

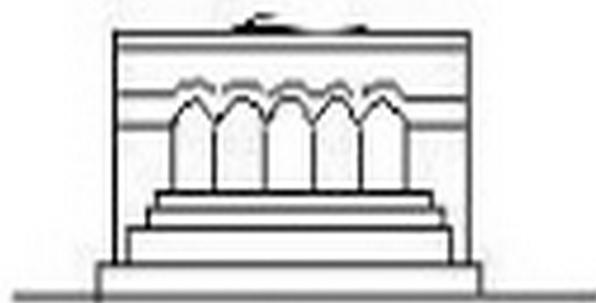
Մ Ե Ն Ա Ն Ի Կ Ա



МЕХАНИКА



MECHANICS



1980

Б. А. АБРАМЯН, О. М. САНОНДЖЯН

## РАЗВИТИЕ МЕХАНИКИ В АРМЯНСКОЙ ССР ЗА 60 ЛЕТ

В начальный период после установления Советской власти в Армении передовые известные физики и механики — А. Г. Анжур, А. А. Акопян, А. М. Тер-Мкртчян и другие, главным образом, занимались педагогической работой, однако, следует отметить, что первые научные исследования в области механики выполнены ими [1]. Они являются учителями тех ученых-механиков, которые в настоящее время плодотворно занимаются научно-исследовательской работой.

В тяжелые годы Великой Отечественной войны Советского Союза в Армении была организована Академия наук Армянской ССР, которая стала крупным научным центром в Армении.

С этого периода наука о механике стала бурно развиваться в некоторых научно-исследовательских учреждениях АН Арм.ССР, в Ереванском политехническом институте и Государственном университете.

Научно-исследовательские работы в области механики в настоящее время охватывают ряд вопросов математической теории упругости, теории оболочек и пластин, теории ползучести, гидрогазодинамики, теории пластичности, теории электромагнитоупругости тонких тел, теории вязкоупругости и теории устойчивости движения. Приведем краткий обзор работ, выполненных в Армянской ССР в указанных направлениях.

*Математическая теория упругости*

В Ереванском политехническом институте с 1941 года О. М. Санонджяном исследовались вопросы применения теории функций комплексного переменного в некоторых задачах теории упругости [2]. В его работах обсуждались также вопросы применения принципа Сен-Венана при решении задач теории упругости [3].

Во второй из указанных работ предлагается на малом участке контура, на котором граничные условия заданы перемещениями, также использовать принцип Сен-Венана.

Применением метода функций комплексного переменного в дальнейшем различные задачи теории упругости рассматривались в работах [4] и других.

В Секторе математики и механики АН Арм.ССР в 1948 году Н. Х. Арутюняном был предложен новый метод решения задач о кручении и изгибе призматических стержней догонального поперечного сечения [5]. Сущность этого метода заключается в представлении области сече-

ния призматического стержня в виде двух пересекающихся вспомогательных прямоугольных областей, введении нескольких вспомогательных функций и сведении решения задачи к бесконечным системам линейных уравнений, которые вполне регулярны.

В дальнейшем этот метод получил свое развитие и были рассмотрены многочисленные задачи по кручению и изгибу призматических стержней со сложными поперечными сечениями, а также по кручению круглых валов переменного диаметра для однородных и составных упругих тел в работах [6] и других.

Результаты, полученные в этой области, обобщены в работе [7].

Для решения других задач теории упругости для однородных и составных упругих тел в Институте математики и механики АН Арм.ССР Н. Х. Арутюняном, Б. А. Абрамяном, А. А. Бабояном, В. С. Топояном и другими был разработан метод, в котором искомые величины в рассматриваемых задачах представляются в виде суммы нескольких разложений по собственным функциям и в конечном итоге решения задач сводятся либо к бесконечным системам линейных уравнений, либо к интегральным уравнениям, либо же к системам уравнений, содержащим одновременно и бесконечные системы линейных уравнений и интегральные уравнения.

Этим методом в работах [8] были рассмотрены различные осесимметричные контактные и смешанные задачи для упругих конечных и бесконечных цилиндров, шаров, параллелепипедов, полупространств со штампами, пространственных слоев и другие задачи, а также плоские задачи для прямоугольных, секториальных, клиновидных и других сложных однородных и составных областей, полосы, полуплоскости, плоскости и четверть плоскости со штампами и разрезами и другие задачи.

В Институте математики и механики АН Арм.ССР для решения контактных задач о передаче нагрузок от накладок-креплений к упругим телам различного вида в 1968 году Н. Х. Арутюняном [9] был предложен метод, сводящий решения задач к бесконечным системам линейных уравнений.

Дальнейшим развитием этого метода были рассмотрены многочисленные задачи в этой области. Таким задачам посвящены исследования [10] и другие.

В Институте математики и механики АН Арм.ССР с 1955 года К. С. Чобаняном исследовались вопросы, связанные с напряженным состоянием составного упругого тела. Им был предложен метод использования функций напряжений [11] для решения плоских задач теории упругости для составного тела. К. С. Чобанян исследовал также условия, при которых в составном теле в угловых точках на линиях соединения различных материалов может иметь место малонапряженность. В 1978 году К. С. Чобанян стал автором открытия в упомянутом направлении (диплом № 102).

Этому вопросу посвящены также исследования [12] и другие.

В Институте математики и механики АН Арм.ССР с 1962 года исследовались несимметричные пространственные задачи теории упругости [13].

Исследовались также некоторые новые парные интегральные и рядовые уравнения, которые встречаются в задачах теории упругости [14].

В Ереванском госуниверситете с 1961 года В. С. Саркисяном исследовались различные вопросы теории упругости анизотропного тела. Результаты, полученные в этой области, обобщены в его монографиях [15].

В Институте механики АН Арм.ССР различные задачи рассматривались по теории конечных упругих деформаций [16].

Различные плоские и пространственные динамические задачи рассматривались в работах [17] и других.

Некоторые задачи плоской теории упругости в биполярной системе координат рассматривались в работах [18].

Вопросы теории упругости для тел, обладающих разными модулями упругости при сжатии и растяжении, исследовались в работах С. А. Амбарцумяна и А. А. Хачатряна [19]. Ими получены основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию, и рассмотрены осесимметричная деформация тонкой цилиндрической трубы, свободные продольные колебания призматических стержней и другие задачи. Установлено, что в указанных задачах учет разномодульности материала приводит к принципиально новым результатам.

В дальнейшем указанная теория была применена при рассмотрении ряда конкретных задач в работах [20] и других.

В работах Дж. Э. Мкртчяна новый подход применяется при рассмотрении нелинейных задач теории упругости для упругих тел из разномодульных материалов [21].

### *Теория оболочек и пластин*

Первые исследования в области теории оболочек и пластин выполнялись в Секторе математики и механики АН Арм.ССР и в Ереванском политехническом институте О. М. Сапонджяном и Т. Т. Хачатряном, а в Институте строительных материалов и сооружений АН Арм.ССР — С. А. Амбарцумяном и А. Г. Назаровым.

Использованием теории функций комплексного переменного в работах О. М. Сапонджяна были разработаны методы для решения практических задач об изгибе тонких плит. Исследовались различные задачи об изгибе полигональных, эллиптических, полуэллиптических и полукруглых плит. Теория и результаты, полученные в этой области, изложены в монографии [22]. Окончательные результаты в этой монографии приводятся в виде легко используемых формул и готовых числовых таблиц.

В этой области вели исследования также Г. П. Геонджян [23], С. Г. Овакимян [24] и другие.

Работы Т. Т. Хачатряна посвящены расчету пологих цилиндрических оболочек. Т. Т. Хачатрян получил формулы, в которых для определяемой величины основной член соответствует результату, получаемому из теории пластин, а влияние кривизны оболочки учитывается при помощи дополнительных выражений. Полученные результаты обобщены в монографии [25]. Т. Т. Хачатрян рассмотрел также различные задачи статической и динамической устойчивости пологих цилиндрических оболочек.

В 1947—1948 гг. С. А. Амбарцумяном предложен новый метод расчета весьма пологих оболочек двойкой кривизны [26]. В те же годы А. Г. Назаровым были исследованы складчатые оболочки, для расчета которых он предложил использовать импульсивные функции [27].

С. А. Амбарцумяном разработана новая теория анизотропных слоистых оболочек на базе классической теории оболочек. Были рассмотрены многочисленные задачи пологих, цилиндрических, сферических и других типов анизотропных слоистых оболочек [28]. Были изучены также некоторые вопросы безмоментной теории однородных и симметрично собранных слоистых анизотропных оболочек. Рассматривались слоистые оболочки вращения.

В последующие годы С. А. Амбарцумяном была предложена новая уточненная теория анизотропных оболочек и пластин с учетом поперечных сдвигов.

Полученные результаты С. А. Амбарцумяна в эти годы были обобщены в монографии [29], которая в 1964 году была переведена на английский язык.

В дальнейшие годы в Институте математики и механики С. А. Амбарцумяном была разработана теория слоистых оболочек и пластин с учетом физической нелинейности механических свойств материала слоев. На основании этой теории были исследованы различные задачи динамической устойчивости и флаттера анизотропных слоистых оболочек и пластин [30].

Уточненной теории изгиба плит посвящена также работа [31].

С. А. Амбарцумяном и его сотрудниками разработана теория термоупругости анизотропных слоистых оболочек в постановках классической и уточненной теорий. В исследованиях учитывается изменение физико-механических свойств материала от температуры [32].

Результаты, полученные в области построения теории изгиба анизотропных пластин при малых и больших перемещениях с использованием уточненных теорий, изложены в монографии [33], которая была в дальнейшем переведена на английский язык в США и на японский язык.

С 1963 года в Ереванском государственном университете В. С. Саркисяном методом малого геометрического или физического параметра были интегрированы основные уравнения пластин и оболочек при общей анизотропии. Им же исследованы изгиб однородных и неоднородных анизотропных пластин; пластины, движущихся в газе со сверхзвуковой скоростью; температурные напряжения в анизотропных пластинках; задача о поперечном упругом ударе шаром по анизотропной пластинке и оболочке.

Рассматривались задачи об оптимальном выборе материала пластинки и оболочки с наилучшими механическими свойствами, а также некоторые задачи теории изгиба, колебаний и устойчивости анизотропных пластин и оболочек и другие.

Результаты исследований в этой области изложены в монографиях [15].

С. А. Амбарцумяном и его сотрудниками исследовались также некоторые задачи биомеханики микро- и макрокровообращения с учетом деформативных свойств кровеносных сосудов [34].

В. Ц. Гиули и его сотрудниками рассматривались некоторые задачи оптимального проектирования армированных слоистых цилиндрических оболочек и пластин в работах [35] и других.

В Институте математики и механики АН Арм.ССР с использованием метода асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений трехмерной задачи теории упругости получены уравнения, которые соответствуют уравнениям как классической теории оболочек и пластин, так и уравнениям по уточненным теориям [36].

Систематическому изложению общей теории анизотропных оболочек посвящена монография С. А. Амбарцумяна [37].

Различные задачи по теории изгиба пластинок, когда заданы смешанные граничные условия, рассматривались в работах [38].

Задача изгиба ортотропной прямоугольной пластинки, защемленной по всему контуру, исследована в [39].

Для цилиндрической оболочки контактная задача рассматривалась в работах [40].

Различные вопросы теории оболочек для безмоментных оболочек и осесимметрично нагруженных оболочек вращения, изготовленных из разномодульных материалов, исследовались в работах С. А. Амбарцумяна и А. А. Хачатряна [41] и других.

### *Теория ползучести*

В 1947 году в Секторе математики и механики АН Арм.ССР Н. Х. Арутюняном была предложена новая теория ползучести для упруго-ползучего тела.

Основы теории упруго-ползучего тела были заложены в работе Г. Н. Маслова, а ее полное построение как математической теории ползучести стареющих материалов, или наследственной теории старения, было дано Н. Х. Арутюняном [42]. Результаты, полученные в этой области, обобщены в монографии [43], которая скоро была переведена на французский, английский и китайский языки. Отдельные ее главы опубликованы в Германии, Польше и Румынии.

В этой монографии дана полная система уравнений теории ползучести, в которой учитываются свойства старения и наследственности материалов. Эти уравнения позволяют решить обширный класс задач о напряженном состоянии упруго-ползучего тела, если известно решение соответствующей задачи классической теории упругости.

Исследования по теории ползучести проводились по линейной и нелинейной теориям ползучести, по решению контактных задач и по экспериментальным исследованиям теории.

По линейной теории в Секторе математики и механики АН Арм.ССР, в Ереванском госуниверситете и Политехническом институте исследовались некоторые задачи о расчете балок с опорами, смещающимися во времени. Рассматривались плоские и пространственные задачи о термо-напряженном состоянии массивных блоков с учетом ползучести. Исследовались

также задачи кручения и изгиба призматических стержней из упруго-ползучего материала [44] и другие.

В работах [45] решение уравнения нелинейной теории ползучести дается методом малого параметра.

М. А. Задоном выведены вариационные уравнения для линейной и нелинейной теории наследственного старения и рассмотрено несколько прикладных задач [46].

Исследованию некоторых вопросов нелинейной теории ползучести для оболочек посвящены работы [47]. На основе безмоментной теории оболочек в этих работах рассмотрены различные задачи для сферических, конических оболочек, оболочек вращения и цилиндрических оболочек произвольного вида, находящихся в условиях неустановившейся ползучести.

Н. Х. Арутюнян и М. М. Манукян получили решения многих задач по кручению призматических стержней и валов переменного диаметра. Результаты этих исследований обобщены в монографии [48].

Контактные задачи нелинейной теории ползучести впервые были рассмотрены в Армении. В 1959 году Н. Х. Арутюняном была рассмотрена плоская контактная задача нелинейной теории ползучести с учетом старения материалов [49]. Такая же задача с учетом сил трения была рассмотрена в работах [50]. Плоская контактная задача для ортотропных линейно-наследственных тел с одной и несколькими участками контакта была рассмотрена в работах [51].

В 1976 году в Институте механики АН Арм.ССР Н. Х. Арутюняном была разработана теория ползучести для неоднородно наследственно стареющих сред, неоднородность которых обусловлена переменностью возраста материала в зависимости от пространственных координат. Получена полная система исходных уравнений этой теории и рассмотрены некоторые конкретные задачи [52].

До 1955 года экспериментальные исследования по теории ползучести велись в Институте строительных материалов и сооружений АН Арм.ССР. В 1955-м году лаборатория ползучести этого института была включена в состав Института математики и механики. Велись экспериментальные исследования по ползучести бетона К. С. Карапетяном. Им были установлены закономерности ползучести бетона при сжатии, растяжении и кручении в зависимости от большого количества факторов. Установлены границы применимости линейной теории ползучести при сжатии, растяжении и кручении в зависимости от возраста бетона в момент загрузки. Выявлены закономерности влияния анизотропии бетона на прочность, деформативность и ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от большого количества факторов [53].

Объяснена причина возникновения анизотропии. На основании этих исследований в строительных нормах и правилах для учета анизотропии призматической прочности и прочности бетона при изгибе введен специальный коэффициент условий работы.

Исследовались также и другие вопросы ползучести бетона [54].

В Институте математики и механики АН Арм.ССР велись также экспериментальные исследования по выявлению свойств ползучести разных

глинистых грунтов. Исследовались объемная ползучесть скелета водонасыщенных и водоненасыщенных грунтов, ползучесть формоизменения, длительная прочность глинистых грунтов и другие вопросы. Результаты исследований в этой области обобщены в монографиях С. Р. Месчяна [55].

В лаборатории ползучести и прочности материалов велись также экспериментальные исследования по определению механических свойств конструкционных стеклопластиков и других полимерных композиционных и анизотропных материалов [56].

В этой лаборатории велись также исследования ползучести металлов при высокотемпературных и других воздействиях [57].

Отметим еще, что построению теории ползучести для наследственно-упругого тела, разносопротивляющегося растяжению и сжатию, посвящена работа С. А. Амбарцумяна [58].

### *Гидро- и газодинамика*

В Ереванском политехническом институте исследовались некоторые вопросы истечения жидкости через донные отверстия и водоворотного движения жидкости [59].

В Ереванском госуниверситете и Водно-энергетическом институте АН Арм.ССР исследовались различные вопросы движения жидкостей по открытым и закрытым каналам различного профиля, а также движения газов по газопроводам со сплошными и пористыми стенками. Эти исследования велись Г. А. Бабаджаняном [60], В. Г. Сапожином [61] и другими.

С 1959 года в Институте математики и механики А. Г. Багдоевым и другими проводятся исследования некоторых вопросов, связанных с распространением нестационарных ударных волн в жидкости, с прониканием твердых тел и давления в сжимаемую жидкую среду, с распространением слабых возмущений в магнитной, гидро- и газодинамике, с распространением волн в химически активной газовой смеси и другими задачами [62].

Некоторые результаты, полученные в этой области, обобщены в монографиях [63].

В 1956—1966 гг. в Институте органической химии АН Арм.ССР исследовались некоторые вопросы, связанные с механизмом взаимодействия твердых тел с вязкой жидкостью и с падением твердого шарика по оси вертикальной трубы, заполненной вязкой жидкостью [64]. С. М. Исаакян исследовала также и другие вопросы гидродинамики. С 1963 года в Институте математики и механики АН Арм.ССР М. В. Белубекяном исследовались движение электропроводящей жидкости в магнитном поле, пограничный слой в электропроводящей жидкости и другие вопросы [65].

В армянском филиале Закавказского НИГМИ исследовались вопросы динамической метеорологии. Некоторые результаты в этой области обобщены в монографии [66].

Некоторые другие вопросы гидродинамики исследовались в работах [67].

В Институте строительных материалов и сооружений исследования А. Г. Назарова [68] были посвящены анализу несущей способности статически неопределимых систем. В Секторе математики и механики в 1953 году К. С. Чобанян исследовал устойчивость плоской формы изгиба [69].

В 1956 году М. А. Задоян исследовал термоупругопластическое состояние прямоугольных и круглых бетонных блоков [70].

Упруго-пластический изгиб балки исследовался в работе С. А. Амбарцумяна и М. А. Задояна [71].

В 1959 году Н. Х. Арутюнян решил плоскую контактную задачу со степенным упрочнением [72].

В 1960 году в Ереванском политехническом институте Г. П. Геонджян исследовал упруго-пластическое кручение анизотропных стержней [73].

Некоторые плоские задачи теории пластичности для анизотропных тел рассматривались М. С. Саркисяном [74].

В 1967 году в Ереванском политехническом институте А. Б. Багдасаряном исследовались действие взрыва в хрупкой среде и другие задачи [75].

Различные задачи для балок, круглых плит и конических оболочек из линейно упрочняющихся материалов при сложном нагружении по теориям упруго-пластических деформаций и пластического течения рассматривались Р. М. Киракосяном. Им же на основе общих теорем теории упруго-пластических сред доказаны некоторые теоремы об упруго-пластическом равновесии тела при переменных внешних воздействиях и обобщены минимальные принципы упруго-пластической краевой задачи [76].

Задаче о передаче нагрузки от степенно-упрочняющихся накладок к деформируемому основанию в виде полуплоскости также из степенно-упрочняющегося материала посвящены работы [77].

М. А. Задояном исследовалось пластическое состояние толстостенной трубы и цилиндрических стержней произвольного профиля из упрочняющегося несжимаемого материала при кручении, изгибе и осевом растяжении. Исследовались также некоторые задачи о пластическом кручении неполного тора, сектора кольца и кривых брусьев [78].

Отметим еще, что задача устойчивости пластин по теории течения с учетом поперечных сдвигов исследовалась С. А. Амбарцумяном [79].

### Магнитоупругость

В Институте математики и механики в 1966 году исследовались вопросы о взаимодействии токопроводящей упругой оболочки и окружающего ее оболочку электромагнитного поля [80].

Методом совместного асимптотического интегрирования трехмерных уравнений электродинамики и теории упругости в работах С. А. Амбарцумяна, Г. Е. Багдасаряна, М. В. Белубекяна [81] сформулированы гипотезы магнитоупругости для пластин и оболочек, находящихся во внешнем магнитном поле при отсутствии стороннего электрического поля. Рас-

смотрены различные частные задачи. Исследовано влияние магнитного поля и проводимости материала оболочки на частоту колебаний и на устойчивость. Рассмотрены также различные задачи по флаттеру пластин и оболочек в магнитном поле и по статической и динамической устойчивости тонких тел.

Некоторые результаты, полученные в этой области, обобщены в работе [82].

Этой области посвящены также исследования [83] и другие.

### *Вязкоупругость*

Некоторые задачи теории вязкоупругости в Ереванском политехническом институте исследовались в работах [84], в которых рассматривались кручение вязкоупругих призматических стержней, находящихся под действием вибрационной нагрузки, и нагружение бесконечной пластинки с эллиптическим отверстием из вязкоупругого материала.

Задача теории вязкоупругости для тел с фазовыми приращениями и устойчивость неоднородно-стареющих вязкоупругих стержней исследованы в работах [85].

### *Устойчивость движения*

В Ереванском госуниверситете М. С. Габриеляном исследовались задачи о стабилизации различных механических систем, об управлении движущихся систем, о сближении групповых управляемых объектов и другие задачи теории устойчивости движения [86].

Устойчивость движения реальных объектов в течение некоторого конечного промежутка времени исследовалась в работах К. А. Абгаряна [87]. Некоторые вопросы синтеза линейных нестационарных систем исследовались в работах [88].

В 1976 году в Ленинаканском филиале ЕрПИИ исследовались некоторые вопросы движения упругой системы, лежащей на шероховатой плоскости и находящейся под действием периодических импульсов [89].

Некоторые вопросы об управлении стохастическими системами исследовались в работах [90].

В Армении были проведены Всесоюзные конференции: по теории оболочек и пластин в 1962 и 1980 гг., по проблеме ползучести и усадки бетона в 1974 году, по реологии грунтов в 1972 году в Дилижане и в 1975 году в Цахкадзоре, по магнитоупругости в 1978 году в Цахкадзоре, по механике конструкций из композиционных материалов в 1979 году в Ленинакане и по теории упругости в 1979 году в Ереване.

Вопросы развития механики в Армянской ССР обсуждались в работах [91].

60 ՏԱՐՎԱ ԸՆԹԱՅՈՒՄ ԼԵՆԱԿԵՆԻՈՅԻ ԶԱՐԿՈՑՈՒՄԸ  
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ-ՈՒՄ

Ս. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Համառոտ ձևով հիշատակվում են Հայկական ՍՍՀ-ում 60 տարվա ընթացքում կատարված ուսումնասիրությունները առաձգականության մաթեմատիկական տեսության, թաղանթների և սալերի, սողրի, պլաստիկության, հիդրո և գազոցինամիկայի, մազնիսաառաձգականության, սրածրամածուցիկության և շարժման կայունության տեսությունների ընազամումներում:

Բիբլիոգրաֆիան բնդրրկում է 443 աշխատանք և մանոգրաֆիաներ:

THE ADVANCEMENT OF MECHANICS IN THE ARMENIAN SSR  
FOR SIXTY YEARS

B. I. ABRAHAMIAN, O. M. SAPONJIAN

S u m m a r y

The investigations in the fields of mathematical theory of elasticity, theories of shells and plates, creep, plasticity, hydro- and gas dynamics, magnetoelasticity, viscoelasticity and stability of motion carried out for sixty years in the Armenian SSR are shortly reviewed.

The bibliography contains 443 works and monographs.

АНТЕРАТУРА

1. *Առյճր Ա. Գ.* *С R Acad. Sci.*, 1927, 164, No. No. 17, 1; *Докл. АН СССР*, 1934, т. 2, № 5; *Акопян А. А.* *ПММ*, 1934, т. 2, вып. 1; *Proceed. of the IV Int. Congr. for Appl. Mech.*, Camb. 1934; *Сб. научн. трудов ЕрПИ*, Ереван, 1936; *Тер-Мкртчян А. М.* *Тр. ЕрГУ*, 1934, т. 7, серия ФМН, вып. 1.
2. *Сопонджян О. М.* *Научные тр. ЕрГУ*, т. 17, 1941; *ПММ*, 1949, т. 13, вып. 5; *Изв. АН Арм.ССР, ФМЕТН*, 1956, т. 9, № 9.
3. *Сопонджян О. М.* *Сб. научных трудов ЕрПИ, посп. 40-летию установления Сов. власти в Армении*, Ереван, 1960; *Изв. АН Арм.ССР, Механика*, 1969, т. 22, № 2.
4. *Капанян А. К.* *Изв. АН Арм.ССР, ФМЕТН*, 1952, т. 5, № 2; *Сб. научн. трудов ЕрПИ*, 1957, № 14; *Авсегисян А. С.* *Учен. зап. Ер. арм. пед. института, серия мат. наук*, 1963, п. 2; *Сопонджян О. М.* *Изв. АН Арм.ССР, Механика*, 1971, т. 24, № 3; *Сопонджян О. М., Эфендиян Р. А.* *Изв. АН Арм.ССР, Механика*, 1976, т. 29, № 5; *Варդарյան С. С.* *Докл. АН Арм.ССР*, 1971, т. 52, № 5; 1973, т. 60, № 1 и № 4; *Варդарյան С. С., Эфендиян Р. А.* *Изв. АН Арм.ССР, Механика*, 1972, т. 25, № 2; *Докл. АН Арм.ССР*, 1972, т. 54, № 3; *Сароян С. Р.* *Докл. АН Арм.ССР*, 1972, т. 55, № 1.
5. *Արություն Н. Х.* *Докл. АН Арм.ССР*, 1948, т. 9, № 2; *ПММ*, 1949, т. 13, в. 1; *Արություն Н. Х., Դուկանյան Н. Օ.* *ПММ*, 1954, т. 16, вып. 5.
6. *Աբրահյան Բ. Ա., Դժրբաժյան Մ. Մ.* *ПММ*, 1951, т. 15, в. 1; *Դժրբաժյան Մ. Մ.* *Научные труды ЕрГУ*, 1955, т. 48; *Աբրահյան Բ. Ա.* *ПММ*, 1949, т. 13, в. 5; 1950, т. 14, в. 3; 1960, т. 24, в. 6; *Докл. АН Арм.ССР*, 1959, т. 28, № 3; 1960, т. 31, № 1; *Костандян Б. А.* *Изв. АН Арм.ССР, ФМН*, 1956, т. 11, № 3; *Изв. АН Арм.ССР, ФМЕТН*, 1954, т. 7, № 4; *Минасян Р. С.* *Докл. АН Арм.ССР*, 1956, т. 22, № 5; 1956, т. 23, № 4; *Բաբոյան Ա. Ա.* *Изв. АН Арм.ССР, ФМН*, 1958, т. 11, № 2;

- 1960, т. 13, № 5; 1961, т. 14, № 2; *Топоян В. С.* Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 1; ИЖ АН СССР, 1962, т. 2, и. 2; *Чобанян К. С.* Изв. АН Арм.ССР, ФМЕТН, 1955, т. 8, № 2; Докл. АН Арм.ССР, 1958, т. 27, № 3; *Гулкянн Н. О.* Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1957, т. 10, № 3; 1960, т. 13, № 1; *Саркисян В. С.* Докл. АН Арм.ССР, 1963, т. 17, № 4; Rev. Roum. Sci. Techn.-Mech. Appl., 1970, 15, No. 4; *Гулкянн Н. О., Александрян Е. А.* Изв. АН Арм. ССР, ФМЕТН, 1953, т. 6, № 3.
7. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. А.* Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1965.
8. *Абрамян Б. А.* Докл. АН Арм.ССР, 1951, т. 19, № 1; 1958, т. 26, № 2; ПММ, 1957, т. 21, в. 1; *Абрамян Б. А., Манусян М. М.* Докл. АН Арм.ССР, 1957, т. 25, № 4; *Баблюян А. А.* Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1961, т. 14, № 4; Докл. АН Арм.ССР, 1961, т. 32, № 1; 1977, т. 65, № 1; *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. А., Баблюян А. А.* ПММ, 1964, т. 28, в. 4; Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1964, т. 17, № 3; *Топоян В. С.* Докл. АН Арм.ССР, 1963, т. 37, № 3 и № 5; Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1961, т. 17, № 2; *Баблюян А. А., Топоян В. С.* Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1968, т. 21, № 2; *Мелконян А. Н.* Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1971, т. 24, № 2; 1972, т. 25, № 5; *Мкртчян А. М.* Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1971, т. 24, № 2; *Баблюян А. А., Мкртчян А. М.* Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1971, т. 24, № 5; 1971, т. 27, № 4; *Мелконян С. А.* Докл. АН Арм.ССР, 1972, т. 55, № 2; *Чобанян К. С., Геворкян С. Х.* Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1971, т. 24, № 5; *Чобанян К. С., Аветисян А. Г.* Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1972, т. 25, № 6; *Гафаян П. О.* ПМ, 1975, т. 9, № 4; *Баблюян А. А., Гулкянн Н. О.* Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1969, т. 22, № 1 и № 3; Докл. АН Арм.ССР, 1976, т. 62, № 5; *Ншанян Ю. С.* Докл. АН Арм.ССР, 1971, т. 52, № 1; 1972, т. 53, № 4; *Саакян С. М.* Докл. АН Арм.ССР, 1965, т. 40, № 3; 1965, т. 41, № 2; *Баблюян А. А., Саакян В. Г.* Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1970, т. 23, № 1.
9. *Арутюнян Н. Х.,* ПММ, 1968, т. 32, в. 4; *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* ПММ, 1969, т. 33, в. 5; Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1972, т. 25, № 2.
10. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* ПММ, 1975, т. 39, № 5; Сб. «Избранные проблемы прикл. механики, посвященной 60-летию академика В. И. Челомея», Москва, 1974; *Саркисян В. С., Овсепян А. О.* Докл. АН Арм.ССР, 1971, т. 52, № 5; 1971, т. 53, № 3 и 1973, т. 57, № 1; *Григорян Э. Х.* Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 6; ПММ, 1974, т. 38, в. 2; Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1974, т. 27, № 6; *Шагинян С. С.* Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 5; Докл. АН Арм.ССР, 1974, т. 59, № 5; Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1971, т. 30, № 1 и № 2; *Агоян К. А.* Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 5; Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1975, т. 28, № 3; 1976, т. 29, № 4; *Гулян К. Г.* Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 5; Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1976, т. 29, № 6; *Микаелян В. В.* Докл. АН Арм.ССР, 1973, т. 56, № 4; 1974, т. 58, № 1; *Саркисян В. С., Аванесян Р. Г.* Докл. АН Арм.ССР, 1977, т. 64, № 1 и № 5; Учен. зап. ЕрГУ, ест. науки, 1978, № 2 и 1979, № 1.
11. *Чобанян К. С.* Докл. АН Арм.ССР, 1961, т. 32, № 2.
12. *Геворкян С. Х.* Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1968, т. 21, №№ 1—6; *Аветисян А. Г.* Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1972, т. 25, № 5; *Чобанян К. С., Алексанян Р. К.* Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1971, т. 24, № 5; *Алексанян Р. К.* Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1971, т. 24, № 4; *Арутюнян А. А.* Докл. АН Арм.ССР, 1977, т. 65, № 1; Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1979, т. 32, № 4.
13. *Абрамян Б. А.* Докл. АН Арм.ССР, 1962, т. 35, № 4; Proceed. of the IUTAM Symposium, Ed. by A. D. de Pater and J. J. Katker, Delft, Un.-Pr., 1975; *Баблюян А. А.* Инж. журн. АН СССР, 1964, т. 4, в. 4.
14. *Баблюян А. А.* Докл. АН Арм.ССР, 1961, т. 39, № 3; ПММ, 1961, т. 28, в. 6 и 1967, т. 31, в. 4; *Баблюян А. А., Александрян М. А.* Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1967, т. 20, № 6; *Баблюян А. А., Мхитарян С. М.* Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1969, т. 22, № 1; *Мхитарян С. М.* Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1970, т. 23, № 2.

15. Саркисян В. С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Изд-во ЕрГУ, Ереван, 1976; Некоторые задачи теории упругости анизотропного тела. Изд-во ЕрГУ, Ереван, 1970; *Sarkisjan V. S., Mamrillova A.* Vybrane kypitoly z teorie prurnosti anizotropnych telies. Univerzita Komenského v Bratislave, Bratislave, 1979.
16. Мкртчян Р. Е. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1972, т. 25, № 1 и № 4; 1973, т. 26, № 3; 1975, т. 28, № 6.
17. Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А. ПММ, 1965, т. 29, в. 3; Баблоян А. А., Пирцян О. О. Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1965, т. 18, № 1; Багдасарян Г. Е., Давоян З. Н. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1972, т. 25, № 2; Ахиян Ж. О., Багдасарян А. Г. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1973, т. 26, № 1 и № 3; Багдасарян А. Г., Мартиросян А. Н. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1974, т. 27, № 3; Саакян С. Г. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1973, т. 26, № 5; 1974, т. 27, № 1; Багдасарян А. Г. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1977, т. 30, № 5; Аликян Ж. Г. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1973, т. 26, № 4; Григорян Э. Х. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1978, т. 31, № 5.
18. Езянян В. В. Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1958, т. 11, № 6; 1965, т. 18, № 6; Сб. трудов ЕрПИ, 1959, № 20, в. 4; Машинкин Х. Е. Сборн. трудов ЕрПИ, 1950, № 4; Александрян М. А. Докл. АН Арм.ССР, 1971, т. 53, № 3; Гулжаниян Н. О., Мкртчян А. М. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1978, т. 31, № 4.
19. Амбарцумян С. А. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1966, т. 19, № 2; Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Изв. АН СССР, МГТ, 1966, № 2 и № 6; Докл. АН Арм.ССР, 1969, т. 48, № 4.
20. Хачатрян А. А. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1972, т. 25, № 6; Хачатрян А. А., Исабекян Н. Г. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1969, т. 22, № 5; Мкртчян Дж. Э. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1970, т. 23, № 1; Галоян А. Г., Хачатрян А. А. Докл. АН Арм.ССР, 1976, т. 62, № 3; 1978, т. 66, № 1; Багдасарян Б. А. Докл. АН Арм.ССР, 1968, т. 47, № 3.
21. Green A. E., Mikrtchtjan J. Z. J. of Elasticity, v. 7, 1977, No. 4; Spruce D. A., Mikrtchtjan J. Z. J. of Mechanics and Appl. Mathematics, 1977, v. 30, No. 4.
22. Сапонджян О. М. Изгиб тонких упругих плит. Ереван, Изд-во «Айтастан», 1975.
23. Геонджян Г. П. Тр. ЕрПИ, 1950, № 4.
24. Овакимян С. М. Тр. ЕрПИ, 1950, № 4.
25. Хачатрян Т. Г. Пологие цилиндрические оболочки. Сообщения Института математики и механики АН Арм.ССР, вып. 4, Ереван, 1949.
26. Амбарцумян С. А. ПММ, 1947, т. 11, в. 5; Докл. АН Арм.ССР, 1947, т. 6, № 3.
27. Наларов А. Г. Докл. АН Арм.ССР, 1948, т. 9, № 2; 1949, т. 10, № 1.
28. Амбарцумян С. А. Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1957, т. 10, № 12; Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 5; ПММ, 1958, т. 22, № 2; Мовсисян А. А. Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1959, т. 12, № 4; Пешгмалляян Д. В. Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1957, т. 10, № 2; Хачатрян А. А. Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1959, т. 12, № 5.
29. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Москва, Физматгиз, 1961, перевод на англ. язык Theory of anisotropic shells, NASA, TT F-118, Washington, 1964.
30. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е. Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1961, № 1; Докл. АН Арм.ССР, 1964, т. 39, № 3; Амбарцумян С. А., Гнуни В. Ц. Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1961, № 3; Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Докл. АН Арм.ССР, 1959, т. 29, № 4; 1960, т. 30, № 1; Багдасарян Г. Е., Гнуни В. Ц. Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1960, т. 13, № 5; 1961, т. 14, № 1; 1965, т. 18, № 2; Багдасарян Г. Е. Докл. АН Арм.ССР, 1964, т. 39, № 5; Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1962, т. 15, № 6; Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1963, № 1; Гнуни В. Ц. Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1960, т. 13, № 1; 1965, т. 18, № 1; Мовсисян А. А. Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1962, т. 15, № 2; 1964, т. 17, № 6; 1965, т. 18, № 6; 1967, т. 20, № 5; ПМ АН Укр.ССР, 1967, т. 3, в. 8; Докл. АН Арм.ССР, 1961, т. 32, № 5; 1962, т. 35, № 3.

31. Хачатрян Т. Г. Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1963, т. 26, № 6.
32. Амбарцумян С. А., Дурцарян С. М. Докл. АН Арм.ССР, 1961, т. 33, № 4; Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и маш., 1962, № 3; Дурцарян С. М. Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1960, т. 13, № 2, № 3; Докл. АН Арм.ССР, 1964, т. 38, № 5; Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и маш., 1962, № 6.
33. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Москва, Физматгиз, 1967; перевод на англ. язык, изд-во Technomic publ. Co. Stanford, 1970; перевод на японск. язык, Токио, 1975.
34. Амбарцумян С. А., Мовсисян А. А. Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 3; Тр. III национального конгресса Болгарской АН по теоретической механике, кн. 2-ая, 1977; Механика полимеров, 1978, № 4; Амбарцумян С. А., Дурцарян С. М. Докл. АН Арм.ССР, 1979, т. 69, № 1.
35. Гнуни В. Ц., Казарян Р. С. Сборник «Труды X Всесоюз. конференции по теории оболочек и пластин», Тбилиси, 1975; Гнуни В. Ц., Белубекян Э. В. Докл. АН Арм.ССР, 1974, т. 59, № 3; Механика полимеров, 1976, № 5; Гнуни В. Ц., Нишпнян Ю. С. Проблемы машиностроения, 1977, в. 6; Изв. ВУЗов «Машиностроение», 1980, № 4; Белубекян Э. В., Гнуни В. Ц., Кизлоян А. О. Проблемы прочности, 1977, № 3.
36. Агаляян А. А. Изв. АН СССР, МТТ, 1966, № 6; 1972, № 1; Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1966, т. 19, № 4; 1973, т. 26, № 2; ПММ, 1966, т. 30, в. 1; Докл. АН Арм.ССР, 1972, т. 55, № 3.
37. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. Наука, Москва, 1974.
38. Минасян Р. С. Докл. АН Арм.ССР, 1956, т. 22, № 1; 1960, т. 30, № 1; Белубекян Э. В. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1968, т. 21, № 2; 1969, т. 22, № 4.
39. Саркисян В. С., Шехян А. А. Научн. журн. МНР. Естеств. науки. Изд-во ЕрГУ, 1972.
40. Мовсисян Г. А. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1968, т. 21, № 2; 1971, т. 24, № 5 и № 6; 1972, т. 25, № 1.
41. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Докл. АН Арм.ССР, 1966, т. 43, № 4; Исабекиян Н. Г. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1973, т. 26, № 1 и № 6; 1969, т. 22, № 6; Хачатрян А. А. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1969, т. 22, № 4; 1972, т. 25, № 1; Мкртчян Дж. Э. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1971, т. 24, № 3; Галоян А. Г., Хачатрян А. А. Докл. АН Арм.ССР, 1978, т. 68, № 3; Галоян А. Г. Докл. АН Арм.ССР, 1978, т. 67, № 1; Уч. записки ЕрГУ, 1977, № 3.
42. Маслов Г. Н. Изв. НИИГ, 1940, т. 28; Арутюнян Н. Х. Докл. АН Арм.ССР, 1947, т. 7, № 5; ПММ, 1949, т. 13, № 5 и № 6.
43. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М., 1952; переводы на франц. язык "Eyrolles éditeur, Paris, 1957; на китайский язык. Пекинское изд-во, 1961; на англ. язык, Pergamon-Press, Oxford, 1965.
44. Аракелян Т. Г. Изв. АН Арм.ССР, ФМЕТН, 1953, т. 6, № 2; 1956, т. 9, № 3; Арутюнян Н. Х., Чобакян К. С. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 6; Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1957, т. 10, № 5; Манцукян М. М. Изв. АН Арм.ССР, ФМЕТН, 1954, т. 7, №№ 1, 3, 6; т. 9, 1956, № 1 и № 9; Задоян М. А. Изв. АН Арм.ССР, ФМЕТН, 1956, т. 9, № 9; Докл. АН Арм.ССР, 1960, т. 30, № 5; 1960, т. 31, № 1; Саркисян В. С. Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1959, т. 12, № 4; Манцукян М. М., Саркисян В. С. Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1963, т. 16, № 3; Григорян Г. С. Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1957, т. 10, № 4; 1965, т. 18, № 2; Сб. трудов ЕрПИ, 1975, т. 26; Киракосян Р. М. Докл. АН Арм.ССР, 1963, т. 37, № 3; Симонян А. М. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1966, т. 19, № 4 и № 6; 1967, т. 20, № 1.
45. Александрян Р. А., Арутюнян Н. Х., Манцукян М. М. ПММ, 1958, т. 22, в. 6; Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и маш., 1959, № 1; Манцукян М. М., Саркисян В. С. Изв. АН Арм.ССР, серия ФМН, 1963, т. 16, № 3.
46. Задоян М. А. Докл. АН Арм.ССР, 1958, т. 26, № 5 и 1958, т. 27, № 5; Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и маш., 1959, № 1; Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1968, т. 21, № 2; Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 5.

47. Киракосян Р. М. ПМ АН Укр.ССР, 1963, т. 9, № 2; Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1962, т. 15, №№ 2—4; 1963, т. 16; №№ 1, 5 и 6; Изв. АН Арм.ССР, Мех. 1966, т. 19, № 2.
48. Манукиан М. М. Кручение тел с учетом ползучести. Изд-во ЕрГУ, Ереван, 1972.
49. Арутюнян Н. Х. ПММ, 1969, т. 23, в. 5.
50. Арутюнян Н. Х., Манукиан М. М. ПММ, 1963, т. 27, в. 5; Манукиан М. М. Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1963, т. 16, № 6.
51. Симосян А. М. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1966, т. 19, № 4 и № 6.
52. Арутюнян Н. Х. Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 3; 1976, т. 231, № 3; Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 3; Арутюнян Н. Х. ПММ, 1977, т. 41, в. 5; Арутюнян Н. Х., Зевин А. А. Изв. АН СССР, МТТ, 1979, № 1.
53. Карапетян К. С. Докл. АН Арм.ССР, 1964, т. 39, № 1; 1965, т. 40, № 4 и № 5; 1965, т. 41, № 5; Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1964, т. 17, № 4; 1965, т. 18, № 2 и № 5; Докл. АН Арм.ССР, 1973, т. 57, № 2.
54. Карапетян К. С., Котикян Р. А. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1971, т. 24, № 5 и № 6; Бетон и железобетон, 1973, № 2; Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 5; Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1972, т. 25, № 3; Докл. АН Арм.ССР, 1974, т. 59, № 4; Карапетян К. С., Котикян Р. А., Карапетян К. А. Докл. АН Арм.ССР, 1979, т. 68, № 4; Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1980, т. 33, № 2.
55. Месчян С. Р. Ползучесть глинистых грунтов. Изд-во АН Арм.ССР, Ереван, 1967; Месчян С. Р. Механические свойства грунтов и лабораторные методы их определения, М., «Недра», 1974.
56. Мартиросян М. М. Механика полимеров, 1965, № 2 и № 6; 1974, № 3; Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1964, т. 17, № 5; Саркисян Н. Е., Мартиросян М. М. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1975, т. 28, № 3; Саркисян Н. Е. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1971, т. 24, №№ 2, 3; 1973, т. 26, № 1; 1975, т. 28, № 4; Механика полимеров, 1971, № 5; 1975, № 1.
57. Симосян А. М. Бетон и железобетон, 1965, № 12; Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1969, т. 22, № 6; 1972, т. 25, № 2 и № 6; 1971, т. 27, № 4.
58. Амбарцумян С. А. ПММ, 1971, т. 35, в. 1.
59. Халпахчьян А. Х. Изв. Арм.ССР, ФМЕТН, 1948, т. 1, № 2; Тр. гидравл. лаборатории Моск. ИСН, М., 1958.
60. Бабаджянян Г. А. Изв. АН Арм.ССР, ФМН, 1960, т. 13, № 1; 1961, т. 14, № 3 и № 5; 1965, т. 18, № 4; Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1973, т. 26, № 5; 1974, т. 27, № 3; 1975, т. 28, № 3; 1978, т. 31, № 1.
61. Сакоян В. Г. Тр. АПИ, 1955, № 176; Изв. АН Арм.ССР, ФМЕТН, 1955, т. 6, № 6; Докл. АН Арм.ССР, 1955, т. 22, № 4; 1956, т. 23, № 2.
62. Балдоев А. Г. Докл. АН Арм.ССР, 1959, т. 28, № 2; 1960, т. 30, № 2; 1961, т. 33, № 1; 1965, т. 40, № 3; 1969, т. 49, № 1; 1972, т. 55, № 5; Минасян М. М. Уч. зап. ЕрГУ, ест. науки, 1969, № 2; 1975, № 1; Докл. АН Арм.ССР, 1972, т. 55, № 5; Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1972, т. 25, № 3; Оганян Г. Г. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1973, т. 26, № 6; 1975, т. 28, № 2.
63. Балдоев А. Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами, Изд-во АН Арм.ССР, Ереван, 1961; Балдоев А. Г. Некоторые нелинейные задачи о движении сжимаемой жидкости, Ереван, Изд-во АН Арм.ССР, 1967.
64. Гаспарян А. М., Заминян А. А. Докл. АН Арм.ССР, 1958, т. 26, № 1; Гаспарян А. А., Исаакян С. М. Изв. АН Арм.ССР, техн. н., 1965, т. 18, № 3 и № 5; 1966, т. 19, № 5; Гаспарян А. М., Исаакян С. М., Олдесян А. А. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1966, т. 19, № 3.
65. Белубекян М. В. ИФЖ, 1963, т. 6, № 8; Тр. АПИ, № 230, техническая гидромеханика, 1964.
66. Мхитарян А. М. Некоторые вопросы гидромеханики пограничного слоя атмосферы. Водный и тепловой баланс водоемов, Ереван, «Айрастан», 1970.
67. Даниелян А. Е. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1970, т. 23, № 1; 1974, т. 27, № 1; Барсегян Р. М. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1972, т. 25, № 1; Петросян А. Г.

- Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, т. 25, № 6; 1973, т. 26, № 3; 1974, т. 27, № 6; *Безирянян Г. С.* Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, № 5; *Алабян А. Д.* Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, № 5.
68. *Наваров А. Г.* Сб. трудов конференции по пластическим деформациям АН СССР, 1937.
69. *Чобанян К. С.* Изв. АН Арм. ССР, ФМЕТН, 1953, т. 6, № 4.
70. *Задоян М. А.* Докл. АН Арм. ССР, 1956, т. 23, № 5.
71. *Амбарцумян С. А., Задоян М. А.* Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 10.
72. *Арутюнян Н. Х.* Изв. АН Арм. ССР, ФМН, 1959, т. 12, № 2.
73. *Геонджян Г. П.* Сб. научных трудов ЕрПИ. Ереван, 1960.
74. *Саркисян М. С.* ПММ, 1960, т. 24, в. 6; Сб. АГУ, исследования по упругости и пластичности, 1961, № 1; 1964, № 3; Изв. АН Арм. ССР, ФМН, 1962, т. 15, № 3; Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, т. 25, № 4.
75. *Багдасарян А. Б.* Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1968, т. 21, №№ 1—6.
76. *Киракосян Р. М.* Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1967, т. 20, № 2 и № 3; 1971, т. 24, № 2 и № 6, 1973, т. 26, № 2; 1975, т. 28, № 4; Докл. АН Арм. ССР, 1971, т. 52, № 4.
77. *Саркисян В. С., Мхитарян В. Г., Овсепян А. О.* Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. 28, № 5; Ученые записки ЕрГУ, 1975, № 2.
78. *Задоян М. А.* Докл. АН Арм. ССР, 1973, т. 56, № 1; Сб. «Механика деформируемых тел и конструкций», посвященный 60-летию академика Ю. Н. Работнова, М., 1975; Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 2.
79. *Амбарцумян С. А.* ПММ, 1963, т. 27, в. 4.
80. *Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Докл. АН Арм. ССР, 1967, т. 45, № 2; Изв. АН СССР, МТТ, 1966, № 6.
81. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* ПММ, 1971, т. 35, в. 2; 1973, т. 37, в. 1; 1975, т. 39, в. 5; Докл. АН Арм. ССР, 1977, т. 64, № 1.
82. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластинок. М., «Наука», 1977.
83. *Мхртычян П. А.* Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1973, т. 26, № 4; 1975, т. 28, № 4; 1979, т. 32, № 1; *Капранян К. Б.* Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1971, т. 27, № 2; 1979, т. 32, № 1; *Овакимян Р. Н.* Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1967, т. 20, № 4 и № 5; 1969, т. 22, № 4; 1970, т. 23, № 2; 1979, т. 32, № 3; *Даноян З. Н.* Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, № 5; 1975, т. 28, № 1.
84. *Вермишян Г. Б., Галин А. А.* Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 5; *Вермишян Г. Б.* Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, № 1; 1975, т. 28, № 5; *Вермишян Г. Б., Медкопян Б. А.* Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1977, т. 30, № 2.
85. *Арутюнян Н. Х., Лазовский А. С.* Докл. АН Арм. ССР, 1977, т. 65, № 2; *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* ПММ, 1979, т. 43, в. 4.
86. *Габриелян М. С.* ПММ, 1964, т. 28, в. 3; Изв. АН Арм. ССР, ФМН, 1965, т. 18, № 6; Сб. трудов ЦНИСАУ, 1970, вып. 1; Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т. 29, № 3 и 1978, т. 31, № 6.
87. *Абгарян К. А.* Докл. АН СССР, 1968, т. 183, № 3; Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, т. 25, № 5; *Абгарян К. А.* Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. М., «Наука», 1973.
88. *Абгарян К. А.* Докл. АН СССР, 1977, т. 232, № 5; *Абгарян К. А., Григорян Ф. П.* М., Тр. МАИ, 1977, вып. 419; *Григорян Ф. П.* Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1979, т. 32, № 5.
89. *Моласян С. А.* Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1977, т. 30, № 3.
90. *Егиян Г. Г.* Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1977, т. 30, № 1; *Егиян Г. Г., Колмановский В. Б.* Изв. АН Арм. ССР, 1978, т. 31, № 1.
91. Академия наук Армянской ССР за 25 лет. Ереван, Изд-во АН Арм. ССР, 1968, 95—115; Наука в Армении за 50 лет (на армянском языке). Ереван, Изд-во АН Арм. ССР, 1973, 317—355; Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т. 29, № 1, 3—50; Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1977, т. 30, № 5, 3—16.

А. Ф. МИПАСЯН, В. С. ТОНОЯН

## О КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОЙ СОСТАВНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВЕРТИКАЛЬНЫМ КОНЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ

Исследованию плоской смешанной и контактной задачи теории упругости для составных плоскостей, полуплоскостей и полос посвящено много работ [1—8]. В этих работах принималось, что линии раздела различных материалов параллельны граничной линии, а свойства упругого материала в направлениях, параллельных границе, не изменяются.

В работах [9, 16] рассматривалась задача о давлении жесткого штампа, приложенного на части границы упругой составной полуплоскости, когда полуплоскость состоит либо из двух квадрантов с различными упругими свойствами, либо из двух квадрантов одинакового материала и полуполосы между ними из другого материала, линии раздела которых перпендикулярны границе полуплоскости. Смешанные задачи для составной плоскости и полосы с трещиной и первая основная задача для составной полуплоскости рассмотрены в работах [10—13].

В настоящей работе рассматривается контактная задача плоской теории упругости для составной полуплоскости с разрезом конечной длины вдоль линии раздела материалов, выходящим на границу. Полуплоскость состоит из двух однородных и изотропных квадрантов с различными упругими свойствами, линия раздела материалов которых перпендикулярна к границе полуплоскости. К границе полуплоскости приложен жесткий штамп с произвольным основанием так, что штамп находится одновременно на обоих материалах и расположен несимметрично относительно разреза. Предполагается, что трение между штампом и полуплоскостью отсутствует. Для простоты принимается также, что граница полуплоскости вне штампа свободна от внешних усилий. В конечном разрезе, длина которого может быть определена, действует только нормальное давление. На линии раздела материалов вне разреза заданы условия полного контакта. После решения задачи при принятых допущениях устраняются особенности напряжений и получаются уравнения, определяющие глубину разреза и величину зоны контакта.

В частном случае, когда  $\alpha = 0$ , получаем решение задачи о давлении жесткого штампа с основанием произвольной формы, приложенного на части горизонтальной границы упругой составной полуплоскости [16].

Когда материалы квадрантов одинаковы, то получается решение контактной задачи теории упругости, совпадающее с решением, полученным М. А. Садовским [14].

Поставленная задача сводится к определению бигармонической функции  $\Phi_1(x, y)$  в области правого квадранта и  $\Phi_2(x, y)$  — в области левого квадранта. Функции  $\Phi_i(x, y)$  ( $i = 1, 2$ ) ищем в виде

$$\Phi_i(x, y) = \int_0^{\infty} [A_i(\alpha) + (-1)^{i+1} \alpha x B_i(\alpha)] \exp[(i-1)\alpha x] \cos(\alpha y) d\alpha + \\ + (-1)^{i+1} \int_0^{\infty} [C_i(\beta) + \beta y D_i(\beta)] \exp[-\beta y] \sin(\beta x) d\beta \quad (1.1)$$

( $i = 1, 2, 0 \leq y < \infty; 0 \leq x < \infty$  при  $i = 1; -\infty < x < 0; y \geq 0$  при  $i = 2$ )

Здесь  $A_i(\alpha); B_i(\alpha); C_i(\beta); D_i(\beta)$  ( $i = 1, 2$ ) — неизвестные функции, подлежащие определению из граничных условий и условий контакта. Граничные условия и условия контакта рассматриваемой задачи имеют вид

$$u_1(x, 0) = f_1(x) \quad 0 \leq x \leq a_1; \quad v_2(x, 0) = f_2(x) \quad -a_2 \leq x \leq 0 \\ \sigma_y^{(1)}(x, 0) = 0 \quad a_1 < x < \infty; \quad \sigma_y^{(2)}(x, 0) = 0 \quad -\infty < x < -a_2 \quad (1.2)$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = 0 \quad 0 < x < \infty; \quad \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = 0 \quad -\infty < x < 0 \\ \sigma_x^{(1)}(0, y) = \sigma_x^{(2)}(0, y) = f_3(y) \quad 0 < y < a; \quad \tau_{xy}^{(1)}(0, y) = \tau_{xy}^{(2)}(0, y) \quad (1.3)$$

$$\sigma_x^{(1)}(0, y) = \sigma_x^{(2)}(0, y) \quad u_1(0, y) = u_2(0, y) \\ \tau_{xy}^{(1)}(0, y) = \tau_{xy}^{(2)}(0, y) \quad a < y < \infty \quad v_1(0, y) = v_2(0, y) \quad a < y < \infty \quad (1.4)$$

Используя обычные формулы для определения напряжений и перемещений [15] и удовлетворяя условиям (1.2), (1.3) и (1.4), получим

$$C_i(\beta) = D_i(\beta) \quad (i = 1, 2); \quad A_2(\alpha) = A_1(\alpha) \quad (1.5)$$

$$\alpha B_2(\alpha) = 2\alpha A_1(\alpha) - \alpha B_1(\alpha) - \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\beta^2 D_1(\beta)}{(x^2 + \beta^2)^2} d\beta - \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\beta^2 D_2(\beta)}{(x^2 + \beta^2)^2} d\beta \quad (1.6)$$

$$\int_0^{\infty} \beta D_1(\beta) \sin(\beta x) d\beta = \frac{E_1}{2} f_1(x) \quad 0 \leq x \leq a_1 \quad (1.7)$$

$$\int_0^{\infty} \beta^2 D_1(\beta) \sin(\beta x) d\beta = \int_0^{\infty} \alpha^2 [A_1(\alpha) - 2B_1(\alpha) + \alpha x B_1(\alpha)] e^{-\alpha x} d\alpha \quad a_1 < x < \infty$$

$$\int_0^{\infty} \beta D_2(\beta) \sin(\beta x) d\beta = -\frac{E_2}{2} f_2(x) \quad -a_2 \leq x < 0 \quad (1.8)$$

$$\int_0^{\infty} \beta^2 D_2(\beta) \sin(\beta x) d\beta = - \int_0^{\infty} \alpha^2 [A_1(\alpha) - 2B_2(\alpha) - \alpha x B_2(\alpha)] e^{\alpha x} d\alpha \quad -\infty < x < -a_2$$

$$\int_a^{\infty} [A_1^*(x) l_1 + B_1^*(x) l_2 - E_1^*(x)] \cos(xy) dx = 0 \quad a \leq y < \infty \quad (1.9)$$

$$\int_0^a [A_1^*(x) l_1 - B_1^*(x) l_2 - E_2^*(x)] \sin(xy) dx = 0 \quad a \leq y < \infty$$

$$\int_0^a \alpha A_1^*(x) \cos(xy) dx = f_2(y) \quad 0 < y < a \quad (1.10)$$

$$\int_0^a \alpha [A_1^*(x) - B_1^*(x)] \sin(xy) dx = f(y) \quad 0 < y < a$$

где

$$l_1 = \frac{1+\nu_1}{E_1} + \frac{3-\nu_2}{E_2}; \quad l_2 = \frac{1-\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2}; \quad l_3 = \frac{1-\nu_2}{E_2} + \frac{\nu_1-1}{E_1}$$

$$l_4 = \frac{1-\nu_2}{E_2} + \frac{1+\nu_1}{E_1}; \quad l_5 = \frac{2}{E_1} + \frac{2}{E_2}; \quad A_1^*(x) = \alpha A_1(x)$$

$$B_1^*(x) = \alpha B_1(x); \quad B_2^*(x) = \alpha B_2(x); \quad E_1^*(x) = \alpha E_1(x); \quad E_2^*(x) = \alpha E_2(x)$$

$$E_1^*(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \beta^2 \left| \frac{l_3}{x^2 + \beta^2} + l_4 \frac{\beta^2 - x^2}{(x^2 + \beta^2)^2} \right| D_1(\beta) d\beta + \frac{4}{\pi E_2} \int_0^{\infty} \beta^2 \frac{(\beta^2 - x^2) D_2(\beta)}{(x^2 + \beta^2)^2} d\beta \quad (1.11)$$

$$E_2^*(x) = \frac{8}{\pi E_1} \int_0^{\infty} \frac{\beta^4 D_1(\beta)}{(x^2 + \beta^2)^2} d\beta + \frac{8}{\pi E_2} \int_0^{\infty} \frac{\beta^4 D_2(\beta)}{(x^2 + \beta^2)^2} d\beta$$

Используя результаты работы [9], из парных интегральных уравнений

(1.7) и (1.8)  $\beta D_1(\beta)$  и  $\beta D_2(\beta)$  выразим через функции  $A_1^*(x)$ ;  $B_1(x)$ ;  $B_2(x)$

$$\beta D_1(\beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} W_1(t) J_0(\beta t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{a_1}^{\infty} F_1(t) J_0(\beta t) dt \quad (1.12)$$

$$\beta D_2(\beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{a_1} W_2(z) J_0(\beta z) dz + \frac{2}{\pi} \int_{a_1}^{\infty} F_2(z) J_0(\beta z) dz \quad (1.13)$$

где

(1.13)

$$\Psi_1(t) = \frac{E_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x f_1(x)}{t^2 - x^2} dx \quad (1.14)$$

(1.14)

$$\Psi_2(\tau) = \frac{E_2}{2} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{x f_2(x)}{\tau^2 - x^2} dx \quad (1.15)$$

Форм выражений (1.13) и (1.14) и (1.15) и (1.16) являются

Формы

$$F_1(t) = t \int_0^{\bar{a}} \alpha A_1^*(\alpha) K_0(\alpha t) d\alpha - 2t \int_0^{\bar{a}} \alpha B_1^*(\alpha) K_0(\alpha t) d\alpha + \\ + t^2 \int_0^{\bar{a}} \alpha^2 B_1^*(\alpha) K_1(\alpha t) d\alpha \quad (1.16)$$

$$F_2(\tau) = \tau \int_0^{\bar{a}} \alpha A_2^*(\alpha) K_0(\alpha \tau) d\alpha - 2\tau \int_0^{\bar{a}} \alpha B_2^*(\alpha) K_0(\alpha \tau) d\alpha + \\ + \tau^2 \int_0^{\bar{a}} \alpha^2 B_2^*(\alpha) K_1(\alpha \tau) d\alpha \quad (1.17)$$

$J_n(x)$  — функции Бесселя первого рода действительного аргумента, а  $K_n(x)$  — функции Макдональда. Для решения системы (1.9) и (1.10) введем новые неизвестные  $\Phi(t)$  и  $\Psi(t)$  следующим образом:

$$A_1^*(\alpha) l_1 - B_1^*(\alpha) l_2 - E_1^*(\alpha) = \int_0^{\bar{a}} \Phi(t) f_0(\alpha t) dt \quad (1.18)$$

$$A_2^*(\alpha) l_1 - B_2^*(\alpha) l_2 - E_2^*(\alpha) = \int_0^{\bar{a}} \Psi(t) f_1(\alpha t) dt \quad (1.19)$$

Подстановка (1.18) и (1.19) дает возможность тождественно удовлетворить уравнениям (1.9). Для удовлетворения уравнению (1.10) преобразуем правые части уравнений (1.18) и (1.19) следующим образом: заменяя функции  $J_0(\alpha t)$  и  $J_1(\alpha t)$  через  $\cos(\alpha t)$  и  $\sin(\alpha t)$  с помощью интегрального представления Пуассона, меняя порядок интегрирования и интегрируя по частям полученные выражения, учитывая при этом, что  $H(a) = 0$ ;  $S(a) = 0$  и  $S(0) = 0$ , будем иметь

$$\int_0^{\bar{a}} \Phi(t) f_0(\alpha t) dt = -\frac{1}{\alpha} \int_0^{\bar{a}} H'(r) \sin(\alpha r) dr \quad (1.20)$$

(1.21)

$$\int_0^{\bar{a}} \Psi(t) f_1(\alpha t) dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\bar{a}} S'(r) \cos(\alpha r) dr \quad (1.21)$$

$$H(r) = \frac{2}{\pi} \int_r^a \frac{\Phi(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \quad (1.22)$$

$$S(r) = \frac{2}{\pi} r \int_r^a \frac{\Psi(t) dt}{t \sqrt{t^2 - r^2}} \quad (1.23)$$

Учитывая (1.20), (1.21), (1.11), (1.12) и (1.13), при помощи формул (1.18), (1.19) и (1.6) выразим  $A_1^*(\alpha)$ ,  $B_1^*(\alpha)$ ,  $B_2^*(\alpha)$  через функции  $H'(r)$ ,  $S'(r)$ ,  $F_1(t)$  и  $F_2(\tau)$

$$\begin{aligned} A_1^*(\alpha) = A_2^*(\alpha) = & \frac{4}{\pi^2} \int_0^{a_1} \Psi_1(t) \left\{ [(n_1 + 1) \mu_1 + \mu_2] K_0(\alpha t) - \right. \\ & \left. - \left( \mu_1 + \frac{\mu_2}{2} \right) \alpha t K_1(\alpha t) \right\} dt + \\ & + \frac{4}{\pi^2} \int_{a_1}^{\infty} F_1(t) \left\{ [(n_1 + 1) \mu_1 + \mu_2] K_0(\alpha t) - \left( \mu_1 + \frac{\mu_2}{2} \right) \alpha t K_1(\alpha t) \right\} dt + \\ & + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{a_2} \Psi_2(\tau) \left\{ [(n_2 + 1) \mu_3 + \mu_2] K_0(\alpha \tau) - \left( \mu_3 + \frac{\mu_2}{2} \right) \alpha \tau K_1(\alpha \tau) \right\} d\tau + \\ & + \frac{4}{\pi^2} \int_{a_2}^{\infty} F_2(\tau) \left\{ [(n_2 + 1) \mu_3 + \mu_2] K_0(\alpha \tau) - \left( \mu_3 + \frac{\mu_2}{2} \right) \alpha \tau K_1(\alpha \tau) \right\} d\tau + \\ & + \frac{l_2}{a l_1 (l_2 + l_3)} \int_0^a S'(r) \cos(\alpha r) dr - \frac{l_3}{a l_1 (l_2 + l_3)} \int_0^a H'(r) \sin(\alpha r) dr \quad (1.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1^*(\alpha) = & \frac{4}{\pi^2} \int_0^{a_1} \Psi_1(t) \left\{ [(n_1 + 1) \mu_4 - \mu_5] K_0(\alpha t) - \left( \mu_4 - \frac{\mu_5}{2} \right) \alpha t K_1(\alpha t) \right\} dt + \\ & + \frac{4}{\pi^2} \int_{a_1}^{\infty} F_1(t) \left\{ [(n_1 + 1) \mu_4 - \mu_5] K_0(\alpha t) - \left( \mu_4 - \frac{\mu_5}{2} \right) \alpha t K_1(\alpha t) \right\} dt + \\ & + \frac{2}{\pi^2} (n_2 - 1) \mu_5 \int_0^{a_2} \Psi_2(\tau) K_0(\alpha \tau) d\tau + \frac{2}{\pi^2} (n_2 - 1) \mu_5 \int_{a_2}^{\infty} F_2(\tau) K_0(\alpha \tau) d\tau - \\ & - \frac{1}{a (l_2 + l_3)} \int_0^a H'(r) \sin(\alpha r) dr - \frac{i}{a (l_2 + l_3)} \int_0^a S'(r) \cos(\alpha r) dr \quad (1.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2^*(\alpha) = & \frac{4}{\pi^2} (n_1 - 1) \nu_6 \int_0^{u_1} \Psi_1(t) K_0(\alpha t) dt + \frac{4}{\pi^2} (n_1 - 1) \nu_6 \int_{u_1}^{\infty} F_1(t) K_0(\alpha t) dt + \\
& + \frac{4}{\pi^2} \int_0^a \Psi_2(\tau) \{[(n_2 + 1) \mu_7 - 2\nu_6] K_0(\alpha\tau) - (\mu_7 - \nu_6) \alpha \tau K_1(\alpha\tau)\} d\tau + \\
& + \frac{4}{\pi^2} \int_{u_2}^{\infty} F_2(\tau) \{[(n_2 + 1) \mu_7 - 2\nu_6] K_0(\alpha\tau) + (\mu_7 - \nu_6) \alpha \tau K_1(\alpha\tau)\} d\tau + \\
& + \frac{l_4 - 2l_5}{\alpha l_1(l_1 + l_3)} \int_0^a H'(r) \sin(\alpha r) dr + \frac{2l_2 + l_1}{\alpha l_1(l_2 + l_3)} \int_0^a S'(r) \cos(\alpha r) dr \quad (1.26)
\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= 2 \frac{(1 + \nu_1)(m + 1)}{1 + \nu_1 + (3 - \nu_1)m} \frac{1}{3 - \nu_1 + (1 + \nu_2)m} \\
\nu_2 &= 4 \frac{2 - \nu_1 - \nu_2}{1 + \nu_1 + (3 - \nu_2)m} \frac{m}{3 - \nu_1 + (1 + \nu_2)m} \\
\nu_3 &= 2 \frac{(1 + \nu_2)(m + 1)}{1 + \nu_1 + (3 - \nu_2)m} \frac{m}{3 - \nu_1 + (1 + \nu_2)m} \\
\nu_4 &= \frac{1 + \nu_1}{3 - \nu_1 + (1 + \nu_2)m}; \quad \nu_5 = \frac{(1 + \nu_2)m}{3 - \nu_1 + (1 + \nu_2)m} \\
\nu_6 &= \frac{1 + \nu_1}{3 - \nu_1 + (1 + \nu_2)m}; \quad \nu_7 = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1 + (3 - \nu_2)m} \\
m &= \frac{E_1}{E_2}; \quad n_1 = \frac{\nu_1 - 1}{\nu_1 + 1}; \quad n_2 = \frac{\nu_2 - 1}{\nu_2 + 1}
\end{aligned}$$

Подставляя выражения функций  $A_1(z)$ ;  $B_1^*(z)$  из (1.24) и (1.25) в уравнение (1.10), получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
S'(y) - \frac{l_5}{l_2} \frac{1}{\pi} \int_0^a H'(r) \left( \frac{1}{r+y} + \frac{1}{r-y} \right) dr &= \Psi_3(y) \\
H'(y) - \frac{l_5}{l_2} \frac{1}{\pi} \int_0^a S'(r) \left( \frac{1}{r+y} + \frac{1}{y-r} \right) dr &= \varphi_2(y)
\end{aligned} \quad (1.27)$$

где

$$\Psi_1(y) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{a_1} \Psi_1(t) w_1(t, y) dt + \frac{2}{\pi^2} \int_0^{a_1} \Psi_2(\tau) w_2(\tau, y) d\tau +$$

$$+ 2 \frac{l_1(l_2 + l_3)}{l_2} f_3(y) + \frac{2}{\pi^2} \int_{a_1}^{\infty} F_1(t) w_1(t, y) dt + \frac{2}{\pi^2} \int_{a_1}^{\infty} F_2(\tau) w_2(\tau, y) d\tau \quad (1.28)$$

$$\Phi_2(y) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{a_1} \Psi_1(t) w_3(y, t) dt + \frac{2}{\pi^2} \int_0^{a_1} \Psi_2(\tau) w_4(y, \tau) d\tau +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2} \int_{a_1}^{\infty} F_1(t) w_3(y, t) dt + \frac{2}{\pi^2} \int_{a_1}^{\infty} F_2(\tau) w_4(y, \tau) d\tau \quad (1.29)$$

$$w_1(y, t) = \frac{4}{\pi} \left\{ q_1 \left[ \frac{t}{y(y^2 + t^2)} + \frac{y \ln \left( \frac{t}{y} + \sqrt{\frac{t^2}{y^2} + 1} \right)}{(y^2 + t^2)^{3/2}} \right] + \right.$$

$$\left. + q_2 \left[ \frac{t(2y^2 - t^2)}{y(y^2 + t^2)^2} - \frac{3yt \ln \left( \frac{t}{y} + \sqrt{\frac{t^2}{y^2} + 1} \right)}{(y^2 + t^2)^{5/2}} \right] \right\}$$

$$w_2(y, \tau) = \frac{4}{\pi} \left\{ q_3 \left[ \frac{\tau}{y(y^2 + \tau^2)} + \frac{y \ln \left( \frac{\tau}{y} + \sqrt{\frac{\tau^2}{y^2} + 1} \right)}{(y^2 + \tau^2)^{3/2}} \right] + \right.$$

$$\left. + q_4 \left[ \frac{\tau(2y^2 - \tau^2)}{y(y^2 + \tau^2)^2} - \frac{3y\tau \ln \left( \frac{\tau}{y} + \sqrt{\frac{\tau^2}{y^2} + 1} \right)}{(y^2 + \tau^2)^{5/2}} \right] \right\}$$

$$w_3(y, t) = \frac{yl_1(l_2 + l_3)}{l_2} \frac{t^2 - 2y^2}{(y^2 + t^2)^{5/2}} - \frac{q_5 y}{(y^2 + t^2)^{3/2}} - 3y \frac{q_6 t^2}{(y^2 + t^2)^{5/2}}$$

$$w_4(y, \tau) = \frac{yq_7}{(y^2 + \tau^2)^{3/2}} - 3y \frac{q_1 \tau^2}{(y^2 + \tau^2)^{5/2}} \quad (1.30)$$

$$q_1 = \frac{l_1(l_2 + l_3)}{l_2} [(n_1 + 1) \mu_1 + \mu_2]; \quad q_2 = \frac{l_1(l_2 + l_3)}{l_2} \left( \mu_1 + \frac{\mu_2}{2} \right)$$

$$q_3 = \frac{l_1(l_2 + l_3)}{l_2} [(n_2 + 1) \mu_3 + \mu_4]; \quad q_4 = \frac{l_1(l_2 + l_3)}{l_2} \left( \mu_3 + \frac{\mu_4}{2} \right)$$

$$q_5 = \frac{l_1(l_2 + l_3)}{l_2} [(n_1 + 1) (\mu_1 - \mu_4) + \mu_2 + \mu_3]$$

$$q_1 = \frac{l_1(l_2 + l_3)}{l_2} \left( \gamma_1 + \frac{\gamma_2}{2} - \nu_1 + \nu_2 \right) \quad (1.11)$$

$$q_2 = \frac{l_1(l_2 - l_3)}{l_2} \left[ (n_2 - 1) \nu_3 + \nu_4 - \frac{1}{2} (n_2 - 1) \nu_5 \right]$$

Продолжая функции  $H'(r)$  и  $S'(r)$  на интервал  $(-a, 0)$  соответственно нечетным и четным образом, систему (1.27) приведем к виду

$$S'(y) - \frac{l_3}{l_2} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{\infty} \frac{H'(r)}{r-y} dr = \Psi_2(y) \quad (1.31)$$

$$H'(y) + \frac{l_2}{l_2} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{\infty} \frac{S'(r)}{r-y} dr = \Psi_3(y)$$

Умножая второе уравнение системы (1.27) на  $i$  и складывая с первым уравнением, получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\chi(y) + \frac{i}{\pi} \frac{l_3}{l_2} \int_{-a}^{\infty} \frac{\chi(r)}{r-y} dr = \Psi_4(y) \quad (1.32)$$

где введены обозначения

$$S'(y) + iH'(y) = \chi(y); \quad \Psi_2(y) + i\Psi_3(y) = \Psi_4(y) \quad (1.33)$$

Такое уравнение рассматривалось в работах [17, 18].

Используя результаты работы [18], получаем

$$\chi(y) = \frac{\Psi_4(y)}{\mu} - \frac{1}{\mu\pi i (y+a)^{1-m} (y-a)^m} \int_{-a}^{\infty} \frac{(r+a)^{1-m} (r-a)^m}{c^{r-y}} \Psi_4(r) dr + \frac{c}{(y+a)^{1-m} (y-a)^m} \quad (1.34)$$

где

$$m = \frac{1}{2} - i\gamma; \quad k = \frac{(1 + \nu_1) E_2 + (3 - \nu_2) E_1}{(3 - \nu_1) E_2 + (1 + \nu_2) E_1}$$

$$\mu = 1 - \frac{l_3^2}{l_2^2}; \quad \gamma = \frac{\ln k}{2\pi} \quad (1.35)$$

Разделяя действительную и мнимую часть выражения (1.34), найдем

$$H'(y) = \frac{\varphi_2(y)}{\mu} + \frac{1}{\mu\pi\sqrt{y^2-a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y} \left| \Psi_3(r) \cos \gamma \ln \frac{r+ay-a}{r-ay+a} - \right. \\ \left. - \varphi_2(r) \sin \gamma \ln \frac{r+ay-a}{r-ay+a} \right| dr + \frac{c}{\sqrt{y^2-a^2}} \sin \gamma \ln \frac{y+a}{y-a} \quad (1.36)$$

$$S'(y) = \frac{\Psi_4(y)}{\mu} - \frac{1}{\mu\pi\sqrt{y^2-a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y} \left| \varphi_2(r) \cos \gamma \ln \frac{r+ay-a}{r-ay+a} + \right. \\ \left. + \Psi_3(r) \sin \gamma \ln \frac{r+ay-a}{r-ay+a} \right| dr + \frac{c}{\sqrt{y^2-a^2}} \cos \gamma \ln \frac{y+a}{y-a} \quad (1.37)$$

Подставляя значения функций  $A_1(x)$ ,  $B_1(x)$  и  $B_2(x)$  из (1.24), (1.25), (1.26) в (1.16) и (1.17), учитывая при этом (1.36), (1.37), (1.28) и (1.29), для определения  $F_1(z)$  и  $F_2(z)$  получаем систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода, которая после некоторых преобразований [9] примет вид

$$F_1(z) = \Omega_1(z) + \int_{a_1}^a F_1(t) K_1(z, t) dt + \int_{a_1}^a F_2(\tau) K_2(z, \tau) d\tau \quad (1.38)$$

$$F_2(z) = \Omega_2(z) + \int_{a_1}^a F_1(t) K_3(z, t) dt + \int_{a_1}^a F_2(\tau) K_4(z, \tau) d\tau$$

$$\Omega_1(z) = \frac{4}{\pi^2} z \int_0^{a_1} \Psi_1(t) \left| (w_1 - 2w_2) \frac{\ln t/z}{t^2 - z^2} + w_3 \frac{z^4 - t^4 + 4t^2 z^2 \ln t/z}{(t^2 - z^2)^2} \right| dt + \\ + \frac{4}{\pi^2} z \int_0^{a_1} \Psi_2(\tau) \left| m(w_4 + 2w_5) \frac{\ln \tau/z}{\tau^2 - z^2} - m(w_6 - w_7) \frac{\tau^4 - z^4 - 2\tau^2 \ln \tau/z}{(\tau^2 - z^2)^2} \right| d\tau + \\ + \frac{2}{\pi^2} \frac{z}{\mu} \int_0^{a_1} \Psi_1(t) \left\{ \int_0^a w_3(y, t) G_1(y, z) dy + \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{G_1(y, z) dy}{\sqrt{y^2-a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y} \times \right. \\ \left. \times \left| w_1(r, t) \cos \gamma \ln \frac{r+ay-a}{r-ay+a} - w_3(r, t) \sin \gamma \ln \frac{r+ay-a}{r-ay+a} \right| dr + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{2} \int_0^a w_1(t, y) G_2(y, z) dy - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_0^a \frac{G_2(y, z) dy}{\sqrt{y^2-a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y} \left| w_2(r, t) \cos \gamma \ln \frac{r+ay-a}{r-ay+a} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + w_1(r, t) \sin \gamma \ln \left| \frac{r + ay - a}{r - ay + a} \right| dr \Big| dt + \\
& + \frac{2}{\pi^2} \frac{z}{\mu} \int_0^{\gamma_1} \Psi_2(\tau) \left| \int_0^a w_1(y, \tau) G_1(y, z) dy + \right. \\
& + \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{G_1(y, z) dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \left[ w_2(r, \tau) \times \right. \\
& \times \cos \gamma \ln \left| \frac{r + ay - a}{r - ay + a} - w_4(r, \tau) \sin \gamma \ln \left| \frac{r + ay - a}{r - ay + a} \right| dr + \right. \\
& \left. + \frac{\pi}{2} \int_0^a w_2(\tau, y) G_2(y, z) dy - \right. \\
& - \frac{1}{2} \int_0^a \frac{G_2(y, z) dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \left| w_4(r, \tau) \cos \gamma \ln \left| \frac{r + ay - a}{r - ay + a} \right. \right. \\
& \left. \left. + w_2(r, \tau) \sin \gamma \ln \left| \frac{r + ay - a}{r - ay + a} \right| dr \right| d\tau + \\
& + cz \int_0^a \frac{G_1(y, z)}{\sqrt{y^2 - a^2}} \sin \gamma \ln \left| \frac{y + a}{y - a} \right| dy + \frac{\pi}{2} zc \int_0^a \frac{G_2(y, z)}{\sqrt{y^2 - a^2}} \cos \gamma \ln \left| \frac{y + a}{y - a} \right| dy
\end{aligned} \tag{1.39}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_2(z) = & \frac{4}{\pi^2} z \int_0^{\gamma_1} \Psi_1(t) \left[ (w_4 + 2w_6) \frac{\ln t/z}{t^2 - z^2} + (w_6 - w_5) \frac{t^2 - z^2 - 2t^2 \ln t/z}{(t^2 - z^2)^2} \right] dt + \\
& + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\gamma_2} \Psi_2(\tau) \left[ (w_7 + 2w_8) \frac{\ln \tau/z}{\tau^2 - z^2} + w_9 \frac{z^4 - \tau^4 + 4\tau^2 z^2 \ln \tau/z}{(\tau^2 - z^2)^2} \right] d\tau + \\
& + \frac{2}{\pi^2} \frac{z}{\mu} \int_0^{\gamma_1} \Psi_1(t) \left| \int_0^a w_3(y, z) G_3(y, z) dy + \right. \\
& + \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{G_3(y, z) dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \left| w_3(r, t) \times \right. \\
& \times \cos \gamma \ln \left| \frac{r + ay - a}{r - ay + a} - w_5(r, t) \sin \gamma \ln \left| \frac{r + ay - a}{r - ay + a} \right| dr + \right. \\
& \left. + \frac{\pi}{2} \int_0^a w_2(t, y) G_4(y, z) dy - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \int_0^a \frac{G_3(y, z) dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \left[ w_3(r, t) \cos \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} + \right. \\
& \quad \left. + w_1(r, t) \sin \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} \right] dr \Big| dt + \\
& \quad + zc \int_0^a \frac{G_3(y, z)}{\sqrt{y^2 - a^2}} \sin \gamma \ln \frac{y + a}{y - a} dy + \\
& \quad + \frac{\pi}{2} zc \int_0^a \frac{G_4(y, z)}{\sqrt{y^2 - a^2}} \cos \gamma \ln \frac{y + a}{y - a} dy + \\
& \quad + \frac{2}{\pi^2} \frac{z}{\mu} \int_0^a W_2(\tau) \left[ \int_0^a w_4(y, z) G_3(y, z) dy + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{G_3(y, z) dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \left[ w_2(r, \tau) \cos \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - w_4(r, \tau) \sin \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} \right] dr + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\pi}{2} \int_0^a w_2(\tau, y) G_4(y, z) dy \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^a \frac{G_4(y, z) dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \left[ w_4(r, \tau) \cos \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + w_2(r, \tau) \sin \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} \right] dr \right] d\tau \quad (1.40) \\
\mathcal{K}_1(x, t) &= \frac{4}{\pi^2} z \left[ (\omega_1 - 2\omega_2) \frac{\ln t/z}{t^2 - z^2} + \omega_3 \frac{z^4 - t^4 + 4t^2 z^2 \ln t/z}{(t^2 - z^2)^3} \right] + \\
& \quad + \frac{2}{\pi^2} \frac{z}{\mu} \left[ \int_0^a w_3(y, z) G_1(y, z) dy + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{G_3(y, z) dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \left[ w_1(r, t) \cos \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - w_3(r, t) \sin \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} \right] dr + \frac{\pi}{2} \int_0^a w_1(t, y) G_2(y, z) dy - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1.43) \quad & \left\{ w_1(r, t) \sin^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} + w_2(r, t) \cos^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} \right. \\
 & + \frac{1}{2} \int_a^0 \frac{1}{G_2(y, z)} \sqrt{\frac{a^2 - y^2}{\rho y}} \left[ w_3(r, t) \cos^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} + w_4(r, t) \sin^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} \right] dy \\
 & - \frac{1}{2} \int_a^0 \frac{1}{G_1(y, z)} \sqrt{\frac{a^2 - y^2}{\rho y}} \left[ w_5(r, t) \cos^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} + w_6(r, t) \sin^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} \right] dy \\
 & + \frac{1}{2} \int_a^0 \frac{1}{z} \left[ w_7(y, z) \cos^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} + w_8(y, z) \sin^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} \right] dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1.42) \quad & K_2(z, t) = \frac{1}{4} z \left[ m^{(\omega_4 + 2\omega_5)} \ln^2 \frac{r}{z} + m^{(\omega_6 - \omega_5)} \frac{t^2 z^2}{r^2 - z^2 - 2t^2 \ln^2 \frac{r}{z}} \right] \\
 & + w_7(r, z) \sin^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} + w_8(r, z) \cos^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} \\
 & + \frac{1}{2} \int_a^0 \frac{1}{G_2(y, z)} \sqrt{\frac{a^2 - y^2}{\rho y}} \left[ w_9(r, z) \cos^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} + w_{10}(r, z) \sin^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} \right] dy \\
 & - \frac{1}{2} \int_a^0 \frac{1}{G_1(y, z)} \sqrt{\frac{a^2 - y^2}{\rho y}} \left[ w_{11}(r, z) \cos^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} + w_{12}(r, z) \sin^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} \right] dy \\
 & + \frac{1}{2} \int_a^0 \frac{1}{z} \left[ w_{13}(y, z) \cos^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} + w_{14}(y, z) \sin^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} \right] dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1.41) \quad & K_2(z, z) = \frac{1}{4} z \left[ m^{(\omega_4 + 2\omega_5)} \ln^2 \frac{r}{z} + m^{(\omega_6 - \omega_5)} \frac{z^2}{r^2 - z^2 - 2z^2 \ln^2 \frac{r}{z}} \right] \\
 & + w_7(r, z) \sin^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} + w_8(r, z) \cos^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} \\
 & + \frac{1}{2} \int_a^0 \frac{1}{G_2(y, z)} \sqrt{\frac{a^2 - y^2}{\rho y}} \left[ w_9(r, z) \cos^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} + w_{10}(r, z) \sin^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} \right] dy \\
 & - \frac{1}{2} \int_a^0 \frac{1}{G_1(y, z)} \sqrt{\frac{a^2 - y^2}{\rho y}} \left[ w_{11}(r, z) \cos^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} + w_{12}(r, z) \sin^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} \right] dy \\
 & + \frac{1}{2} \int_a^0 \frac{1}{z} \left[ w_{13}(y, z) \cos^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} + w_{14}(y, z) \sin^2 \ln \frac{r+a}{r+ay-a} \right] dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_4(z, \tau) = & \frac{4}{z^2} z \left| (\omega_1 + 2\omega_3) \frac{\ln \tau/z}{z^2 - z^2} + \omega_3 \frac{z^4 - \tau^4 + 4\tau^2 z^2 \ln \tau/z}{(z^2 - z^2)^2} \right| + \\
& + \frac{2}{z^2} \frac{z}{y} \left\{ \int_0^z w_1(y, z) G_3(y, z) dy + \right. \\
& + \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{G_3(y, z) dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \left| w_2(r, \tau) \cos \gamma \ln \frac{r + a y - a}{r - a y + a} + \right. \\
& - w_1(r, \tau) \sin \gamma \ln \frac{r + a y - a}{r - a y + a} \left. \right| dr + \frac{\pi}{2} \int_0^z w_2(y, \tau) G_4(y, z) dy - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^a \frac{G_4(y, z) dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \left| w_1(r, \tau) \cos \gamma \ln \frac{r + a y - a}{r - a y + a} + \right. \\
& \left. + w_2(r, \tau) \sin \gamma \ln \frac{r + a y - a}{r - a y + a} \right| dr \left. \right\} \quad (1.44)
\end{aligned}$$

$$\omega_1 = (n_1 + 1)(\mu_1 - 2\mu_3) + \mu_2 + 2\mu_5; \quad \omega_2 = \mu_1 + \frac{\mu_3}{2} - 2\mu_4 + \mu_7$$

$$\omega_3 = \mu_3 - 2\mu_6; \quad \omega_4 = (n_1 + 1)\mu_1 + \mu_2 - 2(n_1 - 1)\mu_4; \quad \omega_5 = -\mu_1 - \frac{\mu_3}{2}$$

$$\omega_6 = (n_1 - 1)\mu_6; \quad \omega_7 = \mu_2 + 4\mu_6 + (n_2 + 1)(\mu_3 - 2\mu_5)$$

$$\omega_8 = (n_2 + 1)\mu_7 - 2\mu_8; \quad \omega_9 = 2(\mu_4 - \mu_7); \quad \omega_{10} = 2\mu_7 - \mu_4 - \mu_3 - \frac{\mu_2}{2}$$

$$G_1(y, z) = \frac{(2l_1 - l_2)y^2 + (l_1 - l_2)z^2 \ln\left(\frac{z}{y} + \sqrt{\frac{z^2}{y^2} + 1}\right)}{l_1(l_2 + l_3)} +$$

$$+ \frac{z}{(l_2 + l_3)(y^2 + z^2)}$$

$$G_2(y, z) = \frac{(2l_1 + l_2)y^2 + (l_1 + l_2)z^2}{l_2(l_2 + l_3)(y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$G_3(y, z) = \frac{(3l_2 - 2l_1)y^2 + (l_2 - l_1)z^2 \ln\left(\frac{z}{y} + \sqrt{\frac{z^2}{y^2} + 1}\right)}{l_1(l_2 + l_3)} +$$

$$+ \frac{2l_2 - l_1}{l_1(l_2 + l_3)} \frac{z}{z^2 + y^2}; \quad G_4(y, z) = -\frac{(l_1 + l_2)z^2 - (3l_2 - 2l_1)y^2}{l_1(l_2 + l_3)(y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Для решения системы уравнений (1.38) сперва покажем, что

$$\int_{a_1}^x |K_1(z, t)| dt + \int_{a_1}^x |K_2(z, \tau)| d\tau < 1$$

$$\int_{a_1}^x |K_3(z, t)| dt + \int_{a_1}^x |K_4(z, \tau)| d\tau < 1$$
(1.45)

Действительно, каждое ядро  $K_i(z, t)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) имеет вид, аналогичный приведенному в работе [16]. Используя результаты оценок, приведенных в работе [16], доказывается, что неравенства (1.45) имеют место. Очевидно, что функции  $\Omega_1(t)$  и  $\Omega_2(t)$  ограничены сверху и стремятся к нулю, когда  $t \rightarrow \infty$ .

Решая систему интегральных уравнений (1.38) методом последовательных приближений, получим выражения функций  $F_1(t)$  и  $F_2(\tau)$ . Далее, по формулам (1.12), (1.13), (1.28), (1.29), (1.36), (1.38), (1.24), (1.25) и (1.26) последовательно можно определить все искомые функции, и следовательно, и напряжения и перемещения в любой точке составной полуплоскости.

Нормальные напряжения под штампом и перемещения вне штампа на линии  $y = 0$ , выраженные через функции  $F_1(t)$  и  $F_2(\tau)$ , имеют вид

$$\sigma_y^{(2)}(x, 0) = \frac{2}{\pi} \frac{x}{a_1} \frac{F_2(a_1) - \Psi_1(a_1)}{\sqrt{a_1^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi} x \int_x^{a_1} \frac{t \Psi_1'(t) - \Psi_1'(t)}{t^2 \sqrt{t^2 - x^2}} dt +$$

$$+ \frac{2}{\pi} x \int_x^{a_1} \frac{t F_2'(t) - F_2'(t)}{t^2 \sqrt{t^2 - x^2}} dt +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2} \int_0^x \Psi_1'(t) \left\{ \omega_1 \left[ \frac{x \ln \left( \frac{x}{t} + \sqrt{\frac{x^2}{t^2} - 1} \right)}{(x^2 - t^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2 - t^2} \right] + \right.$$

$$+ \omega_2 \left[ \frac{x^2 + 2t^2}{(x^2 - t^2)^2} - \frac{3xt^2 \ln \left( \frac{x}{t} + \sqrt{\frac{x^2}{t^2} - 1} \right)}{(x^2 - t^2)^{5/2}} \right] +$$

$$+ \omega_3 \left[ \frac{(t^2 + 2x^2) \ln \left( \frac{x}{t} + \sqrt{\frac{x^2}{t^2} - 1} \right)}{(x^2 - t^2)^{3/2}} - \frac{3x}{(x^2 - t^2)^2} \right] -$$

$$\left. - \omega_4 \left[ \frac{2x^4 + x^2 t^2}{(x^2 - t^2)^3} - \frac{3xt^4 + 12x^3 t^2}{(x^2 - t^2)^{7/2}} \ln \left( \frac{x}{t} + \sqrt{\frac{x^2}{t^2} - 1} \right) \right] \right\} dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{\pi^2} \int_x^{a_1} \Psi_1(t) \left\{ \omega_1 \left[ \frac{1}{t^2 - x^2} - \frac{x \arccos x/t}{(t^2 - x^2)^{3/2}} \right] + \right. \\
(2.1) \quad & + \omega_2 \left[ \frac{2t^2 + x^2}{(t^2 - x^2)^2} - \frac{3xt^2}{(t^2 - x^2)^{5/2}} \arccos \frac{x}{t} \right] + \\
& + x\omega_3 \left[ \frac{t^2 + 2x^2}{(t^2 - x^2)^{5/2}} \arccos \frac{x}{t} - \frac{3x}{(t^2 - x^2)^2} \right] - \\
& - x\omega_4 \left[ \frac{3t^5 + 13x^2t^3}{(t^2 - x^2)^{7/2}} \arccos \frac{x}{t} - \frac{13t^2x + 2x^3}{(t^2 - x^2)^2} \right] dt + \\
& + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{a_1} \Psi_2(\tau) \left\{ \omega_5 \left[ \frac{x \ln \left( \frac{x}{\tau} + \sqrt{\frac{x^2}{\tau^2} - 1} \right)}{(x^2 - \tau^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2 - \tau^2} \right] - \right. \\
& - \omega_6 \left[ \frac{x^2 + 2\tau^2}{(x^2 - \tau^2)^2} - \frac{3x\tau^2 \ln \left( \frac{x}{\tau} + \sqrt{\frac{x^2}{\tau^2} - 1} \right)}{(x^2 - \tau^2)^{5/2}} \right] + \\
& + x\omega_7 \left[ \frac{\tau^2 + 2x^2}{(x^2 - \tau^2)^{3/2}} \ln \left( \frac{x}{\tau} + \sqrt{\frac{x^2}{\tau^2} - 1} \right) - \frac{3x}{(x^2 - \tau^2)^2} \right] d\tau + \\
& + \frac{4}{\pi^2} \int_{a_1}^{\infty} F_1(t) \left\{ \omega_1 \left[ \frac{1}{t^2 - x^2} - \frac{x \arccos x/t}{(t^2 - x^2)^{3/2}} \right] + \right. \\
& + \omega_2 \left[ \frac{2t^2 + x^2}{(t^2 - x^2)^2} - \frac{3xt^2 \arccos x/t}{(t^2 - x^2)^{5/2}} \right] + \\
& + x\omega_3 \left[ \frac{(t^2 + 2x^2) \arccos x/t}{(t^2 - x^2)^{5/2}} - \frac{3x}{(t^2 - x^2)^2} \right] - \\
& - x\omega_4 \left[ \frac{3t^5 + 13x^2t^3}{(t^2 - x^2)^{7/2}} \arccos \frac{x}{t} - \frac{13xt^2 + 2x^3}{(t^2 - x^2)^2} \right] dt + \\
& + \frac{4}{\pi^2} \int_{a_1}^{\infty} F_2(\tau) \left\{ \omega_5 \left[ \frac{x \ln \left( \frac{x}{\tau} + \sqrt{\frac{x^2}{\tau^2} - 1} \right)}{(x^2 - \tau^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2 - \tau^2} \right] - \right. \\
& - \omega_6 \left[ \frac{x^2 + 2\tau^2}{(x^2 - \tau^2)^2} - \frac{3x\tau^2 \ln \left( \frac{x}{\tau} + \sqrt{\frac{x^2}{\tau^2} - 1} \right)}{(x^2 - \tau^2)^{5/2}} \right] + \\
& + x\omega_7 \left[ \frac{\tau^2 + 2x^2}{(x^2 - \tau^2)^{3/2}} \ln \left( \frac{x}{\tau} + \sqrt{\frac{x^2}{\tau^2} - 1} \right) - \frac{3x}{(x^2 - \tau^2)^2} \right] d\tau +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c \int_0^a \frac{y (z_1 y^2 - z_2 x^2) \sin \gamma \ln \frac{y+a}{y-a}}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{y^2 - a^2}} dy + \\
& + cx \int_0^a \frac{(z_1 x^2 + z_2 y^2) \cos \gamma \ln \frac{y+a}{y-a}}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{y^2 - a^2}} dy + \\
& + \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} \Psi_r(t) \left\{ \int_0^a \frac{y w_3(y, t) (z_1 y^2 - z_2 x^2)}{(x^2 + y^2)^2} dy + \right. \\
& + \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{y (z_1 y^2 - z_2 x^2) dy}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{y^2 - a^2}} \left. \int_a^r \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \right. \\
& \times \left[ w_1(r, t) \cos \gamma \ln \frac{r + a y - a}{r - a y + a} - w_2(r, t) \sin \gamma \ln \frac{r + a y - a}{r - a y + a} \right] dr + \\
& + x \int_0^a \frac{w_1(t, y) (z_2 x^2 + z_1 y^2) dy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{x}{\pi} \int_0^a \frac{(z_2 x^2 + z_1 y^2) dy}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{y^2 - a^2}} \int_a^r \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \times \\
& \times \left[ w_3(r, t) \cos \gamma \ln \frac{r + a y - a}{r - a y + a} + w_1(r, t) \sin \gamma \ln \frac{r + a y - a}{r - a y + a} \right] dr \Big\} dt + \\
& + \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} \Psi_z(\tau) \left\{ \int_0^a \frac{y w_4(y, \tau) (z_1 y^2 - z_2 x^2)}{(x^2 + y^2)^2} dy + \right. \\
& + \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{y (z_1 y^2 - z_2 x^2) dy}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{y^2 - a^2}} \left. \int_a^r \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \right. \\
& \times \left[ w_2(r, \tau) \cos \gamma \ln \frac{r + a y - a}{r - a y + a} - w_1(r, \tau) \sin \gamma \ln \frac{r + a y - a}{r - a y + a} \right] dr + \\
& + x \int_0^a \frac{(z_2 x^2 + z_1 y^2) w_2(\tau, y)}{(x^2 + y^2)^2} dy - \frac{x}{\pi} \int_0^a \frac{(z_2 x^2 + z_1 y^2) dy}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{y^2 - a^2}} \times \\
& \times \int_a^r \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \left[ w_1(r, \tau) \cos \gamma \ln \frac{r + a y - a}{r - a y + a} + \right. \\
& + w_2(r, \tau) \sin \gamma \ln \frac{r + a y - a}{r - a y + a} \left. \right] dr \Big\} d\tau + \\
& + \frac{2}{\pi^2} \int_{a_1}^{\infty} F_1(t) \left\{ \int_0^a \frac{y w_5(y, t) (z_1 y^2 - z_2 x^2)}{(x^2 + y^2)^2} dy + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{y(a_3 y^2 - a_2 x^2) dy}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{y^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \left\{ w_1(r, t) \cos \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} \right. \\
& \quad \left. - w_2(r, t) \sin \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} \right\} dr + x \int_0^a \frac{w_3(t, y)(a_2 x^2 + a_4 y^2)}{(x^2 + y^2)^2} dy - \\
& - \frac{x}{\pi} \int_0^a \frac{(a_3 x^2 + a_4 y^2) dy}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{y^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \left\{ w_3(r, t) \cos \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} \right. \\
& \quad \left. + w_4(r, t) \sin \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} \right\} dr + \\
& + \frac{2}{\pi^2} \int_0^a F_2(\tau) \left\{ \int_0^a \frac{y w_4(y, \tau)(a_1 y^2 - a_2 x^2)}{(x^2 + y^2)^2} dy + \right. \\
& + \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{y(a_1 y^2 - a_2 x^2)}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{y^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \times \\
& \times \left\{ w_2(r, \tau) \cos \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} - w_4(r, \tau) \sin \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} \right\} dr + \\
& + x \int_0^a \frac{a_2 x^2 + a_4 y^2}{(x^2 + y^2)^2} w_2(\tau, y) dy - \\
& - \frac{x}{\pi} \int_0^a \frac{(a_3 x^2 + a_4 y^2) dy}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{y^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \left\{ w_4(r, \tau) \cos \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} \right. \\
& \quad \left. + w_2(r, \tau) \sin \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} \right\} dr \Big\} d\tau, \quad 0 < x < a_1, \quad (1.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y^{(0)}(x, 0) & = \frac{2}{\pi} \frac{x}{a_2} \frac{F_2(a_2) - \Psi_2(a_2)}{\sqrt{a_2^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi} x \int_x^{a_2} \frac{\Psi_2(\tau) - \Psi_3(\tau)}{\tau^2 \sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau + \\
& + \frac{2}{\pi} x \int_{a_1}^{a_2} \frac{F_2(\tau) - F_3(\tau)}{\tau^2 \sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau + \\
& + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{a_1} \Psi_1(t) \left\{ w_4 \left[ \frac{x \ln \left( \frac{x}{t} + \sqrt{\frac{x^2}{t^2} - 1} \right)}{(x^2 - t^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2 - t^2} \right] - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\omega_3 \left[ \frac{x^2 + 2t^2}{(x^2 - t^2)^2} - \frac{3xt^2 \ln \left( \frac{x}{t} + \sqrt{\frac{x^2}{t^2} - 1} \right)}{(x^2 - t^2)^{5/2}} \right] dt + \\
& + \frac{4}{\pi^2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} F_1(t) \left\{ \omega_4 \left[ \frac{x \ln \left( \frac{x}{t} + \sqrt{\frac{x^2}{t^2} - 1} \right)}{(x^2 - t^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2 - t^2} \right] - \right. \\
& - \omega_5 \left[ \frac{x^2 + 2t^2}{(x^2 - t^2)^2} - \frac{3xt^2 \ln \left( \frac{x}{t} + \sqrt{\frac{x^2}{t^2} - 1} \right)}{(x^2 - t^2)^{5/2}} \right] \left. \right\} dt + \\
& + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\omega_2} \Psi_2(\tau) \left\{ \omega_6 \left[ \frac{x \ln \left( \frac{x}{\tau} + \sqrt{\frac{x^2}{\tau^2} - 1} \right)}{(x^2 - \tau^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2 - \tau^2} \right] + \right. \\
& + x(\omega_8 + \omega_9) \left[ \frac{\tau^2 + 2x^2}{(x^2 - \tau^2)^{3/2}} \ln \left( \frac{x}{\tau} + \sqrt{\frac{x^2}{\tau^2} - 1} \right) - \frac{3x}{(x^2 - \tau^2)^2} \right] + \\
& + \frac{\omega_9}{2} \left[ \frac{2x^4 + 13x^2\tau^2}{(x^2 - \tau^2)^2} - x \frac{3\tau^4 + 12x^2\tau^2}{(x^2 - \tau^2)^{3/2}} \ln \left( \frac{x}{\tau} + \sqrt{\frac{x^2}{\tau^2} - 1} \right) \right] + \\
& + \omega_{10} \left[ \frac{x^2 + 2\tau^2}{(x^2 - \tau^2)^2} - \frac{3x\tau^2 \ln \left( \frac{x}{\tau} + \sqrt{\frac{x^2}{\tau^2} - 1} \right)}{(x^2 - \tau^2)^{5/2}} \right] \left. \right\} d\tau + \\
& + \frac{4}{\pi^2} \int_{\omega_2}^{\omega_3} \Psi_2(\tau) \left\{ \omega_7 \left[ \frac{1}{\tau^2 - x^2} - \frac{x \arccos x/\tau}{(\tau^2 - x^2)^{3/2}} \right] + \right. \\
& + x(\omega_8 - \omega_9) \left[ \frac{(\tau^2 + 2x^2) \arccos x/\tau}{(\tau^2 - x^2)^{5/2}} - \frac{3x}{(\tau^2 - x^2)^2} \right] + \\
& + \frac{\omega_9}{2} x \left[ \frac{3\tau^3 + 13x^2\tau^2}{(\tau^2 - x^2)^{3/2}} \arccos \frac{x}{\tau} - \frac{13x\tau^2 + 2\tau^3}{(\tau^2 - x^2)^2} \right] + \\
& + \omega_{10} \left[ \frac{2\tau^2 + x^2}{(\tau^2 - x^2)^2} - \frac{3x\tau^2 \arccos x/\tau}{(\tau^2 - x^2)^{5/2}} \right] \left. \right\} d\tau + \\
& + \frac{4}{\pi^2} \int_{\omega_3}^{\omega_4} F_2(\tau) \left\{ \omega_7 \left[ \frac{1}{\tau^2 - x^2} - \frac{x \arccos x/\tau}{(\tau^2 - x^2)^{3/2}} \right] + \right. \\
& + x(\omega_8 + \omega_9) \left[ \frac{(\tau^2 + 2x^2) \arccos x/\tau}{(\tau^2 - x^2)^{5/2}} - \frac{3x}{(\tau^2 - x^2)^2} \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\omega_2}{2} x \left[ \frac{3x^2 + 13x^2 z^2}{(z^2 - x^2)^2} \arccos \frac{x}{z} - \frac{13x^2 + 2z^2}{(z^2 - x^2)^2} \right] + \\
& \quad + \omega_{10} \left[ \frac{2z^2 + x^2}{(z^2 - x^2)^2} - \frac{3x^2 \arccos x/z}{(z^2 - x^2)^{3/2}} \right] dz + \\
& + c \int_0^a \frac{y(a_3 y^2 - a_2 x^2) \sin \gamma \ln \frac{y+a}{y-a}}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{y^2 - a^2}} dy - cx \int_0^a \frac{(a_3 x^2 + a_2 y^2) \cos \gamma \ln \frac{y+a}{y-a}}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{y^2 - a^2}} dy + \\
& \quad + \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} \Psi_1(t) \left\{ \int_0^a \frac{y(a_3 y^2 - a_2 x^2)}{(x^2 + y^2)^2} w_1(y, t) dy - \right. \\
& \quad \quad \left. - x \int_0^a \frac{a_3 x^2 + a_2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} w_1(t, y) dy + \right. \\
& + \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{y(a_3 y^2 - a_2 x^2) dy}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{y^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \left| w_1(r, t) \cos \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} - \right. \\
& \quad \quad \left. - w_2(r, t) \sin \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} \right| dr + \\
& + \frac{x}{\pi} \int_0^a \frac{(a_3 x^2 + a_2 y^2) dy}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{y^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \left| w_2(r, t) \sin \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} + \right. \\
& \quad \quad \left. + w_1(r, t) \sin \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} \right| dr \Big| dt + \\
& \quad + \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} \Psi_2(\tau) \left\{ \int_0^a \frac{y(a_3 y^2 - a_2 x^2)}{(x^2 + y^2)^2} w_1(y, \tau) dy - \right. \\
& \quad \quad \left. - x \int_0^a \frac{a_3 x^2 + a_2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} w_1(y, \tau) dy + \right. \\
& + \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{y(a_3 y^2 - a_2 x^2) dy}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{y^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \left| w_3(r, \tau) \cos \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} - \right. \\
& \quad \quad \left. - w_4(r, \tau) \sin \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} \right| dr + \\
& + \frac{x}{\pi} \int_0^a \frac{(a_3 x^2 + a_2 y^2) dy}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{y^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \left| w_4(r, \tau) \cos \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} + \right.
\end{aligned}$$



$$\alpha_1 = \frac{2l_1 - l_3}{\mu l_1 (l_2 + l_3)}; \quad \alpha_2 = \frac{l_3}{\mu l_1 (l_2 + l_3)}; \quad \alpha_3 = \frac{3l_1 + l_2}{\mu l_1 (l_2 + l_3)}$$

$$\alpha_4 = \frac{l_1 + l_2}{\mu l_1 (l_2 + l_3)}; \quad \alpha_5 = \frac{3l_3 - 2l_1}{\mu l_1 (l_2 + l_3)}; \quad \alpha_6 = \frac{5l_2 + 3l_1}{\mu l_1 (l_2 + l_3)}$$

Напряжения  $\sigma_x^{(1)}(0, y) = \sigma_x^{(2)}(0, y)$  вне разреза на линии  $x = 0$  выражаются через функции  $F_1(t)$  и  $F_2(\tau)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)}(0, y) = \sigma_x^{(2)}(0, y) = & -\frac{\pi}{2} \frac{l_2 c}{l_1 (l_2 + l_3)} \frac{\cos \gamma \ln \frac{y+a}{y-a}}{\sqrt{y^2 - a^2}} + \\ & + \frac{l_2 c}{l_1 (l_2 + l_3)} \int_0^a \frac{r \sin \gamma \ln \frac{r+a}{r-a}}{\sqrt{r^2 - a^2} (r^2 - y^2)} dr + \\ & + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\alpha_1} W_1(t) \left\{ \delta_1 \left[ \frac{t}{y(y^2 + t^2)} + \frac{y \ln \left( \frac{t}{y} + \sqrt{\frac{t^2}{y^2} + 1} \right)}{(y^2 + t^2)^{3/2}} \right] + \right. \\ & \left. + \delta_2 \left[ \frac{t(2y^2 - t^2)}{y(y^2 + t^2)^2} - \frac{3yt^2 \ln \left( \frac{t}{y} + \sqrt{\frac{t^2}{y^2} + 1} \right)}{(y^2 + t^2)^{5/2}} \right] \right\} dt + \\ & + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\alpha_2} W_2(\tau) \left\{ \delta_3 \left[ \frac{\tau}{y(y^2 + \tau^2)} + \frac{y \ln \left( \frac{\tau}{y} + \sqrt{\frac{\tau^2}{y^2} + 1} \right)}{(y^2 + \tau^2)^{3/2}} \right] + \right. \\ & \left. + \delta_4 \left[ \frac{\tau(2y^2 - \tau^2)}{y(y^2 + \tau^2)^2} - \frac{3y\tau^2 \ln \left( \frac{\tau}{y} + \sqrt{\frac{\tau^2}{y^2} + 1} \right)}{(y^2 + \tau^2)^{5/2}} \right] \right\} d\tau + \\ & + \frac{4}{\pi^2} \int_{\alpha_1}^{\infty} F_1(t) \left\{ \delta_1 \left[ \frac{t}{y(y^2 + t^2)} + \frac{y \ln \left( \frac{t}{y} + \sqrt{\frac{t^2}{y^2} + 1} \right)}{(y^2 + t^2)^{3/2}} \right] + \right. \\ & \left. + \delta_2 \left[ \frac{t(2y^2 - t^2)}{y(y^2 + t^2)^2} - \frac{3yt^2 \ln \left( \frac{t}{y} + \sqrt{\frac{t^2}{y^2} + 1} \right)}{(y^2 + t^2)^{5/2}} \right] \right\} dt + \\ & + \frac{4}{\pi^2} \int_{\alpha_2}^{\infty} F_2(\tau) \left\{ \delta_3 \left[ \frac{\tau}{y(y^2 + \tau^2)} + \frac{y \ln \left( \frac{\tau}{y} + \sqrt{\frac{\tau^2}{y^2} + 1} \right)}{(y^2 + \tau^2)^{3/2}} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \hat{\delta}_4 \left[ \frac{\tau(2y^2 - \tau^2)}{y(y^2 + \tau^2)^2} - \frac{3y\tau^2}{(y^2 + \tau^2)^{5/2}} \ln \left( \frac{\tau}{y} + \sqrt{\frac{\tau^2}{y^2} + 1} \right) \right] dz + \\
& + \frac{2}{\pi^2} \int_0^{a_1} \Psi_1(t) \left\{ \frac{h_1}{\sqrt{y^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \left[ w_3(r, t) \cos \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + w_1(r, t) \sin \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} \right] dr - \right. \\
& \quad - \tau h_1 w_1(t, y) + a_2 \int_0^a \frac{r w_1(r, t)}{r^2 - y^2} dr + \frac{a_2}{\pi} \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - a^2} (r^2 - y^2)} \times \\
& \quad \times \int_{-a}^a \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u - r} \left[ w_1(t, u) \cos \gamma \ln \frac{u + ar - a}{u - ar + a} - \right. \\
& \quad \left. - w_2(u, t) \sin \gamma \ln \frac{u + ar - a}{u - ar + a} \right] du \Big\} dt + \\
& + \frac{2}{\pi^2} \int_0^{a_1} \Psi_2(\tau) \left\{ \frac{h_1}{\sqrt{y^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \left[ w_1(r, \tau) \cos \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + w_2(r, \tau) \sin \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} \right] dr - \right. \\
& \quad - \tau h_1 w_2(\tau, y) + a_2 \int_0^a \frac{r w_1(r, \tau)}{r^2 - y^2} dr + \frac{a_2}{\pi} \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - a^2} (r^2 - y^2)} \times \\
& \quad \times \int_{-a}^a \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u - r} \left[ w_1(u, t) \cos \gamma \ln \frac{u + ar - a}{u - ar + a} - \right. \\
& \quad \left. - w_2(u, \tau) \sin \gamma \ln \frac{u + ar - a}{u - ar + a} \right] du \Big\} d\tau + \\
& + \frac{2}{\pi^2} \int_{a_1}^{\bar{a}} F_1(t) \left\{ \frac{h_1}{\sqrt{y^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \left[ w_3(r, t) \cos \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + w_1(r, t) \sin \gamma \ln \frac{r + ay - a}{r - ay + a} \right] dr - \tau h_1 w_1(t, y) + \right. \\
& \quad \left. + a_2 \int_0^a \frac{r w_3(r, t)}{r^2 - y^2} dr + \frac{a_2}{\pi} \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - a^2} (r^2 - y^2)} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{-a}^a \frac{\sqrt{u^2 - r^2}}{u - r} \left[ w_1(t, u) \cos \gamma \ln \frac{r + a y - a}{r - a y + a} - \right. \\
& \quad \left. - w_3(u, t) \sin \gamma \ln \frac{u + a r - a}{u - a r + a} \right] dr \Big| dt + \\
& \quad + \frac{2}{\pi^2} \int_{a_1}^a F_2(\tau) \left\{ \frac{h_1}{\sqrt{y^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r - y} \times \right. \\
& \times \left[ w_4(r, \tau) \cos \gamma \ln \frac{r + a y - a}{r - a y + a} + w_2(r, \tau) \sin \gamma \ln \frac{r + a y - a}{r - a y + a} \right] dr - \\
& \quad - \pi h_1 w_2(\tau, y) + a_2 \int_0^a \frac{r w_4(r, \tau)}{r^2 - y^2} dr + \frac{a_2}{\tau} \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - a^2} (r^2 - y^2)} \times \\
& \quad \times \int_{-a}^a \frac{\sqrt{u^2 - r^2}}{u - r} \left[ w_3(u, \tau) \cos \gamma \ln \frac{u + a r - a}{u - a r + a} - \right. \\
& \quad \left. - w_4(u, \tau) \sin \gamma \ln \frac{u + a r - a}{u - a r + a} \right] du \Big| d\tau, \quad a < y < \infty \quad (1.49)
\end{aligned}$$

$$\delta_1 = (n_1 + 1) \mu_1 + \mu_2; \quad \delta_2 = \mu_1 + \frac{\mu_2}{2}; \quad \delta_3 = (n_2 + 1) \mu_3 + \mu_2$$

$$\delta_4 = \mu_3 + \frac{\mu_2}{2}; \quad h_1 = \frac{l_2}{2\mu_1(l_2 + l_3)}$$

Формулы (1.46), (1.47) и (1.48) определяют напряжения и перемещения для заданных величин контакта  $a_1, a_2$ .

Если эти величины не заданы, то их можно определить из условия непрерывности нормальных напряжений, что выражается трансцендентными уравнениями:

$$\Psi_1(a_1) - F_1(a_1) = 0, \quad \Psi_2(a_2) - F_2(a_2) = 0 \quad (1.50)$$

В частном случае, когда  $E_1 = E_2$ ;  $\nu_1 = \nu_2$ ;  $a_1 = a_2$  и  $a \rightarrow 0$ , получим решение задачи о вдавливании жесткого штампа симметричного очертания на упругую однородную полуплоскость, совпадающее с решением, полученным М. А. Садовским [14].

Когда  $a \rightarrow 0$  и материалы квадрантов различные, то получается решение контактной задачи о давлении жесткого штампа с основанием произвольной формы, приложенного на части горизонтальной границы упругой составной полуплоскости [16].

Институт механики АН Армянской ССР  
Ереванский политехнический институт  
им. К. Маркса

Поступила 4 IV 1980

ՌԻՂԱԶՁԻԳ ՎԵՐՉԱՎՈՐ ՃԵՂՔՈՎ ԱՌՈՋԳԱԿԱՆ ԲԱՎԱԿՐՑԱԿ  
ԿԻՍԱԼԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՑԻՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ս. մ. վ. ո. վ. ո. մ

Դիտարկվում է հորիզոնական եզրից սկսած ուղղաձիգ վերջավոր երկաթային ճեղք ունեցող առաձգական բազալիտայ կիսահարթության ոչ սիմետրիկ կոնտակտային խնդիրը: Կիսահարթությունը բազալիտային է երկու համասեռ և իզոտրոպ բառորդ հարթություններից, տարբեր առաձգական հատկություններով, որոնց նույնների բաժանման դժի երկայնքով տարված է դեպի կիսահարթության եզրին: Նյութերի բաժանման դժի երկայնքով տարված է դեպի կիսահարթության եզրը դուրս եկող վերջավոր երկարությամբ ճեղքը: Կիսահարթության հորիզոնական եզրի մի մասի վրա կիրառված է կամայական հիմքով կոշտ դրոշմը, ախպես որ դրոշմը գտնվում է երկու նյութերի վրա միասնական և նրա զիրքը ճեղքի նկատմամբ սիմետրիկ չէ:

Ենթադրվում է, որ շփումը դրոշմի և կիսահարթության միջև բացակայում է: Պարզության համար ընդունված է, որ կիսահարթության եզրը՝ դրոշմից դուրս ազատ է լարումներից: Վերջավոր ճեղքի եզրում կիրառված է նորմալ ճնշում: Նյութերի բաժանման դժի վրա ճեղքից դուրս տրված են լրիվ կոնտակտի պայմանները:

Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեյի մեթոդով: Խնտեղրման պորժակիցների որոշումը հանդեպ է շոքս «պոլյգոն» ինտեգրալ հավասարումներից բազալիտային սիստեմի լուծմանը, բնի որում երկու «պոլյգոն» ինտեգրալ հավասարումների լուծումը բերվել է մի սինդրոյար ինտեգրալ հավասարման լուծմանը: Այնուհետև օգտագործելով մնացած երկու օգոլյգոն ինտեգրալ հավասարումների և սինդրոյար ինտեգրալ հավասարման լուծումները, խնդրի լուծումը բերվել է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի երկու ինտեգրալ հավասարումներից բազալիտային սիստեմի լուծմանը: Ստացված են կոնտակտի շփմանը՝ որոշող արանսցենդենսալ հավասարումներ: Մասնավոր դեպքում, երբ դրոշմը սիմետրիկ է ճեղքի նկատմամբ և ճեղքի երկարությունը ձգտում է 0-ի, ստացվում է բազալիտային կիսահարթության եզրի վրա կոշտ դրոշմի ճնշման խնդիրը [16]:

ON CONTACT PROBLEM FOR AN ELASTIC COMPOUND  
SEMI-PLANE WITH A VERTICAL FINITE CRACK

H. F. MINASIAN, V. S. TONROYAN

S u m m a r y

The contact problem in the plane theory of elasticity for an elastic compound semi-plane with a crack of finite length along division line of the materials, reaching the boundary is considered.

The semi-plane consists of two homogeneous and isotropic quadrants with different elastic characteristics, whose division line of materials is perpendicular to the boundary of the semi-plane. On the boundary of the semi-plane the rigid punch with a smooth base is pressed in such a way

that the punch is located asymmetrically on the two materials simultaneously. It is assumed that friction between the punch and semi-plane is absent. For simplicity it is also assumed that the boundary of semi-plane outside of the punch is free from outer forces. In the finite crack whose length may be determined, only normal pressure operates. On the division line of the materials, outside of crack, full contact conditions are given. After the problem is solved under the above assumptions the peculiarities of stresses are removed and the equations to define the crack depth and the dimensions of the contact zones are obtained.

The problem is solved by the Fourier method. The determination of integration coefficients is reduced to the solution of a system of four dual integral equations. The solution of the latter is reduced to the system of Fredholm's integral equations of the second kind.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. Изв. АН СССР, ОТИ, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
2. Попов Г. Я. Плоская контактная задача для линейно-деформируемого основания при наличии сил сцепления. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
3. Вилков И. М. Плоская контактная задача для двухслойного основания при действии симметричной нагрузки на жесткий штамп. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 4.
4. Приварников А. К., Шевляков Ю. А. Контактная задача для многослойного основания. Прикл. мех., 1962, т. 8, вып. 5.
5. Ильмин В. М., Приварников А. К. Действие системы штампов на упругое многослойное основание. Прикл. мех., 1971, т. 7, вып. 6.
6. Никишин В. С., Шапиро Г. С. Задачи теории упругости для многослойных сред. М., Изд-во «Наука», 1973.
7. Никишин В. С., Шапиро Г. С. О контактных задачах для упругих многослойных сред. Труды симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа, том 1. Тбилиси, Изд-во «Мецниереба», 1973.
8. Klaus W. G. Fracture mechanics and the time dependent strength of Adhesive Joints. J. Composite materials, 1971, vol. 5, April, p.p. 176-192.
9. Токоян В. С. О решении симметричной контактной задачи для полуплоскости с включением. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1968, т. 21, № 3.
10. Ашбаух Н. Е. Развитие конечной трещины, перпендикулярной поверхности раздела двух материалов. Прикл. мех., 1973, т. 10, № 2, изд-во «Мир».
11. Ашбаух Н. Е. Напряжения в слоистых композитах, содержащих разорванный слой. Прикл. мех., 1973, т. 10, № 2, изд-во «Мир».
12. Vogt D. B. The plane elastostatic solution for a symmetrically loaded crack in a strip composite. Int. J. Engng. Sci., 1979, vol. 11, 9.
13. Болди Д. Б. Действие касательных и нормальных нагрузок на прямоугольные упругие клянья, выполненные из разных материалов и соединенные по границам. Прикл. мех., 1973, т. 10, № 2, изд-во «Мир».
14. Sadowski M. A. Zweidimensionale probleme der elastizitätstheorie. Ztschr. für angew. Math. und Mech., 1928, Bd. 8.
15. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., изд. «Наука», 1966.
16. Токоян В. С., Минасян А. Ф. Об одной контактной задаче для упругой составной полуплоскости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1979, т. 32, № 3.
17. Гахов Ф. Д. Красивые задачи. М., Изд-во физ.-мат. лит., 1963.
18. Михлин С. Г. Интегральные уравнения. М.—Л., Гостехиздат, 1949.

С. Г. АВАГЯН

## НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ПРОНИКАНИЯ ТЕЛ В ВЕСОМУЮ ЖИДКОСТЬ

Рассматриваются задачи о проникании тонкого конуса в весомую сжимаемую жидкость. Вначале решается задача для жидкости со свободной поверхностью. Решена также задача проникания в жидкость, ограниченную упругой мембраной.

### § 1. Проникание тонкого конуса в сжимаемую весомую жидкость

Рассматривается задача проникания тонких тел в сжимаемую весомую жидкость. При проникании конуса возникает осесимметричное течение, поэтому потенциал скорости  $\varphi = \varphi(r, z, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

Начало координат выбрано в точке пересечения вершины конуса с поверхностью жидкости, ось  $r$  направлена по поверхности жидкости, ось  $z$  направлена вниз перпендикулярно к поверхности жидкости. Начальные условия:

$$\varphi(z, r, 0) = \frac{\partial \varphi(z, r, 0)}{\partial t} = 0 \quad (1.2)$$

Граничное условие на теле будет

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = H(t) \beta \quad (1.3)$$

где  $H(t)$  — закон проникания конуса,  $\beta$  — угол полураствора конуса. Так как движение потенциальное, то давление внутри жидкости вычисляется из интеграла Коши—Лагранжа, откуда получится

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (1.4)$$

Решение задачи ищем методом источников в сочетании с интегральными преобразованиями. В силу линейности задачи можно полагать

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \quad (1.5)$$

где  $\varphi_0$  соответствует решению задачи о движении тела в безграничной

среде  $-\infty < z' < \infty$ , а  $\varphi_1$  — отражению волн от свободной поверхности. Функцию  $\varphi_0$  ищем в виде потенциала запаздывающих источников

$$\varphi_0 = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\bar{t}} \frac{q(z_1, t')}{R} dz_1 \quad (1.6)$$

где  $\bar{t} = t - \frac{R}{a}$  — запаздывающее время,  $R = \sqrt{(z_1 - z)^2 + r^2}$ ,  $a$  — скорость звука в невозмущенной жидкости. Можно показать [1], что при  $r \rightarrow 0$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=0} = \frac{1}{2\pi} \frac{q(z, t)}{r} = 0(q) \quad (1.7)$$

Из (1.3) и (1.7) получим, что

$$q(z_1, t) = 2\pi\beta^2 H(H - z_1) \quad (1.8)$$

Удобно рассматривать решение для отдельных источников  $\varphi^0$  и

$\bar{\varphi} = \int_0^{\bar{t}} \varphi^0 dz_1$ . Изображение для  $\bar{\varphi}_0^0$  будет

$$\bar{\varphi}_0^0 = -\frac{q(z_1, t)}{4\pi R} e^{-s\frac{R}{a}}$$

В силу того, что

$$\frac{e^{-s\frac{R}{a}}}{R} = \int_0^{\infty} \frac{ke^{-|z_1-z|\sqrt{k^2+\frac{s^2}{a^2}}}}{\sqrt{k^2+\frac{s^2}{a^2}}} J_0(kr) dk, \text{ то}$$

$$\bar{\varphi}_0^0 = -\frac{\beta^2 H(t)[H(t) - z_1]}{2} \int_0^{\infty} \frac{ke^{-|z_1-z|\sqrt{k^2+\frac{s^2}{a^2}}}}{\sqrt{k^2+\frac{s^2}{a^2}}} J_0(kr) dk \quad (1.9)$$

Изображение отраженных волн  $\bar{\varphi}_1^0$  ищем в виде

$$\bar{\varphi}_1^0 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-|z_1+z|\sqrt{k^2+\frac{s^2}{a^2}}}}{\sqrt{k^2+\frac{s^2}{a^2}}} kA J_0(kr) dk \quad (1.10)$$

Применяя к (1.4) преобразование Лапласа, можно получить

$$s^2 \bar{\varphi} - g \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} = 0, \quad z = 0 \quad (1.11)$$

Так как  $\bar{\varphi}^0 = \bar{\varphi}_0^0 + \bar{\varphi}_1^0$ , имеем

$$A = \frac{\beta^2 H(t) [H(t) - z_1]}{2} \frac{\left( s^2 - g \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}} \right)}{s^2 + g \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}}}$$

Поэтому для  $\bar{\Phi}_1$  получим

$$\bar{\Phi}_1^0 = \frac{\beta^2 H(t) [H(t) - z_1]}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-(z_1-z) \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}}} k \left( s^2 - g \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}} \right)}{\sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}} \left( s^2 + g \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}} \right)} \times J_0(kr) dk \quad (1.12)$$

Для простоты принимаем, что проникание происходит с постоянной скоростью  $V_0$ . Для нахождения  $\bar{\Phi}_1^0$  разложим выражение

$$\frac{s^2 - g \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}}}{s^2 + g \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}}}$$

в ряд по степеням  $\frac{g \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}}}{s^2}$ . Тогда из (1.12) имеем

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_1^0 &= \frac{\beta^2 V_0^2}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{z_1}{V_0} k} e^{-(z_1+z) \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}}} k e}{s^2 \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}}} J_0(kr) dk + \\ &+ \frac{\beta^2 V_0^2}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{z_1}{V_0} k} e^{-(z_1+z) \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}}} k e}{s^2 \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}}} J_0(kr) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{g}{s^2} \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}} \right)^n dk \end{aligned}$$

Обозначая значение  $\bar{\Phi}_1^0$  при  $g = 0$  через  $\bar{\Phi}_1^0$ , получим

$$\bar{\Phi}_1^0 = \bar{\Phi}_1^0 + \frac{2g}{s^2} \frac{\partial \bar{\Phi}_1^0}{\partial z} + \frac{2g^2}{s^4} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_1^0}{\partial z^2} + \dots$$

где

$$\bar{\Phi}_1^0 = \frac{\beta^2 V_0^2}{2} \frac{e^{-\left(\frac{z_1}{V_0} + \frac{R_0}{a}\right) k}}{s^2 R_0} \quad R_0 = V(z_1 + z)^2 + r^2$$

Отсюда

$$\bar{\Phi}_1^0 = \frac{\beta^2 V_0^2}{2} \left( t - \frac{z_1}{V_0} - \frac{R_0}{a} \right) \frac{1}{(z_1 + z)^2 + r^2}$$

Для нахождения  $\bar{\Phi}_1^0$  воспользуемся теоремой о свертке. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_1^0 = & \Phi_1^0 + 2g \int_0^{t - \frac{z_1}{V_0} - \frac{R_0}{a}} t' \left( t - t' - \frac{z_1}{V_0} \right) \frac{\beta^2 V_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R_0} \right) dt' + \\ & + \frac{2g^2}{3!} \int_0^{t - \frac{z_1}{V_0} - \frac{R_0}{a}} t'^3 \left( t - t' - \frac{z_1}{V_0} \right) \frac{\beta^2 V_0^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{R_0} \right) dt' + \dots \end{aligned}$$

Отсюда найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1^0}{\partial t} = & \frac{\beta^2 V_0^2}{2} \frac{1}{R_0} + \frac{\beta^2 V_0^2}{2} g \left( t - \frac{z_1}{V_0} - \frac{R_0}{a} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R_0} \right) + \\ & + \frac{g^2 \beta^2 V_0^2}{4!} \left( t - \frac{z_1}{V_0} - \frac{R_0}{a} \right)^4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{R_0} \right) + \frac{g^3 \beta^2 V_0^2}{6!} \left( t - \frac{z_1}{V_0} - \frac{R_0}{a} \right)^6 \frac{\partial^3}{\partial z^3} \left( \frac{1}{R_0} \right) + \dots \end{aligned}$$

А. Сначала рассмотрим дозвуковое движение  $V_0 < a$ . Имеем

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \int_0^{\gamma} \frac{\partial \varphi_1^0}{\partial t} dz_1, \text{ где } \gamma = V_0 \frac{at - z}{a + V_0}$$

— предел интегрирования при  $r \approx 0$ , найденный подобно [4]. Тогда получим на теле

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = & \frac{\beta^2 V_0^2}{2} \ln \frac{\gamma + z + \sqrt{(\gamma + z)^2 + r^2}}{z + \sqrt{z^2 + r^2}} + \\ & + \frac{g^2 \beta^2 V_0^2}{2} \int_0^{\gamma} \left( t - \frac{z_1}{V_0} - \frac{R_0}{a} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R_0} \right) dz_1 + \\ & + \frac{g^3 \beta^2 V_0^2}{24} \int_0^{\gamma} \left( t - \frac{z_1}{V_0} - \frac{R_0}{a} \right)^4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{R_0} \right) dz_1 + \dots \end{aligned} \quad (1.13)$$

Для дальнейшего вычисления оставим только два члена. Из (1.8) найдем  $\varphi_0^0$ , а затем

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = \int_0^{\alpha} \frac{\partial \varphi_0^0}{\partial t} dz_1 = - \frac{\beta^2 V_0^2}{2} \ln \frac{\alpha - z + \sqrt{(\alpha - z)^2 + r^2}}{-z + \sqrt{z^2 + r^2}}$$

где  $\alpha = V_0 \frac{at + z}{a + V_0}$  — предел интегрирования, определяемый подобно [4]

Окончательно для  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  получится

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial t} = & -\frac{\beta^2 V_0^2}{2} \ln \frac{z-z+\sqrt{(z-z)^2+r^2}}{-z+\sqrt{z^2+r^2}} + \\
& + \frac{\beta^2 V_0^2}{2} \ln \frac{\gamma+z+\sqrt{(\gamma+z)^2+r^2}}{z+\sqrt{z^2+r^2}} + \\
& + \frac{\beta^2 V_0^2}{2} \left[ \frac{\left(t-\frac{\gamma}{V_0}-\frac{\sqrt{(\gamma+z)^2+r^2}}{a}\right)^2}{\sqrt{(\gamma+z)^2+r^2}} - \frac{\left(t-\frac{\sqrt{z^2+r^2}}{a}\right)^2}{\sqrt{z^2+r^2}} - \frac{4\gamma}{aV_0} + \right. \\
& + \left. \left(\frac{t}{a}+\frac{z}{aV_0}\right) \ln \frac{(\gamma+z)^2+r^2}{z^2+r^2} - \left(\sqrt{(\gamma+z)^2+r^2}-\sqrt{z^2+r^2}\right) \times \right. \\
& \times \left. \left(\frac{2}{V_0^2}+\frac{2}{a^2}\right) + \left(\frac{2t}{V_0}+\frac{2z}{V_0^2}\right) \ln \frac{\gamma+z+\sqrt{(\gamma+z)^2+r^2}}{z+\sqrt{z^2+r^2}} + \right. \\
& \left. + \frac{2r}{aV_0} \operatorname{arctg} \frac{\gamma r}{r^2+z(\gamma+z)} \right] \quad (1.14)
\end{aligned}$$

Давление вычисляется по формуле

$$\frac{p}{\rho_0} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + gz + \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{V^2}{2} \quad (1.15)$$

Сила сопротивления через давление  $P = p - p_0$  найдется по формуле

$$Q = \int_0^{V_0 t} P \beta^2 2\pi \beta (V_0 t - z) dz = -2\pi \rho_0 \beta^2 \int_0^{V_0 t} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz + \frac{V_0^2 \beta^2}{2} \right] (V_0 t - z) dz \quad (1.16)$$

Ввиду малости  $\frac{V^2}{2}$  в (1.16) оставлено только основное слагаемое

$\frac{\beta^2 V_0^2}{2}$ . Там, где это не приводит к особенностям, в (1.14) пренебрегаем  $r$ . После этих упрощений из (1.16) получим

$$\begin{aligned}
Q = & -2\pi \rho_0 \beta^2 V_0^2 t^2 \left\{ \frac{1 + \ln 4\beta^2}{4} - \frac{\gamma}{4} \left[ (M+2) \ln \frac{16}{1+M} + \right. \right. \\
& + \frac{2}{3} (1+M) \ln \frac{2}{1+M} - \frac{5}{3} (2+M) \ln 2 - 2 \ln \frac{2}{3} + \frac{8}{3} - \\
& \left. \left. - \frac{2}{3\beta^2} + \frac{M^3 + 4M^2 - 3M - 6}{3(1+M)} \right] \right\} \quad (1.17)
\end{aligned}$$

где  $M = \frac{V_0}{a}$ .

При  $V_0 = a$

$$Q = -2\pi \rho_0 \beta^4 V_0^4 t^2 \left\{ \frac{1 + \ln 4\beta^2}{4} + \frac{\gamma}{4} \left[ 4 \ln 2 - 2 \ln \frac{2}{\beta} + 2 - \frac{2}{3\beta^2} \right] \right\} \quad (1.18)$$

Б. При сверхзвуковом движении  $V_0 > a$ . Для  $z < at$  все расчеты те же, что и при дозвуковом проникании, а для  $at < z < V_0 t$  надо учесть тот факт, что свободная поверхность не влияет на этот участок и слагаемыми, содержащими  $g$ , надо пренебречь. На этом участке давление на теле, как в работе [4], можно найти по формуле

$$p = \frac{1}{2} \rho_0 \beta^2 V_0^2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz_1}{(z_1 - z)^2 + r^2} = \frac{1}{2} \rho_0 V_0^2 \beta^2 \ln \frac{4}{\beta^2 (M^2 - 1)} \quad (1.19)$$

где

$$z_1 = V_0 \frac{z - at}{V_0 - a}; \quad z_2 = V_0 \frac{z + at}{V_0 + a}$$

Для силы сопротивления при  $V_0 > a$  получится

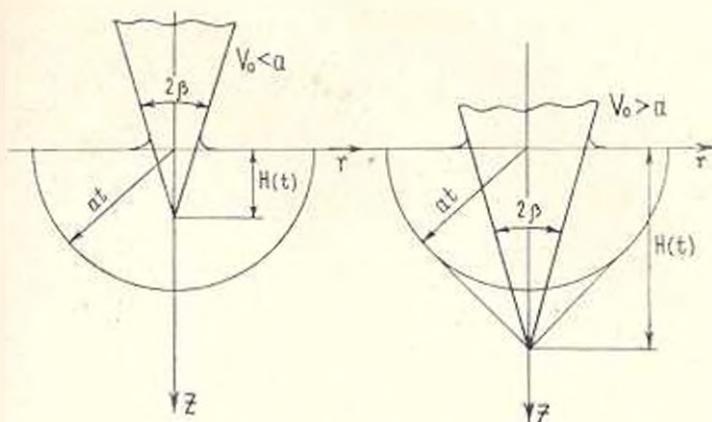
$$\begin{aligned} Q = & -2\pi \rho_0 \left\{ \int_0^{at} (V_0 t - z) \frac{\partial p}{\partial t} dz - \int_{at}^{V_0 t} \frac{\beta^2 V_0^2}{2} (V_0 t - z) \ln \frac{4}{\beta^2 (M^2 - 1)} dz - \right. \\ & - g \left. \left[ \frac{V_0^4 t^3}{6} + \frac{V_0^4 t^3 \beta^2}{4} \right] \right\} = -2\pi \rho_0 \beta^4 V_0^4 t^2 \left\{ -\frac{1}{2} \ln \frac{2}{\beta} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{(1+M)^2}{M} + \right. \\ & + \frac{\gamma}{2} \left[ \left( \frac{2}{3} M + \frac{4}{3} \right) \ln \frac{1+M}{M} - \frac{1}{3} - \frac{(1+M)^2}{6M} + \frac{M}{6} - \right. \\ & - \left. \left( 1 - 3M\beta^2 - \frac{M^2 \beta^2}{2} + M^2 \beta^4 \right) \ln \frac{1 - M\beta^2 + \sqrt{(1 - M\beta^2)^2 + \beta^2 M^2}}{M\beta^2} + \right. \\ & + \left. \left( \sqrt{(1 - M\beta^2)^2 + \beta^2 M^2} - \beta M \right) \left( 2 + \frac{1}{M} - 2\beta^2 M \right) - \frac{1}{3\beta^2} + \beta^2 M^2 - \right. \\ & - \left. \left( \frac{2}{M} + 1 \right) \left( \frac{\sqrt{(1 - \beta^2 M)^2 + \beta^2 M^2} (1 - \beta^2 M)}{2} + \frac{\beta^3 M^2}{2} \right) - \frac{\beta^3 M^2}{3} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3M} \left[ (1 - \beta^2 M)^2 + \beta^2 M^2 \right] - \beta^2 M \sqrt{(1 - \beta^2 M)^2 + \beta^2 M^2} \right\} \quad (1.20) \end{aligned}$$

Для  $M = 1$  имеем

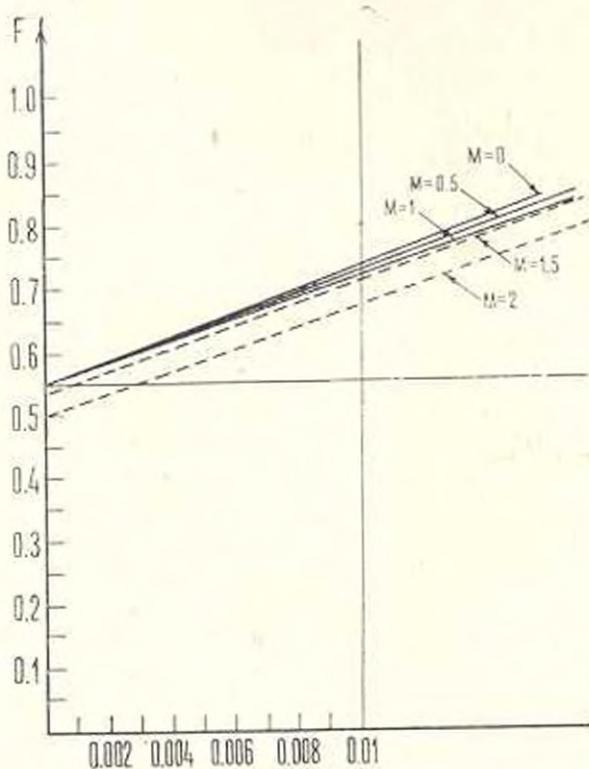
$$Q = -2\pi \rho_0 \beta^4 V_0^4 t^2 \left\{ \frac{1 + \ln 4\beta^2}{4} + \frac{\gamma}{4} \left( 4 \ln 2 - 2 \ln \frac{2}{\beta} + 2 - \frac{2}{3\beta^2} \right) \right\}$$

График зависимости  $F = \frac{Q}{2\pi \rho_0 \beta^4 V_0^4 t^2}$  от  $\gamma = \frac{gt}{V_0}$  дан на фиг. 2. Как видно, в дозвуковой области с увеличением  $\frac{V_0}{a}$   $F$  уменьшается. Для

сверхзвуковых чисел в некотором диапазоне  $\gamma$ ,  $F$  больше, чем для дозвукового проникания. При отсутствии силы тяжести (1.16)—(1.20) переходит в решение, полученное в [1, 3, 4].



Фиг. 1.



Фиг. 2.

§ 2. Проникание тонкого тела в сжимаемую жидкость, ограниченную тонкой мембраной

Используя уравнение колебания круглой мембраны

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - (p - p_0) \quad (2.1)$$

уравнение Коши—Лагранжа

$$p - p_0 + \rho_0 \frac{\partial z}{\partial t} - \rho_0 g z = 0 \quad (2.2)$$

и условие на поверхности жидкость-мембрана  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ , получим для  $z = 0$

$$-\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \rho_0 \frac{\partial z}{\partial t} - \rho_0 g z = 0$$

или дифференцируя по  $t$  и считая, что  $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial z}$ , получим

$$-\rho \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) + T \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right] + \rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \rho_0 g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

где  $\rho$ —плотность,  $T$ —натяжение мембраны. В силу линейности

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \quad (2.4)$$

для решения задачи, делая соответствующие выкладки, как и в § 1, получим уравнение (1.9) и (1.10). Исходя из этих уравнений и (2.3), (2.4), найдем

$$A = \frac{Tk^3 + \rho s^2 k + \rho_0 g k - \rho_0 s^2 \frac{k}{\sqrt{k^2 + s^2/a^2}}}{Tk^3 + \rho s^2 k + \rho_0 g k + \rho_0 s^2 \frac{k}{\sqrt{k^2 + s^2/a^2}}} \bar{B} \quad (2.5)$$

где  $\bar{B} = \frac{\varphi_1 H(t) |H(t) - z_0|}{2}$ .

Тогда для  $\varphi_1$  из (1.10) для постоянной скорости  $H(t) = V_0$  получим

$$\varphi_1 = \frac{\beta^2 V_0^2}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-(z_1+z_2) \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}}} e^{-s \frac{z_1}{V_0}}}{s^2 \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}}} J_0(kr) \left[ -1 + \right. \\ \left. + \frac{2}{1 + \frac{\sqrt{k^2 + s^2/a^2}}{\rho_0 s^2} (Tk^2 + \rho s^2 - \rho_0 g)} \right] dk \quad (2.6)$$

Считая, что  $T$ ,  $\rho$ ,  $g$  имеют малые значения, можем записать

$$1 + \frac{2}{\rho_0 s^2} \frac{\sqrt{k^2 + s^2/a^2}}{(Tk^2 + \rho s^2 + \rho_0 g)}$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{\sqrt{k^2 + s^2/a^2}}{\rho_0 s^2} (Tk^2 + \rho s^2 + \rho_0 g) \right]^n$$

Взяв первых два члена, получим из (2.6)

$$\bar{\varphi}_1^0 = \frac{\beta^2 V_0^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(z_1+z)} \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}} k e^{-s \frac{z_1}{V_0}} J_0(kr)}{s^2 \sqrt{k^2 + s^2/a^2}} \left| 1 - \frac{2\sqrt{k^2 + s^2/a^2}}{\rho_0 s^2} (Tk^2 + \rho s^2 + \rho_0 g) \right| dk \quad (2.7)$$

Прделав соответствующие выкладки, как и в § 1, получим

$$\bar{\varphi}_1^0 = \bar{\Phi}_1^0 + \frac{2\rho}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\Phi}_1^0}{\partial z} + \frac{2g}{s^2} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_1^0}{\partial z^2} - \frac{T\beta^2 V_0^2}{\rho_0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(z_1+z)} \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}} k^3 e^{-s \frac{z_1}{V_0}} J_0(kr) dk}{s^4}$$

Для вычисления этого интеграла, перепишем его так

$$J = \int_0^{\infty} \frac{e^{-(z_1+z)} \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}} k e^{-s \frac{z_1}{V_0}}}{s^2} \left[ \frac{1}{s^2} \left( k^2 + \frac{s^2}{a^2} \right) - \frac{1}{a^2} \right] J_0(kr) dk$$

отсюда

$$J = \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_1^0}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \bar{\Phi}_1^0}{\partial z}$$

потому

$$\bar{\varphi}_1^0 = \bar{\Phi}_1^0 + 2 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\Phi}_1^0}{\partial z} + \frac{2g}{s^2} \frac{\partial \bar{\Phi}_1^0}{\partial z} + \frac{2T}{\rho_0} \frac{1}{s^2} \frac{\partial^3 \bar{\Phi}_1^0}{\partial z^3} - \frac{2T}{a^2 \rho_0} \frac{\partial \bar{\Phi}_1^0}{\partial z}$$

$$\text{где } \bar{\Phi}_1^0 = \frac{\beta^2 V_0^2}{2} \frac{e^{-s \left( \frac{z_1}{V_0} + \frac{R_0}{a} \right)}}{s^2 R_0} \quad \text{и} \quad \Phi_1^0 = \frac{\beta^2 V_0^2}{2} \left( t - \frac{z_1}{V_0} - \frac{R_0}{a} \right) \frac{1}{R_0}$$

$$R_0 = \sqrt{(z_1 + z)^2 + r^2}$$

Для нахождения  $\bar{\varphi}_1^0$  воспользуемся теоремой о свертке. Тогда

$$\begin{aligned}
z_1^0 = \Phi_1^0 + 2\sigma & \int_0^{t - \frac{z_1}{V_0} - \frac{R_0}{a}} t' \left( t - t' - \frac{z_1}{V_0} \right) \frac{\beta^2 V_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{dt'}{\sqrt{(z + z_1)^2 + r^2}} + \\
& + \frac{2T \beta^2 V_0^2}{\rho_0} \frac{1}{2} \int_0^{t - \frac{z_1}{V_0} - \frac{R_0}{a}} t' \left( t - t' - \frac{z_1}{V_0} \right) \frac{\partial^3}{\partial z^3} \frac{dt'}{\sqrt{(z_1 + z)^2 + r^2}} + \\
& + 2 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Phi_1^0}{\partial z} - \frac{2T}{a^2 \rho_0} \frac{\partial \Phi_1^0}{\partial z} \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Повторяя выкладки § 1, получим для силы сопротивления при  $V_0 < a$  соотношение

$$\begin{aligned}
Q = -2\pi\rho_0\beta^3 V_0^4 t^2 & \left[ \frac{1 + \ln 4\beta^2}{4} + \frac{\gamma}{4} \right] (M + 2) \ln \frac{16}{1 + M} + \frac{8}{3} + \\
& + \frac{2}{3} (1 + M) \ln \frac{2}{1 + M} - \frac{5}{3} (2 + M) \ln 2 - 2 \ln \frac{2}{\beta} + \\
& + \frac{M^3 + 4M^2 - 3M - 6}{3(1 + M)} - \frac{2}{3\beta^2} \left] + \lambda \left[ (1 + 2M) \ln 2 - M - \ln \frac{1}{3} \right] + \\
& + \frac{\alpha}{2} \left[ \frac{26}{3} M - \frac{2M\pi}{\beta^2} + \frac{1}{3} (2 - 4M + 2M\pi) + \right. \\
& \left. + \left( 22M^2 - 9M + \frac{19}{4} M - 4 \right) \ln \frac{1}{\beta} + \right. \\
& \left. + \frac{9}{2} M \ln 2 + \left( \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{105}{4} \right) M^2 - 2 - (7 + 4 \ln 2) M^3 \right] \quad (2.9)
\end{aligned}$$

где  $\lambda = \frac{\gamma}{\rho_0 V_0 t}$ ,  $\alpha = \frac{T}{\rho_0 V_0^3 t}$

Для

$$\beta = 0.1, \quad M = 0.5, \quad \alpha = 0.001, \quad \lambda = 0.01, \quad F = \frac{Q}{2\pi\rho_0\beta^3 V_0^4 t^2}$$

Имеем

$$F \approx 0.55 + 8.68 \lambda + 1.5 \alpha + 137 \alpha = 0.702 + 8.68 \eta$$

Таким образом, при наличии силы тяжести, сила сопротивления при прочих равных условиях возрастает с увеличением безразмерного параметра  $\eta$ .

Автор благодарит А. Г. Багдоева за руководство работой и за постоянное внимание к работе.

Институт механики  
АН Армянской ССР

Поступила 22 II 1980

ԿՇԻՌ ՈՒՆԵՑՈՂ ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԵՋ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՔԱՓԱՆՑՄԱՆ  
ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ս. մ փ ո փ ու լ մ

Ուսումնասիրվում է բարակ կոնի «սեղմերի և կշիռ ունեցող հեղուկի մեջ, թափանցելու վերաբերյալ խնդիրները: Սկզբում լուծվել է խնդիրը ազատ մակերևույթով հեղուկի համար: Լուծված է նաև թափանցման խնդիրը, առաձգական թաղանթով ծածկված հեղուկի մեջ: Յուրյց է տրված, որ ծանրության ուժի և թաղանթի ասկայությունը մեծացնում է հեղուկի դիմադրության ուժը:

SOME PROBLEMS IN PENETRATION OF BODIES INTO  
PONDERABLE FLUID

S. G. AVAGHIAN

S u m m a r y

The problems in penetration of a thin cone into ponderable compressible fluid are considered. First the problem for the fluid with free surface is solved. The problem in penetration into the fluid bounded by an elastic membrane is also solved.

It is shown that the presence of gravity force and a membrane increases the resistance force of fluid.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сагомонян А. Я. Проникание. Изд-во МГУ, 1974.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. II. М., «Наука», 1974.
3. Григорян С. С. Некоторые вопросы гидродинамики тонких тел. Канд. дисс., МГУ, 1956.
4. Багдоян А. Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван, Изд-во АН Арм. ССР, 1961.

С. В. БАЗИЛЕВСКИЙ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЙ  
УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

1. Система фундаментальных решений однородных уравнений колебаний сферической оболочки является основой для решения задач о свободных колебаниях, а также задач о вынужденных колебаниях сферических оболочек под действием краевых или сосредоточенных динамических нагрузок. Аналитическое построение фундаментальных решений было выполнено в статьях [1-3], в работе [4] и в некоторых других работах. Полученные точные аналитические соотношения являются довольно сложными и громоздкими, что затрудняет качественный анализ характера их зависимости от безразмерных параметров задачи: коэффициента Пуассона  $\nu$ , параметра относительной толщины оболочки  $c = 2\sqrt{3(1-\nu^2)} R/h$  (здесь  $R$  — радиус оболочки, а  $h$  — ее толщина) и безразмерного параметра частоты  $k = \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\rho}{E}} R\omega$  (здесь  $\omega$  — круговая частота колебаний,  $\rho$  и  $E$  — плотность и модуль упругости материала оболочки). Кроме того, точные решения не дают наглядного представления о характере напряженно-деформированного состояния, в частности, о его изменчивости [5], а между тем, анализ и учет изменчивости напряженно-деформированного состояния оболочки может приводить к существенным упрощениям при решении конкретных задач.

Одним из способов устранения указанных недостатков точных решений является использование асимптотических соотношений для функций и величин, входящих в эти решения. В работе [7] таким образом получены простые соотношения для частот и форм колебаний замкнутой сферической оболочки. В настоящей работе асимптотические разложения по большому параметру  $c = 2\sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{R}{h}$  получены в первом приближении, что в большинстве случаев обеспечивает необходимую для практических вычислений точность и максимально упрощает расчетные зависимости. Показано, что эти разложения можно эффективно использовать при расчетах колебаний сферических оболочек, а также для уточнения классификации типов колебаний этих оболочек по принципу [5, 6].

2. Рассмотрим стационарные во времени колебания замкнутой в окружном направлении (по углу  $\varphi$ ) сферической оболочки. Разделение переменных в уравнениях колебаний [1, 4] произведем, представив нормальные  $u$  и тангенциальные  $v$  и  $w$  перемещения оболочки в виде

$$\begin{aligned}
 u(\theta, \varphi, t) &= U_m(\theta) \cos m \varphi e^{i\omega t} \\
 v(\theta, \varphi, t) &= V_m(\theta) \sin m \varphi e^{i\omega t} \\
 w(\theta, \varphi, t) &= W_m(\theta) \cos m \varphi e^{i\omega t} \quad m = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

$\theta, \varphi$  — полярные углы на сфере.

Точное решение однородных уравнений колебаний приводит к выражениям  $U_m(\theta)$ ,  $V_m(\theta)$ ,  $W_m(\theta)$ , отличающимся от подобных соотношений в [4] тем, что в качестве линейно независимых решений в них используются функции Лежандра  $P_{\nu_j}^m(\cos \theta)$  и  $P_{\nu_j}^m(-\cos \theta)$ , а не функции  $P_{\nu_j}^m(\cos \theta)$  и  $Q_{\nu_j}^m(\cos \theta)$ :

$$\begin{aligned}
 U_m(\theta) &= - \sum_{j=1}^3 \nu_j \left( A_j \frac{dP_{\nu_j}^m(\cos \theta)}{d\theta} + B_j \frac{dP_{\nu_j}^m(-\cos \theta)}{d\theta} \right) + \\
 &\quad - \frac{m}{\sin \theta} (A_4 P_{\nu_4}^m(\cos \theta) + B_4 P_{\nu_4}^m(-\cos \theta)) \\
 V_m(\theta) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\nu_j m}{\sin \theta} (A_j P_{\nu_j}^m(\cos \theta) + B_j P_{\nu_j}^m(-\cos \theta)) - \\
 &\quad - \left( A_4 \frac{dP_{\nu_4}^m(\cos \theta)}{d\theta} + B_4 \frac{dP_{\nu_4}^m(-\cos \theta)}{d\theta} \right) \\
 W_m(\theta) &= \sum_{j=1}^3 (A_j P_{\nu_j}^m(\cos \theta) + B_j P_{\nu_j}^m(-\cos \theta)) \\
 &\quad - \frac{(1 - \nu^2)(2 - p_j) p_j + c^2 [k^2 - 2(1 + \nu)]}{(1 + \nu) c^2 p_j} = \\
 &\quad = \frac{k^2 - 2(1 + \nu) + (1 + \nu) p_j}{(2 + k^2 - p_j) p_j} \quad p_j = \nu_j(\nu_j + 1)
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

$A_j, B_j$  — константы интегрирования, определяемые из граничных условий.

Поскольку функции  $P_{\nu_j}^m(\cos \theta)$  и  $P_{\nu_j}^m(-\cos \theta)$  (в отличие от  $P_{\nu_j}^m(\cos \theta)$  и  $Q_{\nu_j}^m(\cos \theta)$ ) обладают между собой симметрией относительно экватора сферы, то в (1.2) можно сразу положить  $A_j = 0$  или  $B_j = 0$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ), если сферическая оболочка замкнута в полюсе  $\theta = 0$  или  $\theta = \pi$  и не нагружена в этих точках сосредоточенными нагрузками.

Степени  $\nu_j, \nu_4$  присоединенных функций Лежандра определяются из уравнений [4]

$$\begin{aligned}
 p_j^3 - (4 + k^2) p_j^2 + \left| c^2 \left( 1 - \frac{\nu k^2 \nu_j}{1 - \nu^2} \right) + 2(2 + k^2) \right| p_j + \\
 + [k^2 - 2(1 + \nu)] (1 - \nu + k^2) \frac{c^2}{1 - \nu^2} = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

$$\nu_j = \sqrt{p_j + 1/4} - 1/2 \quad j = 1, 2, 3$$

$$p_1 = 2 \left( 1 + \frac{k^2}{1 - \nu^2} \right) \quad (1.4)$$

$$\nu_4 = \sqrt{p_4 + 1/4} - 1/2$$

Соотношения (1.1) + (1.4) дают точное решение однородных уравнений колебаний замкнутой вдоль параллели сферической оболочки. С целью упрощения решения проведем исследование его асимптотических свойств по большому параметру  $c$ .

3. Анализ уравнения (1.3) показывает, что если частотный параметр  $k$  не попадает в узкую переходную зону  $|\sqrt{1 - \nu^2} - \Delta k| < k < |\sqrt{1 - \nu^2} + \Delta k|$ , то имеется один корень порядка единицы и два «больших» корня порядка  $c$ . В переходной зоне происходит резкое увеличение плотности частот собственных колебаний оболочки, а характер решений уравнений колебаний различен слева и справа от этой зоны. Для полуширины переходной зоны на стр. 6 получена оценка  $\Delta k = 4.5 c^{-2/3}$ . Вне переходной зоны ищем первое приближение для асимптотических разложений корней в виде  $p_i \approx \bar{p}_i$  или  $p_i \approx c \bar{p}_i$ , где  $\bar{p}_i$  — величины порядка единицы. Если  $k < |\sqrt{1 - \nu^2} - \Delta k|$ , то получаем следующие формулы для корней:

$$p_1 \approx \frac{[k^2 - 2(1 + \nu)][1 - \nu + k^2]}{k^2 - (1 - \nu^2)}, \quad p_{2,3} \approx \pm ic \sqrt{1 - \frac{k^2}{1 - \nu^2}} \quad (1.5)$$

$$i = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$$

а при  $k > |\sqrt{1 - \nu^2} + \Delta k|$  корни удобно представить в виде

$$p_{1,3} \approx c \sqrt{\frac{k^2}{1 - \nu^2} - 1}, \quad p_2 \approx \frac{[k^2 - 2(1 + \nu)][1 - \nu + k^2]}{k^2 - (1 - \nu^2)} \quad (1.6)$$

В соотношениях (1.6) для удобства изложения изменена нумерация больших и малых корней. В переходной зоне, то есть при  $|\sqrt{1 - \nu^2} - \Delta k| < k < |\sqrt{1 - \nu^2} + \Delta k|$ , разложения (1.5) и (1.6) неприменимы и необходимо построить другие асимптотические разложения. Все корни уравнения (1.3) здесь имеют одинаковый асимптотический порядок  $\sim c^{2/3}$  и удобно произвести следующее «преобразование масштаба» [8] зависимой ( $p_i$ ) и независимой ( $k$ ) переменных

$$p_i \approx \bar{p}_i c^{2/3}, \quad \bar{k} = \left( \frac{k^2}{1 - \nu^2} - 1 - \delta c^{-2/3} \right) c^{2/3} \quad (1.7)$$

Можно показать, что если при  $c \rightarrow \infty$  порядок  $p_i$  отличен от  $c^{2/3}$ , то в лучшем случае получаем уже рассмотренные выше приближения больших и малых корней. Предполагая справедливыми соотношения (1.7), для определения  $\bar{p}_i$  из (1.3) получим уравнение

$$\tilde{p}_j^3 - (\tilde{k} + \tilde{\delta}) \tilde{p}_j - (1 + \nu)(2 + \nu) = 0 \quad (1.8)$$

Вид решений уравнения (1.8) зависит от знака величины дискриминанта

$$Q = -\left(\frac{\tilde{k} + \tilde{\delta}}{3}\right)^2 + \left[\frac{(1 + \nu)(2 + \nu)}{2}\right]^2.$$

Выбирая  $\tilde{\delta}$  таким образом, чтобы  $Q$  менял знак при  $\tilde{k} = 0$ , находим  $\tilde{\delta} = 3 \left| \frac{(1 + \nu)(2 + \nu)}{2} \right|^{1/3}$ . По-

скольку в переходной зоне понижения порядка уравнения при асимптотических преобразованиях не происходят, простых формул для корней в явном виде, включающих все параметры задачи, получить не удастся. Однако, даже в этом случае асимптотические методы имеют ряд преимуществ перед непосредственным численным решением. Например, удается сразу указать асимптотический порядок корней в переходной зоне, а «неполное» кубическое уравнение (1.8) удобнее для вычислений, чем исходное уравнение (1.3). Выписав решения (1.8) по формулам Кардано, можно, используя прием сращивания асимптотических разложений [8], «сшить» их с решениями (1.5) и (1.6) и построить, таким образом, равномерно пригодные для всех  $k$  асимптотические разложения. В отличие от численного решения в процессе сращивания автоматически устанавливается нужная нумерация корней, а также определяется ширина переходной зоны частот. Опуская подробности вычислений и процедуры сращивания, выпишем в первом приближении получающиеся равномерно пригодные разложения для  $p_j$  в исходных переменных задачи

$$k < k_0: \quad p_1 \approx \frac{k^2(k^2 - 1 - 3\nu) + (1 - \nu^2)(3 + \nu)\nu}{k^2 - (1 - \nu^2)} + (A + B)e^{2i3},$$

$$p_{2,3} \approx \left( -\frac{A + B}{2} \pm i \frac{A - B}{2} \sqrt{3} \right) e^{2i3} \quad (1.9)$$

$$k \geq k_0: \quad p_1 \approx 2 \operatorname{Re} A \cdot e^{2i3}, \quad p_2 \approx -(\operatorname{Re} A + \sqrt{3} \operatorname{Im} A) e^{i3}$$

$$p_3 \approx \frac{k^2(k^2 - 1 - 3\nu) + (1 - \nu^2)(3 + \nu)\nu}{k^2 - (1 - \nu^2)} - (-\operatorname{Re} A + \sqrt{3} \operatorname{Im} A) e^{2i3} \quad (1.10)$$

а величины  $k_0$ ,  $Q$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $\operatorname{Re} A$ ,  $\operatorname{Im} A$  вычисляются по формулам

$$k_0 = \sqrt{(1 - \nu^2) \left( 1 + 3 \left| \frac{(1 + \nu)(2 + \nu)}{2} \right|^{2/3} e^{-2i3} \right)}$$

$$Q = \left| \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{k^2}{1 - \nu^2} \right) \right|^2 e^{2i3} + \left| \frac{(1 + \nu)(2 + \nu)}{2} \right|^2 \quad (1.11)$$

$$A = \left[ \frac{(1 + \nu)(2 + \nu)}{2} + \sqrt{Q} \right]^{1/3}, \quad B = \left[ \frac{(1 + \nu)(2 + \nu)}{2} - \sqrt{Q} \right]^{1/3}$$

$$\beta = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left| \frac{2 \sqrt{1-v^2}}{(1+v)(2+v)} \right|$$

$$\operatorname{Re} A = c^{1/3} \sqrt[3]{\frac{1}{3} \left( \frac{k^2}{1-v^2} - 1 \right) \cos \beta}$$

$$\operatorname{Im} A = c^{1/3} \sqrt[3]{\frac{1}{3} \left( \frac{k^2}{1-v^2} - 1 \right) \sin \beta}$$

Для практических вычислений, однако, рациональнее использовать вне переходной зоны разложения (1.5) и (1.6), а внутри зоны — разложения (1.9) и (1.10), сохраняя в этих разложениях только члены порядка  $c^{2/3}$ . При этом необходимо знать ширину переходной зоны  $2\Delta k$ . Анализ разложений (1.9), (1.10) показывает, что асимптотический порядок  $\Delta k$  равен  $\sim c^{-2/3}$ , а численные оценки дают значение  $\Delta k = 4.5 c^{-2/3}$ , причем на границе переходной зоны максимальная погрешность в определении корней из их асимптотических разложений (1.5), (1.6) или (1.9), (1.10) (с сохранением в последних только членов порядка  $c^{2/3}$ ) не превышает 15% даже для наиболее толстых оболочек с  $R/h = 20$  для любых значений  $v$ . Уже при  $R/h = 60$  максимальная погрешность не превосходит 8%. Таким образом, установлено, что для сферических оболочек значения частотного параметра, принадлежащие переходной зоне, заключены в узком интервале  $| \sqrt{1-v^2} - 4.5c^{-2/3} < k < \sqrt{1-v^2} + 4.5c^{-2/3}$ , а вне этого интервала для определения  $p$  применимы простые формулы (1.5) и (1.6).

Формулы для индексов  $\nu$  функций Лежандра легко получить из асимптотических разложений для  $p_i = \nu_i(\nu_i + 1)$ . Для значений  $k$ , не принадлежащих переходной зоне, эти формулы имеют простой вид: при  $0 \leq k < \sqrt{1-v^2} - 4.5c^{-2/3}$

$$\nu_1 + 1/2 \approx \sqrt[3]{\frac{1/4 + \frac{[k^2 - 2(1+v)][1-v-k^2]}{k^2 - (1-v^2)}}{1/2}} \quad (1.12)$$

$$\nu_{2,3} + 1/2 \approx (1 \pm i) \frac{c^{1/2}}{\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{k^2}{1-v^2} \right)^{1/4}$$

при  $\sqrt{1-v^2} + 4.5c^{-2/3} \leq k$ ,

$$\nu_1 + 1/2 \approx c^{1/2} \left( \frac{k^2}{1-v^2} - 1 \right)^{1/4}, \quad \nu_2 + 1/2 \approx ic^{1/2} \left( \frac{k^2}{1-v^2} - 1 \right)^{1/4}$$

$$\nu_2 + 1/2 \approx \begin{cases} i \sqrt{\frac{[2(1+v) - k^2][1-v+k^2]}{k^2 - (1-v^2)} + \frac{1}{4}} \\ \text{при } k < \sqrt{\frac{3}{8}(1+4v + |17+8v|)} \\ \sqrt{\frac{[k^2 - 2(1+v)][1-v+k^2]}{k^2 - (1-v^2)} + \frac{1}{4}} \\ \text{при } k > \sqrt{\frac{3}{8}(1+4v + |17+8v|)} \end{cases}$$

Внутри переходной зоны для определения  $\nu_1$  получены соотношения: при  $\sqrt{1-\nu^2} - 4.5c^{-2/3} \leq k \leq k_2$

$$\begin{aligned} \nu_1 + 1/2 &\approx c^{1/3} \sqrt{A+B} \\ \nu_{2,3} + 1/2 &\approx c^{1/3} (A^2 + B^2 - AB)^{1/4} e^{-i\psi} \\ \psi &= \frac{1}{2} \left| \pi - \arctg \left( \sqrt{3} \frac{A-B}{A+B} \right) \right| \end{aligned} \quad (1.13)$$

при  $k_0 \leq k < \sqrt{1-\nu^2} + 4.5c^{-2/3}$

$$\begin{aligned} \nu_1 + 1/2 &\approx c^{1/3} \sqrt{2 \operatorname{Re} A} \\ \nu_{2,3} + 1/2 &\approx i c^{1/3} \sqrt{\operatorname{Re} A + 3 \operatorname{Im} A} \end{aligned}$$

Полученные формулы с достаточной для инженерных расчетов точностью позволяют определять значения  $\nu_j$ , а вне узкой переходной зоны удобны для анализа зависимости  $\nu_j$  от частоты и других параметров задачи.

4. Для вычисления функций Лежандра  $P_{\nu_j}^m(\pm \cos \theta)$  при больших (по модулю) значениях степеней  $\nu_j$  также удобно использовать асимптотические разложения. Известны [9] такие разложения по функциям Бесселя вблизи полюсов  $\theta \rightarrow 0$  или  $\pi$  и по тригонометрическим функциям вдали от полюса, однако, ситуация остается неопределенной при промежуточных значениях  $\theta$ . Для устранения этого затруднения, используя прием сращивания асимптотических разложений [8], было получено равномерно пригодное для всех  $\theta$  разложение

$$\begin{aligned} (\nu_j + 1/2)^{-m} P_{\nu_j}^m(-\cos \theta) &\approx \cos(\pi \nu_j) J_m[(\nu_j + 1/2) \theta] + \\ &+ \sin(\pi \nu_j) N_m[(\nu_j + 1/2) \theta] - (-1)^m J_m[(\nu_j + 1/2)(\pi - \theta)] + \\ &+ \sqrt{\frac{2}{\pi(\nu_j + 1/2)}} \left( \frac{1}{\sqrt{|\sin \theta|}} - \frac{1}{\sqrt{|\theta|}} - \frac{1}{\sqrt{|\pi - \theta|}} \right) \times \\ &\times \cos \left| (\nu_j + 1/2)(\pi - \theta) - \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2} \right| \end{aligned} \quad (1.14)$$

$J_m(x)$  и  $N_m(x)$  — функции Бесселя и Неймана.

Разложение (1.14) удобно использовать, если  $\nu_j$  — действительная величина, так как тогда и разложение (1.14) действительно. Если же  $\nu_j = -1/2 + i\gamma_j$ , где  $\gamma_j$  — большое по абсолютной величине число, что имеет место при  $k \gg k_0$ , то соответствующее действительное асимптотическое разложение удобнее представить в виде

$$\begin{aligned} \gamma_j^{-m} P_{-1/2}^m(\gamma_j) (-\cos \theta) &\approx \frac{e^{-\pi/4}}{\pi} K_m(\gamma_j \theta) + I_m[\gamma_j(\pi - \theta)] + \\ &+ \frac{e^{(\pi-\theta)\gamma_j}}{\sqrt{2\pi\gamma_j}} \left( \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\pi - \theta}} \right) \end{aligned} \quad (1.15)$$

где  $I_m(x)$  и  $K_m(x)$  — модифицированные функции Бесселя мнимого аргумента.

В общем случае комплексных значений  $\gamma_j$  можно использовать разложение (1.14), произведя в нем отделение действительной и мнимой части. Например, если  $\gamma_j = -1.2 + (1 - i)\gamma_j$  ( $|\gamma_j| \gg 1$ ,  $\gamma_j$  — действительное), что соответствует значениям  $\gamma_{2,3}$  при  $0 \leq k < \sqrt{1 - \nu^2} = 4.5e^{-2/3}$ , то получены следующие равномерно пригодные разложения для действительной и мнимой части функции Лежандра:

$$\begin{aligned} (|\sqrt{2}\gamma_j|)^{-m} \operatorname{Re}[P_{-1/2}^m(-\cos \theta)] &\approx \frac{(-1)^{m+1} e^{-\pi/4}}{\pi} \left| \sin\left(\pi\gamma_j - \frac{m\pi}{4}\right) \operatorname{kei}_m(|\sqrt{2}\gamma_j\theta|) - \right. \\ &\quad \left. - \cos\left(\pi\gamma_j - \frac{m\pi}{4}\right) \operatorname{ker}_m(|\sqrt{2}\gamma_j\theta|) \right| + \\ &\quad + \cos \frac{m\pi}{4} \operatorname{ber}_m[|\sqrt{2}\gamma_j(\pi - \theta)|] + \sin \frac{m\pi}{4} \operatorname{bei}_m[|\sqrt{2}\gamma_j(\pi - \theta)|] + \\ &\quad + \left( \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\pi - \theta}} \right) \frac{e^{\gamma_j(\pi - \theta)}}{\sqrt{2|\sqrt{2}\pi\gamma_j|}} \cos \left[ \gamma_j(\pi - \theta) - \frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{4} \right] \\ &\quad + (|\sqrt{2}\gamma_j|)^{-m} \operatorname{Im}[P_{-1/2}^m(-\cos \theta)] \approx \\ &\approx \frac{(-1)^{m+1} e^{-\pi/4}}{\pi} \left| \cos\left(\pi\gamma_j - \frac{m\pi}{4}\right) \operatorname{kei}_m(|\sqrt{2}\gamma_j\theta|) + \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\pi\gamma_j - \frac{m\pi}{4}\right) \operatorname{ker}_m(|\sqrt{2}\gamma_j\theta|) \right| + \\ &\quad + \sin \frac{m\pi}{4} \operatorname{ber}_m[|\sqrt{2}\gamma_j(\pi - \theta)|] - \cos \frac{m\pi}{4} \operatorname{bei}_m[|\sqrt{2}\gamma_j(\pi - \theta)|] - \\ &\quad - \left( \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\pi - \theta}} \right) \frac{e^{\gamma_j(\pi - \theta)}}{\sqrt{2|\sqrt{2}\pi\gamma_j|}} \sin \left[ \gamma_j(\pi - \theta) - \frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{4} \right] \end{aligned} \quad (1.16)$$

$\operatorname{ber}_m(x)$ ,  $\operatorname{bei}_m(x)$ ,  $\operatorname{ker}_m(x)$ ,  $\operatorname{kei}_m(x)$  — функции Кельвина [10].

Формулы (1.14)–(1.16), как показывают вычисления, дают приемлемую для практических расчетов точность уже при  $|\gamma_j| > 3$ , а при  $|\gamma_j| \leq 3$

для вычисления функций Лежандра рациональнее использовать известные представления в виде гипергеометрических рядов [9], которые при небольших значениях  $|\nu_j|$  быстро сходятся.

5. Полученные асимптотические соотношения позволяют сделать некоторые выводы качественного характера о напряженно-деформированном состоянии сферической оболочки при колебаниях с заданной частотой. Действительно, из (1.5) и (1.6) легко заметить, что вне переходной зоны «малые» корни  $p_1$  (или  $p_2$ ) приближенно определяются так же, как в безмоментной теории оболочек, а для «больших» корней  $p_{2,3}$  (или  $p_{1,3}$ ) тот же результат можно получить, используя теорию пологих оболочек, то есть уравнения для состояний с большой изменяемостью. Таким образом, вне указанной переходной зоны для решения задачи можно применять «метод расчленения» напряженно-деформированного состояния [5] и для сферической оболочки реализовать классификацию типов ее колебаний, аналогичную данной в [5] для свободных колебаний тонких оболочек произвольного вида. Так, при  $k < |1 - \nu^2| - 4.5c^{-2.3}$  из (1.2) и (1.12) следует, что на основное безмоментное медленно изменяющееся напряженно-деформированное состояние оболочки ( $v_1$  и  $v_2$ ) накладывается быстроизменяющееся (благодаря наличию большого параметра  $\gamma_{2,3}$  при аргументе  $\theta$ ) состояние ( $v_{2,3}$ ) типа осциллирующего краевого эффекта, описываемое функциями (1.16).

В соответствии с [5], такие колебания можно определить как «квази-поперечные с малой изменяемостью». Аналогично для всех диапазонов частот можно указать соответствующие им типы колебаний. Например, из (1.2), (1.12), (1.14) и (1.15) легко получить, что «квазипоперечные колебания с большой изменяемостью» возможны при

$$k > |1 - \nu^2| - 4.5c^{-2.3}$$

Важно отметить, что полученные асимптотические соотношения позволяют в случае сферической оболочки не только определить асимптотический порядок частот [5], но и указать конкретные диапазоны их изменения для колебаний каждого вида. Кроме того, с достаточной для практических вычислений точностью, удастся указать границы переходной зоны частот ( $|1 - \nu^2| - 4.5c^{-2.3} < k < |1 - \nu^2| + 4.5c^{-2.1}$ ), внутри которой теряет силу предложенная в [5] классификация колебаний, так как все  $\nu_j$  согласно (1.13) имеют одинаковый порядок  $\sim c^{0.3}$ , из-за чего расчленение напряженно-деформированного состояния оболочки на безмоментное и быстроизменяющееся произвести не удастся. В переходной зоне происходит сильное увеличение плотности частот собственных колебаний оболочки.

6. Для иллюстрации эффективности полученных асимптотических представлений для решения задач динамики сферических оболочек рассмотрим задачу о собственных осесимметричных колебаниях симметричного относительно экватора и защемленного по краям сферического пояса

с углом раствора  $\alpha$ . Если размеры пояса таковы, что все безразмерные собственные частоты  $k_n$  удовлетворяют соотношению  $k_n > \sqrt{1-\nu^2} + 4.5c^{-33}$ , то для определения функций Лежандра с индексами  $\nu_1$  и  $\nu_2 = -\frac{1}{2} + i\lambda$  можно использовать асимптотические соотношения (1.12), (1.14), (1.15), а при условии  $\alpha < \pi - 2\sqrt[3]{\frac{h}{R}}$  — упрощенные соотношения вида

$$P_{\nu_1}(-\cos\theta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi(\nu_1 + 0.5)\sin\theta}} \cos[(\nu_1 + 0.5)(\pi - \theta) - \pi/4]$$

и

$$P_{\nu_2}(-\cos\theta) \approx e^{i\pi\nu_2} / \sqrt{2\pi\nu_2 \sin\theta}$$

Для вычисления  $P_{\nu_1}(\pm \cos\theta)$  использовались первых два члена разложения в ряд у экватора сферы.

Удовлетворяя граничным условиям  $u = u' = \frac{dw}{d\theta} = 0$  на краях пояса, получаем систему линейных однородных уравнений для постоянных интегрирования  $A_j$  и  $B_j$  (1.2), а из условия равенства нулю определителя этой системы — уравнение для определения собственных частот

$$\begin{aligned} \cos x \operatorname{ch} x - 1 + \frac{2(1+\nu)\alpha}{x^2} \left\{ \frac{2 - p_2 \sin^2 \frac{x}{2}}{p_2 \sin^2 \frac{x}{2}} \sin \frac{x}{2} \left[ \cos \frac{x}{2} (\operatorname{ch} x - 1) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sin \frac{x}{2} \operatorname{sh} x \right] - \frac{6 - (p_2 - 2) \sin^2 \frac{x}{2}}{6 - 3(p_2 - 2) \sin^2 \frac{x}{2}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \left[ \sin \frac{x}{2} (\operatorname{ch} x + 1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos \frac{x}{2} \operatorname{sh} x \right] \right\} + O(x^{-2}) = 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} x = \sqrt{p_1} \alpha = c^{1/2} \left( \frac{k^2}{1-\nu^2} - 1 \right)^{1/4} \alpha, \quad p_2 = \frac{[k^2 - 2(1+\nu)][1-\nu + k^2]}{k^2 - (1-\nu^2)} \\ \nu_2 = \frac{k^2 - (1-\nu^2)}{(1+\nu)(1-\nu + k^2)} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Если  $k$  не является (хотя бы приближенно) корнем уравнений  $p_2 = 0$  или  $2 - (p_2 - 2) \sin^2 \alpha/2 = 0$ , то есть не совпадает с собственными частотами преимущественно мембранных колебаний, то частоты изгибных собственных колебаний пояса в первом приближении определяются из уравнения, совпадающего с характеристическим уравнением для собственных частот защемленного по концам стержня

$$\cos x_0 \operatorname{ch} x_0 - 1 \quad (1.19)$$

Первую поправку к корням получаем, разыскивая корни (1.17) в виде разложения по степеням  $x^{-1}$ . Тогда для симметричных относительно экватора форм колебаний получаем

$$x = x_0 \left[ 1 - \frac{(1 + \nu)^2 (8 - p_{20} x^2)}{2x_0^2 [k_0^2 - 2(1 + \nu)]} \right] \quad (1.20)$$

$$x_0 = 4.73, 10.996, \dots \frac{\pi}{2} (4j - 1); \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

а для кососимметричных форм —

$$x = x_0 \left[ 1 - \frac{(1 + \nu)^2 x^2 p_{20} [24 - (p_{20} - 2) \alpha^2]}{3x_0^2 [k_0^2 - 2(1 + \nu)] [8 - (p_{20} - 2) x^2]} \right] \quad (1.21)$$

$$x_0 = 7.859, 14.137, \dots \frac{\pi}{2} (4j + 1); \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

причем  $x_0$  является корнем уравнения (1.19), а  $k_0$  и  $p_{20}$  определяются через заданное  $x_0$  как решения уравнений (1.18). Вычисляя следующее приближение в выражениях для  $x$ , получаем, что формулы (1.20) и (1.21) позво-

ляют определять корни (1.17) с точностью не менее 3% при  $\alpha \leq 3.2 \sqrt{\frac{h}{R}}$

для первой симметричной и, по крайней мере, при  $\alpha \leq 2.6 \sqrt{\frac{h}{R}}$  для

первой кососимметричной формы колебаний. Следовательно, предельный раствор пояса, при котором еще справедливы формулы первого приближения (1.20) и (1.21), быстро расширяется при увеличении номера частоты.

Таким образом, в отличие от точного решения рассмотренной задачи в присоединенных функциях Лежандра, асимптотические соотношения во многих случаях позволяют не только получить характеристическое уравнение (1.17), содержащее только элементарные функции, но и найти в явном виде его решения, соответствующие изгибным собственным колебаниям сферического пояса.

В заключение, автор выражает искреннюю благодарность доктору физ.-мат. н. В. И. Малому за полезные советы и замечания при обсуждении работы, которые несомненно способствовали ее улучшению.

ЦНИИ проектстальконструкция

Поступила 28 XII 1979

Ս. Վ. ՔԱՉԱՆՅԱՆ

ՈՅԵՐԻԿ ԹԱՂԱԿԵԹԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ  
 ԼՈՐՈՐԱՆ ՀԱՄԱՐ ԱՍԻՐԳՏՈՏԱԿԱՆ ԿՈՏԵՅՈՒՄՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Պատշիկ մտազորութիւնում ստացվելի ևն սփերիկ թաղանթի տատանում-  
 ների հիմնական լուծումների համար արիմպատտական վերլուծութիւններ

Այդ ասիմպտոտիկաների հիման վրա զարգացվել է սֆերիկ թաղանթի տատանումների տարբեր ձևերի դասակարգումը: Ստացված ասիմպտոտական արտահայտությունները կիրառվում են նաև սֆերիկ դոտո սեփական տատանումների հաճախականության հաշվարկի համար:

## ASYMPTOTICS FOR SOLUTIONS OF THE EQUATIONS IN VIBRATION OF A SPHERICAL SHELL

S. V. BASILEVSKY

### S u m m a r y

First terms of asymptotic expansions for fundamental solutions of the equations in motion of a spherical shell are determined. Based on these asymptotics the classification of different types of vibrations of a spherical shell is given. The asymptotics are also applied to the calculation of frequencies of free vibrations of a spherical belt.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Лужин О. В. К вопросу о свободных колебаниях тонкой сферической оболочки. Строит. механика и расчет сооружений, 1961, № 3.
2. Лизарев А. Д. О низших частотах собственных осесимметричных колебаний неполюгих сферических оболочек. Инж. ж. МГТТ, 1967, № 3.
3. Wilktnson I. P., Kalnins A. On Nonsymmetric Dynamic Problems of Elastic Spherical Shells. Applied Mechanics, Tr. ASME, ser. E, 1965, vol. 32, No. 3.
4. Рабинович И. М., Лужин О. В. и др. Расчет сооружений на импульсивные воздействия. М., «Стройиздат», 1970.
5. Гольденвейзер А. А., Лилский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М., «Наука», 1979.
6. Гольденвейзер А. А. Качественный анализ свободных колебаний упругой тонкой оболочки. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, 94—108.
7. Малый В. И., Базилевский С. В. Об определении частот и форм свободных колебаний замкнутой сферической оболочки. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1980, т. XXXIII, № 5.
8. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., Мир, 1972.
9. Robin L. Fonctions spheriques de Legendro et fonctions spheroidal. Ed. Gauthier—Villars, Paris, 1957—1959.
10. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М., «Наука», 1977.

Н. В. БАНИЧУК, А. Д. ЛАРИЧЕВ

### ОПТИМИЗАЦИЯ БАЛОК С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ ОСНОВАНИЯ

В данной работе рассматривается задача определения формы балки на упругом основании. При фиксированном объеме материала максимизируется изгибная жесткость. Выводятся необходимые условия оптимальности и с их помощью проводятся аналитические исследования и численные расчеты. Изучается влияние упругости основания на оптимальные формы балок. Ранее задачи оптимизации стержней с учетом упругости заделки рассматривались в [1, 2].

§ 1. *Постановка задачи и условие оптимальности.* Рассмотрим в прямоугольной системе координат  $xu$  задачу о равновесии балки переменной толщины  $h=h(x)$ , лежащей на упругом основании ( $y \geq 0$ ) и шарнирно закрепленной в точках  $x = \pm l, y = 0$ . Балка нагружена распределенной нагрузкой  $q(x)$ . Возникающее распределение прогибов балки обозначим через  $u(x)$ . Предполагается, что реакция основания в точке  $x$  пропорциональна величине прогибов  $u(x)$ . Распределение прогибов находится из решения краевой задачи для уравнения равновесия

$$A_m (h^m u_{xx})_{xx} + Cu = q \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$(u)_{x=\pm l} = (h^m u_{xx})_{x=\pm l} = 0 \tag{1.2}$$

где константа  $C$  — жесткость основания, а  $m$  — параметр, определяющий структуру поперечного сечения балки. Для сплошных балок прямоугольного поперечного сечения переменной толщины  $h$  и постоянной ширины  $b$ , значение  $m$  равно 3, а  $A_3 = Eb^3/12$ . Для трехслойных балок прямоугольного поперечного сечения  $m = 1$ ,  $A_1 = EN^2 b^3/4(1-\nu^2)$ , где  $N$  — постоянная толщина среднего слоя. Переменная  $1/2 h(x)$  в последнем случае ( $m = 1$ ) имеет смысл толщины внешних армирующих слоев.

В качестве функционала задачи примем «податливость» упругой системы [3, 4]

$$K = \int_{-l}^l q u dx \tag{1.3}$$

Распределение толщины по балке выбирается в качестве искомой управляющей функции, причем рассматриваются такие распределения  $h(x)$ , для которых удовлетворяется изопериметрическое условие

$$\int_{-l}^l h(x) dx = V \quad (1.4)$$

где  $V$  — заданная константа.

Сведем задачу оптимизации (1.1)—(1.4) к вариационной задаче без дифференциальных связей. Для этого воспользуемся известным вариационным принципом, согласно которому действительное распределение прогибов  $u(x)$  доставляет минимум функционалу [5].

$$J = \int_{-l}^l (A_m h^m u_{xx}^2 + Cu^2 - 2qu) dx \quad (1.5)$$

Для действительного распределения прогибов справедливо также равенство  $K = -J$ . Учитывая равенство  $K = -J$  и вариационный принцип, получаем  $K = -\min_u J$ . Данная формула позволяет свести сформулированную выше задачу оптимизации (1.1)—(1.4) к вариационной задаче без дифференциальных связей

$$K_* = \min_h K = -\max_h \min_u J \quad (1.6)$$

Следует заметить, что минимум по  $u$  в (1.6) разыскивается для всех  $h$ , удовлетворяющих граничным условиям  $u(-l) = u(l) = 0$  (второе граничное условие (1.2) является естественным для функционала  $J$ ), а максимум ищется при изопериметрическом условии (1.4).

§ 2. Исследование условий оптимальности. Выпишем выражение для первой вариации функционала  $J$  через вариации  $\delta u$ ,  $\delta h$  и воспользуемся необходимым условием экстремума  $\delta J = 0$ . Из условия  $\delta J = 0$  и произвольности вариации  $\delta u$  ( $-l < x < l$ ) вытекает, что  $u$  удовлетворяет уравнению (1.1) и, кроме того, экстремальные распределения  $u$  и  $h$  подчинены равенству

$$\int_{-l}^l h^{m-1} u_{xx}^2 \delta h dx = 0 \quad (2.1)$$

Вариации  $\delta h$  в силу изопериметрического условия (1.4) должны удовлетворять ограничению

$$\int_{-l}^l \delta h dx = 0 \quad (2.2)$$

Из (2.1), (2.2) получаем искомое условие оптимальности

$$h^{m-1} u_{xx}^2 = \lambda^2 \quad (2.3)$$

Здесь  $\lambda^2$  — неизвестная постоянная (множитель Лагранжа), для определения которой служит изопериметрическое условие (1.4).

С использованием условия (2.3) приходим к замкнутой краевой задаче (1.1), (1.2), (1.4), (2.3), служащей для определения функций  $u$  и  $h$ . Соотношение (2.3) получено из условия стационарности интеграла  $J$  и, следовательно, представляет собой необходимое условие минимума функционала  $K$ .

В случае  $m = 1$  можно показать, что это условие является не только необходимым, но и достаточным [6].

§ 3. *Случай сосредоточенной нагрузки.* Если прикладываемая к балке нагрузка представляет собой сосредоточенную силу  $P\delta(x-x_0)$ , действующую в точке  $x = x_0$ , то податливость  $K = Pu(x_0)$  и сформулированная задача оптимизации сводится к минимизации величины прогиба  $u(x_0)$ . Предположим, что сила приложена в центре, то есть  $x_0 = 0$ . Для удобства, вместо задачи минимизации прогиба в этой точке при заданной нагрузке  $P$  рассмотрим двойственную ей задачу. Максимальное значение силы обозначим через  $P_*$ . В двойственной задаче величина прогиба в точке  $x_0 = 0$  предполагается заданной, то есть  $u(0) = v$  ( $v$  — заданная константа), а максимизируется значение силы  $P$ , вызывающей данный прогиб балки.

С учетом симметрии относительно точки  $x = 0$  приходим к вариационной задаче

$$P_* = \max_P \min_u \frac{2}{v} \int_0^l (A_m h^m u_{xx}^2 + Cu^2) dx \quad (3.1)$$

Внутренний минимум по  $u$  в (3.1) разыскивается на классе функций  $u$ , удовлетворяющих граничным условиям

$$u(0) = v, \quad u(l) = 0, \quad (h^m u_{xx})_{x=l} = 0 \quad (3.2)$$

$$u_x(0) = 0 \text{ при } h(0) \neq 0, \quad (h^m u_{xx})_{x=0} = 0 \text{ при } h(0) = 0 \quad (3.3)$$

Краевые условия (3.3) означают, что если толщина балки в точке  $x = 0$  отлична от нуля, то распределение прогибов в точке  $x = 0$  является гладкой функцией.

Исследование задачи (3.1)–(3.3) при  $C = 0$  содержится в работе [7].

§ 4. *Применение метода возмущений.* Для решения задачи оптимизации (3.1)–(3.3) воспользуемся методом возмущений и определим оптимальные формы сплошных балок ( $m = 3$ ) в случае малых жесткостей основания, то есть при  $C = \epsilon \ll 1$ . Представим искомые величины в виде рядов по малому параметру

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \dots, \quad h = h_0 + \epsilon h_1 + \dots, \quad P = P_0 + \epsilon P_1 + \dots \quad (4.1)$$

Аналогичное разложение используется и для  $\lambda$ . Подставим выражения (4.1) для  $u$ ,  $h$ ,  $P$ ,  $\lambda$  в основные соотношения задачи (уравнение равновесия  $A_m(h^3 u_{xx})_{xx} + Cu = 0$  ( $0 < x < l$ ), условие оптимальности, граничные условия, выражение для функционала и изопериметрическое условие) и

приравняем члены при одинаковых степенях  $v$ . Для отыскания величин нулевого приближения, отвечающих случаю отсутствия реакции основания ( $C = 0$ ), получим систему уравнений [7], решение которой имеет вид

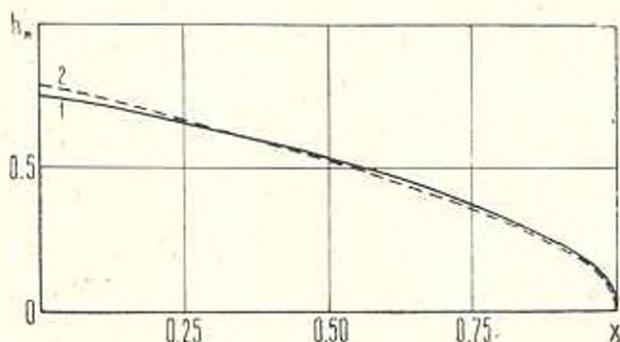
$$\begin{aligned} u_0 &= v(1-x/l)(3-2\sqrt{1-x/l}), \quad h_0 = 3/4V(1-x/l)^{1/2}l^{-1} \\ P_0 &= 81vA_3V^3/64l^6, \quad \lambda_0 = -9vV/8l^3 \end{aligned} \quad (4.2)$$

С учетом (4.2) красную задачу для отыскания величин первого приближения запишем в виде

$$\begin{aligned} A_3[h_0^2(h_0u_{1xx} + 3h_1u_{1xx})]_{xx} + u_0 &= 0 \quad (0 < x < l) \\ h_1u_{0xx} + h_0u_{1xx} &= \lambda_1 \quad (0 < x \leq l), \quad u_1(0) = 0 \\ u_1(l) = 0, \quad u_{1x}(0) = 0, \quad (u_{1xx}h_0^2 + 3h_0^2h_1u_{0xx})_{x=l} &= 0 \\ \int_0^l h_1 dx &= 0, \quad P_1 = \frac{2}{v} \left( A_3 l^{-1} \lambda_0 V + \int_0^l u_0^2 dx \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Определим величины первого приближения, позволяющие учесть зависимость от параметра  $C = v$ . С этой целью проинтегрируем уравнение (4.3) и определим четыре постоянные интегрирования и константу  $\lambda_1$  из изопериметрического условия и четырех граничных условий, приведенных в (4.3). Получим поправки к распределению толщин и значению силы в первом приближении

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{8l^6}{27A_3V^2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{1/2} \left[ \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \left(1 - \frac{16}{35} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{1/2}\right) - \frac{9}{35} \right] \\ P_1 &= \frac{8}{7} vl, \quad \lambda_1 = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$



Фиг. 1.

На фиг. 1 в безразмерных переменных  $x' = x/l$ ,  $h' = hl/V$  показаны распределения толщин оптимальных балок, причем кривым с номерами 1, 2 отвечают значения параметра  $C = 0$ ; 0.4. Из приведенных графиков и формулы (4.4) для  $h$  видно, что при увеличении параметра  $C$  увеличи-

вается толщина оптимальной балки и ее средней части, а толщина балки у ее концов уменьшается (происходит заострение). Решение задачи для больших значений  $C$  проводилось численно и результаты расчетов приведены в § 6.

§ 5. Аналитическое решение при  $m=1$ . Условие оптимальности при  $m=1$  примет вид  $u_{xx} = \lambda^2$ . Отсюда следует, что распределение прогибов для оптимальной балки удовлетворяет условию  $u_{xx} = \pm \lambda$ . Для оптимального решения таким образом допускаются разрывы второй производной функции прогибов. Исследуем сначала решение, для которого на всем интервале изменения  $x$  ( $x \in [0, l]$ ) функция  $u_{xx}$  не претерпевает разрывов и справедливо равенство  $u_{xx} = \lambda$ . Кроме того, будем предполагать  $u_x(0) = 0$ , что отвечает случаю  $h(0) \neq 0$ . На основании соотношения  $u_{xx} = \lambda$  с учетом граничных условий  $u(0) = v$ ,  $u(l) = 0$ ,  $u_x(0) = 0$  и формулы (3.1), получим

$$u = v \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{1/2} P_0 = \frac{4v}{l^2} \left(A_1 V + \frac{4}{15} C l^3\right) \quad (5.1)$$

Отметим, что условие оптимальности, граничные условия и распределение прогибов (5.1) не зависят от  $C$ . Подставим далее найденное выражение для  $u$  (5.1) в уравнение  $A_1(hu_{xx})_{xx} + Cu = 0$  ( $0 < x < l$ ), являющееся уравнением Эйлера для функционала (3.1). Получим уравнение второго порядка, служащее для определения функции  $h(x)$ . Для вычисления постоянных интегрирования используем изопериметрическое равенство (1.4) и условие  $h(l) = 0$ , вытекающее из соотношений  $u_{xx} = \lambda$ ,  $(hu_{xx})_{x=l} = 0$ . Выполняя интегрирование и вычисление констант, будем иметь

$$h = \frac{Cl^2}{24A_1} \left[ -\left(\frac{x}{l}\right)^4 + 6\left(\frac{x}{l}\right) - 5 \right] + \left(\frac{4Cl^2}{15A_1} + \frac{V}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (5.2)$$

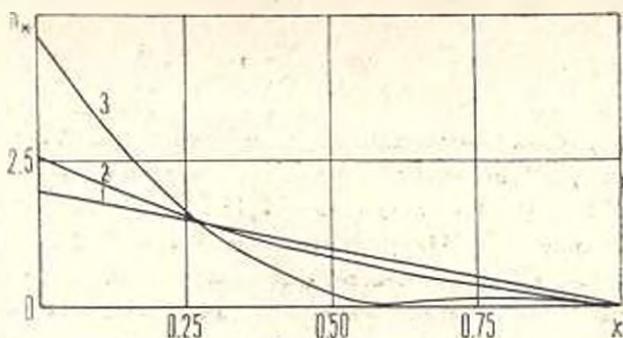
При отыскании решения (5.1), (5.2) предполагалось, что  $h(0) \neq 0$ ,  $u_x(0) = 0$ . Аналогично рассматривается случай, когда  $h(0) = 0$  и вместо условия  $u_x(0) = 0$  следует использовать граничное условие  $(hu_{xx})_{x=0} = 0$ . Не приводя здесь соответствующих выкладок, укажем, что получающееся при этом значение функционала меньше значения  $P_0$ , определяемого формулой (5.1). Поэтому решение, отвечающее случаю  $h(0) = 0$ , обеспечивает меньшую «жесткость» и не является оптимальным.

Исследуем область применимости решения (5.1), (5.2). Для этого заметим, что распределение толщин балки должно по смыслу задачи удовлетворять условию  $h(x) \geq 0$ , которое не учитывалось при построении решения. Накладывая это ограничение на решение (5.2) и проводя непосредственное исследование зависимости  $h$  от параметра  $C$ , получим следующее условие неотрицательности  $h$ :  $C \leq C_0 \equiv 15A_1 V^2$ . Приходим к выводу, что формулы (5.1), (5.2) определяют оптимальное решение при  $C \leq C_0$ .

При отыскании оптимального решения для  $C > C_0$  следует допустить наличие разрывов у функции  $u_x$ . В предполагаемых точках  $x_i$  разрыва  $u_x$  оптимальное решение должно удовлетворять условиям:

$$h(x_i) = 0, h_i(x_i - 0) = -h_i(x_i + 0), u_x(x_i - 0) = u_x(x_i + 0)$$

С использованием указанных дополнительных соотношений строились аналитические решения задач оптимизации для  $C > C_0$ , а при помощи условия  $h(x) \geq 0$  определялись интервалы изменения значений  $C$ , для которых построенные решения являются оптимальными. Опустим здесь из-за краткости изложения выкладки и получающиеся формулы и приведем лишь некоторые графики. Используем при этом безразмерные переменные  $x' = x/l$ ,  $h' = 2hl/V$ ,  $C' = 2CP/A_1V$ ,  $P' = P/A_1V$  (штрихи опускаем). На фиг. 2 кривыми 1, 2, 3 показаны оптимальные распре-

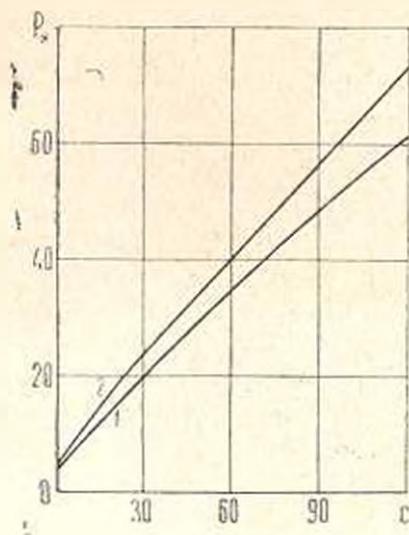


Фиг. 2.

деления толщины армирующих слоев балок для случаев  $C = 0, 10, 83$ . При отсутствии реакции основания ( $C = 0$ ) оптимальное распределение толщин является линейным. С увеличением  $C$ , как и для случая сплошных балок, происходит увеличение  $h$  в центре и уменьшение (заострение) у концов. При  $C > C_0$  толщина  $h$  обращается в нуль также в некоторой внутренней точке  $x_i$  интервала  $[0, 1]$  и оптимальная балка ( $-1 \leq x \leq 1$ ) „распадается“ на три балки, соединенные „шарнирами“. Для кривой 3, отвечающей случаю  $C = 83$ ,  $x_i = 0.6$ . Некоторые вопросы, связанные с появлением внутренних сингулярных точек, применительно к другим задачам оптимизации рассматривались ранее в работах [8, 9]. Решение задачи с одной точкой разрыва  $u_x$  для полубалки (двумя для балки) оказывается оптимальным при  $C_0 < C < C_1 \approx 417.738$  ( $C_1 \approx 208.869 A_1 V l^{-5}$  в размерных переменных). График зависимости  $P_*$  от  $C$  представлен на фиг. 3 кривой 1.

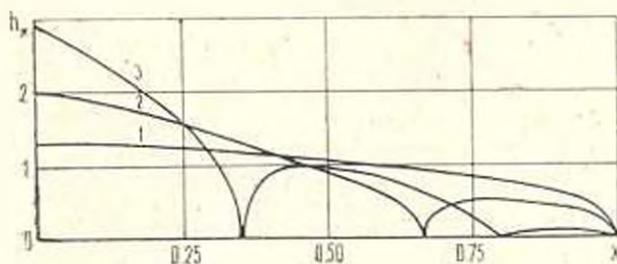
§ 6. Численное решение в случае  $m = 3$ . Для расчета сплошных балок ( $m = 3$ ) использовался алгоритм последовательной оптимизации, примененный ранее в работе [10] и учитывающий условие  $h(x) \geq 0$ . Алгоритм основывается на варьировании управляющей функции  $h$  и решении

«прямых» задач, заключающихся в отыскании функции прогибов для каждого текущего распределения толщин, то есть для каждой реализации  $h$ . В данном алгоритме для решения «прямых» задач используется метод локальных вариаций с переменными шагами паркирования, а для определения приближений управляющих функций  $h$  применяется метод проектиро-



Фиг. 3.

вания градиентов. В проведенных расчетах отрезок  $[0,1]$  разбивался на 50 равных частей, а критерием окончания счета служило условие  $|P(u^{j+1}, h^{j+1}) - P(u^j, h^j)| < 10^{-3}$ , где  $j$  — номер приближения. Для удобства проведения расчетов использовалось обезразмеривание  $C' = 8CF/A_2V^2$ ,  $P' = 4P/A_2V^2v$ , а безразмерные величины  $x'$ ,  $u'$ ,  $h'$  вводились теми же формулами, что и в § 5. Результаты численного расчета задачи при  $C=0$  сравнивались с аналитическим решением, полученным в [7], при этом отличие по функционалу не превосходило 1%. Полученные в результате расчетов при  $C=0, 128, 4096$  оптимальные распределения толщин для половины балки показаны на фиг. 4 кривыми 1, 2, 3. Как видно из графика, для  $C=128$  опти-



Фиг. 4.

мальное распределение толщин обращается в нуль во внутренней точке интервала  $[0, 1]$ , а при  $C=4096$  на указанном интервале по-

являются две точки, где  $h$  обращается в нуль (оптимальная балка „распадается“ на пять балок). Зависимость  $P_*$  от  $C$  представлена кривой 2 на фиг. 3.

Институт проблем  
механики АН СССР

Получила 14 I 1980

Ն. Վ. ԲԱՆԻՉՈՒԿ, Ա. Գ. ԼԱՐԻՉԵՎ

ՀՈՒՐԲԻ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ ՀԵՏԱՆՆԵՐԻ  
ՈՊՏԻՄԻԶԱՑԻԱՆ

Ս. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Ներկա աշխատանքում դիտարկվում է առաձգական հիմքի վրա դրանվոր հեծանի ձևի որոշման խնդիրը: Հեծանի նյութի հաստատուն ծավալի դեպքում մարսիմալացվում է ծաման կոշտությունը: Արտածվում են օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանները և նրանց օգնությամբ կատարվում են անալիտիկ ուսումնասիրություններ և թվային հաշվարկներ: Հետազոտվում է հիմքի առաձգականության ազդեցությունը հեծանների օպտիմալ ձևերի վրա:

OPTIMAL DESIGN OF THE BEAM ON AN ELASTIC  
FOUNDATION

N. V. BANICHUK, A. D. LARICHEV

S u m m a r y

The problems in optimal design of the beam, taking into account its elastic foundation, are considered. Necessary optimality conditions for beams of maximum rigidity are derived. Analytical and numerical solutions are obtained. Influence of elastic foundation on the optimal forms of the beams are investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баничук Н. В. Оптимизация устойчивости стержня с упругой заделкой. Изв. АН СССР, МТТ, 1974, № 4.
2. Gajewski A., Zyczkowski M. Optimal design of elastic columns subject to the general conservative behavior of loading. ZAMP, 1970, 21.
3. Wasitvynski Z. On the equivalence of design principles: minimum potential-constant volume and minimum volume-constant potential. Bull. Acad. Polonaise. Sci. Ser. Sci. Techn., 1966, vol. 14, No. 9.
4. Wasitvynski Z. On the criterion of minimum deformability design of elastic structures; effect of own weight of material. Bull. Acad. Polonaise. Sci., Ser. Sci. Techn., 1966, vol. 14, No. 9.
5. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970, с. 512.

6. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М., «Наука», 1980. с. 255.
7. Баничук Н. В. Об оптимальных формах упругих пластин в задачах изгиба. Изв. АН СССР, МТТ, 1975, № 5.
8. Olhoff N., Taylor J. Designing continuous columns for minimum total cost of material and interior supports. J. Struct. Mech., 1978, vol. 6, No. 4.
9. Bantchak N. V., Karthalo B. L. On the solution of optimization problems with singularities. Int. J. Solids and Struct., 1977, vol. 13, No. 8.
10. Баничук Н. В., Миронова А. А. Оптимизация частот колебаний упругой пластинки в идеальной жидкости. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.

Г. Б. ШАХАЗИЗЯН

СПЛЮЩИВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ  
 ОБОЛОЧКИ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ И СТАРЕНИЯ

Вопрос о деформировании тонких овальных оболочек (колец) при внешнем давлении рассмотрен многими исследователями.

Часть авторов представляет отклонение срединной линии оболочки от окружности пропорциональным косинусу двойного полярного угла, как было предложено С. П. Тимошенко [1]. Такой подход наблюдается в работах [6, 13, 15—17] и др.

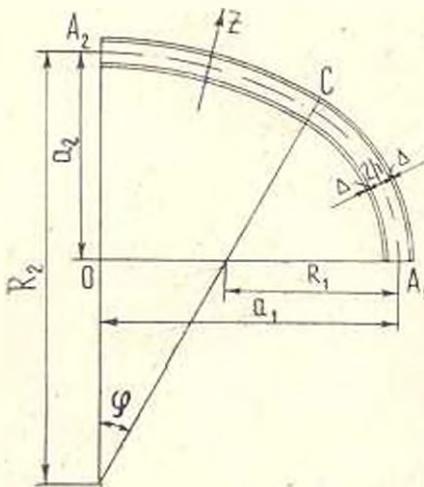
Однако задание формы срединной линии в таком виде не позволяет исследовать поведение оболочки при больших прогибах.

В работах [4, 5, 8—12] и др. форма некругового кольца в любой момент времени аппроксимируется сопряжением двух дуг окружностей, что позволяет исследовать деформирование вплоть до сплющивания.

Подробный анализ различных постановок исследования деформирования тонкостенных цилиндрических оболочек приведен в обзорной статье [10].

В данной работе рассматривается задача сплющивания длинной, слегка овальной, трехслойной цилиндрической оболочки под действием внешнего

равнораспределенного давления. Материал тонких внешних и внутренних слоев считается упругим, а для среднего слоя имеют место соотношения наследственной теории ползучести Г. Н. Маслова — Н. Х. Арутюняна [2].



Фиг. 1.

§ 1. Общие зависимости. Ввиду большой длины оболочки влиянием краевых закреплений можно пренебречь и рассматривать кольцо единичной ширины. Будем считать, что в любой момент времени кольцо имеет две оси симметрии и аппроксимируем форму кольца кривой, полученной сопряжением двух окружностей с радиусами  $R_1$  и  $R_2$

[4]. При этом в точке сопряжения С радиусы с меньшим диаметром кольца составляют угол  $\varphi$  (фиг. 1), значение которого до нагружения примем

$\varphi_0 = \pi/4$ . Кроме того, для простоты вычислений предполагаем, что длины дуг  $A_1C$  и  $A_2C$  срединной линии в процессе деформирования кольца не изменяются [10].

Принимаем гипотезу недеформируемых нормалей

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i - \varepsilon_i^* z \quad (1.1)$$

Индекс  $i$  здесь и всюду ниже будет принимать значения 1 и 2, соответствующие сечениям  $A_1$  и  $A_2$ .

Напряжения в крайних слоях определяются формулой

$$\sigma_{i,2} = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (\varepsilon_i \mp \varepsilon_i^* z) \quad (1.2)$$

В среднем слое согласно соотношениям [2] имеем

$$\sigma_i(t) = \frac{E_2(t)}{1-\nu^2} [\varepsilon_i(t) - \varepsilon_i^*(t) z] - \int_0^t \frac{E_2(\tau)}{1-\nu^2} [\varepsilon_i(\tau) - \varepsilon_i^*(\tau) z] R(t, \tau) d\tau \quad (1.3)$$

где

$$R(t, \tau) = \eta(\tau) - \gamma \left[ \frac{E_2(\tau)}{E_2(t)} - \frac{D(\tau)}{E_2(\tau)} \int_0^t E_2(y) e^{-\lambda(t-y)} dy \right] \quad (1.4)$$

Резольвента ядра ползучести —

$$K(t, \tau) = -E_2(\tau) \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{E_2(\tau)} + \varphi(\tau) [1 - e^{-\lambda(t-\tau)}] \right\} \quad (1.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \eta(\tau) &= \gamma [1 + \varphi(\tau) E_2(\tau)], & D(\tau) &= \eta'(\tau) + \eta(\tau) [\eta(\tau) - \gamma] \\ \varphi(\tau) &= C_0 + \frac{A_0}{\tau}, & E_2(\tau) &= E_0 (1 - \beta e^{-\lambda\tau}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для старого материала

$$\varphi(\tau) = C_0, \quad E_2(\tau) = E_0$$

Будем иметь

$$R(t, \tau) = \lambda e^{-\lambda(t-\tau)}; \quad \lambda = \gamma E_0 C_0; \quad \eta = \gamma (1 + E_0 C_0) \quad (1.7)$$

В сечениях результирующая сила  $N_i$  и результирующий момент  $M_i$  как функции напряжений имеют вид

$$\begin{aligned} N_i &= (\sigma_{i_0} + \sigma_{i_h}) \Delta + \int_{-h}^h \sigma_i dz \\ M_i &= (\sigma_{i_0} - \sigma_{i_h}) \Delta h + \int_{-h}^h \sigma_i z dz \end{aligned} \quad (1.8)$$

Используя выражения напряжений в слоях (1.2), (1.3) и (1.8), получаем

$$\begin{aligned}
 N_1(t) &= H \left\{ [E_2^*(t) + \nu E_1^*] e_1(t) - \int_{-h}^h E_2^*(z) e_1(z) R(t, z) dz \right\} \\
 M_1(t) &= -J \left\{ [E_2^*(t) + 3\nu E_1^*] z_1^*(t) - \int_{-h}^h E_2^*(z) z_1^*(z) R(t, z) dz \right\}
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

где

$$H = 2h, \quad J = \frac{2h^3}{3}, \quad \nu = \frac{\lambda}{h}, \quad E_2^*(t) = \frac{E_2(t)}{1-\nu^2}, \quad E_1^* = \frac{E_1}{1-\nu^2}
 \tag{1.10}$$

и

$$z_1^* = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$$

Здесь  $R_{1,2}$  — значения радиусов  $R$  до деформации оболочки.

§ 2. Условия статики. Уравнения равновесия четверти кольца запишем в виде

$$\begin{aligned}
 N_1 &= q_0 (a_1 + h), \quad N_2 = q_0 (a_2 - h) \\
 M_0 - M_1 &= 0.5 q_0 (a^2 - a_1^2)
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Из фиг. 1 имеем

$$\begin{aligned}
 a_1 &= R_1 + (R_2 - R_1) \sin \varphi \\
 a_2 &= R_2 - (R_2 - R_1) \cos \varphi
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Условие нерастяжимости дуг  $A_1C$  и  $A_2C$  дает

$$R_1 = \frac{R_{20}}{2 - \frac{4\varphi}{\pi}}, \quad R_2 = R_{20} \frac{\pi}{4\varphi}
 \tag{2.3}$$

Для удобства введем следующие безразмерные параметры

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{q_0}{E_1^*}, \quad \nu = 1 - \frac{4\varphi}{\pi}, \quad k = \frac{h}{R_{10}}, \quad E(t) = \frac{E_2^*(t)}{E_1^*} \\
 r_{20} &= \frac{R_{20}}{R_{10}}, \quad r_2 = \frac{R_2}{R_{10}}, \quad r_1 = \frac{R_1}{R_{10}}
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Из (2.3), учитывая (2.4), будем иметь

$$r_1 = \frac{1}{1 + \nu}, \quad r_2 = \frac{r_{20}}{1 - \nu}
 \tag{2.5}$$

Изменения кривизны (1.10) с учетом (2.3) и безразмерных параметров (2.4) и (2.5), принимают вид

$$x_1 = \frac{1}{r_1} - 1 = \psi, \quad x_2 = \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_{20}} = \frac{r_{20}}{1 - \psi} \quad (2.6)$$

Из моментного уравнения равновесия (2.1) с учетом (1.9), (1.10), (2.4), (2.6) получаем нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра относительно функций  $\psi(t)$

$$\begin{aligned} & \frac{2k^2(r_{20} + 1)}{3r_{20}} \left| (E + 3\mu)\psi - \int_0^t E\psi R(t, \tau) d\tau \right| = \\ & = q \left( \frac{r_{20}}{1 - \psi} - \frac{1}{1 + \psi} \right) \left\{ \frac{1}{1 + \psi} \left[ \sin \frac{\pi}{4} (1 - \psi) - \sin^2 \frac{\pi}{4} (1 - \psi) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{r_{20}}{1 - \psi} \left[ \cos \frac{\pi}{4} (1 - \psi) - \cos^2 \frac{\pi}{4} (1 - \psi) \right] \right\} \quad (2.7) \end{aligned}$$

откуда

$$q = \frac{2k^2(r_{20} + 1) \left| (E + 3\mu)\psi - \int_0^t E\psi R(t, \tau) d\tau \right|}{Q} \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} Q = & 3r_{20} \left( \frac{r_{20}}{1 - \psi} - \frac{1}{1 + \psi} \right) \left\{ \frac{1}{1 + \psi} \left[ \sin \frac{\pi}{4} (1 - \psi) - \sin^2 \frac{\pi}{4} (1 - \psi) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{r_{20}}{1 - \psi} \left[ \cos \frac{\pi}{4} (1 - \psi) - \cos^2 \frac{\pi}{4} (1 - \psi) \right] \right\} \end{aligned}$$

Подставляя выражение  $R(t, \tau)$  из (1.4) в (2.7), после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} & A \left\{ [E(t) + 3\mu]\psi(t) - \int_0^t E(\tau)\psi(\tau) \left| \tau(t) - \tau + \frac{E(\tau)}{E(t)} \right| d\tau + \right. \\ & \left. + \int_0^t D(\tau)\psi(\tau) e^{\int_0^\tau \gamma(t+\tau) d\tau} d\tau \int_0^\tau E(y) e^{-\int_0^y \gamma(t+\tau) d\tau} dy \right\} = q(t) \theta(\psi, t) \quad (2.9) \end{aligned}$$

где

$$A = \frac{2k^2(r_{20} + 1)}{3r_{20}} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \theta(\psi, t) = & \left( \frac{r_{20}}{1 - \psi} - \frac{1}{1 + \psi} \right) \left\{ \frac{1}{1 + \psi} \left[ \sin \frac{\pi}{4} (1 - \psi) - \sin^2 \frac{\pi}{4} (1 - \psi) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{r_{20}}{1 - \psi} \left[ \cos \frac{\pi}{4} (1 - \psi) - \cos^2 \frac{\pi}{4} (1 - \psi) \right] \right\} \end{aligned}$$

Применяя к (2.9) формулу Дирихле о преобразовании двукратного интеграла, дифференцируя по  $t$  и обозначая  $\psi = \omega$ , получим

$$A \left\{ [E(t) + 3\mu] \omega(t) - E(t) [\gamma(t) - \gamma] \dot{\psi}(t) + \right. \\ \left. + E(t) e^{-\int_{\gamma}^{\gamma(t)} \mu(\tau) d\tau} \int_{\gamma}^{\gamma(t)} D(\tau) \psi(\tau) e^{\int_{\gamma}^{\tau} \mu(\tau) d\tau} d\tau \right\} = q(t) \theta(\psi, t) + q(t) \theta(\psi, t) \quad (2.11)$$

Умножая обе части уравнения (2.11) на  $e^{-\int_{\gamma}^{\gamma(t)} \mu(\tau) d\tau}$ , дифференцируя по  $t$  и произведя необходимые выкладки, приходим к системе из двух дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \omega \\ \dot{\omega} = \frac{Q'}{A(E + 3\mu) - qB(\psi, t)} \end{cases} \quad (2.12)$$

где

$$Q' = qC(\psi, t) \omega^2 + \left[ [qB(\psi, t) - 3\mu A] \left( \gamma - \frac{E'}{E} \right) - \right. \\ \left. - A\gamma E + 2B(\psi, t)q \right] \omega + q^2 \left( \gamma - \frac{E'}{E} \right) + q^2$$

Здесь введены обозначения

$$B(\psi, t) = 2 \left| \left| \frac{1}{(1+\psi)^2} - \frac{r_{20}^2}{(1-\psi^2)^2} \right| \left| \sin \frac{\pi}{4} (1-\psi) - \sin^2 \frac{\pi}{4} (1-\psi) \right| + \right. \\ \left. + r_{20} \left| \frac{r_{20}}{(1-\psi)^2} - \frac{\psi}{(1-\psi^2)^2} \right| \left| \cos \frac{\pi}{4} (1-\psi) - \cos^2 \frac{\pi}{4} (1-\psi) \right| + \right. \\ \left. + \frac{\pi r_{20}}{8} \left| \frac{1}{1-\psi^2} - \frac{r_{20}}{(1-\psi)^2} \right| \left| \sin \frac{\pi}{2} (1-\psi) - \sin \frac{\pi}{4} (1-\psi) \right| + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{8} \left| \frac{r_{20}}{1-\psi^2} - \frac{1}{(1+\psi)^2} \right| \left| \sin \frac{\pi}{2} (1-\psi) - \cos \frac{\pi}{4} (1-\psi) \right| \right| \quad (2.13)$$

$$C(\psi, t) = 2 \left| \left| \frac{r_{20}(1+3\psi^2)}{(1-\psi^2)^2} - \frac{3}{(1+\psi)^2} \right| \left| \sin \frac{\pi}{4} (1-\psi) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sin^2 \frac{\pi}{4} (1-\psi) \right| + \frac{\pi}{2} \left| \frac{1}{(1+\psi)^2} + \frac{r_{20}^2}{(1-\psi^2)^2} \right| \left| \sin \frac{\pi}{2} (1-\psi) - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos \frac{\pi}{4} (1-\psi) \right| + r_{20} \left| \frac{3r_{20}}{(1-\psi)^2} - \frac{1+3\psi^2}{(1-\psi^2)^2} \right| \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ \cos \frac{\pi}{4} (1 - \psi) - \cos^2 \frac{\pi}{4} (1 - \psi) \right] + \\ & + \frac{\pi r_{20}}{2} \left| \frac{\psi}{(1 - \psi)^2} - \frac{r_{20}}{(1 - \psi)^3} \right| \left[ \sin \frac{\pi}{2} (1 - \psi) - \sin \frac{\pi}{4} (1 - \psi) \right] + \\ & + \frac{\pi^2 r_{20}}{32} \left| \frac{r_{20}}{(1 - \psi)^2} - \frac{1}{1 - \psi^2} \right| \left[ 2 \cos \frac{\pi}{2} (1 - \psi) - \cos \frac{\pi}{4} (1 - \psi) \right] + \\ & + \frac{\pi^2}{32} \left| \frac{1}{(1 + \psi)^2} - \frac{r_{20}}{1 - \psi^2} \right| \left[ 2 \cos \frac{\pi}{2} (1 - \psi) + \sin \frac{\pi}{4} (1 - \psi) \right] \} \end{aligned}$$

Принимая  $t = \tau_1$ , из (2.9) и (2.11) получим начальные условия системы дифференциальных уравнений (2.12)

$$\begin{aligned} & A[E(\tau_1) + 3\mu] \psi_1 = q(\tau_1) \theta(\psi_1) \\ m_1 &= \frac{E(\tau_1) [\gamma(\tau_1) - \gamma] \psi_1 + q(\tau_1) \theta(\psi_1)}{A[E(\tau_1) + 3\mu] - B(\psi_1) q(\tau_1)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

где  $\psi_1$  — действительный, наименьший, положительный корень первого (трансцендентного) уравнения начальных условий (2.14).

§ 3. Критическое время оболочки. В процессе сплющивания под действием равномерного давления кольцо деформируется так, что наибольший радиус  $R_1$  неограниченно увеличивается, появляется горизонтальный участок  $A.C$ , который затем начинает продавливаться.

Ограничимся определением времени  $T$ , при котором появляется горизонтальный участок  $A.C$  ( $R_2 \rightarrow \infty$ ) [5].

Время  $T$  назовем критическим временем сплющивания оболочки.

Определим значение  $q = q_0$ , при котором сплющивание происходит в начальный момент  $T = \tau_1$ . Из (2.8) при  $t = \tau_1$  и  $\psi \rightarrow 1$  ( $r_2 \rightarrow \infty$ ) имеем

$$q_0 = \lim_{r_2 \rightarrow \infty} q|_{t=\tau_1} = \frac{64 k^3 (r_{20} + 1)}{3\pi r_{20}^2 (\pi r_{20} + 4)} [E(\tau_1) + 3\mu] \quad (3.1)$$

$q_0$  назовем мгновенным критическим давлением. Длительное критическое давление  $q_{cr}$  определится из условия  $\psi \rightarrow 1$  при  $t \rightarrow \infty$ . В случае старого материала (1.7) предельным переходом при  $t \rightarrow \infty$  из (2.8) получим

$$q_{cr} = \frac{64 k^3 (r_{20} + 1)}{3\pi r_{20}^2 (\pi r_{20} + 4)} [E_{cr} + 3\mu] \quad (3.2)$$

где  $E_{cr} = \frac{E_0}{1 + E_0 C_0}$  [7], а  $E_0 = \frac{E_2}{E_1} \frac{1 - \nu_1^2}{1 - \nu_2^2}$

Для каждого значения  $q$ , находящегося между  $q_0$  и  $q_{cr}$ , существует критическое время  $T$ , при котором происходит «сплющивание» оболочки.

§ 4. Задача релаксации. Можно поставить обратную задачу. Определить закон изменения  $q(t)$ , при котором опальность кольца  $\delta = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}$  остается постоянной во времени  $\delta(t) = \delta(\tau_1) = \text{const.}$

Принимая в (2.8)  $\psi_1 = \psi(\tau_1) = \text{const}$ , получим

$$q(t) = A\psi_1 \frac{E(t) + 3\mu - \int_{\tau_1}^t E(\tau) R(t, \tau) d\tau}{Q} \quad (4.1)$$

$$Q'' = \left( \frac{r_{\infty}}{1-\psi_1} - \frac{1}{1+\psi_1} \right) \left\{ \frac{1}{1+\psi_1} \left[ \sin \frac{\pi}{4} (1-\psi_1) - \sin^2 \frac{\pi}{4} (1-\psi_1) \right] + \right. \\ \left. + \frac{r_{\infty}}{1-\psi_1} \left[ \cos \frac{\pi}{4} (1-\psi_1) - \cos^2 \frac{\pi}{4} (1-\psi_1) \right] \right\}$$

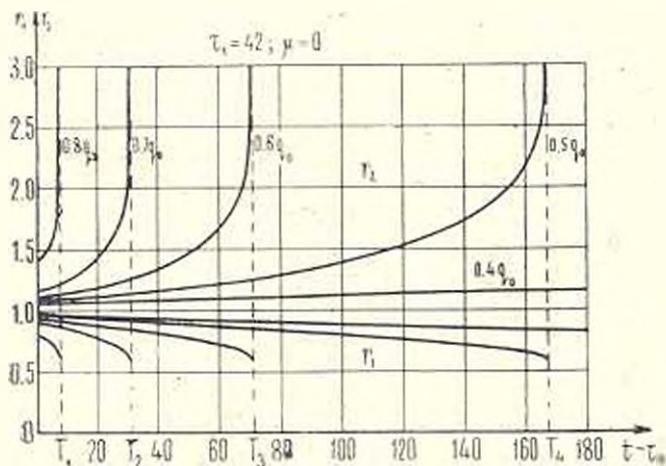
Отсюда

$$\frac{q(t)}{q(\tau_1)} = \frac{1}{E(\tau_1) + 3\mu} \left[ E(t) + 3\mu - \int_{\tau_1}^t E(\tau) R(t, \tau) d\tau \right] \quad (4.2)$$

Из выражения (4.2) следует, что  $q(t)$  — монотонно убывающая функция.

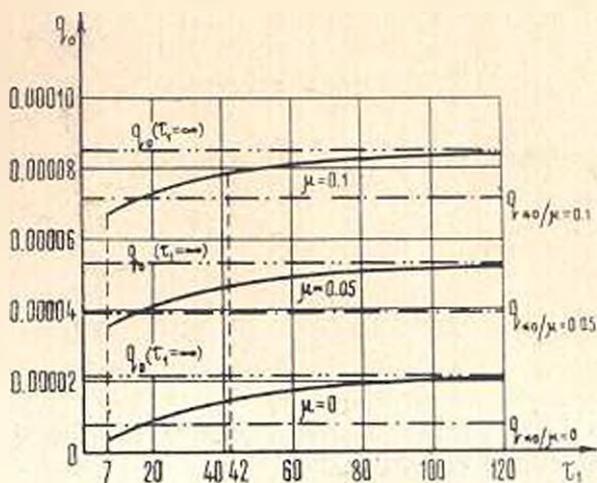
§ 5. Численный пример и основные выводы. В качестве примера возьмем железобетонную оболочку (трубу) под действием равномерного, постоянного давления  $q(t) = q = \text{const}$  с начальной овальностью  $\delta_0 = \frac{\alpha_{10} - \alpha_{20}}{\alpha_{10} + \alpha_{20}} = 0.01$  при значениях параметров  $E_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ ,  $A_0 = 4.82 \cdot 10^{-3}$ ,  $E_0 = 2 \cdot 10^7 \text{ кг/см}^2$ ,  $C_{11} = 0.9 \cdot 10^{-7} \text{ см}^2/\text{кг}$ ,  $\alpha = 0.03 \text{ 1/день}$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0.026 \text{ 1/день}$ .

На основании численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (2.12) с начальными условиями (2.14) и соотношения (2.5), а также уравнения (4.2), произведенного на ЭВМ «ЕС-1022», построены графики  $r_1(t)$  и  $r_2(t)$  от момента  $\tau_1$  до  $T$  (фиг. 2).

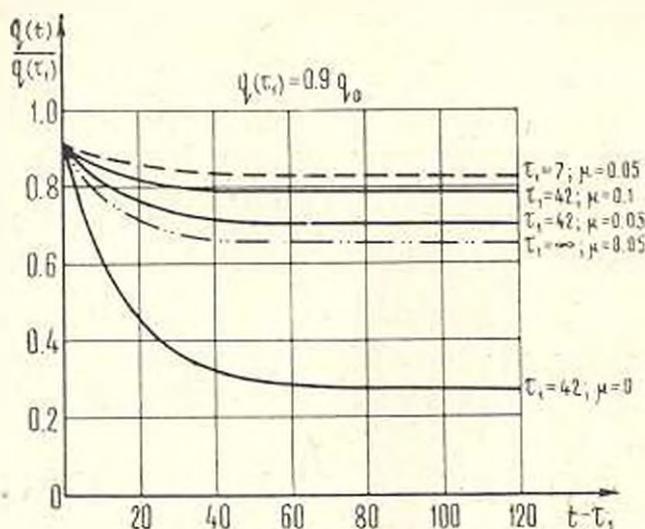


Фиг. 2.

Для разных значений  $\mu$  на фиг. 3 изображено  $q_0(\tau_1)$ . На фиг. 4 представлены кривые релаксации (4.2) для различных  $\mu$  и  $\tau_1$ , когда  $q(\tau_1) = 0.9 q_0$ .



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Из графиков заключаем, что с увеличением относительной толщины  $\mu$  усиливающих слоев значительно увеличиваются  $q_0$ ,  $q_{cr}$ , и  $q \cdot q_0$ .

Старение материала приводит к существенному увеличению критического давления мгновенной устойчивости  $q_0$  (фиг. 3).

При неизменной овальности (фиг. 4) процесс релаксации напряжений протекает интенсивнее с увеличением возраста материала  $\tau_1$  и уменьшением толщины усиливающих слоев  $\mu$ .

Автор выражает благодарность профессору Задоянну М. А. за постоянный интерес к работе.

Երևանский политехнический  
институт им. К. Маркса

Поступила 15 11 1980

Հ. Բ. ՇԱՀԱԶԻԶԻԱՆ

ԵՐԻՄՅԱՆ ԳՎԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆՔԻ ՏԱՓԱԿԱՑՈՒՄԸ ՍՈՂՔԻ  
ԵՎ ՄԵՐԱՑՄԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ

Ս. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Հողվածում բերվում է երկար, թեթևակի ձգված (օվալային), եռաշերտ գլանային թաղանթի տափակացման խնդիրը արտաքին հավասարաչափ բաշխված ճնշման ազդեցության տակ:

Բարակ արտաքին և ներքին շերտերի նյութը բնորոշվում է առաձգական, իսկ միջին շերտի համար հաշվի է առնվում սողքը բոլոր Մասլով-Հարությունյանի ժառանգականության տեսությամբ:

Հավասարակշռության հավասարումը բերվում է Վոլտերի տիպի ոչ-լիներյան ինտեգրալ հավասարման, որից ստացվում է առաջին կարգի փոփոխական գործակիցներով երկու դիֆֆերենցիալ հավասարումներից բաղկացած սիստեմ:

Երկաթբետոնե թաղանթի (խողովակի) օրինակի վրա ուժեղացնող շերտերի հարաբերական հաստության և բետոնի տարիքի տարբեր արժեքների դեպքում դիֆֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի թվային ինտեգրման արդյունքները ներկայացված են գրաֆիկների միջոցով:

Թաղանթի տափակացման ակնթարթային և երկարատև կրիտիկական ճնշման որոշման համար ստացված են անալիտիկ արտահայտություններ:

THE FLATTENING OF A THREE-SHEET CYLINDRICAL SHELL UNDER THE CONDITIONS OF CREEPING AND AGING

H. B. SHAHAZIZIAN

S u m m a r y

The problem for the flattening of a long, slightly oval, three-sheet cylindrical shell under the influence of uniformly distributed external pressure is considered.

The material of the thin external and internal layers is assumed to be elastic while for the middle layer the relations of the hereditary creeping theory of Maslov-Harutunian are valid.

The equation of equilibrium is finally reduced to Volterra's non-linear integral equation from which a system of two differential equations with variable factors is obtained.

The diagrams represent the results of numerical integration of the system of differential equations, exemplified by a reinforced concrete pipe with different relative thickness of strengthening layers and different age concrete.

Analytical expressions are obtained to determine the instantaneous and prolonged critical pressure for the flattening of the shell.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1946.
2. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М., ГИТТЛ, 1952.
3. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкции. М., «Наука», 1966.
4. Ванько В. И., Шестериков С. А. Сплющивание кольца в условиях ползучести. Инж. ж. МТТ, 1966, № 5, 127—130.
5. Кашелкин В. В., Шестериков С. А. Сплющивание кольца при неустановившейся ползучести. Вестник Моск. ун-та, 1969, № 3, 103—107.
6. Локощечко А. М., Шестериков С. А. Упруго-идеально-пластическое кольцо под внешним давлением. Инж. ж. МТТ, 1969, № 3, 125—126.
7. Малахова Н. А., Прокопovich И. Е. О влиянии ползучести на устойчивость и «большом». Строительная механика и расчет сооружений, 1968, № 5.
8. Кашелкин В. В., Локощечко А. М., Мякогин Е. А., Шестериков С. А. Сплющивание цилиндрических оболочек в условиях ползучести. теория и эксперимент. Инж. ж. МТТ, 1974, № 1.
9. Локощечко А. М., Шестериков С. А. Методика расчета на сплющивание цилиндрических оболочек в условиях ползучести. В сб. «Научные труды. Ин-т механики МГУ», М., 1973, № 23, 10—14.
10. Локощечко А. М. Поведение цилиндрической оболочки под внешним равномерно распределенным давлением. В сб. «Научные труды. Ин-т механики МГУ», М., 1975, № 37, 15—24.
11. Кашелкин В. В., Шестериков С. А. Сплющивание длинных цилиндрических оболочек с продольными ребрами. Инж. ж. МТТ, 1971, № 2, 106—110.
12. Ванько В. И., Шестериков С. А. Сплющивание цилиндрических оболочек конечной длины. В сб. «Прочность и пластичность», М., «Наука», 1971, 199—202.
13. Волчков Ю. М., Несимировский Ю. В. Несимметричное вынужденное сплющивание цилиндрических оболочек в условиях ползучести. Инж. ж. МТТ, 1967, № 4, 136—138.
14. Задоян М. А., Шаховизян Г. Б. О несущей способности круглой трехслойной плиты при ползучести. Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1978, т. 31, № 6.
15. Hoff N. J., Jasman W. E., Nachbar W. A study of creep collapse of a long circular cylindrical shell. J. Aerospace Sci., 1959, 26, No. 10, 663—669.
16. Wah T., Gregory R. K. Creep collapse of long cylindrical shells under high temperature and external pressure. J. Aerospace Sci., 1961, 28, No. 3, 177—188.
17. Serpico J. C. A study of creep collapse of a long circular cylindrical shell. J. Aerospace Sci., 1962, 29, No. 1, 1316—1323.