

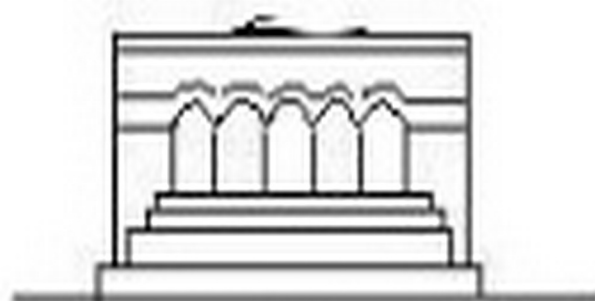
ՄԵԽԱՆԻԿԱ



МЕХАНИКА



MECHANICS



1980

С. М. МХИТАРЯՆ, А. А. ШЕКЯՆ

## О ВДАВЛИВАНИИ НЕЛИНЕЙНО ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА В ТОНКУЮ ПОЛОСУ, ЛЕЖАЩУЮ НА ДЕФОРМИРУЕМОМ ОСНОВАНИИ

Работа посвящена решению плоской контактной задачи нелинейной теории установившейся ползучести о давлении деформируемого твердого тела, следующего степенному закону связи между напряжениями и скоростями деформации, на бесконечную, тонкую полосу, свободно лежащую на основании типа Фрусса—Винклера. Для тонкой полосы принимается модель обычной балки, изгибаемой на линейно деформируемом основании указанного типа и также следующей степенному закону.

Плоская контактная задача нелинейной теории ползучести впервые была поставлена и решена Н. Х. Арутюняном и М. М. Манукяном [1, 2]. В работе [3] рассмотрена плоская контактная задача о давлении нелинейно деформируемого тела на свободно опертую упругую балку.

В настоящей работе при помощи выражений вертикальных перемещений такого нелинейного тела [2] и обычного уравнения изгиба балки поставленная задача формулируется в виде системы трех нелинейных интегральных и дифференциальных уравнений. В эти уравнения входят контактные давления, возникающие между телом и балкой, а также прогиб и изгибающий момент балки. Когда для балки связь между напряжениями и скоростями деформаций линейна, решение задачи приводится к решению одного нелинейного интегрального уравнения и оно решается на основе аппарата ортогональных многочленов Гегенбауэра и принципа сжатых отображений. Для этого случая приводятся приближенные аналитические выражения контактных давлений, меры опускания тела и величины контактной зоны.

Используя эти результаты, в рамках теории удара Герца рассмотрена задача о центральном ударе нелинейно деформируемого тела по ледяной пластинке, лежащей на упругом основании. Определены основные механические характеристики теории удара Герца.

Приведены численные результаты.

### § 1. Постановка задачи и вывод разрешающих уравнений

Пусть тело с гладкой поверхностью под действием внешних сил вдавливается в бесконечную балку, лежащую на упругом основании (фиг. 1). Как уже говорилось, для этого тела и балки принимается теория установившейся ползучести при степенном законе связи между интенсивностью скорости деформаций  $\dot{\epsilon}_a$  и интенсивностью напряжений  $\sigma_a$ :

$$z_i = A_i z_0^{m_i}, \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

где  $A_1, m_1$  и  $A_2, m_2$  — физические константы материала тела и балки соответственно, притом  $A_i > 0, 1 \leq m_i < 2$ ,

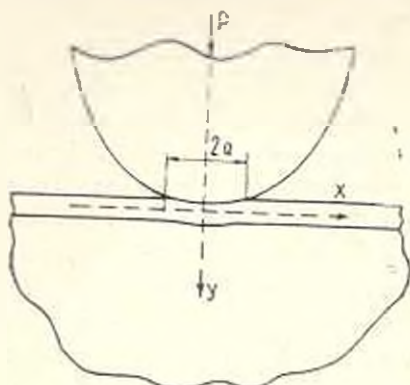
$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(z_1 - z_2)^2 + \dots + \frac{3}{2} (z_{12}^2 + \dots)}$$

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(z_1 - z_2)^2 + \dots + 6 (z_{12}^2 + \dots)}$$

Реологическое уравнение (1.1) имеет место для многих материалов. например, для льда [4], металлов [5] и др.

Если пренебречь трением между телом и балкой, вертикальные перемещения граничных точек тела  $v_1(x)$  от нормальных контактных напря-

ний  $p(x)$  для больших значений времени  $t$  в первом приближении выражаются формулой [2]



Фиг. 1.

$$v_1(x) = \eta \left| \int_{-a}^a \frac{p(s) ds}{|x-s|^{1-\mu}} \right|^{m-1} \times$$

$$\times \int_{-a}^a \frac{p(s) ds}{|x-s|^{1-\mu}}, \quad (m = m_1) \quad (1.2)$$

где  $\mu = 1/m$ ,  $a$  — полудлина участка контакта,

$$\eta = A_1 t^{\frac{1}{m-1}} \left[ 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(zm)|^{\frac{2\mu-1}{2\mu-1}} \cos z dz \right]^{m-1} \sin \frac{\pi \sqrt{2\mu-1}}{2\mu} \quad (1.3)$$

Теперь рассмотрим бесконечную балку, лежащую на сплошном упругом основании, под действием нормальных давлений  $p(x)$ . Относительно упругого основания примем известную гипотезу Фусса—Винклера, согласно которой реакция основания на балку в каждой точке пропорциональна осадке балки  $v_2(x)$ . Тогда уравнение равновесия даст  $(p(x) = 0$  при  $|x| > a)$

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -p(x) + kv_2(x), \quad (|x| < \infty) \quad (1.4)$$

где  $k$  — коэффициент постели упругого основания,  $M(x)$  — изгибающий момент в сечении балки. Далее, принимая гипотезу плоских сечений и имея в виду большие значения времени, дифференциальное уравнение изогнутой оси балки можно записать в следующем виде [5]:

$$\frac{d^2 v_2(x)}{dx^2} = -\beta |M(x)|^{m-1} M(x) \quad (|x| < \infty) \quad (1.5)$$

где

$$\beta = A_0 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{m+1} \left[ \int_F |y|^{m+1} dF \right]^{-1} \quad (1.6)$$

$F$  — площадь поперечного сечения балки.

Уравнения (1.4) и (1.5) вместе с известным условием контакта двух тел [6]

$$v_1(x) + v_2(x) = \delta - f(x), \quad |x| \leq a \quad (1.7)$$

составляют полную систему нелинейных определяющих уравнений. Здесь  $\delta$  — мера опускания тела,  $f(x)$  — форма основания тела, которая далее будет аппроксимирована параболой второго порядка —  $f(x) = cx^2$ . Исследование этой системы в общем случае связано с большими трудностями. Поэтому здесь ограничимся пока обсуждением частного случая, когда  $m_2 = 1$ , то есть рассмотрим случай линейно-ползучей балки.

Тогда из (1.4) и (1.5) получим

$$v_2(x) = \beta p \int_{-a}^x G\left(\frac{x-s}{l}\right) p(s) ds, \quad |x| < \infty \quad (1.8)$$

где

$$G(z) = \frac{1}{8} e^{-|z|} (\cos z + \sin |z|), \quad l = \sqrt[4]{\frac{4}{\beta k}} \quad (1.9)$$

Теперь, на основе соотношений (1.2), (1.7) и (1.8) окончательно получим следующее разрешающее нелинейное интегральное уравнение:

$$0 \left| \int_{-a}^x \frac{p(s) ds}{|x-s|^{1-\epsilon}} \right| \int_{-a}^{x-1} \frac{p(s) ds}{|x-s|^{1-\epsilon}} + \beta p \int_{-a}^x G\left(\frac{x-s}{l}\right) p(s) ds = \delta - cx^2 \quad (1.10)$$

$$(|x| \leq a)$$

Отметим, что точно такое же интегральное уравнение получается, если в (1.1) под  $\epsilon$  подразумевать попросту интенсивность деформаций. Следовательно, поставленную задачу можно трактовать также в рамках нелинейной теории упругости или деформационной теории пластичности при степенном упрочнении [5].

Решение уравнения (1.10) должно удовлетворять условию непрерывности напряжений в концах контактной зоны

$$p(-a) = p(a) = 0 \quad (1.11)$$

а также условию равновесия тела

$$\int_{-a}^a p(x) dx = P \quad (1.12)$$

где  $P$  — равнодействующая внешних сил.

Введем безразмерные величины

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad a_0 = \frac{a}{l}, \quad \delta_0 = \frac{\delta}{ca^2} \quad (1.13)$$

$$p_0(\xi) = \left(\frac{\eta}{ca}\right)^n p(x), \quad \lambda = \beta l^3 (cl)^{n-1} \eta^{-n}$$

Тогда уравнение (1.10) принимает вид

$$\left| \int_{-1}^1 \frac{p_0(\eta) d\eta}{|\xi - \eta|^{1-n}} \right|^{n-1} \int_{-1}^1 \frac{p_0(\eta) d\eta}{|\xi - \eta|^{1-n}} + \frac{\lambda}{a_0^{1-n}} \int_{-1}^1 G(|\xi - \eta| a_0) p_0(\eta) d\eta = \delta_0 - \xi^2 \quad (1.14)$$

а условия (1.11) и (1.12) — соответственно вид

$$p_0(-1) = p_0(1) = 0, \quad a_0^{1+n} \int_{-1}^1 p_0(\eta) d\eta = \frac{P}{l} \left( \frac{a}{cl} \right)^n \quad (1.15)$$

Таким образом, решение задачи сводится к определению  $p_0(\xi)$ ,  $\delta_0$  и  $a_0$  из (1.14) — (1.15). После того, как будут известны эти величины, на основе (1.13) и (1.8) непосредственно определим  $a$ ,  $\delta$ ,  $p(x)$  и  $v_2(x)$ .

§ 2. Сведение разрешающего нелинейного интегрального уравнения (1.14) к бесконечной системе нелинейных алгебраических уравнений и ее исследование

Сначала построим решение интегрального уравнения (1.14) при  $\lambda = 0$ , то есть когда пластинка абсолютно жесткая. С этой целью предварительно рассмотрим интегральное уравнение

$$\left| \int_{-1}^1 \frac{q(\eta) d\eta}{|\xi - \eta|^{1-n}} \right|^{n-1} \int_{-1}^1 \frac{q(\eta) d\eta}{|\xi - \eta|^{1-n}} = \gamma - \xi^2, \quad (|\xi| \leq 1) \quad (2.1)$$

решение которого должно быть подчинено условиям

$$q(-1) = q(1) = 0 \quad (2.2)$$

Уравнение (2.1) преобразуем к эквивалентному виду

$$\int_{-1}^1 \frac{q(\eta) d\eta}{|\xi - \eta|^{1-n}} = |\gamma - \xi^2|^{1-1/n} (\gamma - \xi^2), \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad (2.3)$$

Решение уравнения (2.3), удовлетворяющее условиям (2.2), представим в виде ряда

$$q(\xi) = (1 - \xi^2)^{1-1/n} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n C_n^{1/n}(\xi), \quad \mu = \frac{n}{2}, \quad \nu = \frac{1-n}{2} \quad (2.4)$$

где  $\gamma_n$ ,  $n=0$  — неизвестные коэффициенты,  $C_n^{\nu}(z)$  — многочлены Гегенбауара. Далее вычислим интеграл

$$\psi_n(\xi) = \int_{-1}^1 |\xi - \eta|^{\mu-1} (1 - \eta^2)^{1-\mu} C_n^{\nu+1}(\eta) d\eta, \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (2.5)$$

Учитывая известные соотношения (см. [7], стр. 220 и [8])

$$(1 - \mu) \frac{d}{d\xi} [(1 - \xi^2)^{1-\mu} C_n^{\nu+1}(\xi)] = -(n+1)(n+2-\mu)(1 - \xi^2)^{-\mu} C_{n+1}^{\nu}(\xi) \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (2.6)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{(1 - \eta^2)^{-\mu}}{|\xi - \eta|^{1-\mu}} C_n^{\nu}(\eta) d\eta = \frac{\pi \Gamma(n+1-\mu)}{\Gamma(1-\mu) n! \sin \pi \mu} C_n^{\nu}(\xi) \quad (2.7)$$

после некоторых преобразований интеграл (2.5) приведем к виду

$$\begin{aligned} \psi_n(\xi) &= \frac{\pi \Gamma(n+3-\mu)}{\Gamma(2-\mu) n! \sin \pi \mu} \int_{-1}^1 C_{n+1}^{\nu}(\eta) d\eta + \\ &+ \frac{\pi \mu (-1)^n \Gamma(n+1-\mu) \Gamma(n+3-\mu)}{\Gamma(1-\mu) \Gamma(2-\mu) n! (n+2)! \sin \pi \mu} \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $\Gamma(z)$  — гамма-функция.

Подставив (2.4) в (2.3) и учитывая (2.5) и (2.8), а также ортогональность многочленов Гегенбауэра, получим

$$c_n = 4\mu b_n \int_0^1 |\gamma - \xi^2|^{\mu-1} \xi \varphi_n(\xi) d\xi, \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\Gamma(2-\mu)(2n)! \sin \pi \mu}{\pi \Gamma(2n+3-\mu) h_{2n-1}}, \quad \varphi_n(\xi) = \frac{1}{h_{2n-1}} (1 - \xi^2)^{-\mu} C_{2n+1}^{\nu}(\xi) \\ h_n &= \left\{ 2 \int_0^1 (1 - \xi^2)^{-\mu} [C_n^{\nu}(\xi)]^2 d\xi \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{\pi 2^{\mu} \Gamma(n+1-\mu)}{\Gamma^2(\nu)(n+\nu) n!} \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Таким образом, решение интегрального уравнения (2.3) при условиях (2.2) мы получим в виде (2.4), где  $\varphi_n(n = 0, 1, \dots)$  дается формулой (2.9). Но решение интегрального уравнения (2.3), удовлетворяющее условиям (2.2), существует, как обычно, только при определенном условии, накладываемом на его правую часть, то есть на значение параметра  $\gamma$ . Выведем это дополнительное условие, точнее уравнение, откуда может быть определена  $\gamma$ . С этой целью умножим обе части уравнения (2.3) на  $(1 - \xi^2)^{-\mu}$  и проинтегрируем в пределах  $-1 \leq \xi \leq 1$ . Меняя последовательность интегрирования и учитывая (2.7) при  $n = 0$ , (2.4), а также ортогональность многочленов Гегенбауэра, находим

$$\frac{\pi \gamma_0}{\sin \pi \mu} = \int_0^1 |\gamma - \xi^2|^{\mu-1} (\gamma - \xi^2) (1 - \xi^2)^{-\mu} d\xi$$

Теперь, подставив сюда значение  $\gamma$ , полученное из (2.9), будем иметь

$$J(\gamma) = \int_0^1 |\xi - \xi^2|^{-1} \left( \gamma - \frac{1+\mu}{1-\mu} \xi^2 \right) (1 - \xi^2)^{-\mu} d\xi = 0 \quad (2.11)$$

которое и представляет собой искомое уравнение для определения  $\gamma$ . Покажем, что уравнение  $J(\gamma) = 0$  имеет единственное вещественное решение, притом оно находится в интервале  $1 < \gamma < (1+\mu)/(1-\mu)$ . Действительно, из (2.11) видно, что

$$J(1) = -\frac{\mu \Gamma(\mu/2) 1^{-\mu}}{2(1-\mu) \Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}\right)} < 0, \quad J\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) > 0$$

и так как функция  $J(\gamma)$  непрерывная, то по теореме Коши в указанном интервале она имеет по крайней мере один корень. Этот корень единственный, так как в этом же интервале

$$\frac{dJ(\gamma)}{d\gamma} = \mu \int_0^1 (\gamma - \xi^2)^{-2} (\xi + \xi^2) (1 - \xi^2)^{-\mu} d\xi > 0$$

то есть функция  $J(\gamma)$  монотонно возрастающая. Далее, очевидно, что при  $-\infty < \gamma < 0$   $J(\gamma) < 0$ , а при  $(1+\mu)/(1-\mu) < \gamma < \infty$   $J(\gamma) > 0$  и поэтому уравнение  $J(\gamma) = 0$  может иметь еще корни только в интервале  $0 < \gamma < 1$ . Но легко видеть, что одновременно с  $J(1) < 0$  и  $J(0) < 0$  и, кроме того, в этом интервале  $J'(\gamma) > 0$ , вследствие чего указанное уравнение при  $0 < \gamma < 1$  корней не имеет.

Перейдем теперь к решению нелинейного интегрального уравнения (1.14) при условиях (1.15). Его решение представим в виде ряда

$$p_0(\xi) = (1 - \xi^2)^{1-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n x_n) C_{2n}^{1-\mu}(\xi), \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad (2.12)$$

где  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  — неизвестные коэффициенты.

Дифференцируя уравнение (1.14) по  $\xi$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \int_{-1}^1 \frac{p_0(\eta) d\eta}{|\xi - \eta|^{1-\mu}} = -\mu \left| \int_{-1}^1 \frac{p_0(\eta) d\eta}{|\xi - \eta|^{1-\mu}} \right|^{1-\mu} \times \\ \times \left[ 2\xi + \frac{\mu}{a_0^{1-\mu}} \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial \xi} G(|\xi - \eta| a_0) p_0(\eta) d\eta \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Далее, подставив (2.12) в (2.13) и учитывая (2.5) и (2.8), будем иметь

$$x_n = \mu \int_{-1}^1 \left| \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma_k + b_k x_k) \psi_{2k}(\xi) \right|^{p-m} \left[ 2\xi + \right. \\ \left. + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma_k + b_k x_k) g_k(\xi, a_0) \right] \varphi_n(\xi) d\xi = \frac{\gamma_n}{\theta_n}, \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (2.14)$$

где

$$g_n(\xi, a_0) = a_0 \int_{-1}^1 G'(|\xi - \eta| a_0) \operatorname{sgn}(\xi - \eta) (1 - \eta^2)^{1-m} C_{2n}^{m-1}(\eta) d\eta \quad (2.15)$$

Так как  $\gamma > 1$ , то с учетом (2.3) — (2.5) систему (2.14) можно привести к виду

$$x_n = \int_{-1}^1 F(\xi, X, a_0) \varphi_n(\xi) d\xi, \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (2.16)$$

где

$$F(\xi, X, a_0) = \mu \left| (\gamma - \xi^2)^p + \sum_{k=0}^{\infty} x_k b_k \psi_{2k}(\xi) \right|^{p-m} \left[ 2\xi + \right. \\ \left. + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma_k + x_k b_k) g_k(\xi, a_0) - 2\mu \xi (\gamma - \xi^2)^{m-1} \right], \quad X = (x_0, x_1, \dots) \quad (2.17)$$

(2.16) является бесконечной системой нелинейных алгебраических уравнений, откуда определяются неизвестные коэффициенты  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ .

Покажем, что существует интервал изменения характерных параметров  $\lambda$  и  $\mu$ , входящих в (2.17), в котором при любом  $a_0 > 0$  систему (2.16) и ее укороченную конечную систему можно решить методом последовательных приближений. С этой целью, как и в [9], введем в рассмотрение  $(N+1)$ -мерное евклидово вещественное пространство  $E_{N+1}$  с метрикой

$$\rho(X_N, Y_N) = \sqrt{\sum_{n=0}^N (x_n - y_n)^2}, \quad X_N = (x_0, \dots, x_N), \\ Y_N = (y_0, \dots, y_N)$$

Пусть  $S[O_N, R]$  — замкнутый шар в  $E_{N+1}$  с центром в точке  $O_N = (0, \dots, 0)$  и радиусом  $R$ . Пусть, далее, в  $S[O_N, R]$  задан оператор  $Y_N = B(X_N)$ , определяемый формулами

$$y_n = \int_{-1}^1 F(\xi, X_N, a_0) \varphi_n(\xi) d\xi, \quad n = 0, \dots, N \quad (2.18)$$

где  $F(\xi, X_N, a_0)$  выражается формулой (2.17), когда  $x_{N+1} = x_{N+2} = \dots = 0$ .

Используя неравенство Бесселя, из (2.18) имеем

$$\sum_{n=0}^N y_n^2 \leq \int_{-1}^1 F^2(\xi, X_N, a_0) (1 - \xi^2)^{-m} d\xi \quad (2.19)$$

Далее воспользуемся неравенством Коши—Буняковского для сумм. Тогда из (2.17)

$$|F(\xi, X_N, a_0)| \leq \frac{2(1-\mu)R|\xi|\psi(\xi)}{[(\gamma - \xi^2)^m - R\psi(\xi)]^m} + \lambda[g^*(\xi) + Rg(\xi)] \quad (2.20)$$

где

$$\psi(\xi) = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 \xi_{2n}^2(\xi)}, \quad g^*(\xi) = \max_{a_0 \geq 0} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n g_n(\xi, a_0) \right|$$

$$g(\xi) = \max_{a_0 \geq 0} \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 g_n^2(\xi, a_0)}$$

При получении (2.20) принималось, что

$$R < \min_{0 \leq \xi \leq 1} \{\psi^{-1}(\xi) (\gamma - \xi^2)^m\} \quad (2.21)$$

Из (2.19) и (2.20) следует, что если

$$\int_{-1}^1 \left\{ \frac{2|\xi|(1-\mu)\psi(\xi)}{[(\gamma - \xi^2)^m - R\psi(\xi)]^m} + \lambda[g^*(\xi)R^{-1} + g(\xi)] \right\}^2 (1 - \xi^2)^{-m} d\xi \leq 1 \quad (2.22)$$

то оператор  $Y_N = B(X_N)$  отображает замкнутый шар  $S[0_N, R]$  в себя. Пусть, теперь  $X_N^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) — два произвольных элемента из  $S[0_N, R]$  и  $Y_N^{(i)} = B(X_N^{(i)})$ . Тогда из (2.18) будем иметь

$$\sum_{n=0}^N (y_n^{(1)} - y_n^{(2)})^2 \leq \int_{-1}^1 [F(\xi, X_N^{(1)}, a_0) - F(\xi, X_N^{(2)}, a_0)]^2 (1 - \xi^2)^{-m} d\xi \quad (2.23)$$

При помощи неравенства Коши—Буняковского для сумм из (2.17) получим

$$|F(\xi, X_N^{(1)}, a_0) - F(\xi, X_N^{(2)}, a_0)| \leq \left\{ (1 - \mu) \frac{2|\xi| + \lambda g^*(\xi) + \lambda Rg(\xi)}{[(\gamma - \xi^2)^m - R\psi(\xi)]^m} + \right.$$

$$\left. + \lambda\mu[(\gamma - \xi^2)^m - R\psi(\xi)]^{1-m} g(\xi) \right\} \psi(X_N^{(1)}, X_N^{(2)}) \quad (2.24)$$

С учетом же (2.23) и (2.24) находим, что если

$$\int_{-1}^1 \left| \frac{2|\xi| + \lambda g^*(\xi) + \lambda R g(\xi)}{[(\gamma - \xi^2)^k - R^2 g(\xi)]^m} (1 - \mu) + \right. \\ \left. + \mu [(\gamma - \xi^2)^k - R^2 g(\xi)]^{1-m} g(\xi) \right|^2 (1 - \xi^2)^{-m} d\xi < 1 \quad (2.25)$$

то оператор  $Y_N = B(X_N)$  в замкнутом шаре  $S\{O_N, R\}$  сжимающий. Отметим, что если  $R$  выбрать таким образом, чтобы условие (2.21) выполнялось, то условия (2.22) и (2.25) будут выполнены при малых  $\lambda$  и при  $\mu$ , близких к 1. Тогда на основе принципа сжатых отображений [10] существует единственное решение системы уравнений  $X_N = B(X_N)$  и это решение можно найти методом последовательных приближений, исходя от любого начального значения  $X_N^0 = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_N^0)$  из  $S\{O_N, R\}$ .

Совершенно аналогичным способом можно показать, что при выполнении условий (2.21), (2.22) и (2.25) бесконечная система (2.16) также имеет единственное решение, которое можно построить методом последовательных приближений, исходя из произвольной точки  $X^0 = (x_0^0, x_1^0, \dots)$ , для которой  $(x_0^0)^2 + (x_1^0)^2 + \dots \leq R^2$ . Кроме того, при помощи теоремы А. Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [11] можно доказать, что решение укороченной системы  $X_N = B(X_N)$  при  $N \rightarrow \infty$  совпадает с решением бесконечной системы (2.16).

Отметим, что решение системы (2.16), в частности, коэффициент  $x_0$  зависит от неизвестного параметра  $a_0$ . Для определения  $a_0$  имеем уравнение

$$a_0 (\gamma_0 + b_0 x_0)^k = P_0 \quad (2.26)$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \mu}, \quad P_0 = \frac{\Gamma(2 + \mu)}{\Gamma(2 - m) \Gamma(\mu)} \left( \frac{\theta}{lc} \right)^\mu P \quad (2.27)$$

которое получается при подстановке (2.12) в (1.15).

Далее, считая, что  $a_0$  и  $p_0(\xi)$  уже известны и подставив в (1.14)  $\xi = 1$ , для  $\delta_0$  получим выражение

$$\delta_0 = 1 + \left| \int_{-1}^1 (1 - \gamma)^{m-2} p_0(\gamma) d\gamma \right|^m + \frac{\lambda}{a_0^{1-\mu}} \int_{-1}^1 G(a_0 - a_0 \gamma) p_0(\gamma) d\gamma \quad (2.28)$$

В случае  $\lambda = 0$  из (2.28) непосредственно получим  $\delta_0 = \gamma$ . Пусть параметры  $R$ ,  $\mu$  и  $\lambda$  таковы, что условия (2.21), (2.22) и (2.25) выполнены. Тогда в нулевом приближении, когда  $x_0^0 = x_1^0 = \dots = 0$ , будем иметь

$$a_0 = P_0^{-1/\varepsilon}, \quad p_0(\xi) = q(\xi) \quad (2.29)$$

$$\dot{\gamma}_0 = \gamma + \lambda a_0^{\mu-1} \int_{-1}^1 G(a_0 - a_0 \gamma_i) q(\gamma_i) d\gamma_i \quad (2.29)$$

где  $\gamma$  определяется из (2.11), а  $q(\xi)$  и  $\gamma_0$  — с помощью (2.4) и (2.9).

Решение системы (2.16) в первом приближении имеет вид

$$x_n = \lambda \mu \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \int_{-1}^1 (\gamma - \xi^2)^{\mu-1} g_k(\xi, a_0) \varphi_n(\xi) d\xi, \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (2.30)$$

Для определения  $a_0$  в первом приближении получим уравнение

$$a_0 = P_0 \left\{ \gamma_0 + \lambda \mu b_0 \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \int_{-1}^1 (\gamma - \xi^2)^{\mu-1} g_k(\xi, a_0) \gamma_0(\xi) d\xi \right\}^{-1} \quad (2.31)$$

а для  $P_0(\xi)$  — формулу

$$P_0(\xi) = (1 - \xi^2)^{1-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \gamma_n + \lambda \mu b_n \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \int_{-1}^1 (\gamma - \xi^2)^{\mu-1} g_k(\gamma, a_0) \varphi_n(\gamma) d\gamma \right\} C_{2k}^{1+\mu}(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (2.32)$$

Для достаточно малых значений  $P_0$ , на основе формул (2.26) и (2.28), (2.30) и (1.13), можно получить приближенные выражения

$$a = l P_0^{-1} [\gamma_0^{-2} + \lambda_1 P_0^{\mu} + O(P_0^{2\mu})] \quad (2.33)$$

$$z = c l^2 P_0 [\lambda_2 + \gamma_0^{-2\mu} \gamma P_0^{\lambda} - \lambda_1 \lambda_2 (1 + \mu) \gamma_0^2 P_0^{\mu} + O(l^2)] \quad (2.34)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{3}{2} \lambda \mu b_0 \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(\xi - \gamma) (\gamma - \xi^2)^{1-\mu} \varphi_0(\xi) C_{2k}^{1+\mu}(\gamma) d\xi d\gamma$$

$$\lambda_2 = \lambda \gamma_0^{1+\mu} \frac{9\Gamma(2-\mu) \Gamma(3\mu)}{32\Gamma(2+\mu)}, \quad \mu = \frac{1-\nu}{1+\nu}$$

§ 3. Задача о центральном ударе нелинейно-деформируемого тела по ледяной пластинке, лежащей на упругом основании

В этой задаче, основанной на теории удара Герца [12], могут быть применены результаты предыдущего параграфа, так как при ударе деформации льда можно считать линейно упругими.

Уравнение движения тела и начальные условия имеют соответственно вид

$$M \frac{d^2 \delta}{dt^2} = -P, \quad \delta|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{d\delta}{dt} \right|_{t=0} = V \quad (3.1)$$

где  $M$  — масса тела,  $\delta$  — мера опускания тела,  $t$  — время,  $P$  — равнодействующая контактных давлений,  $V$  — скорость приближения тела к пластинке в момент соударения.

Для интегрирования дифференциального уравнения (3.1) в качестве зависимости между  $\delta$  и  $P$  принимается зависимость, выражаемая формулами (2.34) и (2.27). Тогда способом, вполне аналогичном изложенному в работе [13], основные механические характеристики теории удара Герца будут даваться формулами:

$$\begin{aligned} \delta_{\max} &= V_1 \left[ 1 + \frac{B}{2 + \mu} V_1^4 + O(V_1^{2\mu}) \right] \\ P_{\max} &= A V_1 \left[ 1 - \frac{2B}{3 + \mu} V_1^4 + O(V_1^{2\mu}) \right] \\ a_{\max} &= \frac{1}{(Mcl^2\lambda_2)^{1/2}} \left[ \gamma_0 - \left( \frac{\lambda_1 V_1}{Mcl^2\lambda_2} \right)^{1/2} - \frac{2B\gamma_0}{3 + \mu} V_1^4 + O(V_1^{2\mu}) \right] \\ T &= \frac{1}{V A} \left[ \pi + \frac{2B}{2 + \mu} \int_0^1 \frac{(1 - x^{2+\mu}) dx}{V(1 - x^2)^{1/2}} \right] V_1^4 + O(V_1^{2\mu}) \end{aligned}$$

где  $T$  — продолжительность удара,

$$V_1 = \frac{V}{V A}, \quad A = \frac{\Gamma(2 - \mu) 1 - \pi}{M \Gamma(2 + \mu) c l^2 \lambda_2} \left( \frac{cl}{\theta} \right)^{\mu}, \quad B = \frac{\gamma_0^{-2\mu} \gamma}{\lambda_2 (c l^2 \lambda_2)^{\mu}}$$

#### § 4. Численный пример

Для некоторых конкретных значений характерных параметров  $\mu$ ,  $\lambda$  и  $P_0$  на ЭВМ ЕС-1022 проведен численный анализ полученных результатов.

Решено трансцендентное уравнение (2.11) и результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1

$\mu$	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5
$\gamma$	9.07422	4.14941	2.55957	1.80664	1.39453

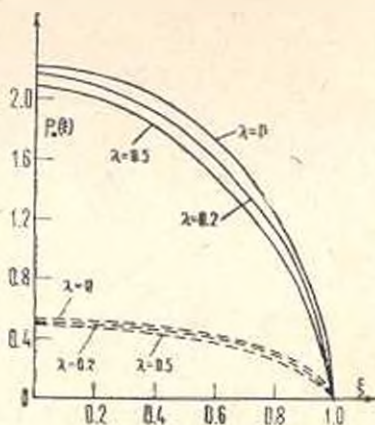
Таблица 2

$\mu \backslash n$	0	1	2	3	4
0.9	2.23478	-0.00232	-0.00905	-0.00468	-0.001674
0.7	0.52597	0.01234	0.00021	-0.00048	-0.00039

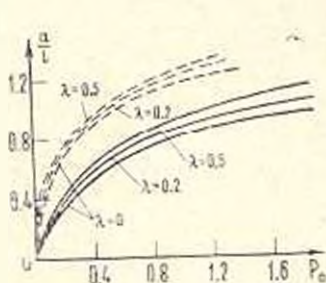
В табл. 2 приведены значения коэффициентов  $[\gamma_n]_{n=0}^4$ , определяемые формулами (2.9).

Когда  $\mu = 0.9; 0.7$  и  $\lambda = 0; 0.2; 0.5$ , притом пары  $(0.9; 0)$ ,  $(0.7; 0)$  и  $(0.9; 0.2)$  заведомо входят в (2.22) и (2.25), получены численные значения безразмерных контактных давлений, зоны контакта и меры опускания тела для некоторых значений  $P_0$ .

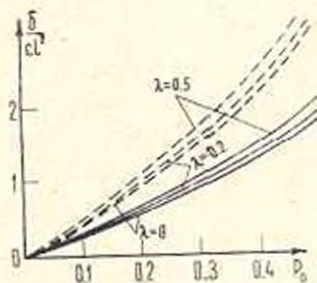
Вычисления показывают, что для указанных значений параметров  $\mu$  и  $\lambda$  в интервале  $0.1 < P_0 < 0.5$  изменение  $p_0(\xi)$  в зависимости от  $P_0$  незначительно. На фиг. 2 приведены графики четной функции  $p_0(\xi)$ , когда  $P_0 = 0.5$ . Из этих графиков видно, что с уменьшением  $\mu$  функция  $p_0(\xi)$  значительно уменьшается, заметно также, что при постоянном  $\mu$  с увеличением  $\lambda$  функция  $p_0(\xi)$  незначительно уменьшается.



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

На фиг. 3 и 4 приведены графики безразмерной зоны контакта  $a/l$  и меры опускания тела  $\delta/cl^2$  соответственно как функции параметра  $P_0$ . Из этих графиков явствует, что с увеличением параметра  $\lambda$ , или с уменьшением  $\mu$ , величина контактной зоны и мера опускания тела увеличиваются.

На этих фигурах сплошные линии соответствуют случаю  $\mu = 0.9$ , а пунктирные — случаю  $\mu = 0.7$ .

ԿՆՅՈՐՄԱՑՎՈՂ ՀԻՄՔԻՆ ԴՐՎԱՆ ԲԱՐԱԿ ՇԵՐՏԻՆ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ  
ԱՌԱՋԿԱՐԱԾՈՒՑԻՆ ՄԱՐՄՆԻ ՍՆՎՄՐԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Դիտարկված է Ֆուսսա-Վինկլերի տիպի հիմքին ազատ դրված բարակ սնվեղբ շերտին մարմնի սնդման մասին հարթ կոնտակտային խնդիրը: Մարմնի և շերտի համար որպես ֆիզիկական հիպոթեզ, ընդունված է կայունացված սողքի տեսությունը՝ դեֆորմացիաների արագությունների և լարումների ինտենսիվությունների միջև աստիճանային կապով:

Խնդիրը առաջին մոտավորությամբ բերվում է ոչ գծային ինտեգրալ հավասարման լուծման: Այդ հավասարումը լուծվում է Գեգենբաուերի օրթոգոնալ բազմանդամների ապարատի և սեղմող արտադատկերումների սկզբունքի հիման վրա:

Հարվածի Հերցի տեսության շրջանակներում դիտարկված է նաև հարվածի համապատասխան խնդիրը:

Բերված են թվային օրինակներ:

THE PRESSURE OF A NON-LINEAR VISCO-ELASTIC  
BODY ON A THIN STRIP ON A DEFORMABLE BASE

S. M. MKHITARIAN, L. A. SHEKIAN

S u m m a r y

The plane contact problem for pressure of a body on a thin infinite strip free on a base of Fussa-Vinkler's type is considered. The theory of steady creep is assumed as a physical hypothesis for the body and the strip under the power law of relation between the intensity of stress and velocity of strain.

The first approximation of the problem is reduced to the solution of a non-linear integral equation. This equation is solved by the set of Gegenbauer's orthogonal polynomials and by the principle of compressed transformations.

A particular impact problem is examined as well in terms of the Hertz impact theory.

Some numerical examples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
2. Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения. ПММ, 1963, т. 27, № 5.
3. Шекиан Л. А. К контактной задаче об ударе тела со свободно опертой упругой балке. Докл. АН Армянской ССР, 1978, т. 87, № 2.

4. Glen J. W. The creep of polycrystalline ice. Proceedings of the Royal society of London, Series A. 1955. Vol. 228, No. 1175, pp. 519—538.
5. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
6. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
7. Magnus W., Oberhettinger F., Sont R. P. Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics. Third Edition, Springer—Verlag Berlin, Heidelberg, New-York, 1966.
8. Пипов Г. Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
9. Мхитарян С. М., Шекиан А. А. Плоская контактная задача для двух шероховатых твердых тел, изготовленных из степенно упрочняющихся материалов. Изв. АН Армянской ССР, «Механика», 1977, т. 30, № 3.
10. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1972.
11. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М., «Наука», 1974.
12. Кильчевский Н. А. Теория соударения твердых тел. Киев, Изд. «Наукова думка», 1969.
13. Шекиан А. А. О соударении двух твердых тел, изготовленных из степенно упрочняющихся материалов. Докл. АН Армянской ССР, 1974, т. 69, № 4.

П. В. ГАЛПЧЯН

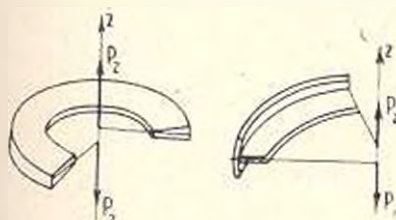
## КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ КРИВЫХ СТЕРЖНЕЙ, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Рассматривается задача о кручении кривых тонкостенных стержней в виде сектора кругового кольца, составленного из различных материалов. Постоянное по длине составного стержня меридиональное сечение образуется из областей  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), соответствующих различным однородным, изотропным материалам, являющимся упругими средами Гука или подчиняющимся условию изотропного упрочнения. Стержень скручивается противоположными силами  $P_z$ , приложенными к торцевым сечениям по оси кольца (фиг. 1).

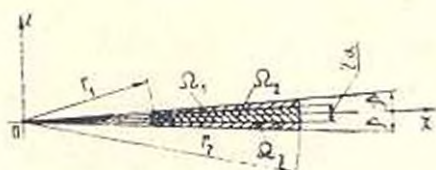
Аналогичные задачи для призматических стержней в линейно-упругой постановке рассмотрены в [1—7]. Кручение однородных, изотропных кривых стержней из упрочняющегося материала рассмотрено в [8—10].

Задача о кручении кривого составного стержня из линейно-упругих или изотропно-упрочняющихся материалов, когда составляющие части однородны и изотропны, в общей постановке исследована в [11, 12].

В настоящей работе на основе результатов автора [11] исследованы упруго-пластические напряженные состояния симметричных тонкостенных стержней с сечениями, имеющими очертания двух видов. В первом случае стержень состоит из трех слоев, спаянных по боковым поверхностям, с сечениями в виде узких кольцевых секторов, вытянутых в радиальном направлении. Наружные слои изготовлены из одинакового материала (фиг. 2). Во втором случае стержень в виде криволинейного тавра состоит из двух тонкостенных стержней, изготовленных из различных материалов и спаянных по боковым поверхностям (фиг. 6).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Решение задачи получено в предположении, что составляющая касательного напряжения по толщине стенки равна нулю. На основе найденных формул рассмотрены численные примеры. В предельных случаях получены решения соответствующих задач линейной теории упругости.

1. Основные уравнения задачи. Принимается сферическая система координат  $r, \theta, \varphi$ , связанная с прямолинейной прямоугольной системой  $x, y, z$  по известным формулам  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$ . Ось  $z$  направляется по оси кольца. В данной задаче все компоненты напряжения тождественно равны нулю, за исключением  $\tau_{\varphi\varphi}$  и  $\tau_{\theta\varphi}$ , не зависящих от  $\varphi$  [11, 12]. Физические соотношения между компонентами тензоров деформации и напряжения в  $\Omega_1$  принимаются в виде

$$\tau_{\varphi\varphi}^{(t)} = f_1(T_1) \tau_{\varphi\varphi}^{(l)} / 2G_1, \quad \tau_{\theta\varphi}^{(t)} = f_1(T_1) \tau_{\theta\varphi}^{(l)} / 2G_1 \quad (1.1)$$

Здесь  $T_1$  — интенсивность касательных напряжений,  $f_1(T_1)$  — функция, характеризующая упрочнение материала,  $G_1$  — модуль сдвига.  $f_1(T_1) = 1$  соответствует линейно-упругому материалу.

С использованием соотношений между компонентами деформации и компонентами смещения при малой деформации получены выражения [11, 12]

$$2\gamma_{\varphi r} = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_{\varphi\theta}}{r} \right) + \frac{A}{r} \operatorname{ctg} \theta, \quad 2\gamma_{\theta\varphi} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_{\varphi\theta}}{r \sin \theta} \right) - \frac{A}{r} \quad (1.2)$$

откуда следует уравнение совместности деформаций. Здесь  $u_{\varphi\theta}$  — произвольная функция  $r$  и  $\theta$ ,  $A = \text{const}$  — крутка.

Перемещения имеют вид

$$u_r = A\varphi \cos \theta, \quad u_\theta = -A\varphi \sin \theta, \quad u_\varphi = u_{\varphi\theta} + Br \sin \theta$$

$$B = \frac{1}{r^*} u_{\varphi\theta}(r^*, \pi/2) - \frac{\partial u_{\varphi\theta}(r^*, \pi/2)}{\partial r}, \quad r^* \in [r_1, r_2]$$

Введением функции напряжений  $\Phi$

$$\tau_{\varphi r}^{(t)} = -\frac{2AG_1}{r^3 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Phi^{(t)}}{\partial r}, \quad \tau_{\theta\varphi}^{(t)} = \frac{2AG_1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Phi^{(t)}}{\partial r} \quad (1.3)$$

задача сводится к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{f_1(T_1)}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Phi^{(t)}}{\partial r} \right] + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{f_1(T_1)}{r^4 \sin^3 \theta} \frac{\partial \Phi^{(t)}}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (1.4)$$

с граничным условием  $\Phi = 0$  на  $\Gamma\Omega_0$  и условиями на  $\Gamma\Omega_1$

$$G_1 \Phi^{(t)} = G_2 \Phi^{(2)}, \quad f_1(T_1) \frac{\partial \Phi^{(t)}}{\partial r} = f_2(T_2) \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} \quad (1.5)$$

Здесь

$$T_1 = \frac{2AG_1}{r^3 \sin^2 \theta} \sqrt{\left( \frac{\partial \Phi^{(t)}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(t)}}{\partial \theta} \right)^2}$$

$\Phi^{(t)}$  представляет функцию напряжений  $\Phi$  в области  $\Omega_1$ ,  $\Gamma\Omega_0$  — грани-

ца области всего меридионального сечения стержня  $\Omega_0$ ,  $\Gamma\Omega_{lj}$  — линия раздела смежных областей  $\Omega_l$  и  $\Omega_j$ .

Для силы  $P_z$  имеем выражение

$$P_z = 2A \sum_{l=1}^N G_l \int_{\Omega_l} \frac{\Phi^{(l)}}{r^3 \sin^4 \vartheta} d\Omega_l \quad (1.6)$$

2. *Кручение тонкостенного симметричного трехслойного стержня.* Рассмотрим случай симметричного относительно плоскости  $xz$  трехслойного сечения ( $N=3$ ), когда  $\Gamma\Omega_l$  образуется соответственно из координатных линий:  $\vartheta = \pi/2 - \beta$ ,  $\vartheta = \pi/2 - \alpha$ ;  $\vartheta = \pi/2 - \alpha$  и  $\vartheta = \pi/2 + \alpha$ ,  $\vartheta = \pi/2 + \beta$  ( $2\beta r_2/(r_2 - r_1) \ll 1$ ). Материалы областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$  одинаковы (фиг. 2).

Пренебрегая, ввиду малости толщины стенки, компонентом напряжения  $\tau_{\varphi\vartheta}^{(l)}$  и вводя при этом новую переменную  $\omega = \vartheta - \pi/2$ , приводим уравнение (1.4) к виду

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \frac{f_l(T_l)}{r^2 \cos^3 \omega} \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial \omega} \right] = \frac{1}{\cos^3 \omega} \quad T_l = \frac{2AG_l}{r^3 \cos^2 \omega} \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial \omega} \quad (2.1)$$

Интегрируя уравнение (2.1) при  $l=2$  и  $l=1,3$  соответственно, получим

$$f_2(T_2) \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \omega} = \frac{r^2}{2} \psi(\omega) \cos^2 \omega \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} f_1(T_1) \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \omega} &= \frac{r^2}{2} \psi(\omega) \cos^2 \omega + \frac{\sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha} r^2 \cos^3 \omega - \\ &- \frac{r^2 \cos^3 \omega}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \frac{\cos^3 \omega}{\cos^2 \alpha} \left[ f_1(T_1) \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \omega} \right]_{\omega=-\alpha} \\ f_3(T_3) \frac{\partial \Phi^{(3)}}{\partial \omega} &= \frac{r^2}{2} \psi(\omega) \cos^2 \omega - \frac{\sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha} r^2 \cos^3 \omega - \\ &- \frac{r^2 \cos^3 \omega}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) + \frac{\cos^3 \omega}{\cos^2 \alpha} \left[ f_3(T_3) \frac{\partial \Phi^{(3)}}{\partial \omega} \right]_{\omega=\alpha} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\psi(\omega) = \operatorname{tg} \omega + \cos \omega \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \omega \right)$$

В уравнении (2.2) учтено, что  $\tau_{\varphi r} = 0$  при  $\omega = 0$ . Величины в квадратных скобках в (2.3) определяются из условий (1.5) на  $\Gamma\Omega_{lj}$ . Определяя эти величины и объединяя (2.2) и (2.3), будем иметь

$$\frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial \omega} = \frac{r^2}{2} f_l^*(\Gamma_l) \psi(\omega) \cos^2 \omega \quad (l=1, 2, 3) \quad (2.4)$$

где  $f_l^*(\Gamma_l) = 1/f_l(T_l)$ ,  $\Gamma_l$  — интенсивность деформаций сдвига.

Согласно (1.1) и (2.4) будем иметь

$$\chi_{\varphi r}^{(l)} = -\frac{A}{2r} \psi(\omega), \quad \Gamma_l \equiv \Gamma = |2\chi_{\varphi r}| = \frac{|A\psi(\omega)|}{r}$$

Проинтегрировав (2.4) при  $l = 1, 3$  и  $l = 2$  с учетом соответственно граничного условия и первого условия (1.5), получим

$$\Phi^{(1)}(r, \omega) = \Phi^{(3)}(r, -\omega) = \frac{r^2}{2} \int_{-\beta}^{\beta} f_1^*(\Gamma) \psi(\omega) \cos^2 \omega d\omega \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)}(r, \omega) = & \frac{r^2}{2} \int_{-\beta}^{\beta} f_2^*(\Gamma) \psi(\omega) \cos^2 \omega d\omega + \\ & + \frac{G_2 r^2}{2G_1} \int_{-\beta}^{\beta} f_1^*(\Gamma) \psi(\omega) \cos^2 \omega d\omega \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.5) и (2.6) в (1.6), получаем следующее выражение для силы  $P_z$ :

$$\begin{aligned} P_z = & -AG_1 \int_{r_1}^{r_2} dr \int_0^{\beta} f_1^*(\Gamma) \varphi^2(\gamma) \cos \gamma d\gamma - \\ & - AG_2 \int_{r_1}^{r_2} dr \int_0^{\beta} f_2^*(\Gamma) \psi(\gamma) \varphi(\gamma) d\gamma \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\varphi(\gamma) = \sin \gamma - \cos^2 \gamma \operatorname{Intg} \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \gamma \right)$$

Примем  $f_l(T_l) = 1 + \nu_l T_l^{\nu_l}$ ,  $\nu_l = \nu_l^*/(2G_l)$ , где  $\nu_l^*$  и  $\nu_l$  — положительные физические параметры. Когда  $\nu_l = 1$ , интенсивности касательных напряжений  $T$  и деформаций сдвига  $\Gamma$  связаны соотношением

$$T_l = -\frac{1}{2\nu_l} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\nu_l^2} + \frac{4G_l\Gamma}{\nu_l}}$$

Подставив значение  $f_l^*(\Gamma)$  при  $\nu_l = 1$  в (2.7) и произведя интегрирование, получим

$$P_z = \operatorname{sgn} A \left| \int_{r_1}^{r_2} a_1(\gamma; A) \psi(\gamma) \cos \gamma d\gamma + \int_0^{\beta} a_2(\gamma; A) \psi(\gamma) d\gamma \right|$$

где

$$a_l(\eta; A) = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4\lambda_l} - \frac{r_2 + 2|A|G_l\lambda_l\psi(\eta)}{4\lambda_l} \sqrt{r_2^2 + 4|A|G_l\lambda_l r_2\psi(\eta)} + \\ + \frac{r_1 + 2|A|G_l\lambda_l\psi(\eta)}{4\lambda_l} \sqrt{r_1^2 + 4|A|G_l\lambda_l r_1\psi(\eta)} - \\ - [AG_l\psi(\eta)]^2 \lambda_l \ln \frac{\sqrt{r_1^2 + 4|A|G_l\lambda_l r_1\psi(\eta)} + 2|A|G_l\lambda_l\psi(\eta) + r_1}{\sqrt{r_2^2 + 4|A|G_l\lambda_l r_2\psi(\eta)} + 2|A|G_l\lambda_l\psi(\eta) + r_2}$$

Подставив (2.4) в (1.3), окончательно получим

$$\sigma_{\varphi}^{(l)} = - \frac{2AG_l\psi(\omega)}{r + \sqrt{r^2 + 4(G_l\lambda_l r |A|\psi(\omega))}} \quad (2.8)$$

В случае линейной упругости из (2.5) — (2.7) и (1.3) соответственно получаем

$$\Phi^{(1)} = \Phi^{(3)} = \frac{r^2}{4} \left\{ \sin^2 \omega + \left| \ln(1 - \sin \omega) - \frac{1}{2} \right| (1 - \sin \omega)^2 + \right. \\ + \left| \ln(1 + \sin \omega) - \frac{1}{2} \right| (1 + \sin \omega)^2 - \\ - \frac{1}{3} \left| \ln(1 - \sin \omega) - \frac{1}{3} \right| (1 - \sin \omega)^3 - \\ - \frac{1}{3} \left| \ln(1 + \sin \omega) - \frac{1}{3} \right| (1 + \sin \omega)^3 - \sin^2 \beta - \\ - \left| \ln(1 + \sin \beta) - \frac{1}{2} \right| (1 + \sin \beta)^2 - \\ - \left| \ln(1 - \sin \beta) - \frac{1}{2} \right| (1 - \sin \beta)^2 + \\ + \frac{1}{3} \left| \ln(1 + \sin \beta) - \frac{1}{3} \right| (1 + \sin \beta)^3 + \\ + \frac{1}{3} \left| \ln(1 - \sin \beta) - \frac{1}{3} \right| (1 - \sin \beta)^3 \Big\} \\ \Phi^{(2)} = \frac{r^2}{4} \left\{ \sin^2 \omega + \left| \ln(1 - \sin \omega) - \frac{1}{2} \right| (1 - \sin \omega)^2 + \right. \\ + \left| \ln(1 + \sin \omega) - \frac{1}{2} \right| (1 + \sin \omega)^2 - \\ - \frac{1}{3} \left| \ln(1 - \sin \omega) - \frac{1}{3} \right| (1 - \sin \omega)^3 - \\ - \frac{1}{3} \left| \ln(1 + \sin \omega) - \frac{1}{3} \right| (1 + \sin \omega)^3 - \sin^2 \alpha -$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \ln(1 + \sin \alpha) - \frac{1}{2} \right] (1 + \sin \alpha)^2 - \\
& - \left[ \ln(1 - \sin \alpha) - \frac{1}{2} \right] (1 - \sin \alpha)^2 + \\
& + \frac{1}{3} \left[ \ln(1 + \sin \alpha) - \frac{1}{3} \right] (1 + \sin \alpha)^3 + \\
& + \frac{1}{3} \left[ \ln(1 - \sin \alpha) - \frac{1}{3} \right] (1 - \sin \alpha)^3 + \frac{G_1 r^2}{4G_2} \left[ \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta + \right. \\
& + \left[ \ln(1 + \sin \alpha) - \frac{1}{2} \right] (1 + \sin \alpha)^2 + \left[ \ln(1 - \sin \alpha) - \frac{1}{2} \right] (1 - \sin \alpha)^2 - \\
& - \frac{1}{3} \left[ \ln(1 + \sin \alpha) - \frac{1}{3} \right] (1 + \sin \alpha)^3 - \\
& - \frac{1}{3} \left[ \ln(1 - \sin \alpha) - \frac{1}{3} \right] (1 - \sin \alpha)^3 - \\
& - \left[ \ln(1 + \sin \beta) - \frac{1}{2} \right] (1 + \sin \beta)^2 - \left[ \ln(1 - \sin \beta) - \frac{1}{2} \right] (1 - \sin \beta)^2 + \\
& + \frac{1}{3} \left[ \ln(1 + \sin \beta) - \frac{1}{3} \right] (1 + \sin \beta)^3 + \\
& + \frac{1}{3} \left[ \ln(1 - \sin \beta) - \frac{1}{3} \right] (1 - \sin \beta)^3 \Big] \\
A = & \frac{P_z}{C_1}, \quad \tau_{\varphi r}^{(I)} = \frac{P_z G_1}{C_1 r} \psi(\omega)
\end{aligned}$$

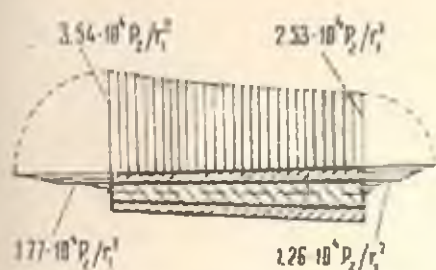
где

$$C_1 = (r_2 - r_1) \left[ G_1 \int_0^{\beta} \psi^2(\gamma) \cos \gamma d\gamma + G_2 \int_0^{\alpha} \psi(\gamma) \varphi(\gamma) d\gamma \right]$$

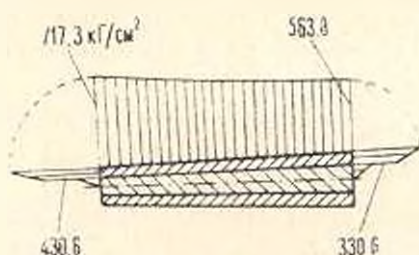
На фиг. 3 приведены эпюры распределения напряжения  $\tau_{\varphi r}$  в сечении в случае линейно-упругого материала. При этом принимается  $r_2 = 1.4 r_1$ ,  $\alpha = 0.0055$  рад,  $\beta = 0.011$  рад и  $G_1 = 2G_2$ . Эпюра напряжения  $\tau_{\varphi r}$  в случае упрочняющегося материала изображена на фиг. 4. При этом  $r_1 = 15$  см,  $r_2 = 1.4 r_1$ ,  $\alpha = 0.0055$  рад,  $\beta = 0.011$  рад,  $G_2 = 0.42 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>,  $G_1 = 2G_2$ ,  $\nu_1 = 1$ ,  $\nu_2 = 2\nu_1$ ,  $\nu_3 = 10^{-1}$  см<sup>2</sup>/кг и  $P_z = 5.1$  кг/см.

На фиг. 5 приведены графики зависимостей между  $T$  и  $\Gamma$  для выбранных материалов ( $G_2 = 0.42 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>). Графики для линейно-упругих материалов представляются сплошными линиями. Кривые 1 соответствуют материалу области  $\Omega_{10}$ , а 2 — области  $\Omega_2$ .

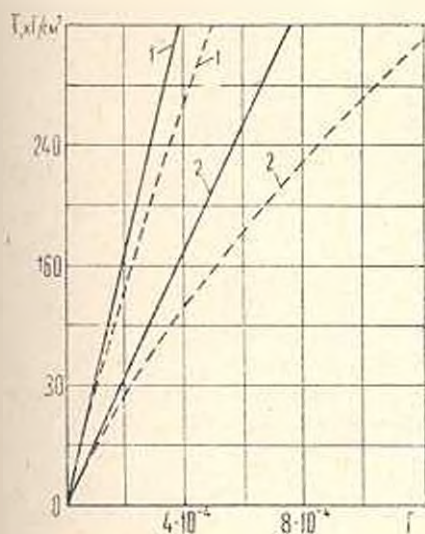
3. Кручение тонкостенного стержня в виде криволинейного тавра. Рассмотрим кручение кривого стержня, составленного из двух стержней, изготовленных из различных материалов и спаянных по боковым поверхностям в виде тавра. Меридиональное сечение одного из них, соответствующего области  $\Omega_1$ , имеет вид узкого кольцевого сектора, вытянутого по направлению  $r$ , а сечение другого, соответствующего  $\Omega_2$ , представляет собой узкий кольцевой сектор, вытянутый по направлению  $\theta$ . Меридиональное сечение составного стержня расположено симметрично относительно плоскости  $xu$  (фиг. 6).



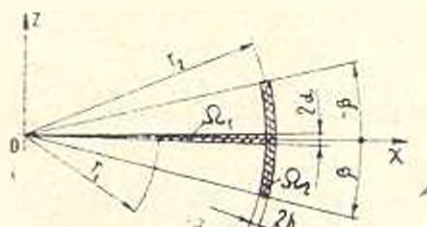
Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Вследствие малости толщины стенки можно принять, что всюду в  $\Omega_1$  компонент  $\tau_{\theta r}^{(1)}$  пренебрежимо мал по сравнению с  $\tau_{\theta \theta}^{(1)}$ . В частях области  $\Omega_2$ , весьма отдаленных от оси симметрии, компонент  $\tau_{\theta r}^{(2)}$  пренебрежимо мал по сравнению с  $\tau_{\theta \theta}^{(2)}$  и, кроме того, на оси симметрии  $r_{\theta} = 0$ . Имея в виду эти обстоятельства, можно всюду положить  $\tau_{\theta r}^{(2)} \approx 0$ .

Уравнение (1.4) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \frac{f_1(T_1)}{r^2 \cos^3 \omega} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \omega} \right] = \frac{1}{\cos^3 \omega}, \quad T_1 = \frac{2AG_1}{r^3 \cos^2 \omega} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \omega} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left| \frac{f_2(T_2)}{r^2} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} \right| = \frac{1}{r^2}, \quad T_2 = \frac{2A\zeta_2}{r^2 \cos^2 \omega} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} \quad (3.2)$$

Дважды интегрируя уравнение (3.1), получим

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \omega} = \frac{r^2}{2} f_1^*(\Gamma_1) \psi(\omega) \cos^2 \omega \quad (3.3)$$

$$\Phi^{(1)} = -\frac{r^2}{2} \int_0^\omega f_1^*(\Gamma_1) \psi(\omega) \cos^2 \omega d\omega \quad (3.4)$$

В уравнении (3.3) учтено, что  $\tau_{\omega}^{(1)} = 0$  при  $\omega = 0$ , а в (3.4) — граничное условие.

Согласно (1.1) и (3.3) будем иметь

$$\tau_{\omega}^{(1)} = -\frac{A}{2r} \psi(\omega), \quad \Gamma_1 = |2\tau_{\omega}^{(1)}| = \frac{|A\psi(\omega)|}{r}$$

Ищем  $\Phi^{(2)}$  в виде

$$\Phi^{(2)} = \begin{cases} \Phi_1^{(2)}, & \text{когда } 0 \leq \omega \leq \alpha \\ \Phi_2^{(2)}, & \text{когда } \alpha \leq \omega \leq \beta \end{cases}$$

Проинтегрируем (3.2), принимая  $\tau_{r_2} = 0$  при  $r = r_2$

$$\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} = f_2^*(\Gamma_2) \frac{(r - r_2)r}{r_2} \quad (3.5)$$

Согласно (1.1) и (3.5) будем иметь

$$\tau_{r_2}^{(2)} = \frac{A(r - r_2)}{r_2 r \cos^2 \omega}, \quad \Gamma_2 = \frac{2|A(r - r_2)|}{r_2 r \cos^2 \omega}$$

Интегрируя (3.5) от  $r_2 - h$  до  $r$  и удовлетворяя при этом на  $\Gamma\Omega_{12}$  первому условию (1.5), получим

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(2)} &= \frac{1}{r_2} \int_{r_2-h}^r f_2^*(\Gamma_2) (r - r_2) r dr - \\ &- \frac{G_1(r_2 - h)^2}{2G_2} \int_0^\alpha f_1^*\left(\frac{|A\psi(\omega)|}{r_2 - h}\right) \psi(\omega) \cos^2 \omega d\omega \end{aligned} \quad (3.6)$$

Функции  $\Phi_1^{(2)}$  и  $\Phi_2^{(2)}$  должны удовлетворять первому условию (1.5) на линии раздела  $\omega = \alpha$  и, кроме того,  $\Phi_2^{(2)}$  должно удовлетворять граничному условию на  $r = r_2 - h$ . Интегрируя (3.5) с учетом этих условий, получим

$$\Phi_2^{(2)} = \frac{1}{r_2} \int_{r_2-h}^r f_2^*(\Gamma_2) (r-r_2) r dr \quad (3.7)$$

Подставляя (3.4), (3.6) и (3.7) в (1.6) и производя интегрирование, для силы  $P_z$  получаем выражение

$$\begin{aligned} P_z = & -AG_1 \int_{r_1}^{r_2+h} dr \int_0^{\pi} f_1^*(\Gamma_1) \psi^2(\tau) \cos \tau d\tau - \\ & - AG_1 (r_2-h)^2 \int_{r_2-h}^{r_2+h} \frac{dr}{r^2} \int_0^{\pi} f_1^* \left( \frac{|A_2(\tau)|}{r_2-h} \right) \psi^2(\tau) \cos \tau d\tau + \\ & + \frac{4AG_2}{r_2(r_2+h)} \int_0^{\pi} \frac{d\omega}{\cos^2 \omega} \int_{r_1-h}^r f_2^*(\Gamma_2) (\xi-r_2)(r_2+h-\xi) d\xi \quad (3.8) \end{aligned}$$

Взяв в (3.8) при  $\nu_1 = 1$  функцию  $f_1(T_1)$  в прежней форме и проинтегрировав, получим

$$\begin{aligned} P_z = & \operatorname{sgn} A \left[ \int_0^{\pi} a_1(\tau; A) \psi(\tau) \cos \tau d\tau + \frac{1}{12r_2(r_2+h)} \int_0^{\pi} \frac{\varphi_1(\omega; A)}{\cos^3 \omega} d\omega - \right. \\ & \left. - \frac{4|A|G_1(r_2-h)h}{r_2+h} \int_0^{\pi} \frac{\psi^2(\tau) \cos \tau d\tau}{1 + \sqrt{1 + \frac{4G_1|A|\psi(\tau)}{r_2-h}}} \right] \end{aligned}$$

Здесь в выражении  $a_1(\tau; A)$  вместо  $r_1$  следует принять  $r_2-h$ .

$$\begin{aligned} \varphi_1(\omega; A) = & \frac{1}{(1+g)^2} \frac{(r_2+h)[h(1+g)+r_1]}{[g^2(3r_2^2+4h(r_2+h))+} \\ & + 4g[r_2^2+h(3r_2+2h)]+4[r_2^2+h(2r_2+h)]^{\frac{1}{2}}} + \\ & + \frac{V(r_2-h)[r_2-h(1-g)]}{(1-g)^2} \left\{ g^2 \left| 3r_2^2+8h \left( r_2-\frac{5}{2}h \right) \right| - \right. \\ & - 4g \left| r_2^2+6h \left( r_2-\frac{5}{3}h \right) \right| + 4 \left| r_2^2+4h \left( r_2-\frac{5}{4}h \right) \right| \Big\} - \\ & - \frac{r_2^2}{(1-g)^2} [3g^2(r_2+2h)-2g(2r_2+9h)+4(r_2+3h)] - \\ & - \frac{r_2^2}{(1+g)^2} [3g^2(r_2+2h)+2g(2r_2+9h)+4(r_2+3h)] - \\ & - \frac{6|A|G_2r_2g[2(r_2+h)+g(r_2+2h)]}{(1+g)^2 \cos^2 \omega} \end{aligned}$$

$$\times \ln \left| \frac{2 \sqrt{(1+g)(r_2+h)[h(1+g)+r_2] + 2(r_2+h) - g(r_2+2h)}{r_2(2\sqrt{1+g}+g+2)} \right| +$$

$$+ 24h^2(r_2-h) + \frac{6|A|G_2^2 r_2 g |2(r_2+h) - g(r_2+2h)| U}{(1-g)^2 \cos^2 \omega}$$

где

$$g(\omega) = \frac{18|A|G_2^2}{r_2 \cos^2 \omega}$$

$$U = \left[ \frac{1}{\sqrt{1-g}} \times \right.$$

$$\times \ln \left| \frac{r_2(2\sqrt{1-g}-g+2)}{2\sqrt{(1-g)(r_2-h)[r_2-(1-g)h] + 2(r_2-h) - g(r_2-2h)}} \right|$$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{при } 1-g > 0 \\ 2 - \frac{2}{r_2} \sqrt{r_2(r_2-h)} & \text{при } 1-g = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{g-1}} \left( \arcsin \frac{2(r_2-h) - g(r_2-2h)}{r_2 g} - \arcsin \frac{2-g}{g} \right) & \text{при } 1-g < 0 \end{array} \right]$$

Подставив (3.3) и (3.5) в (1.3), получим выражения  $\tau_{rr}^{(1)}$  и  $\tau_{\theta\theta}^{(1)}$ , причем  $\tau_{rr}^{(1)}$  определяется формулой (2.8), а  $\tau_{\theta\theta}^{(2)}$  имеет вид

$$\tau_{\theta\theta}^{(2)} = \frac{4AG_2(r-r_2)}{r_2 r \cos^2 \omega \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{|r-r_2|}{r} g(\omega)} \right)}$$

В случае линейной упругости из (3.4), (3.6) — (3.8) и (1.3) соответственно получаем

$$\Phi^{(2)} = \frac{r^2}{4} \left\{ \sin^2 \omega + \left| \ln(1 - \sin \omega) - \frac{1}{2} \right| (1 - \sin \omega)^2 + \right.$$

$$+ \left| \ln(1 + \sin \omega) - \frac{1}{2} \right| (1 + \sin \omega)^2 -$$

$$- \frac{1}{3} \left[ \ln(1 - \sin \omega) - \frac{1}{3} \right] (1 - \sin \omega)^3 -$$

$$- \frac{1}{3} \left[ \ln(1 + \sin \omega) - \frac{1}{3} \right] (1 + \sin \omega)^3 - \sin^2 \alpha -$$

$$- \left| \ln(1 - \sin \alpha) - \frac{1}{2} \right| (1 - \sin \alpha)^2 - \left| \ln(1 + \sin \alpha) - \frac{1}{2} \right| (1 + \sin \alpha)^2 +$$

$$+ \frac{1}{3} \left[ \ln(1 - \sin \alpha) - \frac{1}{3} \right] (1 - \sin \alpha)^3 + \\ + \frac{1}{3} \left[ \ln(1 + \sin \alpha) - \frac{1}{3} \right] (1 + \sin \alpha)^3 \Bigg\}$$

$$\Phi_1^{(2)} = \frac{1}{6r_2} [r^2(2r - 3r_2) + (r_2 + 2h)(r_2 - h)^2] + \frac{G_1(r_2 - h)^2 \Phi^{(2)}}{G_2 r^2}$$

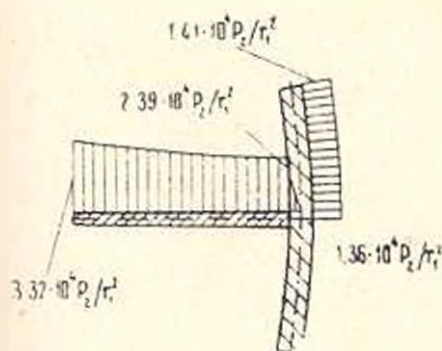
$$\Phi_2^{(2)} = \frac{1}{6r_2} [r^2(2r - 3r_2) + (r_2 + 2h)(r_2 - h)^2]$$

$$\tau_{\varphi}^{(1)} = - \frac{P_2 G_1 \psi(\omega)}{C_2 r} \quad \tau_{\varphi}^{(2)} = \frac{2P_2 G_2 (r - r_2)}{C_2 r_2 r \cos^2 \omega}$$

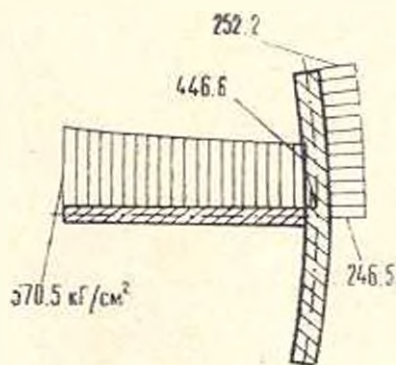
где

$$C_2 = - \frac{4G_2 h^2 \psi(\beta)}{3r_2(r_2 + h) \cos \beta} + \\ + \frac{G_1 [(r_2 + h)(r_1 - r_2) - h(r_2 - 3h)]}{r_2 + h} \int_0^{\beta} \cos \tau_1^2(\tau) d\tau$$

На фиг. 7 изображены эпюры распределения напряжений  $\sigma_r^{(1)}$  и  $\sigma_{\varphi}^{(2)}$  в случае линейно-упругого материала. При этом принимается  $r_2 = 1.4r_1$ ,  $h = 0.013r_1$ ,  $\alpha = 0.008$  рад,  $\beta = \pi/18$ ,  $G_1 = 2G_2$ . Приведены также эпюры напряжений в случае упрочняющегося материала (фиг. 8). При этом  $r_1 = 15$  см,  $r_2 = 1.4r_1$ ,  $h = 0.013r_1$ ,  $\alpha = 0.008$  рад,  $\beta = \pi/18$ ,  $G_1 = 2G_2$ ,  $G_2 = 0.42 \cdot 10^9$  кг/см<sup>2</sup>,  $\nu_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2\nu_1$ ,  $\lambda_1 = 10^{-3}$  см<sup>2</sup>/кг и  $P_2 = 3500$  кг/см<sup>2</sup>.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

В заключение отметим, что все линейно-упругие решения, приводимые в данной работе, получены впервые. Эти решения можно получить предельным переходом, когда  $\lambda_1 \rightarrow 0$ , из решений для упрочняющихся материалов.

Институт механики  
АН Армянской ССР

Поступила 12 II 1980

ՏԱՐԲԵՐ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱՆԻ ԲԱՐԱԿԱՊԱՏ ԿՈՐ  
ՉՈՂՆԵՐԻ ՈՂՈՐՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ու մ

Ուսումնասիրված է շրջանային օղակի սեկտոր ներկայացնող բաղադրյալ բարակապատ կոր ձողի ուղորման հետևանքով ստացացած լարվածային-դեֆորմացված վիճակը: Ձողի երկարությամբ հաստատուն միջօրեականային կտրվածքը կաղմավորվում է Հուկի առաձգական միջավայր հանդիսացող կամ իզոտրոպ ամրապնդման ենթարկվող տարբեր համասեռ ու իզոտրոպ նյութերից:

Խնդիրը բերվում է լարումների ֆունկցիայի նկատմամբ մասնակի ածանցյալներով ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարման: Շառավղային ուղղությամբ ձգված նեղ օղակային սեկտորի տեսք ունեցող կտրվածքով նռնշերտ սիմետրիկ ձողի, ինչպես նաև տարրեր նյութերից պատրաստված երկու բարակապատ ձողից կաղմված և կոր տալքի տեսքով կողմնային մակերևութային ուղղված սիմետրիկ ձողի համար, ստացված են մոտավոր, փակ լուծումներ:

Բերված են թվային օրինակներ և լարումների էպյուրներ:

THE TORSION OF THIN-WALLED CURVED BARS COMPOSED  
OF DIFFERENT MATERIALS

P. V. DALPCHIAN

S u m m a r y

The stress-strain state on torsion of curved composite thin bars in the form of a circular ring sector is studied. The meridional section, which is constant along the length of the composite bar, formed of some domains, corresponding to different homogeneous isotrop materials, which are Hook's elastic media or obey the condition of isotropic strengthening.

The problem is reduced to the nonlinear partial differential equation relative to the stress function.

The closed approximate solutions for a symmetric three-layered bar with a narrow circular ring sector, extended along the radius, and also for a symmetric bar formed of two thin bars of different materials and soldered on lateral surfaces shaped as a curved tee, are obtained.

Some numerical examples and stress epures are presented.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
2. Веква И. Н., Рухадзе А. К. Кручение и изгиб поперечной силой бруса, составленного из двух материалов, ограниченных конфокальными эллипсами. Прикладная математика и механика, 1933, т. 1, вып. 2.
3. Веква И. Н., Рухадзе А. К. Задача кручения кругового цилиндра, армированного продольным круговым стержнем. Изв. АН СССР, 1933, № 3.
4. Рухадзе А. К. Кручение и изгиб бруса, составленного из двух упругих материалов, ограниченных эллипсоидами. Труды Тбилисского математического института, 1937, т. 1.
5. Шерман Л. И. Кручение эллиптического цилиндра, армированного круговым стержнем. Инж. сб. АН СССР, 1951, т. 10.
6. Чобанян К. С. Применение функции напряжений в задаче о кручении призматических стержней, составленных из различных материалов. Изв. АН Армянской ССР, серия физ.-мат., ест. и техн. наук, 1955, т. 8, № 2.
7. Ахнцухский С. Г. Кручение многослойного стержня прямоугольного сечения. Инж. сб. АН СССР, 1956, т. 23.
8. Задоян М. А. Пластическое кручение неполного тора. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 2.
9. Задоян М. А. Пластическое кручение сектора кольца. Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 1.
10. Галпчан П. В., Задоян М. А. Пластическое кручение кругового стержня с поперечным сечением в виде кольцевого сектора. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1979, т. 32, № 1.
11. Галпчан П. В. Пластическое кручение кривого стержня, составленного из различных материалов. Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1980, т. XXXIII, № 4.
12. Галпчан П. В. Кручение кривого стержня, составленного из различных материалов. Всесоюзная конференция по теории упругости. Тезисы докладов, Ереван 1979.

Р. С. МИНАСЯН, Г. А. ПОГОСЯН

# РАСТЯЖЕНИЕ ОДНОРОДНОГО АНИЗОТРОПНОГО СЛЕГКА ИЗОГНУТОГО БРУСА

В статьях П. М. Риза [1], А. К. Рухадзе [2], Р. С. Минасяна [3, 4, 5], Г. М. Хатнашвили [6] и др. исследуется напряженное состояние слегка изогнутого бруса с осью, представляющей кривую второго порядка при различных видах деформаций. В настоящей статье ставится более общая задача — исследовать напряженное состояние при растяжении бруса, ось которого — плоская кривая произвольного порядка.

1. *Постановка задачи.* Отнесем однородный анизотропный брус с одной плоскостью упругой симметрии (13 упругих постоянных) к прямоугольной, прямолинейной системе координат. Примем начало координат в центре тяжести нижнего закрепленного основания, а оси  $Ox$  и  $Oy$  направим по его главным центральным осям.

Положим, что брус слегка изогнут, ограничен боковой поверхностью

$$F\left(x + \varepsilon \frac{z^n}{n}, y\right) = 0 \quad (1.1)$$

и основаниями: нижним  $z = 0$ , верхним  $z = l$ ;  $n \geq 2$  — целое положительное число;  $\varepsilon$  — настолько малый параметр, что во всех нижеприведенных вычислениях членами с множителем  $\varepsilon^2$  пренебрегаем.

Упругие постоянные материала стержня обозначим через  $A_{ij}$ . Полагаем, что объемные силы отсутствуют, боковая поверхность  $F$  свободна от напряжений, а все внешние силы, приложенные к верхнему основанию, приводятся к растягивающей силе  $N$ , приложенной в его центре тяжести и параллельной оси  $Oz$ .

Задачу решаем в линейной постановке, то есть полагаем смещения такими, что их компоненты деформаций с достаточной точностью определяются линейными членами, а напряжения не превосходят предел пропорциональности и определяются известными формулами [7]

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \sum_{k=1}^3 A_{ijk} e_{ik} + A_{ij4} e_{44}, \quad j=1, 2, 3, 4, \quad \tau_{41} = \tau_{14} \\ \tau_{\alpha i} &= A_{\alpha i1} e_{11} + A_{\alpha i2} e_{22}, \quad i=1, 2, \quad \alpha=4-i, \quad \gamma=3-i \end{aligned} \quad (1.2)$$

причем

$$e_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i, j=1, 2, 3, \quad i \neq j \quad (1.3)$$

где  $u_i$  — смещения:  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$ ,  $u_3 = w$ ;  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ .

Из формул (1.2) легко получить компоненты деформаций

$$e_{ii} = E^{-1} \sum_j \sigma_{ij} \tau_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad e_{44} = e_{12}$$

$$e_{3i} = \mu_{3i}^{-1} (\tau_{3i} - \nu_i \tau_{3i}), \quad i = 1, 2 \quad (1.4)$$

$$\mu_{3i} = A_{33} - \nu_i A_{36}, \quad \mu_{31} \nu_2 = \mu_{32} \nu_1, \quad \nu_i = A_{2i}^{-1} A_{36}, \quad \alpha = 4 + i, \quad \gamma = 3 - i$$

В формулах (1.4), как и в нижеприведенных (1.5),  $\sigma$  с одинаковыми индексами следует приписать знак плюс, а с различными — знак минус.

Приведем также зависимости между постоянными  $A_{ij}$ ,  $E$  и  $\sigma_{ij}$

$$\begin{aligned} \sum_i A_{ij} \sigma_{ij} &= E; \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad \sum_i A_{2i} \sigma_{ji} = 0 \quad j = 1, 3, 4 \\ \sum_i A_{1i} \sigma_{ji} &= 0; \quad j = 2, 3, 4 \quad \sum_i A_{3i} \sigma_{ji} = 0 \quad j = 1, 2, 4 \\ \sum_i A_{4i} \sigma_{ji} &= 0 \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (1.5)$$

причем  $\tau_{33} = 1$ ,  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ . Ниже применяются также обозначения  $\sigma_{3i} = \sigma_i$ ,  $\sigma_{4i} = \sigma_j$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 3, 4$ .

Математически рассматриваемая задача сводится к определению шести компонентов напряжений в области  $V$ , занятой бруском, удовлетворяющих однородным уравнениям равновесия

$$\sum_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.6)$$

граничным условиям на боковой поверхности  $F$

$$\sum_j \tau_{ij} \cos(n, x_j) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.7)$$

причем  $n$  — нормаль к боковой поверхности (внешняя по отношению к области  $V$ ).

Компоненты деформаций, соответствующие искомым напряжениям  $\tau_{ij}$ , должны удовлетворять условиям совместности Сен-Венана, а усилия на верхнем основании  $z = l$  — приводиться к заданной растягивающей силе  $N$ .

2. *Некоторые формулы преобразования.* Введем новую систему координат [1]

$$\xi = x + \varepsilon \frac{z^n}{n}, \quad \eta = y, \quad \zeta = z \quad (2.1)$$

Тогда рассматриваемый, слегка изогнутый брус в пространстве  $\xi, \eta, \zeta$  переходит в призматический, ограниченный боковой поверхностью  $F_\eta(\xi, \eta) = 0$ , основаниями: нижним  $\xi = 0$ , верхним  $\xi = l$  с поперечным сечением  $S$ , контур которого  $L$ . Брус загружен на верхнем основании центрально приложенной силой  $N$ .

Для перехода из пространства  $x, y, z$  в пространство  $\xi, \eta, \zeta$  с вышеуказанной точностью, используются формулы

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \xi_i}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \zeta} + \varepsilon_i^{n-1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \quad (2.2)$$

$$\cos(n, x_i) = \cos(n, \xi_i), \quad \cos(n, z) = \varepsilon_i^{n-1} \cos(n, \xi_1), \quad i = 1, 2$$

При этом, как в (2.2), так и ниже

$$\xi_1 = \xi, \quad \xi_2 = \eta, \quad \xi_3 = \zeta$$

3. Растяжение слегка изогнутого бруса. Решение рассматриваемой задачи в пространстве  $\xi, \eta, \zeta$  будем искать в виде [1]

$$u_i = \alpha \left( \varepsilon_i \xi_i + \frac{1}{2} \varepsilon_3 \xi_1 \right) + \alpha_i u_i', \quad w = \alpha \varepsilon + \alpha \varepsilon w', \quad \alpha = J_{11}^{-1} N, \quad (3.1)$$

$$i = 1, 2, \quad \gamma = 3 - i$$

где  $J_{11} = ES$  — жесткость бруса при растяжении;  $u_i', w'$  — смещения, выражающие влияние кривизны на деформированное состояние.

Если воспользоваться последовательно формулами (3.1), (2.2), (1.3) и (1.2), с указанной выше точностью получим

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \alpha \varepsilon_{ij}', \quad i, j = 1, 2, \quad \tau_{33} = \alpha E + \alpha \varepsilon \varepsilon_{33}' \\ \tau_{3i} &= \alpha \varepsilon (\varepsilon_i^{n-1} H_i + \varepsilon_{3i}'), \quad i, j = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$H_1 = - \left( A_{35} \varepsilon_1 + \frac{1}{2} A_{36} \varepsilon_2 \right), \quad H_2 = - \left( \frac{1}{2} A_{66} \varepsilon_3 + A_{56} \varepsilon_1 \right) \quad (3.3)$$

В формулах (3.2)  $\varepsilon_{ij}'$  — неизвестные напряжения, соответствующие смещениям  $u_i', w'$ .

Используя формулы перехода (2.2) и компоненты напряжений (3.2), уравнения равновесия (1.6) и граничные условия (1.7), соответственно представятся так:

$$\sum_i \frac{\partial \tau_{ij}'}{\partial \xi_i} + (n-1) \varepsilon_i^{n-2} H_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.4)$$

$$\sum_i \tau_{ji}' \cos(n, \xi_i) = 0, \quad i, j = 1, 2 \quad (3.5)$$

$$\sum_i \tau_{3i}' + \varepsilon_i^{n-1} [(E + H_1) \cos(n, \xi) + H_2 \cos(n, \eta)] = 0 \quad (3.6)$$

В уравнениях (3.4) и (3.6)  $H_1$  и  $H_2$  имеют значения (3.3), а  $H_3 = 0$ . Итак, задача свелась к определению шести компонентов напряжений  $\varepsilon_{ij}'$ , удовлетворяющих в области, занятой брусом (в пространстве  $\xi, \eta, \zeta$ )

\* Термины смещения и напряжения здесь применяются условно, то есть в действительности указанные величины будут соответственно смещениями и напряжениями, будучи умноженными на  $\alpha$ .

уравнениям равновесия (3.4) и граничным условиям (3.5) и (3.6). При этом, компоненты деформаций, соответствующие напряжениям  $\tau_{ij}$ , должны удовлетворять также шести условиям совместности Сен-Венана.

Полученную задачу решаем полуобратным методом. Зададимся общим видом искомых напряжений, вводя в них неизвестные функции и неизвестные постоянные. За счет неизвестных функций будут удовлетворены перечисленные выше условия, а за счет постоянных постараемся обеспечить разрешимость граничных задач, которые получим.

Итак, примем

$$\begin{aligned}\tau_{ii} &= \sum_k c^{(k)} T_{ii}^{(k)} + k_1 (2 - i) E \tau_i^k z_i, \quad \tau_{12} = \sum_k c^{(k)} T_{12} \\ \tau_{33} &= \sum_k c^{(k)} \left( \tau_{33}^{(k)} - k_2^{-1} E \tau_i^{(k)} (a^{(k)} - \sum_j p_j^{(k)} z_j) \right) - E (x^k + \beta_1^k z_1 + \beta_2^k z_2) \\ \tau_{ii} &= \tau_i^{(k)} [E (i - 2) - H_i] + \sum_k c^{(k)} \left\{ \frac{\partial \Psi_{ii}}{\partial z_i^2} + L_i \omega^{(k)} + \frac{1}{2} a^{(k)} E z_i + \right. \\ &\quad \left. + c^{(k)} \left[ A_{33} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z_i^2} + z_i^2 \right) + A_{36} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z_i^2} - z_i^2 \right) \right] \right\} \quad (3.7) \\ k_i &= k + i, \quad \alpha = 4 + i, \quad \gamma = 3 - i, \quad \nu = (-1)^i, \quad i, j = 1, 2\end{aligned}$$

где  $k = n - 2$  ( $n = 1$ ),  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$  наибольшее значение  $i$  соответствует  $k = 0$  при  $n$  четном и  $k = -1$  при  $n$  нечетном (в формулах  $k \geq 0$  и  $k_i \geq 0$ ).

В (3.7) введены обозначения

$$\begin{aligned}T_{ii} &= k_1 \left( \tau_i + \frac{\partial^2 \Psi^{(k)}}{\partial z_i^2} \right), \quad T_{12} = k_1 \left( \tau_{12} - \frac{\partial^2 \Psi^{(k)}}{\partial z_1 \partial z_2} \right), \quad \tau_{33} = \tau_1 T_{11}^{(k)} + \tau_2 T_{22}^{(k)} + T_{33}^{(k)} \\ \tau_{ii} &= -c^{(k)} \left( A_{33} \varphi - \frac{1}{2} \alpha A_{36} z_i^2 \right) - \frac{1}{4} a^{(k)} E z_i^2 - \Psi_{ii} - A_{36} \omega^{(k)} \\ \tau_{12} &= -c^{(k)} \left[ A_{36} \varphi - \frac{1}{2} (A_{33} \gamma_i^2 - A_{36} z_i^2) \right] - A_{36} \omega^{(k)} \\ T_{33} &= k_2 E \left[ \sum_j p_j^{(k)} z_j^{(2)} + \omega^{(k)} + \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} a^{(k)} \sum_i \left[ (E \nu_{3i}^{-1} - 2 \gamma_i) z_i^2 - \nu_i \nu_{3i} z_i^2 \right] - \frac{1}{2} a^{(k)} z_3 z_i \right] \\ \frac{\partial \Psi_{ii}}{\partial z_i^2} &= \sum_{j=1}^2 p_j^{(k)} (A_{33} z_j^{(2)} + A_{36} z_j^{(2)}) + L_i^{(k+2)}, \quad z_j^{(2)} = z_j^{(1)} - z_3 z_j^2\end{aligned}$$

причем

$$\tau_{31}^{(1)} = \frac{\partial z_1^{(1)}}{\partial z_1^2} - \frac{1}{2} (\gamma_1 z_1^2 - z_2 z_1^2), \quad U_{3i}^{(k)} = A_{33} U_i^{(k)} + A_{36} U_i^{(k)}$$

$$\tau_{33}^{(1)} = \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z_3} = \tau_{22} z_1 - \frac{1}{2} \tau_{33} z_1^2, \quad L_i = A_{2i} \frac{\partial}{\partial z_i} + A_{3i} \frac{\partial}{\partial z_i}$$

$\tau_{31}^{(1)}$  и  $\tau_{32}^{(1)}$  получаются соответственно из  $\tau_{33}^{(1)}$  и  $\tau_{31}^{(1)}$  перестановкой  $z$  и  $\eta$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  и заменой верхнего индекса 1 на 2.

$$U_i^{(k)} = \left\{ \left[ e_i^{(k)} d\tilde{z}_i + d\tilde{z}_i \int \left| \frac{\partial e_i^{(k)}}{\partial \tilde{z}_i} d\tilde{z}_i + \left( \frac{\partial e_i^{(k)}}{\partial \tilde{z}_i} - \frac{\partial e_i^{(k)}}{\partial \tilde{z}_i} \right) d\tilde{z}_i \right] \right\} \quad (3.8)$$

при этом  $e_i^{(k)}$  имеют значения

$$e_i^{(k)} = kE^{-1} (\tau_{1i} T_{11}^{(k)} - \tau_{11} T_{12}^{(k)} - \tau_{13} T_{12}^{(k)} - \tau_1 T_{33}^{(k)}) + (n-1) t_{ii}$$

$$e_{12}^{(k)} = kE^{-1} (-\tau_{13} T_{11}^{(k)} - \tau_{23} T_{22}^{(k)} + \tau_{33} T_{12}^{(k)} - \tau_3 T_{33}^{(k)}) - (n-1) t_{12}$$

$$i = 1, 2, \quad \gamma = 3 - i$$

$$\tau_{11} = \tau_{ii} - \tau_{ij}^2, \quad \tau_{12} = \tau_{12} + \tau_1 \tau_2, \quad \tau_{13} = \tau_1 \tau_3 + \tau_{14}, \quad \tau_{33} = \tau_3^2 - \tau_{44}$$

где  $t_{ij}$  при наибольшем значении  $k$ , то есть при  $k = n - 2$  определяются формулами

$$t_{ii} = \tau_{1i} \tilde{z}_i, \quad i = 1, 2, \quad t_{12} = -\tau_{14} \tilde{z}_1$$

при всех остальных значениях  $k$   $t_{ij} = 0$ .

В решении (3.7)  $\varphi$  и  $\chi^{(1)}$  — неизвестные функции из теории напряженного состояния однородного анизотропного призматического бруса [7], причем  $\varphi$  — функция кручения,  $\chi^{(1)}$  — функция изгиба в плоскости  $\xi O\eta$ , а  $\chi^{(2)}$  — в плоскости  $\eta O\zeta$ .

Неизвестными в решении являются функции  $\Phi^{(k)}$  и  $\psi^{(k)}$  и постоянные  $a^{(k)}$ ,  $p_i^{(k)}$ ,  $c^{(k)}$ ,  $\tau^*$ ,  $\hat{p}_1^*$ ,  $\hat{p}_2^*$ .

Компоненты напряжений (3.7) удовлетворяют первым двум уравнениям равновесия (3.4), а из третьего получим

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} (L_i \psi^{(k)}) = - \left( k_2 \tau_{33}^{(k)} + \sum_i \frac{\partial U^{(k)}}{\partial z_i} \right), \quad i = 1, 2 \quad (3.9)$$

Вычислив по формулам (1.4) компоненты деформаций, соответствующие напряжениям (3.7), и подставив их в условия совместности Сен-Венана, убеждаемся, что последние будут удовлетворены, если функции  $\Phi^{(k)}$  в области  $S$  будут определяться условием

$$\begin{aligned} & \sum_i \left( \tau_{ii} \frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial z_i^2} + 2\tau_{i3} \frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial z_i \partial z_3} \right) + (\tau_{33} - 2\tau_{12}) \frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial z_3^2 \partial z_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_3} \left( k_1^{-1} \tau_3 T_{33}^{(k)} + \right. \\ & \left. + \tau_{33} \tau_{12} - \sum_i \tau_{i3} \tau_{ii}^* \right) + \sum_i \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} (\tau_{ii} \tau_{ii}^* - \tau_{1i} \tau_{1i}^* - \tau_{2i} \tau_{2i}^*) - \right. \\ & \left. - k_1^{-1} \tau_1 \frac{\partial^2 T_{33}^{(k)}}{\partial z_1^2} \right] = 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Перейдем к граничным условиям. Подставляя напряжения (3.7) в условия (3.6), получим

$$\sum_i L_i \sigma_i^{(k)} = - \left( \sum_i \frac{1}{2} a^{(k)} E \varepsilon_i + U_{33}^{(k)} \right) \cos(n, \bar{z}_i), \quad i = 1, 2 \quad (3.11)$$

а из (3.5) следует

$$\frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \bar{z}_i} = (-1)^i \int [(z_{ii} + f) \cos(n, \bar{z}_i) + z_{ii}^* \cos(n, \bar{z}_i)] dS \quad (3.12)$$

$$i = 1, 2, \quad \gamma = 3 - i$$

где при наибольшем значении  $k$   $f = (2-i) k E z_{ii}$ , при всех остальных значениях  $k$   $f = 0$ .

Итак, определение неизвестных напряжений  $\sigma_{ij}$  свелось к решению плоских гармонических и бигармонических задач. Первые определяются условиями (3.9) в области  $S$  и (3.11) на контуре  $L$ , вторые — соответственно, условиями (3.10) и (3.12).

Разрешимость гармонических задач обеспечивается постоянными

$$a^{(k)} = k_2 J_{11} \iint \sigma_{33}^{(k)} d\bar{z} dz_{ii}$$

причем, при наибольшем значении  $k$   $a^{(k)} = a^{(k_2)} = U_{33}^{(k_2)} - U_{33}^{(k_1)} = 0$ .

Во всех формулах двойной интеграл берется по площади. Обеспечена также разрешимость бигармонической задачи. Как показывают вычисления  $\frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \bar{z}_i}$ ,  $\frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial z_i}$  и сама функция  $\Phi^{(k)}$  будут однозначны при обходе контура  $L$ , если при наибольшем значении  $k$ , то есть при  $k = n - 2$  принять

$$p_1^{(k)} = j_{11} j_{22}^{-1}, \quad p_2^{(k)} = 0$$

а при всех остальных значениях  $k$

$$p_j^{(k)} = -k_2 J_{11}^{-1} \iint z_{ii} \sigma_{33}^{(k)} d\bar{z} dz_{ii}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1 + i$$

Постоянная  $c^{(k)}$  при всех значениях  $k$  определяется формулой

$$c^{(k)} = D^{-1} \iint \left[ \gamma_i \left( \frac{\partial \Psi_{11}}{\partial \bar{z}_i} - L_{10}^{(k)} \right) - \bar{z}_i \left( \frac{\partial \Psi_{22}}{\partial z_i} - L_{20}^{(k)} \right) \right] d\bar{z} dz_{ii}$$

где

$$J_{11} = ES, \quad J_{22} = E \int \int \bar{z}^2 d\bar{z} dz_{ii}, \quad J_{12} = E \int \int \bar{z}^2 d\bar{z} dz_{ii}$$

$$D = \int \int [A_{11}(\bar{z}_i - \bar{z}) - A_{22} \gamma_i (\bar{z} - z_i) + A_{33}(\bar{z}_i - \gamma_i \bar{z} - 2\bar{z}_i) + A_{44} \gamma_i] d\bar{z} dz_{ii}$$

Наконец, как следует из вычислений, усилия на основании  $\bar{z} = l$  приводятся к заданной силе  $N$  при

$$\alpha^* = J_{11}^{-1} \iint \tau_{33}^{(0)} d\xi d\eta, \quad \beta_1^* = J_{22}^{-1} \iint \tau_{23}^{(0)} d\xi d\eta, \quad \beta_2^* = J_{33}^{-1} \iint \tau_{33}^{(0)} d\xi d\eta$$

$n$  четном и  $\alpha^* = \beta_1^* = \beta_2^* = 0$  при  $n$  нечетном.

Чтобы получить полную систему напряжений в пространстве  $\xi, \eta, \bar{z}$ , следует напряжения  $\tau_{ij}$  по формулам (3.7) подставить в формулы (3.2).

4. Частные случаи. а) Рассмотрим некоторые частные случаи. Положим, что ось бруса — плоская кривая второго порядка ( $n = 2$ ). Тогда, подставляя в формулу (3.8)  $k = 0$  (так как  $n$  — четное число) получаем, что наибольшее значение  $l = 0$  (это и единственное его значение). Поэтому получим  $k = 0, k_1 = 1$ , то есть задача сводится к одной бигармонической функции  $\Phi^{(0)} = \Phi^*$ , поскольку в соответствии с вышеизложенным  $\omega^{(1)} = 0$ . В этом случае напряжения  $\tau_{ij}$  представляются так:

$$\tau_{11} = E\varepsilon + T_{11}^{(0)}, \quad \tau_{22} = T_{22}^{(0)}, \quad \tau_{12} = T_{12}^{(0)}$$

$$\tau_{33} = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 p_1^{(0)} \bar{z} + \tau_{33}^{(0)} - E(\alpha^* + \beta_1^* \bar{z} + \beta_2^* \eta)$$

$$\tau_{31} = -\tau_{13} = [(2 - \nu)E + H_1] \bar{z} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial \xi}, \quad p_1^{(0)} = J_{11}^{-1} J_{22}^{-1}, \quad l = 1, 2$$

$\sigma_{33}, \tau_{ij}^{(0)}, T_{ij}^{(0)}$  получим, если в соответствующие формулы подставим  $\alpha^{(1)} = l^{-1} \omega^{(2)} = \omega^{(1)} = 0$ . Используя (3.10) и (3.12), легко получим условия определения бигармонической функции  $\Phi^*$  и значение постоянной  $c^{(0)}$ .

б) Допустим ось бруса — плоская кривая третьего порядка ( $n = 3$ ). Так как  $n$  — число нечетное, то из соотношения (3.8) при  $k = -1$  получим наибольшее значение  $l = 1$ . Поэтому, в соответствии с вышеизложенным, принимаем  $l = 0, 1$ ; тогда  $k = 1$ , а  $k_1 = 0, 2$ . Имея ввиду, что  $\omega^{(2)} = \alpha^{(2)} = 0$ , в этом случае решение приводится к двум неизвестным функциям — бигармонической  $\Phi^{(1)}$  и гармонической  $\omega^{(0)}$ . Однако, как следует из определения условий  $\Phi^{(1)}$ , имеет место  $\Phi^{(1)} = \Phi^*$ . Поэтому новой функцией будет только одна  $\omega^{(0)} = \omega^*$ .

в) Рассмотрим случай, когда  $n = 4$ . Проведя вычисления, подобные предыдущим случаям, получим, что  $k = 0, 2$ , а  $k_1 = 3, 1$ . Однако  $\omega^{(3)} = \alpha^{(3)} = 0$  и задача приводится к  $\Phi^{(2)}, \Phi^{(0)}$  и  $\omega^{(1)}$ . Так как  $\Phi^{(2)} = \Phi^*$ , а  $\omega^{(1)} = 2\omega^*$ , новой функцией оказывается бигармоническая функция  $\Phi^{(0)} = \Phi^{**}$ .

г) Наконец, при  $n = 5$  задача приводится к определению функций  $\Phi^{(3)} = \Phi^*, \Phi^{(1)} = 3\Phi^{**}, \omega^{(2)} = 6\omega^*$  и новой гармонической функции.

5. Заключение. Решение задачи растяжения слегка изогнутого бруса, когда ось бруса — плоская кривая  $n$ -го порядка, свелось к граничным пло-

ским задачам — определению бигармонических и гармонических функций, общее число которых  $n-1$ . При этом, как видно из рассмотренных частных случаев, повышение порядка уравнения оси бруса на единицу, влечет появление в решении новой функции — бигармонической или гармонической.

Всесоюзный заочный институт  
текстильной и легкой  
промышленности

Поступила 22 I 1980

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ, Գ. Ա. ՓՈԳՈՍՅԱՆ

## ԹԵՆԻՈՒՄԻ ՄԻՆԸՆ ԶԽՄԱՆԻՔ ԱՆԻՋԱՏՐՈՊ ՉՈՂԻ ՉԳՈՒՄԸ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ուսումնասիրվում է համասեռ անիզոտրոպ ձողի լարված վիճակը, երբ ձողի առանցքը ցանկացած կարգի հարթ կոր է:

Ան-վենանի կիսադարձային եղանակի օգտագործումով խնդրի լուծումը բերվել է բիհարմոնիկ և հարմոնիկ ֆունկցիաների որոշմանը: Ցույց է տրվում ստացված եզրային խնդիրների լուծելիությունը:

## ON TENSION OF A HOMOGENEOUS ANISOTROPIC SLIGHTLY BENT BEAM

R. S. MINASIAN, G. A. POGOSIAN

### S u m m a r y

The solution to a problem for the tension (compression) of a homogeneous anisotropic beam is obtained by Sen-Venan's method where the beam's axis is a plane curve of an arbitrary order.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Рил П. М. Деформация стержня со слабо изогнутой осью. ДАН СССР, т. XXIV, 1939, вып. 2.
2. Рухадзе А. К. К задаче деформаций стержня со слабо изогнутой осью. Сообщения АН Грузинской ССР, 1941, т. 8, № 5.
3. Минасян Р. С. Изгиб силой однородного бруса постоянного сечения со слабо изогнутой осью. ДАН Азерб.ССР, 1960, т. XXVI, № 3.
4. Минасян Р. С. К вопросу изгиба парой сил составного стержня со слабо изогнутой осью. ДАН Азерб.ССР, 1960, т. XXVI, № 4.
5. Минасян Р. С. К вопросу изгиба поперечной силой составного стержня со слабо изогнутой осью. ДАН Азерб.ССР, 1961, т. XXVII, № 4.
6. Хатиашвили Г. М. Задачи Сен-Венана для составных анизотропных тел, близких к призматическим. Труды Вычислительного центра АН Груз.ССР, 1963, т. IV.
7. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М., Наука, 1977.

Т. И. ПЕТРЕНКО

РЕШЕНИЕ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ИЗГИБА  
ПЛАСТИНКИ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО  
ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Предложенный Гольденвейзером А. А. асимптотический метод построения теории оболочек [1] был применен им в работе [2] для построения приближенной теории изгиба пластинки в случае статики.

Этот метод нашел применение и для решения динамических задач колебаний тонких пластинок. В частности, в работе [3] рассматриваемый метод позволил получить двумерные динамические уравнения колебаний пластинок из трехмерных уравнений теории упругости и установить предел применимости полученных уравнений.

В нашей работе методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости решается для случая установившихся колебаний квазистатическая задача изгиба пластинки.

Согласно методу Гольденвейзера напряженное состояние пластинки составляется как сумма медленно затухающего напряженного состояния, которое строится при помощи основного итерационного процесса, и быстро затухающих при удалении от краев напряженных состояний, которые строятся при помощи вспомогательного итерационного процесса.

Пусть ось  $z$  перпендикулярна к плоскости пластинки, а срединная плоскость совпадает с плоскостью  $xy$ .

Основные уравнения теории упругости в случае установившихся колебаний с частотой  $\omega$  можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} &= -\rho \omega^2 u & (xy) \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} &= -\rho \omega^2 w \end{aligned} \quad (1.1)$$

Формулы перемещения — напряжения имеют вид

$$\begin{aligned} E \frac{\partial u}{\partial x} &= \tau_x - \nu (\tau_y + \tau_z) & (xy), & \quad E \frac{\partial w}{\partial z} = \tau_z - \nu (\tau_x + \tau_y) \\ E \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 2(1 + \nu) \tau_{xz} & (xy) \\ E \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= 2(1 + \nu) \tau_{xy} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь и в дальнейшем символ  $(xy)$  означает, что имеет место второе соотношение, которое может быть получено из приведенного путем замены  $x$  и  $u$  на  $y$  и  $v$  и наоборот.

На плоскостях пластинки  $z = \pm h$  должны выполняться следующие граничные условия:

$$\sigma_z = \pm \frac{1}{2} p(x, y), \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0 \quad (1.3)$$

при этом  $p(x, y)e^{i\omega t}$  — интенсивность внешней нормальной нагрузки.

Обозначим  $\rho\omega^2$  через  $h^2 a^2$ , где  $a^2$  порядка  $E$ ,  $\alpha$  — параметр, который для рассматриваемой нами квазистатической задачи можно принять равным двум.

Зададим любое из перемещений и напряжений в виде

$$Q = h^{-q} \sum_{s=1}^{\infty} h^{s-1} Q^{(s)} \quad (1.4)$$

Здесь  $q$  есть целое число, которое определяется из соотношений:

$$\begin{aligned} (\tau_x, \tau_y, \tau_{xy}) \rightarrow q = x + 2, \quad (\tau_{xz}, \tau_{yz}) \rightarrow q = x + 1 \\ \tau_z \rightarrow q = x, \quad (u, v) \rightarrow q = x + 2, \quad w \rightarrow q = x + 3 \end{aligned} \quad (1.5)$$

(число  $x$  определяется из граничных условий).

Заменив в уравнениях (1.1), (1.2)  $z$  по формуле

$$z = h\zeta$$

приняв, что по переменным  $(x, y, \zeta)$  скорость изменения напряжений и перемещений не слишком велика, выражая перемещения и напряжения по формулам (1.4), (1.5) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $h$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \zeta} &= -a^2 u^{(s-2)} \quad (xy) \\ \frac{\partial \tau_{yx}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(s)}}{\partial \zeta} &= -a^2 v^{(s)} \\ E \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x} &= \sigma_x^{(s)} - \nu (\tau_{xx}^{(s)} + \sigma_z^{(s-2)}) \quad (xy) \\ E \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} &= \sigma_z^{(s-1)} - \nu (\tau_{xz}^{(s-2)} + \sigma_y^{(s-2)}) \\ E \left( \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial v^{(s)}}{\partial x} \right) &= 2(1 + \nu) \tau_{xz}^{(s-2)} \quad (xy) \\ E \left( \frac{\partial u^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(s)}}{\partial x} \right) &= 2(1 + \nu) \tau_{xy}^{(s)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Отметим, что при  $\alpha > 2$  те же преобразования приводят к системе, которая приближается к полученной в работе [2] системе для случая статик.

Интеграл системы (1.6) представим в виде

$$Q^{(s)} = Q_1^{(s)} + Q^{*(s)} \quad (1.7)$$

где  $Q_1^{(s)}$  — интеграл однородной системы, получающейся из системы (1.6) за счет отбрасывания величин с верхним индексом, меньшим  $s$ , а  $Q^{*(s)}$  — какой-либо частный интеграл неоднородной системы (1.6), в которой все величины с индексом, меньшим  $s$ , рассматриваются как известные.

Интеграл однородной системы имеет вид

$$\begin{aligned} u_i^{(s)} &= \tau_{xi}^{(s)}(xy), \quad w_i^{(s)} = w_{xi}^{(s)}, \quad z_{xi}^{(s)} = \tau_{xi}^{(s)}(xy) \\ \tau_{xy}^{(s)} &= \tau_{xy}^{(s)}, \quad \tau_{xz}^{(s)} = \tau_{xz}^{(s)} + \tau_{yz}^{(s)}(xy) \\ z_{xz}^{(s)} &= \tau_{xz}^{(s)} + \tau_{yz}^{(s)} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь величины, отмеченные дополнительными индексами внизу, — функции двух переменных  $(x, y)$ . Они связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} u_i^{(s)} &= -\frac{\partial w_0^{(s)}}{\partial x}(xy), \quad \phi_{xi}^{(s)} = -\frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial y^2} \right)(xy) \\ \tau_{xy}^{(s)} &= -\frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial x \partial y}, \quad \tau_{xz}^{(s)} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^3 w_0^{(s)}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_0^{(s)}}{\partial x \partial y^2} \right)(xy) \\ \tau_{xz}^{(s)} &= \frac{1}{3!} \left( \frac{\partial^3 \tau_{xi}^{(s)}}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 \tau_{xi}^{(s)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \tau_{xi}^{(s)}}{\partial y^3} \right) \\ \tau_{xz}^{(s)} &= - \left( \frac{\partial^2 \tau_{xz}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}^{(s)}}{\partial y} + a^2 w_0^{(s)} \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Интеграл системы (6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} w^{*(s)} &= \frac{1}{E} \int_0^z [\tau_{xz}^{(s-4)} - \nu(\tau_{xz}^{(s-2)} + \tau_{yz}^{(s-2)})] dz \\ u^{*(s)} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^z \tau_{xz}^{(s-2)} dz - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^z w^{*(s)} dz \quad (xy) \\ \phi_x^{*(s)} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial x} + \nu \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial y} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \tau_{xz}^{(s-2)}(xy) \\ \tau_{xy}^{*(s)} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz}^{*(s)} &= - \int_0^z \left( \frac{\partial \tau_{xz}^{*(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{*(s)}}{\partial y} \right) dz - a^2 \int_0^z u^{*(s-2)} dz \quad (xy) \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$z_s^{*(s)} = - \int_0^z \left( \frac{\partial z_s^{*(s)}}{\partial x} + \frac{\partial z_s^{*(s)}}{\partial y} + a^2 w^{*(s)} \right) d\zeta$$

Как видим, все величины  $Q^{(s)}$  при  $s = 1$  и  $s = 2$  равны нулю, а при  $s > 2$  строятся при помощи рекуррентных формул (1.10).

Потребуем теперь, чтобы напряжения и перемещения, вычисляемые при помощи основного итерационного процесса, удовлетворяли при  $z = \pm h$  соотношениям (1.3) и дополнительному условию

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial z} = -h^2 a^2 w \quad (1.11)$$

которое вытекает из (1.3) и (1.1). При помощи (1.4), (1.5) и (1.8) из (1.3) и (1.11) получим при  $z = h$  ( $\zeta = 1$ )

$$h^{s-1-1} (\sigma_{s3}^{(s)} + \sigma_{s1}^{(s)} + z_s^{*(s)}) = \frac{1}{2} p_s$$

$$3z_{s3}^{(s)} + \sigma_{s1}^{(s)} + \frac{\partial z_s^{*(s)}}{\partial \zeta} + a^2 w_0^{(s)} + a^2 w^{*(s)} = 0 \quad (1.12)$$

$$z_{s32}^{(s)} + z_{s20}^{(s)} + z_{s2}^{*(s)} = 0 \quad (xy)$$

где  $p_s = p(x, y)$ ,  $p_s = 0$  при  $s > 1$ . Аналогичные условия будут выполняться автоматически при  $z = -h$ , так как задача обратна симметрична.

Из уравнения (1.12), положив  $\sigma$  равным нулю, найдем

$$\begin{aligned} \sigma_{s3}^{(1)} &= -\frac{1}{4} p - \frac{a^2}{2} w_0^{(1)}, & \sigma_{s1}^{(1)} &= \frac{3}{4} p + \frac{a^2}{2} w_0^{(1)} \\ \sigma_{s3}^{(s)} &= -\frac{a^2}{2} w_0^{(s)} + \frac{1}{2} \left( z_s^{*(s)} - \frac{\partial z_s^{*(s)}}{\partial \zeta} - a^2 w^{*(s)} \right) \quad (s > 1) \\ z_{s3}^{(s)} &= \frac{a^2}{2} w_0^{(s)} - \frac{1}{2} \left( 3z_s^{*(s)} - \frac{\partial z_s^{*(s)}}{\partial \zeta} - a^2 w^{*(s)} \right) \quad (s > 1) \\ z_{s32}^{(s)} &= -z_{s22}^{(s)} - z_{s2}^{*(s)} \quad (xy) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Из (1.9) и (1.13) получим уравнение относительно функции  $w_0^{(s)}$ . Все величины, отмеченные индексом  $s$  и звездочкой, можно считать известными, если уже построены  $s-2$  первых приближений,

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2} w_0^{(s)} &= \frac{E}{3^s (1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^4 w_0^{(s)}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_0^{(s)}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0^{(s)}}{\partial y^4} \right) = \\ &= -\frac{1}{4} p_{(s)} + \frac{1}{2} \left( z_s^{*(s)} - \frac{\partial z_s^{*(s)}}{\partial \zeta} - a^2 w^{*(s)} \right) \end{aligned} \quad (1.14)$$

где  $\bar{z}_{s3} = 1$  и  $\bar{z}_{s1} = 0$  при  $s > 1$ .

Таким образом, система (1.9) может быть разрешена и из нее можно определить все входящие в (1.9) величины.

При построении вспомогательного итерационного процесса будем считать, что боковой край пластинки проходит вдоль линии  $x = 0$ , а пластинка простирается в сторону отрицательных  $x$ .

Зададим любое из перемещений и напряжений в виде

$$Q = h^q \sum_{n=1}^{\infty} h^{n-1} Q^{(n)} \quad (1.15)$$

Для выбора значений  $q$  возможны два варианта.

Вариант I

$$\begin{aligned} (\tau_{xy}, \tau_{yz}) \rightarrow q = -1, \quad (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_z) \rightarrow q = -1 + 1 \\ (u, w) \rightarrow q = -1 + 2, \quad v \rightarrow q = -1 + 1 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Вариант II

$$\begin{aligned} (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_z) \rightarrow q = -1 + 1, \quad (\tau_{xy}, \tau_{yz}) \rightarrow q = -1 + 2 \\ (u, w) \rightarrow q = -1 + 2, \quad v \rightarrow q = -1 + 3 \end{aligned} \quad (1.17)$$

В соответствии с этими вариантами можно построить два варианта вспомогательного итерационного процесса и считать, что напряжения и перемещения составляются как сумма трех слагаемых, соответствующих основному итерационному процессу и двум вариантам вспомогательного итерационного процесса.

Числа I и II выбираются в зависимости от граничных условий на боковом крае пластинки.

Заменим в уравнениях (1.1), (1.2)  $x$  и  $z$  по формулам

$$x = h\tilde{x}, \quad z = h\tilde{z}$$

принимая, что по переменным  $(\tilde{x}, y, \tilde{z})$  скорость изменения величин не слишком велика, выразим перемещения и напряжения по формулам (1.15), выбирая для  $q$  значения из (1.16) или из (1.17), и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $h$ . Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_x^{(a)}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(a)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(a)}}{\partial \tilde{z}} &= -a^2 u^{(a-4)} \\ \frac{\partial^2 \tau_{xy}^{(a)}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(a)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(a)}}{\partial \tilde{z}} &= -a^2 v^{(a-4)} \\ \frac{\partial^2 \tau_{xz}^{(a)}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(a)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z^{(a)}}{\partial \tilde{z}} &= -a^2 w^{(a-4)} \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$E \frac{\partial u^{(a)}}{\partial \tilde{x}^2} = \varepsilon_x^{(a)} - \nu (\varepsilon_y^{(a)} + \varepsilon_z^{(a)}), \quad E \frac{\partial v^{(a)}}{\partial y} = \tau_{xy}^{(a)} - \nu (\tau_x^{(a)} + \tau_z^{(a)})$$

$$E \frac{\partial w^{(a)}}{\partial \tilde{x}^2} = \varepsilon_z^{(a)} - \nu (\varepsilon_x^{(a)} + \varepsilon_y^{(a)}), \quad E \left( \frac{\partial u^{(a)}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial w^{(a)}}{\partial \tilde{z}^2} \right) = 2(1 + \nu) \varepsilon_{xz}^{(a)}$$

$$E\left(\frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial w^{(1)}}{\partial y}\right) = 2(1+\nu) \tau_{yz}^{(2)}, \quad E\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi}\right) = 2(1+\nu) \tau_{xy}^{(2)}$$

Здесь  $\alpha, \beta, \gamma$  принимают значения:

$$\alpha = s, \quad \beta = s, \quad \gamma = s - 2 \quad \text{для варианта I}$$

$$\alpha = s, \quad \beta = s - 2, \quad \gamma = s \quad \text{для варианта II}$$

Полученная нами при  $\alpha = 2$  система уравнений (1.18) приближается к приведенной в работе [2] системе для случая статики.

Донецкий государственный  
университет

Получила 10 XII 1979

ს. თ. პეტრენკო

ԱՌԱՋԳՈՒԿԱՆՈՒԹՅԱՆ, ՏԵԽՆՈՒԹՅԱՆ ԶԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԱԿԱՆ,  
ԻՆՏԵՐԻՄԱՆ ԻՆԵՐՈՒԴՈՎ ՍԱՐԻ ՄԻՌՈՆ ԿՐԱՍՆՈՍՏԱՏԻԿ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒՄԻՆԵՐ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Դիտարկվում է կաշեւաջված տատանումների համար սալի ծոման կլի-  
պիստատիկ խնդիրը, Լարված վիճակը ինկլայացվում է մի քանի Լարված վի-  
ճակների զուգարի տեսքով, որոնք կառուցվում են հիմնական և օժանդակ  
խտեւացիոն պրոցեսների օգնութլամբ, Հիմնական և օժանդակ խտեւացիոն  
պրոցեսները կառուցվել են առաձգականութլյան տեսութլյան հաւասարումների  
աւրմպտոտական ինտեգրման մեթոդով:

## THE SOLUTION TO A QUASI-STATIC PROBLEM FOR A PLATE FLEXURE BY ASYMPTOTIC INTEGRATION OF EQUATIONS IN THE THEORY OF ELASTICITY

T. P. PETRENKO

S u m m a r y

The solution to a quasi-static problem for a plate flexure under steady vibration is suggested. The problem is solved by asymptotic integration of equations in the theory of elasticity.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. А. Асимптотический метод построения теории оболочек. Материалы I Всесоюзной школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Гегечкорн, Груз.ССР, 1—10 окт. 1974. Изд-во Тбил. ун-та, 1975.
2. Гольденвейзер А. А. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
3. Гусейн-Заде М. Н. Асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений тонкой пластинки. ПММ, 1974, т. 38, вып. 6.

В. И. МАЛЫЙ, С. В. БАЗНАЕВСКИЙ

# ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЧАСТОТ И ФОРМ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗАМКНУТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Основу решения сложных динамических задач для упругих тел составляет определение форм и частот их собственных колебаний. Для замкнутых сферических оболочек известны точные аналитические, а также приближенные решения задачи о свободных колебаниях [1-8].

Данная работа посвящена анализу и упрощению аналитических решений задачи о свободных колебаниях замкнутой сферической оболочки. Получены асимптотические приближения для частот и форм колебаний. Такой подход позволил представить результаты в виде простых формул, которые удобны для инженерных расчетов и описывают в сравнительно наглядной форме влияние на частоты и формы колебаний каждого из трех безразмерных параметров задачи — номера формы  $n$ , коэффициента Пуассона  $\nu$  и относительной толщины  $h/R$  (здесь  $h$  — толщина оболочки, а  $R$  — ее радиус).

Свободные колебания сферической оболочки будем описывать уравнениями движения [2] в форме В. В. Новожилова [9]

$$\begin{aligned} \Delta U + 2U - \nu R^2 \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [U - (2+\nu)w] &= 0 \\ \Delta \Delta w + 2\Delta w + (1-\nu^2) \frac{1+\nu}{\lambda} w + (1+\nu) \frac{1+\nu}{\lambda} U + \\ + \nu R^2 \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \left( \frac{1}{\lambda} + 2 + \nu \right) w - U \right] &= 0 \\ V + 2V - 2\nu R^2 \frac{1+\nu \partial^2 V}{E \partial t^2} &= 0 \\ U &= \frac{\partial u}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \cdot u + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + (1+\nu)w \\ V &= \frac{\partial v}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \cdot v - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \lambda = \frac{h^2}{12R^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $u, v, w$  — компоненты смещения вдоль меридиана, параллели и нор-

мали, соответственно,  $\theta$  и  $\varphi$  — углы широты и долготы на сфере,  $t$  — время;  $\rho$ ,  $E$  и  $\nu$  — плотность материала оболочки, его модуль упругости и коэффициент Пуассона.

В случае замкнутой оболочки граничные условия для решений системы (1.1) сводятся к условиям периодичности по окружной координате  $\varphi$  и к требованию регулярности решений в полюсах оболочки.

Известно [10], что существуют два типа колебаний сферической оболочки. Колебания первого типа сопровождаются вращением вокруг нормали без изменения поверхностной плотности материала оболочки ( $U = \omega = 0$ ,  $V \neq 0$ ). Второго типа колебаний — дивергентный, при этом отсутствует вращение элементов оболочки вокруг нормали ( $V = 0$ ,  $U \neq 0$ ,  $\omega \neq 0$ ). В случае колебаний первого типа разделение переменных в уравнениях движения происходит, если принять

$$v(\theta, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n V_n^m v_n^m(\theta, \varphi) e^{i p_n t}$$

$$u(\theta, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n V_n^m u_n^m(\theta, \varphi) e^{i p_n t}, \quad w(\theta, \varphi, t) = 0 \quad (1.2)$$

$$v_n^m(\theta, \varphi) = e^{im\varphi} \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta), \quad u_n^m(\theta, \varphi) = -\frac{im}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

где  $P_n^m(\cos \theta)$  — присоединенные полиномы Лежандра,  $p_n$  — частота собственных колебаний, а  $V_n^m$  — произвольные коэффициенты. При этом первое и второе из уравнений (1.1) удовлетворяются тождественно, ибо  $U = 0$  и  $\omega = 0$ . А так как

$$P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} = -\lambda P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad \lambda = n(n+1)$$

то и третье уравнение удовлетворяется, если собственную частоту определять из соотношения

$$p_n^2 = \frac{E}{2(1+\nu) \rho R^2} (n-2) \quad (1.3)$$

Таким образом, собственная частота  $p_n$  вырождена ( $2n+1$ ) — кратна и ей соответствуют собственные формы  $(u_n^m, v_n^m, 0)$  при  $-n \leq m \leq n$ .

Аналогично в случае колебаний дивергентного типа ( $V = 0$ ) разделение переменных произойдет, если собственные формы искать в виде

$$w_n^m(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

$$u_n^m(\theta, \varphi) = \mu_n \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad v_n^m(\theta, \varphi) = \mu_n \frac{im}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (1.4)$$

Тогда первые два из уравнений движения (1.1) удовлетворятся при условиях

$$\begin{cases} k_n^2 - (1 + \nu)(\lambda - 2) + \lambda(k_n^2 - \lambda + 2)\mu_n = 0 \\ \lambda\lambda(\lambda - 2) + (1 + \lambda)(2 + 2\nu - k_n^2) - \lambda[(1 + \nu)(1 + \lambda) + \lambda k_n^2]\mu_n = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

$$k_n^2 = 2R^2 \frac{1 - \nu^2}{E} p_n^2$$

а третье удовлетворяется тождественно.

Система (1.5) для коэффициента формы  $\mu_n$  имеет решение

$$\mu_n = \frac{k_n^2 + (1 + \nu)(\lambda - 2)}{\lambda(\lambda - 2 - k_n^2)} = \frac{\lambda\lambda(\lambda - 2) + (1 + \lambda)[2(1 + \nu) - k_n^2]}{\lambda[(1 + \nu)(1 + \lambda) + \lambda k_n^2]} \quad (1.6)$$

если безразмерная собственная частота  $k_n$  определяется как корень уравнения

$$k_n^4 - Ak_n^2 + B = 0 \quad (1.7)$$

где

$$A = \lambda\lambda^2 + (1 + \nu\lambda)\lambda - \lambda(1 - \nu) + 1 + 3\nu$$

$$B = \lambda\lambda^3 - 4\lambda\lambda^2 + [(5 - \nu^2)\lambda + 1 - \nu^2]\lambda - 2(1 - \nu^2)(1 + \lambda)$$

Уравнение (1.7) для каждого значения  $n$  дает 2 значения квадрата частотного параметра  $(k_n)^2$  и  $(k_n)^2$ , которым, согласно (1.6) и (1.4), соответствуют два значения коэффициента формы  $\mu_n$  и  $\mu_n$  и два вида форм собственных колебаний. Однако аналитический вид зависимости величин  $k_n$ ,  $k_n$ ,  $\mu_n$  и  $\mu_n$  от параметров  $\lambda$ ,  $\nu$  и  $\lambda$  является довольно сложным.

Численные эксперименты показали, что один из частотных параметров  $k_n$  с большой точностью совпадает с большей из частот, определяемых по безмоментной теории при  $\lambda = 0$

$$(k_n)^2 \approx \frac{1 + 3\nu + \lambda}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 + 3\nu + \lambda}{2}\right)^2 - (1 - \nu^2)(\lambda - 2)} \quad (1.8)$$

При этом исследование ограничивалось областью  $n < \lambda^{1/2} = \sqrt{12R/h}$ , так как при больших значениях  $n$  длины полуволн собственных форм колебаний будут меньше толщины оболочки, что делает неправомерным использование исходных уравнений (1.1).

Разложив корень в (1.8) по степеням величины  $\lambda^{-1}$ , получаем

$$(k_n)^2 \approx \lambda + 3\nu + \nu^2 + \frac{35 + 24\nu + 4\nu^2}{16\lambda} \quad (1.9)$$

Так как для тонких оболочек параметр  $\lambda < 10^{-1}$  (что соответствует условию  $h < 0.1 R$ ), то, естественно, для коэффициента  $A$  в уравнении (1.7) использовать приближение

$$A \approx \lambda\lambda^2 + \lambda + 1 + 3\nu \quad (1.10)$$

Тогда по теореме Виетта из (1.9) и (1.10) получаем частоту другого вида дивергентных колебаний оболочки

$$(k_n')^2 = A - (k_n)^2 \approx \lambda^2 + 1 - \nu^2 - \frac{35 + 24\nu + 4\nu^2}{16\lambda} \quad (1.11)$$

Проверка показала, что уже при  $n \geq 2$  соотношения (1.9) и (1.11) позволяют вычислить  $k_n'$  и  $k_n$  с погрешностью менее 1% и 3% при толщинах оболочек  $h < R/60$  и  $h < R/20$  соответственно. Для более грубых расчетов, так как коэффициент Пуассона реально изменяется в пределах  $0 \leq \nu \leq 0.5$ , можно рекомендовать еще более простые соотношения

$$\begin{aligned} (k_n')^2 &\approx \lambda^2 + 3\nu + \nu^2 + \frac{2.6}{\lambda} \\ (k_n)^2 &\approx \lambda^2 + 1 - \nu^2 - \frac{2.6}{\lambda} \end{aligned} \quad n \geq 2 \quad (1.12)$$

Но для металлов с коэффициентами Пуассона  $0.25 < \nu < 0.3$  потери точности при использовании соотношений (1.12) практически не происходит.

При  $n = 0$  и  $n = 1$  необходимо использовать значения

$$(k_0)^2 = 2(1 + \nu), \quad (k_1)^2 = 3(1 + \nu), \quad (k_1')^2 = 0 \quad (1.13)$$

получаемые по безмоментной теории.

Рассматривая разность  $(k_n')^2 - (k_n)^2$ , нетрудно убедиться, что при  $n \lesssim |12R/h|$  колебания второго вида являются более низкочастотными, чем первые.

Приближенные соотношения для коэффициента формы  $\mu_n$  получим, используя в (1.6) для частоты выражения (1.9), (1.11) или (1.12). Например, полученные из (1.12) после некоторых преобразований соотношения

$$\begin{aligned} \mu_n' &\approx \frac{\lambda^2 - \lambda + 2 - \nu - \nu^2 - \frac{2.6}{\lambda}}{\lambda(1 + \nu + \lambda\lambda)} \\ \mu_n &\approx -\frac{1 + \nu + \lambda\lambda}{\lambda\lambda^2 - \lambda + 2 - \nu - \nu^2 - \frac{2.6}{\lambda}} = -\frac{1}{\lambda\mu_n} \end{aligned} \quad n \geq 2 \quad (1.14)$$

позволяют вычислять  $\mu_n'$  и  $\mu_n$  с точностью до 3% и 5% при  $h < R/60$  и  $h < R/20$  соответственно. Но если допустить погрешность до 10% при  $R/h \geq 20$  и  $n \leq 4|R/h|$ , то можно пренебречь зависимостью  $\mu_n$  от  $\lambda$  и даже от  $\nu$

$$\begin{aligned} \mu_n' &\approx -\frac{\lambda^2 - (2 - \nu - \nu^2)\lambda + 2.6}{\lambda^2(1 + \nu)} \approx -\frac{\lambda - 1.3}{\lambda(1 + \nu)} \\ \mu_n &\approx \frac{\lambda(1 + \nu)}{\lambda^2 - (2 - \nu - \nu^2)\lambda + 2.6} \approx \frac{1 + \nu}{\lambda - 1.3} \end{aligned} \quad n \geq 2 \quad (1.15)$$

При  $n = 1$ , согласно (1.6) и (1.13), имеем

$$\mu_1^* = -1/2, \quad \mu_1^* = 1 \quad (1.16)$$

В частности, теперь, используя (1.15), нетрудно убедиться, что при  $n \geq 2$

$$\left| \frac{\mu_n^*}{\mu_n^*} \right| \approx (1 + \nu)^{-2} \left( 1 - 2.6 + \frac{1.69}{\lambda} \right) > \frac{3.4}{(1 + \nu)^2} > 1$$

то есть доля меридиональных смещений больше в колебаниях более высокочастотного вида.

Своеобразные трудности возникают при практических вычислениях с собственными формами колебаний (1.2), (1.4) из-за необходимости определять значения полиномов Лежандра  $P_n^m(\cos \theta)$  при больших значениях номера  $n$ . В этих случаях оказываются полезными известные [12] асимптотические разложения присоединенных полиномов Лежандра по функциям Бесселя вблизи полюсов  $\theta \rightarrow 0$  и  $\theta \rightarrow \pi$  и по тригонометрическим функциям вдали от полюсов. Однако ни та, ни другая асимптотика не является равномерно пригодной на полном интервале  $0 \leq \theta \leq \pi$ , из-за чего ситуация остается неопределенной при промежуточных значениях  $\theta$ .

Можно заметить, что при  $n \rightarrow \infty$  существует область на сфере, где оба эти разложения пригодны. Используя прием сращивания асимптотических разложений [11], получаем первое приближение равномерно пригодного на всей сфере асимптотического разложения для полиномов Лежандра

$$P_n^m(\cos \theta) \approx \lambda^{-m/2} [(-1)^m J_m(\sqrt{\lambda} \theta) + (-1)^m J_m(\sqrt{\lambda} (\pi - \theta))] + \\ + \lambda^{-1/4} \left[ \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\pi - \theta}} \right) \cos \left( \sqrt{\lambda} \theta - \frac{\pi}{4} + m \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (1.17)$$

которым удобно пользоваться уже при  $n \geq 4$ . Здесь  $J_m(\theta)$  — функция Бесселя порядка  $m$ .

Таким образом, получены простые формулы (1.9), (1.11—1.17), которые позволяют с достаточной для инженерных расчетов точностью определять формы и частоты собственных колебаний замкнутой сферической оболочки.

Проиллюстрируем возможности использования полученных соотношений на примере анализа поля деформации сферической оболочки при дивергентных собственных колебаниях низкочастотного вида. Ограничимся при этом осесимметричным случаем  $m = 0$ , когда смещения имеют вид

$$w = w_n P_n(\cos \theta), \quad u = u_n w_n \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta), \quad v = 0,$$

а деформации равны

$$\begin{aligned}\varepsilon_\theta\left(\pm\frac{h}{2}\right) &= \frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta} + w\right) \mp \frac{h}{2R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} - \frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = \\ &= \frac{w_n}{R}\left\{P_n(\cos\theta) + \left[\mu_n^* \mp \frac{h}{2R}(1 - \mu_n^*)\right] \frac{d^2 P_n(\cos\theta)}{d\theta^2}\right\} \\ \varepsilon_\varphi\left(\pm\frac{h}{2}\right) &= \frac{1}{R}(u \operatorname{ctg}\theta + w) \mp \frac{h}{2R^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta} - u\right) \operatorname{ctg}\theta = \\ &= \frac{w_n}{R}\left\{P_n(\cos\theta) + \left[\mu_n^* \mp (1 - \mu_n^*) \frac{h}{2R}\right] \operatorname{ctg}\theta \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right\} \quad (1.18)\end{aligned}$$

Здесь величины  $\varepsilon_\theta\left(+\frac{h}{2}\right)$  и  $\varepsilon_\theta\left(-\frac{h}{2}\right)$  равны деформациям наружной и внутренней поверхностей оболочки.

Практически важно знать максимальные величины деформаций для каждой формы колебаний. При  $n = 0$ , как известно,  $\varepsilon_\theta\left(\pm\frac{h}{2}\right) = w_0/R$ .

При  $n = 1$ , согласно (1.16),  $\mu_1 = 1$ , так что  $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = 0$ , то есть деформации отсутствуют и сфера смещается как жесткое целое.

При  $n = 2$  из (1.18) получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon_\theta\left(\pm\frac{h}{2}\right) &= \frac{w_2}{R} a_2(b_2 + \cos 2\theta); \quad \varepsilon_\varphi\left(\pm\frac{h}{2}\right) = \frac{w_2}{R} c_2(d_2 + \cos 2\theta) \\ a_2 &= 3\left[\frac{1}{4} - \mu_2^* \pm (1 - \mu_2^*) \frac{h}{2R}\right]; \quad b_2 = \frac{1}{4a_2} \\ c_2 &= \frac{1}{2}(a_2 + 3/4); \quad d_2 = \frac{a_2 + 3/4}{a_2 - 1/4}\end{aligned}$$

и экстремумы деформаций достигаются при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$ .

Согласно (1.15), можно принять  $\mu_2^* = \frac{1+\nu}{4.7}$ , так что имеем  $n$  полюсе

$$\varepsilon_\theta\left(\pm\frac{h}{2}\right) = \varepsilon_\varphi\left(\pm\frac{h}{2}\right) = \frac{w_2}{R}\left[0.042 + 0.319(1 - 2\nu) \pm 3(1 - \mu_2^*) \frac{h}{2R}\right]$$

а на экваторе

$$\begin{aligned}\varepsilon_\theta\left(\pm\frac{h}{2}\right) &= \frac{w_2}{R}\left[0.457 - 0.319(1 - 2\nu) \mp 3(1 - \mu_2^*) \frac{h}{2R}\right] \\ \varepsilon_\varphi\left(\pm\frac{h}{2}\right) &= -\frac{w_2}{2R}\end{aligned}$$

Таким образом, при  $n = 2$  наибольшие величины деформаций  $\varepsilon_\varphi$  наблюдаются на экваторе, а  $\varepsilon_\theta$  при  $0 \leq \nu < 0.175$  максимальны в полюсе на наружной поверхности оболочки, а при  $0.175 \leq \nu \leq 0.5$  на экваторе на внутренней поверхности.

При  $n = 3$  из (1.18) аналогично получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon_0\left(\pm \frac{h}{2}\right) &= \frac{w_1}{R} a_1 (\cos \theta + b_1 \cos 3\theta) \\ \varepsilon_\varphi\left(\pm \frac{h}{2}\right) &= \frac{w_2}{R} c_1 (\cos \theta + d_1 \cos 3\theta) \\ a_1 &= \frac{3}{8} \left| 1 - \nu_1^* \pm (1 - \nu_1^*) \frac{h}{2R} \right| \approx \frac{3}{8} [1 - \nu_1^*] \\ b_1 &= \frac{5}{8} \left| 1 - 9\nu_1^* \pm 9(1 - \nu_1^*) \frac{h}{2R} \right| / a_1 \\ c_1 &= \frac{3}{8} \left| 1 - 11\nu_1^* \pm 11(1 - \nu_1^*) \frac{h}{2R} \right| \\ d_1 &= \frac{5}{8c_1} \left| 1 - 3\nu_1^* \pm 3(1 - \nu_1^*) \frac{h}{2R} \right| \approx \frac{5}{8c_1} (1 - 3\nu_1^*)\end{aligned}$$

Анализ этих зависимостей показывает, что при  $n = 3$  всегда имеется экстремум деформаций в полюсе, для которого, учитывая, что согласно (1.15)  $\nu_1^* = \frac{1+\nu}{10.7}$ , имеем

$$\varepsilon_0\left(\pm \frac{h}{2}\right) = \varepsilon_\varphi\left(\pm \frac{h}{2}\right) = \frac{w_3}{R} \left( 0.439 - 0.561 \nu \pm (1 - \nu_1^*) \frac{3h}{R} \right) \quad (1.19)$$

Если выполнены условия  $-9 \leq \frac{1}{b_1} \leq 3$ ,  $-9 \leq \frac{1}{d_1} \leq 3$ , функции  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon_\varphi$  имеют второй экстремум, положение которого определяется по формулам

$$\theta_{1*} = \arcsin \sqrt{\frac{1 + 9b_1}{12b_1}}, \quad \theta_{2*} = \arcsin \sqrt{\frac{1 + 9d_1}{12d_1}}$$

Вычисления показывают, что для всех допустимых значений  $\nu$  и  $h/R$   $|d_1| > 1.5$ , поэтому для деформаций  $\varepsilon_\varphi$  всегда существуют второй экстремум при  $\theta_{2*} \approx \pi/3$ , для которого

$$\begin{aligned}\varepsilon_\varphi\left(\pm \frac{h}{2}\right) &\approx \frac{w_3}{R} \left[ -0.455 - 0.018 \nu \pm 0.094(1 - \nu_1^*) \frac{h}{R} \right] \approx \\ &\approx -0.46 \frac{w_3}{R}\end{aligned} \quad (1.20)$$

Из сравнения (1.19) и (1.20) следует, что наибольшие деформации  $\varepsilon_\varphi$  при  $0 \leq \nu \leq -0.028 + 4.57 \frac{h}{R}$  наблюдаются на наружной поверхности оболочки в полюсе, а для других значений  $\nu$  и  $\frac{h}{R}$  — на внутренней поверхности при  $\theta \approx \pi/3$ .

Величина второго экстремума меридиональных деформаций равна

$$\varepsilon_0 \left( \pm \frac{h}{2} \right) = \frac{w_3}{R} \frac{a_3}{3} (1 - 3b_3) \sqrt{\frac{3b_3 - 1}{3b_3}} \quad (1.21)$$

В зависимости от  $\nu$  и  $h/R$  наибольшие величины  $\varepsilon_3$  могут находиться как в полюсе, так и в точке второго экстремума. Если значения  $b_3$  находятся вблизи границ интервала  $-9 < \frac{1}{b_3} < 3$ , то количество экстремумов  $\varepsilon_3$  может различаться при определении  $\varepsilon_3$  по точным (1.6) или приближенным (1.15) формулам. Однако, в этих случаях значения экстремумов близки между собой, так что наибольшие значения  $|\varepsilon_3|$  могут определяться по формуле (1.19). Интересно, что при значениях коэффициента Пуассона, близких к  $\nu = 0.3$ , значения деформаций в полюсе (1.19) и в точке второго экстремума (1.21) различаются не более, чем на 5%, так что наибольшее значение  $|\varepsilon_3|$  также можно приближенно определять по более простой формуле (1.19).

Численно можно проверить, что наибольшие деформации у высших форм колебаний ( $n \geq 4$ ) возникают в двух ближайших к полюсу экстремумах. В этой области для вычисления полиномов Лежандра можно использовать бесселеву асимптотику. Погрешность в определении экстремумов деформаций при этом уменьшается с ростом номера  $n$  и не превосходит 6% уже при  $n = 4$ . Формулы для вычисления деформаций при  $n \geq 4$  имеют вид

$$\varepsilon_0 \left( \pm \frac{h}{2} \right) = \frac{w_n}{R} \left\{ -\nu J_0(\tilde{\theta}) + (1 + \nu) \frac{J_1(\tilde{\theta})}{\tilde{\theta}} \pm \frac{h\lambda}{2R} \left[ J_0(\tilde{\theta}) - \frac{J_1(\tilde{\theta})}{\tilde{\theta}} \right] \right\}$$

$$\varepsilon_{\mp} \left( \pm \frac{h}{2} \right) = \frac{w_n}{R} \left[ J_0(\tilde{\theta}) - (1 + \nu) \frac{J_1(\tilde{\theta})}{\tilde{\theta}} \pm \frac{h\lambda}{2R} \frac{J_1(\tilde{\theta})}{\tilde{\theta}} \right]$$

где  $\tilde{\theta} = \sqrt{\lambda} \tilde{\theta} \approx (n + 1/2) \tilde{\theta}$ .

Качественно положения и величины главных экстремумов зависят от параметров  $\nu$  и  $h/R$ , как оказалось, так же, как и при  $n = 3$ . Один экстремум деформаций всегда расположен в полюсе, где деформации равны

$$\varepsilon_0 \left( \pm \frac{h}{2} \right) = \varepsilon_{\mp} \left( \pm \frac{h}{2} \right) = \frac{w_n}{R} \left( \frac{1 - \nu}{2} \pm \frac{h}{R} \frac{\lambda}{4} \right) \quad (1.22)$$

Аналогично случаю  $n = 3$  значения деформаций  $\varepsilon_4$  в точке второго экстремума в зависимости от  $\nu$  и  $\frac{h}{R} \lambda$  могут быть как больше, так и меньше, чем в полюсе, однако при  $\nu = 0.3$  отличаются от деформаций в полюсе не более, чем на 2%. Таким образом, наибольшие значения меридиональных деформаций  $\varepsilon_4 \left( \pm \frac{h}{2} \right)$  при  $n \geq 4$  могут определяться по формуле (1.22).



for modes and frequencies are presented. As one of the applications of these formulas maximum deformations of the spherical shell, when vibrating with particular mode, are determined.

#### ЛИТЕРАТУРА

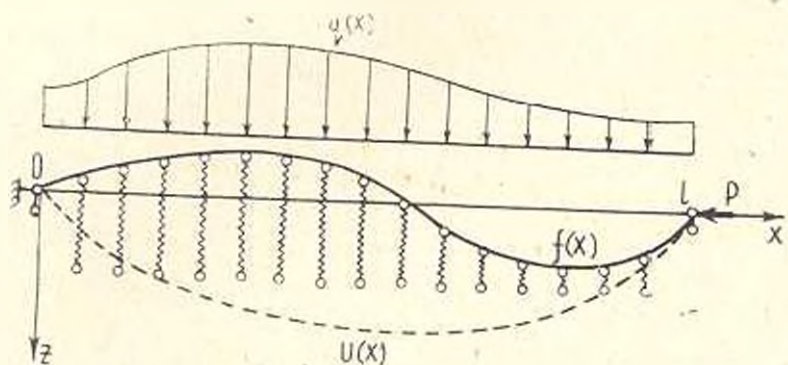
1. Лужин О. В. К вопросу о свободных колебаниях тонкой сферической оболочки. «Стронт. механика и расчет сооружений», 1961, № 3.
2. Рабинович И. М., Лужин О. В. и др. Расчет сооружений на импульсные воздействия. М., «Стройиздат», 1970.
3. Naghdas P. M., Kalnins A. On vibrations of elastic spherical shells. Trans. ASME, Ser. E, Journ. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 1.
4. Kalnins A. Effect of Bending on Vibrations of Spherical Shells. Journ. of the Acoustical Society of America, 1964, vol. 36, pp. 74-81.
5. Азарев А. Д. О низших частотах собственных осесимметричных колебаний непологих сферических оболочек. Инженерный журнал, МТТ, 1967, № 3.
6. Мартыненко В. С., Шпакова С. Г. Несимметричные колебания сферических оболочек. Прикл. механика, АН УССР, 1973, 9, № 10.
7. Шапов В. П. О колебаниях непологих сферических оболочек. Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 3.
8. Zarghamee M. S., Robinson A. R. A numerical method for analysis of free vibration of spherical shells. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 5.
9. Новожилов В. В. Расчет напряжений в тонкой сферической оболочке при произвольственной нагрузке. ДАН СССР, 1940, том XXVII, № 6.
10. Вибрации в технике. Справочник, т. 1. М., «Машиностроение», 1978.
11. Кош Д.х. Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
12. Robin L. Fonctions spheriques de Legendre et fonctions spheroidal. Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1957-1959.

Н. В. БАНИЧУК, А. Д. ЛАРИЧЕВ

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ИЗОГНУТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Рассматриваются задачи оптимизации жесткости предварительно искривленного стержня, лежащего на упругом винклеровском основании. Стержень нагружен продольными и поперечными изгибающими силами. Минимизация критерия качества осуществляется за счет наилучшего выбора распределения начальных кривизны по стержню. Дан вывод сопряженного уравнения и необходимых условий экстремума. Приводится пример и результат расчета оптимального решения для заданных значений параметров, характеризующих величины нагрузок, податливость основания.

§ 1. Приведем постановку задачи и основные уравнения. Рассмотрим изгиб предварительно искривленного стержня, лежащего на упругом винклеровском основании, коэффициент податливости которого равен  $C$ . Стержень шарнирно закреплен в точках  $x = 0$  и  $x = l$ , подвержен сжатию силой  $P$  и действию поперечной нагрузки  $q(x)$  (фиг. 1).



Фиг. 1.

Форма криволинейного стержня в недеформированном состоянии (при отсутствии основания и действия нагрузок) описывается функцией  $f(x)$ . Начальная кривизна стержня предполагается малой. Смещения, получаемые точками оси стержня в направлении оси  $z$ , при действии нагрузок и реакции основания обозначим через  $u(x)$ . Величины смещений  $u(x)$  отсчитываются от недеформируемой оси криволинейного стержня,

то есть полное отклонение стержня от оси  $x$  определяется величиной  $f(x) + u(x)$ , а реакция винклеровского основания равна  $C[f(x) + u(x)]$ . Уравнение равновесия и граничные условия имеют вид [1]

$$(Du_{xx})_{xx} + Pu_{xx} = Cu + Pf_{xx} + Cf - q(x) \quad (1.1)$$

$$u(0) = u(l) = 0, \quad Du_{xx}|_{x=0} = Du_{xx}|_{x=l} = 0 \quad (1.2)$$

где  $D = EJ$ ,  $E$  — модуль Юнга, а  $J$  — момент инерции сечения стержня. Считается, что модуль Юнга и момент инерции не меняется вдоль стержня, тем самым обеспечивая постоянство величины  $D$ .

Будем считать полную длину стержня заданной и равной  $L$ . Это приводит к изопериметрическому условию

$$\int_0^l \sqrt{1 + f_x^2} dx = L$$

Учитывая то, что стержень является слабо искривленным, данное соотношение можно записать в виде

$$\int_0^l f_x dx = \beta, \quad \text{где } \beta = 2(L - l) \quad (1.3)$$

Кроме того, из условия шарнирного закрепления стержня в точках  $(0, 0)$  и  $(0, l)$  вытекает, что функция  $f(x)$  предварительного распределения кривизны должна также удовлетворять следующим граничным условиям:

$$f(0) = f(l) = 0 \quad (1.4)$$

Функция  $f(x)$ , удовлетворяющая условию непрерывности, изопериметрическому равенству (1.3) и граничным условиям (1.4), рассматривается ниже в качестве искомой управляющей переменной. Исследуемая задача оптимизации формулируется следующим образом. Требуется найти непрерывную функцию  $f(x)$ , удовлетворяющую условиям (1.3), (1.4) и такую, что перемещения  $u(x)$ , определяемые из краевой задачи (1.1), (1.2), доставляют минимум функционалу качества

$$\bar{J} = \int_0^l q(x) u(x) dx \rightarrow \min \quad (1.5)$$

Сформулированная задача относится к классу несамосопряженных задач оптимизации. Уравнение (1.1) играет роль дифференциальной связи, для учета которой используется метод множителей Лагранжа и с его помощью выведем уравнение для сопряженной переменной.

Заметим, что ранее [2] в теории изгиба стержней исследовались задачи оптимизации механических характеристик за счет наилучшего распределения «толщины» по стержню или распределения жесткости  $D(x)$ .

В отличие от указанных работ, в данном исследовании рассмотрен новый тип управления — управление предварительной кривизной.

§ 2. Получим уравнение для сопряженной переменной и условие оптимальности. Составим расширенный функционал Лагранжа

$$\Pi = \bar{J} + \int_0^l v(x) [(Du_{xx})_{xx} + Pu_{xx} + Cu + Pf_{xx} + Cf - q(x)] dx + \\ + \lambda \int_0^l f_{xx}^2 dx$$

Через  $v(x)$  в этом выражении обозначена сопряженная переменная, а константа  $\lambda$  определяется из изопериметрического условия (1.3). Выписывая выражение для первой вариации функционала  $\Pi$  и выполняя стандартные преобразования (интегрирование по частям), преобразуем выражение для  $\delta\Pi$  к виду

$$\delta\Pi = \int_0^l [(Dv_{xx})_{xx} + Pv_{xx} + Cv + q(x)] \delta u + \\ + [Pv_{xx} + Cv - 2f_{xx}] \delta f dx + v^2 [(Du_{xx})_{xx}]_0^l + Dv_{xx} \delta(u_x)_0^l$$

Из условия  $\delta\Pi = 0$  приходим к краевой задаче для сопряженной переменной

$$(Dv_{xx})_{xx} + Pv_{xx} + Cv = -q(x) \quad (2.1)$$

$$v(0) = v(l) = 0, \quad Dv_{xx}|_{x=0} = Dv_{xx}|_{x=l} = 0 \quad (2.2)$$

и к необходимому условию оптимальности

$$Pv_{xx} + Cv - 2f_{xx} = 0 \quad (2.3)$$

Отметим, что сопряженная переменная  $v(x)$ , определяемая как решение краевой задачи (2.1) при граничных условиях (2.2), описывает распределение прогибов прямолинейного стержня, лежащего на упругом основании, поддержанного действием продольной силы  $P$  и поперечной нагрузки  $q(x)$ . Эта интерпретация позволяет при отыскании функции  $u(x)$  использовать имеющиеся результаты расчета для стержня на упругом основании.

Уравнения (2.1) и (2.3) совместно с уравнениями (1.1)–(1.4) составляют замкнутую систему соотношений, служащую для определения неизвестных величин  $u$ ,  $v$ ,  $f$ ,  $\lambda$ . Заметим, что краевая задача (2.1), (2.2) (служащая для определения сопряженной переменной) не зависит от управляющей функции  $f(x)$  и описывает продольно-поперечный изгиб балки на упругом основании, шарнирно закрепленной в точках  $x=0$ ,  $x=l$ .

§ 3. Рассмотрим случай, когда стержень нагружен постоянной поперечной нагрузкой  $q(x) = q_0$ , а продольные силы являются сжимающими  $P > 0$ , причем будем предполагать, что основные параметры задачи удовлетворяют следующим неравенствам:

$$P < \frac{n^2 \pi^2 D}{l^2} + \frac{Cl^2}{n^2 \pi^2} \text{ при } \frac{Cl^4}{P^2 D} < n^2 (n+1)^2$$

$$P < \frac{(n+1)^2 \pi^2 D}{l^2} + \frac{Cl^2}{(n+1)^2 \pi^2} \text{ при } \frac{Cl^4}{P^2 D} > n^2 (n+1)^2 \quad (3.1)$$

$$n = \text{entier} \left( \frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{C}{D}} \right)$$

При выполнении условий (3.1) стержень находится в докритическом состоянии и не теряет устойчивости.

Получим выражение для сопряженной переменной  $v(x)$ . С этой целью проинтегрируем уравнение (2.1) и выберем четыре постоянных интегрирования, используя для этого четыре граничных условия (2.2). Будем иметь в первом случае, когда  $P^2/4D > C$

$$v = C_1 \sin A_1 x + C_2 \cos A_1 x + C_3 \sin A_2 x + C_4 \cos A_2 x - q_0/C$$

$$A_1 = \sqrt{\frac{P}{2D}} - \sqrt{\frac{P^2}{4D^2} - \frac{C}{D}}, \quad A_2 = \sqrt{\frac{P}{2D}} + \sqrt{\frac{P^2}{4D^2} - \frac{C}{D}}$$

$$C_1 = \frac{A_2^2}{A_2^2 - A_1^2} \frac{q_0}{C} \frac{(1 - \cos A_1 l)}{\sin A_1 l}, \quad C_2 = \frac{A_2^2}{A_2^2 - A_1^2} \frac{q_0}{C}$$

$$C_3 = \frac{A_1^2}{A_1^2 - A_2^2} \frac{q_0}{C} \frac{(1 - \cos A_2 l)}{\sin A_2 l}, \quad C_4 = \frac{A_1^2}{A_1^2 - A_2^2} \frac{q_0}{C}$$

во втором случае, когда  $P^2/4D = C$

$$v = C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x + C_3 x \cos \mu x + C_4 x \sin \mu x - q_0/C$$

$$\mu = \sqrt{\frac{P}{2D}}$$

$$C_1 = \frac{q_0}{C \sin^2 \mu l} (1 - \cos \mu l) \left( \sin \mu l - \frac{\mu l}{2} \right), \quad C_2 = \frac{q_0}{C}$$

$$C_3 = \frac{q_0 \mu}{2C \sin \mu l} (\cos \mu l - 1), \quad C_4 = \frac{q_0 \mu}{2C} \quad (3.2)$$

в третьем случае, когда  $P^2/4D < C$

$$v = C_1 \operatorname{sh} A_1 x \sin A_2 x + C_2 \operatorname{sh} A_1 x \cos A_2 x + C_3 \operatorname{ch} A_1 x \sin A_2 x +$$

$$+ C_4 \operatorname{ch} A_1 x \cos A_2 x - q_0/C$$

$$A_1 = \sqrt{\left| \sqrt{\frac{C}{4D}} - \frac{P}{4D} \right|}, \quad A_2 = \sqrt{\left| \sqrt{\frac{C}{4D}} + \frac{P}{4D} \right|}$$

$$C_1 = \frac{A_2^2 - A_1^2}{2A_1 A_2} \frac{q_0}{C}, \quad C_2 = \frac{q_0 (A_1^2 - A_2^2)}{2CA_1 A_2} \frac{\sin A_2 l}{(\operatorname{ch} A_1 l + \cos A_2 l)}$$

$$C_3 = \frac{q_0}{C(\operatorname{ch} A_1 l + \cos A_2 l)} \left( \sin A_2 l + \frac{A_1^2 - A_2^2}{2A_1 A_2} \operatorname{sh} A_1 l \right), \quad C_4 = \frac{q_0}{C}$$

Используя найденное представление для сопряженной переменной  $v(x)$  и условие оптимальности (2.3), получим искомое распределение начальных прогибов  $f(x)$ . Для этого последовательно подставляем выражение (3.2) в (2.3) и дважды интегрируем получающиеся уравнения для  $f(x)$ . Определив далее константы интегрирования из условий (1.4), запишем выражения для  $f(x)$  в указанных случаях

$$f(x) = \frac{1}{2l} \left\{ -\frac{q_0 x^2}{2} + \frac{Dq_0 A_1^2 A_2^2}{(A_2^2 - A_1^2)} \left[ \frac{(1 - \cos A_1 l)}{\sin A_1 l} \sin A_1 x + \cos A_1 x - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(1 - \cos A_2 l)}{\sin A_2 l} \sin A_2 x - \cos A_2 x \right] + \frac{q_0 l}{2} x \right\} \quad \text{при} \quad \frac{P^0}{4D} > C \quad (3.3)$$

$$f(x) = \frac{1}{2l} \left\{ -\frac{q_0 x^2}{2} - \frac{Dq_0 l^2}{2C} \left[ \frac{l(1 - \cos \mu l)}{\sin^2 \mu l} \sin \mu x + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(1 - \cos \mu l)}{\sin \mu l} x \cos \mu x - x \sin \mu x \right] + \frac{q_0 l}{2} x \right\} \quad \text{при} \quad \frac{P^0}{4D} = C \quad (3.4)$$

$$f(x) = \frac{1}{2l} \left\{ -\frac{q_0 x^2}{2} - \frac{Dq_0 (A_1^2 + A_2^2)x}{2CA_1 A_2} \left[ -\operatorname{sh} A_1 x \sin A_2 x + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(\sin A_1 l \operatorname{sh} A_1 x \cos A_2 x + \operatorname{sh} A_1 l \operatorname{ch} A_1 x \sin A_2 x)}{(\operatorname{ch} A_1 l + \cos A_2 l)} \right] + \frac{q_0 l}{2} x \right\} \quad (3.5)$$

при  $\frac{P^0}{4D} < C$ .

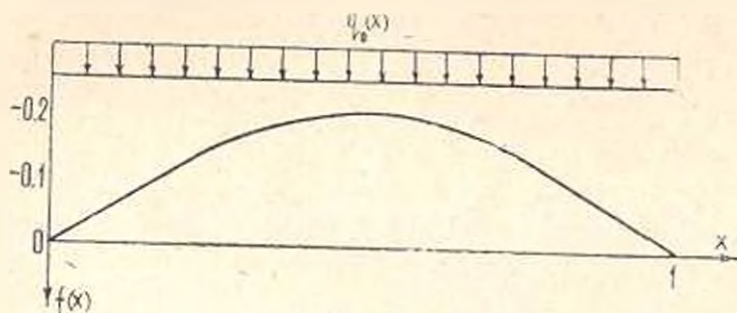
Константа  $\lambda$ , фигурирующая в (3.3)–(3.5), подсчитывается по формуле

$$\lambda = \left[ \frac{1}{8(L-l)} \int_0^l f_x^2 dx \right]^{1/2} \quad (3.6)$$

Для отыскания соответствующих распределений прогибов  $u(x)$  требуется подставить найденные выражения для  $f(x)$  в уравнение равновесия (1.1), выполнить интегрирование этого уравнения и удовлетворить краевым условиям (1.2). Проведя выкладки, приходим к громоздким выражениям для прогибов  $u(x)$ , которые ввиду краткости изложения опустим.

Рассмотрим конкретный пример. Для удобства проведения расчетов воспользуемся безразмерными переменными  $P' = \frac{Pl^2}{D}$ ;  $q_0 = \frac{q_0 l^3}{D}$ ;  $C' = \frac{Cl^3}{D}$ ;  $x' = \frac{x}{l}$ ;  $L = \frac{L}{l}$  и придадим безразмерным параметрам задачи

следующие значения  $P' = 0$ ;  $C' = 16$ ;  $q_0 = 20$ ;  $L' = 1.1$ . Для указанного набора параметров  $P^*/4D = C$  и, следовательно, справедлива формула (3.4). Оптимальное распределение начальной кривизны  $f(x)$  представлено на фиг. 2. Как видно, отклонение оси стержня от прямолинейного положения является симметричным относительно точки  $x = 1/2$  и направлено против действия поперечной нагрузки.



Фиг. 2.

Оценим эффективность оптимизации. Для этого сопоставим значения функционалов  $J$  при рассмотренном наборе параметров для оптимально искривленного стержня и стержня, осевая линия которого является параболой  $f(x) = 1/24(L-1)P^*x(x-1)/2$ . Выигрыш, получаемый за счет оптимизации, по сравнению со стержнем, первоначально изогнутым по параболе, составляет 7%.

§ 4. Приведем другую постановку задачи оптимизации предварительно изогнутого стержня на упругом основании. В отличие от задачи, рассмотренной в §1—3, будем предполагать, что реакция основания на криволинейный стержень до приложения нагрузок равна нулю, то есть будем считать, что форма поверхности упругого основания совпадает с формой осевой линии ненагруженного стержня. Обозначим, как и прежде, величины смещений в направлении оси  $z$  точек осевой линии стержня под действием нагрузок через  $u(x)$ . Тогда реакция упругого основания будет равна  $Cu(x)$ , а момент продольных сил  $P$  запишется в виде  $P[u(x) + i(x)]$ .

В рассматриваемом случае задача оптимизации заключается в отыскании функции  $f(x)$ , удовлетворяющей изопериметрическому условию (1.3), граничным условиям для  $i(x)$  (1.4) и такой, что функция  $u(x)$ , определяемая как решение краевой задачи для уравнения равновесия

$$(Du_{xx})_{xx} + Pu_{xx} + Cu + Pf_{xx} = q \quad (1.1)$$

при граничных условиях (1.2), доставляет минимум функционалу (1.5).

Для получения условия оптимальности используем методику, примененную ранее в § 2. При этом сопряженная переменная снова определяется как решение краевой задачи (2.1), (2.2). Условие же оптимальности примет вид

$$Pv_{xx} - 2vf_{xx} = 0 \quad (4.2)$$

Интегрируя дважды уравнение (4.2) и выбирая константы интегрирования из граничных условий (1.4), будем иметь

$$f(x) = P v(x)/2l. \quad (4.3)$$

Таким образом, функция  $f(x)$ , описывающая форму осевой линии предварительно искривленного стержня, отличается от сопряженной переменной только постоянным множителем  $P/2l$ . Отыскание же сопряженной переменной  $v(x)$  сводится к задаче (2.1), (2.2) расчета балок (прямолинейных стержней) на упругом основании при указанных продольных и поперечных силах. Для типичных статических нагрузок, встречающихся в приложениях, эта задача решена и функция  $v(x)$  может считаться известной.

Приходим к выводу, что отыскание формы предварительно искривленного стержня сводится к вычислению фигурирующего в (4.3) множителя Лагранжа  $\lambda$ . Окончательное решение задачи оптимизации примет вид

$$f(x) = \sqrt{2(L-l)} \left( \int_0^l v^2 dx \right)^{-1/2} v \quad (4.4)$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение: оптимальное предварительное искривление стержня определяется с точностью до множителя функции распределения прогибов прямолинейного стержня, лежащего на упругом основании при тех же условиях нагружения. Нахождение же множителя сводится к вычислению определенного интеграла.

Это утверждение остается справедливым и для других видов граничных условий.

Институт проблем механики

АН СССР

ЦИНИСК им. Кулеренко

Поступила 12 II 1980

Ն. Վ. ՄԱՆՉՈՒՅ, Ու. Գ. ԱՐԻՉԵՎ

ՆԱԽԱԳԵԹ ԿՈՐԱՑՎԱԾ ՉՈՂԵՐԻ ՕՊՏԻՄԻԶԱՑԻԱՆ

Ս. Վ. Մ Ա Ն Չ Ո Ւ Յ

Գիտարկվում են առաձգական լինկերյան հիմքի վրա դրված նախապես կորացված ձողի կոշտություն օպտիմիզացիայի խնդիրները:

Ձողը բևեռացված է երկայնական և լայնական ծող ուժերով:

Արակի կրիտերիայի միանիվազիան իրազորվում է բառ ձողի սկզբնական կորությունների բաշխման ամենալավ բնորոշության հաշվով: Արտածվում են համալուծ հաշվարկումը և էքստրեմումի համար անհրաժեշտ պայմանները: Բերվում է օրինակ և օպտիմալ լուծման հաշվարկի արդյունքը պարամետրների տրված արժեքների համար, որոնցով բնորոշվում են բևեռ մեծությունը, հիմքի ենթարկվողությունը և ձողի սկզբնական երկարությունը:

# Summary

The problems of optimization of prebending beams on elastic foundation are considered. The minimization criterion of the quality is realized by means of the initial curvity over the beam.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Применение методов теории вероятности и теории надежности в расчетах сооружений. М., Стройиздат, 1971. 255 с.
2. Nordson F. J., Pandersen P. A review of optimal structural design. Proc. 13-th Int. Congress IUTAM, Moscow. Springer-Verlag, Berlin, 1973.

Г. Г. ЕГИЯН

# ОБ ОПТИМАЛЬНОМ БЫСТРОДЕЙСТВИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1. В этом разделе дадим постановку задачи и рассмотрим вопрос о допустимых управлениях. Пусть имеется управляемая система вида

$$\begin{aligned} dx(t) = [f(x(t)) + Bu(x(t))] dt + z(x(t)) dz(t) + \\ + a(x(t)) d\eta(t), \quad x(0) = x, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $x(t)$  — вектор фазовых координат, принадлежащий евклидову пространству  $E$  размерности  $n$ ,  $B$  — заданная постоянная матрица,  $\xi(t)$  —  $n$ -мерный винеровский процесс,  $\eta(t)$  —  $r$ -мерный пуассоновский процесс, каждая из компонент которого есть однородный пуассоновский процесс  $\eta_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ), причем все  $\eta_i(t)$  независимы и в совокупности не зависят от  $\xi(t)$ , и

$$M_\lambda(t) = \lambda$$

где  $M$  — знак математического ожидания,  $\lambda$  — постоянный  $r$ -мерный вектор. Вектор управления  $u(x)$  для всех  $x$  удовлетворяет ограничению

$$u(x) \in U \quad (1.2)$$

Здесь  $U$  — заданное выпуклое ограниченное множество. Функция  $f(x, t)$ , матрицы  $\sigma(x, t)$  и  $a(x, t)$  удовлетворяют глобальному условию Липшица

$$|f(x_1) - f(x_2)| + |\sigma(x_1) - \sigma(x_2)| + |a(x_1) - a(x_2)| \leq G|x_1 - x_2|$$

Здесь  $G$  — некоторая неотрицательная постоянная, знак  $|\cdot|$  означает евклидову норму соответствующего вектора или матрицы.

Пусть задано некоторое множество  $Q$  в фазовом пространстве  $E$ . Обозначим через  $Q$  границу множества  $Q$ , а через  $\tau_x(u)$  — момент первого достижения множества  $Q$  процессом (1.1) с начальным условием  $x(0) = x$  при управлении  $u$ . Для тех траекторий процесса (1.1), которые не достигают  $Q$  ни за какое конечное время, будем полагать  $\tau_x(u) = \infty$ .

Ставится задача — выбрать такое управление  $u$ , которое удовлетворяет ограничению (1.2) и минимизирует функционал

$$M_{\tau_x}(u) \quad (1.3)$$

При некоторых условиях гладкости  $|1|$  минимальное значение функционала (1.3), обозначаемое через  $V(x)$ , удовлетворяет уравнению Беллмана

$$\inf_{u \in U} (L_u V(x) + 1) = 0, \quad x \in Q_2; \quad V(x) = 0, \quad x \in QU \cap Q_1$$

$$L_u V(x) = (f + Bu)' \partial V / \partial x + \frac{1}{2} Sp \sigma \sigma' \partial^2 V / \partial x^2 + \\ + \sum_{i=1}^n [V(x + a(x) e_i) - V(x)] \lambda_i \quad (1.4)$$

Здесь  $Q_2$  — дополнение  $QU \cap Q_1$  до  $E^n$ , штрих — знак транспонирования,  $\partial V / \partial x$  — вектор с координатами  $\partial V / \partial x_i$ ;  $\partial^2 V / \partial x^2$  — матрица с компонентами  $\partial^2 V / \partial x_i \partial x_j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,  $Sp$  — след матрицы,  $e_i$  — вектор,  $i$ -я координата которого равна единице, а остальные координаты равны нулю,  $\lambda_i$  —  $i$ -я координата вектора  $\lambda$ .

Задача Коши (1.4) имеет неединственное решение. Для пояснения этого факта в разделе 2 настоящей работы будет рассмотрен пример 2.1 для скалярной системы вида (1.1). На основе теоремы 2.1 будет дана методика построения решения уравнения Беллмана для указанного случая, а на основе рассматриваемой ниже леммы 1.1 будет дана верхняя оценка значений функции Беллмана.

Перейдем к вопросу о допустимых управлениях. Управление  $u$  будем называть допустимым, если при этом управлении  $M_{T_x}(u) < \infty$  для любых конечных  $x$  и существует сильное решение уравнения (1.1), то есть [2] существует случайный процесс, измеримый относительно  $\xi(s)$  и  $\eta(s)$ ,  $0 \leq s \leq t$  и удовлетворяющий с вероятностью 1 интегральному тождеству

$$x(t) - x = \int_0^t [f(x(s)) + Bu(x(s))] ds + \\ + \int_0^t \sigma(x(s)) d\xi(s) + \int_0^t a(x(s)) d\eta(s)$$

Из [3] (стр. 130—131) вытекает

Лемма 1.1. Пусть в  $Q_2$  существует дважды непрерывно дифференцируемая неотрицательная функция  $D(x)$  такая, что при управлении  $u(x)$ , удовлетворяющем ограничению (1.2), существует решение системы (1.1) и выполняется неравенство

$$L_u D(x) \leq -c, \quad x \in Q_2 \quad (1.5)$$

где  $c$  — некоторая положительная константа. Тогда управление  $u(x)$  является допустимым, причем  $M_{T_x}(u) \leq c^{-1} D(x)$ .

Пример 1.1. Пусть задан закон движения материальной точки

$$\begin{cases} dx = y dt \\ dy = u dt + \sigma d\xi(t) + a d\eta(t), \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Здесь  $u$  — управление,  $|u| \leq b$ ,  $a$ ,  $b$  и  $\sigma$  — некоторые положительные константы,  $\xi(t)$  — скалярный стандартный винеровский процесс,  $\eta(t)$  — скалярный пуассоновский процесс с математическим ожиданием  $M\eta(t) = 1$ . Требуется выбором управления  $u$  обеспечить быстрое падение точки, движущейся по закону (1.6) на ось  $x = 0$ .

Рассмотрим случай, когда начальная фазовая точка системы (1.6) находится в правой полуплоскости ( $xy$ ), то есть  $x(0) > 0$ . Из (1.6) видно, что в этом случае оптимальным может быть управление  $u = -b$ . Выясним, допустимо ли управление  $u = -b$ . Положим

$$a < b \quad (1.7)$$

Построим неотрицательную функцию  $D(x, y)$  вида

$$D(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + k_1 y - (b - a)x + k_2 \quad (1.8)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — положительные константы. Константа  $k_2$  подбирается после выбора константы  $k_1$  таким образом, чтобы при малых отрицательных  $y$  обеспечивалось  $D(x, y) \geq 0$ , а константа  $k_1$  будет подобрана ниже.

Уравнение Беллмана для поставленной задачи имеет вид

$$L_{-b} V + 1 = 0$$

$$L_{-b} V = y \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} - b \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} + V(x, y + a) - V(x, y) \quad (1.9)$$

Из (1.8) и (1.9) имеем

$$L_{-b} D = -k_1(b - a) + \frac{\sigma^2 + a^2}{2} \quad (1.10)$$

Отсюда видно, что при  $k_1 > \frac{\sigma^2 + a^2}{2(b - a)}$  выполняется неравенство  $L_{-b} D < 0$ . Поэтому, на основании леммы 1.1 управление  $u = -b$  допустимо.

При  $a = b$  из (1.8), приняв  $k_2 = 0$ , и из (1.10) имеем

$$D(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + k_1 y \quad (1.11)$$

$$L_{-b} D = \frac{\sigma^2 + a^2}{2} > 0 \quad (1.12)$$

Из (1.12) видно, что условия леммы (1.1) нарушены. Выясним допустимо ли управление  $u = -b$  в этом случае. Предположим, что управление  $u = -b$  допустимо. Обозначим через  $\tau$  момент достижения материальной точкой оси  $x = 0$  при условии, что траектории процесса (1.6) в момент  $t = 0$  выходят из некоторой фиксированной точки с координатами

$x_0 > 0, y_0 > 0$ . Тогда согласно (1.6)  $y(\tau) < 0$ . Без потери общности можно считать, что  $y(\tau \rightarrow 0) = y(\tau) < 0$ . Тогда

$$My(\tau) < 0 \quad (1.13)$$

На основании формулы Ито [2], учитывая (1.12), имеем

$$D(x(\tau), y(\tau)) - D(x_0, y_0) = \int_0^\tau L_{xx} D ds = \frac{\tau^2 + a^2}{2} \tau$$

Далее,

$$MD(x(\tau), y(\tau)) = D(x_0, y_0) + \frac{\tau^2 + a^2}{2} M\tau > D(x_0, y_0) \quad (1.14)$$

С другой стороны, в силу (1.11)

$$MD(x(\tau), y(\tau)) = \frac{1}{2} My^2(\tau) + k_1 My(\tau)$$

Поскольку согласно (1.13)  $My(\tau) < 0$ , то всегда можно подобрать такую константу  $k_1$ , что

$$MD(x(\tau), y(\tau)) < D(x_0, y_0)$$

Сравнивая последнее выражение с (1.14), убеждаемся в их противоречивости. Поэтому  $M\tau = \infty$ , и управление  $u = -b$  недопустимо. В случае  $a > b$  траектории процесса (1.6), выходящие в момент  $t = 0$  из произвольной фиксированной точки, будут проходить над соответствующими траекториями процесса (1.6) при  $a = b$ . Поэтому в этом случае также  $M\tau = \infty$ , и управление  $u = -b$  недопустимо. Следовательно, поставленная выше задача оптимального быстрогодействия разрешима только при  $a < b$ .

2. В этом разделе выясним условия существования и методику построения решения уравнения Беллмана (1.4). Всюду далее будем считать, что множество  $Q$ , куда должны стремиться траектории процесса (1.1), есть ограниченная область в фазовом пространстве  $E^n$  с гладкой границей  $Q$ , типа Ляпунова. Выделим в множестве  $U$  класс допустимых управлений, который обозначим через  $\Omega$ . Будем считать, что множество  $\Omega$  не пусто. Всюду далее допустимые управления будем обозначать через  $\omega(x)$ ,  $\omega(x) \in \Omega$ , а оптимальное управление — через  $\omega_*(x)$ .

Рассмотрим в  $E^n$  такую последовательность концентрических шаров радиуса  $N$ , обозначаемую через  $R_N$ , что  $Q \subset R_N$ . Обозначим через  $r_N$  границу шара радиуса  $N$  и определим последовательность скалярных функций  $V_N(x)$  посредством краевой задачи

$$\begin{aligned} \inf_{\omega \in \Omega} (L_{xx} V_N(x) + 1) &= 0, \quad x \in Q \cap R_N \\ V_N(x) &= 0, \quad x \in Q, \quad x \in r_N \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $L_N V_N(x)$  определяется формулой (1.4). Из [5, 6] вытекает следующая

**Лемма 2.1.** Если коэффициенты уравнения (2.1) удовлетворяют требованиям раздела 1, ограниченная область  $Q$  имеет границу  $Q_1$  типа Ляпунова и матрица  $a(x)$  невырождена при любом  $x \in E^n$ , то существует единственное решение  $V_N(x)$  задачи (2.1) и  $V_N(x) > 0$ . Кроме того, для любых  $N_2 > N_1$  справедливо неравенство

$$V_{N_2}(x) > V_{N_1}(x), \quad x \in Q_1 \cap R_{N_1}$$

Поскольку из леммы 2.1 следует, что краевая задача (2.1) имеет единственное неотрицательное решение  $V_N(x)$  для произвольного выпуклого ограниченного множества управлений  $U$ , то возникает вопрос — при каких условиях последовательность  $V_N(x)$  имеет предел, когда  $N \rightarrow \infty$ , и каков этот предел. На этот вопрос отвечает

**Теорема 2.1.** Если требования леммы 2.1 дополнить требованием существования непустого класса допустимых управлений  $\Omega$ , то справедливы следующие утверждения:

1) монотонно-неубывающая последовательность  $V_N(x)$  в любом ограниченном множестве изменения  $x$  равномерно сходится при  $N \rightarrow \infty$  к некоторой функции, обозначаемой  $V_0(x)$ ;

2) функция  $V_0(x)$  есть минимальное положительное решение задачи (1.4);

3) функция  $V_0(x)$  является точной нижней гранью значений функционала (1.3);

4) если выполняется равенство

$$\inf_{x \in Q_1} L_{\omega_0} V_0(x) - L_{\omega_0} V_0(x) = -1$$

то  $\omega_0(x)$  есть оптимальное управление;

5) для любого числа  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , найдется такое допустимое управление  $\omega_\varepsilon$ , что

$$M_{\tau_\varepsilon}(\omega_\varepsilon) \leq (1 - \varepsilon)^{-1} V_0(x)$$

**Доказательство.** Обозначим  $W(x) = M_{\tau_\varepsilon}(\omega)$ . Докажем, что при всех  $N$

$$V_N(x) \leq W(x) \tag{2.2}$$

Момент первого достижения процессом (1.1) границ множества  $Q_1 \cap R_N$  при управлении  $\omega$  и  $x \in Q_1 \cap R_N$  обозначим через  $\tau_\varepsilon^N(\omega)$ , а через  $x(t, \omega)$  — решение системы (1.1) при управлении  $\omega$ . Поскольку понятно, что

$$M_{\tau_\varepsilon^N}(\omega) \leq W(x) \tag{2.3}$$

то для доказательства (2.2) достаточно установить, что

$$V_N(x) \leq M_{\tau_\varepsilon^N}(\omega) \tag{2.4}$$

На основании определения функции  $V_N(x)$ , леммы 2.1 и конечности  $M_{\tau}^N(\omega)$ , в силу (2.3) к функции  $V_N(x)$  и марковскому моменту  $\tau^N(\omega)$  можно применить формулу Дынкина [7]. Отсюда с учетом (2.1) имеем

$$V_N(x(\tau_x^N(\omega), \omega)) - V_N(x) = M \int_0^{\tau_x^N(\omega)} L_n V_N(x(t, \omega)) dt > \\ > M \int_0^{\tau_x^N(\omega)} \inf_{x \in Q} L_n V_N(x(t, \omega)) dt = -M_{\tau}^N(\omega)$$

Из этого выражения вытекает (2.4), тем самым устанавливается и (2.2).

Теперь перейдем к доказательству п. 1) теоремы 2.1. Зафиксируем произвольную ограниченную область  $Q_1 \subset E^n$  с границей того же типа, что и  $Q_2$ , причем  $Q \subset Q_1$ . Рассмотрим последовательность  $V_N(x)$ ,  $x \in Q_2 \cap Q_3$ , при  $N \rightarrow \infty$ . Из неравенства (2.2) видно, что в уравнении (2.1) член  $\sum_{i=1}^n [V_N(x + a_i(x) e_i) - V_N(x)] b_i$  не превышает некоторой константы в ограниченной области изменения  $x$ . Поэтому к уравнению (2.1) можно применить те же рассуждения для получения соответствующих априорных оценок, которые были применены в работе [6] (стр. 35<sup>и</sup>) для квазилинейного эллиптического уравнения. С учетом сказанного из [6, 12] вытекают оценки

$$\max |\partial V_N(x) / \partial x| \leq c_1, \quad x \in Q_3 \cap Q_2 \quad (2.5)$$

$$\max |\partial^2 V_N(x) / \partial x^2| \leq c_2, \quad x \in Q_3 \cap Q_2 \quad (2.6)$$

Здесь  $c_1$  и  $c_2$  — некоторые неотрицательные константы.

Оценки (2.2), (2.5), (2.6) показывают, что на любом ограниченном множестве  $Q_1 \cap Q_2$  изменения фазовой координаты  $x$  последовательность  $V_N(x)$  вместе со своими производными первого и второго порядка равномерно ограничена, то есть ([8], стр. 240), последовательность  $(V_N(x), \partial V_N(x) / \partial x)$  компактна в пространстве непрерывных функций для всех  $x \in Q_3 \cap Q_2$ . Отсюда следует равномерная сходимость последовательности  $(V_N(x), \partial V_N(x) / \partial x)$ . Обозначим предел последовательности  $V_N(x)$  при  $N \rightarrow \infty$  через  $V_0(x)$ . Итак, утверждение 1) теоремы доказано. Перейдем к доказательству п. 2) теоремы.

Из [9] (стр. 176) и произвольности области  $Q_2$  следует, что предел  $V_0(x)$  есть решение задачи (1.4). Покажем, что  $V_0(x)$  является минимальным положительным решением задачи (1.4). Предположим противное. Пусть найдется другое положительное решение  $V^0(x)$  задачи (1.4) и

$$0 \leq V^0(x) \leq V_0(x) \quad (2.7)$$

Поскольку функция  $V^0(x)$  есть решение задачи (1.4), то она удовлетворяет уравнению (2.1) при любом  $N$  внутри области  $Q_2 \cap R_N$  и граничным условиям

$$\begin{aligned} V^0(x) &= V_N(x) = 0, & x \in Q_1 \\ V^0(x) &\geq V_N(x) = 0, & x \in r_N \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из (2.7), (2.8) и из [5] следует, что для всех  $x \in Q_2 \cap R_N$

$$V_N(x) \leq V^0(x) \quad (2.9)$$

Из (2.7), (2.9) и из того факта, что  $V_0(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} V_N(x)$ , следует, что  $V^0(x) = V_0(x)$ . Тем самым доказано утверждение 2) теоремы.

Доказательство пункта 3) теоремы также будем вести от противного. Предположим, что при некотором допустимом управлении из класса  $\Omega$  получено значение  $W_0(x)$  функционала (1.3) меньшее, чем  $V_0(x)$ . Тем же рассуждениями, что и при выводе оценки (2.2), можно доказать, что при любом  $N$  справедливо соотношение

$$V_N(x) \leq W_0(x)$$

Отсюда и из того факта, что  $\lim_{N \rightarrow \infty} V_N(x) = V_0(x)$ , убеждаемся в противном, то есть  $W_0(x) \geq V_0(x)$ . Следовательно, утверждение 3) теоремы доказано.

Перейдем к доказательству пункта 4) теоремы. Поскольку функции  $V_0(x)$  и  $\omega_0(x)$  удовлетворяют уравнению Беллмана (1.4), то для них справедливо неравенство (1.5) леммы 1.1. Отсюда и из леммы 1.1

$$M\tau_1(\omega_0) \leq V_0(x)$$

Но на основании п. 3 теоремы 2.1

$$M\tau_1(\omega_0) \geq V_0(x)$$

Следовательно,  $M\tau_1(\omega_0) = V_0(x)$ , то есть утверждение 4) теоремы 2.1 справедливо.

Обратимся к доказательству п. 5) теоремы. Пусть  $V(x)$  — некоторое положительное решение уравнения Беллмана (1.4). Из доказательства лемм 2.1, 2.2 работы [10] следует оценка

$$u_0 B' \frac{\partial V}{\partial x} \leq \inf_{u \in U} u' B' \frac{\partial V}{\partial x} + u \quad (2.10)$$

где  $0 < \mu < 1$ , и управление  $u_0(x) \in U$  удовлетворяет локальному условию Липшица в каждом ограниченном множестве изменения  $x$ , то есть при  $|x_1| \leq N$ ,  $|x_2| \leq N$

$$|u_0(x_1) - u_0(x_2)| \leq c(N) |x_1 - x_2| \quad (2.11)$$

Здесь  $N$  — произвольное положительное число,  $c(N)$  — некоторая заданная постоянная, зависящая от  $N$ . Поэтому, ввиду ограниченности мно-

жества  $U$  при управлении  $u_0(x)$  согласно [11] существует единственное решение системы (1.1). Кроме того, из (1.4) и (2.11) имеем

$$L_{u_0} V - 1 = \inf_{u \in U} L_u V + 1 + u_0' B' \frac{\partial V}{\partial x} - \inf_{u \in U} u' B' \frac{\partial V}{\partial x} \leq \mu$$

или

$$L_{u_0} V \leq -1 + \mu \quad (2.12)$$

Поэтому на основании леммы (1.1) управление  $u_0(x)$  есть допустимое управление. Отсюда и из (2.12) согласно лемме 1.1 вытекает

$$M_{-1}(u_0) \leq (1 - \mu)^{-1} V(x)$$

Из последнего неравенства следует справедливость утверждения 5) теоремы 2.1. Теорема доказана.

Теорема 2.1 допускает следующие обобщения в виде следствий.

**Следствие 1.** При доказательстве теоремы 2.1 на функцию  $f(x)$  из (1.1) можно наложить более слабые требования, потребовать, чтобы функция  $f(x)$  росла не быстрее некоторой степени  $|x|$  при  $|x| \rightarrow \infty$  и удовлетворяла бы локальному условию Липшица типа (2.11). При этом все выводы теоремы 2.1 остаются в силе. Справедливость следствия 1 устанавливается повторением доказательства теоремы.

**Следствие 2.** Требование существования допустимого управления является очевидным из постановки задачи быстрогодействия, но при доказательстве теоремы 2.1 оно участвовало лишь при обосновании оценки (2.2). Поэтому, если это требование заменить требованием существования неограниченного решения  $W_+(x)$  задачи (1.4), а другие требования теоремы сохранить, то все утверждения теоремы 2.1 имеют силу.

Действительно, требование существования решения  $W_+(x) \geq 0$  задачи (1.4) согласно [9] означает, что для любого  $N$  имеет место оценка  $V_N(x) \leq W_+(x)$ , что равносильно оценке (2.2).

Следует отметить, что во многих конкретных задачах быстрогодействия оптимальное управление иногда угадывается из вида системы (1.1). Но даже при найденном оптимальном управлении найти или угадать минимальное положительное решение  $V_0(x)$  уравнения Беллмана (1.4) бывает трудно, а зачастую и невозможно. Однако, благодаря предельному переходу при  $N \rightarrow \infty$  для последовательности функций  $V_N(x)$ , определяемых из красной задачи (2.1), оказывается возможным найти функцию  $V_0(x)$  в некоторых ограниченных областях изменения  $x$ . В случае же, если функция  $V_0(x)$  найдена и не найдено оптимальное управление, последнее можно определить, используя п. 4) теоремы 2.1. Таким образом, теорема 2.1 дает не только условия существования, но и методику нахождения решения задачи быстрогодействия для систем вида (1.1). В целях иллюстрации сказанного рассмотрим пример.

**Пример 2.1.** Рассмотрим следующую скалярную систему:

$$\begin{aligned} dx(t) &= u(x(t)) dt + \sqrt{2} d\tilde{z}(t) - dr(t) \\ x(0) &= x > 0, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь управление  $u \in [-1, 1]$ ,  $\xi(t)$  — скалярный стандартный винеровский процесс,  $\eta(t)$  — скалярный однородный пуассоновский процесс с математическим ожиданием  $M\eta(t) = 1$ .

Ставится задача об определении минимального среднего времени достижения процессом  $x(t)$  отрицательной полуоси  $[-\infty, 0]$  множества  $x$ . Очевидно, что для системы (2.13) оптимальное управление будет  $u = -1$ . С учетом этого уравнение Беллмана для поставленной задачи имеет вид

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} - \frac{dV(x)}{dx} + V(x-1) - V(x) + 1 = 0$$

$$V(x) = 0, \quad x \in [-\infty, 0]$$
(2.14)

Разобьем ось  $x$  на ряд единичных интервалов и будем искать минимальное положительное решение  $V(x)$  уравнения (2.14) для нескольких начальных интервалов. Для интервала  $[0, 1]$  уравнение (2.14) с учетом начального условия примет вид

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} - \frac{dV(x)}{dx} - V(x) + 1 = 0$$

$$V(x) = 0, \quad x \in [-\infty, 0]$$
(2.15)

Обозначим  $\frac{dV}{dx} = z(x)$ , а производную по  $x$  будем обозначать точкой над знаком соответствующей функции. С учетом сказанного уравнение (2.15) преобразуется в следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{V}(x) = z(x) \\ \dot{z}(x) = z(x) - V(x) - 1 \end{cases}$$
(2.16)

Фундаментальная система решений для соответствующей (2.16) однородной системы имеет вид

$$(V(x) = \exp A_1 x; \quad z(x) = A_1 \exp A_1 x)$$

$$(V(x) = \exp A_2 x; \quad z(x) = A_2 \exp A_2 x)$$

где  $A_1, A_2$  — корни квадратного уравнения  $A^2 - A - 1 = 0$

$$A_1 = (1 - \sqrt{5})/2; \quad A_2 = (1 + \sqrt{5})/2$$
(2.17)

По общему правилу решение системы (2.16) будем искать в виде

$$\begin{aligned} V(x) &= c_1(x) \exp A_1 x + c_2(x) \exp A_2 x \\ z(x) &= A_1 c_1(x) \exp A_1 x + A_2 c_2(x) \exp A_2 x \end{aligned}$$
(2.18)

Подставив (2.18) в (2.16), получим для функций  $c_1(x)$  и  $c_2(x)$  следующую систему:

$$\begin{cases} c_1(x) A_1 \exp A_1 x + c_2(x) A_2 \exp A_2 x = -1 \\ c_1(x) \exp A_1 x + c_2(x) \exp A_2 x = 0 \end{cases}$$

Отсюда

$$c_1(x) = (A_2 - A_1)^{-1} \exp(-A_1 x)$$

$$c_2(x) = (A_1 - A_2)^{-1} \exp(-A_2 x)$$

Проинтегрировав эти выражения от 0 до  $x$ , с учетом (2.17) получим

$$c_1(x) = c_1(0) + (1 + A_1^2)^{-1} [\exp(-A_1 x) - 1]$$

$$c_2(x) = c_2(0) + (1 + A_2^2)^{-1} [\exp(-A_2 x) - 1]$$

Следовательно, общее решение уравнения (2.15) имеет вид

$$\begin{aligned} V(x) &= c_1(x) \exp A_1 x + c_2(x) \exp A_2 x = \\ &= (1 + A_1^2)^{-1} (1 - \exp A_1 x) + (1 + A_2^2)^{-1} (1 - \exp A_2 x) + \\ &\quad + c_1(0) \exp A_1 x + c_2(0) \exp A_2 x \end{aligned}$$

Далее, учитывая, что  $V(0) = 0$ , имеем

$$c_1(0) = -c_2(0)$$

Окончательно для  $V(x)$ , имея виду (2.17), получим

$$\begin{aligned} V(x) &= 1 - (1 + A_1^2)^{-1} \exp A_1 x - (1 + A_2^2)^{-1} \exp A_2 x + \\ &\quad + c_2(0) (\exp A_2 x - \exp A_1 x) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Формула (2.19) дает континуум решений для уравнения (2.15). Для того, чтобы найти минимальное положительное решение, нужно соответствующим образом подобрать постоянную  $c_2(0)$ . С этой целью разделим ось  $x$  на  $N$  охватывающих друг друга отрезков вида  $[0, N]$ , где  $N$  пробегает значения  $1, 2, \dots, n, \dots$ . Будем решать для каждого отрезка следующую краевую задачу — найти решение уравнения (2.15) для функции  $V_N(x)$  с граничными условиями  $V_N(0) = 0$  и  $V_N(N) = 0$ . Ясно, что согласно теореме 2.1 при  $N \rightarrow \infty$ ,  $V_N(x) \rightarrow V_0(x)$  для произвольной точки  $x$  интервала  $[0, 1]$ , следовательно, и  $c_2(0)_N$  стремится к некоторому пределу. Обозначим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} c_2(0)_N = c_0$$

С учетом сказанного и из (2.19) имеем

$$\begin{aligned} V_N(x) &= 1 - (1 + A_1^2)^{-1} \exp A_1 x - (1 + A_2^2)^{-1} \exp A_2 x + \\ &\quad + c_2(0)_N (\exp A_2 x - \exp A_1 x) \end{aligned}$$

Отсюда и из того факта, что  $V_N(N) = 0$ , имеем

$$c_2(0)_N = \frac{1}{\exp A_1 N - \exp A_2 N} - \frac{(1 + A_1^2)^{-1} \exp A_1 N}{\exp A_1 N - \exp A_2 N} -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(1 + A_2^2)^{-1} \exp A_2 N}{\exp A_1 N - \exp A_2 N} = \frac{(\exp A_1 N)^{-1}}{1 - \exp (A_2 - A_1) N} = \\
& = \frac{(1 + A_1^2)^{-1}}{1 - \exp (A_2 - A_1) N} = \frac{(1 + A_2^2)^{-1}}{\exp (A_1 - A_2) N - 1}
\end{aligned}$$

Из последнего выражения с учетом (2.17) видно, что

$$c_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} c_2(0)_N = (1 + A_2^2)^{-1}$$

Подставив  $c_0$  в (2.19) вместо  $c_1(0)$ , получим

$$V_0(x) = 1 - \exp A_1 x = 1 - \exp \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{2} x \quad (2.20)$$

Рассмотрим теперь интервал  $[1, 2]$  оси  $x$ . Согласно принципу динамического программирования с учетом (2.20) уравнение Беллмана (2.14) здесь будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 V(x)}{dx^2} - \frac{dV(x)}{dx} - V(x) - \exp A_1(x-1) + 2 &= 0 \\
V(1) &= 1 - \exp A_1
\end{aligned} \quad (2.21)$$

Ввиду громоздкости выкладок и поскольку ход решения уравнения (2.21) аналогичен ходу решения уравнения (2.15) приведем здесь окончательный вид функции  $V_0(x)$ . Имеем для  $x \in [1, 2]$

$$V_0(x) = 2 - \exp A_1 x - \exp A_1(x-1) - \frac{(x-1) \exp A_1(x-1)}{A_2 - A_1}$$

Приведем также выражение  $V_0(x)$  для  $x \in [2, 3]$ . На интервале  $[2, 3]$  множества  $x$  имеем

$$\begin{aligned}
V_0(x) &= 3 - \exp A_1 x - \left(1 + \frac{x-1}{A_2 - A_1}\right) \exp A_1(x-1) - \\
&- \left[1 + \frac{6(x-2)}{(A_2 - A_1)^2} + \frac{(x-2)^2}{2(A_2 - A_1)^2}\right] \exp A_1(x-2)
\end{aligned}$$

Как видно из приведенных выражений для  $V_0(x)$ , угадать вид  $V_0(x)$  для произвольного единичного интервала оси  $x$  довольно трудно, поэтому здесь приобретает интерес оценка функции  $V_0(x)$  сверху. Для этой цели воспользуемся леммой 1.1. В качестве функции Ляпунова  $D(x)$  возьмем  $D(x) = x^2$ . Тогда, согласно (2.14)

$$L_{-1}D(x) = 2 - 2x + x^2 - 2x - 1 - x^2 = 3 - 4x \quad (2.22)$$

Отсюда для всех  $x \geq \frac{3}{4}$  выполняется  $L_{-1}D(x) \leq 0$ . Поэтому из

(2.22) согласно лемме 1.1 для всех  $x > \frac{3}{4}$

$$V_0(x) = M_{\tau_0}(-1) < \frac{x^2}{4x-3} \quad (2.23)$$

При достаточно больших  $x$  согласно (2.23) можно приближенно оценить  $V_0(x)$  как

$$V_0(x) \leq \frac{x}{4}$$

Следует отметить, что при  $x = 1$  формула (2.23) дает довольно грубую оценку  $V_0(1) \leq 1$ , что видно из (2.20), но с увеличением  $x$  формула (2.23) дает более точную оценку сверху для функции  $V_0(x)$ .

**Замечание.** Если в (1.1) положить  $a(x(t)) \equiv 0$ , то результаты данной работы совпадают с результатами [6].

Автор выражает благодарность В. Б. Колмановскому за внимание к работе и ценные обсуждения.

Институт проблем  
механики АН СССР

Поступила 24 III 1980

Գ. Գ. ԵԳՅԱՆ

# ՄՏՈՆԱՍՏԻԿ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ՄԻ ԴՕՍԻ ՀԱՄԱՐ ՕՊՏԻՄԱԼ ԱՐԱԳԱԴՈՐԾՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտարկվում է վիճերյան և Պուասոնի պրոցեսների տեսքի պատահական լրացուցիչ դրգումներով կառավարող համակարգ:

Խնդիր է դրվում նշված համակարգը արագորեն բերել որոշ արված վիճակին: Ցույց են տրվում դիտարկվող համակարգի պահանջված վիճակին բերելու համար մինիմալ միջին ժամանակը գտնելու եղանակներ: Դիտարկվում են երկու օրինակներ:

## ON TIME-OPTIMAL CONTROL FOR A CLASS OF STOCHASTIC SYSTEMS

G. G. EGIYAN

### S u m m a r y

The control system is considered with random additive perturbations in the form of Winner's and Poisson's processes. The problem of the fastest possible reduction of the system to a given state is formulated. The methods for finding the minimal average time of the reduction are given. Two examples are considered.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф. А., Колмоновский В. Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. М., «Наука», 1978.
2. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.
3. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., «Наука», 1969.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
5. Майзенберг Т. А. Об одном итерационном процессе синтеза оптимального управления в стохастических системах. Численные методы нелинейного программирования. Тр. II Всесоюзного семинара. Харьков, 1976.
6. Колмоновский В. Б. О некоторых вопросах оптимального быстрогодействия в стохастических системах. Проблемы управления и теории информации. 1975, т. 1, № 4.
7. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М., Физматгиз, 1963.
8. Люстерник А. А., Собольев В. И. Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.
9. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., ИЛ, 1957.
10. Fleming W. H. Duality and a priori estimates in Markovian optimization problems. J. of Math. Anal. and Applic., 1967, vol. 16, No. 2.
11. Ито К., Нисиро М. Стационарные решения стохастических дифференциальных уравнений. Математика (сб. переводов), 1967, т. 5.
12. Лядыженская О. А., Уральцева М. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1973.