambda_{21}t_1(s) + \lambda_2\int_a^b f_3(t)\,dt - \lambda_{22}K_2(s) + \lambda_{23}K_1(s) = F_2(s)$$

$$t_4(s) + \lambda_{31}t_2(s) + \int_a^b [\lambda_3 f_3(t) + \lambda_4 f_4(t)]\,dt - \lambda_{32}K_1(s) = F_3(s)$$

$$f_4(s) = -k_3^0 f_1(s), \quad s \in [a, b] \tag{1.11}$$

Здесь

$$F_1(s) = [k_0^0 N_a - u_*^0(s) - k_1^0\sigma_{nn}(s)]/\Delta_1$$

$$F_2(s) = \mu_0[v_*^0(s) - \sigma_{sn}^0(s)/\mu_0 - c_a/(2h)]/\Delta_2$$

$$F_3(s) = [\sigma_{nn}(s) + d_a/(2hk_0^0) - N_a k_1^0/k_0^0]/\Delta_3$$

$$\lambda_{11} = (m_2 - k_1^0/k_0^1)/(4\Delta_1), \quad \lambda_{12} = k_1^0/\Delta_1, \quad \lambda_{13} = 1/\Delta_1$$

$$\lambda_{21} = (-m_3 + 4\mu_0 m_1)/(4\Delta_2), \quad \lambda_{22} = 1/\Delta_2, \quad \lambda_{23} = \mu_0/\Delta_2$$

$$\lambda_{31} = m_3/\Delta_3, \quad \lambda_{32} = 1/\Delta_3, \quad \lambda_1 = k_0^0/(2h\Delta_1), \quad \lambda_2 = -\mu_0/(2h\Delta_2)$$

$$\lambda_3 = k_1^0/(2kk_0^0\Delta_3), \quad \lambda_4 = -1/(2hk_0^0\Delta_3), \quad \Delta_1 = -m_4 + k_1^0 m_2$$

$$\Delta_2 = m_3\mu_0 - 1/(4k_0^1), \quad \Delta_3 = 1/(4k_0^1), \quad k_3^0 = [(k_1^0)^2 - (k_0^0)^2]/k_1^0$$

Искомые функции удовлетворяют дополнительным условиям

$$\int_a^b f_j(t)\,dt = A^j \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{1.12}$$

$$A^1 = 0, \quad A^2 = 2h(N_b - N_a), \quad A^3 = c_b - c_a, \quad A^4 = d_b - d_a$$

Нормальные напряжения N_s на торцах включения, а также перемещения c_s, d_s $(s = a,\ b)$ нижней точки торца включения относительно верхней его точки вычисляются по формулам работы [3].

В случае абсолютно жесткого включения $(E_* = \infty)$ система (1.11) преобразуется к виду

$$m_1 t_1(s) - K_3(s) = -v_*^0(s)$$

$$m_1 t_2(s) - K_1(s) = -u_*^0(s) \tag{1.13}$$

$$f_3(s) = f_4(s) = 0, \quad s \in [a, b]$$

Когда же $E_* = 0$, получаем систему сингулярных интегральных уравнений для трещины в полуплоскости

$$\Lambda_1 f_1(s) + K_1(s) = \sigma^n_{x1}(s)$$

$$\Lambda_3 f_3(s) + K_2(s) = \sigma^0_{xn}(s)$$

$$f_1(s) = f_2(s) = 0, \quad s \in [a,\ b] \tag{1.14}$$

Уравнения (1.14) совпадают с таковыми работы [7].

2. *Решение системы сингулярных интегральных уравнений*

Решение системы сингулярных интегральных уравнений (1.11) ищем в виде

$$f_j(\zeta) = \left| A_0^j + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^j T_n(\zeta) \right| / \sqrt{1-\zeta^2} \qquad (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{2.1}$$

где $\zeta = (s + c)/a_0$, $2a_1 = b - a$, $2c = b + a$, $T_n(\zeta)$ — полиномы Чебышева первого рода. Подставляя (2.1) в условия (1.12) и интегрируя, получаем

$$A_0^j = A^j/(a_0\pi) \tag{2.2}$$

Подстановка ряда (2.1) в систему интегральных уравнений (1.11) и обычная процедура метода ортогональных полиномов приводят к системе алгебраических уравнений для определения искомых коэффициентов разложений

$$k_{11} A^4_{k+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left| (\delta_{k+1,n} - k_1 B_{n+1,k}) A^2_n + \sum_{j=1}^{4} H^{1j}_{n,k} A^j_n \right| = F^1_k$$

$$k_{21} A^1_{k+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left| (\delta_{k+1,n} - k_2 B_{n+1,k}) A^3_n - \sum_{j=1}^{4} H^{2j}_{n,k} A^j_n \right| = F^2_k$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (t_{31}\delta_{k+1,n} - k_3 B_{n+1,k}) A^2_n + (\delta_{k+1,n} - k_4 B_{n+1,k}) A^4_n + \sum_{j=1}^{4} H^{3j}_{n,k} A^j_n \right| = F^3_k$$

$$A^3_{k+1} = -k^0_3 A^1_{k+1}, \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots \tag{2.3}$$

где δ_{kn} — символ Кронекера и

$$F^1_k = G^1_k + k_1 B_{-1,k} A^2_0 - \sum_{j=1}^{4} H^{1j}_{0k} A^j_0$$

$$F^2_k = G^2_k + k_2 B_{-1,k} A^3_0 - \sum_{j=1}^{4} H^{2j}_{0k} A^j_0$$

$$F^3_k = G^3_k - (k_3 A^2_0 + k_4 A^4_0) B_{-1,k} - \sum_{j=1}^{4} H^{3j}_{0k} A^j_0$$

$$G^p_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} Q_p(\zeta) U_k(\zeta) \sqrt{1-\zeta^2}\, d\zeta$$

$$Q_1(\zeta) = F_1(\zeta) - A^2\dot{\gamma}_1/(2a_0), \qquad Q_2(\zeta) = F_2(\zeta) - A^1\dot{\gamma}_2/(2a_0)$$

$$Q_3(\zeta) = F_3(\zeta) - (\dot{\gamma}_3 A^2 + \dot{\gamma}_4 A^1)/(2a_0), \qquad \dot{\gamma}_j = a_0\gamma_j$$

$$B_{n-1,k} = 1/(n^2 - k^2) - 1/[n^2 - (k+2)^2]$$

$$H^{pj}_{nk} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} U_k(\zeta)\sqrt{1-\zeta^2}\int_{-1}^{1} h_{pj}(\zeta,\tau)\,T_n(\tau)\,(1-\tau^2)^{-1/2}\,d\tau\,d\zeta$$

$$h_{1j}(\zeta,\tau) = -\gamma_{11}R_{1j}(\zeta,\tau) - \gamma_{13}R_{3j}(\zeta,\tau)$$

$$h_{2j}(\zeta,\tau) = -\gamma_{22}R_{2j}(\zeta,\tau) + \gamma_{23}R_{4j}(\zeta,\tau)$$

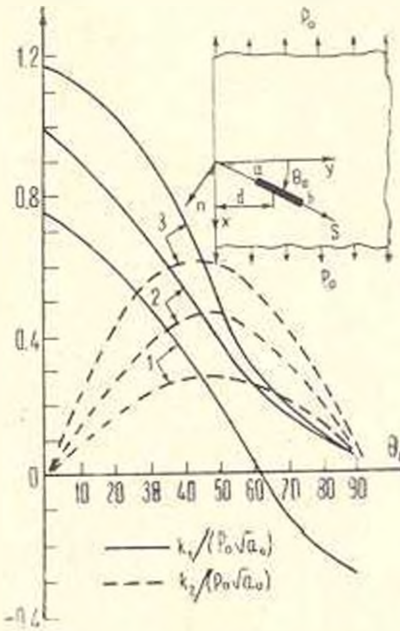
$h_{3j}(\zeta,\tau) = -\gamma_{32}R_{1j}(\zeta,\tau)$, $U_k(\zeta)$ — полиномы Чебышева второго рода: ($p = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$; $k, n = 0, 1, 2\ldots$).

Для примера более подробно рассмотрен случай упругого равновесия композита под действием усилий $\sigma_{xx}^{\infty} = p_0$. Коэффициенты интенсивности напряжений у левого торца включения определяются формулами

$$\{k_1, k_2\} = \lim_{s \to a-0}\left[\sqrt{2(a-s)}\,\{\sigma_{nn}(s,0), \sigma_{ns}(s,0)\}\right]$$

Система уравнений (2.3) решалась методом редукции. Контроль сходимости проводился путем сравнения функций $f_j^N(x)$ ($j = 1, 4$), вычисленных при $N = M$ и $N = 2M$ соответственно. В рассмотренном примере для достижения точности вычислений в 5% оказалось возможным, в зависимости от относительной жесткости включения E_0/E_1, ограничиться решением системы уравнений от 15-го до 30-го порядка. Вычисления проводились при фиксированном расстоянии $d = c\alpha = 2a_0$ центра включения от границы полуплоскости.

На графике представлена зависимость безразмерных коэффициентов интенсивности напряжений $k_i^* = k_i/(p_0\sqrt{a_0})$ ($i=1, 2$), где $p_0\sqrt{a_0}$ — значение коэффициента интенсивности напряжений для бесконечной плоскости с трещиной длины $2a_0 = b - a$, от угла наклона включения θ_0. Кривые 3—1 соответствуют следующим значениям относительной жесткости E_0/E_1: 0.01, 0.1, 10.0. Результаты, полученные при $E_0/E_1 = 0.01$, отличаются от соответствующего решения для полуплоскости с трещиной [4] не более, чем на 2—3 %.



Фиг. 1.

Львовский ордена Ленина
госуниверситет им. Ивана Франко

Поступила 10 I 1979

Վ. Դ. ԳՐԻԼԻՑԿԻ, Ա. Ա. ԵՎՏՈՒՇԵՆԿՈ, Գ. Տ. ՍՈՒԼԻՄ

ԿԱՄԱՎՈՐ ՈՒՂՂՎԱԾ ԳԾԱՅԻՆ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՆԵՐԴՐԱԿՈՎ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Գծային թերություններով միջավայրերի համար առաձգականության տեսության հարթ խնդիրների լուծման համար զարգացվում է եղանակ, որը հիմնված է ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդի կիրառման վրա։

Դիտարկվում է վերջավոր երկարությամբ բարակ առաձգական ներդրումով իզոտրոպ կիսահարթությունը։ Բերվում է թվային օրինակ։

SEMI-PLANE WITH LINEAR ELASTIC INCLUSION OF ARBITRARY ORIENTATION

D. V. GRILITSKI, A. A. JEVTUSHENKO, G. T. SULIM

S u m m a r y

An approach to solving the plare-theory-of-elasticity problems for media with linear defects is considered. This approach is based on the integral transformation method for bodies with cracks in the case of isotropic semi-plane with thin elastic inclusion of finite length.

A numerical example is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хачикян А. С.* Равновесие плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины. Изв. АН АрмССР, Механика, 1970, т. 23, № 3, стр. 14—22.
2. *Сулим Г. Т., Грилицкий Д. В.* Напряженное состояние кусочно-однородной плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 11, стр. 58—65.
3. *Грилицкий Д. В., Сулим Г. Т.* Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3, стр. 520—529.
4. *Erdogan F., Arin K.* A half plane and strip with an arbitrarily located crack. Int. Jorn. of Fract., April 1975, v. 11, No. 2, pp. 191—204.
5. *Снеддон И.* Интегральные преобразования Фурье. И.Л. М., 1955.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований, т. I, II. М., «Наука», 1969, 1970.
7. *Krenk S.* The problem of an inclined cracking an elastic strip. Rapp. Afd. baerende konstr. Danm. tekn. hjsk., 1974, 11, No 50, 42 pp.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIII, № 1, 1980 Механика

А. Г. БАГДОЕВ

РАССМОТРЕНИЕ ДИФРАКЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ АСИМПТОТИКИ

Пусть в произвольной неоднородной диспергирующей нелинейной среде распространяется квазимонохроматическая волна $u=\psi e^{i\bar\tau}$, где $\bar\tau=\gamma(x_k)-\omega_0 t$ есть эйконал основной немодулированной волны в линейной задаче, ψ — комплексная медленно меняющаяся малая амплитуда [1—3], t — время, x_k — пространственные координаты, $\omega=\omega_{00}$ — невозмущенная частота. Для получения уравнения, описывающего изменение функции $\psi(x_k, t)$ для произвольной среды, следуя [3], можно вначале рассмотреть линейную постановку задачи, в которой среда описывается уравнением

$$\Delta\left(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\frac{\partial}{\partial x_k}\right)u=0 \quad (k=1, 2, 3) \tag{1.1}$$

где Δ — заданный линейный операторный многочлен. Для волн высокой частоты значения $\omega_{00}=-\frac{\partial\bar\tau}{\partial t}$ и волнового вектора $\alpha_k^{(0)}=\frac{\partial\bar\tau}{\partial x_k}$ велики, поэтому при дифференцировании $u=\psi e^{i\bar\tau}$ основными являются слагаемые, получаемые от производных экспоненциального множителя, которые дают дисперсионное соотношение линейной задачи

$$\Delta(\omega, \alpha_k)=0, \quad \omega=\omega_0(\alpha_k), \quad \alpha_1=\alpha_1(\alpha_2, \alpha_3, \omega)$$

При удерживании слагаемых с более низкой степенью ω при вычислении Δu применяется формула Лейбница [3] и оставляются производные до второго порядка от ψ включительно. Вместо координат x_k вводятся лучевые координаты τ, θ, ζ, где $\theta=\mathrm{const}$, $\zeta=\mathrm{const}$ дают уравнения лучей. В силу однопараметрического произвола в выборе θ, ζ можно считать линии пересечения указанных поверхностей с волной $\tau=0$ ортогональными и отсчитывать вдоль них координаты z, y соответственно, где $dy=H_\theta d\theta$, $dz=H_\zeta d\zeta$, $H_{\theta,\zeta}$ — параметры Ламе. Тогда можно записать для ψ линейное уравнение [3]. Для получения соответствующего нелинейного уравнения следует знать нелинейное дисперсионное соотношение

$$\omega=\omega_0(\alpha_k)+\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2, \quad a=|\psi| \tag{1.2}$$

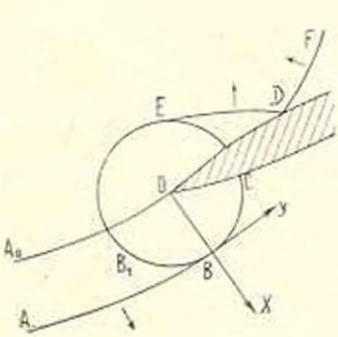
которое обычно находится из осредненного вариационного принципа [3].

Полагая $\omega = \omega_{00} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $\alpha_k = \alpha_k^{(0)} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ и оставляя члены до второго порядка по φ, можно получить из (1.2) уравнение для фазы φ. С другой стороны, в вышеуказанном линейном уравнении [3] для ψ можно полагать $\psi = ue^{i\varphi}$ и отделить действительную часть. Сравнение двух подходов позволяет получить для ψ нелинейное уравнение Шредингера [3]

$$i\Delta_\omega \frac{\partial \psi}{\partial t}\bigg|_\xi - i\Delta_\omega \frac{\partial \ln K}{\partial t}\bigg|_\xi - \frac{1}{2}\Gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \Lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \vartheta} + \Lambda_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \zeta} -$$

$$- \frac{1}{2}\Delta_{\alpha_1}\left(\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_3^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}\right) = \Delta_\omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 |\psi|^2 \psi \quad (1.3)$$

Здесь $\xi = \mathrm{const}$ дает уравнение точки, движущейся вдоль луча с групповой скоростью $C_k = \frac{\partial \omega_0}{\partial \alpha_k}$, значения коэффициентов Γ, Λ, Λ_1 указаны в [3]. K есть лучевое решение на волне. В настоящей работе рассматривается типично дифракционная задача. Постановка указанной задачи следующая. При падении монохроматической волны на экран в форме произвольного криволинейного угла образуются области существенно двумерного изменения параметров в окрестности дифракционных лучей (OB и OE фиг. 1). Первый отделяет области света и тени, причем вблизи OB имеется лишь одна падающая волна AB, поэтому можно использовать уравнение (1.3). При этом в качестве основной волны можно взять волну B_1BC, рассеянную вершиной угла O, которая далее называется точечной волной. Как показывает линейное решение для случая плоской волны AB и волнового уравнения [4] вблизи OB решение записывается через интегралы Френеля. В [3] показано, что та же форма решения сохраняется и для произвольной линейной среды и произвольной волны AB. В окрестности OB можно записать для указанного решения



Фиг. 1.

$$\psi = \frac{A}{2\sqrt{k_1 - k_2}\, s} e^{\frac{s}{k^2}} \left\{1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{s}}{k}\right)\right\}, \qquad \frac{1}{k} = \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\sqrt{2c_0(k_1 - k_2)}} \quad (1.4)$$

где $s = -i\omega$, ϑ_0 — значение ϑ вдоль OB, k_1 — кривизна обращенных точечных волн, k_2 — кривизна волны AB (фиг. 1) в начальном положении OA_0, c_0 — нормальная проекция фазовой скорости волны в начальной точке O, $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ можно выразить через интегралы Френеля. В (1.3) $K = A$ есть лучевое решение на волне B_1BC.

Следует отметить, что, как видно из (1.4), для дифракционных задач слагаемые в (1.3), содержащие Γ, Λ, Λ_0, имеют более высокий порядок малости [3], причем в линейной плоской задаче имеет место уравнение

$$i\Delta_\omega \frac{\partial\psi}{\partial t}\Big|_z - \frac{1}{2}\Delta_a \frac{\partial^2\tau}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2\psi}{H_2^2\partial\theta^2} - i\Delta_\omega\psi\frac{\partial \ln K}{\partial t}\Big|_z = 0$$

где $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$. Подставляя сюда (1.4), можно убедиться в его удовлетворении при выполнении соотношений $K = A$

$$\frac{\partial k_1}{\partial t}\Big|_z = -\frac{\omega\Delta_2}{\Delta_1}\frac{\partial^2\tau}{\partial\beta^2}\frac{1}{H_2^2 c_0}$$

Поскольку $k_1 = k_1(\tau_1)$, $\tau_1 = \frac{\bar\tau}{\omega}$ и вдоль луча $\frac{\partial\tau_1}{\partial t}\Big|_z = \frac{\partial\tau_1}{\partial x_k}C_k = \frac{C_n}{c_n}$, где $C_n = -\frac{\Delta_\tau}{\Delta_\omega}$ и c_n — проекции групповой и фазовой скорости на нормаль к волне, можно получить уравнение

$$\frac{dk_1}{d\tau_1} = \frac{c_n\frac{\partial^2\tau}{\partial\beta^2}\omega}{H_2^2 c_0}$$

которое проверяется непосредственными вычислениями для однородной среды и представляет нетривиальное соотношение для неоднородной среды. Уравнение (1.3) может быть записано в лучевых координатах, связанных не с точечной волной B_1BC, а с волной AB (фиг. 1). Для этого следует ввести лучи, связанные с волной AB, определяемые уравнениями $\bar s = \text{const}$, где $\bar s$ представляет длину дуги начального положения OA, волны AB. Согласно [5] имеет место соотношение, связывающее $\bar s$ с лучевой координатой θ для точечной волны

$$\bar s = \frac{\theta_0 - \theta}{k_1 - k_2}$$

Можно также ввести эйконал волны AB

$$\tilde\tau_1 = \frac{\bar\tau}{2\omega} + \tau_1 - \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2c_0(k_1 - k_2)}$$

где $\tilde\tau_1 = \text{const}$ дает уравнение AB в линейной задаче. Указанная форма $\tilde\tau_1$ получается из записи уравнения волны относительно точечной волны [5], а также из асимптотики решения (1.4) для больших $\frac{\sqrt{\bar s}}{k}$ [3].

Тогда, полагая $u = \psi e^{i\bar\tau}$, $\bar\tau = \tilde\tau_1\omega$, $\tilde t = \tilde\tau_1 - t$, можно снова получить уравнение (1.3), в котором заменено τ_1 на $\tilde\tau_1$, K есть лучевое решение на AB, равное [5] $B = \frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}}$, и удобно полагать в (1.3)

$$\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{H_1(k_1 - k_2)}\frac{\partial}{\partial s}$$

Линейное решение вместо (1.4) можно взять в виде

$$\psi = \frac{B}{2\omega}\{1 - \Phi(\zeta)\}, \qquad \zeta = -\frac{\sqrt{-i\omega}\,\bar{s}\sqrt{k_1 - k_2}}{\sqrt{2c_0}} \tag{1.5}$$

Из (1.5) для $\bar{s} \to -\infty$ получится $\psi \to 0$, а для $\bar{s} \to \infty$ $\psi \to \frac{B}{\omega}$, то есть (1.5) переходит в решение для падающей волны. Нелинейные уравнения вблизи OB (фиг. 1) получаются из (1.3), записанного для координат δ, $\bar{s}$, t в плоской дифракционной задаче в виде

$$(a^2)_t\Big|_\xi - a^2 \frac{\partial \ln K^2}{\partial t}\Big|_\xi - \frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(a^2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0 \tag{1.6}$$

$$\varphi_t\Big|_\xi - \frac{1}{2}\frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2a}\frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 = 0$$

где

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_\xi = \frac{C_n}{c_n}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{\xi, y}$$

Главные члены асимптотики нелинейного решения вдали от луча OB соответствуют отбрасыванию производных от a по y и вблизи точечной волны BC, где $\theta \gg \theta_0$, имеют вид

$$\psi_p = a_p e^{i\varphi_p}, \qquad a_p = -\frac{\sqrt{c_0}\,K}{\sqrt{2\pi}\,\omega^{3/2}\sqrt{k_1 - k_2}\,\bar{s}} \tag{1.7}$$

$$\varphi_p = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega(k_1 - k_2)\bar{s}^2}{2c_0} - \int_0^t \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a_p^2\,dt$$

где p указывает точечную волну. Вблизи волны AB вдали от луча OB $\theta \ll \theta_0$

$$a = \frac{k}{\omega}, \qquad \varphi = \int_0^t \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 \frac{K^2}{\omega^2}\,dt \tag{1.7a}$$

Ясно, что величины $\tau_1 + \varphi$ в асимптотическом решении [1] и $\delta_1 + \varphi$ по (1.7), (1.7a) совпадают. Теперь можно численно решать уравнения (1.6) с начальными условиями, взятыми из линейного решения (1.5), которое может быть записано через интегралы Френеля

$$C(x) = \int_0^x \cos\frac{\pi}{2}t^2 dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin\frac{\pi}{2}t^2 dt$$

$$\psi = p + iq, \qquad p = \frac{K}{2\omega} - \frac{K}{2\omega}\left\{C\left(\zeta'\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) + S\left(\zeta'\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right\}$$

$$\zeta = -\frac{\sqrt{\omega s}\sqrt{k_1 - k_2}}{\sqrt{2c_0}}, \quad q = -\frac{K}{2\omega}\left\{S\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) - C\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right\} \tag{1.8}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{q}{p}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left\{\frac{1}{2} - C\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right\}^2 + \left\{\frac{1}{2} - S\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right\}^2}$$

Согласно (1.8) получается, что при $\bar{s} = 0$ $a = \frac{k}{2\omega}$, в области тени $\bar{s} < 0$ a монотонно стремится к нулю, при $\bar{s} > 0$ a осциллирует около значения $\frac{k}{\omega}$, φ при $\bar{s} < 0$ монотонно растет [10]. Для проведения расчетов следует конкретизировать коэффициенты в уравнениях (1.6) и решении (1.8). В случае однородной среды и плоской волны AB имеют место соотношения [5] $\bar{s} = -y$, $k_2 = 0$, $k_1 = -\frac{1}{\omega\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}t}$, $K = \mathrm{const}$.

Обозначая $\frac{y}{\sqrt{-c_0\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}}} = \mu$, можно (1.6) записать в виде

$$u_n = \left(\frac{\partial\omega_n}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=\alpha_0} \frac{\partial a^2}{\partial t}\bigg|_{\alpha,\mu} + \frac{\partial}{\partial\mu}\left(a^2\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right) = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{\alpha,\mu} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 - \frac{1}{2a}\frac{\partial^2 a}{\partial\mu^2} + \frac{c_0}{u_n}\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 = 0$$

где учтено, что для производной вдоль луча в силу стационарности задачи $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_z = \frac{\partial}{\partial t} + c_0\frac{\partial}{\partial x} = u_n\frac{\partial}{\partial x} = \frac{u_n}{c_0}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{x,y}$, что согласуется с предыдущим. Полученные уравнения решаются при условии (1.8), удовлетворяемым для малого $t = t_0$. Для уравнений с переменными коэффициентами и волны AB произвольного вида следует решать систему уравнений (1.6), где вместо y введено $\bar{s}$ и $\frac{\partial}{\partial t}\Big| = \frac{C_*}{c_*}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{s,\tau}$. Линейное решение (1.5) соответствует одномерному по ζ решению $\psi = f(\zeta)$. Для небольших t можно и в нелинейной задаче считать верной указанную зависимость и получить для однородной среды уравнение

$$f''(\zeta) + 2\zeta f'(\zeta) = i\frac{4tc_0}{u_n}\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 |f|^2 f, \quad \zeta = \sqrt{-\frac{i\omega}{2}}\frac{y}{c_0\sqrt{t}}$$

При $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 \sim \frac{1}{t}$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение. Отбрасывая правую часть, можно получить линейное решение, а в нелинейной задаче, игнорируя зависимостью $f(\zeta, t)$ от t, можно решить полученное уравнение для фиксированного t, определяя поперечное изменение ψ вблизи луча OB. Можно получить также точное уравнение для $f(\xi)$, полагая $\psi = \frac{f(\xi)}{\sqrt{t}}$. Для произвольных t следует решать уравнения относительно двух независимых переменных t, μ. Полученные уравнения годятся в тех областях дифракции (вблизи луча OB), в которых на бесконечности отсутствует падающая волна. В окрестности же луча OE (фиг. 1) имеются падающая DF и отраженная DE волны. Поэтому решение следует искать в виде

$$u = \psi e^{i\bar{\tau}} + Ce^{i\bar{\chi}}$$

где ψ, $\bar{\tau}$ дают комплексную амплитуду и эйконал отраженной волны DE, а C, $\bar{\chi}$ дают амплитуду и эйконал падающей волны. Подставляя u в уравнение (1.1) и повторяя следующие за (1.1) рассуждения, можно для ψ и C получить отдельные линейные уравнения, записанные в координатах $\bar{\tau}$, $x_{2,3}$ и $\bar{\chi}$, $y_{2,3}$ соответственно, где координаты $x_{2,3}$ и $y_{2,3}$ выбраны вдоль отраженной и падающей волн. Далее можно ввести волновые векторы α_k и β_k для отраженной и падающей волн и соответствующие линейные дисперсионные соотношения

$$\Delta_1 = \Delta(\alpha_k, \omega_0) = 0, \quad \omega_0 = \omega_0(\alpha_k); \quad \Delta_2 = \Delta(\beta_k, \omega_0) = 0, \quad \omega_0 = \omega_0(\beta_k)$$

Как и при выводе (1.3), следует полагать $\psi = ae^{i\varphi}$, $C = be^{i\chi}$ и ввести нелинейные дисперсионные соотношения

$$\omega = \omega_0(\alpha_k) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial b^2}\right)_0 b^2; \quad \Omega = \omega_0(\beta_k) + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial b^2}\right)_0 b^2$$

Полагая, как и выше, $\omega = \omega_{00} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}$, $\Omega = \Omega_{00} - \frac{\partial\chi}{\partial t}$, $\alpha_k = \alpha_k^{(0)} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$, $\beta_k = \beta_k^{(0)} + \frac{\partial\chi}{\partial y_k}$, можно во втором порядке получить уравнение для φ, χ. Сравнение этих уравнений с соотношениями, полученными отделением действительной части в вышеуказанных линейных уравнениях для ψ, C, позволяет написать связанные уравнения нелинейной дифракционной задачи вблизи луча OE

$$\begin{gathered}
i\Delta_{1\omega}\frac{\partial\psi}{\partial t}\bigg|_{\xi} - i\psi\Delta_{1\omega}\frac{\partial \ln K}{\partial t}\bigg|_{\xi} + \frac{1}{2}\Delta_{\alpha_1}\left(\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_3^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} + \right. \\
\left. + 2\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2\partial\alpha_3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\partial x_3}\right) = \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial a^2}\right)_0 |\psi|^2\psi + \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial b^2}\right)_0 |C|^2\psi \\
i\Delta_{2\omega}\frac{\partial C}{\partial t}\bigg|_{\xi_1} - iC\Delta_{2\omega}\frac{\partial \ln H}{\partial t}\bigg|_{\xi_1} + \frac{1}{2}\Delta_{\beta_1}\left(\frac{\partial^2\beta_1}{\partial\beta_2^2}\frac{\partial^2 C}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2\beta_1}{\partial\beta_3^2}\frac{\partial^2 C}{\partial y_3^2} + \right. \\
\left. + 2\frac{\partial^2\beta_1}{\partial\beta_2\partial\beta_3}\frac{\partial^2 C}{\partial y_2\partial y_3}\right) = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial a^2}\right)_0 |\psi|^2 C + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial b^2}\right)_0 |C|^2 C
\end{gathered} \tag{1.9}$$

где $\xi_1 = \mathrm{const}$ есть уравнение движения точки вдоль луча падающей волны с групповой скоростью, $y_{1,2}$ отсчитываются вдоль падающей, а $x_{1,2}$ — вдоль отраженной волны, П есть лучевое решение для падающей волны.

В линейной задаче уравнения разделяются, причем ψ дается (1.4), где $x_2 = H_2(\vartheta - \vartheta_0)$, а в падающей волне решение одномерно и $C = \Pi(Z_1)$, $Z = \omega(Z_1 - t)$.

Для примера рассматривается уравнение для напряженности электрического поля, которое при $\varepsilon_2 |\bar{E}_1|^2 \ll 1$ имеет вид [6]

$$\Delta\bar{E} + \nabla\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\varepsilon_0\bar{E}\right) - \frac{1}{c_0^2}\varepsilon_0(1 + \varepsilon_2|\bar{E}_1|^2)\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{1.10}$$

Решение ищется в виде

$$\bar{E} = \frac{1}{2}\bar{E}_1 + \frac{1}{2}\bar{E}_1^*, \qquad \bar{E}_1 = (Ce^{iZ} + \psi e^{i\tau})\bar{e} \tag{1.11}$$

где $\bar{E}_1^*$ комплексно сопряжено $\bar{E}_1$, $\bar{e}$ — единичный вектор поляризации, перпендикулярный плоскости распространения падающей и отраженной волн, $\bar{e}\nabla\varepsilon_0 = 0$.

Учитывая, что для модуля амплитуды поля имеем

$$|\bar{E}_1| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\tau - Z + \varepsilon - \gamma)}$$

из уравнения (1.10), умножая его поочередно на $e^{-i\tau}$, e^{-iZ} и осредняя по $\tau - Z$, можно получить уравнения модуляций

$$\Delta_{1\omega} i\frac{\partial\psi}{\partial t}\Big|_{\tau} - \Delta_{1\omega} i\psi\frac{\partial\ln K}{\partial t}\Big|_{\tau} + \Delta\psi + \frac{\omega^2\varepsilon_2\varepsilon_0}{c_0^2}\psi(a^2 + 2b^2) = 0$$

$$\Delta_{2\omega} i\frac{\partial C}{\partial t}\Big|_{Z} - \Delta_{2\omega} iC\frac{\partial\ln\Pi}{\partial t}\Big|_{Z} + \Delta C + \frac{\omega^2\varepsilon_2\varepsilon_0}{c_0^2}C(2a^2 + b^2) = 0 \tag{1.12}$$

$$\Delta_{1\omega} = \Delta_{2\omega} = \frac{2\omega\varepsilon_0}{c_0^2}, \qquad \Delta = \sum_1^3\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \sum_1^3\frac{\partial^2}{\partial y_k^2}$$

где $\Delta_1 = \dfrac{\omega^2\varepsilon_0}{c_0^2} - \sum\limits_1^3 \alpha_k^2$, $\Delta_2 = \dfrac{\omega^2\varepsilon_0}{c_0^2} - \sum\limits_1^3 \beta_k^2$, причем производные по нормали к волнам (по x_1, y_1) можно отбросить. В плоской задаче эти уравнения можно записать в неподвижных координатах x_1, x_2

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\alpha_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\alpha_2\right)i - \psi\left(\frac{\partial\ln K}{\partial x_1}\alpha_1 + \frac{\partial\ln K}{\partial x_2}\alpha_2\right)i +$$

$$+ \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \frac{\omega^2\varepsilon_2\varepsilon_0}{c_0^2}\psi(a^2 + 2b^2) = 0 \tag{1.13}$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x_1}\beta_1 + \frac{\partial C}{\partial x_2}\beta_2\right)i - C\left(\frac{\partial \ln H}{\partial x_1}\beta_1 + \frac{\partial \ln H}{\partial x_2}\beta_2\right) + \frac{\partial^2 C}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2} +$$

$$+ \frac{\omega^2 \varepsilon_2 \varepsilon_0}{c_0^2} C(2a^2 + b^2) = 0$$

что должно облегчить численное решение.

Начальные условия для (1.13) берутся из (1.4) при $t = t_0 \approx 0$ и условия $C = H$, при $t = t_1 \gg 1$, а граничные условия находятся интегрированием одномерных по лучу уравнений для a, φ, b, χ, получаемых из (1.12) подобно (1.7), (1.8). При поляризации вектора $\bar{E}$ в плоскости распространения волн

$$\bar{E}_1 = (Ce^{i\chi} + \psi' e^{i\varphi})\bar{e}_1 + (C' e^{i\chi} + \psi e^{i\varphi})\bar{e} \qquad (1.14)$$

где $\bar{e}_1$ и $\bar{e}$ параллельны падающей и отраженной волнам.

Подставляя (1.14) в (1.10), учитывая соотношения для векторов

$$\left.\frac{d\bar{e}_1}{dt}\right|_{\bar{\tau}} = -\frac{c_0^2}{2\omega\varepsilon_0^2}\bar{\beta}(\nabla\varepsilon_0\bar{e}_1); \quad \left.\frac{d\bar{e}}{dt}\right|_{\bar{\tau}} = -\frac{c_0^2}{2\omega\varepsilon_0^2}\bar{\alpha}(\nabla\varepsilon_0\bar{e})$$

умножая (1.14) на $e^{-i\varphi}$, $e^{-i\chi}$ соответственно, можно получить после осреднения по $\varphi - \chi$ уравнения $\chi - \chi' = \varkappa$, $\varphi - \varphi' = \mu$,

$$2\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\beta_k i + \psi i\Delta\bar{\varphi} + \Delta\psi + \lambda\{\psi(p + b'^2) + bb'\psi e^{-i\mu} +$$

$$+ \bar{e}_1\bar{e}(\psi' b'^2 + \psi bb' e^{-i\mu})\} = 0$$

$$2\frac{\partial\psi'}{\partial x_k}\alpha_k i + \psi' i\Delta\bar{\varphi} + \Delta\psi' + \lambda\{\psi'(p + b^2) + \psi bb' e^{i\mu} +$$

$$+ \bar{e}_1\bar{e}(\psi bb' e^{i\mu} + \psi b^2)\} = 0$$

$$2\frac{\partial C'}{\partial x_k}\beta_k i + C' i\Delta\bar{\chi} + \Delta C' + \lambda\{C'(p + a^2) + Caa' e^{i\varkappa} +$$

$$+ \bar{e}_1\bar{e}(C' aa' e^{i\varkappa} + Ca^2)\} = 0 \qquad (1.15)$$

$$2\frac{\partial C}{\partial x_k}\alpha_k i + Ci\Delta\bar{\chi} + \Delta C + \lambda\{C(p + a'^2) + C' aa' e^{-i\varkappa} +$$

$$+ \bar{e}_1\bar{e}(C' a'^2 + Caa' e^{-i\varkappa})\} = 0$$

где $p = b^2 + a'^2 + b'^2 + a^2 + \bar{e}_1\bar{e}2(aa'\cos\mu + bb'\cos\varkappa)$, $\lambda = \frac{\omega^2}{c_0^2}\varepsilon_2\varepsilon_0$ и

можно заменять $2\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\alpha_k = 2\frac{\omega}{c_0^2}\varepsilon_0\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{\bar{\alpha}}$.

При $a' = 0$, $b = 0$, $\chi' = \chi$, $\varphi' = \varphi$ из (1.15) получаются уравнения (1.12), где учтено, что согласно уравнениям лучей $\frac{dx_k}{dt} = \frac{c_0^2}{\omega\varepsilon_0}\alpha_k$. Применяя соотношение для суммы производных по x_k от правых частей [7], можно получить

$$\Delta\tau = \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_k} = \frac{\omega\tau_0}{c_0^2}\frac{\partial \ln J}{\partial t}\bigg|_{\tau} - \alpha_k\tau_0\frac{\partial\frac{1}{\tau_0}}{\partial x_k} = -\frac{2\omega\tau_0}{c_0^2}\frac{\partial \ln K}{\partial t}\bigg|_{\tau}$$

откуда $K = \frac{\sqrt{\tau_0}}{\sqrt{J}}$ и, подобно этому, $H = \frac{\sqrt{\tau_0}}{\sqrt{J_1}}$, где J_1, J — якобианы преобразований от $x_{1,2,3}$ к t, θ, τ для падающей и отраженной волн. Таким образом, получено линейное решение и сформулирована нелинейная задача в окрестности дифракционного луча.

В качестве другого примера применения уравнений (1.9) можно рассмотреть волны изгиба в пластинах. В пренебрежении влиянием продольных волн на изгибные можно получить следующие соотношения для связи лагранжиана с прогибом $u(t, x_1, x_2)$

$$L = T - V, \quad T = \frac{1}{2}\rho h\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2, \quad V = \frac{3}{4}G\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\psi_0^2\left(1 + \frac{\gamma_2}{2}\psi_0^2\right)dx_3$$

$$\psi_0^2 = \frac{8}{3}\left(\varepsilon_{x_1}^2 + \varepsilon_{x_2}^2 + \varepsilon_{x_1}\varepsilon_{x_2} + \frac{\varepsilon_{x_1x_2}^2}{4}\right)$$

$$\varepsilon_{x_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - x_3\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$$

$$\varepsilon_{x_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - x_3\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

$$\varepsilon_{x_1x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} - 2x_3\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}$$

h есть толщина пластины, оси x_1, x_2 выбраны в плоскости пластины.

После вычисления интеграла получится

$$\frac{V}{G} = \frac{1}{2}h\left(u_{x_1}^4 + u_{x_2}^4 + 2u_{x_1}^2u_{x_2}^2\right) + \frac{h^3}{6}\left(u_{x_1x_1}^2 + u_{x_2x_2}^2 + u_{x_1x_1}u_{x_2x_2} - u_{x_1x_2}^2\right) +$$

$$+ \frac{h^5}{80}\left(u_{x_1x_1}^2 + u_{x_2x_2}^2 + u_{x_1x_1}u_{x_2x_2} + u_{x_1x_2}^2\right)^2, \qquad u_{x_ix_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$$

Записывая u в виде суммы отраженной и падающей волн

$$u = a\cos\bar\tau + b\cos\bar\zeta, \quad \frac{\partial\bar\tau}{\partial x_1} = \alpha_1, \quad \frac{\partial\bar\tau}{\partial x_2} = \alpha_2, \quad \frac{\partial\bar\zeta}{\partial x_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial\bar\zeta}{\partial x_2} = \beta_2$$

и вводя осредненный лагранжиан

$$\overline{L} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} L\,d\tau\,d\overline{\tau}$$

можно получить

$$\overline{L} = \frac{1}{4}\rho h\,(a^2\omega_1^2 + b^2\Omega^2) - \frac{3Gh}{16}\,(a^4k_1^4 + b^4k_2^4) -$$

$$-\frac{Gh}{2}\,a^2b^2\,(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 - \frac{Gh}{4}\,a^2b^2k_1^2k_2^2 -$$

$$-\frac{Gh^3}{12}\,(a^2k_1^4 + b^2k_2^4) - \frac{Gh^5\gamma_{12}}{80}\,(a^4k_1^8 + b^4k_2^8) -$$

$$-\frac{Gh^5\gamma_{12}}{60}\,a^2b^2k_1^4k_2^4 - \frac{Gh^5}{120}\,a^2b^2\gamma_{12}K_1^2$$

$$k_1^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2,\quad k_2^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2,\quad K_1 = k_1^2k_2^2 + (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2$$

Здесь введены разные обозначения для частот отраженной и падающей волн $\omega_1 = -\dfrac{\partial\tau}{\partial t}$ и $\Omega = -\dfrac{\partial\overline{\tau}}{\partial t}$.

Варьируя $\overline{L}$ по a, b и учитывая, что $a \neq 0$, $b \neq 0$, можно получить следующие нелинейные дисперсионные соотношения:

$$\omega_1 = \omega_0(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{1}{2\omega\rho}\left\{\frac{Gh^4}{10}\gamma_{12}k_1^8a^2 + K_1^2\,\frac{Gh^4\gamma_{12}}{30}\,b^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{Gh^4\gamma_{12}}{15}\,k_1^4k_2^4b^2 + \frac{3}{2}\,Ga^2k_1^4 + 2Gb^2\,(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 + Gb^2k_1^2k_2^2\right\} \qquad (1.16)$$

$$\Omega = \omega_0(\beta_1, \beta_2) + \frac{1}{2\omega\rho}\left\{\frac{Gh^4\gamma_{12}}{10}\,k_2^8b^2 + K_1^2\,\frac{Gh^4\gamma_{12}}{30}\,a^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{Gh^4\gamma_{12}}{15}\,k_1^4k_2^4a^2 + \frac{3}{2}\,Gb^2k_2^4 + 2Ga^2\,(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 + Ga^2k_1^2k_2^2\right\}$$

$$\Omega_0 = \omega_0(\beta_1, \beta_2)$$

где $\omega_0(\alpha_1, \alpha_2) = h\sqrt{\dfrac{G}{3\rho}}\,k_1^2$, $\omega_0(\beta_1, \beta_2) = h\sqrt{\dfrac{G}{3\rho}}\,k_2^2$, что позволяет конкретизировать коэффициенты в правых частях (1.9) для изгибных волн. В условиях плоской задачи производные по $x_2 = y$, можно отбросить, причем

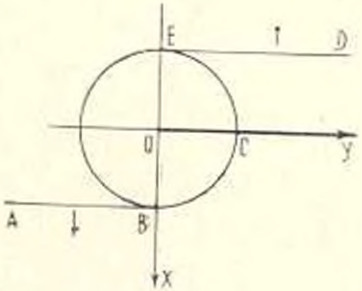
$$\Delta_1 = \omega - \omega_0(\alpha_1, \alpha_2),\quad \Delta_2 = \omega - \omega_0(\beta_1, \beta_2)$$

откуда получится

$$\Delta_{\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2} = \frac{2\omega}{\alpha_1^2},\qquad \Delta_{\beta_1}\frac{\partial^2\beta_1}{\partial\beta_2^2} = \frac{2\omega}{\beta_1^2},\quad \Delta_{1\omega} = \Delta_{2\omega} = 1$$

Уравнения (1.9) следует решать при начальных условиях, взятых для χ по (1.4) при $t = t_0$, где t_0 мало, то есть вблизи отражающего угла, а для C берется значение $C = H$ при $t = t_1$, где t_1 достаточно велико, то есть на больших расстояниях от угла.

Таким образом, каждое из уравнений (1.9) записано в своей системе координат и рассчитывается первое в направлении возрастающих значений $t > t_0$, второе — уменьшающихся $t < t_1$, при этом уравнения связаны посредством правых частей. Это осложняет решение (1.9) или эквивалентной им системы четырех действительных уравнений для a, φ, b, χ, которые, по-видимому, следует решать, задавая, кроме a, φ, при $t = t_0$, также и некоторые значения b, χ так, чтобы после расчета задачи получились заданные при $t = t_1$ значения b, χ. Однако при рассмотрении однородной среды и нормального падения на плоский экран плоской падающей волны AB координатные оси x_i и y_i параллельны. Аналогично вышеприведенным уравнениям вблизи луча OB можно записать уравнения вблизи луча OE (фиг. 2) в плоской задаче ($x_1 = -y_1 = x$, $x_2 = y_2 = y$, $\alpha_1 = -\beta_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta_2 = \beta$), записывая по-прежнему



Фиг. 2.

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\xi} = \frac{u_0}{c_0}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\delta,\mu}, \quad \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\xi_1} = \frac{u_0}{c_0}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\delta',\mu}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 - \frac{1}{2a}\frac{\partial^2 a}{\partial\mu^2} =$$

$$= -\frac{c_0}{u_0}\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 - \frac{c_0}{u_0}\left(\frac{\partial\omega}{\partial b^2}\right)_0 b^2$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} + \frac{1}{2}a\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2} = 0$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\right)^2 - \frac{1}{2b}\frac{\partial^2 b}{\partial\mu^2} = -\frac{c_0}{u_0}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 - \frac{c_0}{u_0}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial b^2}\right)_0 b^2$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial\mu}\frac{\partial\chi}{\partial\mu} + \frac{1}{2}b\frac{\partial^2\chi}{\partial\mu^2} = 0$$

Здесь $\delta' = \mathrm{const}$ соответствует фронту падающей волны DF, для которой значения u_0, c_0 противоположны по знаку значениям для DE, причем в первых двух уравнениях производные берутся при $\delta = \mathrm{const}$ или отнесены к отраженной волне. Следует отметить, что для полученных уравнений картина волн дается на фиг. 2.

В нелинейном решении вблизи OB согласно результатам [2], полученным для одномерной нестационарной задачи при $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 > 0$ для больших t при $y < 0$ и малых $\frac{K}{\omega}$, как и в (1.8), будет осциллирующий волновой пакет, а при $y > 0$ возникают отрицательные солитоны (коэффициент дисперсии в уравнении Кортевега-де-Вриза, описывающем квазипростую волну, отрицателен), число которых определяется $\frac{K}{\omega}$. При $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 < 0$ начальное решение (1.8) распадается на множество солитонов. Поскольку в (1.6) член $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 \sim \omega a^2$ и по порядку меньше остальных членов ~ 1, поправка в первом уравнении (1.6) за счет нелинейности будет $\sim \omega a^2$ и можно считать $\varphi \approx \varphi_0$, тогда a дается (1.8).

Можно уточнить коэффициенты в (1.9) и учесть продольные компоненты перемещения u_1 и u_2. Тогда следует полагать

$$u = a\cos\theta + c\cos 2\theta + b\cos\lambda + d\cos 2\lambda$$

$$u_{1,2} = v_{1,2} + a_{1,2}\sin\theta + c_{1,2}\sin 2\theta + b_{1,2}\sin\lambda + d_{1,2}\sin 2\lambda$$

и после проведения выкладок получится в основном порядке a^4

$$a_{1,2} = b_{1,2} = c = 0, \quad d = 0$$

$$\overline{L} = \frac{1}{2}\rho h\left\{\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\right)^2 + 2C_1^2\omega^2 + 2d_1^2\Omega^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial t}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2C_2^2\omega^2 + 2d_2^2\Omega^2 + \frac{1}{2}\omega^2a^2 + \frac{1}{2}\Omega^2b^2\right\} - 2Gh\left\{C_1^2\left(2\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_2^2\right) + \right.$$

$$+ d_1^2\left(2\beta_1^2 + \frac{1}{2}\beta_2^2\right) + C_2^2\left(2\alpha_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2\right) + d_2^2\left(2\beta_2^2 + \frac{1}{2}\beta_1^2\right) +$$

$$+ 3(C_1C_2\alpha_1\alpha_2 + d_1d_2\beta_1\beta_2) + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} +$$

$$\left. + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)^2\right\} - \frac{Gh^3}{12}(a^2k_1^4 + b^2k_2^4) -$$

$$- Gh\left\{\frac{\partial v_1}{\partial x_1}a^2\left(\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_2^2\right) + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}b^2\left(\beta_1^2 + \frac{1}{2}\beta_2^2\right) + \right.$$

$$+ \frac{\partial v_2}{\partial x_2}a^2\left(\alpha_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2\right) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}b^2\left(\beta_2^2 + \frac{1}{2}\beta_1^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)(a^2\alpha_1\alpha_2 + b^2\beta_1\beta_2) - a^2C_1\alpha_1k_1^2 -$$

$$- b^2d_1\beta_1k_2^2 - \alpha_2C_2a^2k_1^2 - \beta_2db^2k_2^2 + \frac{3}{16}a^4k_1^4 + \frac{3}{16}b^4k_2^4 +$$

$$\left. + \frac{1}{2}a^2b^2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 + \frac{1}{4}k_1^2k_2^2a^2b^2\right\} - \frac{G\gamma_2h^5}{80}(a^4k_1^4 + b^4k_2^4) -$$

$$- \frac{G\gamma_2h^5}{120}a^2b^2K_1^2 - \frac{Gh^5\gamma_2}{60}a^2b^2k_1^4k_2^4$$

Варьируя $\bar{L}$ по $v_{1,2}$, можно получить уравнения для среднего течения, причем в дифракционной задаче $\left|\frac{\partial v_{1,2}}{\partial x_2}\right| \gg \left|\frac{\partial v_{1,2}}{\partial x_1}\right|, \ \frac{\partial v_{1,2}}{\partial t} = 0.$ Тогда после вариации $\bar{L}$ по a, b, $C_{1,2}$, $d_{1,2}$, $v_{1,2}$ получатся соотношения

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 = -\frac{3k_1^2}{2(h^2k_1^2-12)}a^2$$

$$\beta_1 d_1 + \beta_2 d_2 = -\frac{3k_2^2}{2(h^2k_2^2-12)}b^2$$

а в правые части дисперсионных соотношений (1.16) добавится соответственно

$$\frac{3G}{\Omega_0^2}\frac{k_1^4a^2}{h^2k_1^2-12} - \frac{G}{2\Omega_0^2}A\left(\alpha_1^2+\frac{1}{2}\alpha_2^2\right)$$

$$\frac{3G}{\Omega_0^2}\frac{k_2^4b^2}{h^2k_2^2-12} - \frac{G}{2\Omega_0^2}A\left(\beta_1^2+\frac{1}{2}\beta_2^2\right)$$

где

$$A = a^2\left(\alpha_2^2+\frac{1}{2}\alpha_1^2\right) + b^2\left(\beta_2^2+\frac{1}{2}\beta_1^2\right)$$

Полученные уравнения имеют место при высоких частотах, однако предположено, что ωh все еще невелико, что позволяет применять классическую теорию пластин, хотя обобщения [9] на высокочастотные уравнения могут быть проделаны подобным же путем. Представляет интерес исследование устойчивости волновых движений при условии наличия двух эйконалов.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 8 I 1979

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ԲԱՐՁՐ ՀԱՃԱԽԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿԱՅԻ ՀԱՄԱՐ ԴԻՖՐԱԿՑԻՈՆ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ԴԻՏԱՐԿՈՒՄԸ

Ամփոփում

Միջին դանդաղ փոփոխվող ամպլիտուդայի համար ստացված է գծային խնդրի լուծումը և դուրս են բերված ոչ գծային խնդրի հավասարումների դիֆրակցիոն ճառագայթների շրջակայքում։

A NON-LINEAR DIFFRACTION PROBLEM FOR HIGH FREQUENCY ASYMPTOTICS

A. G. BAGDOEV

Summary

In the problem on reflection of an arbitrary quasi-monochromatic wave from the wedge a linear solution in the neighbourhood of diffraction rays is suggested. The non-linear equations for complex amplitude of the wave in the region with no incident wave ahead of the point wave at infinity, as well as the coupled equations for complex amplitudes of incident and reflected waves for the regions with incident wave are derived. The coefficients of equations for the electrodynamic problem and for the problem of bending waves in plates are specified, and the problem of numerical computation of non-linear waves parameters is formulated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
2. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. Новосибирск, изд. «Наука», 1973.
3. *Багдоев А. Г.* Определение окрестности фронтов волн в пространственной задаче. Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1977, т. XXX, № 6.
4. *Петрашень Г. И., Николаев Б. С., Коузов Д. П.* О методе рядов в теории дифракции волн от плоских угловых областей. Уч. записки ЛГУ, 1958, в. 32.
5. *Багдоев А. Г., Даноян З. Н.* Исследования движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке. Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1972, т. XII, № 6.
6. *Литвак А. Г., Фрайман Г. М., Юнаковский А. Д.* О самофокусировке аксиально симметричных пучков электромагнитных волн. В сб.: Теория дифракции и распространения волн. Труды VI Всесоюзного симпозиума по дифракции волн. 1978.
7. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. IV. М., Гостехиздат, 1953.
8. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М., ИЛ, 1961.
9. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М., изд. АН СССР, 1973.
10. *Цыдыпов Ч. Ц.* Распространение ультракоротких радиоволн. «Наука», Сибирское отделение, 1977.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 1, 1980 Механика

М. А. СУМБАТЯН

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТОНКОГО СЛОЯ В УСЛОВИЯХ УСТАНОВИВШЕЙСЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассматривается плоская задача о действии распределенной нагрузки на верхнюю грань тонкого сжимаемого слоя, лежащего на жестком основании, в условиях установившейся ползучести материала слоя. Слой считается очень тонким, а связь между напряжениями и скоростями деформаций выражается степенным законом. Аналогичная задача для случая полуплоскости и в предположении несжимаемости материала исследовалась в работе [1].

В § 1 приводятся основные уравнения, используемые в дальнейшем. В § 2 рассматривается задача о действии нормальной нагрузки на слой, свободно лежащий на жестком основании, а в § 3 и 4 — соответственно о действии нормальной и касательной нагрузки на слой, сцепленный с жестким основанием.

§ 1. Приведем основные уравнения теории нелинейной ползучести в условиях плоской деформации.

Уравнения квазистатического равновесия

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} &= 0 \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Условие сжимаемости материала

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \tag{1.2}$$

где ν — коэффициент Пуассона. Для несжимаемого материала $\nu = \frac{1}{2}$.

Связь между тензорами напряжений и скоростей деформаций выражается соотношениями [2]

$$\varepsilon_{11} - \varepsilon = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\sigma_{11} - \sigma), \qquad \varepsilon_{22} - \varepsilon = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\sigma_{22} - \sigma), \qquad \varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\sigma_{12} \tag{1.3}$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})/3 \\ \sigma &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{1+\nu}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{aligned} \tag{1.4}$$

а ε_i и σ_i — соответственно интенсивность скоростей деформаций и напряжений:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + [(1-\nu)\varepsilon_{11} - \nu\varepsilon_{22}]^2 + [(1-\nu)\varepsilon_{22} - \nu\varepsilon_{11}]^2 + 6\varepsilon_{12}^2}$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + [(1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}]^2 + [(1-\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}]^2 + 6\sigma_{12}^2} \tag{1.5}$$

Из (1.3)—(1.4) имеем

$$\varepsilon_{11} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}[(1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}[(1-\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}] \tag{1.6}$$

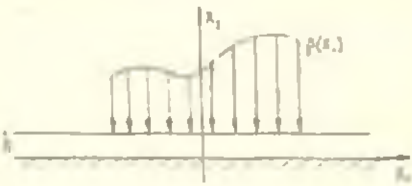
$$\varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\sigma_{12}$$

Наконец, закон для установившейся нелинейной ползучести принимаем в виде степенной зависимости

$$\varepsilon_i = A\sigma_i^m \quad (m \geq 1) \tag{1.7}$$

Этот закон хорошо описывает деформации ползучести некоторых металлов [1—5], льда [6], многих полимеров [7] и ряда других материалов.

§ 2. Рассмотрим задачу о действии нормальной нагрузки $p(x_1)$ на слой малой толщины h, лежащий без трения на жестком основании (фиг. 1). Физическая модель слоя описана в предыдущем параграфе. Ось x_1 совмещена с нижней гранью слоя.



Фиг. 1.

Граничными условиями задачи будут

$$\begin{aligned} &\text{при } x_2 = 0 \qquad v_2 = 0, \; \sigma_{12} = 0 \\ &\text{при } x_2 = h \qquad \sigma_{22} = p(x_1), \; \sigma_{12} = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где v_i $(i = 1, 2)$ — компоненты вектора скоростей перемещений.

Производя разложение касательного напряжения σ_{12} в ряд по малым значениям x_2 в окрестности точки $x_2 = 0$ и оставляя для тонкого слоя в этом разложении лишь линейные члены, получим

$$\sigma_{12} = f_1(x_1) + f_2(x_1)\, x_2$$

Граничное условие $\sigma_{12} = 0$ при $x_2 = 0$ дает $f_1(x_1) = 0$, аналогичное условие при $x_2 = h$ определяет функцию $f_2(x_1) = 0$. Таким образом, всюду в слое

$$\sigma_{12} = 0 \tag{2.2}$$

Тогда из уравнений равновесия (1.1)

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= f_1(x_2) \\ \sigma_{22} &= f_2(x_1) = p(x_1) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Теперь второе из соотношений (1.6) дает с учетом (1.7)

$$\varepsilon_{22} = A\sigma_i^{m-1}\left[(1-\nu)\,p(x_1) - \nu f_1(x_2)\right] \qquad (2.4)$$

Поскольку при замене знака у нагрузки $p(x_1)$ деформация ε_{22} также должна менять знак, то из равенства (2.4) следует, что

$$f_1(x_2) = \sigma_{11} = 0 \qquad (2.5)$$

и формула (2.4) с учетом (1.5) приобретает вид

$$\varepsilon_{22} = A(1-\nu)\left(\frac{1-\nu+\nu^2}{3}\right)^{\frac{m-1}{2}} |p(x_1)|^m \operatorname{sgn}(p)$$

откуда, интегрируя по x_2 с учетом граничного условия (2.1), получаем

$$v_2(x_1, x_2) = A(1-\nu)\left(\frac{1-\nu+\nu^2}{3}\right)^{\frac{m-1}{2}} |p(x_1)|^m \operatorname{sgn}(p)\, x_2 \qquad (2.6)$$

В частности, на верхней грани слоя (при $x_2 = h$)

$$v_2(x_1, h) = Ah(1-\nu)\left(\frac{1-\nu+\nu^2}{3}\right)^{\frac{m-1}{2}} |p(x_1)|^m \operatorname{sgn}(p) \qquad (2.7)$$

Последнее выражение показывает, что тонкий слой в условиях установившейся нелинейной ползучести работает на сжатие как нелинейное винклерово основание. В линейном случае ($m = 1$) получается обычное винклерово основание. При этом, поскольку из (1.7) при $m = 1$ имеем $A = \dfrac{1+\nu}{E}$ (E — модуль Юнга), то нетрудно видеть, что в этом случае коэффициент постели совпадает с известным результатом, полученным по линейной теории.

§ 3. Рассмотрим задачу предыдущего параграфа в предположении, что нижняя грань слоя сцеплена с жестким основанием. В этом случае граничные условия примут следующий вид:

$$\begin{array}{lll} \text{при } x_2 = 0 & v_1 = 0, \quad v_2 = 0 & \\ \text{при } x_2 = h & \sigma_{22} = p(x_1), \quad \sigma_{12} = 0 & \end{array} \qquad (3.1)$$

Производя так же, как и в предыдущей задаче, разложение касательного напряжения σ_{12} в ряд по малым значениям x_2 в окрестности точки $x_2 = 0$ и оставляя для тонкого слоя лишь первые два члена этого разложения, получим

$$\sigma_{12} = f_1(x_1) + f_2(x_1)\,x_2$$

С учетом последнего из граничных условий (3.1) эта формула принимает вид

$$\sigma_{12} = f'(x_1)(h - x_2) \qquad (3.2)$$

где $f(x_1)$ — первообразная функции $-f_2(x_1)$.

Теперь решение уравнений равновесия (1.1) дает

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= f(x_1) + g(x_2) \\ \sigma_{22,2} &= -f''(x_1)(h - x_2) \end{aligned} \tag{3.3}$$

откуда после интегрирования последнего выражения по x_2 с учетом граничного условия для σ_{22} на верхней грани, получаем

$$\sigma_{22} = f''(x_1)\frac{(h - x_2)^2}{2} + p(x_1) \tag{3.4}$$

Рассуждения, аналогичные проведенным в предыдущем параграфе, показывают, что функция $g(x_2)$ тождественно равна нулю.

Неизвестная пока функция $f(x_1)$ может быть найдена из граничного условия $v_1 = 0$ при $x_2 = 0$. В самом деле, это условие дает $\varepsilon_{11} = 0$ при $x_2 = 0$, что с учетом первой из формул (1.6) дает

$$(1 - \nu) f(x_1) - \nu \left[\frac{h^2}{2} f''(x_1) + p(x_1) \right] = 0 \tag{3.5}$$

Последнее равенство представляет собой дифференциальное уравнение для нахождения функции $f(x_1)$.

Если толщина слоя гораздо меньше области контакта, то

$$f(x_1) \gg \frac{h^2}{2} f''(x_1) \tag{3.6}$$

Поэтому в уравнении (3.5) можно пренебречь малым членом, содержащим вторую производную, что определяет функцию f в виде

$$f(x_1) = \frac{\nu}{1 - \nu} p(x_1) \tag{3.7}$$

С учетом всех вышеприведенных рассуждений компоненты тензора напряжений приобретают следующий вид:

$$\sigma_{11} = \frac{\nu}{1 - \nu} p(x_1), \qquad \sigma_{22} = p(x_1) \tag{3.8}$$

$$\sigma_{12} = \frac{\nu}{1 - \nu} p'(x_1)(h - x_2)$$

Интенсивность касательных напряжений (1.5)

$$\sigma_i = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \frac{|p(x_1)|}{\sqrt{3}} \tag{3.9}$$

Последняя формула получена с учетом того, что

$$\sigma_{12}^2 \ll \sigma_{22}^2, \quad \sigma_{12}^2 \ll \sigma_{11}^2$$

как это следует из равенства (3.8).

Теперь второе из соотношений (1.6) дает

$$\varepsilon_{22} = \frac{A}{3^{\frac{m-1}{2}}} \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \right)^m |p(x_1)|^m \operatorname{sgn}(p)$$

откуда после интегрирования по x_2 с учетом граничных условий получаем

$$v_2(x_1, x_2) = \frac{A}{3^{\frac{m-1}{2}}} \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \right)^m |p(x_1)|^m \operatorname{sgn}(p)\, x_2 \tag{3.10}$$

В частности, на верхней грани слоя

$$v_2(x_1, h) = \frac{Ah}{3^{\frac{m-1}{2}}} \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \right)^m |p(x_1)|^m \operatorname{sgn}(p) \tag{3.11}$$

Таким образом, здесь так же, как и в предыдущей задаче, слой работает как нелинейное винклерово основание. При $m = 1$ имеем линейное винклерово основание с коэффициентом постели, совпадающим с известным из линейной теории. Интересно отметить, что для несжимаемого материала $\left(\nu = \frac{1}{2}\right)$ основание в виде сцепленного с жестким фундаментом слоя не является винклеровым, что согласуется с известными результатами линейной теории.

§ 4. Здесь рассмотрим задачу предыдущего параграфа в предположении, что на верхнюю грань слоя вместо нормальной нагрузки действует касательная $\tau(x_1)$.

Граничные условия запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\text{при } x_2 = 0 && v_1 = 0, \ v_2 = 0 \\ &\text{при } x_2 = h && \sigma_{22} = 0, \ \sigma_{12} = \tau(x_1) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Оставляя так же, как и в предыдущих задачах, в разложении σ_{ij} по малому параметру x_2 лишь линейные члены, с учетом последнего граничного условия (4.1) получим

$$\sigma_{12} = \tau(x_1) + f(x_1)(h - x_2) \tag{4.2}$$

где $f(x_1)$ — пока неизвестная функция.

Интегрирование второго уравнения равновесия (1.1) определяет

$$\sigma_{22} = -\tau'(x_1)\, x_2 - f'(x_1) \left(hx_2 - \frac{x_2^2}{2} \right) + g(x_1)$$

Из граничного условия $\sigma_{22} = 0$ при $x_2 = h$ находим, что

$$g(x_1) = h\tau'(x_1) + \frac{h^2}{2} f'(x_1)$$

Таким образом,

$$\sigma_{22} = (h - x_2)\tau'(x_1) + \left(\frac{h^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} + hx_2\right)f''(x_1) \tag{4.3}$$

Интегрирование первого уравнения равновесия позволяет найти

$$\sigma_{11} = f(x_1) \tag{4.4}$$

Так же, как и в § 3, функция $f(x_1)$ должна быть найдена с использованием граничного условия $v_1 = 0$ при $x_2 = 0$, удовлетворение которому дает

$$(1 - \nu)f(x_1) - \nu\left[\frac{h^2}{2}f''(x_1) + h\tau'(x_1)\right] = 0$$

Отбрасывая в этом уравнении малый по сравнению с первым член $-\nu\frac{h^2}{2}f''(x_1)$, получаем

$$f(x_1) = \frac{\nu}{1-\nu}h\tau'(x_1)$$

Таким образом,

$$\sigma_{11} = \frac{\nu}{1-\nu}h\tau'(x_1)$$

$$\sigma_{12} = -\tau(x_1) + \frac{\nu}{1-\nu}h(h - x_2)\tau''(x_1) \approx \tau(x_1) \tag{4.5}$$

$$\sigma_{22} = (h - x_2)\tau'(x_1) + \frac{\nu}{1-\nu}h\left(\frac{h^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} + hx_2\right)\tau'''(x_1) \approx \tau'(x_1)(h - x_2)$$

Выражения (4.5) показывают, что $\sigma_{22} \ll \sigma_{12}$, $\sigma_{11} \ll \sigma_{12}$, поэтому

$$\sigma_i \approx |\sigma_{12}| = |\tau(x_1)| \tag{4.6}$$

Теперь третье и второе равенства (1.6) дают

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= A|\tau(x_1)|^m \operatorname{sgn}(\tau) \\ \varepsilon_{22} &= A|\tau(x_1)|^{m-1}\tau'(x_1)\left[(h - x_2)(1 - \nu) - \frac{\nu^2}{1-\nu}h\right] \end{aligned} \tag{4.7}$$

Интегрируя последнее выражение по x_2 с учетом граничных условий, получаем

$$v_2 = A|\tau(x_1)|^{m-1}\tau'(x_1)\left[\left(hx_2 - \frac{x_2^2}{2}\right)(1 - \nu) - \frac{\nu^2}{1-\nu}hx_2\right] \tag{4.8}$$

Пренебрегая в выражении

$$v_{1,2} = 2\varepsilon_{12} - v_{2,1}$$

малым членом $v_{2,1}$, получим с учетом первого равенства (4.7)

$$v_{2,1} = 2\varepsilon_{12} - 2A\,|\tau(x_1)|^m \operatorname{sgn}(\tau)$$

Интегрируя последнее соотношение по x_2 и пользуясь граничным условием $v_1 = 0$ при $x_2 = 0$, получаем

$$v_1(x_1, x_2) = 2A\,|\tau(x_1)|^m \operatorname{sgn}(\tau)\, x_2 \tag{4.9}$$

В частности, при $x_2 = h$

$$v_1(x_1, h) = 2Ah\,|\tau(x_1)|^m \operatorname{sgn}(\tau) \tag{4.10}$$

Таким образом, и при сдвиговых нагрузках тонкий слой работает также как нелинейное винклерово основание.

Сделаем несколько замечаний к решению рассмотренных выше задач.

1. В работе [1] Н. Х. Арутюняном был предложен принцип «обобщенной суперпозиции», состоящий в том, что «обобщенные перемещения» (или «обобщенные скорости перемещений») $v^{\mu}\left(\mu = \dfrac{1}{m}\right)$ удовлетворяют принципу линейной суперпозиции. Однако вопрос об оценке погрешности этого принципа при решении различных задач нелинейной теории ползучести еще недостаточно изучен. Решение трех рассмотренных в данной работе задач показывает, что в случае очень тонкого слоя этот принцип выполняется точно. Это следует из того, что для такого слоя «обобщенная скорость перемещения» любой точки поверхности слоя есть линейная функция напряжения, приложенного в этой же самой точке и не зависит от напряжений, приложенных в других точках поверхности слоя.

2. Рассмотренные задачи могут быть исследованы аналогичным методом и в рамках определяющих уравнений неустановившейся нелинейной теории ползучести наследственного типа, данной в работах [1, 7].

В заключение автору хотелось бы выразить признательность В. М. Александрову за постоянное внимание к работе.

Институт проблем
механики АН СССР

Поступила 3 I 1980

Մ. Ա. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ

ԿԱՅՈՒՆԱՑՎԱԾ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ ԲԱՐԱԿ ՇԵՐՏԻ ՀԱՄԱՐ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է կայունացված ոչ գծային սողքի հարթ խնդիրը կոշտ հիմքի վրա դրված սեղմվող բարակ շերտի համար, որի վրա ազդում է բաշխված բեռ: Կայունացված ոչ գծային սողքի օրենքը ընդունված է աստիճանային:

Ցույց է տրված, որ անկախ նրանից, ազդում է շերտի վրա նորմալ թե շոշափող բեռ, ինչպես նաև անկախ շերտի ներքին եզրի ամրացման ձևից, շերտն աշխատում է ինչպես ոչ գծային վինկլերյան հիմք։

TWO-DIMENSIONAL PROBLEM IN THE THEORY OF STEADY NON-LINEAR CREEP FOR A THIN LAYER

M. A. SUMBATIAN

S u m m a r y

In the work under consideration there is studied the problem of the load acting on a two-dimensional thin layer. The layer is supposed to lie on a hard foundation. The law of creep is assumed to be described by a power function.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
2. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. Физматгиз, 1960.
3. *Turner F., Blomquist K.* A study of the applicability of Robotnov's creep parameter for alliminium alloy. J. Aeronaut. Sci, 1956, XXIII, No. 12.
4. *Johnson A.* The plastic, creep and relaxation of properties of metals. Aircraft Engineering, 1949, XXI, No. 239.
5. *Шестериков С. А.* Об одном условии для законов ползучести. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
6. *Вялов С. С., Докучаев В. В., Шейнкман Д. Р.* Подземные льды и сильно льдистые грунты как основания сооружений. Ленинград, Стройиздат, 1976.
7. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М., «Наука», 1977.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIII, № 1, 1980 Механика

А. А. СПЕКТОР

АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ И СЦЕПЛЕНИЕМ ОКОЛО ЛИНИЙ РАЗДЕЛА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

В работе рассматривается поведение решений пространственных контактных задач статики и стационарного качения с трением при подходе к линиям раздела граничных условий. Принимается весьма общий закон трения, при котором на площадке контакта могут реализоваться области проскальзывания, где направление силы трения совпадает с направлением скорости проскальзывания (относительного касательного смещения), а величина силы трения есть заданная функция давления и величины проскальзывания (относительного касательного смещения) в данной точке, а также области сцепления, где величина силы трения не превышает значения заданной функции давления в данной точке.

Зависимость величины силы трения и коэффициента трения от давления и скорости проскальзывания имеет место на практике. Характер этой зависимости может быть совершенно различным для различных материалов контактирующих тел и условий контакта. Многочисленные экспериментальные кривые, описывающие эту зависимость, приводятся в [1].

В данной работе определяются асимптотики касательных напряжений, скоростей проскальзывания (относительных касательных смещений) в задачах качения (статики) при стремлении рассматриваемой точки к границе площадки контакта и границе раздела областей проскальзывания и сцепления.

При нахождении асимптотик предполагается, что в окрестности линий раздела граничных условий, то есть при малом локальном проскальзывании или давлении, зависимость величины силы трения может быть аппроксимирована степенной функцией величины проскальзывания или давления. Используемый здесь метод позволяет найти асимптотики при степенях зависимости силы трения от величины проскальзывания, больших единицы. Такие степенные зависимости хорошо аппроксимируют, например, экспериментальные кривые в [2], отвечающие граничному трению металлических тел.

Задачи нахождения асимптотик после соответствующего растяжения окрестности рассматриваемой точки сводятся к определению двух голоморфных функций, соответствующих плоскому и антиплоскому полям напряжений и смещений в рассматриваемой окрестности. Коллинеарность в области проскальзывания силы трения вектору проскальзывания (относительного касательного смещения) накладывает нелинейное условие, связывающее между собой граничные значения искомых функций, заданные на действительной оси. В окрестности линии раздела площадки контакта и области сцепления граничные значения искомых функций связаны неравенством, которое вытекает из ограничения на величину силы трения в этой области. Указанные условия не позволяют разбить граничные условия для искомых функций на две независимые группы, относящиеся к каждой из этих функций, как это имеет место в некоторых задачах без трения.

При определении асимптотик выбирается класс, которому принадлежит решение полной (не асимптотической) задачи. В этом классе — ему принадлежат все известные точные решения плоских и пространственных задач с сухим трением — вектор проскальзывания непрерывен при подходе к границе площадки контакта, а вектор касательных напряжений непрерывен при переходе через границу раздела областей проскальзывания и сцепления. Из указанных условий непрерывности вытекают линейные смешанные условия для каждой из искомых функций. Решения этих смешанных задач содержат неопределенные постоянные. Их выбором удается удовлетворить нелинейным условиям коллинеарности и условиям типа неравенства в области контакта.

При решении используется независимость нормальных смещений и давления от касательных напряжений, что справедливо в случае одинаковых упругих постоянных контактирующих тел, либо при контакте абсолютно жесткого тела с несжимаемым, либо при контакте двух несжимаемых тел.

Найденные асимптотики касательных напряжений имеют вид: в области сцепления в окрестности раздела площадки контакта $\tau = O(1) + O(r^{1/2})$, в области проскальзывания в окрестности границы площадки контакта $\tau = O(r^{\alpha/2})$. Показатель α определяется зависимостью величины силы трения от давления в точках площадки контакта. Для скоростей проскальзывания (относительных касательных смещений) получены выражения: в области проскальзывания в окрестности линии раздела площадки контакта $s = O(r^{1/2})$ $(s = O(r^{3/2}))$, в области проскальзывания в окрестности границы площадки контакта $\tau = O(1) + O(r^{1/2}) \operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{2}$ $(s = O(1) + O(r^{1+\alpha/2}))$.

Задачи типа изучаемых в настоящей работе рассматривались в [4, 5]. В [4] решена асимптотическая задача, близкая к одной из изучаемых в настоящей работе задач, где рассматривается асимптотика решения в окрестности раздела площадки контакта для статического случая. В [5] решена задача с граничными условиями, заданными на конечном интервале, которые совпадают с возникающими в настоящей работе при рассмотрении асимптотики в окрестности границы площадки контакта в случае качения при кулоновском законе трения.

Настоящая работа использует метод [4].

Отметим, что в [6] рассматривалась плоская контактная задача качения с учетом зависимости локального коэффициента трения от местной скорости проскальзывания. Эта зависимость принималась линейной; на всем участке контакта, кроме передней точки, задавались условия проскальзывания.

1. Сформулируем условия на площадке контакта двух упругих тел при наличии трения. Предлагаемые в настоящей работе условия трения в контакте представляют собой обобщение условий, сформулированных для задач качения и статики в [7] при постоянном коэффициенте трения, на случай зависимости коэффициента трения от давления и скорости проскальзывания.

Пусть в системе координат XYZ рассматриваемые тела могут быть аппроксимированы полупространствами $Z > 0$ и $Z < 0$. Условия в плоскости $Z = 0$ имеют вид

$$\tau = \rho(p, |s|)\frac{s}{|s|} \quad \text{при} \quad |s| > 0 \text{ на } E \tag{1.1}$$

$$|\tau| \leqslant \rho(p, 0) \quad \text{при} \quad |s| = 0 \text{ на } E \tag{1.2}$$

$$|\tau| = O \text{ вне } E \tag{1.3}$$

Здесь $\tau(\tau_{XZ}, \tau_{YZ})$ — вектор касательного напряжения, p — давление, E — площадка контакта, s — вектор скорости проскальзывания (касательного смещения) верхнего тела относительно нижнего при качении (и статике).

Области проскальзывания и сцепления определяются условиями $|s| > 0$ и $|s| = 0$ соответственно. Условие (1.1) определяет величину силы трения в точках области проскальзывания как функцию величины проскальзывания и давления. Направления сил трения и скорости проскальзывания совпадают. Условие (1.2) определяет ограничение на величину силы трения в области сцепления. Условие (1.3) означает, что вне площадки контакта касательные напряжения отсутствуют. Для s имеют место выражения [7]

$$s = \begin{cases} u^+ - u^- + v & \text{при статическом контакте} \\ V\left(\dfrac{\partial u^-}{\partial X} - \dfrac{\partial u^+}{\partial X}\right) + v & \text{при стационарном качении в направлении } X \end{cases} \tag{1.4}$$

Здесь $u^{\pm}$ — упругие касательные смещения контактирующих тел; V — скорость качения, v — вектор скорости жесткого проскальзывания (смещения) в случае качения (статики), предполагаемый заданным.

2. Найдем асимптотику решения задачи (1.1—1.4) при подходе к точке P, расположенной внутри площадки контакта и лежащей на границе, которая разделяет области проскальзывания и сцепления. Введем систему координат x, y, Z с началом в точке P, направив оси x и y по касательной и нормали к границе раздела. Рассмотрим малую окрестность $y^2 + Z^2 \leqslant \varepsilon_1^2 L^2$, $x^2 < \varepsilon_2^2 L^2$ точки P, принадлежащую полупространству

$Z < 0$. Здесь L — характерный линейный размер площадки контакта; $\varepsilon_1 \ll 1$; $\varepsilon_2 \ll 1$; $\varepsilon_1/\varepsilon_2 \ll 1$. Отнесем y и Z к $\varepsilon_1 L$, x — к $\varepsilon_2 L$. В дальнейшем для новых переменных сохраним прежние обозначения. В уравнениях Ламе, справедливых в рассматриваемой окрестности и записанных в новых переменных, совершим предельный переход $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$, $\varepsilon_1/\varepsilon_2 \to 0$ [4]. Для полученных предельных уравнений будут справедливы известные комплексные представления [8]. Распространив, следуя [8], функцию $\Phi(z)$ $(z = y + iZ)$, определенную при $Z < 0$, на верхнюю полуплоскость, получим следующие выражения для значений на оси y напряжений и смещений точек нижнего тела

$$\sigma_{ZZ} - i\tau_{yZ} = \Phi^+ - \Phi^-, \qquad 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \varkappa\Phi^- + \Phi^+ \tag{2.1}$$

$$w = \operatorname{Re} f, \quad \tau_{xy} + i\tau_{xZ} = \mu\overline{f'} \tag{2.2}$$

Ограничимся в дальнейшем случаем одинаковых материалов контактирующих тел. Тогда полную контактную задачу можно расщепить на две, решаемые последовательно [7]. В первой — при $\tau = 0$, $u^+ = u^-$ определяются давление и площадка контакта, во второй — при $\sigma_{ZZ} = 0$, $u^+ = -u^-$ и функции p, строящейся по давлению из первой задачи, находятся τ и s. Нас будет интересовать асимптотика решения последней задачи, для которой имеют место нелинейные условия (1.1—1.4).

Считая, что ось y направлена внутрь области сцепления, запишем условия при $y \geqslant 0$. Введем угол γ между направлениями X и y и воспользуемся равенствами $u = u^- = -u^+$, $w = w^- = -w^+$. Тогда условие $|s| = 0$, имеющее место в области сцепления (при $y \geqslant 0$), может быть с учетом (1.4) записано в виде

$$u = \frac{1}{2}(v_x \cos\gamma + v_y \sin\gamma) = V_1, \quad w = \frac{1}{2}(v_x \sin\gamma - v_y \cos\gamma) = V_2 \text{ — в статике}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2V}(v_x + v_y \operatorname{tg}\gamma) = V_1, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{2V}(v_x \operatorname{tg}\gamma - v_y) = V_2 \text{ — при качении.} \tag{2.3}$$

Здесь мы считаем, что нормаль y к границе раздела не перпендикулярна направлению качения X.

Будем считать решение полной (не асимптотической) задачи таковым, что вектор τ непрерывен в точках линии раздела площадки контакта и при $y < 0$ (в области проскальзывания) удовлетворяет условию Гёльдера с показателем, большим 1/2. Существование решения из указанного класса в общей пространственной задаче пока не установлено, однако в решениях плоских задач при кулоновском трении статики [9] и качения [10] указанное свойство выполнено.

В [9, 10] касательные напряжения непрерывно дифференцируемы в точках окрестности линии раздела площадки, принадлежащих области проскальзывания.

Обозначим через C_x и C_y предельные значения τ_{xz} и τ_{yz} в точке P. Тогда нелинейные смешанные граничные условия для определения в случае качения голоморфной вне оси y функции $f(z)$ и голоморфной в нижней полуплоскости функции $\Phi(z)$ имеют вид

$$\operatorname{Re} f' = V_2 \quad \text{при} \quad y > 0 \tag{2.4}$$

$$\operatorname{Im} f' = -\frac{C_x}{\mu} \quad \text{при} \quad y < 0 \tag{2.5}$$

$$\operatorname{Re}(\Phi^- - \Phi^+) = 0 \quad \text{при всех} \quad y \tag{2.6}$$

$$\operatorname{Im}(\Phi^+ - \Phi^-) = C_y \quad \text{при} \quad y < 0 \tag{2.7}$$

$$\operatorname{Re}(\chi\Phi^- + \Phi^+) = 2\mu V_1 \quad \text{при} \quad y > 0 \tag{2.8}$$

$$\operatorname{Im} f'/\rho = (\operatorname{Re} f' - V_2)/M$$

$$M = \left\{(\operatorname{Re} f' - V_2)^2 + \left[\frac{1}{2\mu}\operatorname{Re}(\chi\Phi^- + \Phi^+) - V_1\right]^2\right\}^{1/2} \quad \text{при} \quad y < 0 \tag{2.9}$$

$$\operatorname{Im}(\Phi^+ - \Phi^-)/\rho = \left[\frac{1}{2\mu}\operatorname{Re}(\chi\Phi^- + \Phi^+) - V_1\right]/M \quad \text{при} \quad y < 0 \tag{2.10}$$

$$(\operatorname{Im} f')^2 + [\operatorname{Im}(\Phi^+ - \Phi^-)]^2 \leqslant \varkappa^2 \quad \text{при} \quad y \geqslant 0 \tag{2.11}$$

Условия (2.5) и (2.7) вытекают из задания в области проскальзывания главных членов C_x и C_y напряжений и наличия связей (2.1), (2.2) с напряжениями граничных значений Φ и f. Условия (2.4), (2.8) следуют из задания в области сцепления производных от упругих касательных смещений и их связей (2.1), (2.2) с функциями Φ и f. Условие (2.6) есть следствие равенства $\tau_{zz} = 0$. Условия (2.9) и (2.10) следуют из условия коллинеарности (1.1) при подстановке в него τ и s, выраженных, в силу (1.4), (2.1) и (2.2), через Φ и f. Условие (2.11) есть следствие (1.2) при подстановке в последнее τ через Φ и f.

Решение задачи (2.4)—(2.11) будем строить следующим образом. Сначала из линейных смешанных условий (2.4), (2.5) и (2.6), (2.7), (2.8) методом [8] находятся главные при $z \to 0$ части функций $f'(z)$ и $\Phi(z)$. Далее показывается, что соответствующим выбором постоянных в выражениях для f' и Φ можно удовлетворить нелинейным условиям (2.9), (2.10). Знаки этих постоянных таковы, что удовлетворяется также и неравенство (2.11).

Главная часть при $z \to 0$ общего решения задачи (2.4), (2.5) среди ограниченных при $z \to 0$ функций может быть записана в виде

$$f'(z) = V_2 - i\frac{C_x}{\mu} + C\sqrt{-z} \tag{2.12}$$

Здесь C — произвольная действительная постоянная. Главная часть общего решения задачи (2.6) — (2.8) имеет вид

$$\Phi(z)=\begin{cases}\dfrac{2V_1\mu}{\varkappa+1}+\dfrac{C_y}{2}i+C^*i+K\sqrt{-z} & \text{при}\quad Z\geqslant 0\\[2mm] \dfrac{2V_1\mu}{\varkappa+1}-\dfrac{C_y}{2}i+C^*i+K\sqrt{-z} & \text{при}\quad Z<0\end{cases}\tag{2.13}$$

Здесь C^* и K — произвольные действительные постоянные. Пользуясь выражениями (2.12), (2.13) и связями (1.4), (2.1), (2.2) напряжений и проскальзываний с Φ и f, получаем

$$\frac{s_x}{2V}=\frac{\partial w}{\partial y}-V_2=C\sqrt{-y};\quad \frac{s_y}{2V}=\frac{\partial u}{\partial y}-V_1=\frac{(\varkappa+1)K}{2\mu}\sqrt{-y}\tag{2.14}$$

при $y<0$

$$\tau_{xz}=C_x-\mu C\sqrt{y};\quad \tau_{yz}=C_y-2K\sqrt{y}\quad \text{при}\quad y>0\tag{2.15}$$

Ограничимся функциями $\tau(p,|s|)$, разложение которых по p и $|s|$ в окрестности точки P имеет вид

$$\tau(p,|s|)=\tau(p(P),0)+C_p p^{1/2+\delta}+C_s|s|^{1+\beta}$$

где $\delta>0$, $\beta>0$. Тогда для гладкой функции давления, пользуясь выражениями (2.14) для s_x, s_y, будем иметь

$$\tau(P,|s|)=\tau(p(P),0)+o(|y|^{1/2})\tag{2.16}$$

Проверяя условия (2.9), (2.10), можно убедиться, что они выполняются, в силу (2.16), с точностью до величин $\sim o(|y|^{1/2})$, если на постоянные в выражениях (2.14), (2.15) наложить условия $K=2\mu CC_x(\varkappa+1)C_y$; $\operatorname{sign} C=\operatorname{sign} C_x$. Отметим, что постоянные C_x и C_y как предельные значения τ_{xz} и τ_{yz} в точке P области проскальзывания удовлетворяют равенству $C_x^2+C_y^2=\tau^2(P(p),\ 0)$. Так как знаки C и C_x совпадают, то совпадают знаки K и C_y. Тогда

$$\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2=(C_x-\mu C\sqrt{y})^2+(C_y-2K\sqrt{y})^2\leqslant\tau^2(P(p),0)=$$
$$=\tau^2(P,|s|)+o(|y|^{1/2})$$

Таким образом, неравенство (2.11) с точностью до $o(|y|^{1/2})$ выполнено. Отметим, что выражения (2.14), (2.15) найдены по первым членам разложения τ_{xz} и τ_{yz} при $y<0$. Однако класс, которому по предположению принадлежит решение, таков, что следующие члены в разложении τ_{xz}, τ_{yz} имеют порядок не ниже $o(|y|^{1/2})$. Эти добавки дают приращения в (2.14), (2.15) более высокого порядка, чем выписанные члены.

Выпишем теперь граничные условия для функций f и Φ, отвечающие статической задаче

$$\mathrm{Re}\, f' = 0 \quad \text{при} \quad y \geqslant 0 \tag{2.17}$$

$$\mathrm{Jm}\, f' = -\frac{C_x}{\mu} \quad \text{при} \quad y < 0 \tag{2.18}$$

$$\mathrm{Re}\,(\Phi^- - \Phi^+) = 0 \quad \text{для всех} \quad y \tag{2.19}$$

$$\mathrm{Jm}\,(\Phi^+ - \Phi^-) = C_y \quad \text{при} \quad y < 0 \tag{2.20}$$

$$\mathrm{Re}\,(\lambda\Phi^- + \Phi^+) = 0 \quad \text{при} \quad y \geqslant 0 \tag{2.21}$$

$$\mathrm{Jm}\, f'/\rho = (\mathrm{Re}\, f - V_1)/N \quad \text{при} \quad y < 0 \tag{2.22}$$

$$N = \left\{ (\mathrm{Re}\, f - V_1)^2 + \left[\frac{1}{2\mu} \int\limits_0^y \mathrm{Re}\,(\lambda\Phi^- + \Phi^+)\, d\xi \right]^2 \right\}^{1/2}$$

$$\mathrm{Jm}\, f'/\rho = \left[\frac{1}{2\mu} \int\limits_0^y \mathrm{Re}\,(\lambda\Phi^- + \Phi^+)\, d\xi \right] / N \quad \text{при} \quad y < 0 \tag{2.23}$$

$$(\mathrm{Jm}\, f')^2 + [\mathrm{Jm}\,(\Phi^+ - \Phi^-)]^2 \leqslant \varphi^2 \quad \text{при} \quad y \geqslant 0 \tag{2.24}$$

Система (2.17)—(2.24) близка к системе (2.4)—(2.11). Отличие их состоит в том, что в правых частях условий (2.17), (2.21) в области сцепления стоят нули, которые возникают при дифференцировании по y первой пары условий (2.3). Кроме того, в правых частях (2.22) и (2.23) смещения u и w выражены через их производные по y. Пределы интегрирования выбраны таким образом, чтобы в точке P (при $y = 0$), принадлежащей области сцепления, выполнялись равенства $s_x(P) = s_y(P) = 0$.

Решение системы (2.17)—(2.24) строится в той же последовательности, что и (2.4)—(2.11) и имеет вид

$$f(z) = -i\frac{C_x}{\mu} z - \frac{2}{3} C (-z)^{3/2}$$

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{C_y}{2} i + C^* i + C \dfrac{C_y}{C_x} (-z)^{1/2} & Z > 0 \\ -\dfrac{C_y}{2} i + C^* i + C \dfrac{C_y}{C_x} (-z)^{1/2} & Z < 0 \end{cases}$$

$$\tau_{xz} = C_x - \gamma C \sqrt{y}, \qquad \tau_{yz} = C_y - \frac{4\gamma C C_x}{(\lambda + 1) C_y} \sqrt{y} \quad \text{при} \quad y < 0 \tag{2.25}$$

$$\frac{s_x}{2V} = -\frac{2}{3} C (-y)^{3/2}; \quad \frac{s_y}{2V} = -\frac{2}{3} \frac{CC_y}{C_x} (-y)^{3/2} \quad \text{при} \quad y \geqslant 0 \tag{2.26}$$

3. Найдем теперь асимптотики решений задач качения и статики при стремлении рассматриваемой точки к границе площадки контакта изнутри

области проскальзывания. Введем систему координат x, y, Z с началом в точке P границы площадки контакта, направив оси x и y вдоль касательной и внешней нормали к границе. Аналогично предыдущему сделаем растяжение рассматриваемой окрестности и воспользуемся представлениями (2.1), (2.2). Будем искать асимптотики решений, в которых вектор проскальзывания s непрерывен вплоть до границы площадки контакта. В общем случае не имеется доказательств принадлежности решения указанному классу. Однако при кулоновском законе трения в плоском случае [9, 10] функция s_y(s_x — отсутствует) удовлетворяет выставленному требованию. В пространственном случае при кулоновском трении в случае полного проскальзывания функции s_x и s_y также удовлетворяют наложенному условию [11].

Функцию $\rho(p, |s|)$ в окрестности точки P будем считать Гёльдеровой по p с показателем α и константой, зависящей от $|s|$. Тогда будет иметь место представление $\rho = N(|s|)\,p^{\alpha}$. Функции, описывающие форму контактирующих тел, будем считать гладкими, а давление ограниченным. Тогда в точке P характер поведения давления такой же, как в соответствующей плоской задаче. Так как давление может определяться при $\tau_{xZ} = \tau_{yZ} = 0$, имеем $p = c(-y)^{1/2}$ [8]. В силу указанных представлений для ρ, p и непрерывности s, условия (1.1) и (1.3) в окрестности точки P приобретают вид

$$\tau_{xZ} = \tau_{yZ} = 0 \quad \text{при} \quad y > 0 \tag{3.1}$$

$$\tau_{xZ} = C_x(-y)^{\alpha/2}, \qquad \tau_{yZ} = C_y(-y)^{\alpha/2} \quad \text{при} \quad y \leqslant 0 \tag{3.2}$$

Здесь $C_x = N(a_x, a_y)\,c^{\alpha}a_x/L$, $C_y = N(a_x, a_y)\,c^{\alpha}a_y/L$, $L = (a_x^2 + a_y^2)^{1/2}$; a_x, a_y — предельные значения проекций вектора проскальзывания.

Ограничимся случаем $0 < \alpha < 2$, когда напряжения в точке P ограничены, а их производные имеют особенность при $y = 0$. В рассматриваемом случае мы имеем возможность по условиям (3.1), (3.2) определить функции $f'(z)$ и $\Phi(z)$, а затем по этим функциям найти s_x и s_y. Для непрерывных функций s_x и s_y нелинейные условия коллинеарности будут автоматически выполнены в силу выбора постоянных C_x и C_y в (3.2).

Граничные условия для f' и Φ (одинаковые и для качения, и для статики), вытекающие из (3.1), (3.2), имеют вид

$$\operatorname{Im} f' = C_x(-y)^{\alpha/2}, \quad \operatorname{Im}(\Phi^+ - \Phi^-) = C_y(-y)^{\alpha/2}, \quad \operatorname{Re}(\Phi^+ - \Phi^-) = 0 \quad \text{при} \ y < 0 \tag{3.3}$$

$$\operatorname{Im} f' = \operatorname{Im}(\Phi^+ - \Phi^-) = \operatorname{Re}(\Phi^+ - \Phi^-) = 0 \quad \text{при} \quad y > 0 \tag{3.4}$$

Главные части при $z \to 0$ функций $f'(z)$ и $\Phi(z)$, дающих решение задачи (3.3), (3.4), представляются в виде

$$f'(z) = \frac{C_x}{\sin\dfrac{\pi\alpha}{2}} z^{\alpha/2} + C^*$$

$$\Phi(z) = \frac{iC_v}{\cos\pi\alpha - 1 + i\sin\pi\alpha}(-z)^{\alpha/2} + C^{**}$$

Здесь C^* и C^{**} — произвольные действительные постоянные.

Выражения для проекций вектора проскальзывания в случае качения имеют вид

$$s_x = a_x + \frac{C_x}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}} y^{\alpha/2}, \quad s_y = a_y + \frac{(\varkappa + 1) C_v}{4\mu\sin\frac{\pi}{2}\alpha} y^{\alpha/2} \quad \text{при} \quad y > 0 \quad (3.5)$$

$$s_x = a_x + \operatorname{ctg}\frac{\pi\alpha}{2} C_x (-y)^{\alpha/2}, \quad s_y = a_y + \frac{(\varkappa + 1)\operatorname{ctg}\frac{\pi\alpha}{2} C_v}{4\mu}(-y)^{\alpha/2} \quad (3.6)$$

$$\text{при} \quad y < 0$$

В случае статического контакта выражения для проекций вектора проскальзывания записываются следующим образом:

$$s_x = a_x + \frac{2C_x}{(\alpha + 2)\sin\frac{\pi\alpha}{2}} y^{1+\alpha/2}, \quad s_y = a_y + \frac{(\varkappa + 1) C_v}{2\mu(\alpha + 2)\sin\frac{\pi\alpha}{2}} y^{1+\alpha/2} \quad (3.7)$$

$$\text{при} \quad y > 0$$

$$s_x = a_x + \frac{2C_x\operatorname{ctg}\frac{\pi\alpha}{2}}{(\alpha + 2)}(-y)^{1+\alpha/2}, \quad s_y = a_y + \frac{(\varkappa + 1) C_v\operatorname{ctg}\frac{\pi\alpha}{2}}{2\mu(\alpha + 2)}(-y)^{1+\alpha/2} \quad (3.8)$$

$$\text{при} \quad y < 0$$

4. Случай стремления точки к границе площадки контакта изнутри области сцепления в настоящей работе не рассматривается, так как он сводится к двум независимым плоским задачам для проекций на оси x и y.

Полученные в точках окрестности границы площадки контакта, принадлежащих области проскальзывания, асимптотики (3.2), (3.5) — (3.8) имеют степенной характер, одинаковый для проекций на оси x и y функций s и τ. Показатель степени α зависит от вида функции μ, входящей в формулировку закона трения. Производные функций s_x и s_y (первые — в случае качения и вторые — в случае статики), когда $\alpha \neq 1$, имеют особенности при подходе к точке границы площадки контакта и для $y = +0$, и для $y = -0$. В случае кулоновского закона трения ($\alpha = 1$) асимптотики приобретают корневой характер, причем особенности в производных s_x и s_y при $y < 0$ (внутри площадки контакта) пропадают. Асимптотика точного решения [5] задачи о качении бесконечного цилиндра с осевым сдвигом при кулоновском трении совпадает с полученной в настоящей работе при $\alpha = 1$. Асимптотики проскальзывания и напряжения в точных решениях [10] и [9] о качении и сдвиге при кулоновском трении бесконечного цилиндра перпендикулярно его образующей совпадают с асимптотиками, даваемыми (3.2), (3.5)—(3.8) при $\alpha = 1$.

Асимптотики (2.14), (2.15), (2.25), (2.26), полученные в точках окрестности линии раздела областей проскальзывания и сцепления, имеют одинаковый (корневой) характер для проекций искомых характеристик на оси x и y. Корневой характер асимптотик имеет место при указанных выше требованиях на зависимость ρ от $|s|$. Асимптотики точных решений [9, 10] в окрестности точек раздела участков проскальзывания и сцепления совпадают с найденными выражениями для [illegible] и [illegible] в настоящей работе.

Автор признателен Р. В. Гольдштейну за постановку задачи определения асимптотик решений пространственных контактных задач с трением, полезные обсуждения и советы в процессе работы.

Всесоюзный научно-исследовательский
конструкторско-технологический
институт подшипниковой
промышленности

Поступила 23 IV 1979

Ա. Ա. ՍՊԵԿՏՈՐ

ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ԲԱԺԱՆՄԱՆ ԳԾԻ ՄՈՏ ՍԱՀՈՒՄՈՎ ԵՎ ՀԱՐԱԿՑՈՒՄՈՎ ՄԻ ՔԱՆԻ ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում են կայուն գլորման տարածական կոնտակտային խնդիրներ կոնտակտի մեջ գտնվող մարմինների չոր շփումով միևնույն նյութերի դեպքում։ Տեղի ունի շփման օրենք, ըստ որի տեղական շփման ուժը կախված է ճնշումից և սահքի արագությունից (շոշափող տեղափոխության նկատմամբ)։ Որոշվում են շոշափող լարումների և սահման արագությունների ասիմպտոտիկաները կոնտակտի մակերեսի սահմանին և այդ մակերեսի վրա սահքի և հարակցման տիրույթների բաժանման գծին մոտենալու դեպքում։

ASYMPTOTIC BEHAVIOUR IN SOLUTIONS TO SOME THREE-DIMENSIONAL CONTACT PROBLEMS OF SLIP AND ADHESION NEAR THE DIVISION LINES OF BOUNDARY CONDITIONS

A. A. SPECTOR

Summary

Three-dimensional contact problems of statics and steady rolling are considered. The asymptotic behaviour of tangential tractions and slip velocities near the boundary of contact area and the division line of slip and adhesion areas is investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крагельский И. В., Виноградова И. Э.* Коэффициенты трения. М., Машгиз, 1962
2. *Голего Н. Л.* Схватывание в машинах и методы его устранения. Киев, Техника, 1965.
3. *Вайнштейн В. Э., Трояновская Г. И.* Сухие смазки и самосмазывающиеся материалы. М., Машиностроение, 1968.
4. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М., Наука, 1974.
5. *Мищишин И. И.* Об одной нелинейной задаче сопряжения функций. Гидроаэромеханика и теория упругости. Межвуз. научн. сб., 1974, в. 18.
6. *Моссаковский В. И., Мохарсвич О. П., Рудяков З. З.* О зависимости коэффициента сцепления от скорости качения. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 5.
7. *De Pater A. D.* On the Reciprocal Pressure Between Two Elastic Bodies. Proc. of the Symp. Rolling Contact Phenomena. Amsterdam, 1962.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Наука, 1966.
9. *Глаголев Н. И.* Сопротивление перекатыванию цилиндрических тел. ПММ, 1945, т. IX, в. 4.
10. *Carter F. W.* On the Action of a Locomotive Driving Wheel. Proc. Roy. Soc. (A), 1926, v. 12
11. *Спектор А. А.* Об одном случае пространственной контактной задачи качения. Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1977, т. XXX, № 5.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 1, 1980 Механика

А. П. СЕЙРАНЯН

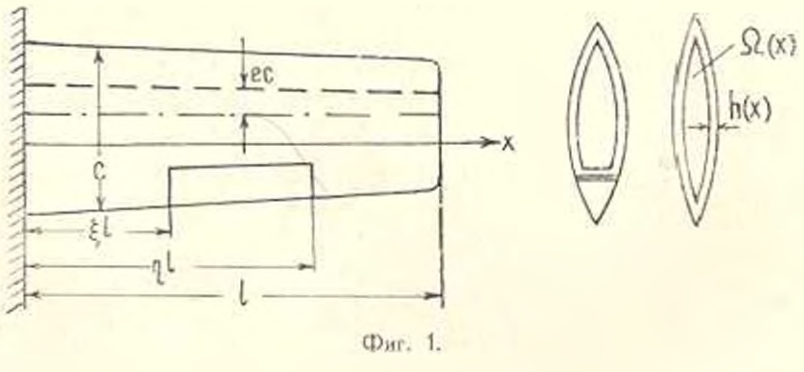
ОПТИМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЭЛЕРОНА

К первым работам, посвященным проблемам оптимизации в аэроупругих явлениях, относятся [1—4]. В [1], в частности, было получено решение оптимальной задачи о дивергенции несущей поверхности. Обобщению этой задачи посвящены работы [2, 5, 6]. В [3—4] на основе дискретного подхода исследовались оптимальные распределения жесткостей по крылу при ограничениях по флаттеру, упругой эффективности и статической прочности.

В [7] изучена задача минимизации веса прямого крыла при ограничениях, наложенных на критические скорости дивергенции и реверса элерона.

В данной работе рассматривается задача о крыле минимального веса при ограничении по скорости, при которой реализуется заданное значение упругой эффективности элерона. Решение оптимальной задачи получено с применением метода возмущений.

1. *Основные соотношения.* Рассмотрим прямое крыло большого удлинения с элероном в потоке газа. Пунктирная линия на фиг. 1 указывает линию аэродинамических фокусов, а штрихпунктирная — упругую ось; $c(x)$ есть хорда крыла, а $e(x)$ — плечо подъемной силы, отнесенное к хорде крыла.



Фиг. 1.

Примем, что аэродинамические силы, действующие на крыло, вычисляются согласно теории несущей полосы. Обозначив угол закручивания крыла относительно упругой оси через $\theta(x)$, а угол отклонения элерона через $\beta(x)$, выпишем уравнение упругого равновесия крыла в потоке и граничные условия [8]

$$[GJ\theta']' + qC_y^\alpha e(x)\theta(x)c^2(x) + qC_*(x)\beta(x)c^2(x) = 0$$

$$C_*(x) = \frac{\partial C_y}{\partial \beta}e(x) + \frac{\partial C_m}{\partial \beta} \tag{1.1}$$

$$\theta(0) = GJ\theta'|_{x=l} = 0$$

В этом уравнении $GJ(x)$ есть жесткость крыла на кручение; $q = 1/2\rho u^2$ — скоростной напор (ρ — плотность газа, u — скорость полета); C_y^α, $\frac{\partial C_y}{\partial \beta}$, $\frac{\partial C_m}{\partial \beta}$ — заданные аэродинамические коэффициенты. Относительно углов $\theta(x)$, $\beta(x)$ принимается [8]

$$\theta(x) = \theta_0 f(x), \; \beta(x) = \beta_0 g(x) \tag{1.2}$$

где величины θ_0, β_0 — константы.

Функция $g(x)$ считается заданной и отличной от нуля лишь на участке расположения элерона. Для жесткого элерона полагается $g(x) = 1$, $x \in [l_1, \gamma_1 l]$.

Момент крена относительно центральной оси самолета, возникающий при отклонении элерона, равен

$$M = q\int_0^l \left(C_y^\alpha \theta(x) + \frac{\partial C_y}{\partial \beta}\beta(x)\right)c(x)x\,dx$$

Эффективность элерона $\varkappa$ при скоростном напоре q определяется отношением производных $\partial M/\partial \beta_0$ на упругом и жестком крыле.

Для жесткого крыла имеем

$$M = q\int_0^l \frac{\partial C_y}{\partial \beta}\beta(x)c(x)x\,dx$$

Используя представления для M и соотношения (1.2), найдем $\varkappa$

$$\varkappa = \int_0^l \left[C_y^\alpha \frac{\theta_0}{\beta_0}f(x) + \frac{\partial C_y}{\partial \beta}g(x)\right]c(x)x\,dx \left[\int_0^l \frac{\partial C_y}{\partial \beta}g(x)c(x)x\,dx\right]^{-1} \tag{1.3}$$

Выразив отсюда θ_0/β_0 и подставив в уравнение (1.1), приходим к интегро-дифференциальному уравнению относительно функции $f(x)$, описывающему несамосопряженную краевую задачу на собственные значения

$$[GJf']' + qC_y^\alpha e(x)c^2(x)f(x) =$$

$$= -\frac{q}{1-\varkappa}C_*(x)c^2(x)g(x)\int_0^l C_y^\alpha f(x)c(x)x\,dx\left[\int_0^l \frac{\partial C_y}{\partial \beta}g(x)c(x)x\,dx\right]^{-1}$$

$$f(0) = 0, \quad (GJf')_{x=l} = 0 \tag{1.4}$$

Роль собственного значения играет скоростной напор q. Считая $\varkappa$ заданным параметром, можно решить (1.4) и определить первое положительное собственное значение q, при котором эффективность элерона равна $\varkappa$. При $\varkappa = 0$ задача (1.4) описывает явление реверса элерона [7, 9]. Отметим, что интегральное уравнение реверса, эквивалентное (1.4) при $\varkappa = 0$, приводится в книге [8].

Предположим, что поперечное сечение крыла представляет собой тонкостенный замкнутый контур толщиной $h(x)$, длиной контура $s(x)$ и площадью $\Omega(x)$. На фиг. 1 представлены два различных поперечных сечения крыла, первое из них относится к участку расположения элерона. Функции $\Omega(x)$, $s(x)$ в точках ξ^l и η^l терпят разрыв. В этих точках накладываются дополнительные условия непрерывности функций $f(x)$ и $GJ(x)f'(x)$.

Согласно формуле Бредта [8] имеем

$$GJ(x) = 4G\Omega^2(x)\, h(x) / s(x) \tag{1.5}$$

Отметим, что сечение крыла может предполагаться и многоконтурным, при этом линейная зависимость между жесткостью и толщиной контуров $h(x)$, характерная для тонкостенных сечений, остается в силе [8].

Обозначим через γ удельный вес материала, из которого изготовлено крыло, функционал веса крыла (без элерона) запишем в виде

$$V = \int_0^l \gamma s(x)\, h(x)\, dx \tag{1.6}$$

Функции $\Omega(x)$, $s(x)$, $c(x)$, $g(x)$, $e(x)$ и параметры $\varkappa$, G, C_y^α, $\partial C_y/\partial\beta$, $\partial C_m/\partial\beta$, ρ, γ, l в последующих рассмотрениях считаются фиксированными величинами, функция $h(x)$ варьируется.

Поставим оптимальную задачу: при заданном значении $\varkappa$, $0 \leqslant \varkappa < 1$ требуется найти функцию толщины $h(x)$, минимизирующую функционал веса (1.6), так, чтобы минимальное положительное собственное значение задачи (1.4) q было не ниже заданного значения q_*, $q_* > 0$.

Для удобства введем безразмерную длину и запишем соотношения (1.4) с учетом (1.5) в виде

$$(a_0 h f')' + q a_1(x) f(x) = q \frac{a_2(x)\, d(x)}{(1-\varkappa)} \int_\xi^1 f(x)\, a_3(x)\, dx \tag{1.7}$$

$$f(0) = a_0 h f' \big|_{x=1} = 0$$

Здесь

$$a_0(x) = 4G\Omega^2(x) / s(x), \quad a_1(x) = C_y^\alpha \rho(x)\, c^2(x)\, l^2$$

$$a_2(x) = \frac{a_1(x)\, g(x)}{\int_0^1 g(x)\, c(x)\, x\, dx}, \quad a_3(x) = c(x)\, x, \quad d(x) = 1 + \frac{\partial C_m}{\partial\beta} \Big/ \left(\frac{\partial C_y}{\partial\beta} e(x)\right)$$

Функции $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_3(x)$ положительны при $x \in (0, 1)$, $a_2(x)$ неотрицательна.

Необходимые условия оптимальности выводятся с применением правила множителей Лагранжа и имеют вид, аналогичный полученным в [7]

$$a_0(x)\,\varphi'(x)\,f'(x) = \lambda s(x) \tag{1.8}$$

причем сопряженная функция φ удовлетворяет следующему уравнению и граничным условиям:

$$(a_0 h\varphi')' + qa_1\varphi = \frac{qa_3}{(1-\varkappa)}\int_0^1 da_3\varphi\,dx \tag{1.9}$$

$$\varphi(0) = a_0 h\varphi'\big|_{x=1} = 0$$

Кроме того, в точках ξ и η должны выполняться условия Эрдмана—Вейерштрасса, которые требуют непрерывности функций φ, $a_0 h\varphi'$ в этих точках.

Условие оптимальности (1.8) вместе с уравнениями и граничными условиями для функций f и φ (1.7), (1.9), а также условиями Эрдмана—Вейерштрасса, позволяют найти оптимальное решение $h^*(x)$.

С помощью результатов работы [7] можно показать, что на экстремалях, определяемых соотношениями (1.7)—(1.9), выполняется условие сильного минимума — принцип максимума функции Гамильтона.

2. *Прямоугольное крыло.* Рассмотрим случай прямоугольного крыла с жестким элероном, расположенным по всему размаху крыла. Уравнения (1.7)—(1.9) запишутся в безразмерных переменных в виде (функции $c(x)$, $e(x)$, $\Omega(x)$, $s(x)$, $q(x)$ считаются заданными константами)

$$[l(x)\,f'(x)]' + qf(x) = \frac{2dq}{1-\varkappa}\int_0^1 f(x)\,x\,dx \tag{2.1}$$

$$f(0) = lf'\big|_{x=1} = 0$$

$$f'(x)\,\varphi'(x) = \lambda = \text{const} \tag{2.2}$$

$$[l(x)\,\varphi'(x)]' + q\varphi(x) = \frac{2dxq}{1-\varkappa}\int_0^1 \varphi(x)\,dx \tag{2.3}$$

$$\varphi(0) = l\varphi'\big|_{x=1} = 0$$

Добавим еще условия нормировки функций f и φ. Для удобства запишем их следующим образом:

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx = \int_0^1 \varphi^2(x)\,dx = 1/3 \tag{2.4}$$

В этих соотношениях $t(x)$ — безразмерная толщина, $t(x) = h(x)/l$; $\mu = 1/4\, qC_y^2 ec^2 ls/(G\Omega^2)$. Введем также обозначение $\mu_0 = 1/4\, q_0 C_y^2 ec^2/(G\Omega^2)$.

Рассмотрим параметр $d = 1 + \partial C_m/\partial\beta/(\partial C_y/\partial\beta e)$. Коэффициенты $\partial C_m/\partial\beta$ и $\partial C_y/\partial\beta$ имеют разные знаки и для прямоугольного крыла с элероном, расположенным по всему размаху, определяются формулами Глауэрта [8]. Используя эти соотношения, получим

$$d = 1 - \frac{(1-E)\sqrt{E(1-E)}}{e\left[\arccos(1-2E) + 2\sqrt{E(1-E)}\right]} \tag{2.5}$$

Здесь E есть отношение хорды элерона к хорде крыла. Считая, что аэродинамический фокус лежит на расстоянии 1/4 от передней кромки крыла и что упругая ось находится в середине крыла без элерона (это справедливо для дозвуковых режимов полета и для тонких крыльев), имеем $e = 1/4\,(1-2E)$.

Подставляя эту зависимость в (2.5), получим d как функцию E. Нетрудно видеть, что $d(E)$ является монотонно убывающей функцией при $0 \leq E < 1/2$, причем $d(0) = 0$, $d(0.2) = -0.235$. Поскольку обычно $0 < E < 0.2$, то параметр d можно считать малым и отрицательным.

Отметим, что при $d > 0$ потеря эффективности элерона наступает уже при $q = q_{div}$ [8, 9], поэтому в этом случае следует рассматривать оптимальную задачу о дивергенции [7].

Воспользуемся методом возмущений [10] и будем искать решение оптимальной задачи в виде разложений по малому параметру $\varepsilon = 2d/(1-\varkappa)$, полагая $q = q_0$

$$t(x) = t_0(x) + \varepsilon t_1(x) + \varepsilon^2 t_2(x) + \ldots$$

$$f(x) = f_0(x) + \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x) + \ldots$$

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varepsilon\varphi_1(x) + \varepsilon^2\varphi_2(x) + \ldots$$

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \ldots$$

Подставляя эти разложения в соотношения (2.1)—(2.4) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε, для нулевого приближения получим соотношения оптимальной задачи о дивергенции несущей поверхности [1]. Решение имеет вид

$$t_0(x) = 1/2\,\mu_0(1 - x^2) \tag{2.6}$$

$$f_0(x) = \varphi_0(x) = x$$

Для функций первого приближения получаются соотношения

$$(t_0 f_1')' + \mu_0 f_1 = \mu_0 \int_x^1 f_0 x\,dx - (t_1 f_0')' \tag{2.7}$$

$$f_1(0) = (t_1 f_0' + t_0 f_1')_{x=1} = 0$$

$$(t_0\varphi_1')' + \nu_0\varphi_1 = \nu_0 x\int_0^1 \varphi_0\,dx - (t_1\varphi_0')' \tag{2.8}$$

$$\varphi_1(0) = (t_1\varphi_0' + t_0\varphi_1')_{x=1} = 0 \tag{2.9}$$

$$\int_0^1 f_0 f_1\,dx = 0, \quad \int_0^1 \varphi_0\varphi_1\,dx = 0, \quad f_1\varphi_0' + \varphi_1 f_0 = c_1$$

С использованием (2.6) из последнего равенства следует $f_1(x) + \varphi_1(x) = c_1$. Поскольку $f_1(0) = \varphi_1(0) = 0$, то $f_1(x) + \varphi_1(x) = c_1 x$. Умножим это уравнение на f_0 и проинтегрируем от нуля до единицы. С учетом (2.6) и первых двух условий (2.9) получим $c_1 = 0$.

Граничные условия в точке $x = 1$ из (2.7), (2.8) приводят к $t_1(1) = 0$. Сложим теперь (2.7) и (2.8) и, используя $f_1 = -\varphi_1$ и (2.6), проинтегрируем результат с граничным условием $t_1(1) = 0$. В результате получим

$$t_1(x) = -\frac{\nu_0}{24}(7 - 4x - 3x^2) \tag{2.10}$$

Вычислим функцию $f_1(x)$. Для этого используем уравнение (2.7) (можно и (2.8)). С учетом (2.6), (2.10) преобразуем его к виду

$$[1/2\,(1 - x^2)\,f_1(x)]' + f_1(x) = \psi(x), \quad x \in (0,\ 1) \tag{2.11}$$

$$f_1(0) = 0; \quad \psi(x) = \frac{1}{6} - \frac{x}{4}$$

Уравнение $[(1 - x^2)f']' + \nu f = 0$, $x \in (-1,\ 1)$ представляет собой уравнение Лежандра. Собственными функциями этого уравнения являются ортогональные полиномы Лежандра $P_i(x)$, а собственными значениями — числа $\nu_i = i(i + 1)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ [10, 12].

Отметим, что полиномы Лежандра с нечетными индексами удовлетворяют условию $P_{2i+1}(0) = 0$, $i = 0, 1, 2\ldots$.

Доопределим функцию $\psi(x)$ на отрезке $[-1,\ 0]$ нечетным образом и разложим по полиномам Лежандра. Это разложение имеет вид [11]

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i+1}P_{2i+1}(x), \qquad a_{2i+1} = \frac{(4i+3)}{12(i+1)}P_{2i}(0), \quad i = 1, 2\ldots \tag{2.12}$$

Функцию $f_1(x)$ будем искать в виде ряда

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i P_i(x) \tag{2.13}$$

Подставим это разложение в (2.11) и используем (2.12). Умножим затем (2.11) на $P_k(x)$, $k = 0, 1\ldots$ и проинтегрируем на отрезке $[-1,\ 1]$. Ввиду ортогональности полиномов Лежандра получим

$$b_{2i-2} = 0, \quad b_{2i+1} = \frac{a_{2i+1}}{1-(i+1)(2i+1)}; \quad i = 1, 2... \tag{2.14}$$

Подставляя (2.13) в условие нормировки $\int\limits_0^1 f_0 f_1 dx = 0$ и учитывая $f_0 = x = P_1(x)$ и ортогональность нечетных полиномов Лежандра на отрезке [0, 1], получим $b_1 = 0$. Окончательно разложение (2.13) с учетом выражения для $P_{2i}(0)$ из [11] и соотношений (2.12), (2.14) приводится к виду

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}(4i+3)1\cdot 3\cdots(2i-1)}{6i(2i+3)(i+1)!2^{i+1}} P_{2i+1}(x) \tag{2.15}$$

Можно доказать, что этот ряд, как и ряд, составленный из производных, сходится на отрезке [0.1] абсолютно и равномерно. Следовательно, функция $f_1(x)$ непрерывно дифференцируема.

Уравнения метода возмущений для второго приближения приводят к соотношениям

$$(t_1 f_1)' + (t_0 f_2)' + (t_2 f_0)' - \mu_0 f_2 = \mu_1 \int\limits_0^1 f_1 x dx \tag{2.16}$$

$$(t_1 \varphi_1')' + (t_0 \varphi_2')' + (t_2 \varphi_0')' + \mu_0 \varphi_2 = \mu_0 x \int\limits_0^1 \varphi_1 dx \tag{2.17}$$

$$f_2(0) = \varphi_2(0) = 0, \quad t_2(1) = 0 \tag{2.18}$$

$$\int\limits_0^1 (2f_0 f_2 - f_1^2)\, dx = 0, \quad \int\limits_0^1 (2\varphi_0\varphi_2 + \varphi_1^2)\, dx = 0 \tag{2.19}$$

$$f_2\varphi_0' + \varphi_1 f_1' + f_0\varphi_2' = t_2$$

Из этих уравнений найдем

$$t_2(x) = \frac{\mu_0}{2}\left[\int\limits_x^1 dx \int\limits_0^x f_1^2 dx + \frac{(1-x^2)}{2}\left(\int\limits_0^1 f_1 dx - f_1^2\right)\right] \tag{2.20}$$

Вычислим безразмерный минимальный вес $v^0 = \int\limits_0^1 t^0(x)\, dx$ с точностью до величин второго порядка. Соответствующая размерная величина равна $V^0 = \gamma s l^2 v^0$. Непосредственным интегрированием выражений (2.6), (2.10) установим

$$\int\limits_0^1 t_0 dx = 1/3\,\mu_0, \quad \int\limits_0^1 t_1 dx = -1/6\,\mu_0$$

Вычислим интеграл $\int\limits_0^1 t_2 dx$. Для этого умножим (2.17) (можно использовать и (2.16)) на f_1 и проинтегрируем от нуля до единицы. Учитывая (2.6), (2.9) и интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_0^1 t_2 dx = \int\limits_0^1 t_1' f_1\, dx = \frac{\mu_0}{6} \int\limits_0^1 f_1 dx$$

Последнее равенство справедливо ввиду (2.10), (2.15) и ортогональности нечетных полиномов Лежандра на отрезке [0, 1]. Интеграл $\int\limits_0^1 f_1 dx$ вычисляется с применением формулы [11]

$$P_{2i+1}(x) = \frac{P'_{2i+2}(x) - P'_{2i}(x)}{4i+3}$$

Окончательный результат имеет вид

$$\int\limits_0^1 t_2 dx = -\frac{\mu_0}{144} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(4i+3)\, P^2_{2i}(0)}{i\,(2i+3)\,(i+1)^2} \approx -0.00073\, \mu_0$$

Таким образом, с точностью до величин второго порядка малости получаем

$$v^0 = \int\limits_0^1 (t_0 + \varepsilon t_1 + \varepsilon^2 t_2)\, dx = \frac{\mu_0}{3}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2} - 0.0022\varepsilon^2\right) \qquad (2.21)$$

Если в выражении $\varepsilon = 2d/(1-\varkappa)$ положить $\varkappa = 0$, то формулу (2.21) и выражение для $t^0(x)$ можно сравнить с соответствующими численными результатами, полученными в [7]. Сравнение свидетельствует о хорошем совпадении аналитических и численных результатов (относительная разница на интервале $-5 \leqslant \varepsilon \leqslant 0$ не превышает 1%) и указывает на то, что соотношение (2.21) применимо вплоть до значений $\varepsilon \sim 10$, причем вклад второго приближения пренебрежимо мал. Таким образом, выражение

$$t^0(x) = \frac{\mu_0}{2}(1-x)\left[1 + x - \frac{d}{6(1-\varkappa)}(7+3x)\right] \qquad (2.22)$$

хорошо описывает решение оптимальной задачи об эффективности элерона и для не малых ε.

Для функции толщины $t^0(x)$ из (2.22) методом возмущений можно определить критическую скорость дивергенции ($q_{\text{div}} = 1/2\, \rho u^2_{\text{div}}$)

$$\mu_{\text{div}} = \mu_0 \left[1 - \frac{d}{1-\varkappa} + 0\left(\frac{d}{1-\varkappa}\right)^2\right]$$

Итак, если $d < 0$, то $q_{\text{див}} > q_0$, и оптимальным решением является функция $h^0(x)$ из (2.22). Если $d > 0$, то соответствующим решением является функция нуленого приближения $h_0(x)$, определяемая (2.6) [7].

3. *Общий случай.* Аналогично методом возмущений можно получить решение оптимальной задачи и в общем случае, описываемом уравнениями (1.7)—(1.9). Предполагая, что функция $d(x)$ на участке расположения элерона мала по сравнению с единицей, введем малый параметр $d(x) = \varepsilon D(x)$. Отыскивая решение задачи в виде разложений по ε, найдем нулевое и первое приближения. Функции нулевого приближения $h_0(x)$, $f_0(x)$ имеют вид

$$h_0(x) = q_0 \int_x^1 a_1 f_0 dx / (a_0 f_0) \tag{3.1}$$

$$f_0(x) = \varphi_0(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{\gamma l s(x)}{a_0(x)}}\, dx$$

Вычислив первое приближение, получим выражения для $h^0(x) = h_0(x) + \varepsilon h_1(x)$, $V^0 = \gamma l \int_0^1 s h^0 dx$

$$h^0(x) = \frac{q_0}{a_0 f_0} \int_x^1 \left[a_1 f_0 - \frac{a_2 d}{2(1-x)} \int_0^1 f_0 a_3 dx - \frac{a_3}{2(1-x)} \int_0^1 d a_2 f_0 dx \right] dx \tag{3.2}$$

$$V^0 = \gamma l \int_0^1 s h_0 dx - \frac{q_0}{1-x} \int_0^1 a_2 f_0 d dx \int_0^1 f_0 a_3 dx$$

В этих выражениях $h_0(x)$, $f_0(x)$ определяются из (3.1).

Скорость дивергенции для распределения $h^0(x)$ определяется соотношением

$$q_{\text{див}} = q_0 \left(1 - \frac{\int_0^1 a_2 f_0 d dx \int_0^1 f_0 a_3 dx}{(1-x) \int_0^1 a_1 f_0^2 dx} \right)$$

Ввиду положительности функций a_0, a_1, a_3, f_0 и неотрицательности a_2 соотношение между q_0 и $q_{\text{див}}$ для малых $d(x)$ определяется знаком интеграла $\int_0^1 a_2 d f_0 dx$. Если этот интеграл меньше нуля, то $q_{\text{див}} > q_0$ и функция $h^0(x)$ из (3.2) является решением задачи оптимизации. В противном случае реализуется решение $h_0(x)$ из (3.1).

Автор благодарит Н. В. Баничука и В. М. Фролова за полезные обсуждения.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила 31 V 1979

Ա. Պ. ՍԵՅՐԱՆՅԱՆ

ԷԼԵՐՈՆԻ ԷՖԵԿՏԻՎՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ՕՊՏԻՄԱԼ ԽՆԴԻՐԸ

Ամփոփում

Դիտարկվում է աերոառաձգականության օպտիմիզացիայի խնդիրը՝ թևի կշռի փոքրացումը թևիկի արդյունավետության սահմանափակման դեպքում, որի ժամանակ իրագործվում է էլերոնի առաձգական էֆեկտիվության տրված արժեքը։ Ստացվել է սեփական արժեքների նկատմամբ ինքնալծորդված խնդիրը նկարագրող ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումը։ Լագրանժի արտադրիչի օրենքի օգտագործմամբ արտածվում են օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանները։ Օպտիմիզացիայի խնդրի լուծումը կառուցվում է գրգռումների եղանակով։ Ուղղանկյունաձև թևի դեպքում ստացվել են երկու մոտավորություններ, ընդ որում օգտագործվում են ըստ Լեժանդրի օրթոգոնալ բազմանդամների վերլուծությունները։

AN OPTIMAL PROBLEM OF AILERON EFFICIENCY

A. P. SEYRANIAN

Summary

An optimal problem of a wing of minimum weight under aeroelastic constraint on aileron efficiency is considered. A general integral-differential equation describing the process is deduced. The solution to the optimal problem is obtained by the perturbation method.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ashley H., McIntosh S. C.* Jr. Applications of aeroelastic constraints in structural optimization. Proc. 12-th Internat. Congress of Theoret. and Appl. Mech., Stanford, Berlin, Springer-Verlag, 1968.
2. *McIntosh S. C., Eastep F. E.* Design of minimum-mass structures with specified stiffness properties. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 5.
3. *Буньков В. Г.* Расчет оптимальных флаттерных характеристик методом градиента. Тр. ЦАГИ, 1969, вып. 1166.
4. *Бирюк В. И.* О задаче оптимального проектирования конструкции крыла из условий прочности и аэроупругости. Ученые записки ЦАГИ, 1972, № 2.
5. *Armand J.-L.* Applications of optimal control theory to structural optimization: analytical and numerical approach. Proc. IUTAM Sympos. on Optimization in Structural Design, Warsaw, Berlin, Springer-Verlag, 1973.

6. *Баничук Н. В.* Минимизация веса крыла при ограничении по скорости дивергенции. Ученые записки ЦАГИ, 1978, № 5.
7. *Сейранян А. П.* Оптимизация веса крыла при ограничениях по статической аэроупругости. Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 4.
8. *Фын Я. Ц.* Введение в теорию аэроупругости. М., Физматгиз, 1959.
9. *Сейранян А. П.* О соотношении между критическими скоростями реверса и дивергенции прямого крыла. Ученые записки ЦАГИ, 1978, № 4.
10. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики, т. I. М.—Л., Гостехиздат, 1933.
11. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М., «Наука», 1976.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 1, 1980 Механика

Г. А. ПЕТРОСЯН, Г. Г. НЕРСИСЯН, С. С. АВЕТЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ОСАДКИ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Изделия из пористых материалов, получаемых обработкой давлением, находят широкое применение в различных отраслях народного хозяйства. Для определения оптимальных параметров технологического процесса и получения изделий с заданными физико-механическими свойствами необходимо изучить напряженно-деформированное состояние деформированной заготовки.

В настоящей работе для исследовании процесса осесимметричной осадки пористых материалов применен метод конечных элементов (МКЭ) в форме метода перемещений [1]. Задача решается как по деформационной теории пластичности, так и по теории течения пористых материалов.

1. *МКЭ по деформационной теории пластичности пористых материалов.* Зависимости компонентов деформаций ε_{ij} от компонентов напряжений σ_{ij} по деформационной теории пластичности пористых материалов имеют вид [2]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3\varepsilon_{\text{экв}}}{2\beta^{3n}\sigma_{\text{экв}}}\left[\sigma_{ij} - (1 - 2\alpha_0)\,\delta_{ij}\sigma_0\right] \tag{1.1}$$

где $\varepsilon_{\text{экв}}$ и $\sigma_{\text{экв}}$ — эквивалентные деформации и напряжения, n — постоянная для материала, δ_{ij} — символ Кронекера, σ_0 — среднее нормальное напряжение, β — первая функция пористости

$$\beta = \left[\frac{3(1 - v^{1/2})}{3 - 2v^{1/4}}\right]^2$$

α_0 — значение второй функции пористости

$$\alpha = \frac{1}{4}\left[\frac{3(1 - v^{1/3})}{(3 - 2v^{1/4})\ln v}\right]^2$$

при начальной пористости материала ($v = v_0$).

Текущая пористость материала определяется по формуле [2]

$$v = 1 - (1 - v_0)\exp\left(-\frac{9\alpha_0\beta_0\varepsilon_{\text{экв}}}{\beta^{3n}\sigma_{\text{экв}}}\right) \tag{1.2}$$

Связь между эквивалентным напряжением и эквивалентной деформацией устанавливается диаграммой деформирования материала [3], которая аппроксимируется зависимостью

$$\sigma_{экв} = A + B\varepsilon^{m}_{экв} \tag{1.3}$$

где A, B, m — параметры схематизированной диаграммы [4].

Разрешив уравнения (1.1) относительно напряжений с учетом допущения о коэффициенте поперечной деформации ν [5], получим

$$\{\sigma\} = [D_1]\{\varepsilon\} \tag{1.4}$$

где матрица $[D_1]$ имеет вид

$$[D_1] = \frac{E_1(1-c_1)}{(1+c_1)(1-2c_1)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{c_1}{1-c_1} & \frac{c_1}{1-c_1} & 0 \\ \frac{c_1}{1-c_1} & 1 & \frac{c_1}{1-c_1} & 0 \\ \frac{c_1}{1-c_1} & \frac{c_1}{1-c_1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1+c_1)(1-2c_1)(1+\alpha_0)}{3(1-c_1)} \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

Здесь

$$E_1 = \frac{\sigma_{экв}}{\varepsilon_{экв}}, \quad c_1 = \frac{\nu - \alpha_0}{1+\alpha_0}$$

Осесимметричная заготовка разбивается на кольцевые элементы с треугольными сечениями. Компоненты перемещений произвольной точки элемента представив в виде линейной зависимости через компоненты перемещений его узлов и использовав выражения Коши, получим уравнения, связывающие компоненты деформации элемента с компонентами перемещений узлов

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\} \tag{1.6}$$

где $[B]$ — матрица, определяемая аппроксимацией перемещений по объему выбранного конечного элемента [1], $\{q\}$ — вектор-столбец узловых перемещений конечного элемента.

Зависимости (1.4) и (1.6), описывающие напряженно-деформированное состояние элемента, дают возможность определить матрицу жесткости конечного элемента $[k]$. Используя принцип возможных перемещений для конечного элемента, находящегося в равновесии в некотором деформированном состоянии, и относя напряженно-деформированное состояние элемента к его центру тяжести, получим [1]

$$[k] = 2\pi[\bar{B}]^{T}[D_1][\bar{B}]\bar{r}\Delta \tag{1.7}$$

где $\bar{r}$ — радиус центра тяжести элемента, относительно которого и определена матрица $[\bar{B}]$, Δ — площадь поперечного сечения кольцевого элемента, $[B]^{T}$ — транспонированная матрица.

Матрица $[k]$ состоит из подматриц размерности 2×2, определяемых выражением [1]

$$[k_{sl}] = 2\pi[B_s]^T[D_s][B_l]\bar{r}\Delta \tag{1.8}$$

где s, l — обозначения соседних узлов.

Заменяя действующие на пористое тело внешние распределенные силы узловыми статически эквивалентными сосредоточенными силами (вектор-столбец $\{P\}$) и используя для всего тела принцип возможных перемещений, получаем

$$\{P\} = [K]\{\rho\} \tag{1.9}$$

где $\{\rho\}$ — вектор-столбец узловых перемещений сетки конечных элементов, $[K]$ — общая матрица жесткости, произвольный элемент которой определяется суммированием по всем элементам, примыкающим к узлам s и l $([K_{sl}] = \sum[k_{sl}])$, и зависит от узловых координат, степени деформации, диаграммы деформирования, а также пористости материала.

Составив общую матрицу жесткости пористого тела, задав вектор-столбец узловых усилий $\{P\}$ и решив систему нелинейных алгебраических уравнений (1.9) относительно узловых перемещений сетки конечных элементов, по формулам (1.4) и (1.6) определяются компоненты напряженно-деформированного состояния деформированного образца.

Эквивалентная деформация и текущая пористость материала в различных точках деформируемого тела находятся по формулам (1.1) и (1.2).

Решение уравнения (1.9) с заданной точностью находится итерационным методом (методом переменных параметров упругости) [5]. При этом линеаризуется система алгебраических уравнений (1.9), принимая матрицу жесткости в пределах каждого шага итерационного процесса постоянной и составленной по результатам, полученным на предыдущем шаге. На первом шаге для всех элементов величина $\varepsilon_{экв}$ считается известной и малой.

На фиг. 1 на диаграмме деформирования материала приведены положения точки A, характеризующей напряженно-деформированное состояние одного элемента под действием заданной нагрузки, определенные на первых трех ступенях итерационного процесса. Естественно ожидать, что с увеличением числа приближений точка A все ближе будет подходить к кривой диаграммы деформирования материала.

2. *МКЭ по теории течения пористых материалов.* Уравнения теории течения пористых упрочняющихся материалов приведены в работе [6] и модифицированы в [7], где для приращений пластических деформаций и пористости получены зависимости

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{3\overline{d\varepsilon}_{экв}}{2\sigma_{экв}\rho^{5m}}[\sigma_{ij} - (1-2\rho)\delta_{ij}\sigma_0] \tag{2.1}$$

$$d\upsilon = \frac{9\lambda(1-\upsilon)\overline{d\varepsilon}_{экв}\sigma_0}{\rho^{2m}\sigma_{экв}} \tag{2.2}$$

($\overline{d\varepsilon}_{экв}$ — эквивалентное приращение пластических деформаций).

Разрешая уравнения (2.1) относительно напряжений, получим

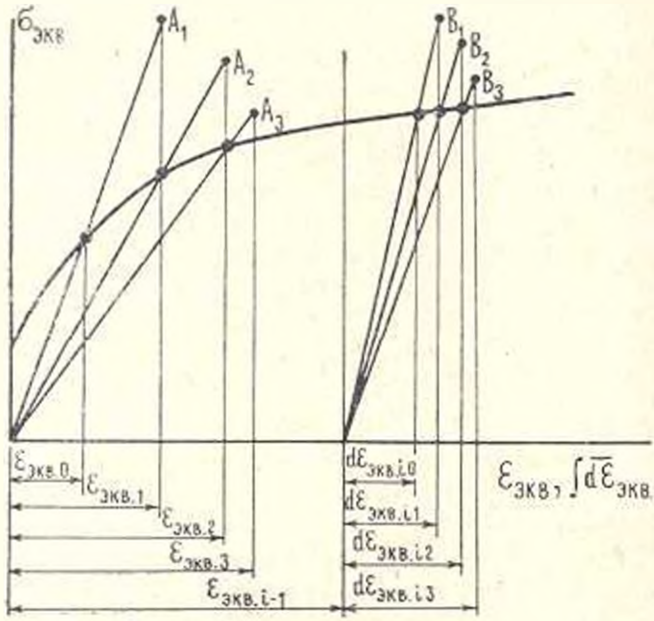
$$\{\sigma\} = [D_2]\{d\varepsilon\} \tag{2.3}$$

где матрица $[D_2]$ имеет вид

$$[D_2] = \frac{E_2(1-c_2)}{(1+c_2)(1-2c_2)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{c_2}{1-c_2} & \frac{c_2}{1-c_2} & 0 \\ \frac{c_2}{1-c_2} & 1 & \frac{c_2}{1-c_2} & 0 \\ \frac{c_2}{1-c_2} & \frac{c_2}{1-c_2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1+c_2)(1-2c_2)(1+\alpha)}{3(1-c_2)} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Здесь

$$E_2 = \frac{\beta^{3n}\sigma_{экв}}{d\bar{\varepsilon}_{экв}}, \qquad c_2 = \frac{\gamma-\alpha}{1+\alpha}$$



Фиг. 1. Диаграмма деформирования.

Диаграмма деформирования материала аппроксимируется зависимостью

$$\sigma_{экв} = A + B\left(\int d\bar{\varepsilon}_{экв}\right)^m \tag{2.5}$$

Так как в матричном уравнении (2.3) используются приращения пластических деформаций, то два других матричных уравнения, аналогичные уравнениям (1.6) и (1.9), также выражаются через соответствующие приращения

$$\{d\varepsilon\} = [B]\{dq\} \tag{2.6}$$

$$\{dP\} = [K]\{d\rho\} \tag{2.7}$$

Матрицы жесткостей конечных элементов $[k]$ и общая матрица жесткости деформированного тела $[K]$ составляются по методике, описанной при рассмотрении деформационной теории. При этом вместо матрицы напряжений $[D_e]$ используется матрица $[D_1]$.

Задавая вектор-столбец приращений узловых усилий $\{dP\}$ и решив систему нелинейных алгебраических уравнений (2.7) относительно приращений узловых перемещений сетки конечных элементов $\{d\rho\}$, по формулам (2.3) и (2.6) определяем компоненты напряженного состояния $\{\sigma\}$ и приращения пластических деформаций $\{d\varepsilon\}$ образца.

Эквивалентное приращение пластических деформаций и приращения пористости находятся по формулам (2.1) и (2.2).

Аналогично работе [5] расчет ведется применением малых последовательных нагружений.

Решение уравнения (2.7) для каждого последовательного i-того нагружения находится вышеописанным итерационным методом (точки B_1, B_2, B_3 на фиг. 1). На первых шагах итерационных процессов для всех конечных элементов величина $d\bar{\varepsilon}_{\text{пл}}$ считается известной и малой.

Пористость образца и интеграл от эквивалентного приращения пластических деформаций находятся соответственно по формулам

$$v_i = v_{i-1} + dv_i$$

$$\int d\bar{\varepsilon}_{\text{пл}} \approx \sum_{i=1} d\bar{\varepsilon}_{\text{пл}\,i}$$

Число последовательных нагружений зависит от величины приращения нагрузки и максимального значения достигнутой деформации.

В конце каждого шага последовательного нагружения устанавливаются новые положения координатных узлов.

3. *Численные результаты и их анализ.* Для конкретных значений параметров были выполнены расчеты как по деформационной теории пластичности, так и по теории течения пористых материалов. Отношение высоты цилиндра h_0 к его диаметру d_0 было принято равным 4/3 и 1. Сетка конечных элементов принималась равномерной, вычисления выполнялись на ЭВМ ЕС-1022 по программам, составленным на алгоритмическом языке ФОРТРАН-IV, для произвольного числа узлов (конечных элементов).

В силу симметрии рассматривалась четверть осевого сечения, которая была разделена при $h_0/d_0 = 4/3$ на 96 треугольных элементов с 63 узлами. Граничные условия в безразмерных перемещениях (w, u) в осевом (z) и радиальном (r) направлениях приняты в виде:

$w_k = -a = \text{const}$, $u_k = 0$ на поверхности контакта,

$u = 0$ на оси образца,

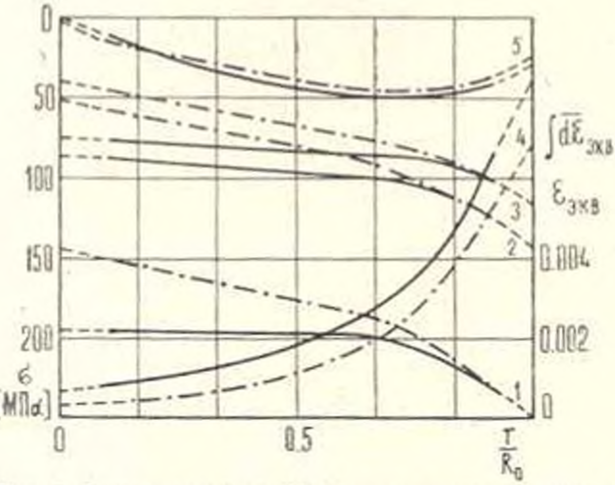
$w = 0$ на среднем поперечном сечении образца.

Материал цилиндра — спеченная медь, полученная из медного порошка марки ПМС-1 ($n = 0.25$ [3]; $\tau_s = 0.48$ [5]; $v_0 = 0.16$; $A = 175$ МПа; $B = 501$ МПа; $m = 0.3$).

Как показывают расчеты, напряженно-деформированные состояния образцов из пористых материалов неоднородны.

По деформационной теории пластичности рассматривались лишь различные малые нагружения образца, так как формулы (1.6) пригодны только в этих условиях. При очень малых нагрузках (соответствующих $w_k = -0.0005$; -0.001) образцы деформируются бочкообразно. При больших нагрузках ($w_k \leqslant -0.002$) незначительно нарушается бочкообразность образца. Максимальные перемещения получают наружные точки сечений, близких к среднему поперечному сечению.

Ниже приводятся данные, характеризующие напряженно-деформированное состояние материала при максимальной эквивалентной деформации элементов образца, равной 0.8% ($w_k = -0.002$).



Фиг. 2. Эпюры осевых σ_z (1), радиальных σ_r (3), окружных σ_θ (2), касательных τ_{rz} (5) напряжений и эквивалентной деформации (4) на контактной поверхности образца при $w_k = -0.002$; $u_r = 0$.

На фиг. 2 штрих-пунктирными линиями изображены эпюры осредненных по двум смежным элементам напряжений (кривые 1, 2, 3 и 5 соответствуют напряжениям: осевым σ_z, окружным σ_θ, радиальным σ_r и касательным τ_{rz}) и эквивалентной деформации (кривая 4) элементов, прилегающих к контактной поверхности деформируемого образца (пунктирными линиями показаны линейные экстраполяции). Элементы, прилегающие к центральным участкам контактных поверхностей, деформируются мало. Эти участки называются участками «задержанной» или «затрудненной» деформации [8].

МКЭ по теории течения пористых материалов можно изучать любые пластические деформации образца в том случае, если нагружение образца осуществляется малыми приращениями. Расчеты показывают, что напряженно-деформированное состояние образца зависит от величины шага приращений нагружения. Было установлено, что для получения более достоверных результатов необходимо использовать переменный шаг нагружения.

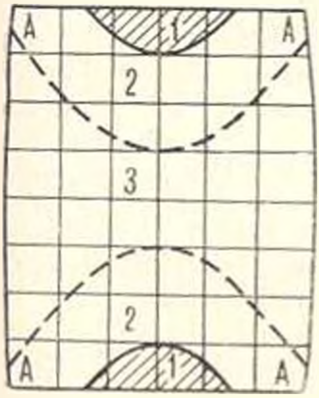
Из сопоставления результатов двух решений следует, что на первом шаге нагружения ($w_z = -0.0005$) они полностью совпадают. В средних поперечных сечениях образца при малых нагружениях величины касательных напряжений приближаются к нулю, а остальные компоненты напряженно-деформированного состояния и пористость материала получаются почти одинаковыми для всех элементов.

На фиг. 2 сплошными линиями изображены эпюры напряжений и интеграла от приращения эквивалентной пластической деформации элементов, прилегающих к контактной поверхности образца при $w_z = -0.002$.

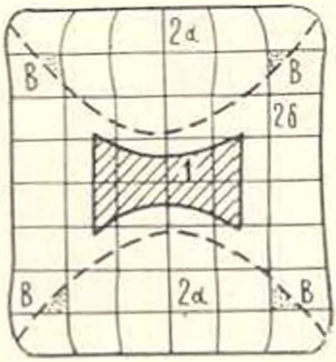
Сопоставление выполненных расчетов показывает, что с увеличением степени обжатия образца увеличивается расхождение между результатами, получаемыми по деформационной теории и теории течения.

На фиг. 3 показано осевое сечение деформированного пористого образца при $w_z = -0.002$. По распределениям пористости определены зоны «затрудненной» деформации (1), в которых средняя пористость $v_{ср\,1} = 0.1584$. В элементах зоны (2) пористость изменяется наиболее интенсивно ($v_{ср\,2} = 0.1572$). Наибольшую степень уплотнения получили примыкающие к контактным и боковой поверхностям элементы A (2) зоны образца ($v_A = 0.1545$). Промежуточное положение занимает пористость элемента зоны (3) ($v_{ср\,3} = 0.1582$).

С увеличением степени обжатия происходит некоторое перераспределение как компонентов напряженно-деформированного состояния, так и



Фиг. 3. Осевое сечение деформированного пористого образца при $w_z = -0.002$; $u_z = 0$.



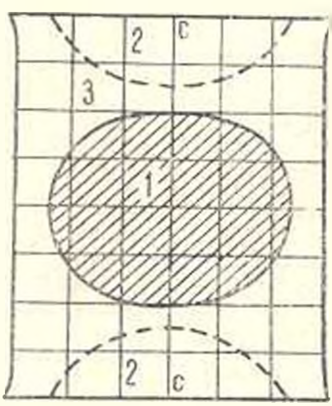
Фиг. 4. Осевое сечение деформированного пористого образца при $w_z = -0.0315$; $u_z = 0$.

пористости образца. На фиг. 4 приведено распределение пористости по осевому сечению образца при $w_z = -0.0315$ $\left(\int d\varepsilon_{\max} = 19.1\,\%\right)$. По фиг. 3 и 4 можно судить о процессе распространения пластической деформации в образце. Зона (2) увеличиваясь, обхватывает зону (1), большую часть зоны (3) и образует с очень сильно уменьшенной пористостью зоны (2а) и (2б) со средними пористостями 0.055 и 0.138 соответственно ($v_{min} = v_B = 0.0094$). В зоне „затрудненной" деформации (1) значение $v_{ср1}$ равно 0.1547.

Расчеты МКЭ как по теории течения, так и по деформационной теории пластичности пористых материалов показывают, что при $w_1 \leq -0.002$ нарушается бочкообразность образца. С увеличением степени обжатия увеличивается и степень нарушения бочкообразной формы образца, при этом сечения с максимальными поперечными перемещениями наружных точек приближаются к контактным поверхностям образца.

Изменения формы боковой поверхности образца в зависимости от степени деформирования позволяют предположить, что если в контактных сечениях обеспечить условия свободного поперечного перемещения ($\tau_k = 0$), то они будут наибольшими по сравнению с перемещениями и остальных точек и боковая граничная линия примет гиперболическую форму. С целью проверки этого предположения по теории течения пористых материалов МКЭ был решен пример при условии свободного расширения образца (без трения на контактных поверхностях). Исследования показали, что при $w_1 = -0.0005$ неоднородность напряженно-деформированного состояния элементов образца не превышает 0.25%.

С увеличением степени обжатия неоднородность образца постепенно увеличивается и влияет на его напряженно-деформированное состояние. Боковая граничная линия образца в действительности принимает гиперболическую форму, что качественно согласуется с результатами экспериментов [9].

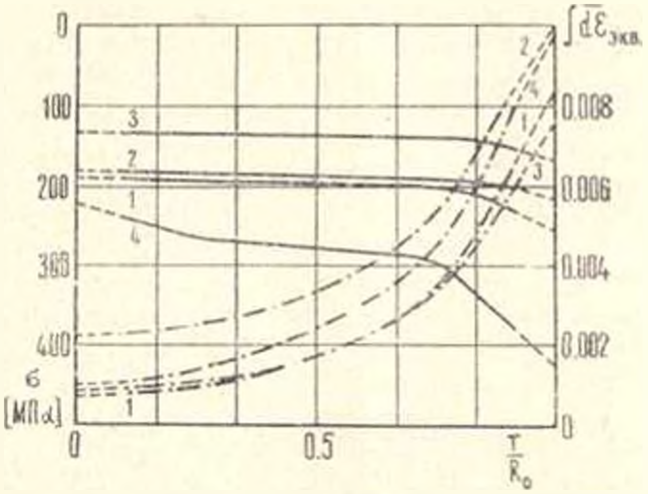


Фиг. 5. Осевое сечение деформированного пористого образца при $w_1 = -0.002$; $\tau_k = 0$.

Практический интерес может представлять распределение пористости по осевому сечению свободно расширенного образца при $w_1 = -0.002$; $v_0 = 0.16$ (фиг. 5, $v_{ср1} = 0.1588$; $v_{ср3} = 0.1585$; $v_{ср2} = 0.1579$; $v_{с} = 0.1577$).

Для исследования зависимости напряженно-деформированного состояния от механических характеристик материала дополнительно были рассмотрены случаи с изменением значения лишь одного параметра (начальной пористости или коэффициента поперечной деформации): а) $\gamma = 0.44$; б) $v_0 = 0.32$; в) $v_0 = 0.005$.

На фиг. 6 для элементов, прилегающих к контактной поверхности деформированного образца, приведены кривые изменения осевых напряжений σ_z (сплошные линии) и интеграла от приращений эквивалентных пластических деформаций (штрих-пунктирные линии) в зависимости от безразмерной радиальной координаты r/R_0 при $w_0 = -0.002$ и $u_0 = 0$. При этом кривые 1 соответствуют основному решению МКЭ по теории течения ($v_0 = 0.16$; $\gamma = 0.48$), а кривые 2, 3 и 4 — случаям а), б) и в) соответственно. Из кривых фиг. 6 видно, что параметры механических характеристик пористого материала оказывают существенное влияние на напряженно-деформированное состояние образца.



Фиг. 6. Эпюры осевых напряжений (сплошные линии) и $\int \overline{d\varepsilon}_{экв}$ (штрих-пунктирные линии) на контактной поверхности образца при $w_0 = -0.002$; $u_0 = 0$ (1 — $v_0 = 0.16$; $\gamma = 0.48$; 2 — $v_0 = 0.16$; $\gamma = 0.44$; 3 — $v_0 = 0.32$; $\gamma = 0.48$; 4 — $v_0 = 0.005$; $\gamma = 0.48$).

Расчеты свободно расширяющегося образца ($\tau_к = 0$) показывают, что беспористые ($v_0 \to 0$) образцы деформируются аналогично пористым с образованием гиперболической формы боковой поверхности. Как уже было отмечено выше, это объясняется появлением неоднородности и ее влиянием на напряженно-деформированное состояние образца. Приближенная теория [10], основанная на гипотезе плоских сечений и пренебрежении касательных напряжений в поперечных сечениях беспористого неоднородного по высоте цилиндрического образца, подтверждает гиперболичность боковой поверхности образца при сжатии его в указанных условиях.

Исследования показывают, что как на напряженно-деформированное состояние, так и на распределение пористости образца существенное влияние оказывает также изменение величины h_0/d_0. При $h_0/d_0 = 1,0$ (четверть осевого сечения образца была разделена на 72 одинаковых треугольных элемента с 49 узлами) при отсутствии смещения точек на контактной поверхности образца зоны (2) сливаются (фиг. 3), а зона (3), уменьшаясь, занимает центральную кольцеобразную часть боковой области образца.

При больших деформациях $\left(\int d\varepsilon_{...} > 10^0/_0 \right)$ сливаются также зоны (1) и (2).

Полученные результаты качественно подтверждаются многочисленными экспериментами, проведенными как на беспористых, так и на пористых материалах [8, 9].

Таким образом, подбором граничных условий и параметров механических характеристик материалов можно решить ряд важных вопросов технологического процесса: установить оптимальную форму деформированного образца или оптимальные величины условий нагружения, определить распределение пористости, пластической деформации и т. д.

Выполненные исследования позволяют сделать следующие выводы:

1. Полученные МКЭ решения осесимметричных задач обработки пористых материалов давлением на основе теории течения дают возможность исследовать как малые, так и большие пластические деформации.

2. Применение МКЭ в расчетах, основанных на деформационной теории пластичности пористых материалов, дает достаточно близкие результаты с данными, полученными по теории течения при небольших пластических деформациях.

3. Разработанная методика и программа вычислений позволяют определить компоненты напряженно-деформированного состояния и распределение пористости по объему осесимметричных пористых образцов, а также зоны больших пластических деформаций, зоны «затрудненных» деформаций и распространение пластических зон при увеличении степени обжатия образца.

4. Показано, что изменяя граничные условия и степень обжатия, можно получить деформированные образцы с различными формами боковой поверхности: бочкообразной, гиперболической и т. д.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 19 IX 1979

Գ. Լ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ, Գ. Գ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ, Ս. Ա. ԱՎԵՏՅԱՆ

ԾԱԿՈՏԿԵՆ ՆՅՈՒԹԵՐԻ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ՆՍՏԵՑՄԱՆ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԵՎ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻՈՆ ՎԻՃԱԿՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԷԼԵՄԵՆՏՆԵՐԻ ԵՂԱՆԱԿՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հետազոտվում է ծակոտկեն նյութերի առանցքասիմետրիկ նստեցման պրոցեսը ինչպես կոնտակտային մակերևույթների վրա մարմնի կետերի շառավղային ուղղությամբ տեղափոխության բացակայության, այնպես էլ նույնի ազատ ընդարձակման պայմաններում: Խնդիրը լուծվում է ծակոտկեն նյութերի պլաստիկության երկու տեսություններով (դեֆորմացիոն և հոսանության), օգտագործելով վերջավոր-էլեմենտների եղանակը: Կազմված է ծրա-

գիր Ֆորտրան—4 ալգորիթմական լեզվով։ Սեղմման տարբեր աստիճանների. նյութերի մեխանիկական բնութագրերի տարբեր պարամետրերի արժեքների և նմուշի բարձրության ու նրա տրամագծի տարբեր հարաբերությունների համար ստացվել են արդյունքներ, որոնցով բնորոշվում են ծակոտկեն նյութից պատրաստված նմուշի լարվածային և դեֆորմացիոն վիճակները և նրա ծակոտկենությունը։

Ցույց է տրված, որ ծակոտկեն նյութերի պլաստիկության դեֆորմացիոն տեսությամբ ստացված արդյունքները բավականաչափ հուսալի են միայն ոչ մեծ պլաստիկ դեֆորմացիաների համար, այն դեպքում, երբ հոսունության տեսությամբ ստացված արդյունքները համարվում են հուսալի ինչպես փոքր, այնպես էլ մեծ պլաստիկ դեֆորմացիաների համար։

INVESTIGATION OF STRESS-STRAIN STATE OF AXISYMMETRIC UPSETTING OF POROUS MATERIALS BY THE FINITE ELEMENTS TECHNIQUE

G. L. PETROSIAN, G. G. NERSISIAN, S. S. AVETIAN

S u m m a r y

Investigated is the process of axisymmetric upsetting of porous materials both with no displacement points on the contact surfacas in radial direction and under free extension of the sample. Two theories (deformative and that of flow) of porous material plasticity and the method of finite elements are applied. The programme is drawn up in the FORTRAN-IV algorithmical language.

Data are obtained for various degrees of compression, various values of mechanical characteristics of materials and different height-to-diameter ratios of the sample.

The results obtained by the deformation theory of porous materials are shown to be reliable enough for slight plastic deformations only while those obtained through the flow theory are reliable both for slight and extensive plastic deformations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М., Изд. «Мир», 1975.
2. *Петросян Г. Л.* Деформационная теория пластичности пористых материалов. «Изв. ВУЗов. Машиностроение», 1978, № 11.
3. *Манукян Н. В., Петросян Г. Л., Погосян М. З.* Диаграмма деформирования пористого материала. «Изв. ВУЗов. Машиностроение», 1978, № 3.
4. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М., Изд. «Машиностроение», 1975.
5. *Малинин Н. Н., Романов К. Н.* Решение задач горячего формоизменения методом конечных элементов. «Изв. ВУЗов. Машиностроение», 1977, № 8.
6. *Петросян Г. Л.* О теории пластичности пористых тел. «Изв. ВУЗов. Машиностроение», 1977, № 6.

7. *Петросян Г. Л.* О теории пластичности пористых тел. Тезисы докладов XIX научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава втузов Закавказских республик, посвященной 60-летию Великой Октябрьской социалистической революции. Тбилиси, 1977.
8. *Сторожев М. В., Попов Е. А.* Теория обработки металлов давлением. М., Изд. «Машиностроение», 1977.
9. Порошковая металлургия материалов специального назначения, под редакцией Дж. Барка, В. Вейса. Перевод с английского языка. М., «Металлургия», 1977.
10. *Петросян Ж. Л.* Исследование неоднородности по толщине прокатанного листа. «Изв. ВУЗов. Машиностроение», 1974, № 10.