ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1980

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 3, 1980 Механика

О. М. САПОНДЖЯН

ИЗГИБ ТОНКОЙ ПЛИТЫ ПРИ ЧАСТИЧНОМ НАГРЕВЕ

В задачах термоупругости тонкой плиты применяется линейный закон распределения температуры по толщине (h). При этом в определенных условиях такое температурное поле вызывает в плите деформации растяжения (сжатие) и изгиба. В настоящей работе рассматривается только деформация изгиба, поэтому закон распределения температуры принят в форме

$$T = \frac{2\tau(x, y)}{h}\zeta, \qquad \nabla^2\tau = 0, \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

где оси x и y отнесены к срединной плоскости плиты, а третья ось обозначена через ζ.

Целью настоящей работы является нахождение общего решения дифференциального уравнения изгиба плиты и решение некоторых задач в случае, когда функция $\tau(x, y)$ имеет постоянное значение τ_0 в некоторой части (G_0) области плиты (G), а в ее остальной части (G_1) она равна нулю. При этом, поскольку $\tau(x, y)$ не зависит от координаты ζ, под областью плиты будем подразумевать соответствующую область ее срединной плоскости.

Рассмотренный случай нагревания плиты будем называть частичным нагреванием (очевидно, что соответствующее температурное поле можно создать, если термоизолировать друг от друга части плиты, соответствующие областям G_0 и G_1).

Отметим, что при нахождении указанного общего решения используется метод построения общего решения дифференциального уравнения изгиба плиты под действием частичной нагрузки [1].

§ 1. *Общее решение*

Обозначим прогибы в областях G_0 и G_1 соответственно через w_0 и w_1 и представим их в виде

$$w_0 = \Phi(x, y), \quad w_1 = f(x, y) + \Phi(x, y) \tag{1.1}$$

где $f(x, y)$ и $\Phi(x, y)$ — бигармонические функции.

Назовем $f(x, y)$ частным решением дифференциального уравнения изгиба плиты при частичном нагреве. Эту функцию определим из следующих условий на l, разделяющей области G_0 и G_1:

$$w_1 = w_0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \nu} = \frac{\partial w_0}{\partial \nu} \tag{1.2}$$

$$M_{1\nu} = M_{0\nu}, \quad H_{1\nu} = H_{0\nu}$$

$$Q_{1\nu} = Q_{0\nu}$$

где ν — нормаль к линии l, направленная от области G_0 к области G_1, или наоборот, а M_ν, H_ν и Q_ν — соответственно изгибающий момент, крутящий момент и поперечная сила.

Внутренние силовые факторы определяются обычными формулами изгиба тонкой плиты лишь с тем отличием, что для области G_0 к выражениям изгибающих моментов добавляется член

$$-\frac{2D(1+\mu)\alpha\tau_0}{h}$$

где D — жесткость плиты, μ — коэффициент Пуассона, α — коэффициент теплового расширения.

С учетом (1.1), условия (1.2) приводятся к виду

$$f_l = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_l = 0 \tag{1.3}$$

$$(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{d\bar{z}}{dz} - \frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}\right)_l = -2\varkappa \tag{1.4}$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial \bar{z}} dz - \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial \bar{z}^2} d\bar{z}\right)_l = 0 \tag{1.5}$$

где $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ — комплексные переменные, а

$$\varkappa = \frac{(1+\mu)\alpha\tau_0}{2h} \tag{1.6}$$

Важно отметить, что условия (1.3) равносильны условиям

$$f(z_0, \bar{z}_0) = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_l = 0 \tag{1.7}$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$ — произвольно фиксированная на l точка.

Для определения из (1.4)—(1.7) частного решения f, выразим его через две аналитические функции $u(z)$ и $v(z)$ формулой Гурса:

$$f = \bar{z}u(z) + z\overline{u(z)} + v(z) + \overline{v(z)} \tag{1.8}$$

Внеся (1.8) в (1.7), (1.4) и (1.5), получим

$$\bar{z}_0 u(z_0) + z_0\overline{u(z_0)} + v(z_0) + \overline{v(z_0)} = 0 \tag{1.9}$$

$$\bar{z}_l u'(z_l) + \overline{u(z_l)} + v'(z_l) = 0 \tag{1.10}$$

$$[\bar z_l u''(z_l) + v''(z_l)]\left(\frac{dz}{d\bar z}\right)_l - \frac{1+\mu}{1-\mu}[u'(z_l) + \overline{u'(z_l)}] = -\frac{2\varkappa}{1-\mu} \tag{1.11}$$

$$u''(z_l)\,dz_l - \overline{u''(z_l)}\,d\bar z_l = 0 \tag{1.12}$$

где штрихи над буквами обозначают производные соответствующего порядка.

Из (1.12) следует, что

$$u'(z_l) - \overline{u'(z_l)} = ic_0, \tag{1.13}$$

где c_0 — действительная постоянная.

Учитывая очевидные соотношения

$$\bar z_l u''(z_l)\left(\frac{dz}{d\bar z}\right)_l = \frac{d}{d\bar z_l}[\bar z u'(z_l)] - u'(z_l)$$

$$v''(z_l)\left(\frac{dz}{d\bar z}\right)_l = \frac{d}{d\bar z_l}[v'(z_l)]$$

из (1.10) получим

$$\frac{d}{d\bar z_l}[\bar z_l u'(z_l) + v'(z_l)] - \frac{2}{1-\mu}u'(z_l) - \frac{1+\mu}{1-\mu}\overline{u'(z_l)} = -\frac{2\varkappa}{1-\mu}$$

Внеся сюда значение функции $u'(z_l)$ из (1.13), после интегрирования будем иметь

$$\bar z_l u'(z_l) + v'(z_l) - \frac{3+\mu}{1-\mu}\overline{u(z_l)} = -\frac{2\varkappa}{1-\mu}\bar z_l + \frac{2ic_0\bar z_l}{1-\mu} + c_1 + ic_2 \tag{1.14}$$

где c_1 и c_2 — действительные постоянные.

Сопоставляя (1.10) и (1.14), приходим к результату

$$u(z_l) = \frac{\varkappa}{2}z_l + \frac{ic_0}{2}z_l - \frac{1-\mu}{4}(c_1 - ic_2) \tag{1.15}$$

Очевидно, что

$$u(z) = [u(z_l)]_{z_l = z}$$

Тогда из (1.15) будем иметь

$$u(z) = \frac{\varkappa}{2}z + \frac{ic_0}{2}z - \frac{1-\mu}{4}(c_1 - ic_2)$$

Подчиним это выражение условию $u(0)=0$ [1] и, кроме того, учтем, что величина $\frac{ic_0}{2}z$ не вызывает прогиба. В результате получим

$$u(z) = \frac{\varkappa}{2}z \tag{1.16}$$

С учетом этой формулы из (1.10) находим

$$v'(z_l) = -\varkappa \bar{z}_l \tag{1.17}$$

Предположим, что уравнение линии l задано в комплексной форме

$$\bar{z}_l = \Omega(z_l) \tag{1.18}$$

Тогда из (1.17) получим

$$v(z) = -\varkappa \int\limits_{z_0}^{z} \Omega(z)\,dz + c_3 + ic_4 \tag{1.19}$$

где для упрощения дальнейших выкладок за нижний предел интеграла принята фиксированная на l точка, в которой имеет место условие (1.9).

Внеся выражения (1.16) и (1.19) при $z=z_0$ в (1.9), находим

$$c_3 = -\frac{\varkappa}{2} z_0 \bar{z}_0 \tag{1.20}$$

Легко заметить, что постоянная ic_4, входящая в (1.19), не вызывает прогиба, поэтому примем $c_4=0$.

Тогда из (1.19), с учетом (1.20), получим

$$v(z) = -\varkappa \left[\int\limits_{z_0}^{z} \Omega(z)\,dz + \frac{z_0 \bar{z}_0}{2} \right] \tag{1.21}$$

Частное решение f определяется согласно (1.8), с учетом (1.16) и (1.21)

$$f = \varkappa \left[z\bar{z} - 2\,\mathrm{Re} \int\limits_{z_0}^{z} \Omega(z)\,dz - z_0 \bar{z}_0 \right] \tag{1.22}$$

где Re — символ действительной части.

Внеся (1.22) в (1.1), будем иметь

$$w_0 = \Phi$$

$$w_1 = \varkappa \left[z\bar{z} - 2\,\mathrm{Re} \int\limits_{z_0}^{z} \Omega(z)\,dz - z_0 \bar{z}_0 \right] + \Phi$$

Для упрощения дальнейших выкладок заметим, что функцию

$$\varkappa (z\bar{z} - z_0 \bar{z}_0)$$

можно включить в состав функции Φ. Тогда предыдущие формулы примут вид

$$w_0 = -\varkappa (z\bar{z} - z_0 \bar{z}_0) + \Phi \tag{1.23}$$

$$w_1 = -2\varkappa \operatorname{Re}\int_{z_0}^{z} \Omega(z)\,dz + \Phi \tag{1.24}$$

Этими формулами завершается построение общего решения дифференциального уравнения тонкой плиты при частичном нагреве.

Важно отметить, что функции w_0 и w_1 должны быть регулярными соответственно в областях $G_0 + l$ и $G_1 + l$. Если при этом интеграл

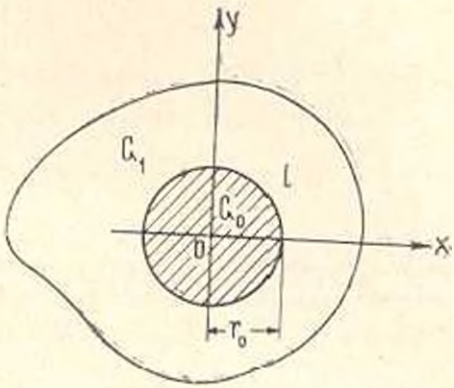
$$\int_{z_0}^{z} \Omega(z)\,dz \tag{1.25}$$

окажется аналитической функцией в области $G_1 + l$, то бигармоническая функция Φ будет регулярной[1] во всей области плиты.

§ 2. *Область G_0 есть круг*

Рассмотрим случай, когда область G_0 есть круг радиуса r_0 с центром в начале координат (фиг. 1). Уравнение окружности будет

$$\bar{z}_l = \frac{r_0^2}{z_l} \tag{2.1}$$



Фиг. 1.

Сопоставление (2.1) с (1.18) дает

$$\Omega(z_l) = \frac{r_0^2}{z_l}$$

Следовательно,

$$\Omega(z) = \frac{r_0^2}{z} \tag{2.2}$$

Полагая для простоты $z_0 = r_0$, находим

$$\int_{z_0}^{z} \Omega(z)\,dz = r_0^2 \ln \frac{z}{r_0}$$

Теперь общее решение (1.23) и (1.24) представится в виде

$$w_0 = -\varkappa (z\bar{z} - r_0^2) + \Phi \tag{2.3}$$

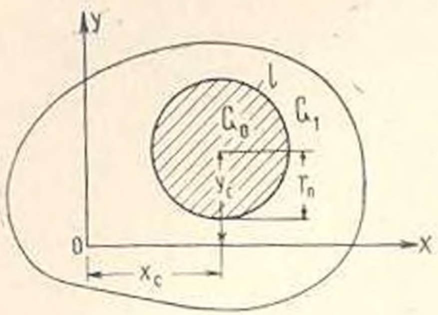
$$w_1 = -\varkappa r_0^2 \ln \frac{z\bar{z}}{r_0^2} + \Phi \tag{2.4}$$

Из этих формул видно, что бигармоническая функция Φ будет регулярной во всей области плиты.

---

[1] Регулярной в данной области будем называть бигармоническую функцию непрерывную вместе со своими производными до третьего порядка включительно в той же области.

Заменив в формулах (2.3) и (2.4) z на $z - z_c$ и $\bar{z}$ на $\bar{z} - \bar{z}_c$, получим общее решение рассматриваемой задачи, когда центр круговой области G_0 находится в точке $z_c = x_c + iy_c$ (фиг. 2):



Фиг. 2.

$$w_0 = -\varkappa\left[(z - z_c)(\bar{z} - \bar{z}_c) - r_0^2\right] + \Phi \tag{2.5}$$

$$w_1 = -\varkappa r_0^2 \ln \frac{(z - z_c)(\bar{z} - \bar{z}_c)}{r_0^2} + \Phi \tag{2.6}$$

Последнюю формулу преобразуем к виду

$$w_1 = -2\varkappa r_0^2\left(\ln\frac{r}{r_0} - \Gamma\right) - 2\varkappa r_0^2\Gamma + \Phi \tag{2.7}$$

где

$$r = \sqrt{(z - z_c)(\bar{z} - \bar{z}_c)} = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} \tag{2.8}$$

а $\Gamma(x, y; x_c, y_c)$ — функция Грина.

Гармоническая функция

$$\ln\frac{r}{r_0} - \Gamma$$

регулярна во всей области плиты и поэтому ее, с соответствующим множителем, можно включить в состав бигармонической функции Φ. Тогда формулы (2.5) и (2.7), с учетом (2.8), заменятся следующими формулами:

$$w_0 = -\varkappa\left\{(z - z_c)(\bar{z} - \bar{z}_c) - r_0^2\left[1 + \ln\frac{(z - z_c)(\bar{z} - \bar{z}_c)}{r_0^2} - 2\Gamma\right]\right\} + \Phi \tag{2.9}$$

$$w_1 = -2\varkappa r_0^2\Gamma + \Phi \tag{2.10}$$

Рассмотрим случай, когда область плиты односвязна и известна функция

$$z = \omega(\zeta) \quad (\omega(0) = 0) \tag{2.11}$$

конформно отображающая область единичного круга на область плиты G. Тогда функция Грина определится известной формулой

$$\Gamma = \frac{1}{2}\ln\frac{(\zeta - \zeta_c)(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_c)}{(1 - \bar{\zeta}_c\zeta)(1 - \zeta_c\bar{\zeta})} \tag{2.12}$$

где ζ_c — точка единичного круга, соответствующая центру круга G_0.

Учитывая (2.12), из (2.9) и (2.10) для односвязной плиты получим

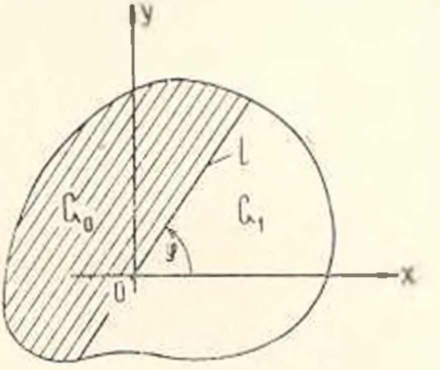
$$w_0 = -\varkappa \left\{ (z - z_c)(\bar{z} - \bar{z}_c) - r_0^2 \left[1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \ln \frac{(z - z_c)(\bar{z} - \bar{z}_c)(1 - \bar{\zeta}_c \zeta)(1 - \zeta_c \bar{\zeta})}{r_0^2 (\zeta - \zeta_c)(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_c)} \right] \right\} + \Phi \tag{2.13}$$

$$w_1 = -\varkappa r_0^2 \ln \frac{(\zeta - \zeta_c)(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_c)}{(1 - \bar{\zeta}_c \zeta)(1 - \zeta_c \bar{\zeta})} + \Phi \tag{2.14}$$

§ 3. *Области G_0 и G_1 разделены прямой линией*

Пусть линия раздела областей G_0 и G_1 есть прямая, проходящая через начало координат (фиг. 3).



Фиг. 3.

Уравнение этой прямой будет иметь вид

$$\bar{z}_l = m z_l \tag{3.1}$$

где

$$m = \frac{1 - i\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1 + i\,\mathrm{tg}\,\varphi} \quad \left(\bar{m} = \frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1 - i\,\mathrm{tg}\,\varphi} \right) \tag{3.2}$$

Здесь φ — угол между l и осью x.

Согласно (1.18) и (3.1)

$$\Omega(z) = mz \tag{3.3}$$

Учитывая (3.3), общее решение (1.23) и (1.24) для рассматриваемого частичного нагрева представим в виде

$$w_0 = -\varkappa z \bar{z} + \Phi \tag{3.4}$$

$$w_1 = -\frac{\varkappa}{2} (m z^2 + \bar{m} \bar{z}^2) + \Phi \tag{3.5}$$

Из этих формул видно, что бигармоническая функция Φ будет регулярной во всей области плиты.

Решение (3.4) и (3.5) можно привести к следующему, более удобному для применений, виду:

$$w_0 = -\frac{\varkappa}{4} (2 z \bar{z} - m z^2 - \bar{m} \bar{z}^2) + \Phi \tag{3.6}$$

$$w_1 = \frac{\varkappa}{4} (2 z \bar{z} - m z^2 - \bar{m} \bar{z}^2) + \Phi \tag{3.7}$$

В частности, когда линия l совпадает с осью y, будем иметь

$$w_0 = -\varkappa x^2 + \Phi \tag{3.8}$$

$$w_1 = \varkappa x^2 + \Phi \tag{3.9}$$

§ 4. *Применение конформного отображения*

Для вычисления интеграла, входящего в (1.24), можно воспользоваться методом конформного отображения.

Рассмотрим случай, когда l есть замкнутая линия, расположенная в области плиты.

Поскольку область определения указанного интеграла есть $G_1 + l$ и, кроме того, этот интеграл не зависит от контурных условий плиты, указанную область можно расширить до бесконечности. Таким образом, можно принять, что область определения интеграла, входящего в (1.24), есть бесконечная односвязная область с отверстием, контуром которого является линия l. На эту область в плоскости z и будем конформно отображать бесконечную область плоскости ζ с круговым отверстием.

Пусть такое отображение осуществляется с помощью соотношения

$$z = F(\zeta) \tag{4.1}$$

Примем для простоты, что радиус указанного круга равен 1, а центр его находится в начале координат плоскости ζ. Обозначим через γ контур круга.

Из (4.1) имеем

$$\bar{z}_l = \overline{F(\zeta_\gamma)} = \bar{F}(\bar{\zeta}_\gamma)$$

откуда, учитывая очевидное соотношение $\zeta_\gamma \bar{\zeta}_\gamma = 1$, получим

$$\bar{z}_l = \bar{F}\left(\frac{1}{\zeta_\gamma}\right)$$

Сопоставляя эту формулу с формулой (1.18), приходим к формуле

$$\Omega(z) = \bar{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \tag{4.2}$$

Внеся это значение функции $\Omega(z)$ в (1.24) и для простоты полагая $z_0 = F(1)$, общее решение (1.23) и (1.24) представим в виде

$$w_0 = -\varkappa(z\bar{z} - z_0\bar{z}_0) + \Phi \tag{4.3}$$

$$w_1 = -2\varkappa \operatorname{Re} \int_\gamma^\zeta \bar{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right) F'(\zeta)\, d\zeta + \Phi \tag{4.4}$$

В качестве примера применения этих формул рассмотрим случай, когда G_0 есть эллипс с полуосями a и b.

Совместим оси x и y соответственно с большой и малой осями эллипса (фиг. 4).

Внешность единичного круга отображается на внешность эллипса соотношением

$$z = F(\zeta) = k\left(\zeta + \frac{\lambda}{\zeta}\right) \tag{4.5}$$

где

$$k = \frac{a+b}{2}, \qquad \lambda = \frac{a-b}{a+b}$$

Из (4.5) имеем

$$\overline{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = k\left(\frac{1}{\zeta} + \lambda\zeta\right), \qquad F'(\zeta) = k\left(1 - \frac{\lambda}{\zeta^2}\right)$$

Внеся эти значения в (4.4), общее решение (4.3) и (4.4) представим в окончательном виде

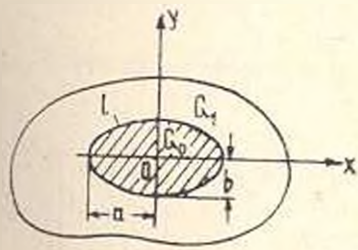
$$w_0 = -\varkappa(z\overline{z} - a^2) + \Phi \tag{4.6}$$

$$w_1 = -\varkappa k^2\left[(1-\lambda^2)\zeta\overline{\zeta} + \frac{\lambda}{2}\left(\zeta^2 + \overline{\zeta}^2 + \frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\overline{\zeta}^2} - 4\right)\right] + \Phi \tag{4.7}$$

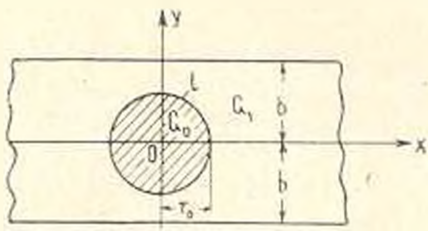
§ 5. *Задачи*

1. Изгиб свободно опертой по контуру бесконечной полосы в случае, когда область G_0 есть круг с центром в произвольной точке продольной оси полосы

Обозначим через $2b$ ширину полосы, а через r_0 — радиус области G_0 (фиг. 5).



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Для определения прогибов полосы воспользуемся формулами (2.13) и (2.14) при $z_c = \overline{z}_c = 0$ $(\zeta_c = \overline{\zeta}_c = 0)$

$$w_0 = -\varkappa\left[z\overline{z} - r_0^2\left(1 + \ln\frac{z\overline{z}}{r_0^2\zeta\overline{\zeta}}\right)\right] + \Phi \tag{5.1}$$

$$w_1 = -\varkappa r_0^2 \ln\zeta\overline{\zeta} + \Phi \tag{5.2}$$

Контурными условиями полосы будут

$$w_1 = 0, \quad \nabla^2 w_1 = 0 \quad (y = \pm b) \tag{5.3}$$

Так как функция Грина $\left(\text{в данном случае } \frac{1}{2}\ln\zeta\bar{\zeta}\right)$ обращается в нуль на контуре плиты и, кроме того, она является гармонической функцией, то, в силу условий (5.3), из (5.2) получим для точек контура полосы

$$\Phi = 0, \quad \nabla^2\Phi = 0 \tag{5.4}$$

Поскольку Φ является регулярной бигармонической функцией во всей области полосы, то из (5.4) следует, что она тождественно равна нулю в указанной области. Следовательно, из (5.1) и (5.2) сразу получим решение рассматриваемой задачи

$$w_0 = -\varkappa\left[z\bar{z} - r_0^2\left(1 + \ln\frac{z\bar{z}}{r_0^2\zeta\bar{\zeta}}\right)\right] \tag{5.5}$$

$$w_1 = -\varkappa r_0^2 \ln\zeta\bar{\zeta} \tag{5.6}$$

Область единичного круга отображается на область полосы с помощью функции

$$z = \omega(\zeta) = \frac{2b}{\pi}\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta} \tag{5.7}$$

откуда

$$\zeta = \frac{e^{\frac{\pi z}{2b}} - 1}{e^{\frac{\pi z}{2b}} + 1} \tag{5.8}$$

Внеся (5.8) в (5.5) и (5.6) и перейдя к действительным переменным x и y, приходим к окончательному результату

$$w_0 = -\varkappa\left\{x^2 + y^2 - r_0^2\left[1 + \ln\frac{(x^2+y^2)\left(\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2b} + \cos\frac{\pi y}{2b}\right)}{r_0^2\left(\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2b} - \cos\frac{\pi y}{2b}\right)}\right]\right\} \tag{5.9}$$

$$w_1 = -\varkappa r_0^2 \ln\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2b} - \cos\frac{\pi y}{2b}}{\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2b} + \cos\frac{\pi y}{2b}} \tag{5.10}$$

Учитывая, что

$$\lim_{y\to 0\ x\to 0}\frac{(x^2+y)\left(\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2b} + \cos\frac{\pi y}{2b}\right)}{\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2b} - \cos\frac{\pi y}{2b}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2b} + 1\right)}{\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2b} - 1} = \left(\frac{4b}{\pi}\right)^2$$

из (5.9) находим прогиб центра области G_0

$$w_0 = \varkappa r_0^2\left(1 + 2\ln\frac{4\delta}{\pi r_0}\right) \tag{5.11}$$

2. Изгиб свободно опертой по контуру правильной многоугольной плиты в случае, когда область G_0 есть круг, центр которого совпадает с центром многоугольника

Центр многоугольника примем за начало координат, а ось x проведем через одну из вершин многоугольника. Обозначим через R радиус окружности, описанной вокруг многоугольника, а через r_0 — радиус круга G_0.

Прогибы многоугольника, как и в предыдущей задаче, будут определяться формулами (5.5) и (5.6).

Отображающая функция дается формулой Кристоффеля-Шварца

$$z = \omega(\zeta) = c\int_0^{\zeta}(1 - t^n)^{-\frac{2}{n}}\,dt \tag{5.12}$$

Здесь n — число сторон многоугольника, а постоянная c определяется формулой [1]

$$c = \frac{R}{\int\limits_0^1 (1 - t^n)^{-\frac{2}{n}}\,dt} = \frac{n\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1 - \frac{2}{n}\right)} \tag{5.13}$$

где Γ — гамма-функция.

Некоторые значения для $\frac{c}{R}$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

n	3	4	5	6	8	12
$c:R$	0.5661	0.7628	0.8511	0.8985	0.9442	0.9759

Функция (5.12) при $|\zeta| \leqslant 1$ разлагается в степенной ряд

$$\omega(\zeta) = c\left(\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn+1}\zeta^{kn+1}\right) \tag{5.14}$$

где

$$c_{kn+1} = \frac{2(n+2)(2n+2)\ldots[(k-1)n+2]}{n^k(kn+1)k!} \tag{5.15}$$

Пользуясь (5.14), из (5.5) и (5.6) можно определить прогибы в любой точке многоугольника. В частности, используя предельный переход

$$\lim_{\zeta \to 0} \frac{z}{\zeta} = \lim_{\zeta \to 0} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} = \omega'(0) = c$$

из (5.5) определим прогиб в центре правильного многоугольника

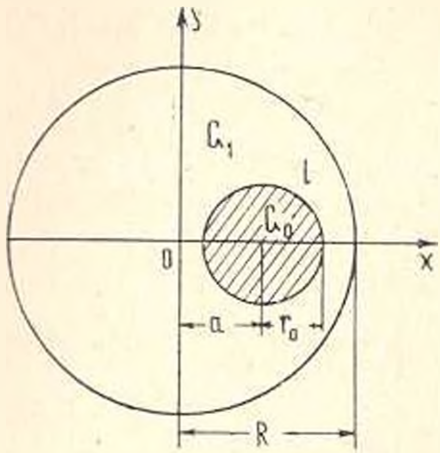
$$w_0 = \varkappa r_0^2 \left(1 + 2 \ln \frac{c}{r_0} \right)$$

3. Изгиб заделанной круглой плиты в случае, когда область G_0 есть круг, центр которого не совпадает с центром области плиты

Центр круглой плиты примем за начало координат (фиг. 6) и обозначим через R радиус этого круга, r_0 — радиус области G_0.

Без ограничения общности примем

$$x_c = a, \quad y_c = 0 \quad (z_c = \bar{z}_c = a)$$



Фиг. 6.

Имея в виду, что в рассматриваемом случае

$$z = \omega(\zeta) = R\zeta \tag{5.16}$$

из формул (2.13) и (2.14) получим

$$w_0 = -\varkappa \left\{ (z-a)(\bar{z}-a) - r_0^2 \left[1 + \ln \frac{(R^2 - az)(R^2 - a\bar{z})}{R^2 r_0^2} \right] \right\} + \Phi \tag{5.17}$$

$$w_1 = -\varkappa r_0^2 \ln \frac{R^2 (z-a)(\bar{z}-a)}{(R^2 - az)(R^2 - a\bar{z})} + \Phi \tag{5.18}$$

Из контурных условий плиты с применением интеграла типа Коши [2] для бигармонической функции Φ имеем

$$\Phi = -\varkappa \frac{r_0^2 (R^2 - r^2)(R^4 - a^2 r^2)}{R^2 (R^4 - 2R^2 ar \cos\theta + a^2 r^2)} \tag{5.19}$$

где r и θ — полярные координаты.

Представим теперь прогибы (5.17) и (5.18) в окончательном виде

$$w_0 = -\varkappa \left[r^2 - 2ar\cos\theta - r_0^2 \left(1 + \ln \frac{R^4 - 2R^2 ar\cos\theta + a^2 r^2}{R^2 r_0^2} \right) + \frac{r_0^2 (R^2 - r^2)(R^4 - a^2 r^2)}{R^2 (R^4 - 2R^2 ar\cos\theta + a^2 r^2)} \right] \tag{5.20}$$

$$w_1 = -\varkappa r_0^2 \left[\ln \frac{R^2 (r^2 - 2ar\cos\theta + a^2)}{R^4 - 2R^2 ar\cos\theta + a^2 r^2} + \frac{(R^2 - r^2)(R^4 - a^2 r^2)}{R^2 (R^4 - 2R^2 ar\cos\theta + a^2 r^2)} \right] \tag{5.21}$$

В частном случае, когда $a = 0$, будем иметь

$$w_0 = -\varkappa\left[r^2 - r_0^2\left(1 + 2\ln\frac{R}{r_0}\right) + \frac{r_0^2(R^2 - r^2)}{R^2}\right] \tag{5.22}$$

$$w_1 = -\varkappa r_0^2\left(2\ln\frac{r}{R} + 1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{5.23}$$

При $r_0 = R$ из (5.22) и (5.23) будем иметь

$$w_0 = 0, \quad w_1 = 0$$

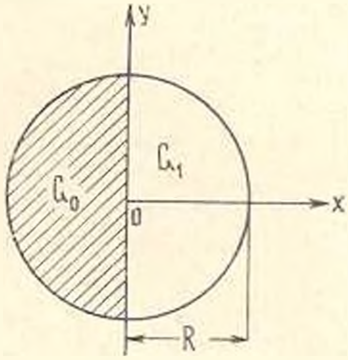
что совпадает с известным результатом [3].

4. Изгиб свободно опертой по контуру круглой плиты в случае, когда области G_0 и G_1 разделены прямой линией, делящей область плиты на две равные части

Линию раздела областей G_0 и G_1 совместим с осью y, а центр области плиты примем за начало координат (фиг. 7).

Для рассматриваемого случая общее решение представится формулами (3.8) и (3.9), которые в полярных координатах будут иметь вид

$$\begin{aligned} w_0 &= -\frac{\varkappa}{2} r^2 (1 + \cos 2\theta) + \Phi \\ w_1 &= \frac{\varkappa}{2} r^2 (1 + \cos 2\theta) + \Phi \end{aligned} \tag{5.24}$$



Фиг. 7.

Бигармоническая функция Φ в области плиты разлагается в ряд

$$\Phi = A_0 + B_2 r^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{2n-1} r^{2n-1} + B_{2n-1} r^{2n+1}\right)\cos(2n-1)\theta \tag{5.25}$$

Коэффициенты этого ряда подлежат определению из контурных условий.

Из условий равенства нулю на контуре соответственно прогиба и изгибающего момента имеем

$$\Phi(R, \theta) = \begin{cases} -\dfrac{\varkappa}{2} R^2 (1 + \cos 2\theta) & \text{при } -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\varkappa}{2} R^2 (1 + \cos 2\theta) & \text{при } \dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \tag{5.26}$$

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r=R} = \begin{cases} -(1+\mu)\varkappa(1+\cos 2\theta) & \text{при } -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ (1+\mu)\varkappa(1+\cos 2\theta) - 4\varkappa & \text{при } \dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \tag{5.27}$$

Внеся (5.25) в (5.26) и (5.27), определим указанные коэффициенты A_k, B_k. Далее, подставив найденные значения этих коэффициентов в (5.25), после некоторых преобразований получим

$$\Phi = \frac{\varkappa}{1+\mu}(R^2-r^2) - \frac{4\varkappa}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{r}{R}\right)^{2n-1}}{(4n^2-1)(4n+\mu-1)}\left[(1-\mu)r^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{2n(3+\mu)+1-\mu}{2n-3}R^2\right]\cos(2n-1)\theta \tag{5.28}$$

С учетом этого выражения прогибы (5.24) представим в окончательном виде

$$w = \mp\frac{\varkappa}{2}r^2(1+\cos 2\theta) + \frac{\varkappa}{1+\mu}(R^2-r^2) -$$

$$-\frac{4\varkappa}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{r}{R}\right)^{2n-1}}{(4n^2-1)(4n+\mu-1)}\left[(1-\mu)r^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{2(3+\mu)n+1-\mu}{2n-3}R^2\right]\cos(2n-1)\theta \tag{5.29}$$

где из двух знаков верхний относится к области G_0+l, а нижний — к области G_1+l.

Заметим, что когда температура $\tau(x, y)$ имеет постоянное значение τ_0 во всей области плиты G, прогибы определяются формулой [3]

$$w = \frac{2\varkappa}{1+\mu}(R^2-r^2)$$

При этом плита остается ненапряженной

$$M_r = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + 4\varkappa\right) = 0$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 30 XI 1979

Օ. Մ. ՍԱՊՈՆՋՅԱՆ

ԲԱՐԱԿ ՍԱԼԻ ԾՌՈՒՄԸ ՄԱՍՆԱԿԻՈՐԵՆ ՏԱՔԱՑՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտվում է սալի ծռման ջերմաառաձգական խնդրի այն դեպքը, երբ նրա մի մասը տաքացվում է, իսկ մյուս մասի ջերմաստիճանը պահվում է հավասար զրոյի։ Տաքացման մասում ջերմաստիճանը ըստ սալի հաստության փո-

փոփոխվում է գծայնորեն, իսկ այդ մասի ներքևի և վերևի նիստերում ունի միևնույն հաստատուն, բայց տարբեր նշանի արժեքներ։ Ուսումնասիրության նպատակն է նշված ջերմաստիճանային դաշտի պայմաններում որոշել սալի առաձգական մակերևույթի դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը և լուծել կոնկրետ խնդիրներ։ (1.23) և (1.24) ընդհանուր լուծումը ստացվել է այն պայմանից, որ սալի տաքացվող և չտաքացվող մասերը սահմանազատող մակերևույթի բոլոր կետերում այդ մասերից մեկից մյուսն անցնելիս դեֆորմացիաները և ներքին ուժերը մնում են անընդհատ։

Վերջնական տեսքում ընդհանուր լուծումը, բացի հայտնի մասնակի լուծումից, որը հաշվի է առնում ջերմաստիճանի խզումը, պարունակում է նաև մեկ բիհարմոնիկ ֆունկցիա, որը որոշվում է խնդրի եզրային պայմաններից։

BENDING OF A PARTIALLY HEATED PLATE

O. M. SAPONJIAN

Summary

This paper is concerned with the thermoelastic problem for a plate in case when some part of the plate is heated while the temperature of its remaining part is zero. It is supposed that in the heated part the temperature is distributed linearly through the thickness of the plate and has the same constant values both on the upper and lower planes of the plate, minus and plus respectively.

The aim of this paper is to obtain the general solution to the plate differential equation and solve some particular problems. General solutions (1.23) and (1.24) are obtained from certain conditions, where at all the points of the surface dividing heated and unheated parts of the plate, deformations and inner forces remain continuous.

In its final form, the general solution contains the well-known partial solution reflecting discontinuity of temperature, as well as one biharmonic function which is determined from the boundary conditions for a particular problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сапонджян О. М.* Изгиб тонких плит. Ереван, Изд. «Анастан», 1975.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., АН СССР, 1954.
3. *Галеркин Б. Г.* Собрание сочинений, т. II. М., АН СССР, 1953.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIII, № 3, 1980 Механика

Н. Х. АРУТЮНЯН, М. А. СУМБАТЯН

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ СЛОЯ

Рассматривается плоская задача теории установившейся ползучести о действии распределенной нагрузки на слой конечной толщины, лежащий без трения на жестком основании. Материал слоя считается несжимаемым и находящимся в условиях нелинейной ползучести, когда связь между интенсивностями напряжений и скоростей деформации выражается степенным законом.

Указанная задача для случая полуплоскости рассматривалась в [1]. В [2] построено решение этой задачи для тонкого слоя. В настоящей работе предлагается метод, позволяющий получить решение данной задачи для слоя произвольной толщины. Сущность его состоит в следующем.

Закон распределения касательных напряжений в слое представляется в форме (1.7), содержащей некоторую произвольную функцию f и параметр a. Такое представление является естественным обобщением соответствующего выражения (1.6) для касательных напряжений в слое в случае линейной теории.

Это позволяет построить решение рассматриваемой задачи, которое удовлетворяет уравнениям равновесия и граничным условиям, но не удовлетворяет уравнению неразрывности деформаций. Однако структура построенного решения такова, что, пользуясь вариационным принципом Кастилиано, можно так подобрать произвольную постоянную a, чтобы удовлетворить и уравнению совместности Сен-Венана. Таким образом, уравнение совместности удовлетворяется приближенно в вариационном смысле.

В линейном случае данный метод приводит к известному точному решению задачи о слое. В общем случае при стремлении толщины слоя к нулю получается решение [2].

1. Пусть на верхнюю грань слоя толщины h, покоящегося без трения на жестком основании, действует распределенная нормальная нагрузка $p(x_1)$ (фиг. 1).

Слой находится в условиях нелинейной установившейся ползучести, а его материал несжимаем.

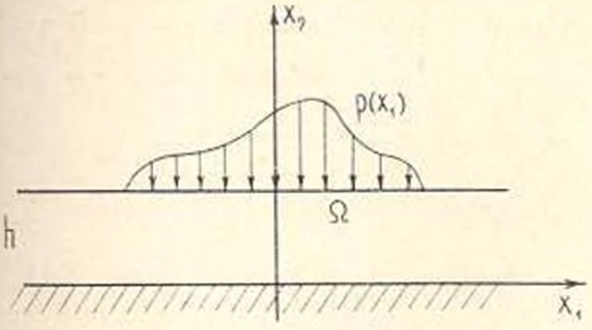
Тогда уравнения квазистатического равновесия

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} &= 0 \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Связь между напряжениями и скоростями деформации при плоской деформации

$$\varepsilon_{11} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}, \quad \varepsilon_{22} = -\varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \sigma_{12} \tag{1.2}$$

где σ_i, ε_i — интенсивности касательных напряжений и скоростей деформации.



Фиг. 1.

Пусть уравнение состояния для материала слоя выражается степенным законом [3, 4]

$$\varepsilon_i = A\sigma_i^m, \quad m > 1 \tag{1.3}$$

Тогда, чтобы получить полную систему уравнений задачи, нужно присоединить еще условие совместности скоростей деформации Сен-Венана

$$\varepsilon_{22,11} - \varepsilon_{22,22} = 2\varepsilon_{12,12} \tag{1.4}$$

и граничные условия:

$$\begin{aligned} &\text{при } x_2 = 0 \quad \sigma_{12} = 0, \quad v_2 = 0 \\ &\text{при } x_2 = h \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = \begin{cases} p(x_1), & x_1 \in \Omega \\ 0 & \text{вне } \Omega \end{cases} \end{aligned} \tag{1.5}$$

где Ω — область действия нагрузки, а $v_i (i = 1, 2)$ — координаты вектора скоростей деформации.

Как известно [5], в случае линейной теории закон распределения касательных напряжений σ_{12} в слое определяется выражением

$$\sigma_{12} = -\frac{2}{\pi} \int_{\Omega} p(\xi)\, d\xi \int_0^{\infty} \frac{h \operatorname{ch} uh \operatorname{sh} ux_2 - x_2 \operatorname{ch} ux_2 \operatorname{sh} uh}{\operatorname{sh} 2uh + 2uh} u \sin u (x_1 - \xi)\, du \tag{1.6}$$

Основываясь на этом представлении, закон распределения тангенциальных напряжений в слое в рассматриваемой нами задаче возьмем в следующей форме:

$$\sigma_{12} = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{\Omega} p(\xi)\, d\xi \int\limits_0^{\infty} \frac{Q}{f(auh)} \frac{\sin u(x_1 - \xi)}{u} du \tag{1.7}$$

где $\quad Q = (auh)^{\nu} \operatorname{ch}(auh)^{\nu} [\operatorname{ch}(aux_2)^{\nu}]^{\nu} - (aux_2)^{\nu} [\operatorname{sh}(aux_2)^{\nu}]^{\nu} \operatorname{sh}(auh)^{\nu}$

$\nu = \dfrac{2}{m+1}$, $a > 0$ — произвольная постоянная, f — некоторая функция, обладающая поведением на бесконечности, необходимым для сходимости несобственного интеграла в (1.7). При этом на верхней грани слоя $\sigma_{12} = 0$, а при $x_2 = 0$ $\sigma_{12} = 0$ в том случае, если $\nu > \dfrac{1}{2}$. Поэтому в дальнейшем на ν (и m) налагаем условие

$$\frac{1}{2} < \nu < 1 \quad \text{или} \quad 1 < m < 3 \tag{1.8}$$

Функция f, а также постоянная a, которая зависит от m, будут определены ниже.

Пользуясь выражением (1.7) для σ_{12}, из 2-го уравнения равновесия (1.1) получим

$$\sigma_{22} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\Omega} p(\xi)\, d\xi \int\limits_0^{\infty} \frac{Q'}{f(auh)} \cos u(x_1 - \xi)\, du \tag{1.9}$$

где

$$Q' = (auh)^{\nu} \operatorname{ch}(auh)^{\nu} \operatorname{ch}(aux_2)^{\nu} - (aux_2)^{\nu} \operatorname{sh}(aux_2)^{\nu} \operatorname{sh}(auh)^{\nu} +$$
$$+ \operatorname{ch}(aux_2)^{\nu} \operatorname{sh}(auh)^{\nu}$$

Удовлетворяя граничному условию (1.5) для σ_{22} при $x_2 = h$, определяем функцию f. Она будет иметь вид

$$f(auh) = \operatorname{sh}[2(auh)^{\nu}] + 2(auh)^{\nu} \tag{1.10}$$

В этом случае внутренний интеграл в (1.9) равен $\dfrac{\pi}{2}\delta(x_1 - \xi)$ (δ — дельта-функция Дирака), откуда следует, что $\sigma_{22} = p(x_1)$ при $x_1 \in \Omega$, $\sigma_{22} = 0$ вне Ω.

Заметим, что при $m = 1$ ($\nu = 1$) $a = 1$, и выражение (1.7) переходит в (1.6).

Решение первого уравнения равновесия дает

$$\sigma_{11} = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{\Omega} p(\xi)\, d\xi \int\limits_0^{\infty} \frac{Q''}{\operatorname{sh}[2(auh)^{\nu}] + 2(auh)^{\nu}} \frac{\cos u(x_1 - \xi)}{u^2} du \tag{1.11}$$

где $\quad Q'' = (auh)^{\nu} \operatorname{ch}(auh)^{\nu} [\operatorname{ch}(aux_2)^{\nu}]^{\nu} - [(aux_2)^{\nu} [\operatorname{sh}(aux_2)^{\nu}]]^{\nu} \operatorname{sh}(auh)^{\nu}$

Заметим, что при выполнении условия (1.8) особенность, содержащаяся во внутреннем интеграле (1.11) при $u = 0$, является интегрируемой.

Перейдем к нахождению скоростей деформации точек слоя. Из (1.2), (1.3) следует

$$\varepsilon_{11} = A\sigma_i^{m-1}\,\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}, \qquad \varepsilon_{12} = A\sigma_i^{m-1}\sigma_{12}, \quad \varepsilon_{22} = -\varepsilon_{11} \tag{1.12}$$

Интенсивность касательного напряжения σ_i имеет вид

$$\sigma_i = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \tag{1.13}$$

Поскольку касательное напряжение σ_{12} обращается в нуль на верхней и нижней гранях слоя, то оно будет мало по сравнению с нормальными напряжениями σ_{22} и σ_{11} всюду в слое. Поэтому без большой погрешности в формуле (1.13) можно пренебречь членом, содержащим σ_{12}. Тогда будем иметь

$$\sigma_i = \frac{|\sigma_{11}-\sigma_{22}|}{2} \tag{1.14}$$

С учетом (1.14) формулы (1.12) дают

$$\varepsilon_{22} = \frac{A}{2^m}\,|\sigma_{22}-\sigma_{11}|^m\,\mathrm{sign}\,(\sigma_{22}-\sigma_{11}) \tag{1.15}$$

или

$$|\varepsilon_{22}|^\mu\,\mathrm{sign}\,\varepsilon_{22} = A^\mu\,\frac{\sigma_{22}-\sigma_{11}}{2} \qquad \left(\mu = \frac{1}{m}\right)$$

что эквивалентно

$$|v_{2,2}|^\mu\,\mathrm{sign}\,\varepsilon_{22} = A^\mu\,\frac{\sigma_{22}-\sigma_{11}}{2} \tag{1.16}$$

Для нахождения скорости v_2 необходимо проинтегрировать это соотношение по x_2. Для этого поступим следующим образом. Используя известное неравенство Гельдера [6] для функций $f = |v_{2,2}|^\mu$ и $g = 1$ с показателями $p = \frac{1}{\mu}$, $q = \frac{1}{1-\mu}$ $(1/p + 1/q = 1)$, получаем

$$\int_0^{x_2} |v_{2,2}|^\mu\,dx_2 \leqslant \left(\int_0^{x_2} |v_{2,2}|\,dx_2\right)^\mu \left(\int_0^{x_2} dx_2\right)^{1-\mu} =$$

$$= [\,|v_2(x_1,\ x_2)| - |v_2(x_1,\ 0)|\,]^\mu\,x_2^{1-\mu}$$

или, с учетом граничного условия $v_2(x_1, 0) = 0$

$$\int_0^{x_2} |v_{2,2}|^\mu\,dx_2 \leqslant |v_2(x_1,\ x_2)|^\mu\,x_2^{1-\mu} \tag{1.17}$$

Легко видеть, что при крайних значениях μ, а именно, при $\mu = 0$ и $\mu = 1$, соотношение (1.17) переходит в равенство

$$\int_0^{x_2} |v_{2,2}|^\mu dx_2 = |v_2(x_1, x_2)|^\mu x_2^{1-\mu} \tag{1.18}$$

которое является точным.

В силу этого естественно предположить, что и для значений μ в интервале $0 < \mu < 1$ погрешность этого равенства невелика. Для истинных же значений скорости перемещения получаемое ниже выражение вида (1.20) является оценкой сверху.

Теперь, с использованием последней формулы, из (1.16) можно определить скорость

$$|v_2(x_1, x_2)|^\mu = \frac{A^\mu}{x_2^{1-\mu}} \int_0^{x_2} \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} dx_2 \operatorname{sign} \varepsilon_{22} \tag{1.19}$$

Из (1.19) после проведения интегрирования в правой части с использованием формул (1.9) и (1.11), в частности, получаем выражение для скорости осадки поверхности слоя (при $x_2 = h$)

$$\begin{gathered} |v_2(x_1, h)|^\mu = \frac{A^\mu}{h^{1-\mu}} \frac{1}{\pi} \int p(\xi)\, d\xi \int_0^\infty L(au) \cos\left(u \frac{x_1 - \xi}{h}\right) du \operatorname{sign} \varepsilon_{22} \\ L(u) = \frac{Q'''}{\operatorname{sh}(2u^\nu) + 2u^\nu} \end{gathered} \tag{1.20}$$

где

$$Q''' = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{1}{\nu}, 1 + \frac{1}{\nu}; u^\nu\right) + \Phi\left(\frac{1}{\nu}, 1 + \frac{1}{\nu}; -u^\nu\right)\right]\left(u^\nu \operatorname{ch} u^\nu + \frac{1+\nu}{\nu} \operatorname{sh} u^\nu\right) - \frac{1}{\nu} \operatorname{ch} u^\nu \operatorname{sh} u^\nu$$

$\Phi(\alpha, \beta; x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [7].

Отметим следующие свойства функции $L(u)$:

1) Она положительна при $u > 0$

2) $$L(0) = 1/2 \tag{1.21}$$

3) $$L(u) \sim \frac{1+\nu}{2\nu^2} \frac{1}{u^\nu} \quad \text{при} \quad u \to +\infty$$

Укажем общий подход, позволяющий определить постоянную a, входящую в решение задачи, из условия удовлетворения уравнению совместности Сен-Венана с помощью вариационного метода Кастилиано.

Известно [3], что вариационным эквивалентом тождества Сен-Венана является принцип Кастилиано, состоящий в том, что фактические значения напряжений в теле доставляют дополнительной работе R минимальное значение по сравнению со всеми соседними значениями напряжений, совместимыми с уравнениями равновесия и с граничными условиями. Легко показать, что в случае физической нелинейности вида (1.3) функция R имеет вид

$$R = \frac{2A}{m+1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{h} \sigma_i^{m+1}\, dx_1 dx_2 \tag{1.22}$$

что с учетом формулы (1.14) дает следующее правило для нахождения постоянной a. Последняя должна быть найдена из условия минимизации функции

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{h} |\sigma_{22} - \sigma_{11}|^{m+1}\, dx_1 dx_2 \tag{1.23}$$

где σ_{22} и σ_{11} даны выражениями (1.9) и (1.11). При этом необходимо выбирать то значение параметра a, реализующее минимум функции (1.23) (в случае, если a неединственно), которое получается непрерывным образом из значения $a = 1$ при непрерывном изменении параметра m от 1 до заданного значения. Конкретная реализация указанного процесса минимизации функции (1.23) может быть осуществлена численно с использованием ЭВМ.

В пункте 2 будет указан способ, позволяющий определить неизвестную a совершенно другим путем.

2. Рассмотрим контактную задачу установившейся ползучести о вдавливании жесткого штампа в слой, физические свойства которого описаны в пункте 1. Трение в области контакта отсутствует.

Исследуем сначала вопрос о характере особенности контактного напряжения в окрестности угла штампа. Покажем, что особенность напряжений такая же, как и полученная в [8] для задачи о трещине в степенно-упрочняющейся среде. Доказательство аналогично изложенному в [8], если доказать, что криволинейный J — интеграл [9]

$$J = \int\limits_{\Gamma} \left| W dx_2 - T \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_1} ds \right| \tag{2.1}$$

по контуру Γ, охватывающему вершину штампа O, не зависит от выбора пути интегрирования. Здесь

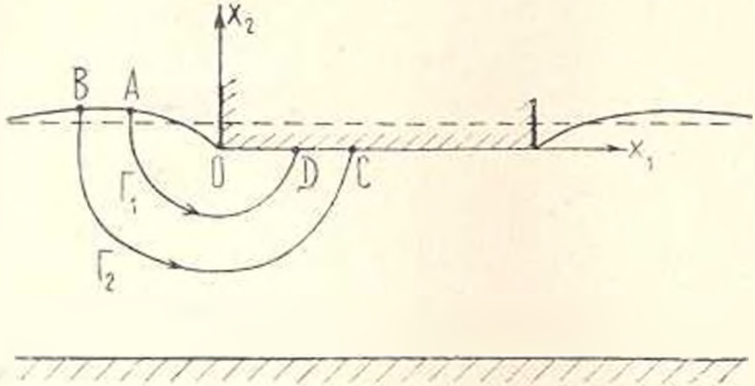
$$W = \int\limits_{0}^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}, \qquad T_i = \sigma_{ij} n_j$$

(n_j — координаты единичной нормали к Γ).

Поскольку рассматриваемая задача решается в рамках теории малых деформаций, то интегралы по отрезкам AB и CD поверхности слоя следует брать по невозмущенной поверхности.

На участке свободной поверхности AB $dx_2 = 0$, $\overline{T} = 0$, поэтому

$$\int\limits_{AB} \left[W dx_2 - \overline{T} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_1} ds \right] = 0$$



Фиг. 2.

На участке области контакта CD $dx_2 = 0$, следовательно,

$$\int\limits_{CD} W dx_2 = 0$$

Кроме того,

$$\int\limits_{CD} \overline{T} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_1} ds = \int\limits_{CD} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_1} n_j ds = \int\limits_{CD} \left\{ \sigma_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} n_1 + \sigma_{12} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} n_2 + \right.$$

$$\left. + \sigma_{12} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} n_1 + \sigma_{22} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} n_2 \right\} ds = 0$$

так как на CD $n_1 = 0$, $\sigma_{12} = 0$ и $\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0$

Таким образом,

$$J_2 - J_1 = \int\limits_{ABCD} \left[W dx_2 - \overline{T} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_1} ds \right]$$

и, переходя от криволинейного интеграла по замкнутому контуру $ABCD$ к двойному интегралу по области, заключенной между кривыми Γ_1 и Γ_2, так же, как и в [9], получим, что

$$J_2 - J_1 = 0 \tag{2.2}$$

Таким образом, J — интеграл не зависит от выбора Γ.

Далее с использованием этого факта, аналогично [8], получаем

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \sim \frac{1}{r} \quad \text{при} \quad r \to 0 \tag{2.3}$$

(r — расстояние до вершины O).

А так как $\varepsilon_{ij} \sim \sigma_{ij}^m$, из (2.3) окончательно имеем

$$\begin{gathered} \sigma_{ij} \sim r^{-1/(m+1)} \\ \varepsilon_{ij} \sim r^{-m/(m+1)} \qquad \text{при} \quad r \to 0 \end{gathered} \tag{2.4}$$

При $m = 1$ из (2.4) получается корневая особенность напряжений и скоростей деформации, что совпадает с известным результатом линейной теории.

Найдем теперь распределение контактного напряжения $p(x_1)$, пользуясь решением плоской задачи установившейся ползучести, полученным в пункте 1.

В этом случае задача сводится к нахождению контактного давления $p(x_1)$ из интегрального уравнения (1.20), рассматриваемого при $x_1 \in \Omega$, причем скорость внедрения основания штампа $v_2(x_1, h)$ является заданной функцией и определяется формой основания штампа. Можно показать, что ядро рассматриваемого уравнения содержит слабую особенность вида $|x_1 - \xi|^{-(1-\nu)}$, и, следовательно, уравнение является фредгольмовым уравнением первого рода.

Пусть область контакта $\Omega = (-b, b)$. Для простоты ограничимся случаем плоского основания штампа. В этом случае $v_2(x_1, h)$ постоянна по x_1.

Положим $\lambda = h/b$. Поскольку по своей сути метод получения интегрального уравнения (1.20), изложенный в пункте 1, ориентирован на случай небольших относительных толщин слоя, будем решать рассматриваемое уравнение асимптотическим методом «малых λ» [5]. Для его успешной реализации осуществим аппроксимацию трансформанты ядра уравнения:

$$L(\alpha u) = \frac{1}{(B^2 + C^2u^2)^{(m+1)/2}} \tag{2.5}$$

которая учитывает все ее свойства (1.21). Здесь

$$B = 2^{\frac{m+1}{2}}, \qquad C = \alpha\left(\frac{2\nu^2}{1+\nu}\right)^{\frac{m+1}{2}} \tag{2.6}$$

С учетом того, что под штампом деформация всюду сжимающая, а следовательно, sign ε_{22} совпадает со знаком $p(x_1)$, приходим к уравнению

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1/\lambda}^{1/\lambda} p(\xi)\,d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iu(x-\xi)}\,du}{(B^2 + C^2u^2)^{(m+1)/2}} = W, \qquad |x| < \frac{1}{\lambda} \tag{2.7}$$

в котором введена безразмерная координата $x = x_1/h$ и обозначено

$$W = h^{1-\nu} \, | v_2(x_1, h) |^{\nu} / A^{\nu} = \mathrm{const}$$

Первый член асимптотики решения уравнения (2.7) методом «малых λ» может быть записан либо в мультипликативном

$$p(x) = q\left(\frac{1}{\lambda} + x\right) q\left(\frac{1}{\lambda} - x\right) / v(x), \qquad |x| < \frac{1}{\lambda} \tag{2.8}$$

либо в аддитивном

$$p(x) = q\left(\frac{1}{\lambda} + x\right) + q\left(\frac{1}{\lambda} - x\right) - v(x), \qquad |x| < \frac{1}{\lambda} \tag{2.9}$$

виде. Здесь $v(x) = WB^{\nu}$ — решение уравнения (2.7) на оси в свертках, а $q(x)$ — решение уравнения Винера-Хопфа на полуоси

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} q(\xi) \, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\xi - x)u} \, du}{(B^2 + C^2 u^2)^{\nu/2}} = W, \qquad x > 0 \tag{2.10}$$

которое строится известным методом факторизации [5] и имеет следующий вид

$$q(x) = W \frac{(BC)^{\nu/2}}{\Gamma\left(1 - \frac{\nu}{2}\right)} \left[x^{-\nu/2} e^{-\frac{B}{C} x} + \left(\frac{B}{C}\right)^{\nu/2} \gamma\left(1 - \frac{\nu}{2}, \frac{B}{C} x\right) \right] \tag{2.11}$$

Здесь $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера, $\gamma(\alpha, x)$ — неполная гамма-функция [7].

Полученное решение имеет на концах штампа степенную особенность вида $x^{-\nu/2}$ или $x^{-1/(\omega+1)}$, что соответствует (2.4). Таким образом, структура исходной аппроксимации (1.7) выбрана так, что решение на концах штампа имеет нужную особенность, то есть подобранная аппроксимация верно отражает эту важную характерную особенность задачи.

Укажем способ нахождения постоянной a, отличный от предложенного в пункте 1. Известно, что при малых λ основной вклад в решение задачи вблизи конца штампа вносит поведение трансформанты ядра интегрального уравнения на бесконечности, а вдали от концов — поведение этой трансформанты в нуле. Поскольку, как видно, например, из (2.6), постоянная a определяет поведение трансформанты $L(au)$ лишь на бесконечности, а $L(0)$ от a не зависит, то очевидно, что от значения этой постоянной зависит коэффициент при особенности решения на концах штампа. Поэтому a может быть найдено из условия приближенного удовлетворения уравнения Сен-Венана вблизи конца, где как раз наиболее велика возможность нарушения сплошности среды.

С этой целью поступим следующим образом. Запишем уравнение сплошности (1.4) с использованием формул (1.12), (1.14) через напряжения. В результате получится нелинейное уравнение, содержащее σ_{11}, σ_{12}, σ_{22} и их частные производные. Эти функции даются формулами (1.7), (1.9), (1.11) и получающимися из них дифференцированием, причем $\rho(x_1)$ уже найдено. Устремляя во всех этих формулах x_2 к h, x_1 к нулю, получим их представление при $x_2 = h$ в окрестности точки $x_1 = 0$ в виде степенных функций от x_1 с некоторыми отрицательными показателями. Подставляя затем эти степенные функции в полученное нелинейное уравнение и пренебрегая в показателях членами вида $1-\nu$, после сокращения на x_1^{-} [illegible] получим для определения величины $c = a^{[illegible]}$ кубическое уравнение с коэффициентами, зависящими только от ν. Решение этого уравнения $c(m)$, непрерывно ответвляющееся от линейного значения $c(1) = 1$, определяет постоянную a.

Значения величины a для некоторых m приведены в табл. 1

Таблица 1

ν	1	0.95	0.9	0.85	0.81
m	1	1.1053	1.2222	1.3529	1.4691
a	1	1.069	1.2374	1.6759	2.7511

Точное решение рассматриваемой здесь задачи связано с математическими трудностями принципиального характера. Для получения приближенного решения были приняты некоторые допущения, которые позволили решение нелинейной краевой задачи теории ползучести для слоя представить в аналитической форме.

Институт механики АН Армянской ССР
Институт проблем механики АН СССР
Поступила 24 III 1980

Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Մ.Ա. ՍՈՒՄԲԱԹՅԱՆ

ՇԵՐՏԻ ՀԱՄԱՐ ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐԸ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է վերջավոր հաստությամբ շերտի վրա բաշխված նորմալ բեռի ազդեցության վերաբերյալ կայունացված ոչ գծային սողքի հարթ խնդիրը։ Կառուցված լուծումը բավարարում է խնդրի բոլոր հավասարումներին և եզրային պայմաններին, բացի Սեն-Վենանի դեֆորմացիաների համատեղելիության հավասարումներից։ Սակայն լուծման կառուցվածքում պարունակվող կամավոր a հաստատունի առկայությունը հնարավորություն է տալիս Սեն-Վենանի հավասարումներին բավարարել մոտավոր վարիացիոն սկզբունքով։

Լուծվել է վերջավոր հաստությամբ շերտի մեջ կոշտ դրոշմի ներդրման կոնտակտային խնդիրը։

THE PLANE PROBLEM IN THE CREEP THEORY FOR A FINITE THICKNESS LAYER

N. CH. HARUTUNIAN, M. A. SUMBATIAN

Summary

The paper deals with the plane problem of a steady non-linear creep under the effect of a normal distributed load on a finite thickness layer. The solution obtained satisfies all the equations and boundary conditions of the problem, except the identity of the Saint-Venan consistency. Nevertheless, the presence of the arbitrary constant *a* in the solution's structure makes it possible to satisfy the latter equation approximately in a variational sense.

The contact problem for the rigid punch pressed into the finite thickness layer is also solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
2. *Сумбатян М. А.* Плоская задача для тонкого слоя в условиях установившейся ползучести. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1980, т. 33, № 1.
3. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960.
4. *Glen J. W.* The creep of polycrystalline ice. Proc. of the Royal Soc. of London. Ser. A., 1955, vol. 228, No. 1175, p. 519—538.
5. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., Наука, 1974.
6. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М., Мир, 1979.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1—2. М., Наука, 1973—1974.
8. *Rice J. R., Rosengren G. F.* Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. J. mechanics and physics of solids. 1968, vol. 16, No. 1, p. 1—12.
9. *Райс Дж.* Математические методы в механике разрушения. В кн.: Разрушение, т. 2, М., Мир, 1975.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 3, 1980 Механика

А. Г. БАГДОЕВ, А. А. МОВСИСЯН

УРАВНЕНИЯ МОДУЛЯЦИИ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ВОЛНАМ В ТОНКИХ ТЕЛАХ

Общий подход получения уравнений модуляций при помощи осредненного лагранжиана дан в [1]. В [2] дается применение метода [1] к исследованию изменения во времени, а также устойчивости групп волн. В работе [3] введением лучевых координат получены возмущенные относительно основной волны уравнения для медленных изменений амплитуд и фаз. Дается применение уравнений к дифракционной задаче вблизи границы света и тени. Аналогично при наличии также и падающей волны получены связанные уравнения для амплитуд и фаз падающей и отраженной волн.

В настоящей работе обобщением метода [1] на случай учета вторых производных от амплитуды для произвольной среды выводятся уравнения модуляции в пространственной задаче. Указано, что из них другим путем следуют результаты [3]. Записаны условия устойчивости, а также расширенные условия устойчивости волн. Приводится асимптотика линейного решения [1] и показано, что уравнения модуляций удовлетворяются. Дано сравнение с недиспергирующей средой. Дается постановка решения соответствующей нелинейной задачи. Полученные уравнения модуляций и условия устойчивости применены к задачам распространения изгибных волн в пластинах и оболочках.

1. *Вывод уравнений модуляций*

Уравнения для медленно изменяющихся амплитуды a и компонент α_i волнового вектора согласно [1] можно определить с помощью осредненного лагранжиана

$$\bar{L} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L(\Phi_t, \Phi_{x_i}, \Phi)\, d\theta \tag{1.1}$$

где θ есть эйконал, x_i — координаты, t — время, $\frac{\partial\theta}{\partial x_i} = \alpha_i$, $-\frac{\partial\theta}{\partial t} = \omega$ — частота волны, Φ — искомое решение, которое для малых a приближенно можно записать в виде $\Phi = a\cos\theta$. Здесь и в дальнейшем индексами t, x_i, ω, α_i обозначены производные.

При наличии многих неизвестных функций Φ^s в условиях рассматриваемой высокочастотной асимптотики можно в конечном счете с помощью варьирования по амплитудам a^s выразить их через одну из них, поэтому без уменьшения общности при выводе уравнений рассматривается одна амплитуда a.

Для нелинейных волн малой амплитуды из (1.1) после подстановки $\Phi = a\cos\tau$ можно получить в адиабатическом приближении [1]

$$\overline{L} = G(\omega, \alpha_i, x_i)\, a^2 + \frac{1}{2} G_2(\alpha_i, x_i)\, a^4 \tag{1.2}$$

Первое слагаемое в правой части соответствует линейному приближению, причем

$$G(\omega_0, \alpha_i, x_i) = 0, \quad \omega_0 = \omega_0(\alpha_i, x_i) \tag{1.3}$$

дает дисперсионное соотношение линейной задачи.

Соответствующие (1.3) уравнения лучей

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha_i}, \qquad \frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial\omega_0}{\partial x_i} \tag{1.4}$$

где $\dfrac{\partial\omega_0}{\partial\alpha_i} = C_i$ — групповая скорость.

Соотношение (1.2) соответствует приближению нелинейной геометрической акустики [1].

Для дифракционных задач, а также в вопросах устойчивости волнового движения необходим более точный учет членов в $\overline{L}$, что достигается [1] введением двух времен t и τ, причем производные функции $\Phi = a\cos\tau$ берутся в виде

$$\partial\Phi/\partial t = a\sin\tau + \frac{\partial a}{\partial t}\cos\tau \tag{1.5}$$

$$\partial\Phi/\partial x_i = -\alpha_i a\sin\tau + \frac{\partial a}{\partial x_i}\cos\tau$$

Поскольку члены с производными от a относительно малы, их следует удерживать только в квадратичных слагаемых в L. Тогда в $\overline{L}$ члены, содержащие $a\dfrac{\partial a}{\partial t}$ и $a\dfrac{\partial a}{\partial x_i}$, выпадут при интегрировании и $\overline{L}$ можно получить из (1.1), заменяя в G $\omega \to \omega + \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial a}{\partial t}$, $\alpha_i \to \alpha_i - \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial a}{\partial x_i}$ и отбрасывая первые степени производных от a

$$\overline{L} = G(\omega, \alpha_i)\, a^2 + \frac{1}{2}\left\{ G_{\omega\omega}\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)^2 + G_{\alpha_i\alpha_j}\frac{\partial a}{\partial x_i}\frac{\partial a}{\partial x_j} - 2G_{\omega\alpha_i}\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial a}{\partial x_i}\right\} + \frac{1}{2} G_2 a^4 \tag{1.6}$$

Здесь и далее, если не оговорено, понимается суммирование по повторяющимся индексам. Варьируя (1.6) по a, можно получить уточненное нелинейное дисперсионное соотношение

$$G(\omega, \alpha_i) + G_2(\alpha_i)\, a^2 - \frac{1}{2a}\left(G_{\omega\omega}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} G_{\alpha_i \alpha_j} - 2G_{\omega\alpha_i}\frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial t}\right) = 0 \tag{1.7}$$

Те же результаты получаются для производной порядка n от Φ в лагранжиане. Предполагая, что имеются малые возмущения волны, характеризуемой эйконалом $\bar{\tau}$ и рассматривая малые модуляции волны $\tau=\bar{\tau}+\varphi$, можно для малой фазы φ из (1.7) получить уравнение, выведенное другим путем в [3].

При варьировании (1.6) по τ, если оставлять малые основного порядка [1], достаточно взять только первое слагаемое в правой части. Тогда из общего уравнения модуляций

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega} - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \alpha_i} = 0 \tag{1.8}$$

с использованием уравнений лучей (1.4) получится следующее соотношение

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial C_i a^2}{\partial x_i} - a^2 \frac{1}{g}\left\{\frac{\partial \omega_0(\alpha_i, x_i)}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial \omega_0}{\partial \alpha_i}\frac{\partial g(\alpha_i, x_i)}{\partial x_i}\right\} = 0 \tag{1.9}$$

где $g = G_\omega(\omega_0, \alpha_i)$.

Полагая, как и выше, $\tau=\bar{\tau}+\varphi$, можно из (1.9) получить уравнение для a^2, выведенное другим путем в [3].

Таким образом, из общих уравнений модуляций (1.7), (1.9), рассматривая малые возмущения относительно заданной волны, можно получить уравнения [3] и соответствующее нелинейное уравнение Шредингера для комплексной амплитуды $ae^{i\varphi}$.

Общие уравнения модуляции даются (1.9), к которому следует добавить уравнения сохранения числа волн [1]

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} = 0 \qquad \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_j}\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \omega}{\partial x_i}\bigg|_{\alpha_j=\mathrm{const}}\right) \tag{1.10}$$

Согласно (1.7), в котором можно принять $G \approx G_\omega(\alpha_j)(\omega-\omega_0)$, имеет место

$$\omega - \omega_0 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 - \frac{1}{2a}\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}\frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} \tag{1.11}$$

$\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 = -\frac{G_2(\alpha_i)}{G_\omega(\alpha_j)}$, что представляет дисперсионное соотношение. Тогда из (1.10) в основном порядке получится

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \frac{\partial \omega_0}{\partial \alpha_j}\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a^2}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2a}\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j}\frac{\partial^2 a}{\partial x_k \partial x_j}\right) +$$

$$+ \frac{\partial \omega_0(\alpha_j, x_j)}{\partial x_i} = 0 \tag{1.12}$$

Таким образом, (1.9) и (1.12) составляют полную систему нелинейных уравнений модуляций.

При получении (1.11) из (1.7) учтено, что в силу малости вторых производных от a в них можно в основном порядке подставлять $\frac{\partial}{\partial t} \approx$ $\approx -C_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Это соотношение выполняется в вышеуказанных задачах для малой амплитуды и высокой частоты.

2. Условия устойчивости

Отбрасывая в (1.12) вторые производные от a, получим уравнения в приближении нелинейной геометрической оптики. Тогда для (1.9) и (1.12) можно записать уравнения характеристик, вид которых не зависит от последних членов левых частей уравнений, то есть одинаков для однородной и неоднородной сред. Условие действительности характеристик $F(x_i, t) = 0$ или нормальной скорости характеристики $\frac{\Omega}{K}$ имеет вид

$$Y\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 > 0 \tag{2.1}$$

где

$$Y = \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} k_i k_j, \quad k_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad \Omega = -\frac{\partial F}{\partial t}, \quad K = \sqrt{\Sigma k_i^2}$$

Учет вторых производных от a в (1.12) расширяет область устойчивости. Для простоты рассмотрим случай однородной среды. Пусть a_0, α_{i0} обозначают невозмущенные значения. Положим $a = a_0 + a'$, $\alpha_i = \alpha_{i0} + \alpha_i'$. Тогда после линеаризации (1.9) и (1.12) возмущенные уравнения модуляций примут вид

$$\left.\frac{\partial a'}{\partial t}\right|_{\xi} + \frac{1}{2} a_0 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \frac{\partial \alpha_i'}{\partial x_j} = 0 \tag{2.2}$$

$$\left.\frac{\partial \alpha_i'}{\partial t}\right|_{\xi} + 2a_0\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 \frac{\partial a'}{\partial x_i} - \frac{1}{2a_0}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j}\frac{\partial^2 a'}{\partial x_k \partial x_j} = 0$$

где $\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\xi} = \frac{\partial}{\partial t} + C_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ есть производные вдоль луча. Исключая из (2.2) α_i', получим

$$\left.\frac{\partial^2 a'}{\partial t^2}\right|_0 - a_0^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 \frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}\frac{\partial^2 a'}{\partial x_i\partial x_j} +$$

$$+\frac{1}{4}\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha_k\partial\alpha_s}\frac{\partial^2 a'}{\partial x_k\partial x_s}\right) = 0 \tag{2.3}$$

Полагая $a' = Ae^{i(\Omega t - k_j x_j)}$, из (2.3) можно получить уравнение для Ω, условие действительности которого имеет вид (для плоской волны можно полагать $F = k_j x_j - \Omega t = 0$)

$$4a_0^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 Y + Y^2 > 0 \tag{2.4}$$

Здесь, как и в (2.1), k_i обозначает волновой вектор волны (характеристики), задающей возмущения основного движения.

Последнее условие выполняется или в силу (2.1) или при выполнении соотношений

$$Y\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 < 0, \qquad a_0^2 < -\frac{Y}{4\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0} \tag{2.5}$$

которые расширяют область устойчивости (2.1) на случай учета вторых производных от a.

3. *Исследование линейных и нелинейных волновых пакетов на больших расстояниях от источника и для больших моментов времени*

Для однородной диспергирующей среды решение задачи о начальных условиях получается применением метода стационарной фазы к интегралам Фурье и имеет вид [1]

$$a = \frac{\varphi(\alpha_i)}{t^{\frac{n}{2}}} \tag{3.1}$$

где n — число измерений пространства, а α_i получаются из уравнений стационарности фазы $\omega_0 t - \alpha_i x_i$ в виде уравнений лучей для однородной среды

$$x_i = \frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha_i}t = C_i t, \qquad C_i = C_i(\alpha_j) \tag{3.2}$$

Проверим, что (3.1) и (3.2) удовлетворяют уравнению (1.9) для однородной среды

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial C_i a^2}{\partial x_i} = 0 \tag{3.3}$$

Для этого заметим, что для произвольной функции $\Phi(\alpha_i)$ $\frac{\partial\Phi}{\partial t}+$ $+C_i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=0$ в силу (3.2), так как $\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\sum\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_j}\frac{\partial\alpha_j}{\partial t},\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=\sum\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_j}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}$. Тогда (3.3), очевидно, удовлетворяется.

Для нелинейной задачи к (3.3) следует присоединить (1.12), записанное в виде, в котором вторые производные от a по (3.1) малы и могут быть опущены. Тогда (1.12) принимает вид

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial t}+C_j\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}+\frac{\partial a^2}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0=0 \tag{3.4}$$

Решение уравнений (3.3) имеет снова вид (3.1) с точностью до малых $O(a^2)$. Однако α_i определяются не по (3.2), а из уравнения (3.4).

Таким образом, для нелинейной задачи выполняются уравнения (3.3), (3.4), которые можно решать методом простых волн или переходом в плоскость годографа (в одномерном случае) [1]. Отметим, что для диспергирующей среды по (3.2) $\partial C_i/\partial x_i=n/t$. В то же время для недиспергирующей однородной среды в одномерной задаче $\frac{\partial C_1}{\partial x_1}=0$, то есть имеет место вырождение условия, а для n измерений [4] $\frac{\partial C_i}{\partial x_i}=\left.\frac{\partial\ln J}{\partial t}\right|_{\ldots}$, где J есть якобиан перехода от x_i к лучевым координатам. При этом [5] $J=c_n\sum$, где c_n — нормальная скорость волны, $\sum$ — площадь фронта волны внутри лучевой трубки. Для однородной среды $\sum\sim t^{n-1}$, $\frac{\partial C_i}{\partial x_i}=\frac{n-1}{t}$, в отличие от случая диспергирующей среды.

Таким образом, в диспергирующей и недиспергирующей средах (нелинейная оптика) лучевые решения существенно различаются, хотя уравнения модуляции (1.9), (1.12) по форме одинаковые. Этот факт недостаточно четко отмечен в [1].

4. *Конкретизация коэффициентов уравнений модуляций для изгибных волн в пластинах*

Можно рассматривать квазимонохроматические изгибные волны высокой частоты в пластинах. Предполагается, что хотя частота ω велика, но ωh невелико (h — толщина пластинки), что позволяет пользоваться известной классической теорией [6, 7]. Для несжимаемой среды* можно взять следующие соотношения для связи лагранжиана с компонентами $u_i (i=1, 2, 3)$ перемещений по осям x_i, где ось x_3 направлена по нормали к пластинке

$$L=T-V,\qquad T=\frac{1}{2}\rho h\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 \tag{4.1}$$

* Несжимаемость среды принята для упрощения записи соотношений.

$$V=\frac{3}{4}G\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\psi_0^2\left(1+\frac{\gamma_2}{2}\psi_0^2\right)dx_3$$

$$\psi_0^2=\frac{8}{3}\left(e_{x_1}^2+e_{x_2}^2+e_{x_1}e_{x_2}+\frac{e_{x_1x_2}^2}{4}\right)$$

$$e_{x_1}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2-x_3\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}$$

$$e_{x_2}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2-x_3\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}$$

$$e_{x_1x_2}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-2x_3\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_2}$$

где G — модуль сдвига ($E=3G$), $G\gamma_2$ — нелинейный сдвиговой коэффициент [7].

Хотя при выводе (1.6) использовался лагранжиан (1.1), зависящий от первых производных искомой функции, форма (1.6) получается из левой части линейного дисперсионного соотношения $G(\omega, \alpha_i)=0$, верного для зависимости лагранжиана от производных любого порядка, разложением по степеням $\frac{\partial a}{\partial t}$, $\frac{\partial a}{\partial x_i}$. Поэтому (1.6) верно и в общем случае, в чем можно убедиться на примере изгибных волн, вычисляя согласно (1.5) вторые производные от u_3.

Отыскивая

$$u_1=u_0+b\sin\tau+b_1\sin 2\tau,\quad u_2=v_0+c\sin\tau+c_1\sin 2\tau$$
$$u_3=a\cos\tau+a_1\cos 2\tau,\quad \frac{\partial\tau}{\partial t}=-\omega,\quad \frac{\partial\tau}{\partial x_1}=\alpha_1,\quad \frac{\partial\tau}{\partial x_2}=\alpha_2 \tag{4.2}$$

и вводя в (4.1), можно получить осредненный лагранжиан в адиабатическом приближении

$$\overline{L}=\overline{L}(a,\ a_1,\ b,\ b_1,\ c,\ c_1,\ \omega,\ \alpha_i,\ u_0,\ v_0) \tag{4.3}$$

Приравнивая нулю производные $\overline{L}$ по амплитудам, можно получить систему шести уравнений, дающих дисперсионные соотношения. В полученных уравнениях для изгибных волн в нелинейном приближении можно считать до порядка a^4 $a_1=b=c=0$, что соответствует отсутствию взаимовлияния волн в первом порядке по a, и получить нелинейное дисперсионное соотношение. При этом уравнения для u_0 и v_0 имеют различные решения для типично дифракционных задач, для которых $\frac{\partial}{\partial x_2}\ll\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial t}=0$

и для одномерных по x_1 задач, в которых $\frac{\partial}{\partial x_2}=0$, $\frac{\partial}{\partial t}\approx -C\frac{\partial}{\partial x_1}$. Тогда получится следующее дисперсионное соотношение:

$$
\begin{gathered}
b_1\alpha_1+c_1\alpha_2=\frac{3a^2k^2}{2(12-h^2k^2)},\quad k^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2,\quad \omega_0=G_1k^2\\
G_1=h\sqrt{\frac{G}{3\rho}},\qquad \omega=\omega_0+\frac{3a^2\omega_0\mu}{2h^2},\qquad \mu=\gamma_2\frac{h^4k^4}{10}+\xi
\end{gathered}
\tag{4.4}
$$

где для первой задачи $\xi=0.75$, и для второй $\xi=-\frac{3}{8}k^2h^2$.

Рассмотрим случай пластины из однородного материала $\left(\frac{\partial\omega_0}{\partial x_i}=0\right)$. Согласно (4.4) $\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}=2G_1\delta_{ij}$ (δ_{ij} — символы Кронекера) и из (1.9), (1.12), получится

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial a^2}{\partial t}+\frac{\partial C_i a^2}{\partial x_i}=0,\qquad C_i=\frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha_i}=2G_1\alpha_i\\
\frac{\partial\alpha_i}{\partial t}+C_j\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}+\frac{\partial a^2}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0-G_1\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2 a}{\partial x_j^2}\right)=0
\end{gathered}
\tag{4.5}
$$

где

$$
\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0=\frac{3\omega_0\mu}{2h^2}
\tag{4.6}
$$

Из (4.6) видно, что значение коэффициента γ_2, характеризующего физическую нелинейность (для упругих сред $\gamma_2<0$, а для жидких $\gamma_2>0$), влияет на знак $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0$. Для металлов $\gamma_2\approx-10^6$ [7], и, следовательно, для реальных значений $kh\approx10^{-1}$ получается $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0<0$. Кроме того, для пластин согласно (2.1)

$$
Y=2G_1(k')^2
\tag{4.7}
$$

где k' есть волновое число для возмущений, и согласно (2.1) имеет место неустойчивость в приближении геометрической оптики. Использование более точного условия (2.4) позволяет обеспечить устойчивость для амплитуд, удовлетворяющих (2.5), которое запишется в виде

$$
a_0^2<-\frac{(k')^2h^2}{3k^2\mu}
\tag{4.8}
$$

Здесь k — волновое число для невозмущенной волны. Таким образом, условие устойчивости налагает ограничение на амплитуду a_0 и отношение волновых чисел $\frac{k'}{k}$ возмущенного и исходного движений. При этом относительно коротковолновые возмущения ($k' \gg k$) всегда устойчивы.

В качестве примера решения линейных уравнений модуляций можно рассмотреть асимптотику одномерной задачи о начальных условиях.

Пусть при $t = 0$

$$u_3 = f(x_1) e^{ik_0 x_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_3}{\partial t} = 0 \tag{4.9}$$

где $f(x_1)$ — медленно меняющаяся функция на длине волны $\left(\frac{2\pi}{k_0}\right)$.

Решение находится методом Фурье и после применения метода стационарной фазы записывается в виде

$$u_3 = a \cos\left(\frac{x_1^2}{2G_1 t} - \frac{\pi}{4}\right), \qquad a = \frac{\overline{F}(\alpha)}{\sqrt{\pi G_1 t}} \tag{4.10}$$

где $\alpha = \frac{x}{2G_1 t}$, $\overline{F}(\alpha)$ — преобразование Фурье от $\frac{1}{2} f(x_1)$.

Также можно получить асимптотику двумерной задачи о нулевых начальных условиях и граничных условиях на краю пластинки:

$$u_3 = u_0 \delta(x_1) \delta(t), \qquad \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = 0 \tag{4.11}$$

Асимптотика имеет вид

$$u_3 = a \cos \frac{2G_1 r^2}{t}, \qquad a = \frac{u_0}{2\pi} \frac{x_2 G_1}{t^2}, \qquad r^2 = x_1^2 + x_2^2 \tag{4.12}$$

Согласно уравнениям лучей (1.4)

$$x_i = 2G_1 \alpha_i t \tag{4.13}$$

и поэтому

$$a = \frac{u_0}{\pi} G_1^2 \frac{\alpha_2}{r} \tag{4.14}$$

Как видно, (4.10) и (4.14) являются частными примерами решения (3.1) при $n = 1$ и $n = 2$, и, следовательно, удовлетворяют (3.3).

Можно для пластин произвести более точный учет членов в лагранжиане, добавив слагаемые за счет поперечных сдвигов и инерции вращения, что необходимо для высокочастотных волн. Как показывает исследование, при малых αh вновь получится нелинейное дисперсионное соотношение (4.4).

В рассматриваемой классической модели пластин произведен учет физической и геометрической нелинейностей. Последняя дается коэффициентом γ_1 (4.4), причем для многих упругих материалов слагаемое с γ_2

в (4.4) является определяющим, что приводит к значениям $\mu < 0$ и неустойчивости волн. Если рассматривать только геометрическую нелинейность ($\gamma_2 = 0$), то $\mu > 0$ и волны устойчивы. При этом $\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0$ из (4.4) при отбрасывании $k^2h^2 \ll 1$ совпадает со значением, полученным в [8].

5. *Изгибные волны в оболочках*

Для оболочек в выражении лагранжиана (4.1) связи деформация с перемещениями u_i имеют вид

$$e_{x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{u_3}{R_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2 - x_3\,\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \tag{5.1}$$

и т. д., где оси x_1, x_2 выбраны по главным линиям кривизны оболочки $\left(\text{с кривизнами } \dfrac{1}{R_1} \text{ и } \dfrac{1}{R_2}\right)$.

Для квазимонохроматических волн можно искать u_i в виде (4.2) и получить осредненный лагранжиан.

Для простоты, ограничиваясь случаем одномерных (x_1) изгибных волн для цилиндрической оболочки, можно получить дисперсионное уравнение

$$\omega = \omega_0(\varkappa) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2$$

$$\omega_0^2 = \frac{G}{\rho}\left\{\frac{3}{R_2^2} + \frac{h^2\varkappa^4}{3}\left(1 - \frac{1}{3}h^2\varkappa^2\right)\right\}$$

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 = \frac{G\varkappa^4}{2\rho\omega_0}\,\mu \tag{5.2}$$

$$\mu = -\frac{3}{8}\varkappa^2 h^2 + \frac{9}{2}\gamma_2\frac{1}{R_2^4\varkappa^4} + \gamma_2\frac{h^2}{R_2^2} + \frac{1}{10}\gamma_2 h^4\varkappa^4$$

(В ω_0 учтены также поперечные сдвиги).

Рассмотрим условия устойчивости. Вычисление дает

$$\frac{\partial\omega_0}{\partial\varkappa} = \frac{Gh^2\varkappa^3}{3\omega_0\rho}\left(2 - h^2\varkappa^2\right) > 0$$

$$\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\varkappa^2} = \frac{Gh^2}{3\rho\omega_0^3}\left\{\frac{3\varkappa^2}{R_2^2}\left(6 - 5h^2\varkappa^2\right) + \frac{\varkappa^4h^4}{3}\left(2 - 3\varkappa^2h^2 + \frac{2}{3}h^4\varkappa^4\right)\right\} > 0 \tag{5.3}$$

Тогда $f = \dfrac{\partial^2\omega_0}{\partial\varkappa^2}(k')^2 > 0$. Можно видеть, что, как и для пластин, согласно (5.2) $\mu < 0$, $\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 < 0$, то есть из (2.1) получается неустойчивость.

По более точным формулам (2.5) получится условие устойчивости в виде

$$\alpha_0^2 < -\frac{\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\varphi^2}(k')^2}{4\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0} \tag{5.4}$$

Отбрасывая в (5.3) в скобках малые добавки $\sim (\alpha h)^2$, можно видеть, что правая часть (5.4) для оболочек больше, чем для пластин при выполнении приближенного условия

$$(\alpha h)^4 > \frac{5}{2}\left(\frac{h}{R_2}\right)^2 \quad (\alpha h \ll 1)$$

При этом допустимые значения амплитуды для оболочек больше, чем для пластин.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 10 IV 1979

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՍՊԵՐՍԻՈՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐՈՒՄ ՄՈԴՈՒԼԱՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲԱՐԱԿ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐՈՒՄ ՏԱՐԱԾՎՈՂ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ոչ գծային դիսպերսիոն միջավայրերի համար տարածական խնդրում միջինացված լագրանժիանի օգնությամբ դուրս են բերվում մոդուլյացիաների հավասարումները ամպլիտուդաների երկրորդ ածանցյալների հաշվառմամբ։ Բերվում են ալիքների կայունության ընդլայնված պայմանները։

Ստացված մոդուլյացիաների հավասարումները և կայունության պայմանները կիրառվում են ոչ-գծային առաձգական մեծ տեղափոխություններով սալերի և թաղանթների մեջ ծռման ալիքների տարածական խնդիրներում։

THE MODULATION EQUATIONS IN NONLINEAR DISPERSIVE MEDIA AND THEIR APPLICATION TO THE WAVE PROPOGATION IN THIN BODIES

A. G. BAGDOEV, L. A. MOVSISYAN

S u m m a r y

By means of the averaged Lagrangian the equations of modulation in a space problem for nonlinear dispersive media, considering the second derivatives of amplitude, are derived. The generalized relations of wave stability are written.

The obtained modulation equations and stability conditions are applied to the problem of propagation of bending waves in nonlinear elastic plates and shells.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
2. *Лайтхилл М. Дж.* Некоторые частные случаи применения теории Уизема. Нелинейная теория распространения волн. М., «Мир», 1970.
3. *Багдоев А. Г.* Определение окрестности фронтов волн в пространственной задаче. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1977, т. 30, № 6.
4. *Лере Ж., Гординг Л., Котаке Т.* Задача Коши. М., «Мир», 1967.
5. *Jeffrey A., Taniuti T.* Nonlinear wave propagation. New-York—London, Academ Press., 1964.
6. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек, т. 5. М., «Наука», 1973.
7. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М., ИЛ, 1961.
8. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М., «Наука», 1972.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 3, 1980 Механика

В. А. ПАЛЬМОВ

ОБ ОДНОЙ ПРОСТЕЙШЕЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

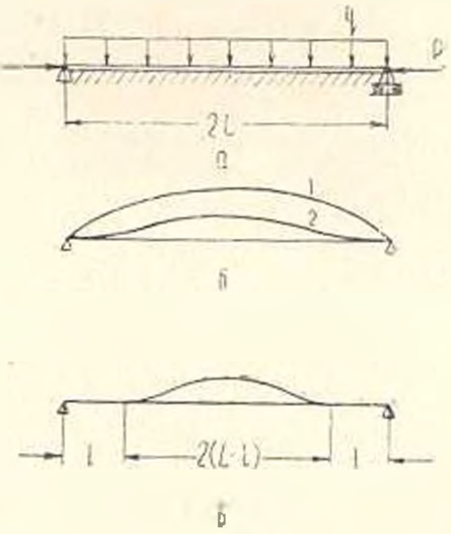
1. Рассматриваем опертый по концам прямой стержень, сжатый продольной силой P и прижатый к плоскому жесткому основанию поперечной нагрузкой q (фиг. 1а). В книгах В. И. Феодосьева [1], [2], [3] справедливо утверждается, что стержень «всегда устойчив в малом, но при достаточно большой силе P — неустойчив в большом» [1]. Очевидно, что аккуратному анализу устойчивости в большом для описанной консервативной системы должно предшествовать разыскание отличных от прямолинейной форм равновесия. Фактическому построению некоторых из них посвящена работа [4]. Ниже дается полный анализ криволинейных форм равновесия.

Уравнение для малых поперечных прогибов стержня w имеет вид (см. [3])

$$0 < x < 2L$$

$$w^{IV} + \alpha^2 w'' = \frac{q_R - q}{EJ}$$

$$\left(\alpha^2 = \frac{P}{EJ}\right) \qquad (1.1)$$



Фиг. 1.

причем q_R — реакция основания, EJ — изгибная жесткость стержня, а штрихами отмечены производные по продольной координате x.

Граничные условия на опертых концах стержня таковы:

$$|x - L| = L, \quad w = w'' = 0 \qquad (1.2)$$

Условия контакта стержня с основанием имеют вид

$$0 < x < 2L, \quad \begin{cases} w > 0, & q_R = 0 \\ w = 0, & q_R \geqslant 0 \end{cases} \qquad (1.3)$$

Первое из них — условие непроницаемости жесткого основания, второе — условие неотрицательности реакции основания при контакте с ним стержня.

Допустим сначала, что контакт стержня с основанием отсутствует, то есть $q_R = 0$. Тогда решение граничной задачи (1.1), (1.2) имеет вид [4]

$$w = \frac{q}{EJ\alpha^4}\left[1 - \frac{\cos\alpha(L-x)}{\cos\alpha L} + \frac{\alpha^2}{2}x(2L-x)\right] \quad (1.4)$$

Теперь надлежит проверить выполнение условия непроницаемости основания (1.3). Для этого найдем выражение производной от (1.4) и ее значение на опоре $x = 0$

$$w' = \frac{q(L-x)}{EJ\alpha^2\cos\alpha L}\left[\cos\alpha L - \frac{\sin\alpha(L-x)}{\alpha(L-x)}\right] \quad (1.5)$$

$$w_0' = \frac{qL}{EJ\alpha^2}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha L}{\alpha L}\right) = \frac{qL}{EJ\alpha^2\cos\alpha L}\left(\cos\alpha L - \frac{\sin\alpha L}{\alpha L}\right) \quad (1.6)$$

Необходимым условием неотрицательности прогиба является условие $w_0' \geqslant 0$. В силу (1.6) оно выполняется в интервалах

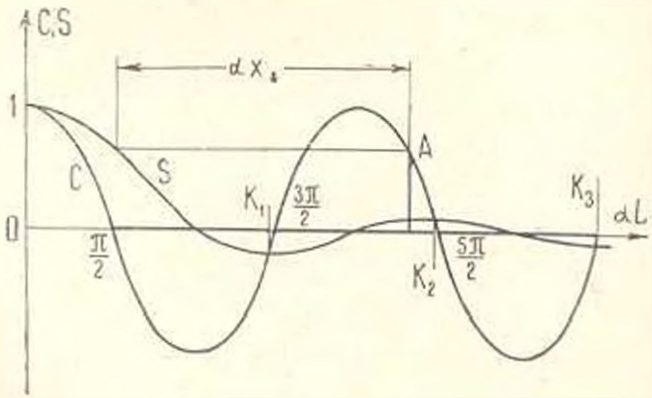
$$(2n-1)\pi/2 < \alpha L \leqslant k_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad (1.7)$$

где k_n — расположенный в интервале $(\pi n, \pi n + \pi)$ корень уравнения

$$\operatorname{tg} k_n = k_n \quad (1.8)$$

Достаточным условием выполнения (1.3) является условие неотрицательности абсолютного минимума w. Координаты точек x_*, в которых достигаются экстремумы w, находятся по (1.5) из условия $w' = 0$. При их разыскании полезной оказывается приводимая графическая интерпретация. Рассмотрим фиг 2. На ней изображены графики функций

$$c = \cos\alpha L, \quad s = \sin\alpha L/\alpha L$$



Фиг. 2.

В силу (1.6) абсциссы точек пересечения графиков дают k_n. Интервалы (1.7) показаны жирными линиями. Если теперь через точку αL оси абсцисс провести вертикаль до пересечения с кривой c, то ордината точки пересечения A даст значение $\cos\alpha L$. Если, далее, через точку A провести влево горизонталь, то точки пересечения ее с кривой S в силу (1.5) дадут искомые координаты $\alpha(L - x_*)$ точек экстремумов. К ним следует присоединить точку $x=L$, в которой в силу (1.5) также имеется экстремум. Обратим теперь внимание на то, что выражение прогиба (1.4) представляет сумму гармоники и квадратичного трехчлена, имеющего положительные значения (при $0 < x < 2L$) и достигающего максимума в середине стержня ($x = L$). Следовательно, решающую роль играет прилегающий к каждой опоре участок стержня, протяженностью порядка длины волны гармоники: если на этом участке имеется минимум, то он неминуемо абсолютный, если же экстремумов нет, то прогиб положителен на всем протяжении стержня кроме собственно опор. Длину решающего участка определяем по фиг. 2 — это полторы длины волны гармоники с, то есть $3\pi/\alpha$. Отметим, наконец, что внутри каждого из интервалов (1.7) значение производной прогиба на левой опоре положительно, так что ближайший к опоре экстремум является максимумом и только второй — абсолютным минимумом.

Для цельности интерпретации приводимого ниже анализа введем в рассмотрение норму прогиба

$$N = \frac{1}{2L}\int_0^{2L} w\,dx \tag{1.9}$$

Для прогиба (1.4) она имеет выражение

$$\frac{N}{w_0} = \frac{1}{(\alpha L)^4}\left[1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha L}{\alpha L} + \frac{(\alpha L)^2}{3}\right], \quad w_0 = \frac{qL^4}{EJ} \tag{1.10}$$

Обозначая, наконец, $P_э$ — эйлерово значение продольной силы

$$P_э = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{EJ}{L^2} \tag{1.11}$$

и учитывая обозначение (1.1), легко найдем

$$\frac{P}{P_э} = \left(\frac{2\alpha L}{\pi}\right)^2 \tag{1.12}$$

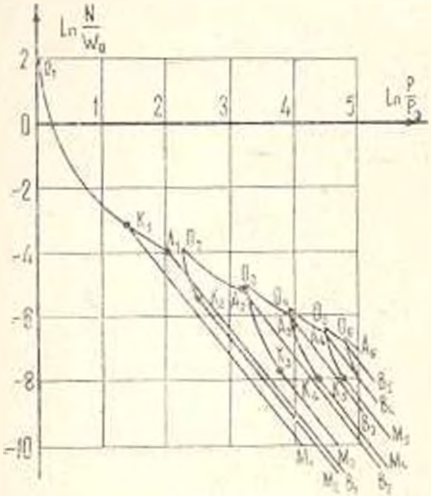
2. Рассмотрим первый из интервалов (1.7)

$$\pi/2 < \alpha L < k_1, \quad (k_1 = 4.493) \tag{2.1}$$

Учитывая высказанные выше общие соображения, находим только один экстремум — при $x=L$. Следовательно, это максимум. Поэтому выражение (1.4) удовлетворяет условию непроницаемости (1.3) во всех точках стержня. График зависимости N от αL по (1.10) показан на фиг. 3. Это кривая O_1A_1. Типичная форма равновесия для этого интервала показана на фиг. 1б и отмечена значком 1. Правому концу интервала (2.1) соответствует форма равновесия, отмеченная значком 2. Из соображений непрерывности следует предположить, что при $\alpha L < k_1$, эта форма равновесия трансформируется в форму, показанную на фиг. 1в: имеет место полный контакт стержня с основанием на концевых участках и отрыв на участке длиной $2(L-l)$ в средней части. Условия сопряжения участков отрыва и контакта имеют вид

$$|x-L| = L-l, \quad w = w'' = w' = 0 \tag{2.2}$$

Аналогия первых двух условий (2.2) и (1.2) показывает, что выражение прогиба на участке отрыва $|x-L| \leqslant L-l$ можно получить из (1.4) заменой L на $L-l$ и x на $x-l$, но дополнительно учесть последнее условие (2.2). Имеем



Фиг. 3.

$$w = \frac{q}{EJ\alpha^4}\left[1 - \frac{\cos\alpha(L-x)}{\cos\alpha(L-l)} + \frac{\alpha^2}{2}(x-l)(2L-l-x)\right] \tag{2.3}$$

$$x = l,$$

$$w' = \frac{q(L-l)}{EJ\alpha^3}\left[1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha(L-l)}{\alpha(L-l)}\right] = 0 \tag{2.4}$$

Сравнивая (2.4) с (1.8), находим уравнение для определения длины участка отрыва

$$\alpha(L-l) = k_1 \tag{2.5}$$

Подставляя (2.3) в (1.9) и учитывая (2.4), (2.5), получаем

$$\frac{N}{w_0} = \frac{k_1^3}{3(\alpha L)^5}, \quad \alpha L = k_1\frac{L}{L-l} > k_1 \tag{2.6}$$

График зависимости (2.5) представлен на фиг. 3 лучом A_1B_1. Он непрерывно сопрягается с графиком O_1A_1 зависимости (1.10).

3. Рассмотрим второй интервал (1.7)

$$4.712 = 3\pi/2 < \alpha L \leqslant k_2, \quad (k_2 = 7.726) \tag{3.1}$$

На фиг. 2 как раз показана процедура определения координаты ближайшего к опоре экстремума. По сказанному выше абсолютный минимум прогиба достигается во втором экстремуме, то есть в середине стержня. Его значение таково:

$$w_m = \frac{w_0}{(\alpha L)^4}\left[1 + \frac{(\alpha L)^2}{2} - \frac{1}{\cos\alpha L}\right] \tag{3.2}$$

Легко видеть, что в середине интервала при $\alpha L = 2\pi$ прогиб (3.2) положителен. Вычисления показывают, что он меняет знак в точках

$$\alpha L = u_2 = 4.793 > 3\pi/2, \quad \alpha L = 7.822 > k_2$$

Таким образом, в интервале

$$u_2 \leqslant \alpha L \leqslant k_2 \tag{3.3}$$

абсолютный минимум прогиба неотрицателен и, значит, опять справедливо решение (1.4). Зависимость (1.10) для этого интервала представлена на фиг. 3. Это кривая $O_2 A_2$.

Правому концу интервала (3.3) соответствует форма равновесия с нулевым значением производной на опорах. При $\alpha L > k_2$ форма равновесия (1.4) непрерывно переходит в форму равновесия, в которой отрыв имеет место только на участке $2(L-l) < 2L$ в середине стержня и полный контакт вне его пределов. Прогиб имеет выражение (2.3) при дополнительном условии (2.4). Из (2.4), (1.8) следует

$$\alpha(L-l) = k_2 \tag{3.4}$$

Норма прогиба находится по (1.9), (2.3), (3.4) и имеет значение

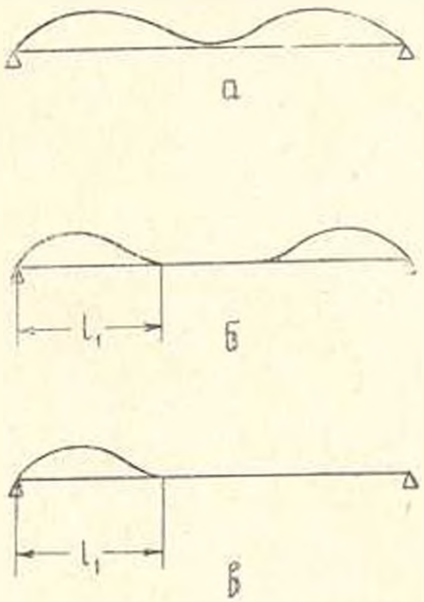
$$\frac{N}{w_0} = \frac{k_2^3}{3(\alpha L)^5}, \quad \alpha L = k_2 \frac{L}{L-l} > k_2 \tag{3.5}$$

Зависимость Λ от F по (3.5), (1.12) представлена на фиг. 3 лучом $A_2 B_2$.

4. Левому концу интервала (3.3) $\alpha L = u_2$ соответствует форма равновесия, показанная на фиг 4*а*: всюду прогиб положителен, в середине стержня он обратился в нуль. Представляется весьма правдоподобным, что при $\alpha L < u_2$ форма равновесия будет иметь такой же вид (появится только реакция основания в точке касания). Для ее построения необходимо найти неотрицательное решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям

$$x = 0,\ 2L, \quad w = w' = 0;$$
$$x = L, \quad w = w' = 0 \tag{4.1}$$

Прогиб оказывается симметричным относительно середины стержня. Поэтому приводим его выражение только для левой половины стержня $0 \leqslant x \leqslant L$:



Фиг. 4.

$$w = \frac{q}{EJ\alpha^4}\left\{1 - \frac{\cos[\alpha(L/2 - x)]}{\cos(\alpha L/2)} + \frac{\alpha^2}{2} x(L-x) + \frac{\alpha L}{2} \operatorname{tg} \alpha L \, \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha L}{2} \Big/ \frac{\alpha L}{2}}{1 - \operatorname{tg}\alpha L/\alpha L} \left(\frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha L} - \frac{x}{L}\right)\right\} \tag{4.2}$$

Реакция основания в данном случае сводится к одной сосредоточенной силе R, приложенной в середине стержня. Она равна удвоенной перерезывающей силе, вычисленной в сечении $x = L$ левой половины стержня. Имеем

$$R = \frac{2q}{\alpha^2 L}\left[1 + \frac{(\alpha L)^2}{2} - \frac{1}{\cos\alpha L}\right]\Big/\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha L}{\alpha L}\right) \tag{4.3}$$

Специфика контактной задачи состоит в требовании $R \geqslant 0$. Проверим это. По сказанному в п. 3 при $3\pi/2 < \alpha L < u_2$ числитель в (4.3) становится отрицательным, знаменатель же сохраняет положительное значение. Следовательно, при $3\pi/2 < \alpha L < u_2$ (а точнее, при $k_1 < \alpha L < u_2$) имеем $R < 0$, а это означает, что прогиб (4.2) не удовлетворяет условию (1.3) и не представляет форму равновесия контактной задачи. Но ведь реакция R будет положительной во всем интервале (3.3)! Так что выражение (4.2) может представлять в нем новую форму равновесия, отличную от (1.4). Надлежит, правда, проверить удовлетворяется ли условие непроницаемости основания (1.3). Необходимые (и как оказывается, достаточные) условия его выполнения имеют вид

$$w'\big|_{x=0} \geqslant 0, \quad w''\big|_{x=L-0} \geqslant 0$$

Подставляя сюда значение производных, приходим к неравенствам

$$\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha L}{2}\Big/\frac{\alpha L}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha L}\,\frac{1 - \sin\alpha L/\alpha L}{1 - \operatorname{tg}\alpha L/\alpha L}\right) \geqslant 0 \tag{4.4}$$

$$\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha L}{2}\Big/\frac{\alpha L}{2}\right)\frac{\operatorname{tg}\alpha L}{1 - \operatorname{tg}\alpha L/\alpha L} \leqslant 0 \tag{4.5}$$

Элементарный анализ показывает, что неравенства (4.4), (4.5) выполняются, соответственно, в следующих интервалах, имеющих общие точки с (3.3) (где $R \geqslant 0$)

$$k_1 \leqslant \alpha L < k_2, \quad k_2 \leqslant \alpha L \leqslant 2\pi \tag{4.6}$$

Объединяя (4.6) и (3.3), находим, что все условия (1.3) выполняются в интервале

$$u_2 \leqslant \alpha L \leqslant 2\pi \tag{4.7}$$

Норма прогиба (4.2) имеет выражение

$$N = \frac{w_0}{(\alpha L)^4}\left[1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha L}{2}\Big/\frac{\alpha L}{2} + \frac{(\alpha L)^2}{12} - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha L}{4}\,\frac{\operatorname{tg}\alpha L}{1 - \operatorname{tg}\alpha L/\alpha L}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha L}{2}\Big/\frac{\alpha L}{2}\right)^2\right] \tag{4.8}$$

График зависимости N от P по (4.8), (1.12) для интервала значений (4.7) представлен на фиг. 3. Это кривая O_2K_2.

Верхней границе интервала (4.7) соответствует форма равновесия (4.2) с нулевым значением прогиба и его двух производных в середине стержня. Теперь уже естественно предположить, что при $\alpha L > 2\pi$ форма (4.2) непрерывно перейдет в изображенную на фиг. 4б: в середине стержня имеется участок полного контакта длиной $2(L-l)$, а слева и справа от него симметричные участки отрыва стержня длиной l. Граничные условия для левого участка отрыва таковы:

$$x = 0, \quad w = w'' = 0; \quad x = l_1, \quad w = w' = w'' = 0 \tag{4.9}$$

Последнее равенство — это условие непрерывности изгибающего момента при переходе в зону полного контакта. Первым четырем граничным условиям удовлетворит решение (4.2), если в нем заменить L на l_1. Последнее, пятое условие в силу (4.5) также удовлетворится, если принять $\alpha l_1 = 2\pi$. Таким образом, имеем для левого участка отрыва

$$w = \frac{q}{EJ\alpha^4}\left[1 - \cos\alpha x + \frac{\alpha^2}{2}x(l_1 - x) + \pi\sin\alpha x\right], \quad \alpha l_1 = 2\pi \tag{4.10}$$

Норма прогиба (4.10) имеет значение

$$N = \frac{1}{L}\int_0^{l_1} w\,dx = \frac{2\pi w_0}{(\alpha L)^3}\left(1 + \frac{\pi^2}{3}\right), \quad \alpha L = 2\pi\frac{L}{l_1} > 2\pi \tag{4.11}$$

График зависимости (4.11) показан на фиг. 3. Это луч K_1M_1.

Обратимся теперь к фиг. 4в. На нем изображена несимметричная форма равновесия, которой соответствует зона полного контакта длиной $2L-l_1$ и зона отрыва стержня длиной l_1. Граничные условия для зоны отрыва имеют вид (4.9). Следовательно, прогиб дается выражением (4.10), с той только разницей, что теперь l_1 может стать больше L, но разумеется, не может превзойти длину стержня $2L$. Норма прогиба имеет выражение

$$N = \frac{1}{2L}\int_0^{l_1} w\,dx = \frac{\pi w_0}{(\alpha L)^5}\left(1 + \frac{\pi^2}{2}\right), \quad \alpha L = 2\pi\frac{L}{l_1} > \pi \tag{4.12}$$

График зависимости (4.12), (1.12) представлен на фиг. 3 лучом K_1M_1.

5. Рассмотрим, наконец, типичный интервал (1.7)

$$(2n - 1)\pi/2 < \alpha L \leqslant k_n, \quad n \geqslant 3 \tag{5.1}$$

Исследование начнем с определения координаты точки абсолютного минимума. Прежде всего отметим, что функция $s = \sin\alpha L/\alpha L$ имеет экстремумы в точках $\alpha L = k_n$, то есть в точках пересечения графиков функций s и c на фиг. 2. Обращаясь теперь к фиг. 2, замечаем, что если

$$|\cos\alpha L| > |\cos k_{n-2}| \tag{5.2}$$

то есть

$$2\pi n - (k_{n-2} + 2\pi) < \alpha L < k_{n-2} + 2\pi \tag{5.3}$$

то построение не даст ни одной точки экстремума в критическом участке $3\pi/\alpha$ вблизи опор стержня. По сказанному в п. 1 в этом случае прогиб (1.4) всюду положителен.

Пусть теперь

$$|\cos \alpha L| \leqslant |\cos k_{n-2}| \tag{5.4}$$

то есть

$$(2n-1)\pi/2 < \alpha L \leqslant 2\pi n - (k_{n-2} + 2\pi) \tag{5.5}$$

$$k_{n-2} + 2\pi \leqslant \alpha L \leqslant k_n \tag{5.6}$$

В этом случае имеются минимумы, расположенные в критических зонах вблизи опор. Рассмотрим интервал (5.6) значений αL, близких к правому концу интервала (5.1). Из фиг. 2 видно, что тогда справедливы неравенства

$$|\cos \alpha L| \geqslant |\cos k_n|, \quad |\sin k_n| > 1/2$$

и что $\cos\alpha(L - x_*)$ для абсолютного минимума имеет тот же знак, что и $\cos \alpha L$. Следовательно, с учетом (1.8) находим

$$0 < \frac{\cos \alpha (L - x_*)}{\cos \alpha L} \leqslant \frac{1}{|\cos k_n|} = \frac{k_n}{|\sin k_n|} < 2k_n \tag{5.7}$$

Обращаясь опять к фиг. 2, замечаем, что увеличению αL в интервале (5.6) соответствует увеличение αx_*. Рассмотрим положительные слагаемые в скобке выражения (1.4). Их сумма представляет квадратичный трехчлен относительно αx, принимающий положительные значения (в пределах длины стержня) и достигающий максимума в середине стержня. Следовательно, положительные слагаемые в скобке (1.4) при $x = x_*$ увеличиваются с ростом αL, а значит их сумма больше своего значения для левого конца (5.6). На самом конце интервала координата ближайшего к опоре минимума находится по уравнению

$$\frac{\sin \alpha (L - x_*)}{\alpha (L - x_*)} - \cos \alpha (L - x_*) = \cos k_{n-2} \tag{5.8}$$

и имеет значение $\alpha x_* = 2\pi$.

Формальная запись последних двух сообщенных фактов даст неравенство

$$1 + \frac{\alpha^2}{2} x_* (2L - x_*) > 1 + 2\pi (k_{n-2} + \pi) \tag{5.9}$$

Комбинируя теперь (5.6), (5.7), (5.9), придем к неравенству для значения прогиба в точке абсолютного минимума

$$w_m > w_0 [1 + 2\pi (k_{n-2} + \pi) - 2k_n]/k_n^4 \tag{5.10}$$

Усиливая его с помощью грубого неравенства

$$k_n - k_{n-2} < 3\pi \tag{5.11}$$

получаем окончательно

$$w_m > w_0 [1 + \pi(2\pi - 6)] k_n^4 \tag{5.12}$$

Минимальный прогиб оказался положительным, так что условие непроницаемости основания (1.3) для решения (1.4) удовлетворяется вплоть до правого конца интервала (5.1). При $\alpha L = k_n$ обращается в нуль производная прогиба на опорах. При $\alpha L > k_n$ форма равновесия (1.4) непрерывно переходит в форму (2.3) с участками полного контакта на концах стержня. Следует только иметь в виду, что теперь длина участка отрыва $2(L-l)$ находится по уравнению

$$\alpha(L - l) = k_n \tag{5.13}$$

Поэтому норма прогиба (2.3) имеет значение

$$\frac{N}{w_0} = \frac{k_n^3}{3(\alpha L)^3}, \qquad \alpha L = k_n \frac{L}{l} > k_n \tag{5.14}$$

Графики зависимостей (5.14) представлены на фиг. 3 лучами $A_n B_n$.

Рассмотрим теперь интервал (5.5). На правом конце его абсолютный минимум положителен, поскольку он положителен в соседнем интервале (5.3). Вблизи левого конца абсолютный минимум отрицателен, поскольку трансцендентное слагаемое в скобке (1.4) принимает неограниченное по величине отрицательное значение. Следовательно, в пределах интервала (5.5) абсолютный минимум прогиба обращается в нуль. Соответствующие значения $\alpha L = u_n$ и $\alpha x_m = X_n$ находятся из условия обращения в нуль прогиба (1.4) и его производной (1.5) во втором от опоры экстремуме. Это приводит к системе трансцендентных уравнений

$$\frac{\cos z_n}{\cos u_n} = 1 + \frac{u_n^2 - z_n^2}{2}, \qquad \cos u_n = \frac{\sin z_n}{z_n} \tag{5.15}$$

в которой

$$z_n = u_n - X_n, \quad X_n < 3\pi \tag{5.16}$$

а u_n заключены в интервалах (5.1) или (5.5).

Систему уравнений (5.15) можно переписать в форме

$$u_n = \pi n - \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\sin[z_n - \pi(n-2)]}{z_n}$$
$$z_n = \pi(n-2) + \operatorname{arctg} \frac{z_n}{1 + (u_n^2 - z_n^2)/2} \tag{5.17}$$

удобной для вычислений методом итераций и для анализа асимптотики при больших n. Приводим табл. 1 первых значений k_n, u_n, z_n, X_n и асимптотические формулы

$$z_n = \pi(n-2) + \operatorname{arc\,tg}(2/3\pi)$$

$$u_n = \pi n - \pi/2 + (1/\pi n) \operatorname{arc\,tg}(2/3\pi) \tag{5.18}$$

$$k_n = \pi n + \pi/2 - 1/\pi n, \quad X_n = 3\pi/2 - \operatorname{arc\,tg}(2/3\pi)$$

Подводя итог проведенному анализу, заключаем, что прогиб (1.4) удовлетворяет условию непроницаемости основания (1.3) в интервалах

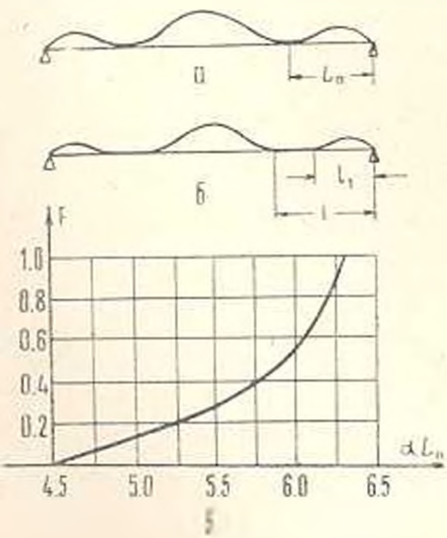
$$u_n \leqslant \alpha L \leqslant k_n \tag{5.19}$$

Зависимости (1.10) для интервалов (5.19) изображены графически на фиг. 3. Это кривые O_nA_n ($n \geqslant 3$).

Таблица 1

n	1	2	3	4	5	6
k_n	4.493	7.726	10.905	14.066	17.221	20.371
u_n	—	4.793	7.891	11.019	14.155	17.293
z_n	—	—	3.263	6.436	9.597	12.738
X_n	—	4.793	4.628	4.583	4.558	4.555

6. Проследим за эволюцией форм равновесия (1.4) при переходе через левую границу интервала (5.19). Значению $\alpha L = u_n$ соответствует форма равновесия, показанная на фиг. 5а: всюду прогиб положителен, в двух, симметрично расположенных точках стержень касается основания. Полагая, что при некотором изменении αL форма равновесия сохранит свой вид, имеем следующие граничные условия на концах участков отрыва стержня:



Фиг. 5.

$$x = 0, \quad w = w'' = 0$$

$$x = L_n, \quad w = w' = 0 \tag{6.1}$$

$$x = 2L, \quad w = w'' = 0$$

$$x = 2L - L_n, \quad w = w' = 0 \tag{6.2}$$

Сходство условий (6.1) с (4.1) позволяет по аналогии с (4.2) написать для $0 < x < L_n$

$$w = \frac{q}{EJ\alpha^2}\left[1 - \frac{\cos[\alpha(L_n/2 - x)]}{\cos(\alpha L_n/2)} + \frac{\alpha^2}{2}x(L_n - x) + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha L_n}{2}\operatorname{tg}\alpha L_n \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha L_n}{2} \Big/ \frac{\alpha L_n}{2}}{1 - \operatorname{tg}\alpha L_n/\alpha L_n}\left(\frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha L_n} - \frac{x}{L_n}\right)\right] \tag{6.3}$$

Для среднего участка стержня $L_n < x < 2L - L_n$ находим

$$w = \frac{q}{EJ\alpha^4}\left\{\frac{\alpha^2}{2}(x - L_n)(2L - L_n - x) + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha(L - L_n)}{\operatorname{tg}\alpha(L - L_n)}\left[1 - \frac{\cos\alpha(L - x)}{\cos\alpha(L - L_n)}\right]\right\} \tag{6.4}$$

На стыках участков отрыва должны быть выполнены условия непрерывности изгибающего момента и условие неотрицательности опорной реакции R.

Эти требования приводят к соотношениям

$$1 - \frac{\alpha(L - L_n)}{\operatorname{tg}\alpha(L - L_n)} = \frac{\alpha L_n}{2}\operatorname{tg}\alpha L_n \frac{1 - \operatorname{tg}\dfrac{\alpha L_n}{2}\Big/\dfrac{\alpha L_n}{2}}{1 - \operatorname{tg}\alpha L_n/\alpha L_n} \tag{6.5}$$

$$\alpha(L - L_n) + \frac{1}{\alpha L_n}\,\frac{1 + (\alpha L_n)^2/2 - 1/\cos\alpha L_n}{1 - \operatorname{tg}\alpha L_n/\alpha L_n} > 0 \tag{6.6}$$

Необходимые (как оказывается и достаточные) условия непроницаемости основания имеют вид

$$w'|_{x=0} > 0, \quad w''|_{x=L_n} \geqslant 0 \tag{6.7}$$

Подстановка сюда выражения (6.3) приводит к неравенствам (4.4) и (4.5), в которых вместо L стоит L_n. По аналогии с (4.6) находим, что они выполняются при

$$k_1 < \alpha L_n \leqslant 2\pi \tag{6.8}$$

причем в этот диапазон значений попадают все X_n (см. табл. 1 и асимптотические формулы). На правом конце (6.8) обращается в нуль $w''|_{x=L_n}$.

Рассмотрим уравнение (6.5). Из него находим

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha(L - L_n)}{\alpha(L - L_n)} = F = \frac{\operatorname{tg}\alpha L_n/\alpha L_n - 1}{[1 + (\alpha L_n)^2/2]\operatorname{tg}\alpha L_n/\alpha L_n - 1/\cos\alpha L_n} \tag{6.9}$$

График зависимости F от αL_n для диапазона (6.8) представлен на фиг. 5и. В силу непрерывности этой зависимости и поскольку при $\alpha L_n = X_n$ имеем $\alpha(L - L_n) = z_n$, можно написать, сославшись на (5.18)

$$\alpha(L - L_n) = \pi(n - 2) + \operatorname{arc\,tg}[\alpha(L - L_n)F] \tag{6.10}$$

Далее из фиг. 5в видно, что росту αL_n соответствует увеличение F, и в силу (6.9) — рост $\alpha(L - L_n)$ и αL. На левом конце интервала (6.8) $F = 0$, и значит $\alpha(L - L_n) = \pi(n - 2)$, на правом $F = 1$, и значит $\alpha(L - L_n) = k_{n-2}$. Следовательно, интервалу (6.8) соответствует следующий интервал изменения αL:

$$\pi(n - 2) + k_1 < \alpha L \leqslant k_{n-2} + 2\pi \tag{6.11}$$

Обратимся к неравенству (6.6). Соображения о непрерывности изменения опорной реакции R в точке касания при изменении αL, а также прямые вычисления демонстрируют, что при $\alpha L_n = X_n$, $\alpha L = u_n$ условие (6.6) выполняется со знаком равенства. Прямые вычисления показывают также, что оно удовлетворяется со знаком неравенства и вплоть до самого конца интервала (6.8). Таким образом, при

$$X_n \leqslant \alpha L_n \leqslant 2\pi, \quad u_n \leqslant \alpha L \leqslant k_{n-2} + 2\pi \tag{6.12}$$

выполняются все три неравенства (6.6), (6.7).

Приводим в заключение выражение нормы прогиба (6.3), (6.4)

$$\frac{N}{w_n} = \frac{\alpha L_n}{(\alpha L)^3}\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha L_n}{2} \Big/ \frac{\alpha L_n}{2}\right)\left[1 + \frac{\alpha (L - L_n)}{\operatorname{tg}\alpha (L - L_n)}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{(\alpha L_n)^2}{12} + \frac{\alpha (L - L_n)}{\alpha L_n}\left[\frac{[\alpha (L - L_n)]^2}{3} - \left(1 - \frac{\alpha (L - L_n)}{\operatorname{tg}\alpha (L - L_n)}\right)\right]\right\} \tag{6.13}$$

Графики зависимостей (6.13) помещены на фиг. 3. Это кривые $O_nK_n (n \geqslant 3)$.

Правым концом интервалов (6.12) соответствует форма равновесия, показанная на фиг. 5а, у которой в точке касания стержня с основанием обратилась в нуль вторая производная прогиба. Всего ранее сказанного достаточно для заключения о том, что с ростом αL форма трансформируется в показанную на фиг. 5б: появляются два симметрично расположенных участка полного контакта. На левом участке отрыва прогиб имеет выражение (4.9), на среднем — (2.3) при дополнительном условии $\alpha (L - l) = k_{n-2}$. Анализ, проведенный в п. 2 и п. 4, гарантирует выполнение условий контакта (1.3).

Выражение нормы прогиба таково:

$$\frac{N}{w_0} = \frac{1}{(\alpha L)^3}\left[2\pi\left(1 + \frac{\pi^2}{3}\right) + \frac{k^3_{n-2}}{3}\right], \qquad \alpha L \geqslant k_{n-2} + 2\pi \tag{6.14}$$

Графики зависимостей (6.14) показаны на фиг. 3. Это лучи K_nM_n.

7. Проделанное исследование позволяет сделать следующие выводы:

а) отличные от прямолинейной формы равновесия появляются при эйлеровом значении продольной силы P_*. Бесконечно близких к прямолинейной форме равновесия нет;

б) каждому значению продольной силы $P > P_*$ соответствует одна или несколько различных форм равновесия (фиг. 3);

в) наибольшее практическое значение имеет самая нижняя кривая $O_nK_nM_n$ на фиг. 3. Допустим, что стержню задано некоторое начальное отклонение и затем ему предоставлена возможность двигаться при наличии сопротивления.

К чему приведет динамический процесс?

Правдоподобно утверждение: стержень вернется к прямолинейной форме, если норма начального отклонения меньше того значения, которое предписывается кривой $O_nK_nM_n$ (при заданной продольной силе P и поперечной нагрузке q), и может иметь катастрофически нарастающий во времени прогиб, если больше. При $P_* < P < 4P_*$ критическая норма определяется зависимостью (1.10). Это практически совпадает с рекомендациями работы [4]. При $P > 4P_*$ критическая норма дается формулой (4.12), что заметно меньше, чем определено в работе [4] (например, при $\alpha l = k_1$, то есть при $P = 8.18\,P_*$ — в 2,24 раза). Доказательство сформулированного утверждения выходит за рамки целей настоящей работы.

Ленинградский ордена Ленина
политехнический институт
им. М. И. Калинина

Поступила 16 XI 1979

Վ. Ա. ՊԱԼՄՈՎ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՀԱՍԱՐԱԿ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է ուղիղ առաձգական ձող, որը սեղմված է առանցքային և հավասարաչափ բաշխված բեռով կոշտ հարթ հիմքին: Ներկայացվում է հավասարակշռության կորագիծ ձևերի ուսումնասիրությունը:

THE SIMPLEST CONTACT PROBLEM IN THE ELASTIC STABILITY THEORY

V. A. PALMOV

S u m m a r y

The paper deals with a straight elastic rod compressed by axial force and pressed by uniform transverse load to a rigid plane foundation. Curvilinear modes of equilibrium are also discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Феодосьев В. И.* Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. М., «Наука», 1969.
2. *Феодосьев В. И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М., «Наука», 1967.
3. *Феодосьев В. И.* Сопротивление материалов. М., «Наука», 1970.
4. *Туренко И. И., Харлаб В. Д.* Об устойчивости балки, лежащей на жестком основании. Сб. тр. Ленинградского инженерно-строительного института, 1975, № 113.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 3, 1980 Механика

К. Б. КАЗАРЯН

К ЗАДАЧЕ МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНКИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА ХОЛЛА

Рассматривается задача колебаний электропроводящей бесконечной упругой пластинки в присутствии внешнего магнитного поля с учетом эффекта Холла. В отношении пластинки принимается гипотеза Кирхгофа. Токи смещения пренебрегаются по сравнению с токами проводимости. Для простоты считается, что магнитная проницаемость материала проводящей пластинки равна единице, пластинка находится во внешней среде, отождествленной с вакуумом. Материал пластинки обладает конечной электропроводностью.

§ 1. Пластинка постоянной толщины $2h$ находится в постоянном магнитном поле $\overline{H}_0$. Прямоугольная система координат сориентирована так, чтобы координатная плоскость (x, y) совпадала со срединной плоскостью пластинки.

Линеаризированные уравнения движения пластинки во внешнем магнитном поле имеют вид [1]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=$$

$$=\frac{\rho(1-\mu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{(1-\mu^2)}{2hE}\int_{-h}^{h}R_x\,dz$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)=\frac{\rho(1-\mu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{(1-\mu^2)}{2hE}\int_{-h}^{h}R_y\,dz$$

$$D\Delta^2 w+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\int_{-h}^{h}\left(R_z+\frac{\partial R_x}{\partial x}z+\frac{\partial R_y}{\partial y}z\right)dz \tag{1.1}$$

(E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона; u, v, w — компоненты вектора перемещения), $D=2Eh^3/3(1-\mu^2)$.

Уравнения для возмущенного электромагнитного поля в области, занимаемой пластинкой ($|z|\leqslant h$), и вне ее ($|z|\geqslant h$) имеют вид [1].

$$\operatorname{rot}\overline{h}=\frac{4\pi}{c}\overline{j};\qquad \operatorname{rot}\overline{e}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\overline{h}}{\partial t};\quad \operatorname{div}\overline{h}=0;\quad \operatorname{div}\overline{e}=4\pi\rho_e, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{rot}\overline{h}^{(e)} = \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{e}^{(e)}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot}\overline{e}^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{h}^{(e)}}{\partial t}; \quad \operatorname{div}\overline{h}^{(e)} = 0; \quad \operatorname{div}\overline{e}^{(e)} = 0 \tag{1.3}$$

Здесь $\overline{h}$, $\overline{e}$ — соответственно векторы индуцированного магнитного и электрического полей в области, занимаемой пластинкой; $\overline{h}^{(e)}$; $\overline{e}^{(e)}$ — векторы индуцированного магнитного и электрического полей во внешних областях; $\overline{j}$ — вектор плотности электрического тока пластинки; ρ_e — плотность свободных электрических зарядов, c — электродинамическая постоянная.

В (1.1) $\overline{R}$ — вектор объемной силы электромагнитного происхождения

$$\overline{R} = \frac{1}{c}(\overline{j}\times\overline{H}_0) \tag{1.4}$$

Уравнения (1.1) и (1.2) связаны между собой посредством вектора плотности электрического тока $\overline{j}$.

С учетом эффекта Холла закон Ома для медленно движущихся сред запишется в виде [2]

$$\overline{j} = \sigma\left(\overline{e} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\times\overline{H}_0\right) + \mu_0(\overline{j}\times\overline{H}_0) \tag{1.5}$$

где $\mu_0 = R_0\sigma$, R_0 — коэффициент Холла.

Уравнения (1.2) и (1.3) связаны между собой посредством обычных граничных условий на поверхностях

$$\overline{h} = \overline{h}^{(e)}; \qquad e_x = e_x^{(e)}; \qquad e_y = e_y^{(e)} \tag{1.6}$$

Для решения задачи является удобным представление векторов $\overline{h}$, $\overline{e}$, $\overline{h}^{(e)}$, $\overline{e}^{(e)}$ с помощью вектора-потенциала $\overline{A}$:

$$\overline{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{A}}{\partial t}; \qquad \overline{h} = \operatorname{rot}\overline{A}; \qquad \overline{e}^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{A}^{(e)}}{\partial t}; \quad \overline{h}^{(e)} = \operatorname{rot}\overline{A}^{(e)} \tag{1.7}$$

Тогда, после некоторых преобразований уравнений (1.2) и (1.3) с учетом (1.5), для определения векторных функций $\overline{A}$, $\overline{A}^{(e)}$ получим следующие уравнения:

$$\Delta\overline{A} - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{A} - \mu_0[(\Delta\overline{A} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{A})\times\overline{H}_0] +$$

$$+\frac{4\pi\sigma}{c^2}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\times\overline{H}_0\right) = 0 \tag{1.8}$$

$$\Delta\overline{A}^{(e)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overline{A}^{(e)}}{\partial t^2} = 0 \tag{1.9}$$

Вектор объемной силы $\overline{R}$ посредством вектора-потенциала запишется в виде

$$\overline{R} = \frac{1}{4\pi}[(-\Delta\overline{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{A})\times\overline{H}_0] \tag{1.10}$$

§ 2. В дальнейшем рассмотрим частный случай колебаний пластинки, когда упругие и электромагнитные возмущения не зависят от координаты y $\left(\dfrac{\partial}{\partial y} = 0\right)$, и ограничимся изучением двух характерных задач магнитоупругих колебаний пластинки ($H_{01} = \text{const}$, $H_{02} = H_{03} = 0$; $H_{03} = \text{const}$, $H_{01} = H_{02} = 0$).

В случае действия продольного магнитного поля H_{01} связанные уравнения колебаний пластинки имеют вид

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial A_x}{\partial t} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} - \mu_0 H_{01}\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z}\right) - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial A_y}{\partial t} = -\frac{4\pi\sigma H_{01}}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \mu_0 H_{01}\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z}\right) - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{4\pi\sigma H_{01}}{c^2}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 A_x^{(e)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_x^{(e)}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x^{(e)}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 A_y^{(e)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_y^{(e)}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_y^{(e)}}{\partial t^2} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^2 A_z^{(e)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z^{(e)}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_z^{(e)}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho(1-\mu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2\rho(1+\mu)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{(1+\mu)H_{01}}{4\pi Eh}\int_{-h}^{h}\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z}\right)dz \tag{2.3}$$

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{H_{01}}{4\pi}\int_{-h}^{h}\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)dz$$

Векторы $\bar{A}$, $\bar{A}^{(e)}$ в силу (1.6) и (1.7) на границе раздела двух сред $z = \pm h$ удовлетворяют следующим условиям:

$$A_x = A_x^{(e)}, \quad A_y = A_y^{(e)}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_y^{(e)}}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial A_x^{(e)}}{\partial z} - \frac{\partial A_z^{(e)}}{\partial x} \tag{2.4}$$

Представляя искомые функции уравнений (2.1), (2.2) в виде монохроматических волн

$$w = w_0 \exp i(\omega t - kx); \quad v = v_0 \exp i(\omega t - kx)$$

$$u = u_0 \exp i(\omega t - kx) \tag{2.5}$$

$$\bar{A} = \bar{A}_0(z)\exp i(\omega t - kx); \qquad \bar{A}^{(e)} = \bar{A}_0^{(e)}\exp i(\omega t - kx)$$

и разрешая полученные системы обыкновенных уравнений с помощью (2.4) и условий затухания решений внешней задачи электродинамики на бесконечности, получим следующие значения для компонент вектора-потенциала $\bar{A}$:

$$A_{x0} = -\frac{ir_1 \operatorname{sh} r_1 z}{\alpha_1}\Phi_1 - \frac{ir_2 \operatorname{sh} r_2 z}{\alpha_2}\Phi_2$$

$$A_{y0} = -\operatorname{ch} r_1 z \Phi_1 - \operatorname{ch} r_2 z \Phi_2 + \Phi_{y0} \qquad (2.6)$$

$$A_{z0} = \frac{r_1^2 + \alpha_1\alpha_2}{k\alpha_1}\Phi_1 \operatorname{ch} r_1 z + \frac{r_2^2 + \alpha_1\alpha_2}{k\alpha_2}\Phi_2 \operatorname{ch} r_2 z + \Phi_{z0}$$

В (2.6) приняты следующие обозначения:

$$\Phi_1 = \frac{k\Phi_{y0}\alpha_1 \operatorname{ch} r_2 h + k\delta_2\Phi_{z0}}{\alpha_1\delta_1 \operatorname{ch} r_2 h - \alpha_2\delta_2 \operatorname{ch} r_1 h}; \quad \Phi_2 = -\frac{k\Phi_{y0}\alpha_2 \operatorname{ch} r_1 h + k\delta_1\Phi_{z0}}{\alpha_1\delta_1 \operatorname{ch} r_2 h - \alpha_2\delta_2 \operatorname{ch} r_1 h}$$

$$\Phi_{y0} = \frac{4\pi\sigma i\omega H_{01}}{c^2}\,\frac{\nu^2 w_0 - \mu_0 H_{01} k^2 v_0}{\nu^4 + \mu_0^2 H_{01}^2 k^4}$$

$$\Phi_{z0} = -\frac{4\pi\sigma i\omega H_{01}}{c^2}\,\frac{\nu^2 v_0 + \mu_0 H_{01} k^2 w_0}{\nu^4 + \mu_0^2 H_{01}^2 k^4}$$

$$r_1^2 = \nu^2 + \frac{\mu_0^2 H_{01}^2 k^2}{2} + \frac{\mu_0 H_{01} k}{2}\sqrt{\mu_0^2 H_{01}^2 k^2 + \frac{16\pi\sigma i\omega}{c^2}}$$

$$r_2^2 = \nu^2 + \frac{\mu_0^2 H_{01}^2 k^2}{2} - \frac{\mu_0 H_{01} k}{2}\sqrt{\mu_0^2 H_{01}^2 k^2 + \frac{16\pi\sigma i\omega}{c^2}}$$

$$\alpha_1 = \frac{\mu_0 H_{01} k - \sqrt{\mu_0^2 H_{01}^2 k^2 + \frac{16\pi\sigma i\omega}{c^2}}}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{\mu_0 H_{01} k + \sqrt{\mu_0^2 H_{01}^2 k^2 + \frac{16\pi\sigma i\omega}{c^2}}}{2}$$

$$\delta_1 = r_1 \operatorname{sh} r_1 h + k \operatorname{ch} r_1 h; \quad \delta_2 = r_2 \operatorname{sh} r_2 h + k \operatorname{ch} r_2 h \qquad (2.7)$$

$$\nu^2 = k^2 + \frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2}$$

Подставляя (2.6) и (2.5) в систему уравнений (2.3) и производя соответствующие интегрирования, получим однородную алгебраическую систему уравнений относительно w_0, v_0. Из условия нетривиальности решений этой системы придем к дисперсионному уравнению относительно частот магнитоупругих колебаний пластинки.

Полученное дисперсионное уравнение является трансцендентным и содержит в себе гиперболические функции от аргументов r_1h; r_2h. Ввиду громоздкости это уравнение здесь не приводится.

Рассмотрим асимптотические приближения дисперсионного уравнения.

Принимая $k^2h^2 \ll 1$, что соответствует точности гипотезы Кирхгофа, а также

$$\left|\frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2} h^2\right| \ll 1; \quad \mu_0 H_0 \sim 1$$

из выражения для $r^2_{1,2}$ получим, что

$$|r^2_{1,2} h^2| \ll 1 \tag{2.8}$$

Разлагая гиперболические функции трансцендентного уравнения в ряд по параметру $|rh|$ и учитывая только первые члены асимптотического разложения, получим следующее дисперсионное уравнение с точностью, соответствующей условию (2.8):

$$(\delta_0 + \alpha_{01}\varepsilon_0\Omega + \Omega^2)(1 + kh + kh\varepsilon_0\Omega)[3\alpha_{01}\varepsilon_0(1 + kh)\Omega +$$

$$+ h^2k^2(1 + \Omega^2)(1 + kh + kh\varepsilon_0\Omega)] + \varepsilon_0^2(1 + kh)\alpha_{01}^2 \mu_0 H_0 \Omega^2 = 0 \tag{2.9}$$

В (2.9) введены следующие безразмерные параметры:

$$\varepsilon_0 = \frac{4\pi\sigma\Omega_0}{k^2c^2}; \quad \alpha_{01} = \frac{H_0^2(1-\nu^2)}{4\pi E}; \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{Dk^4}{2\rho h}}; \quad \Omega = \frac{i\omega}{\Omega_0}; \quad \delta_0 = \frac{3(1-\nu^2)}{2h^2k^2}$$

Для сопоставления результатов точного решения с результатами, полученными в [3, 4] на основе модели идеально-проводящей среды, рассмотрим другой предельный случай $|rh| \gg 1$. ($\sigma \to \infty$).

Ввиду того, что коэффициент Холла обратно пропорционален коэффициенту электропроводности $R_0 \sim \sigma^{-1}$ [5], примем $\mu_0/\sigma \to 0$. Отметим, что в работе [6], посвященной вопросу распространения одномерной магнитоупругой волны в неограниченном пространстве с учетом эффекта Холла, при предельном переходе к случаю идеально-проводящей среды было принято во внимание слагаемое, характеризующее эффект Холла.

При $|rh| \gg 1$ получим следующие раздельные дисперсионные уравнения относительно частот продольных и поперечных колебаний соответственно

$$\Omega^2 + \delta_0 + \frac{3\alpha_{01}}{h^2k^2} = 0 \tag{2.10}$$

$$\Omega^2 + 1 + \frac{3(1 + kh)\alpha_{01}}{k^3h^3} = 0 \tag{2.11}$$

Уравнение (2.11) совпадает с уравнением, полученным в работах [3, 4].

Как видно из (2.9), учет токов Холла приводит к одному дисперсионному уравнению шестой степени относительно Ω, то есть токи Холла приводят к связности продольных и поперечных колебаний пластинки.

В табл. 1 приведены значения коэффициента μ_0 для ряда материалов, являющихся проводниками электрического тока. Из табл. 1 видно, что при напряженностях магнитных полей H_{03}, не превышающих значений 10^5 э, имеем $|\mu_0| H_{03} \ll 1$. Отметим, что коэффициент $|\mu_0|$ для большинства проводящих материалов также имеет величину порядка 10^{-7} э$^{-1}$.

В силу вышесказанного в уравнении (2.9) можно пренебречь соответствующим слагаемым, содержащим $\mu_0 H_{03}$.

Таблица 1

Материал пластинки	μ_0 (10^{-7} э$^{-1}$)
Серебро	-8.8
Медь	-3.1
Алюминий	-1.3
Латунь	0.3
Цинк	1.9

Таким образом, при магнитных полях порядка 100 кэ учет эффекта Холла несущественно влияет на частоту магнитоупругих колебаний пластинки.

В результате пренебрежения токами Холла уравнение (2.9) распадается на два независимых уравнения

$$\Omega^2 + \varepsilon_0 + \alpha_{01}\varepsilon_0\Omega = 0 \tag{2.12}$$

$$\Omega^3\varepsilon_0 + \frac{1+kh}{kh}\Omega^2 + \Omega\varepsilon_0\left[1 + \frac{3\alpha_{01}(1+kh)}{k^3h^3}\right] + \frac{1+kh}{kh} = 0 \tag{2.13}$$

Уравнение (2.12) есть дисперсионное уравнение частот продольных колебаний пластинки, (2.13) — дисперсионное уравнение частот поперечных колебаний. Отметим, что для составляющей продольного перемещения u имеем дисперсионное уравнение собственных колебаний.

Уравнение (2.13) совпадает с дисперсионным уравнением, полученным в работе [7].

§ 3. Рассмотрим теперь случай, когда пластинка находится под действием поперечного магнитного поля H_{03}. При этом связанные уравнения магнитоупругих колебаний пластинки имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} - \mu_0 H_{03}\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right) - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{4\pi\sigma H_{03}}{c^2}\frac{\partial v}{\partial t} \\
\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial A_z}{\partial t} = 0 \\
\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \mu_0 H_{03}\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right) - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial A_y}{\partial t} = \\
= \frac{4\pi\sigma H_{03}}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\right)
\end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho(1-\mu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(1-\mu^2)H_{03}}{8\pi Eh}\int_{-h}^{h}\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}\right)dz$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2\rho(1+\mu)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{(1+\mu)H_{03}}{4\pi Eh}\int_{-h}^{h}\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)dz \qquad (3.2)$$

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{H_{03}}{4\pi}\int_{-h}^{h}\left(\frac{\partial^3 A_y}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 A_y}{\partial x \partial z^2}\right)z\,dz$$

$$\Delta\overline{A}^{(e)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{A}^{(e)}}{\partial t^2} = 0 \qquad (3.3)$$

После представления искомых функций в виде (2.5) получим следующие значения для компонент вектора — потенциала $\overline{A}$:

$$A_{x0} = B_1 \operatorname{sh}\lambda_1 z + B_2 \operatorname{sh}\lambda_2 z + B_3 \operatorname{ch}\lambda_1 z + B_4 \operatorname{ch}\lambda_2 z + \frac{H_{03}[\nu^2 v_0 - \mu_0 H_0 k^2(u_0 + ikzw_0)]}{\nu^2} \qquad (3.4)$$

$$A_{y0} = \beta_2\lambda_1^2 B_1 \operatorname{sh}\lambda_1 z + \beta_1\lambda_2^2 B_2 \operatorname{sh}\lambda_2 z + \beta_2\lambda_1^2 B_3 \operatorname{ch}\lambda_1 z + \beta_1\lambda_2^2 B_4 \operatorname{ch}\lambda_2 z - \frac{4\pi\sigma i\omega H_{03}}{c^2}(u_0 + ikzw_0)$$

$$A_{z0} = \frac{ik}{\nu^2}(\lambda_1 B_1 \operatorname{ch}\lambda_1 z + \lambda_2 B_2 \operatorname{ch}\lambda_2 z + \lambda_1 B_3 \operatorname{sh}\lambda_1 z + \lambda_2 B_4 \operatorname{sh}\lambda_2 z) + \frac{k^2\mu_0 H_0^2 w_0}{\nu^2}$$

В (3.4) приняты обозначения:

$$B_1 = \frac{B_{x0}\beta_1\lambda_2\gamma_2 + B_{z0}\operatorname{ch}\lambda_2 h}{\lambda_1(\beta_2\gamma_2\lambda_1 \operatorname{ch}\lambda_2 h - \beta_1\gamma_2\lambda_2 \operatorname{ch}\lambda_1 h)}$$

$$B_2 = \frac{-(B_{x0}\beta_2\lambda_1\gamma_1 + B_{z0}\operatorname{ch}\lambda_1 h)}{\lambda_2(\beta_2\gamma_1 \operatorname{ch}\lambda_2 h - \beta_1\gamma_2\lambda_2 \operatorname{ch}\lambda_1 h)}; \qquad B_3 = \frac{-B_{y0}\operatorname{sh}\lambda_2 h}{\lambda_1(\beta_2\lambda_1\gamma_2 \operatorname{sh}\lambda_2 h - \beta_1\lambda_2\gamma_1 \operatorname{sh}\lambda_1 h)}$$

$$B_4 = \frac{B_{y0}\operatorname{sh}\lambda_1 h}{\lambda_2(\beta_2\lambda_1\gamma_2 \operatorname{sh}\lambda_2 h - \beta_1\lambda_2\gamma_1 \operatorname{sh}\lambda_1 h)}; \quad B_{x0} = -\frac{ik^3 H_{03}^2\mu_0 w_0}{\nu^2}$$

$$B_{y0} = -\frac{4\pi\sigma i\omega H_{03} k u_0}{\nu^2 c^2}; \quad B_{z0} = \frac{4\pi\sigma i\omega H_{03}}{c^2\nu^2}ik(1 + kh)w_0 \qquad (3.5)$$

$$\nu^2 = k^2 + \frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2}; \qquad \lambda_1^2 = \frac{2\nu^2 + \mu_0^2 H_{03}^2 k^2 + \mu_0 H_{03}\sqrt{\mu_0^2 H_{03}^2 k^4 + 4\nu^2(k^2 - \nu^2)}}{2(1 + \mu_0^2 H_{03}^2)}$$

$$\lambda_2^2 = \frac{2\nu^2 + \mu_0^2 H_{03}^2 k^2 - \mu_0 H_{03}\sqrt{\mu_0^2 H_{03}^2 k^4 + 4\nu^2(k^2 - \nu^2)}}{2(1 + \mu_0^2 H_{03}^2)}$$

$$\beta_1 = \left(2H_{03}\mu_0\nu^2 - \mu_0 H_{03}k^2 - \sqrt{\mu_0^2 H_{03}^2 k^4 + 4\nu^2(k^2-\nu^2)}\right)(4\nu^4)^{-1}$$

$$\beta_2 = \left(2H_{03}\mu_0\nu^2 - \mu_0 H_{03}k^2 + \sqrt{\mu_0^2 H_{03}^2 k^4 + 4\nu^2(k^2-\nu^2)}\right)(4\nu^4)^{-1}$$

$$\gamma_1 = \lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_1 h + k \operatorname{sh} \lambda_1 h; \quad \gamma_2 = \lambda_2 \operatorname{ch} \lambda_2 h + k \operatorname{sh} \lambda_2 h$$

$$\gamma_3 = \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_1 h + k \operatorname{ch} \lambda_1 h; \quad \gamma_4 = \lambda_2 \operatorname{sh} \lambda_2 h + k \operatorname{ch} \lambda_2 h$$

В приближении $|\lambda^2 h^2| \ll 1$, $(\mu_0 H_{03} \sim 1)$ имеем следующие раздельные дисперсионные уравнения:

а) поперечные колебания

$$(1+\sigma_0\Omega)^2(1+\Omega^2) + \alpha_{03}\sigma_0\Omega\left[(1+\sigma_0\Omega)^2 + \sigma_0\Omega\alpha_0^2 H_0^2\right] = 0 \tag{3.6}$$

б) продольные колебания

$$\Omega^3\sigma_0 + \frac{1+kh}{kh}\Omega^2 + \frac{3\sigma_0\Omega}{k^3h^3}\left[(1+kh)\alpha_{03} + kh\right] + \frac{3(1+kh)}{k^3h^3} = 0 \tag{3.7}$$

Уравнение (3.7) соответствует компоненту u_x. Для составляющей v имеем уравнение собственных колебаний.

Как видно из (3.6), (3.7), в случае действия поперечного магнитного поля имеем независимые дисперсионные уравнения, и токи Холла не оказывают влияния на частоту продольных колебаний.

Принимая во внимание то обстоятельство, что при магнитных полях с напряженностью порядка 100 кэ для проводников $\mu_0 H_{03} \ll 1$, в области значений $H_{03} < 100$ кэ получим следующее дисперсионное уравнение поперечных колебаний пластинки:

$$\Omega^2 + \alpha_{03}\sigma_0\Omega + 1 = 0 \tag{3.8}$$

Уравнение (3.8) совпадает с уравнением, полученным в работе [8].

При $|\lambda h| \gg 1$ $(\sigma \to \infty)$ имеем следующие раздельные дисперсионные уравнения частот продольных и поперечных колебаний соответственно:

$$\Omega^2 + \frac{3}{h^2k^2} + \frac{3(1+kh)\alpha_{03}}{k^3h^3} = 0 \tag{3.9}$$

$$\Omega^2 + 1 + \frac{3\alpha_{03}(1+kh)}{h^2k^2} = 0 \tag{3.10}$$

Таким образом, как в случае действия продольного, так и поперечного магнитных полей в диапазоне значений H_0 до 100 кэ влияние токов Холла на частоту магнитоупругих колебаний пластинки является пренебрежимо малым.

При значениях напряженности магнитного поля $H_0 < 100$ кэ влияние токов Холла на частоту колебаний может быть существенным для полупроводниковых пластин, в которых эффект Холла на несколько порядков сильнее этого же эффекта в проводниках. Однако исследование магнитоупругих колебаний таких пластин выходит за рамки настоящей работы.

так как для этих материалов необходим учет иных электромагнитных эффектов.

§ 4. В заключение обсудим вопрос использования модели идеально проводящего тела в задачах магнитоупругих колебаний тонких пластин. В силу малости токов Холла примем, что $\mu_x = 0$.

В работах [3, 4] на основе модели идеально проводящей среды были получены дисперсионные уравнения, определяющие частоты поперечных колебаний бесконечной пластинки в продольном и поперечном магнитных полях. Эти уравнения совпадают с уравнениями (2.11) и (3.10), полученными из точных трансцендентных уравнений при $|\nu h| \gg 1$.

В случае действия продольного магнитного поля H_{01} из сравнения уравнений поперечных колебаний (2.11) и (2.13) видно, что если в (2.13) перейти к пределу при $\sigma \to \infty$, эти уравнения совпадут. Для уравнений продольных колебаний это совпадение не имеет места. Из (2.10) видно, что магнитное поле приводит к увеличению частоты колебаний, в то время как из (2.12) следует, что частота уменьшается.

В случае действия поперечного магнитного поля H_{03} сравнивая уравнения продольных колебаний (3.7) и (3.9), можно заключить, что уравнение (3.7) при $\sigma \to \infty$ совпадает с (3.9). Однако уравнения поперечных колебаний (3.8) и (3.10) отличны друг от друга. Из (3.10) видно, что магнитное поле приводит к увеличению частоты колебаний, а из (3.8) следует, что частота уменьшается.

Отметим, что из точных трансцендентных уравнений можно получить также и дисперсионные уравнения, соответствующие другой приближенной модели [4], если при разложении гиперболических функций принять

$$k^2 \gg \left|\frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2}\right|; \quad k^2h^2 \ll 1 \tag{4.1}$$

Эта приближенная модель обсуждена в работе [4], и ее сущность заключается в пренебрежении влиянием индуцированного электромагнитного поля.

Таким образом, из точных трансцендентных дисперсионных уравнений в приближениях

$$|\nu^2h^2| \ll 1; \quad |\nu h| \gg 1; \quad k^2 \gg \left|\frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2}\right|; \quad k^2h^2 \ll 1$$

имеем различные дисперсионные уравнения.

Так как использование гипотезы Кирхгофа требует выполнения неравенства $k^2h^2 \ll 1$, то условие $|\nu| h \gg 1$ имеет место, если выполняется неравенство

$$\sqrt{\frac{4\pi\sigma(\mathrm{Re}\,\omega)h^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{4\pi\sigma h u_\phi}{c^2}kh} \gg 1 \tag{4.2}$$

где $u_\phi = \mathrm{Re}\,\omega/k$ — фазовая скорость магнитоупругих колебаний пластинки.

В табл. 2 для реальных тонких пластин, изготовленных из различных проводящих материалов, приведены значения u_c и соответствующие им значения напряженностей магнитного поля H_0 (в случаях $kh = 0.1$; $kh = 0.05$), при которых выполняется условие (4.1). Приведенные в табл. 2 значения H_0 определены на основе уравнений (2.10), (2.11) и (3.9), (3.10), полученных при условии справедливости неравенства (4.1).

Таблица 2

Материал пластинки	h (см)	u_c (10^5 см/сек)	$hk = 0.1$	$hk = 0.05$
			H_0 (10^6 э)	H_0 (10^6 э)
Медь	0.01	1.3	440	220
$E = 1.1 \cdot 10^{12}$ дин·см$^{-2}$	0.05	0.27	125	65
$\mu = 0.35$	0.1	0.13	30	14
$\rho = 8.9$ г·см$^{-3}$	0.5	0.02	6	3
$\sigma = 5.3 \cdot 10^{17}$ сек$^{-1}$	1	0.01	3	1.5
Алюминий	0.01	2.24	400	200
$E = 0.7 \cdot 10^{12}$ дин·см$^{-2}$	0.05	0.44	80	38
$\mu = 0.35$	0.1	0.22	40	21
$\rho = 2.7$ г·см$^{-3}$	0.5	0.04	8	4
$\sigma = 3.2 \cdot 10^{17}$ сек$^{-1}$	1	0.022	4	2
Латунь	0.01	3.7	1250	620
$E = 0.9 \cdot 10^{12}$ дин·см$^{-2}$	0.05	0.73	240	110
$\mu = 0.32$	0.1	0.36	120	60
$\rho = 8.5$ г·см$^{-3}$	0.5	0.07	20	10
$\sigma = 2.0 \cdot 10^{17}$ сек$^{-1}$	1	0.03	9	4
Константан	0.01	35.8	10000	5100
$E = 1.6 \cdot 10^{12}$ дин·см$^{-2}$	0.05	7.3	2220	1100
$\mu = 0.3$	0.1	3.6	1100	550
$\rho = 8.9$ г·см$^{-3}$	0.5	0.72	210	100
$\sigma = 0.2 \cdot 10^{17}$ сек$^{-1}$	1	0.36	100	52

Из табл. 2 следует, что для тонких проводящих пластин с параметрами $h \sim 0.01 \div 1$ см, $hk = 0.1$; $hk = 0.05$ неравенство (4.1) будет иметь место при фазовых скоростях магнитоупругих колебаний u_c, соответствующих сверхсильным магнитным полям с напряженностью свыше 10^6 э.

Таким образом, можно сделать вывод, что для тонких проводящих пластин, находящихся в магнитных полях, не превышающих значений $H_* = 10^6$ э, условие (4.1) не выполняется и, следовательно, при этих полях модель идеально проводящей среды может привести к неправильным результатам.

В [9] на основе численных примеров, характерных для рассматриваемого круга задач, показана реальность приближения $|\nu^2| h^2 \ll 1$.

Наконец, отметим, что в приближении $|v^2|h^2 \ll 1$ имеет место совпадение дисперсионных уравнений, полученных на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел, с соответствующими асимптотическими разложениями точных дисперсионных уравнений [1].

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 3 XII 1979

Կ. Բ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

ՀՈԼԻ ԷՖԵԿՏԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ ՍԱԼԻ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԽՆԴՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է սալի մագնիսաառաձգական տատանումների խնդիրը ինչպես երկայնական, այնպես էլ լայնական մագնիսական դաշտի առկայությամբ: Սալի տատանումների հաճախականությունների նկատմամբ ստացված են դիսպերսիոն հավասարումներ: Քննարկված են ստացված դիսպերսիոն հավասարումների տարբեր մոտավորությունները: Ցույց է տրված, որ Հոլի հոսանքի ազդեցությունը էլեկտրահաղորդիչ սալերի տատանումների վրա արհամարհելի է, երբ մագնիսական դաշտի լարվածության արժեքը չի գերազանցում 10^5 Օե. Դիսպերսիոն հավասարումներից ստացված են իդեալական հաղորդիչ սալի մոդելի կիրառելիության սահմանները:

THE PROBLEM OF PLATE MAGNETOELASTIC VIBRATION, CONSIDERING HOLL'S EFFECT

K. B. KAZARIAN

S u m m a r y

The problem of plate vibration under the effect of both longitudinal and transversal magnetic fields is dealt with. Some dispersion equations for plate's vibration frequencies are derived. Various approximations of the dispersion equations are examined. The effect of Holl's current upon the vibration frequencies of electroconductive plates is shown to be negligibly small in the range of magnetic field intensity up to 10^5 *Oe*. The range of application of a perfectly conducting plate model is found from the dispersion equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М., Изд. «Наука», 1977, стр. 31—37, 87—134.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. I, М., Изд. «Наука», 1976, стр. 330—332.

3. *Kaliski S.* Magnetoelastic vibration of perfectly conducting plates and bars assuming the principle of plane sections. Proc. Vibr. Probl. Pol. Ac. Sci., 1962. No. 3. p. 225—234.
4. *Амбарцумян С. А., Белубекян М. В.* О приближенных методах в задачах магнитоупругих колебаний пластинки. Сб. «Тепловые напряжения в элементах конструкций», Киев, Наукова Думка, 1979, № 19, стр. 3—6.
5. *Давыдов А. С.* Теория твердого тела. М., Изд. «Наука», 1976, стр. 192—198.
6. *Sergio Levoni*, "Sull' influenza dell'effetto Hall nella propagazione di onde magnetoelastiche", Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 1973, XXII, p. 343—358.
7. *Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки в магнитном поле. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1967, т. 20, № 5, с. 21—27.
8. *Багдасарян Г. Е., Мкртчян П. А.* О колебаниях проводящих пластин в поперечном магнитном поле. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. 28, № 1, стр. 3—19.
9. *Белубекян М. В., Казарян К. Б.* О применимости гипотезы магнитоупругости тонких тел к задачам колебаний токонесущих пластин. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т. 29, № 4, стр. 29—40.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 3, 1980 Механика

А. Я. САГОМОНЯН, Я. П. ДВОРКИН

УДАР УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК О ПОВЕРХНОСТЬ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Исследование напряженного состояния упругих оболочек при их проникании в жидкость необходимо при решении различных вопросов современной техники. Задачи погружения оболочек в несжимаемую жидкость рассматривались Э. И. Григолюком и А. Г. Горшковым [1]. При больших скоростях удара важен учет сжимаемости и волнового характера движения жидкости [2]. Имеющиеся решения задач удара оболочек о поверхность сжимаемой жидкости [3, 4] во многих случаях не позволяют находить экстремальные значения напряжений в материале оболочек, что очень важно с точки зрения расчета приводняющихся конструкций на прочность. В настоящей работе предложен численный метод исследования таких задач, дающий возможность находить экстремальные значения напряжений и учитывающий подъем свободной поверхности жидкости. Рассмотрено проникание замкнутых упругих цилиндрических и сферических оболочек, заполненных идеальной сжимаемой жидкостью. Для начального этапа погружения, когда свободная поверхность жидкости не возмущена, получены новые аналитические решения.

Рассмотрим вертикальное падение замкнутых цилиндрических и сферических оболочек на горизонтальную поверхность покоящейся идеальной сжимаемой жидкости. Скорость удара v_0 много меньше скорости звука в жидкости a. Цилиндрическая оболочка считается бесконечной, ее образующие горизонтальны. При проникании сферических оболочек движение среды будет осесимметричным, а при проникании цилиндрических — плоским. Соответственно процесс будем рассматривать в плоскостях меридианного или поперечного сечения оболочек. Введем в этих плоскостях полярную систему координат с началом в центре сечения оболочки и с угловой координатой θ, отсчитываемой от луча, направленного вертикально вниз. Уравнения движения упругих оболочек типа С. П. Тимошенко при малых деформациях могут быть записаны в следующем виде:

$$u_{\theta\theta} - c^2 u_{tt} = R_1, \quad \Phi_{\theta\theta} - c^2 \Phi_{tt} = R_2, \quad w_{\theta\theta} - w_{tt} = R_3 \tag{0.1}$$

В случае цилиндрической оболочки

$$R_1 = -w_\theta (1 + c^2) - \alpha c^2 \Phi, \quad R_2 = D(\Phi + w_\theta \alpha)$$

$$R_3 = (u_\theta + w) c^2 - \alpha \Phi_\theta + q$$

а в случае сферической —

$$R_1 = -Gw_\theta - u_\theta \operatorname{ctg}\theta + u(\mu + \operatorname{ctg}^2\theta) - \alpha c^2 \Phi$$

$$R_2 = -\Phi_\theta \operatorname{ctg}\theta + \Phi(\operatorname{ctg}^2\theta + \mu + D) + w_\theta D/\alpha$$

$$R_3 = -w_\theta \operatorname{ctg}\theta - \alpha(\Phi_\theta + \Phi\operatorname{ctg}\theta) + 2Lw + Lu_\theta + Lu\operatorname{ctg}\theta + q$$

где

$$\tau = t(v/R), \quad u = \bar{u}/l, \quad w = \bar{w}/l, \quad \alpha = R/l$$

$$q = 2\alpha(1+\mu)RE^{-1}h^{-1}k^{-2}\bar{q}, \qquad v = \sqrt{Ek^2\rho^{-1}(1+\mu)^{-1}/2}$$

$$c = \sqrt{k^2(1-\mu)/2}, \; D = 6R^2k^2(1-\mu)/h^2, \; L = (1+\mu)/c^2, \; G = 1+\mu+c^2$$

t — время, отсчитываемое с момента удара; h и R — толщина оболочки и радиус ее срединной поверхности; l — характерный размер; $\bar{w}$ и $\tilde{u}$ — радиальный и тангенциальный компоненты вектора смещения срединной поверхности; Φ — угол поворота нормали к срединной поверхности; $\bar{q}$ — разность между радиальными нагрузками на внешнюю и внутреннюю поверхности оболочки; ρ, E и μ — соответственно плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки; k^2 — коэффициент сдвига [5]. Нижними индексами обозначены частные производные по соответствующим аргументам. При получении уравнений (0.1) были использованы допущения теории тонких оболочек [5].

1. Рассмотрим начальный период проникания, когда скорость расширения смоченной поверхности оболочки больше скорости звука в жидкости и, следовательно, ее свободная поверхность не возмущена. В этот период времени координату θ_* внешней смоченной поверхности можно с большой точностью определять по формуле

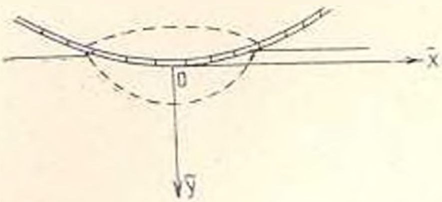
$$\theta_* = \sqrt{2v_0 t/R} = \sqrt{2Q\tau} \tag{1.1}$$

где $Q = v_0/v$. Из равенства (1.1) следует, что скорость распространения смоченной поверхности оболочки превосходит скорость звука во внешней жидкости при $\tau \leq QM^{-2}/2$, где $M = a/v$.

Пусть оболочка заполнена идеальной сжимаемой жидкостью, имеющей до удара давление $\bar{p}_0$. Из этого следует, что начальное значение смещения w_0 равно в случае цилиндрической оболочки величине $2\alpha(1+\mu)\times \times Rc^2\bar{p}_0/(Ehk^2)$, а в случае сферической — величине $\alpha(1+\mu)R\bar{p}_0/(Ehk^2L)$. При исследовании процесса гидроупругого взаимодействия мы будем полагать $w_0 = 0$, то есть считать оболочку первоначально недеформированной. Нетрудно видеть, что прибавление к результатам задачи постоянного значения w_0 позволяет получить решение, учитывающее начальное давление заполнителя.

Введем в плоскости сечения оболочки декартову систему координат $\tilde{x}O\tilde{y}$, движущуюся вертикально вниз со скоростью удара v_0 (фиг. 1). Ось

$\tilde{O}x$ направлена горизонтально и в момент $t = 0$ лежит на поверхности жидкости. Движение внешней жидкости и заполнителя в линейной постановке описывается в этой системе координат уравнениями



Фиг. 1.

$$\varphi_{\tau\tau} - 2\varphi_{\tau y} = A^2\varphi_{yy} + M^2(\varphi_{xx} + \lambda\varphi_x/x)$$
$$\psi_{\tau\tau} = A_1^2\psi_{yy} + M_1^2(\psi_{xx} + \lambda\psi_x/x) \qquad (1.2)$$

где $A^2 = a^2/v_0^2 - 1$, $A_1 = a_1/v_0$, $x = \tilde{x}/R$, $y = \tilde{y}v/Rv_0$, $M_1 = a_1/v$, $\varphi = \tilde{\varphi}/(Rv)$, $\psi = \tilde{\psi}/(Rv)$; $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ — потенциалы возмущенных скоростей внешней жидкости и заполнителя; a_1 — скорость звука в заполнителе; коэффициент λ равен нулю в плоском случае и единице — в осесимметричном. Давление во внешней жидкости $\tilde{p}$ и в заполнителе $\tilde{p}_1$ определимо по следующим формулам:

$$\tilde{p} = -\rho_0(\varphi_\tau - v_0\varphi_y), \quad \tilde{p}_1 = -\rho_1\psi_\tau \qquad (1.3)$$

здесь ρ_0 и ρ_1 — плотности внешней жидкости и заполнителя.

Области возмущенного движения жидкостей, ограниченные акустическими волнами (фиг. 1), лежат в рассматриваемый период проникания в малой окрестности точки O. Поэтому при описании движения жидкости можно положить*

$$\tilde{x} \approx R\theta \approx R\sin\theta, \quad x \approx \theta \qquad (1.4)$$

Учитывая условие $v_0 \ll a$, снесем граничные условия равенства нормальных составляющих скоростей оболочки и жидкости на горизонтальные линии $\tilde{y} = 0$ и $\tilde{y} = -h$. В результате получим

$$\varphi_y\big|_{y=0} = (Q^2 + Qw_\tau)H(\tau - \theta^2/2Q), \quad \psi_y\big|_{y=-\varepsilon} = Qw_\tau \qquad (1.5)$$

где $\varepsilon = hv/(Rv_0)$, H — функция Хевисайда. Из соотношений (1.3) следует, что

$$q = -B(\varphi_\tau - \varphi_y)\big|_{y=0} + B_1\psi_\tau\big|_{y=-\varepsilon}$$
$$B = R\rho_0/(h\rho), \quad B_1 = R\rho_0/(h\rho_1) \qquad (1.6)$$

Рассмотрим процесс проникания цилиндрической оболочки. Используя соотношения (1.4), заменим в уравнениях (1.2) аргумент x на θ; подставим равенство (1.6) в уравнения (0.1). Кроме того, положим

$$w_\tau H(\tau - \theta^2/2Q) = w_\tau$$

(подобное приближение допустимо на начальном этапе взаимодействия,

* Этот подход предложен В. Д. Кубенко [6].

когда упругие возмущения в оболочке ограничены малой окрестностью точки удара) и перепишем соотношения (1.5) в таком виде:

$$
\begin{gathered}
\varphi_y|_{y=0} - Qw = Q^2 H(\tau - \theta^2/2Q) \\
\psi_y|_{y=0} = Qw;
\end{gathered}
\tag{1.7}
$$

Применим к равенствам (0.1), (1.2), (1.7) преобразование Лапласа с параметром s по аргументу τ и преобразование Фурье по аргументу θ. Последнее берется в смысле Ф. Фридлендера [7]. Таким образом, равенства (1.2) преобразуются в обыкновенные дифференциальные уравнения. Решая эти уравнения с учетом условий (1.7) и условий стремления потенциалов φ и ψ к нулю при $|y| \to \infty$, найдем образы $\bar{\varphi}^*$ и $\bar{\psi}^*$ (звездочка соответствует преобразованию Лапласа, а черта — преобразованию Фурье). Подставляя $\bar{\varphi}^*$ и $\bar{\psi}^*$ в преобразованные уравнения (0.1), нетрудно определить образы $\bar{w}^*$, $\bar{u}^*$ и $\bar{\Phi}^*$. При нахождении оригиналов искомых функций интегралы обратного преобразования Фурье мы оценивали асимптотически методом перевала для больших значений s (это соответствует малым τ). Затем полученные выражения обращались с помощью разложения Хевисайда. Так, для функции w при $\theta = 0$ имеем

$$
w = -BQ^2\bar{\alpha}\left[\frac{1}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{e^{\lambda_1\tau}}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)} + \frac{e^{\lambda_2\tau}}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}\right]
$$

$$
\lambda_{1,2} = -\left(BQ\bar{\alpha} \pm \sqrt{B^2Q^2\bar{\alpha}^2 - 4c^{-2}}\right)/2, \quad \bar{\alpha} = \sqrt{1 + A^2}: \quad (B^2Q^2\bar{\alpha}^2 > 4c^{-2})
$$

$$
w = -2Q[\lambda_3^{-1} - (\lambda_3^{-1} + \tau)e^{-\lambda_3\tau}]
$$

$$
\lambda_3 = BQ\bar{\alpha}/2; \quad (B^2Q^2\bar{\alpha}^2 = 4c^{-2})
$$

$$
w = -BQ^2\bar{\alpha}c[c - e^{-\lambda_3\tau}\sin(\lambda_4\tau + \nu)/\lambda_4]
$$

$$
\lambda_4 = \sqrt{c^{-2} - B^2Q^2\bar{\alpha}^2/4}, \quad \nu = \operatorname{arctg}(\lambda_4/\lambda_3)
$$

$$
(B^2Q^2\bar{\alpha}^2 < 4c^{-2})
$$

В случае сферической оболочки вместо преобразования Фурье использовалось разложение искомых функций по присоединенным функциям Лежандра $P_n(\cos\theta)$, $P_n^1(\cos\theta)$:

$$
w^* = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(s)\, P_n(\cos\theta), \quad u^* = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(s)\, P_n^1(\cos\theta)
$$

$$
\Phi^* = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(s)\, P_n^1(\cos\theta), \quad \varphi^* = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(y, s)\, P_n(\cos\theta) \tag{1.8}
$$

$$
\psi^* = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(y, s)\, P_n(\cos\theta)
$$

в уравнениях (1.2) полагалось $1/x = 1/\theta = 1/\operatorname{tg}\theta$.

Опуская промежуточные выкладки, выпишем полученную таким образом систему уравнений для коэффициентов в разложениях (1.8):

$$[n(n+1) - 1 + \mu + c^2s^2]\, U_n - c^2\Phi_n + GW_n = 0$$

$$[n(n+1) - 1 + \mu + D + c^2s^2]\, \Phi_n - DW_n = 0$$

$$[n(n+1) + s^2 + 2h]\, W_n + Ln(n+1)\, U_n - n(n+1)\, \Phi_n +$$

$$+ B(\varphi_{n_y} - s\varphi_n)|_{y=0} + B_1 s\psi_n|_{y=-\infty} = 0$$

$$A^2\varphi_{n_{yy}} + 2s\varphi_{n_y} - [s^2 + M^2 n(n+1)]\, \varphi_n = 0$$

$$\varphi_{n_y}|_{y=0} = QsW_n + Q^{5/2} s^{-3/2} \sqrt{2\pi}\, (n + 1/2)\, e^{-s/Q} I_{n+1/2}\left(\frac{s}{Q}\right)$$

$$\psi_{n_{yy}} - [s^2 + n(n+1)\, M_1^2]\, A_1^{-2}\psi_n = 0$$

$$\psi_{n_y}|_{y=-\infty} = QsW_n$$

Отсюда нетрудно найти выражения для W_n, U_n, Φ_n, φ_n, ψ_n.

Формула суммирования Пуассона [8] имеет такой вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n+0.5) = 0.5 \int\limits_{C_w} f(\nu)\, e^{-i\pi\nu} (\cos \pi\nu)^{-1}\, d\nu \qquad (1.9)$$

где функция f комплексного переменного ν аналитична в некоторой окрестности оси $\mathrm{Re}\,\nu$; контур C_w, симметричный относительно действительной полуоси, показан на фиг. 2. С помощью соотношения (1.9) бесконечные ряды (1.8) приводятся к интегралам, которые могут быть асимптотически оценены методом перевала при больших значениях параметра s. Обратное преобразование Лапласа осуществимо с помощью разложения Хевисайда. Выражения искомых функций аналогичны полученным в случае цилиндрической оболочки, однако имеют более сложный вид и здесь не приводятся. Математический аппарат, применяемый нами для аналитического исследования осесимметричного движения оболочки и жидкости, достаточно полно освещен в работе [8] на примере задачи о дифракции акустической волны на сферической оболочке.

Отметим, что при $\theta = 0$ верны асимптотические оценки

$$\bar{p} \sim \rho_0 a(\bar{v}_0 + \bar{w}_t), \quad \bar{p}_1 = -\rho_1 a_1 \bar{w}_t$$

то есть в начальный период проникания здесь оправдана гипотеза плоского излучения [9].

2. Изложенные выше аналитические решения получены в постановке, верной лишь для начальной стадии проникания, в течение которой не возмущена свободная поверхность жидкости. За это время напряжения в оболочках не достигают, как правило, своих экстремальных значений. Следовательно, необходим метод исследования процесса гидроупругого взаимо-

действия на последующем этапе погружения, когда акустическими возмущениями охвачена часть свободной поверхности жидкости.

Идея предлагаемого здесь метода состоит в численном связанном решении уравнений движения оболочек и жидкости. Уравнения движения оболочек решаются методом характеристик, уравнения движения жидкости — с помощью явной разностной схемы, предложенной в [10]. Связь осуществляется граничными условиями на смоченных поверхностях оболочек.

Ниже последовательно излагаются метод характеристик для решения уравнений (0.1), метод расчета движения заполнителя и внешней жидкости (учтен подъем ее свободной поверхности) и алгоритм, связывающий эти два метода и позволяющий рассчитывать параметры гидроупругого взаимодействия.

На характеристиках системы уравнений (0.1) $d\tau/d\theta = \pm c$ выполняются условия

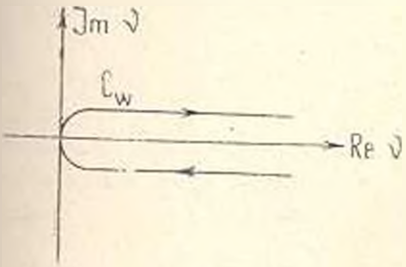
$$du_\theta \mp c\,du_\tau = R_1 d\theta, \quad d\Phi_\theta \mp c\,d\Phi_\tau = R_2 d\theta \tag{2.1}$$

а на характеристиках $d\tau/d\theta = \pm 1$ — условия

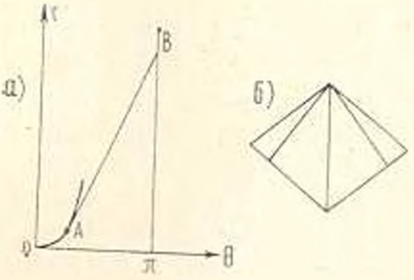
$$dw_\theta \mp dw_\tau = R_3 d\theta$$

Кроме того, вдоль направления, определяемого дифференциалами $d\tau$ и $d\theta$, выполняются следующие соотношения:

$$dw = w_\tau d\tau + w_\theta d\theta, \quad du = u_\tau d\tau + u_\theta d\theta, \quad d\Phi = \Phi_\tau d\tau + \Phi_\theta d\theta \tag{2.2}$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Рассмотрим фазовую плоскость (θ, τ) (фиг. 3, *а*). В период проникания, когда скорость границы внешней смоченной поверхности оболочки больше скорости распространения упругих возмущений, область возмущенного движения лежит выше кривой OA, соответствующей границе смоченной поверхности. В точке A этой кривой касается характеристика наклона $d\tau/d\theta = c$, в дальнейшем она ограничивает снизу область возмущенного движения. Разобьем область возмущенного движения на расчетную сетку характеристиками $d\tau/d\theta = \pm c$. Из вершины каждой расчетной ячейки (фиг. 3, *б*) проведем до пересечения с противолежащими сторонами характеристики $d\tau/d\theta = \pm 1$ и вертикальный отрезок. Проинтегрируем вдоль отрезков характеристик соответствующие равенства (2.1), а вдоль вертикального отрезка — соотношения (2.2) и используем при этом линейную интерполяцию функций вдоль отрезков. Мы получим систему девяти алгебраических уравнений, позволяющих находить значения функций w, u, Φ и их первых производных в вершине ячейки, исходя из их значений в остальных вершинах. Таким образом, можно вычислять искомые величины на каждом временном уровне, пользуясь их значениями в расположенных ниже точках и граничными условиями. Можно показать, что первые производные функций w, u, Φ непрерывны всюду в плоскости (θ, τ) (фиг. 3,*а*). Следовательно, на линии OAB можно задаваться нулевыми граничными условиями. На линиях $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ выполняются условия симметрии движения оболочки относительно них.

Для нахождения величины q, входящей в уравнения (0.1), и пропорциональной разности перепадов давлений внешней жидкости и заполнителя, уравнения движения жидкости в акустическом приближении будем решать с помощью явной разностной схемы, предложенной в [10].

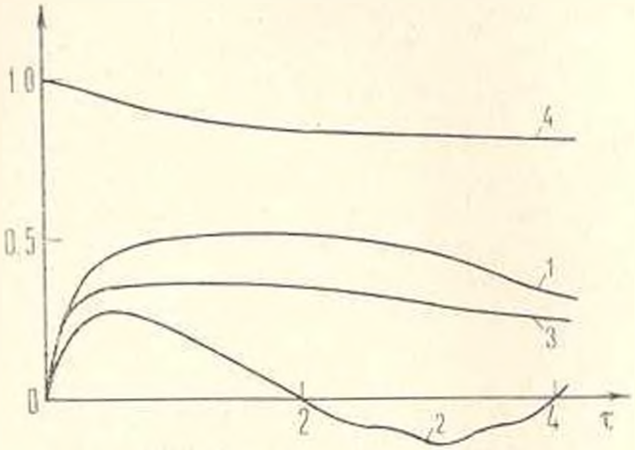
Уравнения движения внешней жидкости записываются в неподвижной декартовой системе координат xO_1y, совпадающей в момент удара с подвижной системой $\bar{x}O\bar{y}$. Граничные условия состоят в равенстве нормальных составляющих скоростей жидкости и оболочки в зоне их контакта и равенстве нулю перепада давления на свободной поверхности. Соответствие между координатами $\bar{x}$ и θ на смоченной поверхности оболочки задается приближенным соотношением $\bar{x} = R\sin\theta$. Граничные условия сносятся с возмущенной поверхности жидкости на ось O_1x. Учтено влияние подъема свободной поверхности жидкости на увеличение смоченной зоны оболочки. При этом свободная поверхность представляется ступенчатой линией; высота каждой ступеньки и скорость ее движения известны в исходный момент времени. Ступенчатая линия передвигается в течение временного шага, то же делается и с сечением плоскостью движения внешней поверхности оболочки. Находится новая точка пересечения этих двух линий, которая и является границей смоченной зоны в момент времени, следующий за исходным.

Движение заполнителя рассчитывается так же, как и движение внешней жидкости, при этом на внутренней поверхности оболочки используется условие равенства нормальных составляющих скоростей оболочки и жидкости.

Алгоритм связанного решения уравнений движения оболочки и жидкости строится следующим образом. Пусть известны параметры движения в момент τ_0 и нужно определить их в следующий расчетный момент τ_1. Для этого определяется граница смоченной зоны при τ_1; на смоченных поверхностях ставятся граничные условия, исходя из значений скоростей частиц оболочки при τ_0, и рассчитываются параметры движения жидкости; полученные значения перепадов давлений осредняются по временному интервалу от τ_0 до τ_1 и служат для расчета параметров движения оболочки при $\tau = \tau_1$.

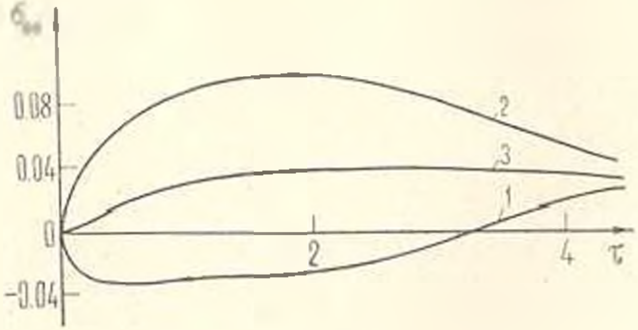
Приведем результаты расчета параметров гидроупругого взаимодействия при следующих значениях безразмерных параметров: $c = 0.528$; $D = 8350$; $L = 4.78$; $G = 1.65$; $\alpha = 25$; $B = 6.67$; $Q = 0.0172$; $M = 0.5$.

На фиг. 4 даны зависимости от τ отношений $-\bar{w}_t/v_0$ в точке $\theta = 0$ для полой цилиндрической, полой сферической и заполненной керосином цилиндрической оболочек (соответственно линии 1, 2 и 3). Кривая 4 представляет собой отношение значения ширины внешней смоченной поверхности полой цилиндрической оболочки, полученного с учетом подъема свободной поверхности, к значению, полученному без учета подъема. На фиг. 5 даны зависимости от τ нормальных компонент напряжения



Фиг. 4.

$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$, отнесенных к $E\alpha^{-1}/(1-\mu^2)$, то есть $\sigma_{\theta\theta} = \alpha(1-\mu^2)\bar{\sigma}_{\theta\theta}/E$ для полой цилиндрической оболочки у ее внутренней, внешней и срединной поверхности (линии 1, 2 и 3).



Фиг. 5.

Из представленных результатов видно, что экстремальные напряжения в оболочках могут развиваться в период проникания, когда важен учет сжимаемости жидкости.

Результаты аналитических решений рассмотренных задач подтверждают на раннем этапе проникания численные расчеты.

Механико-математический факультет
МГУ им. М. В. Ломоносова

Поступила 15 XI 1979

Ա. ՅԱ. ՍԱՂՈՄՈՆՅԱՆ, ՅԱ. Պ. ԴՎՈՐԿԻՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԱՐՎԱԾԸ ՍԵՂՄՎՈՂ ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Լուծվում են առաձգական գնդային և գլանային թաղանթների հարվածի և իդեալական սեղմվող հեղուկի մեջ նրանց հետագա ընկղման խնդիրները։

Հաշվի է առնվում հեղուկի ազատ մակերևույթի բարձրացման ազդեցությունը թաղանթների թրջվող մասի մեծացման վրա։ Ներթափանցման սկզբնական փուլի համար ստացվել են ասիմպտոտական լուծումներ։ Հետագա ուսումնասիրությունը կատարվում է թվային եղանակներով։

ON THE IMPACT OF ELASTIC SHELLS UPON A SURFACE OF COMPRESSIBLE FLUIDS

A. Ya. SAGOMONIAN, Ya. P. DVORKIN

S u m m a r y

The problems of the impact and subsequent penetration of elastic cylindrical and spherical shells into ideal compressible fluid are solved. The fluid free surface lifting is taken into account to find the shell wet zone. For the initial period of penetration some analytical solutions are obtained. Subsequent period is investigated by numerical methods.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г.* Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. Удар и погружение. Л., «Судостроение», 1976, 198 с.
2. *Сагомонян А. Я.* Проникание. М., Изд-во МГУ, 1974, 299 с.
3. *Payton R. G.* Initial bending stresses in elastic shells impacting into compressible fluids. "Quart. J. Mech. and Appl. Math.", 1962, 15, No. 1, 77–90.
4. *Medick M. A.* Initial response of an elastic spherical shell upon impact with a compressible fluid. Proc. 4-th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., N. Y., 1962, v. 1, 285–291.
5. *Сагомонян А. Я.* Волны напряжения в сплошных средах. Часть 2. Изд-во МГУ, 1979, 208 с.
6. *Кубенко В. Д.* Про удар пружної оболонки об поверхню рідини. Доп. АН УРСР, 1974, А, 2, 164–167.

7. *Friedlander F. G.* Sound Pulses. "Cambr. Univ. Press.", Cambridge, England, 1958, 202 p.

8. *Tang S.-C., Yen D. N. Y.* Interaction of a plane acoustic wave with an elastic spherical shell. J. Acoust. Soc. Amer., 1970, 47, No. 5, 1325—1333.

9. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г.* Взаимодействие слабых ударных волн с упругими конструкциями. Научн. тр. ин-та мех. МГУ, 1971, № 13, 180 с.

10. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М., 1976, 400 с.