ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1980

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIII, № 4, 1980 Механика

В. Н. АКОПЯН

О КОНТАКТЕ КРУГОВОГО ДИСКА С ДВУМЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКАМИ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ*

Исследуется контактная задача о сжатии упругого кругового диска двумя неодинаковыми упругими же прямоугольниками с учетом температурных воздействий. Эти воздействия обусловлены наличием стационарного температурного поля, когда имеют место обычные условия теплового контакта.

Указанная задача при отсутствии температурного поля, когда сжимающие прямоугольники абсолютно жесткие, притом в зонах контакта действуют только нормальные напряжения, рассмотрена в [5].

В настоящей работе эта задача в общей постановке, когда прямоугольники имеют различные геометрические и упругие параметры, а в несимметрических зонах контакта наряду с нормальными действуют также тангенциальные контактные напряжения, обсуждается, по-видимому, впервые. Решение задачи сведено к совместному решению бесконечных систем линейных уравнений и сингулярных интегральных уравнений с ядрами, представимыми суммой своей сингулярной части в виде ядра Коши и некоторых регулярных ядер. На основе аппарата многочленов Якоби и Чебышева последние уравнения сведены к эквивалентным регулярным бесконечным системам.

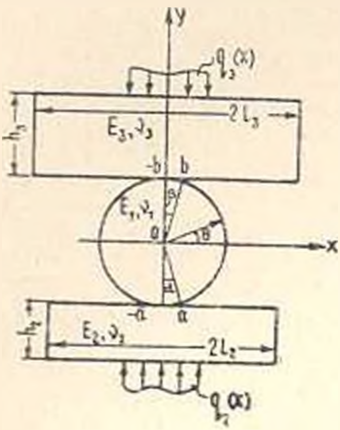
Проведено достаточно полное исследование задачи и при помощи численного анализа выяснены закономерности изменения важных механических характеристик: длины зоны контакта, меры сближения прямоугольников, а также контактных напряжений.

1. Пусть упругий круглый диск единичного радиуса сжимается двумя упругими неодинаковыми прямоугольниками, изготовленными из различных материалов и находящимися под действием симметричных относительно оси oy нормальных нагрузок соответственно интенсивностей $q_1(x)$ и $q_2(x)$ (фиг. 1). Кроме того, система диск-прямоугольники подвержена также температурным воздействиям, находясь в стационарном температурном поле. При этом полагается, как в [3], что температурные режимы в диске и в прямоугольниках в зонах контакта удовлетворяют условиям обычного теплового контакта, на неконтактирующих частях границы диска и внутренних сторонах прямоугольников имеет место теплообмен с внеш-

* Работа доложена на Всесоюзной конференции по теории упругости в г. Ереване в 1979 г.

ней средой по закону Ньютона, а на наружных частях границы прямоугольников поддерживается нулевая температура.

Предположим, что диск входит в контакт с прямоугольниками по дугам единичной окружности a_1b_1 ($a_1 = -ie^{-i\alpha}$, $b_1 = -ie^{i\alpha}$) и a_2b_2 ($a_2 = ie^{-i\beta}$, $b_2 = ie^{i\beta}$), которым на сторонах прямоугольников соответствуют интервалы $(-a, a)$ и $(-b, b)$. Далее предположим, что в зонах контакта действуют как нормальные, так и тангенциальные напряжения.



Фиг. 1.

Нужно определить контактные напряжения, меру сближения прямоугольников относительно диска δ_1 и δ_2, то есть жесткость системы диск-прямоугольники, а также полудлину зон контакта a и b.

Предварительно приведем решения вспомогательных задач об определении компонентов смещений граничных точек диска и прямоугольников, находящихся под действием произвольных внешних сил.

В первой задаче пусть круговой диск на участках своей границы $-\frac{\pi}{2} - \alpha \leqslant \theta \leqslant -\frac{\pi}{2} + \alpha$; $\frac{\pi}{2} - \beta \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} + \beta$, соответствующих контактным зонам, загружен силами $[\tau_1(\theta), p_1(\theta)]$ и $[\tau_2(\theta), -p_2(\theta)]$ соответственно, где $\tau_i(\theta)$ $(i = 1, 2)$ — действуют вдоль оси ox, а $p_i(\theta)$ $(i = 1, 2)$ — вдоль оси oy.

Тогда, пользуясь известными результатами [2], непосредственно можем записать

$$2\mu_1 u^{(1)}(\theta) = \frac{\varkappa_1 + 1}{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}-\alpha}^{-\frac{\pi}{2}+\alpha} \ln \frac{1}{\left|2\sin\frac{\theta - \xi}{2}\right|} \tau_1(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{\varkappa_1 + 1}{2\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} \ln \frac{1}{\left|2\sin\frac{\theta - \xi}{2}\right|} \tau_2(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{\varkappa_1 - 1}{2\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} \frac{\pi - |\theta - \xi|}{2} \operatorname{sign}(\theta - \xi)\, p_2(\xi)\, d\xi -$$

$$- \frac{\varkappa_1 - 1}{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}-\alpha}^{-\frac{\pi}{2}+\alpha} \frac{\pi - |\theta - \xi|}{2} \operatorname{sign}(\theta - \xi)\, p_1(\xi)\, d\xi - (\varkappa_1 + 1)\, a_1 \cos\theta \quad (1.1)$$

$$2\mu_1 v^{(1)}(\theta) = \frac{\varkappa_1+1}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}-\alpha}^{-\frac{\pi}{2}+\alpha} \ln\frac{1}{\left|2\sin\frac{\theta-\xi}{2}\right|}\, p_1(\xi)\, d\xi -$$

$$-\frac{\varkappa_1+1}{2\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} \ln\frac{1}{\left|2\sin\frac{\theta-\xi}{2}\right|}\, p_2(\xi)\, d\xi +$$

$$+\frac{\varkappa_1-1}{2\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} \frac{\pi-|\theta-\xi|}{2}\operatorname{sign}(\theta-\xi)\,\tau_2(\xi)\, d\xi +$$

$$+\frac{\varkappa_1-1}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}-\alpha}^{-\frac{\pi}{2}+\alpha} \frac{\pi-|\theta-\xi|}{2}\operatorname{sign}(\theta-\xi)\,\tau_1(\xi)\, d\xi - (\varkappa_1+1)\, a_1 \sin\theta$$

где $\varkappa_1 = \frac{\lambda_1+3\mu_1}{\lambda_1+\mu_1}$ — постоянная Мусхелишвили, $u^{(1)}(\theta)$ и $v^{(1)}(\theta)$ — соответственно горизонтальные и вертикальные смещения граничных точек диска, а

$$a_1 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta}\left[-p_2(\xi)\sin\xi + \tau_2(\xi)\cos\xi\right] d\xi +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}-\alpha}^{-\frac{\pi}{2}+\alpha}\left[p_1(\xi)\sin\xi + \tau_1(\xi)\cos\xi\right] d\xi \qquad (1.2)$$

Во второй вспомогательной задаче определим смещение граничных точек прямоугольника $\{0 \leqslant y \leqslant h;\ -l \leqslant x \leqslant l\}$, на границе которого действуют нагрузки следующего типа:

$$\begin{aligned}
&\sigma_x^{(2)}(-l,\ y) = 0; \quad \sigma_x^{(2)}(l,\ y) = 0; && \\
&\tau_{xy}^{(2)}(-l,\ y) = 0; \quad \tau_{xy}^{(2)}(l,\ y) = 0; && (0 < y < h) \\
&\sigma_y^{(2)}(x,\ h) = -q(x); \quad \sigma_y^{(2)}(x,\ 0) = -p(x); && \\
&\tau_{xy}^{(2)}(x,\ h) = 0; \quad \tau_{xy}^{(2)}(x,\ 0) = -\tau(x); && (-l < x < l)
\end{aligned} \qquad (1.3)$$

где $q(x)$, $p(x)$ и $\tau(x)$ — наперед заданные функции, выражающие интенсивность приложенных к прямоугольнику нормальных и тангенциальных сил.

Решение этой задачи построим при помощи функции напряжения Эри $F(x, y)$, связанной с напряжениями и перемещениями при помощи известных формул и представляемой формулой [1]

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos \alpha_k x \left[A_k \operatorname{ch} \alpha_k y + B_k \operatorname{sh} \alpha_k y + \alpha_k y \left(C_k \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k \operatorname{sh} \alpha_k y\right)\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sin \beta_k y \left[\beta_k x \operatorname{sh} \beta_k x - \beta_k l \operatorname{th} \beta_k l \operatorname{ch} \beta_k x\right]$$

$$\left(\alpha_k = \frac{\pi(2k-1)}{2l}, \quad \beta_k = \frac{\pi k}{h}\right) \tag{1.4}$$

Здесь коэффициенты A_k, B_k, C_k, D_k и E_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — неизвестны и подлежат определению. Удовлетворяя граничным условиям (1.3), для определения неизвестных коэффициентов $E_k (k = 1, 2, \ldots)$ получим бесконечную систему алгебраических уравнений

$$Y_p = \sum_{k=1}^{\infty} A_{p,k} Y_k + N_p \quad (p = 1, 2, \ldots) \tag{1.5}$$

где введены следующие обозначения:

$$Y_p = \beta_p^3 \operatorname{ch} \mu_p E_p; \quad \mu_p = l\beta_p; \quad \nu_n = h\alpha_n$$

$$A_{p,k} = \frac{16\beta_p^2}{h\varphi_p^{(1)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_k \alpha_n^3 \left[\varphi_n^{(2)}\left(1 + (-1)^{k+p+1} \operatorname{th} \nu_n\right) - \varphi_n^{(3)}\left((-1)^k + (-1)^{p+1}\right)\right]}{(\alpha_n^2 + \beta_k^2)^2 (\alpha_n^2 + \beta_p^2)^2}$$

$$N_p = \frac{4\beta_p}{h\varphi_p^{(1)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\alpha_n}{(\alpha_n^2 + \beta_p^2)} \left[\left((-1)^{p+1}\varphi_n^{(4)} + \varphi_n^{(5)} - \frac{1}{2\beta_p}\right) a_n +\right.$$

$$\left. + \left(\varphi_n^{(4)} - (-1)^{p+1}\varphi_n^{(5)} - \frac{(-1)^p}{2\beta_p}\right) b_n + \left((-1)^{p+1}\varphi_n^{(3)} - \varphi_n^{(2)}\right) d_n\right]$$

$$(k, \ p = 1, 2, \ldots)$$

$$\varphi_p^{(1)} = (1 - \mu_p \operatorname{th} \mu_p) \operatorname{th} \mu_p + \mu_p; \qquad \varphi_n^{(2)} = \frac{\operatorname{sh} \nu_n \operatorname{ch} \nu_n - \nu_n}{\operatorname{sh}^2 \nu_n - \nu_n^2}$$

$$\varphi_p^{(3)} = \frac{\operatorname{sh} \nu_p - \nu_p \operatorname{ch} \nu_p}{\operatorname{sh}^2 \nu_p - \nu_p^2}; \qquad \varphi_p^{(4)} = \frac{\nu_p \operatorname{sh} \nu_p}{\operatorname{sh}^2 \nu_p - \nu_p^2}; \qquad \varphi_p^{(5)} = \frac{\operatorname{sh}^2 \nu_p}{\operatorname{sh}^2 \nu_p - \nu_p^2}$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} p(\xi) \cos \alpha_n \xi \, d\xi; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} q(\xi) \cos \alpha_n \xi \, d\xi;$$

$$d_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \tau(\xi) \sin \alpha_n \xi \, d\xi$$

Остальные коэффициенты, входящие в разложение $F(x, y)$, выражаются через Y_k, a_k, b_k и d_k при помощи простых формул.

Положив

$$p(x) = \begin{cases} p_1(x) & \text{при } -a \leqslant x \leqslant a \\ 0 & \text{при } l > |x| > a \end{cases}; \qquad \tau(x) = \begin{cases} \tau_1(x) & \text{при } -a \leqslant x \leqslant a \\ 0 & \text{при } l > |x| > a \end{cases}$$

для смещений граничных точек прямоугольника получим

$$u^{(2)}(x, 0) = -\frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{E_2}\int_{-a}^{a} R_{11}(x, \xi)\, p_1(\xi)\, d\xi +$$

$$+\frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2}\int_{-a}^{a} R_{12}(x, \xi)\, \tau_1(\xi)\, d\xi + r_1(x) \qquad (1.6)$$

$$v^{(2)}(x, 0) = \frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2}\int_{-a}^{a} R_{21}(x, \xi)\, p_1(\xi)\, d\xi -$$

$$-\frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{E_2}\int_{-a}^{a} R_{22}(x, \xi)\, \tau_1(\xi)\, d\xi + r_2(x)$$

Здесь

$$R_{11}(x, \xi) = \frac{1}{2}\operatorname{sign}(x-\xi) + \frac{2(1-\nu_2)}{l(1-2\nu_2)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\nu_k^2}{\operatorname{sh}^2\nu_k - \nu_k^2}\;\frac{\sin\alpha_k x\cos\alpha_k\xi}{\alpha_k}$$

$$R_{12}(x, \xi) = \frac{1}{\pi}\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{\pi(x-\xi)}{4l}\right| + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k^{(2)}-1]\frac{\sin\alpha_k x\sin\alpha_k\xi}{\alpha_k}$$

$$R_{21}(x, \xi) = \frac{1}{\pi}\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{\pi(x-\xi)}{4l}\right| + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k^{(1)}-1]\frac{\cos\alpha_k x\cos\alpha_k\xi}{\alpha_k}$$

$$R_{22}(x, \xi) = -\frac{1}{2}\operatorname{sign}(x-\xi) + \frac{2(1-\nu_2)}{l(1-2\nu_2)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\nu_k^2}{\operatorname{sh}^2\nu_k-\nu_k^2}\times$$

$$\times\frac{\cos\alpha_k x\sin\alpha_k\xi}{\alpha_k}$$

$$r_1(x) = \frac{8(1-\nu_2^2)}{E_2}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n Y_n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k^{(2)}-(-1)^n\varphi_k^{(3)}}{(\alpha_k^2+\beta_n^2)^2}(-1)^k\alpha_k\sin\alpha_k x +$$

$$+\frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k^{(4)}b_k\sin\alpha_k x}{\alpha_k}$$

$$r_2(x) = \frac{8(1-\nu_2^2)}{E_2}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n Y_n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k^{(5)}+(-1)^n\varphi_k^{(4)}}{(\alpha_k^2+\beta_n^2)^2}(-1)^{k+1}\alpha_k\cos\alpha_k x -$$

$$
-\frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k^{(2)}b_k\cos\alpha_k x}{\alpha_k}-
$$

$$
-\frac{(1+\nu_2)}{E_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Y_k[\beta_k x\,\mathrm{sh}\,\beta_k x-\mu_k\,\mathrm{th}\,\mu_k\,\mathrm{ch}\,\beta_k x]}{\beta_k\,\mathrm{ch}\,\mu_k}-
$$

$$
-\frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{ch}\,\beta_k x}{\beta_k\,\mathrm{ch}\,\mu_k}\,Y_k
$$

$$
\gamma_k^{(1)}=\frac{\mathrm{sh}\,\nu_k\,\mathrm{ch}\,\nu_k+\nu_k}{\mathrm{sh}^2\nu_k-\nu_k^2};\qquad \gamma_k^{(2)}=\frac{\mathrm{sh}\,\nu_k+\nu_k\,\mathrm{ch}\,\nu_k}{\mathrm{sh}^2\nu_k-\nu_k^2}
$$

Следует отметить, что в выражениях ядер R_{ij} $(i, j = 1, 2)$ выделены их главные и регулярные части, притом последние представляются в виде довольно быстро сходящихся рядов.

2. Перейдем к решению основной задачи. Заменяя действие верхнего прямоугольника на диск неизвестными контактными напряжениями, придем к контактной задаче для диска и прямоугольника, условия контакта которой имеют вид [9]

$$
v_1+v_2=\delta_1-f_1(\theta);\quad u_1+u_2=0 \tag{2.1}
$$

где (v_1, u_1) и (v_2, u_2) — пары вертикальных и горизонтальных перемещений граничных точек соответственно диска и прямоугольника в зонах контакта, δ_1 — мера сближения этих тел, а $f_1(\theta) = 1 + \sin\theta$ — функция, описывающая форму границы диска.

Для определения перемещений будем пользоваться аддитивными уравнениями термоупругости

$$
v_i=v_i^{(T)}+v_i^{(У)},\quad u_i=u_i^{(T)}+u_i^{(У)}\quad (i=1,\ 2) \tag{2.2}
$$

Здесь верхними индексами «T» и «$У$» обозначены соответственно тепловые и упругие перемещения контактирующих тел. Выше мы получили формулы (1.1) и (1.6) для упругих перемещений диска и прямоугольника, выраженных через неизвестные контактные напряжения, то есть

$$
v_i^{(У)}=v^{(i)};\quad u_i^{(У)}=u^{(i)}\quad (i=1,\ 2)
$$

После того, как известна температура в диске $T_1(r, \theta)$ и в прямоугольнике — $T_2(x, y)$, легко можно записать выражения тепловых перемещений [3]

$$
u_1^{(T)}=k_1\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1};\qquad v_1^{(T)}=k_1\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\sin(n+1)\theta}{n+1}
$$

$$
u_2^{(T)}=k_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{\alpha_n}(1+\mathrm{th}\,\alpha_n(1+h))\sin\alpha_n x
$$

$$
v_2^{(T)}=k_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{\alpha_n}(1+\mathrm{th}\,\alpha_n(1+h))\cos\alpha_n x
$$

где $k_i = \frac{2\alpha_i(1-\nu_i^2)}{E_i}$, α_i $(i=1, 2)$ — коэффициенты теплового расширения диска и прямоугольника соответственно, а a_n и B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ определяются из бесконечной системы (2.2).

Далее, ввиду малости размеров контактных зон по сравнению с характерными размерами тел и того, что при их сжатии дуговые и прямолинейные отрезки сливаются в единый контактный интервал, в зонах контакта примем $x = 1 \cdot 0$. На основе последнего дуговые отрезки зоны контакта диска $a_1 b_1$ и $a_2 b_2$ отождествляем с прямолинейными зонами контакта $(-a, a)$ и $(-b, b)$.

Подставляя значения упругих перемещений из (1.1) и (1.6) в условие контакта (2.1) и учитывая только что сказанное, получим следующую систему уравнений:

$$
\begin{gathered}
\int_{-a}^{a} Q_{11}(x, \xi)\, p_1(\xi)\, d\xi + \int_{-a}^{a} Q_{12}(x, \xi)\, \tau_1(\xi)\, d\xi + \\
+ \int_{-b}^{b} Q_{13}(x, \xi)\, p_2^*(\xi)\, d\xi + \int_{-b}^{b} Q_{14}(x, \xi)\, \tau_2^*(\xi)\, d\xi = F_1(x) \\
\int_{-a}^{a} Q_{21}(x, \xi)\, p_1(\xi)\, d\xi + \int_{-a}^{a} Q_{22}(x, \xi)\, \tau_1(\xi)\, d\xi + \\
+ \int_{-b}^{b} Q_{23}(x, \xi)\, p_2^*(\xi)\, d\xi + \int_{-b}^{b} Q_{24}(x, \xi)\, \tau_2^*(\xi)\, d\xi = F_2(x) \\
(-a < x < a)
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

Аналогично, из условия контакта диска с верхним прямоугольником получим еще одну бесконечную систему алгебраических уравнений и систему функциональных уравнений, подобных системам (1.5) и (2.3). В случае, когда прямоугольники одинаковые, последние системы полностью совпадают с (1.5) и (2.3).

Для простоты далее рассмотрим именно этот случай, то есть в (2.3) примем $p_1(x) = p_1^*(x) = p_2(x - \pi)$; $\tau_1(x) = -\tau_1^*(x) = -\tau_2(x - \pi)$; $q_2(x) = q_3(x) = q(x)$; $\delta_1 = \delta$ и $a = b$. Тогда система функциональных уравнений (2.3) вырождается в следующую систему интегральных уравнений:

$$
\begin{gathered}
-\lambda_1 \int_{-a}^{a} [\operatorname{sign}(x - \xi) + L_{11}(x, \xi)]\, p_1(\xi)\, d\xi + \\
+ \lambda_2 \int_{-a}^{a} \left[\ln \frac{1}{|x - \xi|} + L_{12}(x, \xi) \right] \tau_1(\xi)\, d\xi = F_1(x)
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

$$\lambda_2 \int_{-a}^{a} \left[\ln \frac{1}{|x-\xi|} + L_{21}(x, \xi) \right] p_1(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \lambda_1 \int_{-a}^{a} [\operatorname{sign}(x-\xi) + L_{22}(x, \xi)]\, \tau_1(\xi)\, d\xi = F_2(x) \quad (-a < x < a)$$

где

$$\lambda_i = \theta_1^{(i)} + \theta_2^{(i)}; \qquad \theta_i^{(1)} = \frac{2(1-\nu_i^2)}{\pi E_i}; \quad \theta_i^{(2)} = \frac{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}{2E_i} \qquad (i = 1, 2)$$

$$L_{11}(x, \xi) = \frac{\pi\theta_2^{(1)}}{D_1} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k^{(5)} - 1) \frac{\sin \alpha_k x \cos \alpha_k \xi}{\alpha_k} + f_2(x, \xi)$$

$$L_{12}(x, \xi) = \frac{\pi\theta_2^{(1)}}{D_2} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k^{(2)} - 1) \frac{\sin \alpha_k x \sin \alpha_k \xi}{\alpha_k} + f_3(x, \xi)$$

$$L_{21}(x, \xi) = \frac{\pi\theta_2^{(1)}}{D_2} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k^{(3)} - 1) \frac{\cos \alpha_k x \cos \alpha_k \xi}{\alpha_k} + f_3(x, \xi)$$

$$L_{22}(x, \xi) = \frac{\pi\theta_2^{(1)}}{D_1} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k^{(5)} - 1) \frac{\cos \alpha_k x \sin \alpha_k \xi}{\alpha_k} + f_2(x, \xi)$$

$$f_2(x, \xi) = \frac{\theta_1^{(2)}}{\pi\lambda_1} [x - \xi - (\pi - |x - \xi - \pi|) \operatorname{sign}(x - \xi - \pi)]$$

$$f_3(x, \xi) = \frac{\theta_2^{(1)}}{\pi\lambda_2} \ln \left| (x-\xi) \operatorname{ctg} \frac{\pi(x-\xi)}{4l} \right| + \frac{\theta_1^{(1)}}{\lambda_2} \ln \left| (x-\xi) \operatorname{ctg} \frac{x-\xi}{2} \right|$$

$$F_1(x) = -u_1^{(T)} - u_2^{(T)} - 2\pi\theta_1^{(1)} a_1 \sin x - r_1(x)$$

$$F_2(x) = \delta - v_1^{(T)} - v_2^{(T)} + 2\pi\theta_1^{(1)} a_1 \cos x - r_2(x) - f_1\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Таким образом, для определения неизвестных контактных напряжений $p_1(x)$ и $\tau_1(x)$ нужно решить систему интегральных уравнений (2.4) совместно с бесконечной системой алгебраических уравнений (1.5).

Перейдем к решению этих уравнений. Умножая первое из уравнений (2.4) на мнимую единицу i и складывая со вторым, относительно $p(x) = p_1(x) + i\tau_1(x)$ получим интегральное уравнение. Далее, дифференцируя это уравнение по x, получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$-i\pi \operatorname{th} \mu\pi\, p(x) + \int_{-a}^{a} \left[\frac{1}{\xi - x} + A(x, \xi) \right] p(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_{-a}^{a} B(x, \xi)\, \overline{p(\xi)}\, d\xi = h(x) \qquad (-a < x < a) \qquad (2.5)$$

Здесь

$$A(x, \xi) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial L_{21}(x, \xi)}{\partial x} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\,\frac{\partial L_{22}(x, \xi)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + i\left(\frac{\partial L_{12}(x, \xi)}{\partial x} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\,\frac{\partial L_{11}(x, \xi)}{\partial x}\right)\right]$$

$$B(x, \xi) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial L_{21}(x, \xi)}{\partial x} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\,\frac{\partial L_{22}(x, \xi)}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - i\left(\frac{\partial L_{12}(x, \xi)}{\partial x} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\,\frac{\partial L_{11}(x, \xi)}{\partial x}\right)\right]$$

$$h(x) = \frac{1}{\lambda_2}\left[F_2'(x) + iF_1'(x)\right]$$

а μ определяется из трансцендентного уравнения

$$\pi\,\mathrm{th}\,\mu\pi = (\mathfrak{G}_1^{(2)} + \mathfrak{G}_2^{(2)})/(\mathfrak{G}_1^{(1)} + \mathfrak{G}_2^{(1)})$$

Функция $p(x)$ должна удовлетворять условию равновесия

$$\int\limits_{-a}^{a} p(x)\,dx = p_0 \tag{2.6}$$

где p_0 — равнодействующая внешних сил.

Введем безразмерные переменные

$$t = \frac{x}{a}; \quad s = \frac{\xi}{a}; \quad \frac{ap(at)}{p_0} = \chi(t)$$

После элементарных выкладок уравнение (2.5) перепишем в форме

$$-i\pi\,\mathrm{th}\,\mu\pi\chi(t) + \int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{1}{s-t} + A^*(t, s)\right]\chi(s)\,ds +$$

$$+ \int\limits_{-1}^{1} B^*(t, s)\overline{\chi(s)}\,\mathrm{ds} = h^*(t) \tag{2.7}$$

где

$$A^*(t, s) = aA(at, as); \; B^*(t, s) = aB(at, as); \; h^*(t) = \frac{ah(at)}{p_0}$$

При этом уравнение равновесия примет вид

$$\int\limits_{-1}^{1} \chi(s)\,ds = 1 \tag{2.8}$$

Далее, исходя из результатов работ [4—7], решение уравнения (2.7) представим в виде

$$\chi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n p_n^{(\alpha, \beta)}(t)}{\omega(t)}; \qquad \begin{matrix} \alpha = -\dfrac{1}{2} - i\mu \\ \beta = -\dfrac{1}{2} + i\mu \end{matrix}; \quad \omega(t) = (1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta} \tag{2.9}$$

Здесь $p_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ — многочлены Якоби, ортогональные на интервале $(-1, 1)$ с весом $\omega^{-1}(t)$, а Z_n $(n = 0, 1, \ldots)$ — неизвестные комплексные коэффициенты, подлежащие определению.

Для дальнейшего нам понадобится соотношение [8]

$$-i\pi \operatorname{th} \mu\pi \frac{p_n^{(\alpha, \beta)}(t)}{\omega(t)} + \int_{-1}^{1} \frac{p_n^{(\alpha, \beta)}(s)}{(s-t)\,\omega(s)} ds = \frac{2}{\pi \operatorname{ch} \mu\pi} p_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(t) \tag{2.10}$$

Подставляя в выражение N_p из (1.5) и в (2.7) выражение $\chi(t)$ из (2.9), используя соотношение (2.10) и условие ортогональности многочленов Якоби, после элементарных выкладок по известной процедуре относительно коэффициентов Y_m и Z_m $(m = 1, 2 \ldots)$ получим следующую систему бесконечных алгебраических уравнений:

$$Z_m = h_m \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{m,n}^{(1,1)}}{n} Z_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{m,n}^{(1,2)}}{n} \overline{Z}_n + \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}^{(1,3)} Y_n + C_m^{(1)} \right]$$

$$Y_m = \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}^{(2,1)} Z_n + \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}^{(2,2)} \overline{Z}_n + \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}^{(2,3)} Y_n + C_m^{(2)} \tag{2.11}$$

Здесь введены обозначения

$$A_{m,n}^{(1,1)} = -\int_{-1}^{1} p_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(t)\,\omega(t)\,dt \int_{-1}^{1} \frac{\partial A^*(t, s)}{\partial s} \times$$

$$\times (1+s)^{\beta+1}(1-s)^{\alpha+1} p_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(s)\,ds$$

$$A_{m,n}^{(1,2)} = -\int_{-1}^{1} p_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(t)\,\omega(t)\,dt \int_{-1}^{1} \frac{\partial B^*(t, s)}{\partial s} \times$$

$$\times (1+s)^{\overline{\beta}+1}(1-s)^{\overline{\alpha}+1} p_{n-1}^{(\overline{\alpha}+1, \overline{\beta}+1)}(s)\,ds$$

$$A_{m,n}^{(1,3)} = -\frac{8(1-\nu_2^2)\beta_n}{E_2} \sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^{k+1} \frac{(\varphi_k^{(5)} + (-1)^n \varphi_k^{(4)})}{(\alpha_k^2 + \beta_n^2)^2} + \right.$$

$$\left. + i \frac{(\varphi_k^{(3)} - (-1)^n \varphi_k^{(3)})}{(\alpha_k^2 + \beta_n^2)^2} \right| \alpha_k^2 \int_{-1}^{1} \frac{\cos \alpha_k a x\, p_m^{(-\alpha, -\beta)}(x)}{\omega^{-1}(x)} dx +$$

$$+\frac{1+\nu_2}{E_2}\int_{-1}^{1}\frac{[(\beta_n xa-\mu_n\,\mathrm{th}\,\mu_n)\,\mathrm{ch}\,\beta_n xa-(1-2\nu_2)\,\mathrm{sh}\,\beta_n xa]}{\mathrm{ch}\,\mu_n}\,\frac{p_m^{(-\alpha,\,-\beta)}(x)}{\omega^{-1}(x)}\,dx$$

$$A_{m,n}^{(2,1)}=\frac{2\beta_m p_0}{lh\gamma_m^{(1)}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}a_k}{\alpha_k^2+\beta_m^2}\Bigg[\Bigg(\varphi_k^{(5)}+(-1)^{m+1}\varphi_k^{(4)}-$$

$$-\frac{1}{2\beta_m}\Bigg)\int_{-1}^{1}\frac{\cos\alpha_k axp_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)}{\omega(x)}\,dx-$$

$$-i\left((-1)^{m+1}\varphi_k^{(3)}-\varphi_k^{(7)}\right)\int_{-1}^{1}\frac{\sin\alpha_k axp_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)}{\omega(x)}\,dx\Bigg]$$

$$A_{m,n}^{(2,2)}=\overline{A_{m,n}^{(2,1)}};\quad A_{m,n}^{(2,3)}=A_{m,n};\qquad h_m=\frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(m-1)\,\mathrm{ch}\,\mu\pi}{2\pi\,\Gamma(m-\alpha)\,\Gamma(m-\beta)}$$

$$C_m^{(1)}=Z_0(A_{m,0}^{(1,1)}+A_{m,0}^{(1,2)})-\frac{1}{\lambda_2 p_0}\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\Bigg[v_1^{(T)}+v_2^{(T)}+i(u_1^{(T)}+u_2^{(T)})+$$

$$+2\pi b_1^{(1)}a_1(i\sin ax-\cos ax)+$$

$$+\pi\beta_2^{(1)}\sum_{k=1}^{\infty}(i\varphi_k^{(4)}-\varphi_k^{(2)})\frac{b_k\sin\alpha_k ax}{\alpha_k}\Bigg]\frac{p_{m-1}^{(-\alpha,\,-\beta)}(x)}{\omega^{-1}(x)}\,dx$$

$$C_m^{(2)}=\frac{4\beta_m}{h\gamma_m^{(1)}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\alpha_k b_k}{\alpha_k^2+\beta_m^2}\left[\varphi_k^{(4)}-(-1)^{m+1}\varphi_k^{(5)}-\frac{(-1)^m}{2\beta_m}\right]$$

Легко видеть, что подставляя в (2.8) выражение функции $\chi(t)$ из (2.9), из условия ортогональности сразу находим $Z_0=\mathrm{ch}\mu\pi/\pi$.

Теперь, следуя работам [4—7], систему (2.11) исследуем на регулярность. С этой целью обозначим

$$Z_m=X_m^{(1)}m^{(1-\varepsilon)},\qquad Y_m=X_m^{(2)}\ (m=1,2,\ldots)$$

где $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$.

Тогда система (2.11) примет вид

$$X_m^{(1)}=\frac{h_m}{m}m^{\varepsilon}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{m,n}^{(1,1)}}{n^{\varepsilon}}X_n^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{A_{m,n}^{(1,2)}}}{n^{\varepsilon}}\overline{X_n^{(1)}}+\sum_{n=1}^{\infty}A_{m,n}^{(1,2)}X_n^{(2)}+C_m^{(1)}\right]$$

$$X_m^{(2)}=\sum_{n=1}^{\infty}A_{m,n}^{(2,1)}n^{1-\varepsilon}X_n^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}A_{m,n}^{(2,2)}n^{1-\varepsilon}\overline{X_n^{(1)}}+\sum_{n=1}^{\infty}A_{m,n}^{(2,3)}X_n^{(2)}+C_m^{(2)}\qquad(2.12)$$

Так как $\partial A^*(t,s)/\partial s;\ \partial B^*(t,s)/\partial s\in L_2(-1,1)$, и при больших k

$$\int_{-1}^{1}e^{i\alpha_k x}\,\frac{p_{m-1}^{(-\alpha,\,-\beta)}}{\omega(x)}\,dx\sim o(a_k^{-3/2})$$

то используя асимптотические представления h_m и $p_m^{(\alpha,\beta)}(x)$ для больших m, легко доказать, что при больших m имеют место следующие соотношения:

$$\frac{h_m}{m} m^{\epsilon} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_{m,n}^{(1,1)}|}{n^{\epsilon}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_{m,n}^{(1,2)}|}{n^{\epsilon}} + \sum_{n=1}^{\infty} |A_{m,n}^{(1,3)}| \right| \sim o(m^{-1/2+\epsilon})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{m,n}^{(2,1)}| n^{2-\epsilon} + \sum_{n=1}^{\infty} |A_{m,n}^{(2,2)}| n^{1-\epsilon} + \sum_{n=1}^{\infty} |A_{m,n}^{(2,3)}| \sim o(m^{-1/2+\epsilon})$$

то есть система (2.12) квазивполне регулярна.

Для определения размера контактной зоны будем пользоваться условием непрерывности контактных напряжений в концах этой зоны, то есть уравнением

$$\operatorname{Re}[\chi(\pm 1)] = 0$$

3. Рассмотрим некоторые частные случаи обсуждаемой задачи.

а) Сначала бесконечно увеличим длину прямоугольников. Тогда из системы (1.5) будем иметь $Y_n = 0$ $(n = 1,2,\ldots)$, а из интегрального уравнения (2.7) получим уравнение, соответствующее термоупругой контактной задаче для кругового диска, сжатого двумя одинаковыми упругими полосами. Далее, устремляя h и l одновременно к бесконечности и считая тангенциальные напряжения отсутствующими в зонах контакта, приходим к следующему интегральному уравнению:

$$\int_{-1}^{1} \ln \frac{1}{|t-s|} \chi(s)\, ds + \int_{-1}^{1} K(t-s)\chi(s)\, ds = h(t) \quad (-1 < t < 1) \tag{3.1}$$

где

$$\chi(t) = ap_1(at); \quad K(t) = \frac{c_1^{(1)}}{c_2} a \ln|at \operatorname{ctg}(at/2)|$$

$$h(t) = \frac{a}{c_2}\left[-v_1^{(7)} - v_2^{(7)} + 2\vartheta_1^{(1)} a_1 \cos at - f_1(at - \pi/2)\right]$$

Представляя решение уравнения (3.1) в виде

$$\chi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n T_{2n}(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (-1 < t < 1)$$

где $T_{2n}(t)$ $(n = 0,1,\ldots)$ — многочлены Чебышева первого рода, по известной процедуре приходим к вполне регулярной бесконечной системе

$$X_m = \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} X_n + M_m \quad (m = 1, 2,\ldots) \tag{3.2}$$

где

$$A_{0,n} = -\frac{1}{\pi^2 \ln 2}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\int_{-1}^{1}K(t-s)\frac{T_{2n}(s)}{\sqrt{1-s^2}}\,ds$$

$$M_0 = \frac{1}{\pi^2 \ln 2}\int_{-1}^{1}\frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$A_{m,n} = -\frac{4m}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_{2m}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\int_{-1}^{1}K(t-s)\frac{T_{2n}(s)}{\sqrt{1-s^2}}\,ds$$

$$M_m = \frac{4m}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h(t)\,T_{2m}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \qquad (n=0,1,\ldots,\ m=1,2,\ldots)$$

Бесконечная система (3.2) вполне регулярна при условии

$$\frac{\vartheta_1^{(1)}}{(\vartheta_1^{(1)}+\vartheta_2^{(1)})}\left(\frac{a^2\cos 2a}{\sin^2 2a}-\frac{1}{4}\right)<\frac{\pi}{2}$$

в противном случае квазивполне регулярна.

б) Рассмотрим еще один частный случай, когда упругий диск сжимается двумя одинаковыми упругими балками, являющимися предельными случаями прямоугольников, находящихся под действием распределенной нагрузки интенсивности $q(x)$, симметричной относительно оси oy.

Под действием контактного давления $p_1(x)$ и нагрузки $q(x)$ точки нейтральной оси балки получают перемещения

$$v_1(x) = \frac{1}{D}\int_{-a}^{a}G(x,\xi)\,p_1(\xi)\,d\xi - \frac{1}{D}\int_{-l}^{l}G(x,\xi)\,q(\xi)\,d\xi \tag{3.3}$$

где D — жесткость балки на изгиб, $2l$ — длина балки и

$$G(x,\xi) = \frac{|x-\xi|^3}{12} \quad (-a\leqslant x,\ \xi\leqslant a) \tag{3.4}$$

Нужно отметить, что при получении (3.4) было использовано уравнение изгиба балки без учета влияния поперечных сдвигов и нормальных напряжений между волокнами. Интегральное уравнение задачи в обсуждаемом случае примет вид

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\frac{1}{\left|2\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right|}+K(\theta,\varphi)\right]p_1(\varphi)\,d\varphi = f(\theta) \quad (-\alpha\leqslant\theta\leqslant\alpha) \tag{3.5}$$

где

$$K(\theta, \varphi) = \ln \cos \frac{\theta - \varphi}{2} - \sin \theta \cos \varphi + \frac{G(\theta, \varphi)}{\theta_1^{(1)} D}$$

$$f(\theta) = \frac{1}{\theta_1^{(2)}} \left[\delta - 1 + \cos \theta + \frac{1}{D} \int_{-l}^{l} G(\theta, \varphi)\, q(\varphi)\, d\varphi \right]$$

Решение (3.5) ищем в виде разложения

$$p_1(\theta) = \frac{\cos \theta/2}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_{2n} \left(\frac{\sin \theta/2}{\sin \alpha/2} \right) \quad (-\alpha < \theta < \alpha) \qquad (3.6)$$

Учитывая условия равновесия

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} p_1(\varphi)\, d\varphi = \int_{-l}^{l} q(\varphi)\, d\varphi = p_0$$

из (3.6) найдем $X_0 = p_0/\pi$

Подставляя выражение $p_1(\theta)$ из (3.6) в (3.5), после элементарных преобразований опять-таки приходим к регулярной бесконечной системе типа

$$X_m = \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n} \frac{X_n}{2n} + C_m \qquad (m = 1, 2, \ldots) \qquad (3.7)$$

Условие полной регулярности системы (3.7) имеет вид

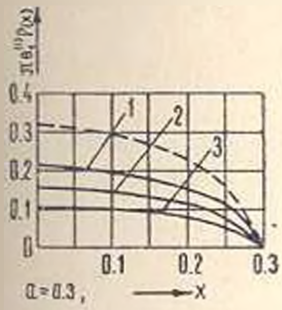
$$\frac{2}{3 \cos^2 \alpha/2} \left(\sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{4 \cos^2 \alpha} + \frac{\alpha}{\theta_1^{(1)} D} \right) < \frac{\pi^2}{4}$$

При остальных значениях параметров система квазивполне регулярна.

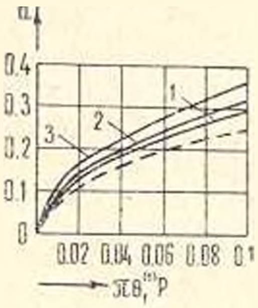
В случае прямоугольников достаточно больших размеров, а именно, когда $h = l = 8a$, числовые расчеты приведены для различных значений полудлины контактной зоны, притом прямоугольники нагружены равномерно распеределенными силами интенсивности p. При этом для упругих и тепловых характеристик были приняты следующие значения: $E_1 : E_2 = 0.5; 1; 2;$ $\nu_1 = \nu_2 = 0.3;$ $\alpha_1 = 26 \cdot 10^{-6} 1/oC;$ $\alpha_2 = 17 \cdot 10^{-6} 1/oC$.

Результаты вычислений, проведенных на ЭВМ «Наири-2», приведены в виде графиков (фиг. 2, 3, 4) и табл. 1, где через δ_i и p_i ($i = 0,1$) обозначены взаимное сближение контактирующих тел и приведенные вдавливающие силы соответственно при нулевой температуре и при 100°C внешней среды. Анализ результатов таблицы показывает, что температура, вообще говоря, незначительно влияет на распределение контактных напряжений и на другие характеристики контакта.

Исследованы также зависимости распределения контактных напряжений (фиг. 2), полудлины контактной зоны a (фиг. 3) и меры взаимного сближения δ (фиг. 4) от приложенных сил p, которые представлены в виде графиков. На этих графиках пунктирные линии соответствуют абсолютно жестким прямоугольникам. Как явствует из графика контактных напряжений (фиг. 2) по мере уменьшения отношения $E_1 : E_2$ в одной и той же точке контактные напряжения увеличиваются. А на остальных двух



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Фиг. 4.

графиках (фиг. 3, 4) наблюдается в некотором смысле обратный эффект, а именно, при увеличении отношения $E_1 : E_2$ при одной и той же силе P величины δ и a также увеличиваются.

Таблица 1

	$E_1 : E_2 = 1$; $p_i^* = \pi\theta_1^{(1)} p_i$ $(i = 0, 1)$					
a	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
p_0^*	0.002616	0.010450	0.032549	0.041866	0.065417	0.094196
p_1^*	0.002614	0.010441	0.023532	0.011831	0.065376	0.094134
δ_0	0.037290	0.011426	0.021213	0.031946	0.042942	0.053657
δ_1	0.037243	0.011417	0.031179	0.031916	0.042911	0.053591

В конце считаю своим приятным долгом выразить благодарность С. М. Мхитаряну за постановку задачи и за ценные советы.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 28 XII 1979

Վ. Ն. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՍԿԱՎԱՌԱԿԻ ԵՎ ԵՐԿՈՒ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ուսումնասիրված է երկու տարբեր առաձգական ուղղանկյուններով առաձգական շրջանային սկավառակի սեղմման կոնտակտային խնդիրը ջերմային ազդեցությունների հաշվառումով։ Այդ ազդեցությունները պայմանավոր-

ված են ստացիոնար ջերմային դաշտով, երբ տեղի ունեն ջերմային կոնտակտի սովորական պայմանները։

Խնդրի լուծումը Յակոբիի և Չեբիշևի բազմանդամների ապարատի հիման վրա բերված է ռեգուլյար անվերջ համակարգերի։ Թվային անալիզի օգնությամբ ի հայտ են բերված կարևոր մեխանիկական բնութագրիչների փոփոխման օրինաչափությունները։

ON A CONTACT OF A CIRCULAR DISK WITH TWO RECTANGLES UNDER TEMPERATURE EFFECTS

V. A. AKOPIAN

Summary

A contact problem for a compression of a circular disk by two dissimilar elastic rectangles, considering temperature effects, is investigated. These effects result from the presence of a stationary temperature field under ordinary conditions of thermal contact.

The solution to the problem on the basis of the Yakoby and Chebishev polynomials is reduced to regular infinite systems. A numerical analysis is used to find out the regularities of variation in essential mechanical characteristics.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд. «Наука», 1993.
3. *Акопян В. Н.* К одной задаче о тепловом контакте кругового диска с прямоугольными пластинами. Докл. АН Арм. ССР. 1978, т. 64, № 5.
4. *Arutunian N. Ch., Mkhitarian S. M.* Trands in elasticity and thermoelasticity. Witold Nowacki Anniversary Volume. Wolters-Noordnoff Publishing, p. 3—20, 1971.
5. *Sternberg E., Tureltaub M. J.* Compression of an Elastic Roller Between Two Rigid Plates. Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., Изд. „Наука", 1972.
6. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. Известия АН Арм. ССР, Механика, 1972, т. 25, вып. 2.
7. *Гулян К. Г.* Передача нагрузки от стрингера конечной длины к двум клиновидным пластинам. Докл. АН Арм. ССР, 1974, т. 59, № 4.
8. *Попов Г. Я.* Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
9. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М., Гостехтеоретиздат, 1949.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIII, № 4, 1980 Механика

М. А. БУРЫШКИН

ОБ ИЗГИБЕ СИММЕТРИЧНОЙ ГУСТОПЕРФОРИРОВАННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

1. В данной работе изучается рациональный подход к расчету несимметричного напряженно-деформированного состояния изогнутой густоперфорированной ортотропной пластинки, занимающей область Ω плоскости xOy и обладающей группой G симметрии [1]. Для компактности формул предполагается, что в элементарной ячейке пластинки расположено лишь одно (основное) отверстие или ядро с контуром Γ ($t \in \Gamma$ — точка этого контура). Приняты такие обозначения: $g \in G$ — элемент симметрии, C_m ($m = 0, 1$) — поворот вокруг начала координат на угол $m\pi$, θ — отражение относительно оси x, $T_{m_1 m_2}$ ($m_1, m_2 = 0, \pm 1, \ldots$) — трансляция (сдвиг) на вектор $m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ — основные векторы ($a_1 = a_{11} + ia_{12}$, $a_2 = a_{21} + ia_{22}$ — соответствующие комплексные числа), μ_j ($j = 1, 2$) — комплексные параметры С. Г. Лехницкого, $\mu_2 = -\bar{\mu}_1$,

$$z = x + iy, \quad z_j = x - \mu_j y \tag{1.1}$$

Ω_j и Γ_j ($j = 1, 2$) — область и контур, получающиеся из Ω и Γ j-м аффинным преобразованием координат, которое отвечает переходу (1.1) от точки z к точка z_j, $t_j \in \Gamma_j$ — точка контура Γ_j.

Известно, что напряженно-деформированное состояние изогнутой пластинки описывается комплексными потенциалами С. Г. Лехницкого, то есть функциями $w_j(z_j)$ ($j = 1, 2$), аналитическими в Ω_j [2, 3]. В частности, прогиб ортотропной пластинки в точке z вычисляется по формуле

$$w(z) = 2\,\mathrm{Re}\,[w_1(z_1) + w_2(z_2)] \quad z \in \Omega \tag{1.2}$$

Комплексные потенциалы $w_j(z_j)$ определяются из системы уравнений, состоящей из граничных условий на всех n контурах пластинки (вообще говоря, число n может быть и бесконечно большим). Если $\Gamma^{(s)}$ ($s = 1, 2, \ldots, n$) — контур с номером s, а $t^{(s)}$ — его точка, то такая система имеет вид

$$\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{2} r_{jp}^{(s)} w_j'(t_j^{(s)}) = f_p^{(s)}(t^{(s)}) \quad (p = 1, 2;\ s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.3}$$

где $r_{jp}^{(s)}$ — некоторые коэффициенты, зависящие от типа граничных условий на контуре $\Gamma^{(s)}$ и от параметров μ_s, $f_\rho^{(s)}(t^{(s)})$ — функции, которые определены на этом контуре и с заранее известным произволом вычисляются по заданной нагрузке.

Так как порядок разрешающей системы (1.3) и сложность структуры искомых функций увеличиваются с ростом числа n, то для достаточно большого n решение поставленной задачи оказывается весьма затруднительным. Исключением из этого являются симметричные задачи, в которых нагрузка пластинки обладает теми же симметричными свойствами, что и упруго-геометрические характеристики.

Подход, предлагаемый в данной работе и опирающийся на результаты прикладной теории представлений групп [4—6], позволяет после определенного обобщения обычных симметричных задач применять эффективные методы их решения [2] и для нагрузок достаточно общего вида, которые не обладают указанными симметрическими свойствами.

2. Пусть $\tau_{k\nu}$ — вещественное неприводимое $m_{k\nu}$ — мерное представление группы G (k — индекс звезды представления, ν — номер представления со звездой $\{k\}$) [1]; $\tau_{k\nu}(g)$ — матрица этого представления, отвечающая элементу g (ее порядок равен $m_{k\nu}$), $\tau_{k\nu\mu\rho}(g)$ ($\mu, \rho = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}$) — $\mu\rho$-ый элемент матрицы $\tau_{k\nu}(g)$. Тогда будем говорить, что набор, который состоит из $m_{k\nu}$ функций $F_{k\nu\rho}$ ($\rho = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}$), определенных на Ω и записанных в инвариантной системе отсчета [6], преобразуется по неприводимому представлению $\tau_{k\nu}$, если

$$F_{k\nu\mu}(gz) = \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\mu\rho}(g) F_{k\nu\rho}(z) \quad \forall g \in G, \quad \forall z \in \Omega \ (\mu = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}) \tag{2.1}$$

Задачу расчета напряженно-деформированного состояния симметричной пластинки при нагрузке $Q_{k\nu\rho}$ назовем обобщенной симметричной задачей изгиба. Ее важной особенностью является то, что набор, составленный из одноименных компонент тех состояний, которые отвечают нагрузкам $Q_{k\nu\rho}$ ($\rho = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}$), также преобразуется по неприводимому представлению $\tau_{k\nu}$ [6]. В частности, прогибы $w_{k\nu\rho}$ ($\rho = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}$), возникающие при нагрузках $Q_{k\nu\rho}$, обладают свойствами (2.1), то есть

$$w_{k\nu\mu}(gz) = \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\mu\rho}(g) w_{k\nu\rho}(z) \tag{2.2}$$

Указанное обстоятельство накладывает на соответствующие комплексные потенциалы $w_{jk\nu\mu}(z_j)$ ($j = 1, 2$) серьезные ограничения. Действительно, для любого элемента g симметрии пластинки в любой точке $z \in \Omega$ потенциалы $w_{jk\nu\mu}(z_j)$ ($\mu = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}$) должны удовлетворять равенствам, получающимся из (2.2) и (1.2)

$$\mathrm{Re}\,\{w_{1k\nu\iota}[(gz)_1] + w_{2k\nu\iota}[(gz)_2]\} =$$

$$= \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\iota\rho}(g)\,\mathrm{Re}\,[w_{1k\nu\rho}(z_1) + w_{2k\nu\rho}(z_2)] \qquad (2.3)$$

Найдем необходимые для этого свойства функций $w_{jk\nu\iota}(z_j)$ ($j=1,\ 2$).

Предположим, что $z^{(0)}$ — некоторая внутренняя точка области Ω, δ — круг радиуса R с центром в точке $z^{(0)}$, δ_j ($j = 1,\ 2$) — эллипс, в который j-е аффинное преобразование переводит круг δ. За счет выбора достаточно малого R добьемся, чтобы окружность, описанная вокруг эллипса δ_j, целиком лежала в области Ω_j. Тогда для функции $w_{jk\nu\iota}(z_j)$ имеет место разложение:

$$w_{jk\nu\iota}(z_j) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{jn}^{(\iota)}[z_j - (z^{(0)})_j]^n \qquad z \in \delta \qquad (2.4)$$

В силу симметрии пластинки очевидно, что аналогичные рассуждения можно провести и для точки $gz^{(0)}$ ($g \in G$), то есть

$$w_{jk\nu\iota}[(gz)_j] = \sum_{n=0}^{\infty} b_{jn}^{(\iota)}[(gz)_j - (gz^{(0)})_j]^n \qquad z \in \delta \qquad (2.5)$$

В формулах (2.4) и (2.5) под $a_{jn}^{(\iota)}$ и $b_{jn}^{(\iota)}$ понимаются скалярные коэффициенты, которые связываются между собой условиями (2.3). В самом деле, подставляя разложения (2.4) и (2.5) в (2.3), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} \{b_{jn}^{(\iota)}[(gz)_j - (gz^{(0)})_j]^n + \overline{b_{jn}^{(\iota)}}\,\overline{[(gz)_j - (gz^{(0)})_j]^n}\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\iota\rho}(g)\,\{a_{jn}^{(\rho)}[z_j - (z^{(0)})_j]^n + \overline{a_{jn}^{(\rho)}}\,\overline{[z_j - (z^{(0)})_j]^n}\} \qquad (2.6)$$

Перебирая всевозможные элементы симметрии и устанавливая взаимосвязь между коэффициентами $a_{jn}^{(\iota)}$ и $b_{jn}^{(\iota)}$, нетрудно выяснить специальные свойства комплексных потенциалов обобщенных симметричных задач. Подробно разберем соответствующую процедуру на примере $g = \theta$. Из равенств (1.1) вытекает, что

$$(\theta z)_j = (\bar{z})_j = \overline{z_{3-j}} \qquad (2.7)$$

и, следовательно, выражение (2.6) имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} \{b_{jn}^{(\iota)}[\overline{z_{3-j}} - \overline{(z^{(0)})_{3-j}}]^n + \overline{b_{jn}^{(\iota)}}[z_{3-j} - (z^{(0)})_{3-j}]^n\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\iota\rho}(\theta)\,\{a_{jn}^{(\rho)}[z_j - (z^{(0)})_j]^n + \overline{a_{jn}^{(\rho)}}[\bar{z}_j - \overline{(z^{(0)})_j}]^n\}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях двучлена $z_j - (z^{(0)})_j$ или $\bar{z}_j - \overline{(z^{(0)})_j}$ из разных частей равенства, найдем, что

$$b_{jn}^{(\mu)} = \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\rho\mu}(\theta)\, \overline{a_{3-j,\, n}^{(\rho)}} \quad (j=1,\ 2;\ \mu=1,\ 2,\ \dots,\ m_{k\nu};\ n=0,\ 1,\ 2,\dots) \tag{2.8}$$

Используя соотношения (2.7) и (2.8), преобразуем формулу (2.5)

$$w_{jk\nu\mu}[(\theta z)_j] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\rho\mu}(\theta)\, \overline{a_{3-j,\, n}^{(\rho)}}\, [\overline{z_{3-j}} - \overline{(z^{(0)})_{3-j}}]^n =$$

$$= \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\rho\mu}(\theta) \overline{\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_{3-j,\, n}^{(\rho)} [z_{3-j} - (z^{(0)})_{3-j}]^n \right\}}$$

Выражение, заключенное в фигурные скобки, и правая часть равенства (2.4), записанного для $\mu = \rho$, равны. Поэтому

$$w_{jk\nu\mu}[(\theta z)_j] = \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\rho\mu}(\theta)\, \overline{w_{3-j,\, k\nu\rho}(z_{3-j})}$$

Аналогичным образом находятся свойства комплексных потенциалов $w_{jk\nu\mu}$ для элементов симметрии более общего вида, а именно

$$w_{jk\nu\mu}[(T_{m_1m_2} C_m z)_j] = \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\rho\mu}(T_{m_1m_2} C_m)\, w_{jk\nu\rho}(z_j)$$

$$w_{jk\nu\mu}[(T_{m_1m_2} C_m \theta z)_j] = \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\rho\mu}(T_{m_1m_2} C_m \theta)\, \overline{w_{3-j,\, k\nu\rho}(z_{3-j})} \tag{2.9}$$

$$\forall z \in \Omega \quad (m = 0,\ 1;\ m_1,\ m_2 = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots;\ \mu = 1,\ 2,\dots,\ m_{k\nu})$$

Остановимся теперь на частном, но весьма важном случае, при котором комплексные потенциалы голоморфны в Ω_j. Тогда для их записи удобно использовать интегралы Коши. Так как границы областей Ω и Ω_j представляют собой соответственно множества контуров $T_{m_1m_2}h\Gamma$ и $\Gamma_{m_1m_2j}^{(h)} = (T_{m_1m_2} h\Gamma)_j$, где h — один из элементов подгруппы $H = \{C_0,\ C_1,\ \theta,\ C_1\theta\}$, то

$$w_{jk\nu\mu}(z_j) = \lim_{N\to\infty} \sum_{m_1=-N}^{N} \sum_{m_2=-N}^{N} \sum_{m=0}^{1} \left[I_{j\mu m_1m_2}^{(C_m)}(z_j) + I_{j\mu m_1m_2}^{(C_m\theta)}(z_j) \right] \tag{2.10}$$

$$I_{j\mu m_1m_2}^{(h)}(z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{m_1m_2j}^{(h)}} \frac{w_{jk\nu\mu}(t_{m_1m_2j}^{(h)})\, dt_{m_1m_2j}^{(h)}}{t_{m_1m_2j}^{(h)} - z_j} \tag{2.11}$$

Заметим, что $t_{m_1m_2j}^{(h)} = (T_{m_1m_2} ht)_j$ — точка контура $\Gamma_{m_1m_2j}^{(h)}$ и что выражения (2.10) могут быть записаны в более строгой, но громоздкой форме, которая использовалась в работе [7], посвященной изучению обобщенных симметричных задач для изотропных пластинок. Опираясь на свойства (2.9) и очевидные соотношения типа

$$t^{(C_m)}_{m_1m_2j} = (-1)^m t_j + A_{m_1m_2j}, \qquad t^{(C_m\theta)}_{m_1m_2j} = (-1)^m \overline{t_{3-j}} + A_{m_1m_2j} \tag{2.12}$$

$$A_{m_1m_2j} = m_1a_{11} + m_2a_{21} + \mu_j(m_1a_{12} + m_2a_{22})$$

преобразуем интегралы (2.11) следующим образом:

$$\begin{aligned} I^{(C_m)}_{j\rho m_1m_2}(z_j) &= \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu j\rho}(T_{m_1m_2}C_m)\, W_j^{(\rho)}[(-1)^m(z_j - A_{m_1m_2j})] \\ I^{(C_m\theta)}_{j\rho m_1m_2}(z_j) &= \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu j\rho}(T_{m_1m_2}C_m\theta)\, \overline{W^{(\rho)}_{3-j}}[(-1)^m(z_j - A_{m_1m_2j})] \end{aligned} \tag{2.13}$$

где $W_j^{(\rho)}(z_j)$ ($\rho = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}$) — функции, голоморфные на внешности контура Γ_j ($j = 1, 2$), а $\overline{W_j^{(\rho)}}(z_j)$ — функции, комплексно-сопряженные им.

Поскольку многозначные составляющие комплексных потенциалов известны заранее, то с помощью непосредственной проверки можно убедиться в том, что и они представимы в виде (2.10), (2.13), если под $W_j^{(\rho)}(z_j)$ понимать некоторые функции, аналитические на внешности контура Γ_j ($j = 1, 2$).

Условимся, что для каждого контура $\Gamma^{(s)}$ ($s = 1, 2, \ldots, n$) будет единственным образом зафиксирован элемент $g_s \in G$, который переводит контур Γ в $\Gamma^{(s)}$. Тогда при записи комплексных потенциалов $w_{jk\nu}(z_j)$ в конкретной задаче следует сохранить только те слагаемые из выражения (2.10), которые отвечают элементам g_s ($s = 1, 2, \ldots, n$). Данное замечание позволяет использовать выражение (2.10) для любой дискретной группы симметрии и для произвольного расположения основного контура.

3. Итак, пространство решений системы (1.3) в обобщенной симметричной задаче существенно уже, чем в общем случае. Построение искомых комплексных потенциалов сводится к нахождению функций $W_j^{(\rho)}(z_j)$ ($\rho = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}$), аналитических на внешности контура Γ_j ($j = 1, 2$). Для этого достаточно воспользоваться системой, состоящей только из тех граничных условий, которые возникают на основном контуре при действии каждой из нагрузок $Q_{k\nu}$.

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} r_{jp} w'_{jk\nu\mu}(t_j) = f_{p\mu}(t) \quad (p = 1, 2;\ \mu = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}) \tag{3.1}$$

Граничные условия на остальных контурах удовлетворяются автоматически.

С математической точки зрения формулы (2.10) и (2.13) дают описание подпространства функций, инвариантного относительно оператора разрешающей системы (1.3), а выражения (3.1) являются записью сужения этого оператора в указанном инвариантном подпространстве.

Отметим два обстоятельства, характеризующие относительную простоту обобщенной симметричной задачи. Во-первых, порядок разрешающей системы (3.1), равный $2m_{\nu}$, весьма мал. Во-вторых, ее решение можно осуществить любым методом, пригодным для обычной симметричной задачи.

Сказанное позволяет рекомендовать следующий подход к исследованию несимметричного напряженно-деформированного состояния ортотропной пластинки с группой G симметрии. С помощью результатов прикладной теории представлений [4, 5] заданную несимметричную нагрузку следует разложить на составляющие, преобразующиеся по неприводимым представлениям группы G, и, пользуясь принципом суперпозиции, перейти от исходного исследования к конечному числу обобщенных симметричных задач. Для каждой из них нужно записать комплексные потенциалы в форме (2.10) и найти искомые функции $W^{(\nu)}(z_j)$ из системы (3.1). Эффективность предлагаемого подхода обусловлена высокой алгоритмичностью и простотой решения обобщенных симметричных задач.

Одесский инженерно-
строительный институт

Поступила 28 XI 1979

Մ. Լ. ԲՈՒՐԻՇԿԻՆ

ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԽԻՏ ՊԵՐՖՈՐԱՑՎԱԾ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՍԱԼԻ ԾՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում առաջարկվում է G սիմետրիայի դիսկրետ խմբով սալի լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակի հետազոտման էֆֆեկտիվ մոտեցում։ Ոչ սիմետրիկ բեռը բաշխվում է բաղադրիչների, որոնք ձևափոխվում են խմբի չբերվող ներկայացումներով։ Դա թույլ է տալիս վերադրման հիման վրա անցնել անկախ ընդհանրացված սիմետրիկ խնդիրների լուծման։

Նրանցից յուրաքանչյուրի համար Ս. Գ. Լեխնիցկու ֆունկցիան գրվում է (2.10) տեսքով և (2.13) համասարման օգնությամբ արտահայտվում են $W_j^{(\nu)}(z_j)$ *ֆունկցիայի միջոցով, որոնք անալիտիկ են հիմնական կոնտուրի արտաքին մասում, և որոշվում են (3.1) սիստեմով։*

ON FLEXURE OF THE SYMMETRICAL DENSELY PERFORATED ORTHOTROPIC PLATE

M. L. BURISHKIN

Summary

A rational method for investigation of non-symmetrical stress-strained state of the orthotropic plate with the group G symmetry is proposed.

This method consists of using the applied representation theory and the principle of superposition for transition to solution of independent generalized symmetrical problems.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее применение в физике. М., ГИФМЛ, 1958.
2. *Космодамианский А. С.* Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. К., Изд. «Вища школа», 1976.
3. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
4. *Бурышкин М. Л.* Разложения вектор-функций, определенных на области с конечной группой симметрии, в усеченном случае. Докл. АН Арм.ССР, 1976, т. 63, № 4.
5. *Бурышкин М. Л.* Розклад вектор-функції, визначеної в області з просторовою групою симетрії, в трансляційно-усіченому випадку. ДАН УССР, 1975, № 7.
6. *Бурышкин М. Л.* О применении теории представлений дискретных групп в задачах равновесия и малых колебаний упруго-линейных систем. Депонированная рукопись, ВИНИТИ, № 208-75 от 21.01.1975 г.
7. *Бурышкин М. Л.* О функциях Колосова—Мусхелишвили в обобщенных симметричных задачах теории упругости. ДАН УССР, серия А, 1979, № 5.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 4, 1980 Механика

Н. Х. АРУТЮНЯН, В. Б. КОЛМАНОВСКИЙ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНО ВЯЗКО-УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

На конечном и бесконечном интервалах времени исследуется устойчивость стержней, свойства которых описываются уравнениями теории вязкоупругости неоднородно стареющих сред [1, 2]. Используя метод, развитый в статье [3], устанавливаются условия устойчивости для стержней, находящихся под действием распределенной продольной нагрузки. Примером такого вида нагрузки является собственный вес стержня.

Сформулированная ниже постановка задачи устойчивости на конечном интервале времени исходит из определений устойчивости движения динамических систем, берущих свое начало с работы Н. Г. Четаева [4].

Отметим, что в [3] изучались такие типы нагрузок и способы закрепления концов стержня, когда в соответствующей упругой задаче дифференциальное уравнение для прогибов имело лишь второй порядок.

В настоящей работе условия устойчивости устанавливаются для ситуации, когда в соответствующей упругой задаче дифференциальное уравнение для прогибов стержня имеет, вообще говоря, порядок выше второго. При этом условия устойчивости получаются в результате изучения счетной системы уравнений, определяющей коэффициенты Фурье в разложении прогиба в ряд по собственным функциям упругой задачи.

Обзор и библиография работ, посвященных проблеме устойчивости вязкоупругих стержней, имеются в [5—8].

§ 1. *Устойчивость под действием собственного веса на бесконечном интервале времени.* Рассмотрим неоднородно-стареющий стержень длины l, расположенный в недеформированном состоянии вдоль оси ox. Нижний конец стержня ($x = l$) заделан, а верхний свободен (фиг. 1). Обозначим через $y(t, x)$ прогиб стержня в точке x в момент времени $t \geq t_0$, отсчитываемый от оси ox. Начальную погибь при $t = t_0 - 0$ обозначим через $y_0(x)$. Функция $y_0(x)$ задана и имеет три непрерывных производных при $x \in [0, l]$. Стержень называется устойчивым, если выполнено условие

$$\sup_{t > t_0,\ x \in [0, l]} |y(t, x)| < \infty \tag{1.1}$$

то есть прогиб равномерно ограничен.

Уравнение для прогиба $y(t, x)$ стержня из неоднородно вязко-упругого материала имеет вид [3].

$$
L_1(y, M) = \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2} + \frac{1}{EJ} M(t, x) -
$$

$$
- \frac{1}{J} \int_{t_0}^{t} M(\tau, x) \frac{\partial}{\partial \tau} [\varphi(\tau + \rho(x))(1 - e^{-\gamma(t-\tau)})] d\tau = \frac{d^2 y_0(x)}{dx^2} \tag{1.2}
$$

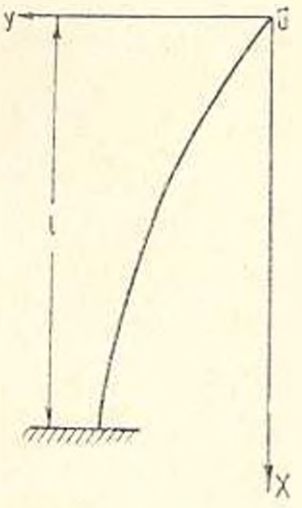
Здесь $M(t, x)$ — изгибающий момент в сечении x; положительная непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(\tau)$ определяет процесс старения материала. Предполагается, что

$$
\lim_{\tau \to \infty} \varphi(\tau) = C_0, \quad \lim_{\tau \to \infty} \varphi(\tau) = 0
$$

Постоянная $C_0 > 0$ характеризует меру ползучести материала стержня в его старом возрасте. Функция $\rho(x)$ называется функцией неоднородного старения. Она определяет закон изменения возраста материала по длине стержня. В этом параграфе считается, что функция $\rho(x)$ ограничена, кусочно непрерывно дифференцируема и имеет конечное число точек разрыва. Постоянная $\gamma > 0$ задана, E — модуль упруго-мгновенной деформации, J — момент инерции стержня относительно продольной оси. Поперечные сечения стержня одинаковы и одинаково ориентированы. Граничные условия имеют вид

$$
y(t, 0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 y(t, 0)}{\partial x^2} = 0
$$

$$
\frac{\partial y(t, l)}{\partial x} = 0 \tag{1.3}
$$



Фиг. 1.

Пусть g — постоянная продольная нагрузка (в частности, собственный вес стержня на единицу его длины). Тогда изгибающий момент $M(t, x)$ в сечении x равен

$$
M(t, x) = g \int_0^x (y(t, x) - y(t, z)) dz \tag{1.4}
$$

Из (1.2) с помощью двукратного дифференцирования по t получим

$$
L_2(y, M) = \frac{\partial^4 y(t, x)}{\partial x^2 \partial t^2} + \gamma \frac{\partial^3 y(t, x)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{EJ} \frac{\partial^2 M(t, x)}{\partial t^2} +
$$

$$
+ \frac{\gamma}{EJ} \frac{\partial M(t, x)}{\partial t} [1 + E\varphi(t + \rho(x))] = 0 \tag{1.5}
$$

Начальные условия (то есть прогиб $y(t_0, x)$ и производная $\partial y(t, x)/\partial t$

при $t = t_0$) для уравнения (1.5) вытекают из (1.3), (1.4) и соотношений

$$\frac{\partial^2 y(t_0, x)}{\partial x^2} + \frac{1}{EJ} M(t_0, x) = \frac{d^2 y_0(x)}{dx^2} \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial^3 y(t_0, x)}{dx^2 \partial t} + \frac{1}{EJ} \frac{\partial M(t_0, x)}{\partial t} = -\frac{\gamma}{J} \varphi(t_0 + \rho(x)) M(t_0, x) \tag{1.7}$$

Обозначим через $\psi_n(x)$ последовательность собственных функций, а через λ_n — соответствующую последовательность собственных значений краевой задачи

$$\frac{d^2\psi_n(x)}{dx^2} + \lambda_n x \psi_n(x) = 0$$
$$\psi_n(l) = 0, \qquad \frac{d\psi_n(0)}{dx} = 0 \tag{1.8}$$

Разложим производную $\frac{\partial y(t, x)}{\partial x}$ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по ортонормированным в обобщенном смысле [9] функциям $\psi_n(x)$*

$$\frac{\partial y(t, x)}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \psi_n(x) \tag{1.9}$$

$$A_n(t) = \int_0^l \frac{\partial y(t, x)}{\partial x} \psi_n(x)\, x dx \tag{1.10}$$

$$\int_0^l \psi_n(x) \psi_m(x)\, x dx = \delta_{mn} \tag{1.11}$$

где δ_{mn} — символ Кронекера.

Подставим (1.9) в (1.5), продифференцируем обе части полученного по x, далее умножим на $\psi_m(x)$ и проинтегрируем по x в пределах от нуля до l.

В результате получим следующую систему дифференциальных уравнений для определения коэффициентов $A_n(t)$ в разложении (1.9)

$$(\dot{A}_n + \gamma A_n) \mu_n + E\gamma C_0 \dot{A}_n + \gamma E \sum_{m=0}^{\infty} A_m(t) \beta_{mn}(t) = 0$$
$$\mu_n = 1 - \frac{EJ}{g} \lambda_n \tag{1.12}$$

Здесь положено

---

* Возможность разложения (1.9) и правомерность почленного дифференцирования этого ряда нетрудно установить подобно [3].

$$\bar{\beta}_{mn} = \int_0^l x\psi_m(x)\psi_n(x)\varphi(t+\rho(x))\,dx +$$

$$+\int_0^l \psi_n(x)\left|\int_0^x dz\int_z^l \psi_m(\xi)\,d\xi\right| d_x\varphi(t+\rho(x)) \tag{1.13}$$

$$\tilde{\beta}_{mn} = \bar{\beta}_{mn} - C_0\delta_{mn}$$

Последний интеграл в (1.13) понимается в смысле Стильтьеса.

Запишем начальные условия для системы (1.12). Для этого продифференцируем (1.6) и (1.7) по x, подставим в полученное (1.9) и проинтегрируем в пределах от нуля до l. С учетом (1.10) получаем

$$A_n(t_0) = -A_n^0\lambda_n\frac{EJ}{g}\mu_n^{-1}$$

$$A_n^0 = \int_0^l \frac{dy_0(x)}{dx}\psi_n(x)\,x\,dx \tag{1.14}$$

$$\dot{A}_n(t_0) = -E\gamma\mu_n^{-1}\sum_{m=0}^{\infty} A_m(t_0)\bar{\beta}_{mn}(t_0) \tag{1.15}$$

Потребуем, чтобы было справедливо неравенство

$$g(1+EC_0) < EJ\lambda_0 \tag{1.16}$$

Здесь через λ_0 обозначено минимальное собственное значение краевой задачи (1.8), равное 7.8373 l^{-3}. Собственное значение λ_n краевой задачи (1.8) определяется уравнением

$$J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda_n l^3}\right) = 0$$

где $J_{-1/3}$ — функция Бесселя первого ряда порядка $-1/3$ (см., например, [10] § 64).

Используя представление функции Бесселя для больших значений аргумента, заключаем, что имеет место асимптотическая формула

$$\lambda_n \simeq C_1 n^2, \quad n \to \infty \tag{1.17}$$

где C_1 — некоторая положительная постоянная.

Неравенство (1.16) будет выполнено, если длина вязко-упругого стержня l удовлетворяет условию

$$l < 1.9863\sqrt[3]{\frac{EJ}{g(1+EC_0)}} \tag{1.18}$$

Назовем длину l, равную правой части (1.18), критической длиной вязко-упругого стержня при длительном действии собственного веса

$$l_{кр} = 1.9863 \sqrt[3]{\frac{EJ}{g(1+EC_0)}} \qquad (1.19)$$

Методом, развитым в [3], можно показать, что из (1.16) или (1.18) следует (1.1), то есть устойчивость неоднородно вязко-упругого стержня под действием собственного веса на бесконечном интервале времени.

При этом неравенства (1.16) или (1.18) являются не только достаточными, но и необходимыми условиями устойчивости для таких стержней, то есть, если

$$1.9863 \sqrt[3]{\frac{EJ}{g(1+EC_0)}} < l < 1.9863 \sqrt[3]{\frac{EJ}{g}} \qquad (1.20)$$

то стержень неустойчив, так как неравенство (1.1) в этом случае нарушается.

Таким образом, для рассматриваемой здесь задачи критическая длина вязко-упругого стержня $l_{кр}$, определяемая формулой (1.19), оказывается независящей от функции $\rho(x)$, характеризующей неоднородность старения материала в вязко-упругом стержне. Отметим, что это не имеет места при рассмотрении устойчивости на конечном интервале. В этом случае условия устойчивости для вязко-упругого стержня существенно зависят от функции $\rho(x)$.

§ 2. *Устойчивость под действием собственного веса на конечном интервале времени.*

1°. Возможны различные постановки задачи устойчивости на конечном интервале времени.

Одна из них состоит в определении ограничений на начальную погибь, при выполнении которых на заданном фиксированном интервале времени $[t_0, T]$ прогиб не превосходит предельно допустимого значения y^*, то есть справедливо неравенство

$$\max_{0 \leq x \leq l} \max_{t_0 \leq t \leq T} |y(t, x)| \leq y^* \qquad (2.1)$$

Приведем некоторые оценки, представляющие собой достаточные условия справедливости неравенства (2.1). Ясно, что для справедливости (2.1) достаточно наложить такие ограничения, при выполнении которых будет

$$\left| \int_{t_0}^{t} \frac{\partial y(t, s)}{\partial s} ds \right| \leq y^*$$

$$t_0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq l \qquad (2.2)$$

Оценим подынтегральное выражение в (2.2) через исходные данные задачи, то есть начальную погибь, параметры T, l, упругие и реологические характеристики материала стержня.

Обозначим через $G(x, \xi)$ функцию Грина задачи (1.8) при $\lambda_n = g(EJ)^{-1}$, существующую ввиду предположения (1.16). Продифференцируем далее обе части (1.2) по x. С учетом (1.4) убеждаемся в справедливости следующего представления для производной $\partial y(t, x)/\partial x$

$$\frac{\partial y(t, x)}{\partial x} = \int_0^l G(x, \xi) \frac{d^2 y_0(\xi)}{d\xi^2} d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\gamma} \int_0^l G(x, \xi) d\xi \int_{t_0}^t M(\tau, \xi) \frac{\partial}{\partial \tau} [\varphi(\tau + \rho(\xi))(1 - e^{-\gamma(t-\tau)})] d\tau =$$

$$= Q_0(x) + \frac{1}{\gamma} Q_1(x, t) \tag{2.3}$$

Исследуем далее подробно функцию $Q_1(x, t)$ в формуле (2.3). Заметим, что $M(\tau, 0) = 0$ в силу (1.4). Кроме того, ввиду самосопряженности красвой задачи (1.8) функция Грина G симметрична, то есть $G(x, \xi) = G(\xi, x)$. Значит, $G(x, l) = 0$. Поэтому, интегрируя по частям по ξ и τ, имеем

$$Q_1(x, t) = \int_0^l G(x, \xi) d\xi \int_{t_0}^t M(\tau, \xi) \frac{\partial}{\partial \tau} [\varphi(\tau + \rho(\xi))(1 - e^{-\gamma(t-\tau)})] d\tau =$$

$$= -\int_0^l (d_\xi G(x, \xi)) \int_{t_0}^t M(\tau, \xi) \frac{\partial}{\partial \tau} [\varphi(\tau + \rho(\xi))(1 - e^{-\gamma(t-\tau)})] d\tau =$$

$$= \int_0^l M(t_0, \xi) \varphi(t_0 + \rho(\xi))(1 - e^{-\gamma(t-t_0)}) d_\xi G(x, \xi) +$$

$$+ \int_0^l (d_\xi G(x, \xi)) \int_{t_0}^t \varphi(\tau + \rho(\xi))(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}) \frac{\partial M(\tau, \xi)}{\partial \tau} d\tau \tag{2.4}$$

Для оценки $M(t_0, x)$ положим $t = t_0$ в (2.3). На основании (1.3) имеем

$$y(t_0, x) = \int_0^x \frac{\partial y(t_0, \xi)}{\partial \xi} d\xi = \int_0^x d\xi_1 \int_0^l G(\xi_1, \xi) \frac{d^2 y_0(\xi)}{d\xi^2} d\xi \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в (1.4), получаем интересующее нас выражение для $M(t_0, x)$. Для оценки второго слагаемого в (2.4) введем в рассмотрение скалярную функцию $V(t)$, равную

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2(t)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial M(\tau, \xi)}{\partial \tau} = \int\limits_0^{\xi} \frac{\partial^2 M(\tau, z)}{\partial \tau \partial z}\, dz = g \int\limits_0^{\xi} z \frac{\partial^2 y(\tau, z)}{\partial \tau \partial z}\, dz$$

Поэтому, используя неравенство Коши—Буняковского и равенство Парсеваля, получаем

$$\left| \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau + \rho(\xi))(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}) \frac{\partial M(\tau, \xi)}{\partial \tau}\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_0^{l} z \left| \frac{\partial^2 y(\tau, z)}{\partial \tau \partial z} \right| dz \leqslant C_3 \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \left[\int\limits_0^{l} z \left| \frac{\partial^2 y(\tau, z)}{\partial \tau \partial z} \right|^2 dz \right]^{1/2} =$$

$$= C_3 \int\limits_{t_0}^{t} V(\tau)\, d\tau \qquad (2.6)$$

В (2.6) положено

$$C_2 = g \max_{t,\, x} \varphi(t + \rho(x)), \quad C_3 = \frac{1}{2} C_2 l^2$$

Далее, с учетом (1.12) имеем

$$\dot{V}(t) + 2\gamma(1 + EC_0) V(t) = -2\gamma E \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \mu_n^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} A_m(t) \beta_{mn}(t) = Q(t) \qquad (2.7)$$

Подобно выводу соотношения (1.19) из [3] можно показать, что

$$|Q(t)| \leqslant V(t) \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mu_n^{-2} \beta_{mn}^2(t) \right|^{1/2} \qquad (2.8)$$

Интегрируя по частям в (1.13), с учетом граничных условий (1.8), получаем, что

$$\beta_{mn}(t) = -\int\limits_0^{l} \varphi(t + \rho(x))\,(d\psi_n(x)) \int\limits_0^{x} x_1 \psi_m(x_1)\, dx_1 =$$

$$= -\int\limits_0^{l} x \psi_m(x)\, dx \int\limits_x^{l} \varphi(t + \rho(x_1))\, d\psi_n(x_1)$$

Отсюда и из равенства Парсеваля вытекает неравенство

$$\sum_{m=0}^{\infty} \beta_{mn}^2(t) = \int\limits_0^{l} x\, dx \left(\int\limits_x^{l} (\varphi(t + \rho(x_1)) - C_0)\, d\psi_n(x_1) \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \int\limits_0^{l} \left| \frac{d\psi_n(x)}{dx} \right|^2 dx \qquad (2.9)$$

$$\varphi_1(t) = \max_{0\le x\le l} |\varphi(t - \rho(x)) - C_0|^2, \qquad \frac{l^2}{2} = C_1$$

Для оценки интеграла в правой части (2.9) умножим обе части (1.8) на $\varphi_n(x)$ и проинтегрируем по x в пределах от нуля до l. Имеем

$$\int_0^l \varphi_n(x)\frac{d^2\varphi_n(x)}{dx^2}\,dx = \varphi_n(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\Big|_0^l - \int_0^l \left|\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\right|^2 dx = \lambda_n$$

Следовательно,

$$\int_0^l \left|\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\right|^2 dx = \lambda_n \tag{2.10}$$

Подставляя (2.9), (2.10) в (2.8), получаем

$$Q \le V(t)\,\zeta(t), \qquad \zeta(t) = \left|C_2\varphi_1(t)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\mu_n^{-2}\right|^{1/2} \tag{2.11}$$

Отметим, что ряд в (2.11) сходится на основании асимптотической формулы (1.17) и требования (1.16).

Из (2.7), (2.11) вытекает, что

$$\dot V(t) \le (-2\gamma(1 + kC_0) + \zeta(t))\,V(t) = \zeta_1(t)\,V(t)$$

Значит,

$$V(t) \le V(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\zeta_1(s)\,ds\right) \tag{2.12}$$

Оценим, наконец, $V(t_0)$. Ввиду (1.14) и равенства Парсеваля имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^2(t_0) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n^0)^2\left(\lambda_n\frac{EJ}{g}\mu_n^{-1}\right)^2 \le$$

$$\le \max_n\left(\lambda_n\frac{EJ}{g}\mu_n^{-1}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}(A_n^0)^2 = C\int_0^l x\left(\frac{dy_0(x)}{dx}\right)^2 dx$$

Кроме того, на основании (2.9), (2.10) будет

$$\sum_{m=0}^{\infty}\overline{\varphi^2_{nm}}(t_0) \le C_2\lambda_n\max_{0\le x\le l}|\varphi(t_0 - \rho(x))|^2 = \lambda_n\varphi_2(t_0)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} V(t_0) - \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t_0)^2 &\le E^2\gamma^2\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}A_k^2(t_0)\sum_{m=0}^{\infty}\overline{\varphi^2_{nm}}(t_0) \le \\ &\le E^2\gamma^2\lambda_n\varphi_2(t_0)\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n^{-2}C_2\int_0^l x\left(\frac{dy_0(x)}{dx}\right)^2 dx \end{aligned} \tag{2.13}$$

Оценка функции $Q_1(x, t)$ через исходные данные задачи установлена. Эта оценка дается выражением (2.4), в котором $M(t_0, x)$ определяется соотношениями (1.4), (2.5), а функция V оценена с помощью (2.12), (2.13). Таким образом, ввиду (2.3) оценена через исходные данные задачи и производная $\partial y(t, x)/\partial x$. С учетом (2.2) окончательно заключаем, что если параметры задачи таковы, что

$$\int_x^l \left| Q_0(s) + \frac{1}{J} Q_1(s, t) \right| ds \leqslant y^*, \qquad \begin{matrix} t_0 \leqslant t \leqslant T \\ 0 \leqslant x \leqslant l \end{matrix}$$

то имеет место устойчивость вязко-упругого стержня на конечном интервале времени.

2°. Другая постановка задачи устойчивости на конечном интервале состоит в определении первого момента времени t_1 (именуемого критическим), в который максимальное значение прогиба достигнет предельно допустимой величины y^*, то есть

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant l} |y(t_1, x)| = y^*$$

Приведем одну оценку снизу величины t_1. Обозначим через $\varkappa_1(t)$ функцию

$$\varkappa_1(t) = \int_0^l \left[\left| \int_0^l G(x, \xi) \frac{d^2 y_0(\xi)}{d\xi} d\xi \right| + \frac{1}{J} \int_0^l \left| M(t_0, \xi) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \varphi(t_0 + \rho(\xi))(1 - e^{-\gamma(t-t_0)}) d_\xi G(x, \xi) \right| \right] dx$$

Здесь $M(t_0, x)$ дается выражениями (2.5), (1.4). Обозначим далее через $\varkappa_2(t)$ функцию

$$\varkappa_2(t) = C_{\frac{3}{J}} \int_0^l dx \int_0^l | d\, G(x, \xi) | V(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \psi_1(s) ds \right)$$

где $V(t_0)$ оценена в (2.13). Функции $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ монотонно не убывают. Кроме того,

$$|y(t, x)| \leqslant \varkappa_1(t) + \varkappa_2(t)$$

Поэтому, если существует при $t \geqslant t_0$ корень $\bar{t}_1$ уравнения

$$\varkappa_1(t) + \varkappa_2(t) = y^*, \quad t \geqslant t_0$$

то критическое время t_1 удовлетворяет оценке $t_1 \geqslant \bar{t}_1$. При этом на интервале времени $[t_0, \bar{t}_1]$ прогиб не превосходит предельно допустимого значения y^*.

§ 3. Сформулируем в этом параграфе условия устойчивости вязко-упругих стержней для иных ситуаций. Обоснование этих условий получается с помощью модификации рассуждений настоящей работы. По этой причине доказательства не приводятся, а дается лишь постановка задачи и результат. Устойчивость всюду понимается в смысле справедливости неравенства (1.1). Уравнение для прогибов имеет вид (1.2). В каждом конкретном случае меняются лишь граничные условия (в зависимости от вида закрепления концов стержня) и уравнения для изгибающего момента.

1) Рассмотрим подобно § 1 вязко-упругий стержень с защемленным нижним концом при подвижной заделке верхнего конца (см. [10] стр. 282). Граничные условия для прогиба имеют вид

$$\frac{\partial y(t,0)}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial^3 y(t,0)}{\partial x^3}=0, \quad \frac{\partial y(t,l)}{\partial x}=0$$

Стержень находится под действием собственного веса с постоянной продольной нагрузкой g. Условие устойчивости имеет вид (1.16) при $\lambda_0 = 18.96\, l^{-3}$.

2) Вновь рассмотрим стержень под действием собственного веса при подвижной заделке верхнего конца и шарнирном опирании нижнего. Граничные условия даются соотношениями

$$\frac{\partial y(t,0)}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial^2 y(t,0)}{\partial x^2}=0, \quad \frac{\partial^2 y(t,l)}{\partial x^2}=0$$

Условие устойчивости дается формулой (1.16) при $\lambda_0 = 3.524\, l^{-3}$.

3) В рассмотренных выше ситуациях возмущение положения равновесия было вызвано начальной погибью стержня. Другим источником возмущений может служить боковая нагрузка. Однако, если боковая нагрузка стационарна (то есть не зависит от времени, а может зависеть лишь от x), то условия устойчивости нетрудно получить из установленных ранее. Разъясним сказанное на примере стержня, изученного в § 1. Наряду с предположениями из § 1 считается, что на стержень действует поперечная нагрузка $q(x)$, где $q(x)$ — ограниченная кусочно-непрерывная функция. Устойчивость, по-прежнему, понимается в смысле выполнения неравенства (1.1). Уравнение для прогиба имеет вид (1.2), в котором вместо M надлежит написать сумму $M + M_1$. Здесь M дается формулой (1.4), а M_1 определяется соотношениями

$$\frac{\partial^2 M_1(x)}{\partial x^2} = -q(x)$$

$$M_1(l) = -\int_0^l x q(x)\, dx, \quad \frac{\partial M_1(l)}{\partial x} = \int_0^l q(x)\, dx \tag{3.1}$$

Из формул (3.1), интегрируя по частям в (1.2), заключаем, что

$$L_1(y,\ M) = \frac{d^2 y_0(x)}{dx^2} - \frac{1}{JE} M_1(x) - \tag{3.2}$$
$$- \frac{1}{J} M_1(x)\,\varphi(t_0 + \rho(x))\,(1 - e^{-\gamma(t-t_0)})$$

Здесь $L_1(y,\ M)$ определено уравнением (1.2). В результате двукратного дифференцирования по t обеих частей соотношения (3.2), подобно выводу (1.5), получим

$$L_2(y,\ M) = \frac{\gamma^2}{J} M_1(x)\,\varphi(t_0 + \rho(x))\,e^{-\gamma(t-t_0)} \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) отличается от (1.5) наличием правой части, стремящейся к нулю при $t \to \infty$. Используя этот факт, можно показать, что решение задачи (3.3), (1.6), (1.7) удовлетворяет оценке (1.1) при выполнении условия (1.16). Таким образом, и при наличии поперечной нагрузки требование (1.1) является достаточным условием устойчивости.

Институт механики АН Армянской ССР
Институт проблем механики АН СССР
Поступила 22 XII 1979

Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Վ. Բ. ԿՈԼՄԱՆՈՎՍԿԻ

ՈՉ ՀԱՄԱՍԵՌ ՄԱԾՈՒՑԻԿԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՁՈՂԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ժամանակի վերջավոր և անվերջ միջակայքերի վրա ուսումնասիրվում է այնպիսի ձողերի կայունությունը, որոնց հատկությունները նկարագրվում են անհամասեռ ծերացող միջավայրերի մածուցիկաառաձգականության տեսության հավասարումներով։

Երկայնական բաշխված բեռի ազդեցության տակ գտնվող ձողերի համար որոշվում են կայունության պայմանները։ Այդպիսի բեռի օրինակ է հանդիսանում ձողի սեփական կշիռը։

ON STABILITY OF HETEROGENEOUSLY VISCO-ELASTIC BARS

N. Ch. HARUTUNIAN, V. B. KOLMANOVSKY

Summary

The stability of bars, whose properties are described by equations in the theory of visco-elasticity of heterogeneously ageing media, is investigated over finite and infinite time intervals.

The conditions of stability are defined for the bars subjected to the action of a distributed longitudinal load. The bar's intrinsic weight is an example of a load of this kind.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно стареющих тел. Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 2.
2. *Арутюнян Н. Х.* О теории ползучести для неоднородно наследственно стареющих сред. ДАН СССР, 1976, т. 229, № 3.
3. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Об устойчивости неоднородно стареющих вязкоупругих стержней. ПММ, 1979, т. 43, вып. 4.
4. *Четаев Н. Г.* Об одной мысли Пуанкаре. Сб. науч. тр. Казанского авиационного института, 1935, № 3.
5. *Работнов Ю. Н.* Теория ползучести. В сб. «Механика в СССР за 50 лет». М., «Наука», 1972, т. 3.
6. *Шестериков С. А.* О критерии устойчивости при ползучести. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
7. *Киршин Л. М.* Устойчивость при ползучести. Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 3.
8. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. М., «Стройиздат», 1968.
9. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М., «Наука», 1968.
10. *Ржаницын А. Р.* Устойчивость равновесия упругих систем. М., «Гостехиздат», 1955.
11. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1977.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIII, № 4, 1980 Механика

С. Г. АВАГЯН, А. Г. БАГДОЕВ

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ПРОНИКАНИЯ ТЕЛА В ВЕСОМУЮ ЖИДКОСТЬ

§ 1. *Проникание тонкого тела в несжимаемую весомую жидкость*

Рассматривается задача о проникании тонкого жесткого конуса в несжимаемую жидкость со свободной поверхностью при учете влияния ускорения силы тяжести. В отсутствие силы тяжести решение задач дано для сжимаемой жидкости в [1—3]. Задача о проникании тел в грунты и металлы решалась в [2, 4].

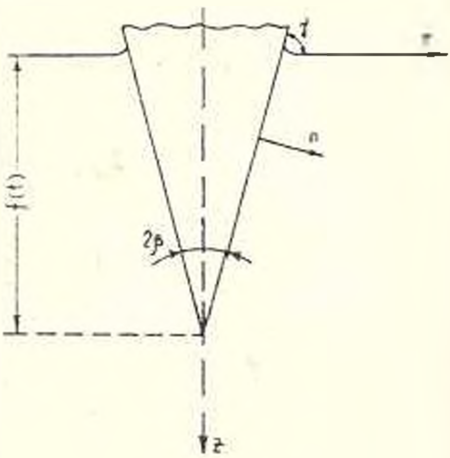
Для потенциального движения жидкости имеет место уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \tag{1.1}$$

где $\varphi=\varphi(r, z, t)$ — потенциал скорости, начало координат выбрано в точке пересечения вершины конуса с поверхностью жидкости, ось r направлена по поверхности жидкости, ось z — перпендикулярно к ней вниз. Имеем следующее граничное условие на боковой поверхности тела:

$$r=r_k;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial r}=-f'(t)\frac{\partial r_k}{\partial z} \tag{1.2}$$
$$0<z<f(t)$$

где $f(t)$ — закон движения тела, $f'(t)$ — его скорость. Начальные условия $\varphi=0$; $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$ при $t=0$.



Фиг. 1.

Уравнение Коши-Лагранжа примет вид

$$\frac{p}{\rho_0}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+gz+\frac{p_0}{\rho_0}-\frac{V^2}{2} \tag{1.3}$$

где

$$V^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2$$

Если $z=H(r, t)$ — уравнение свободной поверхности, то тогда на ней

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-gH+\frac{V^2}{2}=0$$

Продифференцировав по t и считая, что V мало, получим при $z = 0$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - g \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

кроме того

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

поэтому

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0 \tag{1.4}$$

Решение задачи ищем методом источников в сочетании с интегральными преобразованиями. В силу линейности задачи можно полагать

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \tag{1.5}$$

где φ_0 соответствует решению о движении тела в безграничной среде $-\infty < z < \infty$, а φ_1 — отражению от свободной поверхности. Подобно [2], можно искать решение в виде источников, распределенных по оси тела

$$\varphi_0 = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{f(t)} \frac{q(z_1, t)\, dz_1}{\sqrt{(z_1 - z)^2 + r^2}} \tag{1.6}$$

Учитывая соотношение для малых r [3]

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r \to 0} = \frac{1}{2\pi} \frac{q(z, t)}{r} \tag{1.7}$$

можно по (1.2) получить

$$q(z, t) = -2\pi r_k f'(t) \frac{\partial r_k}{\partial z} \tag{1.8}$$

причем для конуса

$$r_k = \beta [f(t) - z] \tag{1.9}$$

где β — угол полураствора конуса. Тогда

$$\varphi_0(r, z, t) = \frac{f'(t)}{2} \int_0^{f(t)} r_k \frac{\partial r_k}{\partial z_1} \frac{dz_1}{\sqrt{(z_1 - z)^2 + r^2}} \tag{1.10}$$

Удобно рассматривать решение для отдельных источников φ^0, где

$$\varphi = \int_0 \varphi^0 dz_1 \tag{1.11}$$

Тогда для φ_0^0 получится

$$\varphi_0^0 = \frac{f'(t)}{2} r_k \frac{\partial r_k}{\partial z_1} \frac{1}{\sqrt{(z_1 - z)^2 + r^2}} \tag{1.12}$$

Для определения φ_1 применяется метод интегральных преобразований. Согласно известному равенству

$$\int_0^\infty e^{-k(z_1 - z)} J_0(kr)\, dk = \frac{1}{\sqrt{(z_1 - z)^2 + r^2}} \tag{1.13}$$

можно полагать

$$\varphi_0^0 = \frac{f'(t)}{2} r_k \frac{\partial r_k}{\partial z_1} \int_0^\infty e^{-k(z_1 - z)} J_0(kr)\, dk \tag{1.14}$$

Отраженные возмущения φ_1^0 для задачи о точечных источниках можно искать в виде

$$\varphi_1^0 = \int_0^\infty e^{-k(z_1 + z)} J_0(kr)\, A(k, t)\, dk \tag{1.15}$$

Вводя преобразование по Лапласу по t от φ_0^0, φ_1^0, можно записать (1.14), (1.15) в виде

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_0^0} &= \overline{\frac{f'(t)}{2} r_k \frac{\partial r_k}{\partial z_1}} \int_0^\infty e^{-k(z_1 - z)} J_0(kr)\, dk \\ \overline{\varphi_1^0} &= \int_0^\infty e^{-k(z_1 + z)} J_0(kr)\, \overline{A(k, t)}\, dk \end{aligned} \tag{1.16}$$

Применяя к (1.4) преобразование Лапласа, можно получить

$$s^2 \overline{\varphi} - g \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial z} = 0; \quad z = 0 \tag{1.17}$$

причем указанное соотношение годится и для решения $\overline{\varphi^0}$ задачи о точечных источниках. Полагая еще $\overline{\varphi^0} = \overline{\varphi_0^0} + \overline{\varphi_1^0}$, получим

$$\overline{A(k, t)} = \frac{gk - s^2}{gk + s^2} \overline{\frac{f'(t)}{2} r_k \frac{\partial r_k}{\partial z_1}} \tag{1.18}$$

Для $\overline{\varphi_1^0}$ получим

$$\overline{\varphi_1^0} = \int_0^\infty e^{-k(z_1 + z)} J_0(kr) \frac{gk - s^2}{gk + s^2} \overline{\frac{f'(t)}{2} r_k \frac{\partial r_k}{\partial z_1}}\, dk \tag{1.19}$$

Обозначим значение $\overline{\varphi}_1^0$ при $g = 0$ через $\overline{\Phi}_1^0$,

$$\overline{\Phi}_1^0 = -\int_0^\infty e^{-k(z_1+z)} J_0(kr) \overline{\frac{f'(t)}{2} r_k \frac{\partial r_k}{\partial z_1}}\, dk \tag{1.20}$$

отсюда

$$\Phi_1^0 = -\frac{f'(t)}{2} r_k \frac{\partial r_k}{\partial z_1} \frac{1}{\sqrt{(z_1+z)^2+r^2}} \tag{1.20'}$$

Разложим дробь $\frac{gk-s^2}{gk+s^2}$ по степеням $\frac{gk}{s^2}$

$$\frac{gk-s^2}{gk+s^2} = 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{gk}{s^2}\right)^n$$

Для малых t $\frac{gk}{s^2} \ll 1$, поэтому мы можем для них оставить только пять членов

$$\frac{gk-s^2}{gk+s^2} = -1 + 2\frac{gk}{s^2} - 2\left(\frac{gk}{s^2}\right)^2 + 2\left(\frac{gk}{s^2}\right)^3 - 2\left(\frac{gk}{s^2}\right)^4$$

и полагать

$$\overline{\varphi}_1^0 = \int_0^\infty e^{-k(z+z_1)} J_0(kr) \frac{f'(t)}{2} r_k \frac{\partial r_k}{\partial z_1}\left[-1 + 2\frac{gk}{s^2} - 2\left(\frac{gk}{s^2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{gk}{s^2}\right)^3 - 2\left(\frac{gk}{s^2}\right)^4\right] dk = \overline{\Phi}_1^0 + \frac{2g}{s^2}\frac{\partial\overline{\Phi}_1^0}{\partial z} +$$

$$+ 2\frac{g^2}{s^4}\frac{\partial^2\overline{\Phi}_1^0}{\partial z^2} - 2\frac{g^3}{s^6}\frac{\partial^3\overline{\Phi}_1^0}{\partial z^3} + \frac{2g^4}{s^8}\frac{\partial^4\overline{\Phi}_1^0}{\partial z^4}.$$

Здесь воспользовались формулой (1.20) и тем, что дифференцирование по z интеграла соответствует умножению на $(-k)$ подынтегрального выражения. Мы нашли изображение $\overline{\varphi}_1^0$. Для нахождения φ_1^0 сделаем обратное преобразование Лапласа. Пользуемся теоремой о свертке.
Тогда

$$\varphi_1^0 = \Phi_1^0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g^n}{(2n-1)!}\int_0^{t-\frac{r_1}{v_0}}(t')^{2n-1}\frac{\partial^n\Phi_1^0(t-t', r, z)}{\partial z^n}\, dt'$$

В дальнейшем для простоты рассматривая постоянную скорость $f'(t) = v_0$, имеем

$$r_k = \beta(v_0 t - z_1); \qquad r_k \frac{\partial r_k}{\partial z_1} = -\beta^2 (v_0 t - z_1)$$

и из (1.20′)

$$\Phi_1^0(t - t', r, z) = \left(t - t' - \frac{z_1}{v_0}\right)\frac{\beta^2 v_0^2}{2}\frac{1}{R_1}$$

Из (1.12) имеем

$$\varphi_0^0 = -\frac{\beta^2 v_0^2}{2}\left(t - \frac{z_1}{v_0}\right)\frac{1}{R_0}$$

Тогда

$$\varphi^0 = \varphi_0^0 + \varphi_1^0 = -\frac{\beta^2 v_0^2}{2}\left(t - \frac{z_1}{v_0}\right)\frac{1}{R_0} + \Phi_1^0 +$$

$$+ 2g\int_0^{t-\frac{z_1}{v_0}} t'\left(t - t' - \frac{z_1}{v_0}\right)\frac{\beta^2 v_0^2}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_1}\right)\partial t' +$$

$$+ \frac{g^2}{3}\int_0^{t-\frac{z_1}{v_0}} t'^3\left(t - t' - \frac{z_1}{v_0}\right)\frac{\beta^2 v_0^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R_1}\right)dt' +$$

$$+ \frac{g^3}{60}\int_0^{t-\frac{z_1}{v_0}} t'^5\left(t - t' - \frac{z_1}{v_0}\right)\frac{\beta^2 v_0^2}{2}\frac{\partial^3}{\partial z^3}\left(\frac{1}{R_1}\right)dt' +$$

$$+ \frac{2g^4}{7!}\int_0^{t-\frac{z_1}{v_0}} t'^7\left(t - t' - \frac{z_1}{v_0}\right)\frac{\beta^2 v_0^2}{2}\frac{\partial^4}{\partial z^4}\left(\frac{1}{R_1}\right)dt'$$

Отсюда найдем

$$\frac{\partial\varphi^0}{\partial t} = -\frac{v_0^2\beta^2}{2}\frac{1}{R_0} + \frac{v_0^2\beta^2}{2}\frac{1}{R_1} + \frac{g\beta^2 v_0^2}{2}\left(t - \frac{z_1}{v_0}\right)^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_1}\right) +$$

$$+ \frac{g^2\beta^2 v_0^2}{24}\left(t - \frac{z_1}{v_0}\right)^4\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R_1}\right) + \frac{g^3\beta^2 v_0^2}{6!}\left(t - \frac{z_1}{v_0}\right)^6\frac{\partial^3}{\partial z^3}\left(\frac{1}{R_1}\right) +$$

$$+ \frac{g^4\beta^2 v_0^2}{8!}\left(t - \frac{z_1}{v_0}\right)^8\frac{\partial^4}{\partial z^4}\left(\frac{1}{R_1}\right)$$

где

$$R_0 = \sqrt{(z_1 - z)^2 + r^2}; \quad R_1 = \sqrt{(z_1 + z)^2 + r^2}$$

Имеем, что

$$\varphi = \int_0^{z} \varphi^0 dz_1$$

Следовательно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \int_0^{z} \frac{\partial\varphi^0}{\partial t} dz_1$$

Вычисляя интегралы, получим $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ для произвольных r, z, t. При вычислении $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ на теле при $r = r_k$ учитывается, что r_k мало и им можно пренебречь там, где это не приводит к особенностям. После этих упрощений для $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\beta^2 v_0^2}{2}\ln\frac{4z}{\beta^2(v_0 t - z)} + \frac{\beta^2 v_0^2}{2}\ln\frac{v_0 t + z}{z} +$$

$$+\frac{\beta^2 v_0^2}{2}\ln\frac{v_0 t + z}{z}\left|\frac{2g(v_0 t + z)}{v_0^2} + \frac{g^2(z + v_0 t)^2}{v_0^4} + \frac{g^3(z + v_0 t)^3}{3v_0^6} +\right.$$

$$\left.+\frac{g^4(z + v_0 t)^4}{12 v_0^8}\right| + \frac{\beta^2 v_0^2}{2}\left[-\frac{1}{R}\left(gt^2 + \frac{g^2 t^3}{3v_0} + \frac{g^3 t^4}{12 v_0^2} + \frac{g^4 t^5}{60 v_0^3}\right) +\right.$$

$$+\frac{1}{R^3}\left(\frac{g^3 t^4 z}{12} + \frac{g^4 t^6}{360} + \frac{g^3 t^5 z}{60\, v_0} + \frac{2g^4 t^7}{7!\, v_0} + \frac{2zg^4 t^6}{6!\, v_0^2}\right) -$$

$$-\frac{1}{R^5}\left(\frac{g^4 z^2 t^6}{120} + \frac{18 g^4 t^6 z}{8!} + \frac{48 g^4 z^2 t^7}{8!\, v_0}\right) + \frac{30\, g^4 t^8 z^3}{8!\, R^7} - \frac{2gt}{v_0} - \frac{g^2 tz}{v_0^3} -$$

$$-\frac{3g^2 t^2}{2v_0^2} - \frac{g^3 t^2(z + v_0 t)}{2v_0^4} - g^3\frac{(z + v_0 t)^3 - z^3}{9v_0^6} - \frac{25 g^4(v_0 t + z)^4}{144 v_0^8} +$$

$$\left.+\frac{g^4 z(v_0 t + z)^3}{3v_0^8} - \frac{g^4 z^4}{48 v_0^8} - \frac{g^4 z^2(v_0 t + z)^2}{4v_0^8} + \frac{g^4 z^3(v_0 t + z)}{9v_0^8}\right| \qquad (1.21)$$

$$R = \sqrt{z^2 + r^2}$$

Давление вычисляется по формуле

$$\frac{p}{\rho_0} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} + gz + \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{V^2}{2} \qquad (1.22)$$

где ρ_0 — плотность жидкости.

Сила сопротивления через давление $P = p - p_0$ найдется по формуле

$$R = \int_0^{v_0 t} P\beta 2\pi\beta (v_0 t - z)\, dz = -2\pi\rho_0\beta^2 \int_0^{v_0 t} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \right.$$

$$\left. - g\left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) z + \frac{\beta^2 v_0^2}{2} \right\} (v_0 t - z)\, dz \qquad (1.23)$$

где ρ' — плотность конуса.

Ввиду малости члена $\frac{V^2}{2}$ в нем оставлено только основное слагаемое $\frac{v_z^2}{2} = \frac{\beta^2 v_0^2}{2}$ на конусе. Вычисляя выражения в R, можно найти $R = -2\pi\rho_0\beta^2 J$, где

$$J = \frac{v_0^4 t^2 \beta^2}{4} (\ln 4\beta^2 + 1) - \frac{g v_0^3 t^3 \beta^2}{2} \left(\ln \frac{2}{\beta} - \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \right) +$$

$$+ \frac{g^2 \beta^2 v_0^2 t^4}{24} \left(\frac{1}{\beta} - 5 \ln \frac{2}{\beta} + 7.2 \right) + \frac{\beta^2 v_0 t^5 g^3}{6!} \left(\frac{6}{\beta} - 36 \ln \frac{2}{\beta} + 78 \right) +$$

$$+ \frac{\beta^2 g^4 t^6}{8!} \left(-\frac{1}{\beta^3} + \frac{56}{\beta} - 392 \ln \frac{2}{\beta} - 300 \right) - g\left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \frac{v_0^3 t^3}{6}$$

Для $g = 0$ имеем

$$R = -2\pi\rho_0\beta^4 \frac{v_0^4 t^2}{4} (1 + \ln 4\beta^2)$$

Когда $g \to \infty$

$$\varphi_1^0 = -\frac{\beta^2 v_0^2}{2} \left(t - \frac{z_1}{v_0} \right) \frac{1}{\sqrt{(z_1 + z)^2 + r^2}}$$

и на конусе получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\beta^2 v_0^2}{2} \left(\ln \frac{v_0 t - z + \sqrt{(v_0 t - z)^2 + r^2}}{-z + \sqrt{z^2 + r^2}} + \right.$$

$$\left. + \ln \frac{v_0 t + z + \sqrt{(v_0 t + z)^2 + r^2}}{z + \sqrt{z^2 + r^2}} \right) \approx -\frac{\beta^2 v_0^2}{2} \ln \frac{4 (v_0 t + z)}{\beta^2 (v_0 t - z)}$$

При $\rho' > \rho_0$ $R \to -\infty$, при $\rho' < \rho_0$ $R \to +\infty$, при $\rho' = \rho_0$

$$R = \pi\rho_0\beta^4 v_0^4 t^2 \left(\ln \frac{8}{\beta} - \frac{3}{2} \right)$$

Сравнение со значением при $g = 0$ показывает, что при $\beta \to 0$ R получает одинаковые значения, а при $\beta = 0.2$ значение R при $g \to \infty$ приблизительно в 6 раз больше R при $g = 0$.

Для анализа полученных результатов построим графики зависимости давления от z по (1.21), (1.22). Обозначая $\xi = \frac{z}{v_0 t}$, $\eta = \frac{gt}{v_0}$, подставляя $r = \beta(v_0 t - z)$, получим, удерживая малые порядка η^2

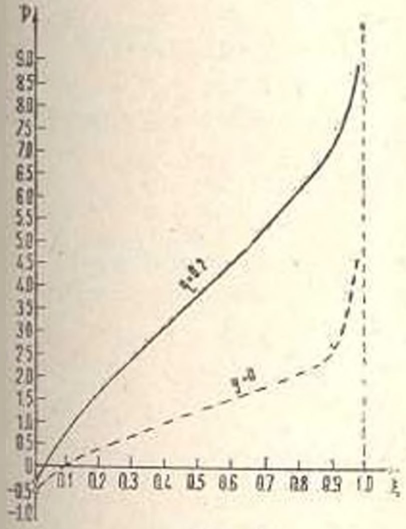
$$\frac{P}{v_0^2\beta^2} = \ln\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + \beta^2(1-\xi)^2}}{\beta\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{1}{2} -$$

$$-\frac{\eta}{2}\ln\frac{2(1+\xi)\left(\sqrt{\xi^2+\beta^2(1-\xi)^2}-\xi\right)}{\beta^2(1-\xi)^2}\Big(2 + 2\xi + \eta + 2\xi\eta + \xi^2\eta -$$

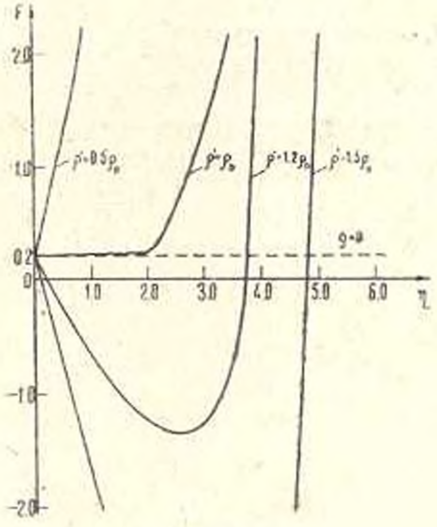
$$-\frac{\beta^2\eta(1-\xi)^2}{2}\Big) + \frac{\eta}{2}\Big(2 + \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\beta^2(1-\xi)^2}} + 2\eta -$$

$$-\frac{\eta}{12[\xi^2 + \beta^2(1-\xi)^2]} + \frac{\eta}{3\sqrt{\xi^2+\beta^2(1-\xi)^2}} - \frac{\eta(1+\xi)^2}{2} +$$

$$+\frac{\eta\xi^2}{2} + 2\xi\eta\Big) + \frac{\xi\eta}{\beta^2}. \qquad (1.24)$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Результаты расчетов по формуле (1.24) для $\frac{P}{\beta^2 v_0}$ в функции от $\xi = \frac{z}{v_0 t}$ приведены на фиг. 2, где пунктирной линией дано решение при $g = 0$ для $\frac{gt}{v_0} = \eta$. При этом выбрано $\eta = 0.2$; $\beta = 0.2$. График зависимости $\frac{R}{2\pi\rho_0\beta^4 v_0^4 t^2}$ от η дан на фиг. 3. Во всех расчетах, которые были сделаны, предполагалось, что ряд для φ_1^0 сходится. Докажем это. Заменяя $\frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_1 + z)^2 + r^2}}$ на $\frac{1}{z + r}$, получим

$$\frac{\partial\varphi_1^0}{dt}=\frac{1}{z+r}-\frac{g\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^2}{2!\,(z+r)^2}+\frac{2g^2\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^4}{4!\,(z+r)^3}-\frac{3!\,g^3\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^6}{6!\,(z+r)^4}\pm\ldots$$

Тогда получится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n g^n\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^{2n}\cdot n!}{(2n)!\,(z+r)^{n+1}}$$

который представляет знакопеременный ряд с убывающими членами, поэтому по теореме Лейбница ряд сходится. По абсолютной величине члены этого ряда меньше членов ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n g^n\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^{2n}}{n!\,(z+r)^{n+1}}$$

Дополнительный член этого ряда $|r_n|<\frac{g^{n+1}\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^{2(n+1)}}{(z+r)^{n+1}\,(n+1)!}$, что позволяет оценить точность.

Можно получить также точную формулу для решения в форме интеграла. Так как $f'(t)=v_0$ и для конуса $r_k=\beta(v_0t-z_1)$, то

$$\overline{\frac{f'(t)}{2}\,r_k\,\frac{\partial r_k}{\partial z_1}}=-\frac{\beta^2 v_0^2}{2}\int\limits_{\frac{z_1}{v_0}}^{\infty}\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)e^{-st}dt=-\frac{\beta^2 v_0^2}{2}\,e^{-\frac{sz_1}{v_0}}\,\frac{1}{s^2}$$

Тогда получится

$$\overline{\varphi}_1^0=-\int\limits_0^{\infty}e^{-k(z_1+z)}J_0(kr)\,\frac{\beta^2 v_0^2}{2}\,e^{-s\frac{z_1}{v_0}}\,\frac{1}{s^2}\,\frac{gk-s^2}{gk+s^2}\,dk$$

Вычисление вычетов в точках $s=\pm i\sqrt{gk}$, $s=0$ дает решение в виде

$$\varphi_1^0=-\frac{\beta^2 v_0^2}{2}\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)\frac{1}{\sqrt{(z_1+z)^2+r^2}}+$$

$$+\beta^2 v_0^2\int\limits_0^{\infty}e^{-k(z_1+z)}\,\frac{J_0(kr)}{\sqrt{gk}}\sin\sqrt{gk}\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)dk$$

Переходя по (1.11) к φ_1, получим $\varphi_1=\int\limits_0^{v_0t}\varphi_1^0dz_1$, откуда получим

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -\frac{\beta^2 v_0^2}{2} \ln \frac{v_0 t + z + \sqrt{(v_0 t + z)^2 + r^2}}{z + \sqrt{z^2 + r^2}} +$$

$$+ \beta^2 v_0^2 \int_0^\infty \frac{v_0 e^{-kz} J_0(kr)}{k^2 v_0^2 + gk} \left[-k v_0 e^{-kv_0 t} + k v_0 \cos \sqrt{gk}\, t + \sqrt{gk} \sin \sqrt{gk}\, t \right] dk$$

Используя асимптотическое представление функций Бесселя для больших kr, применяя метод стационарной фазы, учитывая, что первое слагаемое в скобке дает при большом t малую более высокого порядка и имея ввиду, что $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, окончательно получим выражение для $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ на свободной поверхности. Форму свободной поверхности определяем по формуле $\zeta = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=0}$.

$$\zeta = \frac{v_0 \beta^3 \sqrt{2}}{g \left(\frac{v_0^2 t^3}{4r} + tr \right)} \left(v_0 t \cos \frac{gt^2}{4r} - r \sin \frac{gt^2}{4r} \right)$$

Как видно из полученных формул, по поверхности жидкости распространяются диспергирующие волны, причем можно учесть и нелинейную постановку задачи о волнах [5—7].

§ 2. *Проникание тонкого тела в весомую жидкость, ограниченную мембраной*

В предположении, что жидкость ограничена упругой мембраной, занимающей плоскость $z = 0$, вместо (1.4) можно получить

$$-\rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) + T \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right] +$$

$$+ \rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \rho_0 g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0 \qquad (2.1)$$

где ρ — плотность, T — натяжение мембраны. При выводе (2.1) использовано уравнение колебаний мембраны

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - (p - p_0) \qquad (2.2)$$

условие на поверхности жидкость-мембрана $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ и уравнение (1.3).

При этом считается, что тонкое тело прошло сквозь мембрану. Предполагая, что до входа в мембрану скорость тела была v_0' и пользуясь формулами, дающими распределение напряжения на теле при проникании в упругую среду с образованием области течения материала вблизи тела [4], можно получить скорость v_0 тела при входе в жидкость. Соответствующее решение о движении в безграничной жидкости имеет снова вид (1.10). (1.12).

Отраженное возмущение ищется в виде (1.16), и вместо (1.18) получится

$$\bar{A} = \frac{Tk^3 + \rho_0 gk + \rho s^2 k - \rho_0 s^2}{Tk^3 + \rho_0 gk + \rho s^2 k + \rho_0 s^2} \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (1.16) и совершая обратное преобразование Лапласа по t, после вычисления вычетов в точках $s = 0$

$$s = \pm i\sqrt{\frac{Tk^3 + \rho_0 gk}{\rho k + \rho_0}}$$

получим

$$\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial t} = -\frac{\beta^2 v_0^2}{2}\frac{1}{\sqrt{(z_1+z)^2 + r^2}} + \rho_0 \beta^2 v_0^2 \int_0^\infty \frac{e^{-k(z_1+z)} J_0(kr)}{\rho k + \rho_0} \cos b\left(t - \frac{z_1}{v_0}\right) dk \tag{2.4}$$

где

$$b = \sqrt{\frac{Tk^3 + \rho_0 gk}{\rho k + \rho_0}}$$

Тогда получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\beta^2 v_0^2}{2}\ln\frac{v_0 t - z + \sqrt{(v_0 t - z)^2 + r^2}}{-z + \sqrt{z^2 + r^2}} -$$

$$-\frac{\beta^2 v_0^2}{2}\ln\frac{v_0 t + z + \sqrt{(v_0 t + z)^2 + r^2}}{z + \sqrt{z^2 + r^2}} +$$

$$+ \rho_0 \beta^2 v_0^2 \int_0^\infty \frac{v_0 e^{-kz} J_0(kr)}{(\rho k + \rho_0)(k^2 v_0^2 + b^2)}\left(kv_0 \cos bt + b \sin bt - kv_0 e^{-kv_0 t}\right) dk \tag{2.5}$$

Сила сопротивления находится по (1.23) в виде

$$R = -2\pi\rho_0\beta^2\left\{\frac{\beta^2 v_0^4 t^2}{4}\left(3 + \ln\frac{\beta^2}{64}\right) - g\left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right)\frac{v_0^3 t^3}{6} +\right.$$

$$\left. + \rho_0 \beta^2 v_0^2 \int_0^\infty \frac{v_0\left(v_0 tk + e^{-v_0 tk} - 1\right)}{k^2(\rho k + \rho_0)(k^2 v_0^2 + b^2)}\, kv_0 \cos bt + b \sin bt - kv_0 e^{-kv_0 t}\right\} dk \tag{2.6}$$

Найдем приближенное решение для малых значений параметров

$$\lambda = \frac{\rho}{\rho_0 v_0 t}; \qquad \alpha = \frac{T}{\rho_0 v_0^2 t}$$

Для этого записываем

$$\bar{A} = 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{Tk^3 + \rho_0 gk + \rho s^2 k}{\rho_0 s^2}\right)^n$$

и оставляем слагаемые с $n = 0;\ 1;\ 2$. При этом получим

$$\frac{\partial \varphi_1^0}{\partial t} = \frac{\beta^2 v_0^2}{2}\left[\frac{1}{R} + g\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{T}{\rho_0}\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^2\frac{\partial^3}{\partial z^3}\left(\frac{1}{R}\right) + \right.$$

$$+ 2\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{2T^2\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^4}{4!\rho_0^2}\frac{\partial^6}{\partial z^6}\left(\frac{1}{R}\right) +$$

$$+ \frac{2g^2}{4!}\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^4 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R}\right) + 2\frac{\rho^2}{\rho_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R}\right) +$$

$$+ \frac{2T\rho}{\rho_0^2}\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^2 \frac{\partial^4}{\partial z^4}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{Tg}{3!\rho_0}\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^4 \frac{\partial^4}{\partial z^4}\left(\frac{1}{R}\right) +$$

$$\left. + \frac{2\rho g}{\rho_0}\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R}\right)\right] \tag{2.7}$$

где $R = \sqrt{(z_1+z)^2 + r^2}$

причем $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \int\limits_0^{v_0 t} \frac{\partial \varphi_1^0}{\partial t} dz_1$. Сила сопротивления находится по формуле (1.23) и имеет во втором порядке значение

$$\frac{R}{2\pi\rho_0\beta^4 v_0^4 t^2} = -\frac{(1+\ln 4\beta^2)}{4} + \frac{\eta}{6\beta^2}\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right) +$$

$$+ \frac{\eta}{2}\left(\ln\frac{2}{\beta} - \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{2}{\beta} + 4\ln\beta - 2\right) - \lambda\ln 2\beta -$$

$$- \frac{\alpha^2}{24}\left(\frac{9}{\beta^5} + \frac{24}{\beta^4} + \frac{80}{\beta^3} + \frac{48}{\beta^2} + \frac{168}{\beta}\right) - \frac{\eta^2}{24}\left(\frac{1}{\beta} - 5\ln\frac{2}{\beta} + 7,2\right) -$$

$$- 2\lambda^2\left(\frac{1}{\beta} + \ln\beta\right) + \alpha\lambda\left(\frac{1}{\beta^3} - \frac{2}{\beta}\right) + \frac{\eta\alpha}{12}\left(\frac{1}{\beta^3} + \frac{4}{\beta^2} - \frac{12}{\beta} + 36\ln\frac{2}{\beta}\right) -$$

$$- \lambda\eta\left(\frac{1}{\beta} - 3\ln\frac{2}{\beta} + 2\right) \tag{2.8}$$

В первом порядке

$$\frac{R}{2\pi\rho_0\beta^4 v_0^4 t^2} = -\frac{(1+\ln 4\beta^2)}{4} + \frac{\eta}{6\beta^2}\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right) +$$

$$+ \frac{\eta}{2}\left(\ln\frac{2}{\beta} - \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{2}{\beta} + 4\ln\beta - 2\right) - \lambda\ln 2\beta$$

Как видно из полученных формул, оставляя члены первого порядка по η, λ, α, получим, что увеличение η и λ увеличивает R, в то время как увеличение α уменьшает силу сопротивления, кроме того, члены второго порядка имеют большие коэффициенты при $\beta \approx 0$. Поэтому сходимость рядов по η, λ, α вызывает сомнение, и (2.8) следует понимать лишь как асимптотическое разложение.

Институт механики АН Армянской ССР
Артикский индустриально-технологический техникум

Поступила 25 X 1979

Ս. Գ. ԱՎԱԳՅԱՆ, Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ԿՇԻՌ ՈՒՆԵՑՈՂ ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԵՋ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԹԱՓԱՆՑՄԱՆ ՈՐՈՇ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ամփոփում

Դիտարկվում են բարակ պինդ մարմնի կշիռ ունեցող անսեղմելի հեղուկի մեջ թափանցելու վերաբերյալ խնդիրներ։ Սկզբում լուծվել է խնդիրը ազատ մակերևույթով հեղուկի համար։ Գտնվել է ճնշման բաշխումը մարմնի վրա և դիմադրության ուժի արտահայտությունը քվադրատուրայի տեսքով։ Վերածելով ըստ $\eta = \frac{gt}{v_0}$ պարամետրի, որտեղ t-ն ժամանակն է, g-ն ծանրության ուժի արագացումն է, v_0-ն ներթափանցման արագությունն է, նշված մեծությունները ստացվել են մինչև η^2 ճշտությամբ։

Լուծվել է նաև այն խնդիրը, երբ հեղուկը ծածկված է թաղանթով։

Ցույց է տրված, որ ըստ η, λ, α պարամետրերի առաջին կարգի վերլուծության մեջ, որտեղ λ-պարամետրը բնութագրում է թաղանթի խտությունը, իսկ α-ն նրա ձգվածությունը, η-ն և λ-ն մեծացնում են, իսկ α-ն փոքրացնում է դիմադրության ուժը։

SOME PROBLEMS IN PENETRATION OF BODIES INTO HEAVY FLUID

S. G. AVAGIAN, A. G. BAGDOEV

Summary

Some problems in penetration of a thin rigid body into heavy incompressible fluid are considered. Initially the problem for a fluid of free surface is solved. The pressure distribution over the body and the value of resistance force are found in a quadrature form. The expansion into parameter $\eta = \frac{gt}{v_0}$, where t is the time, g is the acceleration of gravity, V is the penetration speed, allows to obtain the foregoing values to the accuracy of η^2. The problem of penetration into fluid bounded by an elastic membrane is also solved. It is shown that in the first order expansion into powers of η, λ, α, where parameter λ characterizes the membrane's density, and α is its tension, the presence of η and λ increases, and the presence of α decreases the resistance force.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорян С. С.* Некоторые задачи гидродинамики тонких тел. Канд. дисс., МГУ. 1956.
2. *Сагомонян А. Я.* Проникание. М., Изд. МГУ, 1974.
3. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван, Изд. АН Арм. ССР. 1961.
4. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. К., Саркисян Г. А.* Решение некоторых нестационарных задач взаимодействия тел с упругими преградами. МТТ, 1978, № 3.
5. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
6. *Багдоев А. Г.* Определение окрестности фронтов волн в пространственной задаче. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1977, т. XXX, № 6.
7. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. Новосибирск, «Наука», 1973.

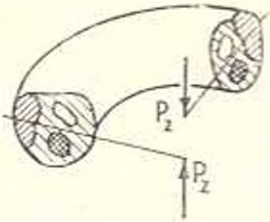
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIII, №4, 1980 Механика

П. В. ГАЛПЧЯН

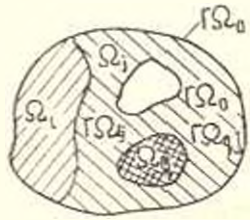
ПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ КРИВОГО СТЕРЖНЯ, СОСТАВЛЕННОГО ИЗ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Рассматривается задача о пластическом кручении кривого стержня в виде сектора кругового кольца, составленного из различных материалов. Постоянное по длине меридиональное сечение составного стержня образуется из областей Ω_i ($i = 1, 2, \ldots, N$), соответствующих различным однородным, изотропным материалам (фиг. 2). Стержень скручивается противоположными силами P_z, действующими на торцевых сечениях по оси кольца (фиг. 1). Материалы соответствующих областей Ω_i подчиняются условию изотропного упрочнения.

Кручение призматических стержней, составленных из различных материалов, в линейно-упругой постановке было рассмотрено в [1—7]. Кручение однородных, изотропных кривых стержней из упрочняющегося материала рассмотрено в [8, 9]. Достаточно полная библиография по этой области содержится в [8, 9, 12, 13].



Фиг. 1.



Фиг. 2.

В настоящей работе исследованы случаи, когда контур области образуется из координатных линий. Обобщается теорема о циркуляции деформации сдвига. Предполагается, что каждый из материалов является упруго-пластическим, причем пластическая часть деформации обладает степенным упрочнением. Исследуются условия простого нагружения для этих материалов.

Рассматриваются две задачи. В первом случае стержень состоит из нескольких слоев. Эта задача рассматривается в точной постановке. В частном случае двухслойного стержня в явном виде выводится формула для функций напряжений.

Во втором случае рассмотрены двухслойный тонкостенный стержень замкнутого профиля. Для профиля в виде кольцевого сектора получены приближенные решения и приведен численный пример.

1. *Постановка задачи.* Принимается сферическая система координат r, θ, φ, связанная с прямоугольной системой x, y, z по формулам $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$. Ось z совпадает с осью кольца. Обозначим через $\Gamma\Omega_0$ границу области всего меридионального сечения стержня Ω_0, через $\Gamma\Omega_l$ — границу области Ω_l и через $\Gamma\Omega_{lj}$ — линию раздела смежных областей Ω_l и Ω_j, причем $\Gamma\Omega_{lj}$ либо целиком лежит внутри Ω_0, либо пересекается с $\Gamma\Omega_0$ под углом, отличным от нуля. В общем случае полого составного стержня, $\Gamma\Omega_0$ состоит из нескольких замкнутых линий $\Gamma^{(k)}\Omega_0$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, m$) (фиг. 2).

Зависимости между компонентами тензоров деформаций и напряжений в Ω_l имеют вид

$$\varepsilon_{jk}^{(l)} = f_l(T_l)(\sigma_{jk}^{(l)} - \sigma^{(l)}\delta_{jk})/2G_l, \quad j, k = 1, 2, 3 \tag{1.1}$$

Здесь T_l — интенсивность касательных напряжений, $f_l(T_l)$ — функция, характеризующая упрочнение материала, $\sigma^{(l)}$ — среднее давление в точке, δ_{jk} — символ Кронекера, G_l — модуль сдвига. $f_l(T_l) \equiv 1$ соответствует линейно-упругому материалу. Упругая часть составляющих полной деформации в (1.1) будет

$$\overset{*}{\varepsilon}{}_{jk}^{l} = (\sigma_{jk}^{(l)} - \sigma^{(l)}\delta_{jk})/2G_l$$

Предполагается, что все компоненты напряжения тождественно равны нулю, за исключением $\tau_{\theta\varphi}^{(l)}$ и $\tau_{\varphi r}^{(l)}$, которые не зависят от φ. Тогда, как и при кручении однородных круговых стержней [8], получаем следующие выражения для компонентов деформаций:

$$2\gamma_{\varphi r}^{(l)} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_{\varphi 0}^{(l)}}{r}\right) + \frac{A}{r}\operatorname{ctg}\theta, \qquad 2\gamma_{\theta\varphi}^{(l)} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u_{\varphi 0}^{(l)}}{r\sin\theta}\right) - \frac{A}{r} \tag{1.2}$$

где $u_{\varphi 0}^{(l)}$ — произвольная функция r и θ, $A = \mathrm{const}$ — крутка. Соотношения (1.2) справедливы в замкнутой области Ω_l.

Для перемещений будем иметь

$$u_r^{(l)} = u_r = A\varphi\cos\theta, \qquad u_\theta^{(l)} = u_\theta = -A\varphi\sin\theta, \qquad u_\varphi^{(l)} = u_{\varphi 0}^{(l)}(r, \theta) + Br\sin\theta$$

$$B = \frac{1}{r^*}u_{\varphi 0}^{(l_*)}(r^*, \pi/2) - \frac{\partial u_{\varphi 0}^{(l_*)}(r^*, \pi/2)}{\partial r}, \qquad r^* \in [r_1, r_2]$$

где r^* и l_* — фиксированные значения соответственно r и l.

Из выражений (1.2) следует уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial\gamma_{\theta\varphi}^{(l)}}{\partial r} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\gamma_{\varphi r}^{(l)}}{r\sin\theta}\right) = \frac{A}{r^2\sin^2\theta} \tag{1.3}$$

Вводя функцию напряжений Φ

$$\tau_{\varphi r}^{(l)} = -\frac{2AG_l}{r^3\sin^2\theta}\frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial\theta}, \qquad \tau_{\theta\varphi}^{(l)} = \frac{2AG_l}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial r} \tag{1.4}$$

из (1.1) и (1.3) получим уравнения, которым должны удовлетворять функции $\Phi^{(l)}$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{f_l(T_l)}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial r}\right]+\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{f_l(T_l)}{r^2\sin^3\theta}\frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial\theta}\right]=-\frac{1}{r^2\sin^2\theta} \quad (1.5)$$

когда $(r, \theta) \in \Omega_l - \Gamma\Omega_l$

$$T_l=\frac{2AG_l}{r^2\sin^2\theta}\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial\theta}\right)^2}$$

Здесь $\Phi^{(l)}$ представляет функцию напряжений Φ в области Ω_l.

Рассматривая условия на боковой поверхности стержня, приходим к условию $\Phi = \text{const}$ на $\Gamma\Omega_0$. В случае полого составного стержня с m полостями на каждом контуре $\Gamma^{(k)}\Omega$, функция Φ принимает различные постоянные значения.

Из условия равновесия бесконечно малого элемента, находящегося в окрестности линии раздела $\Gamma\Omega_{lj}$ смежных областей Ω_l и Ω_j, имеем

$$G_l\Phi^{(l)} = G_j\Phi^{(j)} + c_{lj}, \text{ когда } (r, \theta) \in \Gamma\Omega_{lj} \quad (1.6)$$

где c_{lj} — произвольная постоянная.

Подставив выражения $\gamma_{\varphi r}^{(l)}$ и $\gamma_{\varphi\theta}^{(l)}$ из (1.1) в (1.2), получим

$$f_l(T_l)\frac{\tau_{\varphi r}^{(l)}}{G_l}=r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_{\varphi 0}^{(l)}}{r}\right)+\frac{A}{r}\operatorname{ctg}\theta$$
$$f_l(T_l)\frac{\tau_{\theta\varphi}^{(l)}}{G_l}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u_{\varphi 0}^{(l)}}{r\sin\theta}\right)-\frac{A}{r} \quad (1.7)$$

Дифференциальные соотношения (1.7) справедливы в Ω_l. Умножая первое из них на $\cos(l, \theta)$, второе на $\cos(l, r)$, вычитая результаты и используя (1.4), находим

$$-\frac{2Af_l(T_l)}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial l}=r\sin\theta\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{u_{\varphi 0}^{(l)}}{r\sin\theta}\right)+A\left(\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}\frac{dr}{ds}-\frac{d\theta}{ds}\right) \quad (1.8)$$

где l и s — нормаль и касательная к $\Gamma\Omega_{lj}$.

Аналогичное (1.8) соотношение получаем, приближаясь к линии раздела $\Gamma\Omega_{lj}$ со стороны области Ω_j. Вычитая эти соотношения и принимая во внимание непрерывность перемещения u_φ, находим условия

$$f_l(T_l)\frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial t}=f_j(T_j)\frac{\partial\Phi^{(j)}}{\partial t}, \text{ когда } (r, \theta) \in \Gamma\Omega_{lj} \quad (1.9)$$

В общем случае полого составного стержня можно принимать $\Phi = 0$ на внешнем контуре $\Gamma^{(0)}\Omega_0$. Тогда произвольные постоянные c_{lj} в (1.6) также равны нулю. Что касается значений Φ на внутренних контурах

$\Gamma^{(k)}\Omega_0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, то они определяются из уравнения, являющегося обобщением теоремы о циркуляции сдвига при кручении.

Пусть $\Omega \subset \Omega_l$. Интегрируя обе части уравнения (1.5) по области Ω и переходя к криволинейному интегралу, получим

$$\oint\limits_{\Gamma\Omega} \frac{1}{r^3 \sin^3 \theta} f_l \left(\frac{A}{r^2 \sin^2 \theta} |\operatorname{grad} \Phi^{(l)}| \right) \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial l} ds = \oint\limits_{\Gamma\Omega} \frac{d\theta}{r \sin^3 \theta} \tag{1.10}$$

где l и s — внешняя нормаль и дуга $\Gamma\Omega$. Соотношение (1.10) было получено в предположении, что $\Gamma\Omega \subset \Omega_l$, но используя условие (1.9), его можно обобщить и в случае, когда $\Gamma\Omega \subset \Omega_n$.

Таким образом, задача сводится к определению функции Φ, удовлетворяющей в соответствующих областях $\Omega_l - \Gamma\Omega_l$ уравнению (1.5), граничному условию $\Phi = \mathrm{const}$ на $\Gamma\Omega_0$ и условиям на линиях раздела $\Gamma\Omega_{lj}$ (1.6), (1.9).

Для силы P_z имеем следующее выражение:

$$P_z = 2A \sum_{l=1}^{N} G_l \oint\limits_{\Gamma\Omega_l} \frac{\Phi^{(l)} d\theta}{r \sin \theta} - \frac{\Phi^{(l)} \cos \theta dr}{r^2 \sin^2 \theta} + 2A \sum_{l=1}^{N} G_l \iint\limits_{\Omega_l} \frac{\Phi^{(l)}}{r^2 \sin^3 \theta} d\Omega_l \tag{1.11}$$

В случае кручения сплошных составных стержней будем иметь

$$P_z = 2A \sum_{l=1}^{N} G_l \iint\limits_{\Omega_l} \frac{\Phi^{(l)}}{r^2 \sin^3 \theta} d\Omega_l \tag{1.12}$$

2. *Меридиональное сечение в виде кольцевого сектора.* Рассмотрим случай кручения сплошного составного стержня, когда контур области Ω_l образуется из координатных линий. Закон упрочнения материала возьмем в виде $f_l(T_l) = 1 + \lambda_l (T_l / 2G_l)^{\nu_l}$, где λ_l и ν_l — положительные физические параметры. Такой закон упрочнения следует из общих соотношений теории пластического течения в случае простого нагружения.

Действительно, если принять в качестве дополнительного соотношения энергетическое условие изотропного упрочнения [11]

$$T = f_*(A_p) \quad \text{или} \quad A_p = \Phi_*(T) \tag{2.1}$$

где $f_*(A_p)$ и $\Phi_*(T)$ — характерные для данного материала функции, A_p — работа пластической деформации, то согласно этой теории полные приращения компонентов тензора деформации будут

$$d\varepsilon_{jk} = d\varepsilon^e_{jk} + F_*(T) s_{jk} dT \tag{2.2}$$

где $F_*(T) = \Phi'_*(T)/2T^2$, $s_{jk} = \sigma_{jk} - \sigma\delta_{jk}$.

Известно, что функции f_* и Φ_* не зависят от вида напряженного состояния и могут быть определены, например, по кривой растяжения; тогда $T = \sigma_1/\sqrt{3}$, а A_p является функцией пластического относительного удлинения ε_1^p.

Примем степенную аппроксимацию

$$\sigma_1 = A_1 (\varepsilon_1^p)^{\varkappa} \tag{2.3}$$

где A_1, $\varkappa > 0$ — постоянные.

Тогда

$$A_p = A_1 \int_0^{\varepsilon_1^p} (\varepsilon_1^p)^{\varkappa} d\varepsilon_1^p = \frac{A_1}{\varkappa + 1} (\varepsilon_1^p)^{\varkappa+1} \tag{2.4}$$

Исключая ε_1^p из (2.3) и (2.4), получаем

$$\Phi_*(T) = Z_* T^{\mu^*}, \qquad F_*(T) = \frac{1}{2} Z_* \mu^* T^{\mu^*-3} \tag{2.5}$$

где

$$Z_* = \frac{3^{\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}}{(\varkappa + 1) A_1^{1/\varkappa}}, \qquad \mu^* = \frac{\varkappa + 1}{\varkappa}$$

Подставив (2.5) в (2.2), будем иметь

$$d\varepsilon_{jk} = d\varepsilon_{jk}^e + \frac{1}{2} Z_* \mu^* T^{\mu^*-3} s_{jk} dT \tag{2.6}$$

ε_{jk} и σ_{jk} в (2.6) содержат некоторый параметр t, нулевое значение которого соответствует началу процесса нагружения. Интегрируя (2.6) по t от 0 до t, имея в виду, что $\varepsilon_{jk} = 0$ и $\sigma_{jk} = 0$, когда $t = 0$, получаем

$$\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{jk}^e + \frac{Z_* \mu^*}{2(\mu^* - 2)} \left(s_{jk} T^{\mu^*-2} - \int_0^t T^{\mu^*-2} ds_{jk} \right) \tag{2.7}$$

Допустим, что поверхностные нагрузки p_j, приложенные к телу, как и напряжения σ_{jk}, возрастают пропорционально параметру t

$$p_j = t\bar{p}_j, \quad \sigma_{jk} = t\bar{\sigma}_{jk} \tag{2.8}$$

где $\bar{p}_j$ — заданные функции только координат точек поверхности тела, $\bar{\sigma}_{jk}$ — функции только координат.

Подставив второе из (2.8) в (2.7), получим

$$\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{jk}^e + \lambda \left(\frac{T}{2G} \right)^{\nu} \frac{s_{jk}}{2G} \tag{2.9}$$

где

$$\lambda = \frac{Z_{*}\mu^{*}(2G)^{\mu^{*}-1}}{2(\mu^{*}-1)}, \quad \nu = \mu^{*} - 2$$

Пусть при $t = 1$ в теле будут напряжения $\bar{\sigma}_{jk}$ и деформации $\bar{\varepsilon}_{jk} = \bar{\varepsilon}'_{jk} + \bar{\varepsilon}''_{jk}$. Эти величины, следовательно, удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия при отсутствии массовых сил, условиям на поверхности, уравнениям (2.9) и уравнениям неразрывности деформаций, причем последним уравнениям $\bar{\varepsilon}'_{jk}$ и $\bar{\varepsilon}''_{jk}$ удовлетворяют в отдельности.

Если параметру сообщено некоторое значение t, то напряжения $\sigma_{jk} = t\bar{\sigma}_{jk}$ и соответствующие им деформации $\varepsilon_{jk} = t\bar{\varepsilon}'_{jk} + t^{\nu+1}\bar{\varepsilon}''_{jk}$, определенные по (2.9), также удовлетворяют вышеуказанным уравнениям.

Отметим, что доказанное справедливо и для сжимаемого и для несжимаемого материалов.

Таким образом, при малых деформациях и при энергетическом условии упрочнения (2.5) реализуется простое нагружение, когда внешние нагрузки p_j возрастают пропорционально параметру t.

При довольно жестких ограничениях, когда материал несжимаемый и интенсивности деформаций сдвига Γ и касательных напряжений T связаны степенной зависимостью $\Gamma = 2\lambda T^{\nu}$, условие простого нагружения указано А. А. Ильюшиным [11].

В случае неоднородного материала с упрочнениями различных видов λ_l, ν_l (2.9), простое нагружение осуществляется, когда $\nu_l = \nu$. Когда ν_l различны, то простое нагружение имеет место только внутри областей Ω_l в точках, достаточно отдаленных от поверхностей раздела смежных областей.

Решение $\Phi(r, \theta)$ при условии $\Phi = 0$ на $\Gamma\Omega_0$ ищем в виде

$$\Phi^{(l)} = \sum_{n=0}^{\infty} t_l^n \Phi_n^{(l)} \qquad (2.10)$$

Преобразуя (1.5), подставляя в него разложение (2.1) и вводя новую переменную $\omega = \theta - \pi/2$, приходим к системе рекуррентных граничных задач

$$\frac{\partial^2\Phi_n^{(l)}}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial\Phi_n^{(l)}}{\partial r} + \frac{3}{r^2}\,\mathrm{tg}\,\omega\,\frac{\partial\Phi_n^{(l)}}{\partial\omega} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_n^{(l)}}{\partial\omega^2} = -Q_n^{(l)}$$

$$\text{когда } (r, \omega) \in \Omega_l - \Gamma\Omega_l$$

$$\Phi_n^{(l)} = 0, \text{ когда } (r, \omega) \in \Gamma^{(l)}\Omega_0$$

$$G_l\lambda_l^n\Phi_n^{(l)} = G_j\lambda_j^n\Phi_n^{(j)}, \text{ когда } (r, \omega) \in \Gamma\Omega_{lj} \qquad (2.11)$$

$$\frac{\partial\Phi_0^{(l)}}{\partial t} = \frac{\partial\Phi_0^{(j)}}{\partial t}, \text{ когда } (r,\ \omega) \in \Gamma\Omega_{lj}$$

$$\lambda_l^{n+1}\left(\frac{\partial\Phi_{n+1}^{(l)}}{\partial t} + \Theta_n^{(l)}\right) = \lambda_j^{n+1}\left(\frac{\partial\Phi_{n+1}^{(j)}}{\partial t} + \Theta_n^{(j)}\right)$$

$$\text{когда } (r,\ \omega) \in \Gamma\Omega_{lj}\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

где $Q_0^{(l)} = -1$, а при $n \geqslant 1$

$$Q_n^{(l)} = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{grad} F_k^{(l)} \operatorname{grad} \Phi_{n-k-1}^{(l)} - \sum_{k=0}^{n-1} Q_{n-k-1}^{(l)} F_k^{(l)}$$

При $\nu_l = 2$

$$F_n^{(l)} = \frac{A^l}{r^2 \cos^2 \omega} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{grad} \Phi_k^{(l)} \operatorname{grad} \Phi_{n-k}^{(l)}$$

$$\Theta_n^{(l)} = \sum_{k=0}^{n} F_k^{(l)} \frac{\partial\Phi_{n-k}^{(l)}}{\partial t}$$

Здесь $\Phi_0^{(l)}$ соответствует линейно-упругому решению.

Можно показать, что задача (2.11) имеет единственное решение и тождественно удовлетворяется условие разрешимости, а соответствующая однородная задача имеет только нулевое решение.

3. *Многослойный стержень.* Рассмотрим случай, когда $\Gamma\Omega_l$ образуется из координатных линий $r = r_1$, $r = r_2\ (r_1 < r_2)$, $\omega = \alpha_{l-1}$, $\omega = \alpha_l$.

Решение задачи (2.11) ищем в виде ряда

$$\Phi_n^{(l)} = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_{nk}^{(l)}(\omega)\, R_k(r) \tag{3.1}$$

где

$$R_k(r) = \frac{\sqrt{2}\, r^{3/2}}{(\ln r_2/r_1)^{1/2}} \sin\left(s_k \ln \frac{r}{r_1}\right), \qquad s_k = \frac{k\pi}{\ln r_2/r_1}$$

— собственные функции задачи (2.11). Тогда для коэффициентов $\Psi_{nk}^{(l)}$ получаем уравнения

$$D^2\Psi_{nk}^{(l)} + 3 \operatorname{tg} \omega D\Psi_{nk}^{(l)} - \mu_k \Psi_{nk}^{(l)} = -Q_{nk}^{(l)} \tag{3.2}$$

$$\mu_k = \frac{k^2\pi^2}{\ln^2 r_2/r_1} + \frac{9}{4}, \qquad Q_{nk}^{(l)}(\omega) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\xi^2} Q_n^{(l)}(\xi,\ \omega)\, R_k(\xi)\, d\xi$$

Общий интеграл уравнения (3.2) будет

$$\Psi_{nk}^{(l)}(\omega) = E_{nk}^{(l)} \cos^2 \omega P_{\nu_k}^2 (\sin \omega) + \bar{E}_{nk}^{(l)} \cos^2 \omega Q_{\nu_k}^2 (\sin \omega) +$$

$$-\cos^2\omega Q^2_{\nu_k}(\sin\omega)\int\limits_{\alpha_{l-1}}^{\omega}\frac{Q^{(l)}_{nk}(\psi)P^2_{\nu_k}(\sin\psi)}{\cos^2\psi U_{\nu_k}(\psi)}d\psi+$$

$$+\cos^2\omega P^2_{\nu_k}(\sin\omega)\int\limits_{\alpha_{l-1}}^{\omega}\frac{Q^{(l)}_{nk}(\psi)Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)}{\cos^2\psi U_{\nu_k}(\psi)}d\psi \qquad (3.3)$$

где

$$U_{\nu_k}(\psi)=P^2_{\nu_k}(\sin\psi)Q^3_{\nu_k}(\sin\psi)-Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)P^3_{\nu_k}(\sin\psi)$$

а $P^2_{\nu_k}$, $P^3_{\nu_k}$, $Q^2_{\nu_k}$ и $Q^3_{\nu_k}$ — присоединенные сферические функции с индексом $\nu_k=-\frac{1}{2}+k\pi i\ln\frac{r_2}{r_1}$. Здесь i — мнимая единица.

Разложим $\Theta^{(l)}_n$ в ряд по $R_k(r)$

$$\Theta^{(l)}_n=\sum_{k=1}^{\infty}\Theta^{(l)}_{nk}(\omega)R_k(r),\qquad \Theta^{(l)}_{nk}(\omega)=\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{1}{\xi^3}\Theta^{(l)}_n(\xi,\omega)R_k(\xi)d\xi \qquad (3.4)$$

Подставляя разложения (3.1) и (3.4) в граничные условия (2.11), получаем систему $2N$ уравнений для определения постоянных интегрирования $E^{(l)}_{nk}$ и $\bar{E}^{(l)}_{nk}$

$$E^{(1)}_{nk}P^{(2)}_{\nu_k}(\sin\alpha_0)+\bar{E}^{(1)}_{nk}Q^{(2)}_{\nu_k}(\sin\alpha_0)=0$$

$$E^{(N)}_{nk}P^2_{\nu_k}(\sin\alpha_N)+\bar{E}^{(N)}_{nk}Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha_N)-$$

$$-Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha_N)\int\limits_{\alpha_{N-1}}^{\alpha_N}\frac{Q^{(N)}_{nk}(\psi)P^2_{\nu_k}(\sin\psi)}{\cos^2\psi U(\psi)}d\psi+$$

$$+P^2_{\nu_k}(\sin\alpha_N)\int\limits_{\alpha_{N-1}}^{\alpha_N}\frac{Q^{(N)}_{nk}(\psi)Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)}{\cos^2\psi U_{\nu_k}(\psi)}d\psi=0$$

$$E^{(l)}_{nk}\lambda^n_l G_l P^2_{\nu_k}(\sin\alpha_l)+\bar{E}^{(l)}_{nk}\lambda^n_l G_l Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha_l)-$$

$$-\lambda^n_l G_l Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha_l)\int\limits_{\alpha_{l-1}}^{\alpha_l}\frac{Q^{(l)}_{nk}(\psi)P^2_{\nu_k}(\sin\psi)}{\cos^2\psi U_{\nu_k}(\psi)}d\psi+$$

$$+\lambda^n_l G_l P^2_{\nu_k}(\sin\alpha_l)\int\limits_{\alpha_{l-1}}^{\alpha_l}\frac{Q^{(l)}_{nk}(\psi)Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)}{\cos^2\psi U_{\nu_k}(\psi)}d\psi=$$

$$=E^{(l+1)}_{nk}\lambda^n_{l+1}G_{l+1}P^2_{\nu_k}(\sin\alpha_l)+\bar{E}^{(l+1)}_{nk}\lambda^n_{l+1}G_{l+1}Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha_l) \qquad (3.5)$$

$$E_{0k}^{(l)} P_{\nu_k}^{*}(\alpha_l) + \widetilde{E}_{0k}^{(l)} Q_{\nu_k}^{*}(\alpha_l) - E_{0k}^{(l+1)} P_{\nu_k}^{*}(\alpha_l) - \widetilde{E}_{0k}^{(l+1)} Q_{\nu_k}^{*}(\alpha_l) -$$

$$- Q_{\nu_k}^{*}(\alpha_l)\, Q_{0k}^{(l)} \int\limits_{\alpha_{l-1}}^{\alpha_l} \frac{P_{\nu_k}^{2}(\sin\psi)\, d\psi}{\cos^2\psi\, U_{\nu_k}(\psi)} + P_{\nu_k}^{*}(\alpha_l)\, Q_{0k}^{(l)} \int\limits_{\alpha_{l-1}}^{\alpha_l} \frac{Q_{\nu_k}^{2}(\sin\psi)\, d\psi}{\cos^2\psi\, U_{\nu_k}(\psi)} = 0$$

$$E_{n+1,k}^{(l)} r_l^{n+1} P_{\nu_k}^{*}(\alpha_l) + \widetilde{E}_{n+1,k}^{(l)} r_l^{n+1} Q_{\nu_k}^{*}(\alpha_l) - E_{n+1,k}^{(l+1)} r_{l+1}^{n+1} P_{\nu_k}^{*}(\alpha_l) -$$

$$- \widetilde{E}_{n+1,k}^{(l+1)} r_{l+1}^{n+1} Q_{\nu_k}^{*}(\alpha_l) + \frac{2 r_l^{n+1}}{\nu_k + 2} \Theta_{nk}^{(l)}(\alpha_l) - \frac{2 r_{l+1}^{n+1}}{\nu_k + 2} \Theta_{nk}^{(l+1)}(\alpha_l) +$$

$$+ r_l^{n+1} P_{\nu_k}^{*}(\alpha_l) \int\limits_{\alpha_{l-1}}^{\alpha_l} \frac{Q_{n+1,k}^{(l)}(\psi)\, Q_{\nu_k}^{2}(\sin\psi)}{\cos^2\psi\, U_{\nu_k}(\psi)}\, d\psi -$$

$$- r_l^{n+1} Q_{\nu_k}^{*}(\alpha_l) \int\limits_{\alpha_{l-1}}^{\alpha_l} \frac{Q_{n+1,k}^{(l)}(\psi)\, P_{\nu_k}^{2}(\sin\psi)}{\cos^2\psi\, U_{\nu_k}(\psi)}\, d\psi = 0$$

Здесь

$$Q_{0k}^{(l)} = \frac{4\sqrt{2}\, s_k \left[(-1)^k \sqrt{r_2} - \sqrt{r_1}\right]}{(\ln r_2/r_1)^{1/2}\,(1 + 4 s_k^2)}$$

$$P_{\nu_k}^{*}(\alpha_l) = 2\cos\alpha_l\, P_{\nu_k - 1}^{2}(\sin\alpha_l) - \sin 2\alpha_l\, P_{\nu_k}^{2}(\sin\alpha_l)$$

$$Q_{\nu_k}^{*}(\alpha_l) = 2\cos\alpha_l\, Q_{\nu_k - 1}^{2}(\sin\alpha_l) - \sin 2\alpha_l\, Q_{\nu_k}^{2}(\sin\alpha_l)$$

4. *Двухслойный стержень.* Рассмотрим частный случай кручения двухслойного стержня, когда $N = 2$, $\Gamma\Omega_1$ образуется из координатных линий $\omega = \alpha_0 = -\alpha$, $\omega = \alpha_1 = 0$, а $\Gamma\Omega_2$ — из $\omega = \alpha_1 = 0$, $\omega = \alpha_2 = \alpha$ (фиг. 3).

Определив $E_{nk}^{(l)}$ и $\widetilde{E}_{nk}^{(l)}$ из (3.5), подставим в (3.3), а последнее в (3.1), после некоторых преобразований получим решение задачи (2.11) в виде

$$\Phi_0^{(1)}(r, \omega) = G_2 Q_{0k}^{(2)} \int\limits_{0}^{\alpha} G_0^{*}(\psi; r, \omega)\, d\psi + Q_{0k}^{(1)} \int\limits_{-\alpha}^{0} G_0^{(1)}(\psi; r, \omega)\, d\psi$$

$$\Phi_0^{(2)}(r, \omega) = - G_1 Q_{0k}^{(1)} \int\limits_{-\alpha}^{0} G_0^{*}(\psi; r, \omega)\, d\psi + Q_{0k}^{(2)} \int\limits_{0}^{\alpha} G_0^{(2)}(\psi; r, \omega)\, d\psi$$

$$\Phi_{n+1}^{(1,2)}(r, \omega) = G_{2,1} \left(\frac{h_{2,1}}{h_{1,2}}\right)^{n+1} \iint\limits_{\Omega_{2,1}} Q_{n+1}^{(2,1)}(\xi, \psi)\, G^{*}(\xi, \psi; r, \omega)\, d\Omega_{2,1} +$$

$$+\iint\limits_{\Omega_{1,2}} Q_{n+1}^{(1,2)}(\xi,\psi)\,G^{(1,2)}(\xi,\psi;r,\omega)\,d\Omega_{1,2}\pm$$

$$\pm G_{2,1}\left(\frac{\lambda_{2,1}}{\lambda_{1,2}}\right)^{n+1}\int\limits_{r_1}^{r_2}\Theta_n^{(2,1)}(\xi,0)\,L(\xi;r,\omega)\,d\xi\mp$$

$$\mp G_{2,1}\int\limits_{r_1}^{r_2}\Theta_n^{(1,2)}(\xi,0)\,L(\xi;r,\omega)\,d\xi$$

В последнем выражении для $\Phi_{n+1}^{(1)}$ следует взять первые индексы, а для $\Phi_{n+1}^{(2)}$ — вторые.

Здесь

$$G_0^*(\psi;r,\omega)=\begin{cases}\dfrac{\cos^2\omega}{\cos^2\psi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{I_{\nu_k}(\omega,\psi)}{K_{\nu_k}U_{\nu_k}(\psi)}R_k(r), & \text{когда } \psi\in[0,\alpha]\\[2ex] \dfrac{\cos^2\omega}{\cos^2\psi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{I_{\nu_k}(\psi,\omega)}{K_{\nu_k}U_{\nu_k}(\psi)}R_k(r), & \text{когда } \psi\in[-\alpha,0]\end{cases}$$

$$G_0^{(l)}(\psi;r,\omega)=\begin{cases}\dfrac{\cos^2\omega}{\cos^2\psi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{J_{\nu_k}^{(l)}(\omega,\psi)}{K_{\nu_k}U_{\nu_k}(\psi)}R_k(r), & \text{когда } \psi\leqslant\omega\\[2ex] \dfrac{\cos^2\omega}{\cos^2\psi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{J_{\nu_k}^{(l)}(\psi,\omega)}{K_{\nu_k}U_{\nu_k}(\psi)}R_k(r), & \text{когда } \psi\geqslant\omega\end{cases}$$

$$G^*(\xi,\psi;r,\omega)=\begin{cases}\dfrac{\cos^2\omega}{\xi^3\cos^2\psi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{I_{\nu_k}(\omega,\psi)}{K_{\nu_k}U_{\nu_k}(\psi)}R_k(\xi)R_k(r), & \text{когда } (\xi,\psi)\in\Omega_2\\[2ex] \dfrac{\cos^2\omega}{\xi^3\cos^2\psi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{I_{\nu_k}(\psi,\omega)}{K_{\nu_k}U_{\nu_k}(\psi)}R_k(\xi)R_k(r), & \text{когда } (\xi,\psi)\in\Omega_1\end{cases}$$

$$G^{(l)}(\xi,\psi;r,\omega)=\begin{cases}\dfrac{\cos^2\omega}{\xi^3\cos^2\psi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{J_{\nu_k}^{(l)}(\omega,\psi)}{K_{\nu_k}U_{\nu_k}(\psi)}R_k(\xi)R_k(r), & \text{когда } \psi\leqslant\omega\\[2ex] \dfrac{\cos^2\omega}{\xi^3\cos^2\psi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{J_{\nu_k}^{(l)}(\psi,\omega)}{K_{\nu_k}U_{\nu_k}(\psi)}R_k(\xi)R_k(r), & \text{когда } \psi\geqslant\omega\end{cases}$$

$$L(\xi;\, r,\, \omega) = \begin{cases} \dfrac{\cos^2\omega}{\xi^4} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{Y_{\nu_k}(\omega;\, \alpha)}{(\nu_k+2)K_{\nu_k}} R_k(\xi)\, R_k(r), & \text{когда } (r,\, \omega) \in \Omega_1 \\ \dfrac{\cos^2\omega}{\xi^4} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{Y_{\nu_k}(\omega;\, -\alpha)}{(\nu_k+2)K_{\nu_k}} R_k(\xi)\, R_k(r), & \text{когда } (r,\, \omega) \in \Omega_2 \end{cases}$$

$$K_{\nu_k} = G_2[Q^2_{\nu_k-1}(0)\, P^2_{\nu_k}(-\sin\alpha) - P^2_{\nu_k-1}(0)\, Q^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)] \times$$
$$\times [Q^2_{\nu_k}(0)\, P^2_{\nu_k}(\sin\alpha) - P^2_{\nu_k}(0)\, Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha)] +$$
$$+ G_1[P^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)\, Q^2_{\nu_k}(0) - P^2_{\nu_k}(0)\, Q^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)] \times$$
$$\times [P^2_{\nu_k-1}(0)\, Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha) - Q^2_{\nu_k-1}(0)\, P^2_{\nu_k}(\sin\alpha)]$$

$$I_{\nu_k}(\omega,\, \psi) = [P^2_{\nu_k}(0)\, Q^2_{\nu_k-1}(0) - P^2_{\nu_k-1}(0)\, Q^2_{\nu_k}(0)] \times$$
$$\times [Q^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)\, P^2_{\nu_k}(\sin\omega) - P^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)\, Q^2_{\nu_k}(\sin\omega)] \times$$
$$\times [Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\, P^2_{\nu_k}(\sin\psi) - P^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\, Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)]$$

$$J^{(1)}_{\nu_k}(\omega,\, \psi) = \{G_1[Q^2_{\nu_k-1}(0)\, P^2_{\nu_k}(\sin\alpha) - Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\, P^2_{\nu_k-1}(0)] \times$$
$$\times [Q^2_{\nu_k}(0)\, P^2_{\nu_k}(\sin\omega) - P^2_{\nu_k}(0)\, Q^2_{\nu_k}(\sin\omega)] -$$
$$- G_2[Q^2_{\nu_k}(0)\, P^2_{\nu_k}(\sin\alpha) - P^2_{\nu_k}(0)\, Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha)] \times$$
$$\times [Q^2_{\nu_k-1}(0)\, P^2_{\nu_k}(\sin\omega) - P^2_{\nu_k-1}(0)\, Q^2_{\nu_k}(\sin\omega)]\} \times$$
$$\times [Q^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)\, P^2_{\nu_k}(\sin\psi) - P^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)\, Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)]$$

$$J^{(2)}_{\nu_k}(\omega,\, \psi) = \{G_1[P^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)\, Q^2_{\nu_k}(0) - P^2_{\nu_k}(0)\, Q^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)] \times$$
$$\times [Q^2_{\nu_k-1}(0)\, P^2_{\nu_k}(\sin\psi) - P^2_{\nu_k-1}(0)\, Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)] -$$
$$- G_2[Q^2_{\nu_k-1}(0)\, P^2_{\nu_k}(-\sin\alpha) - Q^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)\, P^2_{\nu_k-1}(0)] \times$$
$$\times [Q^2_{\nu_k}(0)\, P^2_{\nu_k}(\sin\psi) - P^2_{\nu_k}(0)\, Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)]\} \times$$
$$\times [P^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\, Q^2_{\nu_k}(\sin\omega) - Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\, P^2_{\nu_k}(\sin\omega)]$$

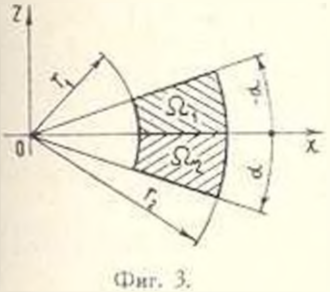
$$Y_{\nu_k}(\omega;\, \alpha) = [P^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)\, Q^2_{\nu_k}(\sin\omega) - Q^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)\, P^2_{\nu_k}(\sin\omega)] \times$$
$$\times [Q^2_{\nu_k}(0)\, P^2_{\nu_k}(\sin\alpha) - P^2_{\nu_k}(0)\, Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha)]$$

Рассматривая сходимость ряда (3.1), заметим, что первое уравнение (2.11) в области Ω_l является равномерно эллиптическим с коэффициентами, принадлежащими пространству C_{α^*}, $\alpha^* \in (0, 1)$. Следовательно, справедливы априорные оценки Шаудера [10]. Область Ω_l и граничные значения $\Phi_n^{(l)}$ гладкие. При этих условиях $\Phi_0^{(l)} \in C_{2+\alpha^*}$, так как $Q_0^{(l)} \in C_{\alpha^*}$, и вообще, из выражения $Q_n^{(l)}$ (2.11) следует, что $Q_n^{(l)} \in C_{\alpha^*}$, следовательно, $\Phi_n^{(l)} \in C_{2+\alpha^*}$.

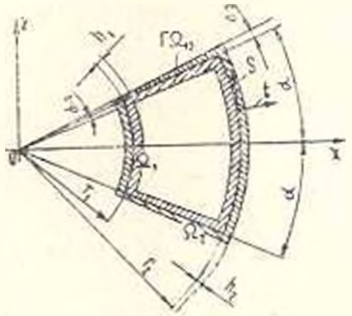
Вводя норму в C_{α^*}

$$\|X\| = \max_{M\in\Omega_l} |X(M)| + \max_{M,\,V\in\Omega_l} \frac{|X(M)-X(V)|}{MV^{\alpha^*}}$$

и применяя априорные оценки Шаудера $\|D^2\Phi_n^{(l)}\| \leqslant c^*\|Q_n^{(l)}\|$, где c^* — постоянная, зависящая от геометрии области, аналогично [9], показывается, что ряд (2.10) и ряды, составленные из производных $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_l^k D\Phi_k^{(l)}$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_l^k D^2\Phi_k^{(l)}$, сходятся абсолютно и равномерно с некоторым радиусом сходимости.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

5. *Тонкостенный стержень с замкнутым профилем.* Рассмотрим кручение тонкостенного составного стержня с меридиональным сечением в виде двухсвязной области. Рассмотрим случай двухслойного сечения ($N = 2$), когда $\Gamma\Omega_l$ образуется из координатных линий (фиг. 4). Толщина стенки $h_1 + h_2$, ($\alpha_1 r_2 = h_1$, $\alpha_2 r_1 = h_2$). Переходя к координатной системе t, s, где t направлено по внешней нормали, а s — по касательной $\Gamma\Omega_{12}$, из (1.4) получим

$$\tau_t^{(l)} = \frac{2AG_l}{r^2\sin^2\vartheta}\,\frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial s}, \qquad \tau_s^{(l)} = -\frac{2AG_l}{r^2\sin^2\vartheta}\,\frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial t}$$

Преобразуя уравнение (1.5) к координатной системе t, s и в виду малости толщины стенки пренебрегая компонентом напряжения $\tau_t^{(l)}$, для рассматриваемого сечения приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[f_l(T_l)\,\frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial t}\right] = 1, \qquad T_l = \frac{2AG_l}{S(s)}\,\frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial t} \tag{5.1}$$

где

$$
S(s) = \begin{cases} (r_1 + s)^2 \cos^2 \alpha & \text{при} \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \quad \theta = \pi/2 + \alpha \\ r_2^2 \sin^2 (\pi/2 + \alpha - s/r_2) & \text{при} \quad r = r_2, \quad \pi/2 - \alpha \leqslant \theta \leqslant \pi/2 + \alpha \\ (r_2 - s)^2 \cos^2 \alpha & \text{при} \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \quad \theta = \pi/2 - \alpha \\ r_1^2 \sin^2 (\pi/2 - \alpha + s/r_1) & \text{при} \quad r = r_1, \quad \pi/2 - \alpha \leqslant \theta \leqslant \pi/2 + \alpha \end{cases}
$$

В случае линейной упругости из (5.1) получаем

$$
\Phi^{(l)} = 1/2t^2 + K_1^{(l)}(s)\,t + K_2^{(l)}(s) \tag{5.2}
$$

Произвольные функции интегрирования $K_1^{(l)}$ и $K_2^{(l)}$ определяются из граничного условия и из условий (1.6), (1.9). Принимая $\Phi = 0$ на $\Gamma^{(l)}\Omega_0$ и $\Phi = \Phi_1$ на $\Gamma^{(1)}\Omega_0$, получаем

$$
K_1^{(l)} = \frac{b - 2G_1\Phi_1}{2b_1}, \quad K_2^{(1,2)} = \frac{G_{2,1} h_2 (2\Phi_1 - h_1 h_2 - h_1^2)}{2b_1}
$$

$$
b = G_1 h_1^2 - G_2 h_2^2, \quad b_1 = G_1 h_1 + G_2 h_2
$$

Согласно (1.11) и (5.2) будем иметь

$$
\Phi_1 = \frac{P_z + 2AH_1}{2AH_2} \tag{5.3}
$$

Здесь

$$
H_1 = \frac{G_1 G_2 h_1 h_2 (h_1 + h_2)}{2b_1} \left| \frac{2(\alpha_2 + \alpha_3)(r_2 - r_1)}{r_1 r_2 \cos^3 \alpha} + \frac{H(r_1^2 + r_2^2)(h_1 - h_2)}{r_1^2 r_2^2} \right| -
$$

$$
- \frac{b}{2b_1} \left| \frac{Hb_1 (r_2 - r_1)}{r_1 r_2} + \frac{G_2 \alpha_3^2 - G_1 \alpha_2^2}{\cos^3 \alpha} \ln \frac{r_2}{r_1} \right| + \frac{(r_1 - r_2)(G_1 \alpha_2^3 + G_2 \alpha_3^3)}{3 \cos^3 \alpha} - 2Hb_1
$$

$$
H_2 = \frac{2G_1 H (r_1 - r_2)}{r_1 r_2} + \frac{G_1 G_2 h_2}{b_1} \left| \frac{2(\alpha_2 + \alpha_3)(r_2 - r_1)}{r_1 r_2 \cos^3 \alpha} + \right.
$$

$$
\left. + \frac{H(r_1^2 + r_2^2)(h_1 - h_2)}{r_1^2 r_2^2} \right| - \frac{G_1}{b_1} \left| \frac{Hb_1 (r_2 - r_1)}{r_1 r_2} + \frac{G_2 \alpha_3^2 - G_1 \alpha_2^2}{\cos^3 \alpha} \ln \frac{r_2}{r_1} \right|
$$

$$
H = \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{tg} 1/2 (\pi/2 + \alpha)}{\operatorname{tg} 1/2 (\pi/2 - \alpha)}
$$

Подставив (5.3) в (5.2), а (5.2) в (1.10), определим A, а затем и напряжение $\tau_s^{(l)}$

$$
A = P_z H^*, \qquad \tau_s^{(l)} = \frac{2P_z G_l H^*}{r^2 \sin^2 \theta} \left| \frac{(1 + 2H^* H_1) G_1}{2H^* H_2 b_1} - \frac{b}{2b_1} - t \right|
$$

$$
H^* = \frac{G_1 (r_1^2 + r_2^2)}{(r_1^2 + r_2^2)(H_2 b - 2G_1 H_1) + 2H_2 b_1 r_1 r_2 (r_1 - r_2)}
$$

Примем степенной закон упрочнения

$$f_l(T_l) = \lambda_l T_l^{\nu_l - 1}, \quad \lambda_l = \overset{*}{\lambda}_l G_l^{\nu_l - 1}$$

Для простоты вычислений в случае степенного закона упрочнения, ввиду малости толщины стенки, $\Phi^{(1)}$ приближенно можно взять в форме (5.2).

Принимая $\Phi = 0$ на $\Gamma^{(0)}\Omega_0$, $\Phi = \Phi_1$ на $\Gamma^{(1)}\Omega_0$ и использовав (1.6), (1.9), определим $K_1^{(l)}(s)$, $K_2^{(l)}(s)$.

В частности, если $\nu_l = \nu$, то

$$K_1^{(2)} = \frac{b - 2G_1\Phi_1}{2G_2[h_1(G_1\lambda_2/G_2\lambda_1)^{1/\nu} + h_2]}, \quad K_2^{(2)} = -h_2\left(\frac{h_2}{2} + K_1^{(2)}\right)$$

$$K_1^{(1)} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{1/\nu}\left(\frac{G_2}{G_1}\right)^{(\nu-1)/\nu} K_1^{(2)}, \quad K_2^{(1)} = \frac{G_2}{G_1}K_2^{(2)} \tag{5.4}$$

Отметим, что когда $\nu_1 \neq \nu_2$, то $K_1^{(l)}$ и $K_2^{(l)}$ будут зависеть от s.

Из-за малости толщины стенки, пренебрегая двойными интегралами, из (1.11) находим

$$\Phi_1 = \frac{P_z r_1 r_2}{4AG_1 H(r_2 - r_1)} \tag{5.5}$$

Согласно (5.4), (5.5), (5.2) и (1.10) получаем

$$P_z = \frac{2AHb(r_2 - r_1)}{r_1 r_2} -$$

$$- \frac{4A^{1/\nu} G_2 H(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}\left|h_1\left(\frac{G_1\lambda_2}{G_2\lambda_1}\right)^{1/\nu} + h_2\right|\left|\frac{H(r_2 - r_1)}{(2G_2)^{\nu-1}\lambda_2 r_1 r_2 \chi}\right|^{1/\nu} \tag{5.6}$$

$$\chi = \oint\limits_{\Gamma\Omega_{12}} \frac{ds}{S^{\nu+1/2}(s)}, \quad \tau_\varphi^{(1)} = -\frac{2AG_1}{r^2 \sin^2\theta}(t + K_1^{(1)})$$

При $\nu = 2$ из (5.6) будем иметь

$$A = \frac{P_z r_1 r_2}{2bH(r_2 - r_1)} + \frac{G_2 H c^2 (r_2 - r_1)}{\lambda_2 r_1 r_2 b^2 \chi} -$$

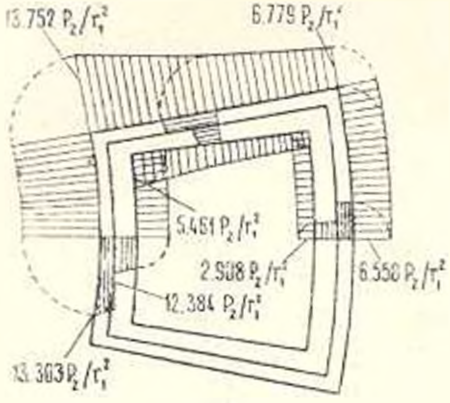
$$- \frac{c}{b^2}\left\{\left|P_z|b|r_1 r_2 + \frac{G_2 H^2 c^2 (r_2 - r_1)^2}{\lambda_2 r_1 r_2 \chi}\right|\frac{G_2}{\lambda_2 r_1 r_2 \chi}\right\}^{1/2}$$

$$c = h_1\left(\frac{G_1\lambda_2}{G_2\lambda_1}\right)^{1/2} + h_2$$

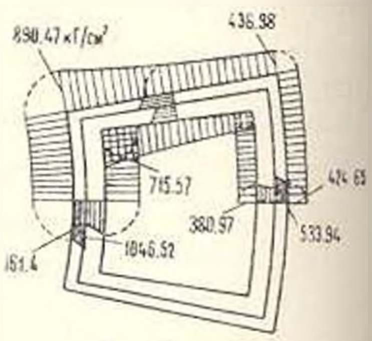
$$\chi = \frac{1}{2\cos^5\alpha}\left(\frac{1}{r_1^4} - \frac{1}{r_2^4}\right) + \left(\frac{1}{r_2^4} + \frac{1}{r_1^4}\right)\left(\frac{\sin\alpha}{2\cos^4\alpha} - \frac{\sin\alpha}{4\cos^2\alpha} + H\right)$$

На фиг. 5 приведена эпюра распределения напряжений $\tau_\varphi^{(1)}$ в сечении в случае линейно-упругого материала. При этом принимается

$$r_2 = 1.4\, r_1,\; h_1 = 0.02\, r_1,\; h_2 = 0.01\, r_1,\; \alpha = 10^\circ \text{ и } G_2 = 2G_1.$$



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Приведена также эпюра распределения напряжений $\tau_\varphi^{(1)}$ (фиг. 6) [в случае упрочняющегося материала. При этом $r_1 = 15$ *см*, $r_2 = 1.4\, r_1$, $h_1 = 0.02\, r_1$, $h_2 = 0.01\, r_1$, $\alpha = 10^\circ$, $G_2 = 2G_1$, $G_1 = 0.42 \cdot 10^6$ *кГ/см*², $\nu = 2$, $k_1 = 2k_2$, $k_2 = 0.001$ *см*²/*кГ* и $P_2 = 1000$ *кГ*.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 22 VI 1979

Գ. Վ. ԳԱԼՊԱՃՅԱՆ

ՏԱՐԲԵՐ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱԾ ԿՈՐ ՁՈՂԻ ՊԼԱՍՏԻԿ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրվում է շրջանային օղակի սեկտորի տեսքով բաղադրյալ կոր ձողի ոլորումը։ Ձողը ոլորվում է ծայրային կտրվածքներում ազդող և օղակի առանցքով ուղղված ուժերով։ Ձողի երկարությամբ հաստատուն միջօրեականային կտրվածքը կազմավորված է տարբեր համասեռ և իզոտրոպ նյութերի համապատասխանող տիրույթներից։ Յուրաքանչյուր տիրույթում ձողը ենթարկվում է իզոտրոպ ամրապնդման։ Ընտրված նյութերի համար ցույց են տրված պարզ բեռնավորման պայմանները։

Խնդիրը բերվում է լարումների ֆունկցիայի նկատմամբ մասնակի ածանցյալներով ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարման։ Օղակային սեկտորի տեսք ունեցող կտրվածքով բազմաշերտ հոծ ձողի դեպքում համապատասխան եզրային խնդրի լուծումը փնտրվում է աստիճանային շարքի տեսքով, ըստ մի որոշ ֆիզիկական պարամետրի և հանգեցվում է ռեկուրենտ եզրային

խնդիրների անվերջ համակարգի։ Կառուցվում են այդ խնդիրների լուծումները և ցույց է տրվում լուծումը ներկայացնող շարքի զուգամիտությունը։

Դիտվում է նաև փակ տրամատավորությամբ (պրոֆիլով) երկշերտ բարակապատ ձողի ոլորման դեպքը։ Ստացված են լուծումներ օղակային սեկտորի տեսք ունեցող տրամատավորության բարակապատ երկշերտ ձողի համար։ Այդ դեպքի համար կառուցվել են կտրվածքում լարումների բաշխման էպյուրները։

THE PLASTIC TORSION OF A CURVED BAR, COMPOSED OF DIFFERENT MATERIALS

P. V. GALPCHIAN

S u m m a r y

The torsion of a curved, composite bar in the form of a circular ring sector is considered. The bar is twisted by the opposite forces acting on the end meridional section along the axis of the ring. The meridional section, constant along the length of the bar, is made of some domains, corresponding to different homogeneous isotropic materials. In each domain the material obeys the condition of isotropic strengthening. Simple loading condition's for the chosen materials are shown.

The problem is reduced to the nonlinear partial differential equation relative to the function of stress.

In case of a continuous many-layer bar with cross-section of a circular sector the solution of the boundary problem is sought in the form of a power series by certain physical parameter and is reduced to an infinite system of recurrent boundary problems. The solution of these problems are given and the series convergence is shown.

The case of torsion of a two-layer thinwalled bar of closed profile is also considered. The solutions are given for a profile of circulare sector. For this case the epures of stress distribution in the cross-section are constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
2. *Векуа И. Н., Рухадзе А. К.* Кручение и изгиб поперечной силой бруса, составленного из двух материалов, ограниченных конфокальными эллипсами. ПММ, 1933, т. 1, вып. 2.
3. *Векуа И. Н., Рухадзе А. К.* Задача кручения кругового цилиндра, армированного продольным круговым стержнем. Изв. АН СССР, ОМЕН, 1933, № 3.
4. *Рухадзе А. К.* Кручение и изгиб бруса, составленного из двух упругих материалов, ограниченных эпитрохоидами. Тр. Тбилисского математического института, 1937, т. 1.
5. *Шерман Д. И.* Кручение эллиптического цилиндра, армированного круговым стержнем. Инжен. сб., АН СССР, 1951, т. 10.

6. *Чобанян К. С.* Применение функции напряжений в задаче о кручении призматических стержней, составленных из различных материалов. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат., ест. и техн. наук, 1955, т. 8, № 2.
7. *Лехницкий С. Г.* Кручение многослойного стержня прямоугольного сечения. Инжен. сб., АН СССР, 1956, т. 23.
8. *Галпчян П. В., Задоян М. А.* Пластическое кручение кругового стержня с поперечным сечением в виде кольцевого сектора. Изв. АН АрмССР, Механика, 1979, т. 32, № 1.
9. *Задоян М. А.* Пластическое кручение сектора кольца. Известия АН СССР, МТТ, 1977, № 1.
10. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1965.
11. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.
12. *Freiberger W.* The uniform torsion of a perfectly plastic circular ring. Commonwealth of Australia. Aeronautical Research Laboratories, Report ARLSM 2B 1953.
13. *Wang A. J., Prager W.* Plastic twisting of a circular ring sector. J. Mech. and Phys. Solids, 1955, vol. 3, p. 169—175.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIII, № 4, 1980 Механика

Р. М. КИРАКОСЯН

О ВЕРХНИХ ОЦЕНКАХ ПРОГИБОВ И НАПРЯЖЕНИЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Предлагается способ определения верхних оценок для максимальных прогибов и напряжений упруго-пластических конструкций, основанный на использовании упругих решений соответствующих краевых задач. Способ иллюстрируется на примере гибкой пластинки при линейном упрочнении материала.

Переходя к обобщенным величинам, что позволяет освободиться от влияния неоднородности напряженно-деформированного состояния по толщине, получены более точные верхние оценки при поперечном изгибе. На основе этих оценок получается единая нижняя оценка для несущей способности произвольных идеально-пластических пластин.

Приводятся примеры сравнения с точными решениями.

1. Рассмотрим некоторую конструкцию из линейно упрочняющегося материала. Связь между интенсивностями касательных напряжений σ_i и деформаций сдвигов ε_i примем в виде [1]

$$\sigma_i = E\varepsilon_i[1-\omega(\varepsilon_i)], \quad 0 \leqslant \omega < 1 \tag{1.1}$$

где

$$\omega = \begin{cases} 0, & \varepsilon_i \leqslant \varepsilon_s \\ \lambda\left(1-\dfrac{\varepsilon_s}{\varepsilon_i}\right), & \varepsilon_i \geqslant \varepsilon_s \end{cases}$$

$$\lambda = 1-\frac{1}{E}\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = \text{const} \tag{1.2}$$

E — модуль Юнга, ε_s — предел упругих деформаций, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ — коэффициент упрочнения материала.

Известно [1], что упруго-пластически деформированное тело можно рассматривать как некоторое приведенное упругое тело с неоднородным модулем упругости $E_{\text{пр}}$. В случае линейного упрочнения и отсутствия разгрузки

$$E_{\text{пр}} = \begin{cases} E, & \varepsilon_i \leqslant \varepsilon_s \\ E\left(1-\lambda+\dfrac{\lambda\varepsilon_s}{\varepsilon_i}\right), & \varepsilon_i \geqslant \varepsilon_s \end{cases} \tag{1.3}$$

За пределами упругости с возрастанием интенсивности деформаций ε_i модуль приведенного материала $E_{пр}$ монотонно убывает. Следовательно, наименьшее значение $E_{пр}^{min}$ получится в той точке конструкции, где ε_i принимает наибольшее значение, то есть

$$E_{пр}^{min} = E\left(1 - \lambda + \frac{\lambda\varepsilon_s}{\varepsilon_i^{max}}\right) \tag{1.4}$$

Так как

$$E_{пр}^{min} > E(1 - \lambda) \tag{1.5}$$

то, полагая

$$E_{пр}(0) = E(1 - \lambda) \tag{1.6}$$

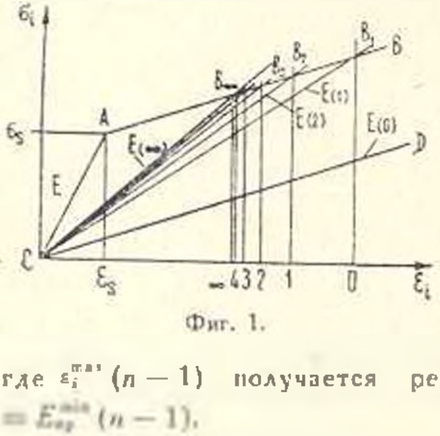
и решая задачу упругого деформирования рассмотренной конструкции при заданных нагрузках и граничных условиях, получим завышенные значения для деформаций. Максимальное значение интенсивности деформаций обозначим через $\varepsilon_i^{max}(0)$. Соответствующее значение интенсивности напряжений, подсчитанное по действительной зависимости

$$\sigma_i^{max}(0) = \varepsilon_i^{max}(0)\left[1 - \lambda + \frac{\lambda\varepsilon_s}{\varepsilon_i^{max}(0)}\right] \tag{1.7}$$

будет превышать действительное максимальное значение. Таким образом, получены верхние оценки для интенсивностей деформаций и напряжений и нижняя оценка для приведенного модуля

$$\varepsilon_i^{max}(0) > \varepsilon_i, \quad \sigma_i^{max}(0) > \sigma_i, \quad E_{пр}^{min}(0) < E_{пр} \tag{1.8}$$

Эти оценки очень грубы и не могут представлять практического интереса. Принимая их в качестве нулевого приближения, последующие приближения построим по реккурентным формулам



Фиг. 1.

$$E_{пр}^{min}(n) = \frac{\sigma_i^{max}(n-1)}{\varepsilon_i^{max}(n-1)}$$

$$\sigma_i^{max}(n-1) = \tag{1.9}$$

$$= E\varepsilon_i^{max}(n-1)\left[1 - \lambda + \frac{\lambda\varepsilon_s}{\varepsilon_i^{max}(n-1)}\right]$$

где $\varepsilon_i^{max}(n-1)$ получается решением упругой задачи при $E_{пр} = E_{пр}^{min}(n-1)$.

Смысл этого рекуррентного процесса можно наглядно представить графически (фиг. 1). На оси ε_i числами 0, 1, 2, ..., ∞ обозначены значения соответствующих приближений максимальной интенсивности деформаций

$\varepsilon_i^{max}(n)$. Причем, нулевое приближение $\varepsilon_i^{max}(0)$ получается из упругого решения задачи, когда связь между σ_i и ε_i дается линией CD, параллельной линии $AB(E^{min}(0) = E(1-\lambda))$. Имея нулевое приближение $\varepsilon_i^{max}(0)$ по действительной диаграмме $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ (ломаная CAB) определяется нулевое приближение максимального значения интенсивности напряжения $\sigma_i^{max}(0)$ — отрезок OB_1. Соединяя точку B_1 с началом координат C, находим первое приближение приведенного модуля $E^{min}(1) = OB_1/CO$. Далее, решая упругую задачу по диаграмме CB_1, определяем первое приближение максимального значения интенсивности деформаций $\varepsilon_i^{max}(1)$. Оно изображено цифрой „1" на оси ε_i. Первое приближение $\sigma_i^{max}(1)$ получается путем пересечения с действительной диаграммой CAB линии $1B_2$, параллельной оси σ_i. Аналогично строятся и последующие приближения. Так как последовательность минимальных значений модуля $E^{min}(n)$ монотонно растет и ограничена сверху значением действительного модуля Юнга материала E, то она сходится. Предельное значение $E^{min}(\infty) = E^*$ характеризуется тем, что для него максимальные значения интенсивности напряжений $\sigma_i^{max}(\infty) = \sigma_i^*$, подсчитанные по приведенной диаграмме CB_∞ и по действительной диаграмме CAB, совпадают. На основе этого обстоятельства, значение E^* можно определить непосредственно, не связываясь с описанным выше процессом последовательных приближений. Пусть решена задача упругого деформирования конструкции. Далее определяется максимальная интенсивность деформаций как функция от неизвестного модуля $\varepsilon_i^{max}(E^*)$. Приравнивая значения интенсивности напряжений, подсчитанные для $\varepsilon_i^{max}(E^*)$ по соотношениям упругости с модулем E^* и по соотношениям реального упруго-пластического тела (1.1), (1.2), получим

$$E^* = E\left[1-\lambda+\frac{\lambda\varepsilon_s}{\varepsilon_i^{max}(E^*)}\right] \tag{1.10}$$

Это и есть уравнение для определения E^*. Максимальное значение деформаций (перемещений) и напряжений упругой конструкции с однородным модулем E^* будет служить в качестве верхних оценок для действительных значений соответствующих величин реальной упруго-пластической конструкции.

Разумеется, что эти оценки намного лучше исходных (1.8). При однородном напряженно-деформированном состоянии, а также при отсутствии пластических свойств материала ($\lambda = 0$) эти оценки совпадают с точными значениями. По мере возрастания неоднородности напряженно-деформированного состояния и возрастания пластических свойств материала расхождение между оценками и точными значениями соответствующих величин увеличивается. Предлагаемые оценки могут быть успешно использованы особенно для конструкций типа гибких пластин и оболочек, неоднородность напряженно-деформированного состояния которых из-за мембранных усилий мала.

Важно заметить, что с ростом пластических деформаций материал приближается к несжимаемому и его коэффициент поперечной деформации стремится к половине. Предлагаемые оценки получены в предположении о неизменности коэффициента Пуассона. Это приводит к искусственному уменьшению жесткости конструкции, а следовательно, и к завышению деформаций. Оценки от этого становятся несколько грубыми.

2. В качестве иллюстрации предлагаемого способа нахождения верхних оценок рассмотрим задачу круглой гибкой пластинки, деформируемой под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки. Для простоты будем пользоваться аппроксимирующими выражениями точных формул максимальных значений прогибов и напряжений упругой пластинки [2]

$$x + Ax^3 = Bq^*, \quad \sigma_i^* = x(\beta + \alpha x) \tag{2.1}$$

где α, β, A, B — табличные постоянные,

$$x = \frac{w_0}{h}, \quad q^* = \frac{qa^4}{Eh^4}, \quad \sigma_i^* = \frac{\sigma_i^{\max} a^2}{Eh^2} \tag{2.2}$$

w_0 — прогиб в центре, h — толщина, a — радиус, E — модуль Юнга материала, q — интенсивность поверхностной нагрузки пластинки.

Имея в виду (1.10) и (2.1), получим

$$m = \frac{E}{E^*} = \begin{cases} 1, & x \leqslant x_s \\ \dfrac{x(\beta + \alpha x)}{\lambda\mu + (1-\lambda)x(\beta + \alpha x)}, & x > x_s \end{cases}$$

$$\sigma_i^{\max} = \begin{cases} x(\beta + \alpha x), & x \leqslant x_s \\ \dfrac{\lambda\mu}{1 - m(1-\lambda)}, & x \geqslant x_s \end{cases} \tag{2.3}$$

$$x_s = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\mu}}{2\alpha}, \quad q = \frac{x + Ax^3}{Bm}, \quad \mu = \frac{\varepsilon_s a^2}{h^2}$$

где x_s — предел упругих прогибов пластинки в центре. Соотношения (2.3) определяют зависимости между верхними оценками максимального прогиба x, максимальной интенсивности напряжений пластинки $\sigma_i^{\max}$ от нагрузки q.

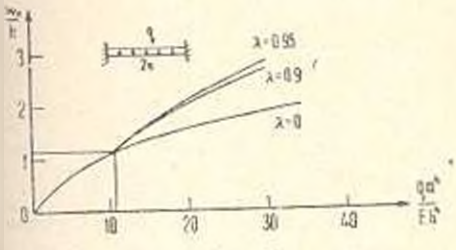
В случае жесткого защемления контура максимальное значение интенсивности напряжений $\sigma_i^{\max}$ получается на крайних верхних волокнах контурных сечений пластинки. Тогда коэффициенты α и β определяются формулами

$$\alpha = \sqrt{\alpha_r^2 - \alpha_r\alpha_t + \alpha_t^2}, \quad \beta = \sqrt{\beta_r^2 - \beta_r\beta_t + \beta_t^2} \tag{2.4}$$

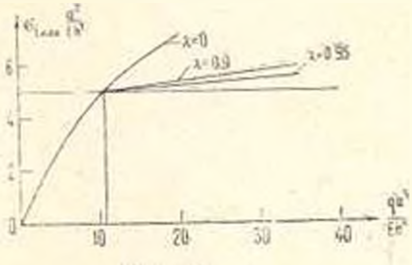
где α_r, α_t, β_r, β_t относятся к контуру пластинки. На основе [2] (стр. 456, табл. 82) с учетом (2.4) при значении коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$ находим

$$\alpha = 0.423, \quad \beta = 3.911, \quad A = 0.471, \quad B = 0.171 \tag{2.5}$$

На фиг. 2 и 3 приведены графики зависимости верхних оценок от нагрузки для рассмотренного случая при трех значениях λ. Качественно аналогичными получаются эти графики и для остальных способов опирания пластинки.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

3. Как отмечалось выше, предлагаемые оценки становятся грубыми при поперечном изгибе, особенно когда материал пластинки стремится к идеально пластическому. Ниже, путем перехода к обобщенным величинам, эти оценки существенно улучшаются при отсутствии мембранных сил. Используя соотношения между изгибающими моментами и кривизнами срединной плоскости в рамках теории поперечного изгиба пластин можно записать

$$m_i = D(1 - \Omega)\,\varkappa_i, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \tag{3.1}$$

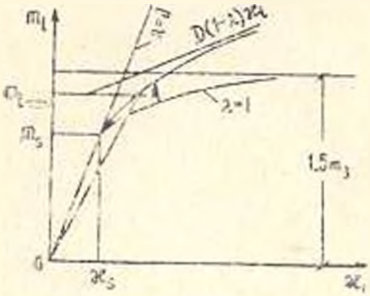
где D — цилиндрическая жесткость, m_i и $\varkappa_i$ — аналоги интенсивностей напряжений и деформаций:

$$m_i = \sqrt{M_1^2 - M_1M_2 + M_2^2 + 3M_{12}^2}, \quad \varkappa_i = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\varkappa_1^2 + \varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_{12}^2} \tag{3.2}$$

$$\Omega = \begin{cases} 0, & \varkappa_i \leqslant \varkappa_s = \dfrac{3\varepsilon_s}{2h} \\ \lambda\left(1 - \dfrac{9\varepsilon_s}{4h\varkappa_i} + \dfrac{27\varepsilon_s^3}{16h^3\varkappa_i^3}\right), & \varkappa_i > \varkappa_s \end{cases} \tag{3.3}$$

Здесь через $\varkappa_s$ обозначено значение интенсивности кривизн пластинки, после достижения которого появляются остаточные деформации. На фиг. 4 представлен график зависимости (3.1) для линейно упрочняющегося материала. В пределах упругости ($\varkappa_i < \varkappa_s$) этот график является прямой линией с угловым коэффициентом D. Моменту появления пластических деформаций соответствуют значения m_s и $\varkappa_s$, которые служат аналогами пределов упругости σ_s и ε_s. С развитием областей пластических деформаций график $m_i \sim \varkappa_i$ отклоняется от прямой линии, непрерывно наклоняясь в сторону оси $\varkappa_i$. График имеет асимптоту с угловым коэффициентом $(1-\lambda)D$. При идеально-пластическом материале $\lambda = 1$ и асимптота становится параллельной оси $\varkappa_i$. Предельное значение интенсивности моментов $m_{\text{пр}}$, которое характеризует несущую способность сечения, оказывается в полтора раза больше предела упругости m_s.

Поступая так, как в пункте 1, для нахождения нижней оценки приведенной жесткости упруго-пластически деформированной пластинки D^* получим следующее уравнение:



Фиг. 4.

$$D^* = D\left\{1-\lambda\left[1-\frac{9\varepsilon_s}{4h\varkappa_i^*(D^*)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{27\varepsilon_s^3}{16h^3(\varkappa_i^*(D^*))^3}\right]\right\} \tag{3.4}$$

где $\varkappa_i^*(D^*)$ — наибольшее значение интенсивности кривизн упругой пластинки при данных нагрузках и граничных условиях, определенное как функция от неизвестной жесткости D^*. Максимальные значения прогиба и напряжений упругой пластинки с однородной жесткостью D^* будут служить в качестве верхних оценок этих величин. Они не зависят от неоднородности напряженно-деформированного состояния по толщине и могут быть полезными в случае поперечного изгиба пластин.

Так как в теории поперечного изгиба однородных упругих пластин как изгибающие моменты, так и их интенсивность m_i не зависят от жесткости пластинки, то нижнюю оценку минимальной жесткости D^* можно определить и следующим образом. Из упругого решения задачи определяется максимальное значение интенсивности моментов $m_i^{\max}$, откладывается это значение вдоль оси m_i и проводится линия, параллельная оси $\varkappa_i$ до пересечения с действительной диаграммой $m_i \sim \varkappa_i$ упруго-пластической пластинки в точке A (фиг. 4). Угловой коэффициент линии OA будет равняться искомому значению нижней оценки минимальной жесткости D^*.

Тот факт, что для однородных упругих пластин интенсивность изгибающих моментов прямо пропорциональна параметру нагрузки q, показывает, что несущая способность произвольной идеально пластической пластинки ограничена снизу единым неравенством

$$q_{\text{пр}} \geq \frac{3}{2}\, q_s \tag{3.5}$$

где q_s то значение параметра нагрузки, при котором в какой-то точке (или точках) пластинки впервые достигается предел упругости материала. Например, в случае круглой защемленной по контуру пластинки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, $q_{\text{пр}} = 1.828\, q_s$ [3] и нижняя оценка несущей способности (3.5) отличается от точной не более 18%.

Рассмотрим задачу определения верхней оценки для максимального прогиба шарнирно опертой по контуру круглой пластинки, изгибаемой под действием равномерно распределенной нагрузки. В случае значения параметра $\lambda = 0.95$ и несжимаемости материала уравнение (3.4) принимает вид

$$\frac{D^*}{D} = \begin{cases} 1, \ \bar{q} = \dfrac{qha^2}{2\sigma_s D} \leqslant \bar{q}_* = 3.429 \\[2ex] 0.05 + 4.886 \dfrac{1}{\bar{q}} - 19.144 \dfrac{1}{\bar{q}^3}, \ \bar{q} > \bar{q}_* \end{cases} \tag{3.6}$$

В нижеприведенной таблице представлены результаты некоторых расчетов, выполненных с помощью (3.6). В последней строке приведены отношения верхних оценок w^{oa} максимальных прогибов упруго-пластической пластинки к максимальным прогибам упругой пластинки w^e. Из точного решения задачи упруго-пластического изгиба, когда в центре пластинки пластическая зона деформаций достигает половины толщины, имеем ([1], стр. 222)

Таблица 1

$\bar{q}$	3.429	4	5	6	7	8
D^*/D	1	0.972	0.874	0.776	0.692	0.623
$\dfrac{w^{oa}}{w^e} = \dfrac{D}{D^*}$	1	1.029	1.144	1.289	1.445	1.604

$$\bar{q} = 5, \quad \frac{w^{max}}{w^e} = \frac{5.322}{0.286} = 1.126 \tag{3.7}$$

В данном случае верхняя оценка максимального прогиба $\dfrac{w^{oa}}{w^e} = 1.144$ отличается от точного значения (3.7) менее 1.6%.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 7 I 1980

Ա. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱ-ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԿՈՆՍՏՐՈՒԿՑԻԱՆԵՐԻ ՃԿՎԱԾՔՆԵՐԻ ԵՎ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՎԵՐԻՆ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Առաջարկվում է առաձգա-պլաստիկական կոնստրուկցիաների մաքսիմալ ճկվածքների և լարումների վերին գնահատականների որոշման եղանակ, որը հենված է համապատասխան եզրային խնդիրների առաձգական լուծումների

օգտագործման վրա։ Եղանակը ցուցադրվում է ճկուն սալերի օրինակի վրա նյութի գծային ամրապնդման դեպքում։

Անցնելով ընդհանրացված մեծությունների, որը թույլ է տալիս ազատվելու ըստ հաստության լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի անհամասեռության ազդեցությունից, ստացվում են ավելի ճշգրիտ վերին գնահատականներ լայնական ծռման դեպքում։ Այդ գնահատականների հիման վրա կամայական իդեալական առաձգական սալերի համար ստացվում է կրող ունակության միասնական ստորին գնահատական։

Բերվում են ճշգրիտ լուծումների հետ համեմատության օրինակներ։

ON THE UPPER VALUES OF FLEXURE AND STRESS IN ELASTIC-PLASTIC STRUCTURES

R. M. KIRAKOSIAN

S u m m a r y

A method to define the upper values of maximum flexure and stress in elastic-plastic structures, based on elastic solutions for corresponding boundary problems, is proposed. A flexible plate with linear hardening of the material is used to illustrate the method. A transition to generalized values, permittimg to eliminate the heterogeneity of a stress-strain state across the thikness, provides more accurate upper values under cross-bending. On the basis of these values a common lower value for the carrying capacity of arbitrary perfectly-plastic plates is obtained.

Some examples of comparison with accurate solutions are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
2. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
3. *Ходж Ф.* Пластический анализ конструкций. 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 4, 1980 Механика

В. В. ДОРОГИНИН

О ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ БЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ ОРТОТРОПНОЙ ТРУБЫ

1. Рассмотрим равновесие упругой однородной цилиндрически ортотропной трубы, нагруженной заданными поверхностными усилиями. Пусть ось анизотропии совпадает с геометрической осью цилиндра. Для упрощения выкладок предположим, что массовые силы отсутствуют, а поверхностная нагрузка симметрична относительно некоторой плоскости, проходящей через ось трубы и, следовательно, представима неполными рядами Фурье по углу θ

$$\sigma_{r\theta}=\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}\sigma_{r\theta k}^{(b)}\sin k\theta,\qquad \sigma_r=\sum_{k=0,2,4,\ldots}^{\infty}\sigma_{rk}^{(b)}\cos k\theta \quad \text{при}\quad r=b$$

$$\sigma_{r\theta}=\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}\sigma_{r\theta k}^{(a)}\sin k\theta,\qquad \sigma_r=\sum_{k=0,2,4,\ldots}^{\infty}\sigma_{rk}^{(a)}\cos k\theta \quad \text{при}\quad r=a$$

Через a, b обозначены соответственно внутренний и внешний радиусы трубы.

Система уравнений линейной теории упругости в случае плоской деформации приводится к одному уравнению для функции напряжений F [1]

$$\beta_{22}F_{,rrrr}^{(\mathrm{IV})}+\frac{2\beta_{12}+\beta_{66}}{r^2}F_{,rr\theta\theta}^{(\mathrm{IV})}+\frac{\beta_{11}}{r^4}F_{,\theta\theta\theta\theta}^{(\mathrm{IV})}+\frac{2\beta_{22}}{r}F_{,rrr}^{\prime\prime\prime}-$$

$$-\frac{\beta_{66}+2\beta_{12}}{r^3}F_{,r\theta\theta}^{\prime\prime\prime}-\frac{\beta_{11}}{r^2}F_{,rr}^{\prime\prime}+\frac{2\beta_{11}+2\beta_{12}+\beta_{66}}{r^4}F_{,\theta\theta}^{\prime\prime}+\frac{\beta_{11}}{r^3}F_{,r}^{\prime}=0 \qquad (1.1)$$

где β_{ij} — приведенные упругие постоянные. Напряжения выражаются через функцию F по формулам

$$\sigma_r=\frac{1}{r}F_{,r}^{\prime}+\frac{1}{r^2}F_{,\theta\theta}^{\prime\prime};\qquad \sigma_\theta=F_{,rr}^{\prime\prime};\qquad \sigma_{r\theta}=-\left(\frac{F_{,\theta}^{\prime}}{r}\right)_{,r}^{\prime} \qquad (1.2)$$

Деформации связаны с напряжениями обобщенным законом Гука

$$\varepsilon_r=\beta_{11}\sigma_r+\beta_{12}\sigma_\theta,\quad \varepsilon_\theta=\beta_{12}\sigma_r+\beta_{22}\sigma_\theta,\quad \gamma_{r\theta}=\beta_{66}\sigma_{r\theta}$$

Ищем решение уравнения (1.1) в виде

$$F=\sum_{k=0,2,4,\ldots}^{\infty}f_k(r)\cos k\theta$$

Получаем для $f_k(r)$ уравнение Эйлера 4-го порядка. Его решение

$$f_k(r) = \sum_{i=1}^{4} c_{ki} r^{\alpha_{ki}}$$

где α_{ki} — корни характеристического уравнения. Предполагаем для определенности, что кратных или комплексных корней нет.

$$\alpha_{k1,2} = 1 \pm \sqrt{y_{k1}} \qquad \alpha_{k3,4} = 1 \pm \sqrt{y_{k2}}$$

$$y_{k1,2} = \frac{1 + m^2 + k^2\gamma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 + m^2 + k^2\gamma)^2 - 4m^2(1 + k^2(k^2 - 2))}$$

$$m^2 = \frac{\beta_{11}}{\beta_{22}}, \qquad \gamma = \frac{2\beta_{12} + \beta_{66}}{\beta_{22}}$$

Формулы (1.2) для напряжений примут вид

$$\sigma_r = \sum_{k=0,2,4,\ldots}^{\infty} \sum_{i=1}^{4} c_{ki}(\alpha_{ki} - k^2) r^{\alpha_{ki}-2} \cos k\theta$$

$$\sigma_\theta = \sum_{k=0,2,4,\ldots}^{\infty} \sum_{i=1}^{4} c_{ki}(\alpha_{ki} - 1)\alpha_{ki} r^{\alpha_{ki}-2} \cos k\theta \tag{1.3}$$

$$\sigma_{r\theta} = \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} \sum_{i=1}^{4} c_{ki}(\alpha_{ki} - 1) k r^{\alpha_{ki}-2} \sin k\theta$$

Произвольные постоянные c_{ki} определяем из граничных условий. Для каждого $k = 2, 4, 6, \ldots$ имеем систему 4-х алгебраических линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{4} c_{ki} d_{ij}^{(k)} = s_{kj}, \quad j = 1, 2, 3, 4 \tag{1.4}$$

где

$$d_{i1}^{(k)} = b^{\alpha_{ik}-2}(\alpha_{ik} - k^2), \qquad d_{i3}^{(k)} = a^{\alpha_{ik}-2}(\alpha_{ik} - k^2)$$

$$d_{i2}^{(k)} = b^{\alpha_{ik}-2}(\alpha_{ik} - 1), \qquad d_{i4}^{(k)} = a^{\alpha_{ik}-2}(\alpha_{ik} - 1)$$

$$s_{k1} = \sigma_{rk}^{(b)}, \quad s_{k2} = \sigma_{r\theta k}^{(b)}, \quad s_{k3} = \sigma_{rk}^{(a)}, \quad s_{k4} = \sigma_{r\theta k}^{(a)}$$

При $k = 0$ используем известное решение задачи о плоской деформации трубы равномерными внутренним и внешним давлениями [1]

$$\sigma_r^{(0)} = \frac{1}{(1-\delta^{2m})}\left[(p\delta^{m+1} - q)\rho^{m-1} + (q\delta^{m-1} - p)\delta^{m+1}\rho^{-m-1}\right]$$

$$\sigma_\theta^{(0)} = \frac{1}{(1-\delta^{2m})}\left[(p\delta^{m+1} - q)\rho^{m-1} - (q\delta^{m-1} - p)\delta^{m+1}\rho^{-m-1}\right]$$

$$\sigma_{r\theta}^{(0)} = 0, \quad p = -\sigma_{r0}^{(a)}, \quad q = -\sigma_{r0}^{(b)}, \quad \delta = \frac{a}{b}, \quad \rho = \frac{r}{b}$$

2. В качестве примера рассмотрим задачу о деформировании кольца нагрузкой

$$\sigma_r = Q\cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad r = b$$
$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \qquad\qquad \text{при} \quad r = a$$

Предположим, что между приведенными упругими постоянными существует зависимость $2\beta_{12} + \beta_{66} = 2\beta_{11}$. Тогда

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_{3,4} = 1 \pm 3m, \qquad m = \sqrt{\frac{\beta_{11}}{\beta_{22}}}$$

Решив систему 4-х уравнений (1.4) при $k = 2$, находим $c_{2i} = c_i$,

$$c_1 = \frac{Q_a\delta^{3m}}{\Delta}\{\delta^{3m}(1+3m) + \delta^{-3m}(1-3m) - 2\delta\}$$

$$c_2 = -\frac{Qm\delta^{3m}ab}{\Delta}\{2-(1+3m)\delta^{1-3m}-(1-3m)\delta^{1+3m}\}$$

$$c_3 = \frac{2Qa^{1+3m}}{3b^{6m}\Delta}[\delta^{1-3m}(1+3m)-3m]$$

$$c_4 = -\frac{Qa^{1+3m}}{\Delta\cdot 3}[6m+\delta^{1+3m}(1-3m)-\delta^{3m-1}(1+3m)]$$

где

$$\Delta = (1-3m)^2(1-\delta^{1+3m})^2-(1+3m)^2(\delta^{3m}-\delta)^2$$

Напряжения в кольце определяем по формулам (1.3). Например,

$$\sigma_\theta = [2c_1 + 3mc_3(1+3m)r^{3m-1} - 3mc_4(1-3m)r^{-1-3m}]\cos 2\theta$$

Заметим, что если $m = \frac{1}{3}$, то корни α_i кратные и $\Delta = 0$. Формулы для напряжений в этом случае получаются путем предельного перехода при $m \to \frac{1}{3}$.

Автор пользуется случаем выразить благодарность научному руководителю профессору Б. Е. Победре за постановку задачи и постоянное внимание к его работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 14 XI 1979

Վ. Վ. ԴՈՐՈԳԻՆԻՆ

ԱՆՎԵՐՋ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԽՈՂՈՎԱԿԻ ՀԱՐԹ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ֆուրյեի շարքերի տեսքով կառուցված է օրթոտրոպ խողովակի հարթ դեֆորմացիայի խնդրի ճշգրիտ լուծումը։ Բերվում է կոնկրետ բեռի համար հաշվարկի օրինակ։

ON PLANE STRAIN OF THE INFINITE CYLINDRICALLY ORTHOTROPIC TUBE

V. V. DOROGININ

S u m m a r y

The plane strain problem for infinite circular cylindrically orthotropic tube under symmetric loading is solved in the form of Fourier series. The example of computation is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М., «Наука», 1977, 416 с.