ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1980

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 2, 1980 Механика

А. М. СИМОНЯН

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ОДНООСНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ МЕТАЛЛОВ

В настоящей работе рассматриваются некоторые возможности описания кривых ползучести при различных программах изменений напряжений в применении к металлическим материалам. Проводимое исследование имеет обзорный характер и основано на построении аналитических аппроксимаций деформаций ползучести при постоянных напряжениях и температурах и на обобщении этих аппроксимаций на случаи переменных напряжений при использовании тех или иных теоретических предпосылок.

1. *Сводка некоторых аппроксимаций, применяемых для описания ползучести металлов при постоянных напряжениях*

Для описания I стадии ползучести обычно используются следующие аппроксимации:

$$\varepsilon_c(t) = at^m, \quad 0 < m < 1 \quad [1, 2] \tag{1.1}$$

$$\varepsilon_c(t) = C\left(1 - e^{-\gamma t}\right) \quad [3] \tag{1.2}$$

$$\varepsilon_c(t) = -C\beta\int_0^t Э_\alpha(\beta, \tau)\,d\tau, \quad \beta < 0 \quad [4] \tag{1.3}$$

где $Э_\alpha(\beta, \tau)$ и ее интеграл протабулированы в [5],

$$\varepsilon_c(t) = \nu \ln(1 + \eta t) \quad [6] \tag{1.4}$$

Для описания кривых ползучести с возрастающей скоростью используются

$$\varepsilon_c(t) = C\left[1 - \sqrt[m]{1 - \alpha t}\right] \quad [8, 9] \tag{1.5}$$

$$\varepsilon_c(t) = Ct^\beta \quad [10] \tag{1.6}$$

Для описания первой и третьей стадий ползучести использовалась формула [11]

$$\varepsilon_c(t) = \alpha\,(C - \ln t)^{-1/n} \tag{1.7}$$

Для описания первых двух стадий ползучести к вышеприведенным аппроксимациям достаточно добавить член at, однако при этом может возникнуть трудность обобщения полученных аппроксимаций на случай переменных напряжений: в этом смысле иногда удобно использовать [12]

$$\varepsilon_c(t)=\frac{\beta}{\ln\left(1+\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)}\ln\left[\left(1+\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{1+\frac{\alpha t}{\beta}}-\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right] \tag{1.8}$$

для которой имеют место $\left.\frac{d\varepsilon_c}{dt}\right|_{t=0}=\alpha+\beta\gamma$, $\left.\frac{d\varepsilon_c}{dt}\right|_{t\to\infty}=\alpha$, причем асимптота пересекает ось ординат в точке β. Более сложные аналитические соотношения, не позволяющие записать выражение для $\varepsilon_c(t)$ в явном виде, рассмотрены в пункте 2.

2. *О ползучести металлов при переменных напряжениях*

Для обобщения аппроксимаций ползучести на случаи переменных напряжений используются различные теоретические предпосылки.

Большое распространение получила гипотеза уравнения состояния в форме Людвика [1]

$$\Phi\left(\frac{d\varepsilon_c}{dt},\ \sigma,\ \varepsilon_c\right)=0 \tag{2.1}$$

согласно которой скорость деформации определяется значениями напряжения и деформации в рассматриваемый момент.

Иногда используется более конкретный вид (2.1):

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt}=F(\sigma)\,\varphi(\varepsilon_c) \tag{2.2}$$

В применении (2.1) к некоторым аппроксимациям пункта 1 получим: соответственно (1.1)

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt}=ma^{\frac{1}{m}}\varepsilon_c^{\frac{m-1}{m}} \tag{2.3}$$

что при условии подобия или (2.2) дает

$$\varepsilon_c(t)=\left[\int_0^t a^{\frac{1}{m}}\,dt\right]^m \tag{2.4}$$

соответственно (1.2)

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt}=\gamma(C-\varepsilon) \tag{2.5}$$

что при условии подобия дает

$$\varepsilon_c(t)=\gamma\int_0^t C[\sigma(\tau)]e^{-\gamma(t-\tau)}\,d\tau \tag{2.6}$$

при условии (2.2) имели бы $C\neq f(\sigma)$ и, следовательно,

$$\varepsilon_c(t) = C\left\{1 - \exp\left[-\int_0^t \gamma[\sigma(\tau)]\,d\tau\right]\right\} \qquad (2.7)$$

последнее, однако, вряд ли имеет практический смысл, соответственно (1.4)

$$\frac{\partial\varepsilon_c}{\partial t} = \varkappa\eta e^{-\frac{\varepsilon}{\varkappa}} \qquad (2.8)$$

что при условии (2.2) дает $\varkappa \neq f(\sigma)$ и, следовательно,

$$\varepsilon_c(t) = \varkappa \ln\left[1 + \int_0^t \eta[\sigma(\tau)]\,d\tau\right] \qquad (2.9)$$

соответственно (1.5)

$$\frac{\partial\varepsilon_c}{\partial t} = \frac{C\alpha}{m}\left(1 - \frac{\varepsilon}{C}\right)^{1-m} \qquad (2.10)$$

соответственно (1.6)

$$\varepsilon_c = \left\{\int_0^t \sqrt[3]{C[\sigma(\tau)]}\,d\tau\right\}^3 \qquad (2.11)$$

соответственно (1.7)

$$\frac{\partial\varepsilon_c}{\partial t} = \frac{\alpha}{n}\left(\frac{\varepsilon_c}{\alpha}\right)^{1-n}\exp\left[\left(\frac{\varepsilon_c}{\alpha}\right)^n - C\right] \qquad (2.12)$$

соответственно (1.8)

$$\frac{\partial\varepsilon_c}{\partial t} = \alpha + \beta\gamma\left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{-\frac{\varepsilon_c}{\beta}} \qquad (2.13)$$

Для соотношения (2.1) используются и другие более сложные выражения. Например, в работе [13] рассматривается выражение

$$\frac{\partial\varepsilon_c}{\partial t} = A(\sigma)(\varepsilon_0 + \varepsilon_c)^{-n}\exp(a\varepsilon_c) \qquad (2.14)$$

где ε_0 — пластическая деформация, n и a — постоянные, в работе [14]

$$\frac{\partial\varepsilon_c}{\partial t} = \left(B_0 - B_1 \operatorname{th}\frac{\varepsilon_c}{\beta\varepsilon_e}\right)\sigma^n \qquad (2.15)$$

где ε_e — упругая деформация, B_0, B_1, β и n — постоянные, в работе [15]

$$\frac{\partial\varepsilon_c}{\partial t} = m\varepsilon^{1-n}\exp[a\sigma(1 + k\varepsilon_c)] \qquad (2.16)$$

Согласно (2.1), обратная ползучесть при разгрузке в общем не предсказывается. Однако, если деформации ползучести затухающие и ограниченные, то обратная ползучесть может предсказываться, как это имеет место, например, в (2.6).

Большое распространение получила и наследственная теория [3, 4], что определяется относительной простотой использования ее при решении задач механики. Уравнение наследственности, как выведенное на основе принципа наложения деформаций, запишем в виде

$$\varepsilon_c (t) = - \int_0^t \frac{\partial C[\sigma(\tau), t - \vartheta]}{\partial \vartheta}\bigg|_{\vartheta = \tau} d\tau \tag{2.17}$$

где $C(\sigma, t)$ представляет собой аппроксимацию кривой ползучести при постоянном напряжении σ. В случае подобия кривых ползучести уравнение (2.17) запишется так:

$$\varepsilon_c (t) = - \int_0^t \varphi [\sigma(\tau)] \frac{\partial \psi (t - \tau)}{\partial \tau} d\tau \tag{2.18}$$

Запишем аналитические выражения для деформаций ползучести в применении наследственной теории к приведенным в пункте 1 аппроксимациям при удовлетворении условия подобия. Соответственно (1.1) будем иметь

$$\varepsilon_c (t) = m \int_0^t a [\sigma(\tau)] (t - \tau)^{m-1} d\tau \tag{2.19}$$

соответственно (1.2)

$$\varepsilon_c (t) = \gamma \int_0^t C [\sigma(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau \tag{2.20}$$

соответственно (1.3)

$$\varepsilon_c (t) = -\beta \int_0^t C [\sigma(\tau)] Э_\alpha (\beta, t - \tau) d\tau \tag{2.21}$$

соответственно (1.4)

$$\varepsilon_c (t) = \eta \int_0^t \varkappa [\sigma(\tau)] \frac{d\tau}{1 + \eta (t - \tau)} \tag{2.22}$$

Использование наследственной теории для аппроксимаций, описывающих деформации с возрастающей скоростью, приводит к усиливающейся памяти материала, что не имеет смысла. Отметим, что в случае аппроксимации (1.3) гипотеза уравнения состояния (2.6) и наследственная теория (2.20) полностью совпадают в своих предсказаниях.

Согласно одному из вариантов кинетической теории [1], скорость ползучести определяется значениями действующего напряжения и работы напряжений на деформациях ползучести

$$\frac{\partial \varepsilon_c}{\partial t} = f\left(\sigma, \int\limits_0^{\varepsilon_c} \sigma d\varepsilon\right) \tag{2.23}$$

В применении к аппроксимациям пункта 1 получим соответственно (1.1)

$$\frac{\partial \varepsilon_c}{\partial t} = m\left[a(\sigma)\right]^{\frac{1}{m}} \left|\frac{1}{\sigma}\int\limits_0^{\varepsilon_c} \sigma d\varepsilon\right|^{1-\frac{1}{m}} \tag{2.24}$$

соответственно (1.2)

$$\frac{\partial \varepsilon_c}{\partial t} = \gamma\left[C - \frac{1}{\sigma}\int\limits_0^{\varepsilon_c} \sigma d\varepsilon\right] \tag{2.25}$$

соответственно (1.4)

$$\frac{\partial \varepsilon_c}{\partial t} = \eta\varkappa \exp\left[-\frac{1}{\sigma\varkappa}\int\limits_0^{\varepsilon_c} \sigma d\varepsilon\right] \tag{2.26}$$

соответственно (1.5)

$$\frac{\partial \varepsilon_c}{\partial t} = \frac{\alpha C}{m}\left(1 - \frac{1}{C\sigma}\int\limits_0^{\varepsilon_c} \sigma d\varepsilon\right)^{1-m} \tag{2.27}$$

соответственно (1.6)

$$\frac{\partial \varepsilon_c}{\partial t} = 3\sqrt[3]{C}\left(\frac{1}{\sigma}\int\limits_0^{\varepsilon_c} \sigma d\varepsilon\right)^{\frac{2}{3}} \tag{2.28}$$

соответственно (1.7)

$$\frac{\partial \varepsilon_c}{\partial t} = \frac{\alpha}{n}\left(\frac{1}{\alpha\sigma}\int\limits_0^{\varepsilon_c} \sigma d\varepsilon\right)^{1+n} \exp\left[\left(\frac{1}{\alpha\sigma}\int\limits_0^{\varepsilon_c} \sigma d\varepsilon\right)^{-n} - C\right]. \tag{2.29}$$

В работе [16] рассматривается наследственная теория, описывающая также и пластические деформации

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma + \int_0^t K(t-\tau)\,\sigma(\tau)\,d\tau \qquad (2.30)$$

где $\varphi(\varepsilon) = \sigma$ описывает кривую мгновенного деформирования, а в качестве ядра использовано абелевское $K(t-\tau) = k(t-\tau)^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

В работе [17] рассматривается кинетическое уравнение более сложного вида и описывающее I и III стадии ползучести

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = A\varepsilon_c^{-r}\exp(\beta\varepsilon_c)\,\sigma^k\left[1-(r+1)B\varepsilon^{r+1}\omega\right]^{-\frac{1}{r+1}} \qquad (2.31)$$

где

$$d\omega = C_1 d\sigma + C_2 dT + C_3 dt$$

Согласно теории Лагнеборга [18], построенной на дислокационных концепциях и описывающей первые две стадии ползучести, имеем систему уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial\varepsilon_c}{\partial t} = a(\sigma)\exp\{-\beta[\sqrt{\rho} - \sqrt{\rho_0(\sigma)}]\} \\ \frac{\partial\rho}{\partial t} = C\frac{\partial\varepsilon_c}{\partial t} - 2M\rho^2 \end{gathered} \qquad (2.32)$$

которую можно использовать для описания кривых ползучести, лишь применяя шаговый метод. Это же свойство присуще и структурной теории [19], определяемой следующей системой уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{d\varepsilon_c}{dt} = F(\sigma-\rho) \\ d\rho = A(\sigma-\rho,\ \sigma)\,d\varepsilon_c \end{gathered} \qquad (2.33)$$

где F и A — экспериментально определяемые функции.

В работе [12] рассматривается видоизмененный вариант (2.33)

$$\begin{gathered} \frac{d\varepsilon_c}{dt} = B(\sigma)(\sigma-\rho) \\ d\rho = A(\sigma)[\sigma-\rho-\sigma k(\sigma)]\,d\varepsilon_c \end{gathered} \qquad (2.34)$$

который можно записать в явной форме для случая ступенчатых возрастаний нагрузки, а при постоянном σ вырождающейся в аппроксимацию вида (1.8).

При изучении ползучести монокристаллов использовалась система уравнений [7]

$$\begin{gathered} \frac{\partial\varepsilon_c}{\partial t} = \eta_1\chi e^{-\frac{\omega}{\chi^k}} \\ \frac{\partial\omega}{\partial\varepsilon_c} = \chi^{k-1} \end{gathered} \qquad (2.35)$$

где $\varkappa$ и η — функции от напряжения. При постоянном σ система (2.35) вырождается в (1.4). При ступенчатых изменениях σ система (2.35) интегрируется в явном виде [7].

В работе [11] использовалось соотношение

$$\ln\left(t\frac{d\varepsilon}{dt}\right) = a + b\ln\varepsilon \tag{2.36}$$

описывающее все стадии ползучести и обобщающее формулу (1.7) при $a = \ln\frac{\alpha^{-n}}{n}$, $b = n + 1$.

Согласно энергетической теории Соснина, ползучесть в третьей стадии описывается соотношениями [9]

$$\frac{dA}{dt} = \frac{f(\sigma)}{(A^{*} - A)^{m}}, \qquad A = \int\limits_0^t \sigma\frac{d\varepsilon_c}{dt}\,dt \tag{2.37}$$

которые при постоянном напряжении вырождаются в уравнение (1.6).

Для описания деформаций ползучести в III стадии можно пользоваться моделью Работнова [8]

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = f(\sigma, \omega), \qquad \frac{d\omega}{dt} = \varphi(\sigma, \omega) \tag{2.38}$$

где для $f(\sigma, \omega)$ и $\varphi(\sigma, \omega)$ используются выражения

$$f(\sigma, \omega) = b\sigma^{m}(1 - \omega)^{-q}, \qquad \varphi(\sigma, \omega) = C\sigma^{n}(1 - \omega)^{-r} \tag{2.39}$$

обобщающие при $r + 1 > q$ аппроксимацию типа (1.6) на случай переменного напряжения.

В работе [10] для описания деформаций III стадии использовалось уравнение

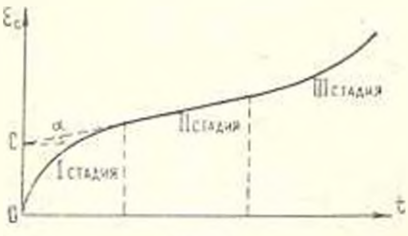
$$\varepsilon_c(t) = k\alpha\int\limits_0^t \sigma^{\lambda}(\tau)\left[\int\limits_0^{\tau}\sigma^{\nu}(\xi)\,d\xi\right]^{\alpha-1} d\tau \tag{2.40}$$

которое можно трактовать как разновидность (2.38), если положить $f(\sigma, \omega) = \alpha k\sigma^{\lambda}\omega^{\alpha-1}$, $\varphi(\sigma, \omega) = \sigma^{\nu}$.

3. О возможных рекомендациях для аналитического представления экспериментальных данных о ползучести металлов

Признавая, что механизмы деформаций ползучести действуют, будучи связанными друг с другом, выскажем все же предположение, что для феноменологического описания деформаций ползучести удобно разделять эти деформации на составляющие с убывающей, постоянной и возрастающей скоростью и не связывать друг с другом теоретические предпосылки для обобщения каждой из них на случаи переменных напряжений. На наш взгляд, введение связей между деформациями различных стадий было бы оправдано, если обобщающие теории имели бы надежную физическую основу. Отмеченное касается уравнений (2.12), (2.14), (2.16), (2.29), (2.31) и (2.36), хотя, конечно, для ряда материалов эти уравнения могут оказаться и предпочтительными. С другой стороны, при раздельном аналитическом представлении составляющих деформации с убывающей, постоянной и возрастающей скоростями, оказывается возможным использовать более простые аппроксимации.

При отчетливом проявлении второй стадии ползучести разделение деформаций ползучести и их аппроксимация оказываются относительно простыми. На фиг. 1 показана схематическая кривая ползучести с выраженной 2-й стадией. Продолжая прямую, описывающую участок кривой ползучести во второй стадии, до оси ординат, на последней отсекаем отрезок C, представляющий собою предельное значение, к которому асимптотически устремляется затухающая составляющая ползучести $\varepsilon_{c_{\rm I}}$. Для описания первых двух стадий можно использовать выражение



Фиг. 1.

$$\varepsilon_{c_{\rm I}} + \varepsilon_{c_{\rm II}} = C(1 - e^{-\gamma t}) + \alpha t \qquad (3.1)$$

где α — угол наклона кривой ползучести во второй стадии, а выбором γ можно изменять скорость устремления кривой $\varepsilon_{c_{\rm I}}$ к асимптоте $\varepsilon_c = C$.

Оставшуюся же часть ползучести, определяющую третью стадию, можно аппроксимировать с помощью (1.5), (1.6) или какой-нибудь еще более подходящей формулы. При этом, естественно, теоретическая кривая в первых двух стадиях будет проходить несколько выше экспериментальной, так как аппроксимации $\varepsilon_{c_{\rm III}}$ всегда дадут некоторый вклад в общую деформацию и в первых двух стадиях. Возникающее расхождение может быть откорректировано путем некоторого уменьшения α.

Аналогичная методика может быть сохранена и для случаев, когда вторая стадия ползучести выражена слабо, хотя при этом затрудняется выбор α—угла наклона прямой, отсекающей отрезок C на оси ординат.

В тех же случаях, когда первая или третья стадии ползучести не проявляются или деформациями одной из них можно пренебречь, вопрос выбора аппроксимаций, естественно, упрощается, так как можно выбрать готовую аппроксимацию, в частности, из (1.1)—(1.8).

Для выбора той или иной теории, обобщающей аппроксимацию ползучести на случаи переменных напряжений, ниже рассмотрим некоторые свойства, присущие уравнениям пункта 2 и относительно легко проверяемые экспериментальным путем для изучаемого материала.

К числу таких свойств отнесем свойство обратной ползучести, преемственность и вопрос о коммутативности ползучести.

Из рассмотренных в пункте 2 уравнений обратная ползучесть (то есть деформации, протекающие со скоростью обратного знака предшествующему напряжению, после разгрузки, иначе называемые высокоэластической ползучестью) предсказывается уравнениями (2.6), (2.19)—(2.22), (2.25), (2.30), а также в некоторых вариантах (2.33) и (2.34), когда для последних функция A для нагружения и разгрузки берется различного вида. Однако для всех ядер уравнений теории наследственности, соответствующих затухающей памяти (то есть удовлетворению условия $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\partial C(\sigma, t)}{\partial t} = 0$ в общей форме (2.17) уравнения наследственности), после полной разгрузки все деформации, достигнутые согласно (2.17), являются полностью обратимыми. Действительно, принимая $\sigma(t) = \sigma_0 = \mathrm{const}$ до некоторого момента t_0 и $\sigma(t) = 0$ при $t > t_0$, согласно (2.17), имеем

$$\varepsilon_c(t > t_0) = -\int\limits_0^{t_0} \frac{\partial C(\sigma_0, t-\tau)}{\partial \tau} d\tau \to 0$$ при любом конечном t_0, независимо от уровня ограниченности деформаций ползучести $C(\sigma, t)$. Это обстоятельство может быть использовано при выборе теории для обобщения соответствующей доли деформации на случаи переменных напряжений. Если экспериментально определенная обратная ползучесть отсутствует или очень мала, то это говорит против использования наследственной теории.

Как показано, например, в [20] для первой стадии ползучести и в [21] для третьей стадии ползучести, скорость деформации ползучести при одном и том же напряжении и при одной и той же достигнутой деформации оказывается тем больше, чем при более низких напряжениях была достигнута эта деформация, свойство это названо «преемственностью». Приведем математическую формулировку [22].

Примем программу эксперимента

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0 & 0 < t < t_0 \\ \sigma & t > t_0 \end{cases} \qquad \varepsilon_c(\sigma_0, t_0) = \varepsilon_{0c} = \mathrm{const} \tag{3.2}$$

Рассмотрим выражение

$$\varepsilon_c(t) - \varepsilon_{0c} = F_1(\sigma, \theta, t_0) = F_2(\sigma, \theta, \sigma_0); \quad \theta = t - t_0 \tag{3.3}$$

где с помощью условия $\varepsilon_{0c} = \mathrm{const}$ в F_1 устранено σ_0, а в F_2 — t_0. Преемственность соблюдается, если

$$\frac{\partial F_1}{\partial t_0} > 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_0} < 0 \tag{3.4}$$

При использовании (2.1) и, следовательно, любого из уравнений (2.3) — (2.16) вместо условия (3.4) удовлетворяется равенство $\frac{\partial F_1}{\partial t_0} = 0$, то есть преемственность не соблюдается. Вопрос о соблюдении преемственности в общих уравнениях (2.17) и (2.18) зависит от конкретного вида входящих функций. После ряда опускаемых здесь выкладок можно получить, что преемственность соблюдается, согласно уравнениям (2.19) и (2.22), согласно же (2.20), преемственность не предсказывается.

Как показано в [22], согласно кинетической теории (2.23), преемственность предсказывается, если только функция f является убывающей по второму аргументу, то есть в первой стадии ползучести (уравнения (2.24)—(2.26)). Преемственность предсказывается и уравнением (2.30) в случае абелевского ядра.

Согласно уравнению (2.31), преемственность соблюдается, так как при одних и тех же текущих значениях σ и ε скорость ползучести $\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}$ здесь тем больше, чем при меньшем напряжении и при большей длительности ползучести при σ_0, то есть при большем значении ω, была получена эта деформация ε.

Преемственность соблюдается согласно (2.32), (2.34) и (2.35), а также (2.33) при выполнении условия $\frac{\partial A(\varepsilon-\varepsilon_0,\ \varepsilon)}{\partial\varepsilon} > 0$, (2.38) вкупе с (2.39) при условии $m > n$ и (2.40) при условии $\lambda > \nu$.

Преемственность не соблюдается, согласно (2.36), так как

$$\frac{\partial F_1}{\partial t_0} = -\frac{e^{\omega_0}}{t_0(t_0+b)}\,\tau_0^{b} < 0$$

а также согласно (2.37) [22].

В работе [23] рассмотрен так называемый коммутативный закон ползучести, согласно которому накопленные деформации после ряда последовательных приложений напряжений не зависят от порядка, в котором прикладывались напряжения. Как показали экспериментальные данные, например, в работах [20, 24], а также и приведенные в той же работе [23], имеют место систематические отклонения от этого закона, причем общая деформация ползучести оказывается большей в том случае, когда на последней ступени нагрузка оказывается большей (имеется в виду одноступенчатое изменение напряжения).

Рассмотрим следующие две программы изменения напряжения:

$$\begin{aligned}
&1) \qquad \sigma(t) = \begin{cases} \sigma_1 & 0 < t < t_0 \\ \sigma_2 & t_0 < t < 2t_0 \end{cases} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \sigma_1 < \sigma_2 \\
&2) \qquad \sigma(t) = \begin{cases} \sigma_2 & 0 < t < t_0 \\ \sigma_1 & t_0 < t < 2t_0 \end{cases}
\end{aligned} \qquad (3.5)$$

Обозначая через ε_{σ_1} деформации ползучести, соответствующие первой программе, а через ε_{σ_2} — второй программе, положим, что при положительности $\varepsilon_{\sigma_1}(2t_0) - \varepsilon_{\sigma_2}(2t_0)$ имеет место «нормальное» нарушение коммутативности ползучести, а при его отрицательности — «обратное» нарушение коммутативности ползучести [22].

Согласно общему уравнению ползучести (2.2), как это показано в [23], предсказывается коммутативный закон, то есть отрицается нарушение коммутативности вообще. Этот вывод касается уравнений (2.4), (2.7), (2.9), (2.11), (2.14), (2.15), а также (2.10) при независимости C и m от напряжения, (2.13) при независимости $\frac{\beta}{\alpha}$ от напряжения и (2.16) при $k = 0$.

Как показано в [22], для наследственной теории (2.18) с затухающей памятью, а следовательно, и для уравнений (2.19)—(2.22), соблюдается нормальное нарушение коммутативности ползучести.

Согласно кинетической теории (2.23) в форме (2.24) нормальное нарушение коммутативности имеет место при $m < 1$, то есть при затухающей ползучести [22].

Согласно (2.25) имеем

$$\varepsilon_{c_1}(2t_0) - \varepsilon_{c_2}(2t_0) = \left(C_2\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - C_1\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)(1 - e^{-\alpha t_0})(1 - e^{-\beta t_0}) > 0 \qquad (3.6)$$

то есть соблюдается нормальное нарушение коммутативности.

Согласно (2.25) имеем

$$\varepsilon_{c_1}(2t_0) - \varepsilon_{c_2}(2t_0) = \ln\frac{\left\{1 + \frac{\eta_2 t_0}{1 + \eta_2 t_0}\left[(1 + \eta_1 t_0)^{\frac{\varkappa_1\sigma_2}{\varkappa_2\sigma_1}} - 1\right]\right\}^{\varkappa_2}}{\left\{1 + \frac{\eta_1 t_0}{1 + \eta_1 t_0}\left[(1 + \eta_2 t_0)^{\frac{\varkappa_2\sigma_1}{\varkappa_1\sigma_2}} - 1\right]\right\}^{\varkappa_1}} > 0 \qquad (3.7)$$

так как $\varkappa$ и η, естественно, являются возрастающими функциями от σ.

Согласно (2.28), имеем

$$\varepsilon_{c_1}(2t_0) - \varepsilon_{c_2}(2t_0) = C_1 t_0^3\left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\left[1 + \frac{C_2\sigma_2}{C_1\sigma_1} - \left(1 + \sqrt[3]{\frac{C_2\sigma_2}{C_1\sigma_1}}\right)^3\right] < 0 \qquad (3.8)$$

то есть имеет место обратное нарушение коммутативности.

Согласно (2.30), имеем

$$\varepsilon_{c_1}(2t_0) - \varepsilon_{c_2}(2t_0) = F\left\{\sigma_2 + \frac{k}{1-\alpha}t_0^{1-\alpha}[\sigma_2 + \sigma_1(2^{1-\alpha} - 1)]\right\} -$$

$$- F\left\{\sigma_1 + \frac{k}{1-\alpha}t_0^{1-\alpha}[\sigma_1 + \sigma_2(2^{1-\alpha} - 1)]\right\} > 0 \qquad (3.9)$$

где F — обратная функция функции φ, откуда заключаем о нормальном нарушении коммутативности. Согласно теории (2.32) при условии $\mu_*(\sigma) = 0$, предсказывается обратное нарушение коммутативности [22].

Нормальное нарушение коммутативности предсказывается согласно (2.35), так как

$$\varepsilon_{c_1}(2t_0) - \varepsilon_{c_2}(2t_0) = \varkappa_2\ln\left[1 + \eta_1 t_0 + \eta_2 t_0\exp\left(\frac{\varkappa_2^{\nu-1} - \varkappa_1^{\nu-1}}{\varkappa_2^{\nu-1}}\right)\right] -$$

$$- \varkappa_1\ln\left[1 + \eta_2 t_0 + \eta_1 t_0\exp\left(\frac{\varkappa_1^{\nu-1} - \varkappa_2^{\nu-1}}{\varkappa_1^{\nu-1}}\right)\right] > 0 \qquad (3.10)$$

поскольку η и $\varkappa$ являются возрастающими функциями от напряжения.

Уравнение (2.36) вкупе с (1.7) соответствует нормальному нарушению коммутативности, например, при условиях

$$b = \text{const}, \quad \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[e^{n}\left(C + \ln 2 - \ln t_0\right)\right] > 0 \tag{3.11}$$

Согласно (2.37), предсказывается обратное нарушение коммутативности [22]. Согласно (2.38) вкупе с (2.39) имеем

$$\begin{gathered}\varepsilon_{c_1}(2t_0) - \varepsilon_{c_2}(2t_0) = \frac{b}{C(r+1-q)}\left(\sigma_1^{m-n} - \sigma_2^{m-n}\right)\Big\{1 + \left[1 - C\sigma_2^n(r+1)t_0 - \right. \\ \left. - C\sigma_1^n(r+1)t_0\right]^{1-\frac{q}{r+1}} - \left[1 - C\sigma_1^n(r+1)t_0\right]^{1-\frac{q}{r+1}} - \\ - \left[1 - C\sigma_2^n(r+1)t_0\right]^{1-\frac{q}{r+1}}\Big\} > 0\end{gathered} \tag{3.12}$$

при $m > n$, откуда заключаем о нормальном нарушении коммутативности. Такой же вывод имеет место, согласно (2.40), при условии $\lambda > \nu$ и $\alpha > 1$ [22].

4. *Заключение*

Выбор той или иной теории ползучести для исследуемого материала затруднен тем, что при некоторых ступенчатых изменениях напряжения предсказания по различным теориям порою различаются мало даже по сравнению с разбросом экспериментальных кривых. В этом смысле целесообразным представляется ставить эксперименты для изучения обратной ползучести, а также, согласно программам (3.2) и (3.5), для проверки преемственности и коммутативности ползучести, так как в зависимости от полученных экспериментальных данных ряд уравнений ползучести может быть сразу отброшен из рассмотрения.

Приведенные выше обзор уравнений ползучести и их анализ, конечно, отнюдь не претендуют на полноту, однако мы рассчитываем, что они в некоторых случаях содействуют выбору уравнения одноосной ползучести при растяжении.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 20 VI 1979

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ՄԵՏԱՂՆԵՐԻ ՄԻԱՌԱՆՑՔԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ՈՐՈՇ ՀԱՐՑԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում են մետաղների սողքի [illegible] գրանցման հավասարու-թյունները լարումների փոփոխության տարբեր ձևերի դեպքում։ Կառուց-

վում են սողքի դեֆորմացիաների անալիտիկ մոտարկումները հաստատուն լարումների պայմաններում, որոնք ընդհանրացվում են փոփոխական լարումների համար տարբեր տեսությունների օգտագործումով։ Դիտարկվում են նաև նյութի մի քանի հատկությունները, որոնք փորձնական ստուգման են ենթարկվում և նրանք թույլ են տալիս գնահատել արված ընդհանրացումները։

CERTAIN ASPECTS OF UNIAXIAL CREEP OF METALS

A. M. SIMONIAN

S u m m a r y

Certain possibilities to describe metal creep curves with different programmes of change in stresses are examined. The investigation is based on construction of aralitical approximations of creep strains under constant stresses and temperatures as well as on generalizations of these approximations for the cases of variable stresses, using particular theories.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкции. М., Наука, 1966.
2. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960.
3. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М., Гостехтеориздат, 1952.
4. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М., Наука, 1977.
5. *Работнов Ю. Н., Паперник Л. Х., Звонов Е. Н.* Таблицы дробно-экспоненциальной функции отрицательных параметров и интеграла от нее. М. Наука, 1969.
6. *Шоек Г.* Теория ползучести. Сборник «Ползучесть и возраст». М., Металлургиздат, 1961.
7. *Симонян А. М.* Исследования ползучести алюминиевых монокристаллов. Изв. АН АрмССР, Механика, 1979, т. XXXII, № 6.
8. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. М., Наука, 1974.
9. *Соснин О. В.* Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности. Ползучесть и разрушение неупрочняющихся материалов. Проблемы прочности, 1973, № 5.
10. *Симонян А. М.* Исследование ползучести стали Х18Н10Т при больших деформациях. Проблемы прочности, 1975, № 6.
11. *Murry G.* Contribution a l'etude de la forme des courbes de fluage des aciers "Rev. Met." (France), 1970, 67, No. 10.
12. *Симонян А. М.* К вопросу о неизотермической ползучести хромо никелевой стали. Изв. АН АрмССР, Механика, 1972, т. XXV, № 6.
13. *Трунин И. И.* Об одном варианте уравнения состояния при ползучести. «Деформирование и разрушение твердых тел». М., изд. МГУ, 1977.
14. *Стасенко И. В.* Модифицированная формулировка теории упрочнения. Изв. ВУЗ-ов. Машиностроение, 1975, № 8.
15. *Лепин Г. Ф., Тихонов А. Н., Горпинич В. Ф., Дубинин В. П., Осасюк В. В.* К вопросу о ползучести металлов и сплавов в условиях растяжения и сжатия при повышенных температурах. Проблемы прочности, 1969, № 3.
16. *Работнов Ю. Н., Суворова Ю. В.* Наследственные эффекты при деформировании металлов. Сб. «Успехи механики деформируемых сред». М., Наука, 1975.

17. *Киселевский В. Н., Косов Б. Д.* Уравнение состояния для процесса ползучести упрочняющегося материала. Проблемы прочности. 1975, № 4.
18. *Lagneborg R.* A Theoretical Approach to Creep Deformation During Intermittent Load. Trans. ASME, Series D, 1971, No. 2.
19. *Малинин Н. Н., Хажинский Г. М.* К построению теории ползучести с анизотропным упрочнением. МТТ, 1969, № 3.
20. *Наместников В. С., Хвостунков А. А.* Ползучесть дуралюмина при постоянных и переменных нагрузках. ПМТФ, 1960, № 4.
21. *Симонян А. М.* Экспериментальное исследование преемственности при высокотемпературной трехстадийной ползучести хромо-никелевой стали. Изв. АН АрмССР, Механика, 1978, т. XXXI, № 6.
22. *Симонян А. М.* О двух вопросах в одномерной теории ползучести. Изв. АН АрмССР, Механика, 1977, т. XXX, № 3.
23. *Олквист Ф.* Технические теории ползучести. «Механика», Сб. переводов, 1959, 2.
24. *Наместников В. С., Работнов Ю. Н.* О гипотезе уравнения состояния при ползучести. ЖПМТФ, 1961, № 3.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIII, № 2, 1980 Механика

Р. М. КИРАКОСЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕУПРУГИХ КРУГЛЫХ ПЛИТ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЙ ДЕФОРМАЦИЙ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Устойчивости пластинок за пределами упругости материала в различных постановках посвящено много исследований ([1]—[11] и др.). В настоящей статье в рамках теории малых упруго-пластических деформаций произвольно упрочняющегося материала [1] получается система дифференциальных уравнений устойчивости круглых плит с учетом влияний деформаций поперечных сдвигов [8]. В качестве приложения решается задача устойчивости сжатых в радиальном направлении шарнирно опертых и защемленных по контуру круглых плит при осесимметричной форме потери устойчивости. Подробно рассматривается случай идеальной пластичности.

Аналогичная задача в рамках теории течения впервые рассмотрена в работе [7].

1. Рассмотрим пластинку толщины h, отнесенную к системе цилиндрических координат r, θ, z. В качестве механических соотношений примем уравнения деформационной теории пластичности несжимаемого материала [1]

$$\sigma_r - \frac{1}{2}\sigma_\theta = \frac{\sigma_i}{e_i} e_r, \quad \sigma_\theta - \frac{1}{2}\sigma_r = \frac{\sigma_i}{e_i} e_\theta, \quad \tau_{r\theta} = \frac{\sigma_i}{3e_i} e_{r\theta} \tag{1.1}$$

где σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ и e_r, e_θ, $e_{r\theta}$ — компоненты напряжения и деформаций,

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2 + 3\tau_{r\theta}^2} \\ e_i &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{e_r^2 + e_r e_\theta + e_\theta^2 + \frac{1}{4}e_{r\theta}^2} \end{aligned} \tag{1.2}$$

— интенсивности касательных напряжений и деформаций сдвига.

Пусть в пластинке, которая деформирована за пределами упругости, реализовано безмоментное напряженное состояние

$$\sigma_r, \quad \sigma_\theta, \quad \tau_{r\theta} \tag{1.3}$$

При выпучивании напряжения в пластинке получают бесконечно малые приращения $\delta\sigma_r$, $\delta\sigma_\theta$, $\delta\tau_{r\theta}$, τ_{rz}, $\tau_{\theta z}$. Принимается гипотеза непрерывного нагружения ([11], [12]), согласно которой искривление пластинки возможно в условиях возрастания нагрузки, обеспечивающих нагружение во всех ее точках. Известно [5], что критические значения параметров, полученные по этой постановке, не будут отличаться от результатов, вытекающих из критерия равноактивной бифуркации, при котором неустойчивость за пределами упругости понимается как неустойчивость процесса деформирования. С помощью (1.1) для вариаций $\delta\sigma_r$, $\delta\sigma_\theta$ и $\delta\tau_{r\theta}$ получим

$$
\begin{aligned}
\delta\sigma_r &= a_{11}\delta e_r + a_{12}\delta e_\theta + a_{13}\delta e_{r\theta}\\
\delta\sigma_\theta &= a_{22}\delta e_\theta + a_{12}\delta e_r + a_{23}\delta e_{r\theta}\\
\delta\tau_{r\theta} &= a_{33}\delta e_{r\theta} + a_{13}\delta e_r + a_{23}\delta e_\theta
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

где

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{4}{9e_i}\left[3\sigma_i + (2e_r + e_\theta)^2 \frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right)\right]\\
a_{22} &= \frac{4}{9e_i}\left[3\sigma_i + (2e_\theta + e_r)^2 \frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right)\right]\\
a_{33} &= \frac{1}{9e_i}\left[3\sigma_i + e_{r\theta}^2 \frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right)\right]\\
a_{12} &= \frac{2}{9e_i}\left[3\sigma_i + 2(2e_r + e_\theta)(2e_\theta + e_r) \frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right)\right]\\
a_{13} &= \frac{1}{9e_i} e_{r\theta}(2e_r + e_\theta) \frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right)\\
a_{23} &= \frac{2}{9e_i} e_{r\theta}(2e_\theta + e_r) \frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right)
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

В условиях отсутствия поверхностных нагрузок для тангенциальных напряжений по уточненной теории [8] имеем

$$
\tau_{rz} = f(z)\,\varphi(r, \theta), \qquad \tau_{\theta z} = f(z)\,\psi(r, \theta)
\tag{1.6}
$$

где $f(z)$ — функция, характеризующая закон изменения касательных напряжений по толщине пластинки, $\varphi(r, \theta)$ и $\psi(r, \theta)$ — искомые функции.

Здесь уточненная теория, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов, применяется со всеми известными условностями, как это делается обычно, например, в задачах изгиба пластинок.

Связь между касательными напряжениями (1.6) и соответствующими деформациями поперечных сдвигов пластинки имеет вид [1]

$$
\tau_{rz} = \frac{\sigma_i}{3e_i} e_{rz}, \qquad \tau_{\theta z} = \frac{\sigma_i}{3e_i} e_{\theta z}
\tag{1.7}
$$

Пользуясь геометрическими соотношениями

$$
e_{rz} = \frac{\partial \delta u_r}{\partial z} + \frac{\partial \delta u_z}{\partial r}, \qquad e_{\theta z} = \frac{1}{r}\frac{\partial \delta u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta u_\theta}{\partial z}
\tag{1.8}
$$

где u_r, u_θ, u_z — перемещения по направлению координатных линий r, θ, z соответственно, с учетом (1.6) и (1.7) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta u_r}{\partial z} &= -\frac{\partial \delta u_z}{\partial r} + \frac{3e_i}{\sigma_i} f(z)\,\varphi(r, \theta) \\ \frac{\partial \delta u_\theta}{\partial z} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial \delta u_z}{\partial \theta} + \frac{3e_i}{\sigma_i} f(z)\,\psi(r, \theta) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Пренебрегая изменением нормальных перемещений по толщине и деформированием срединной плоскости ($u = v = 0$), из (1.9) путем интегрирования по z находим

$$\begin{aligned} \delta u_r &= -z\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{3e_i}{\sigma_i}\overline{J}_0(z)\,\varphi(r, \theta) \\ \delta u_\theta &= -z\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{3e_i}{\sigma_i}\overline{J}_0(z)\,\psi(r, \theta) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Здесь

$$\overline{J}_0(z) = \int_0^z f(z)\,dz \tag{1.11}$$

w — прогиб пластинки.

Используя геометрические соотношения, с учетом (1.10) для вариаций деформаций получим

$$\begin{aligned} \delta e_r &= -z\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + 3\overline{J}_0(z)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{e_i}{\sigma_i}\varphi(r, \theta)\right] \\ \delta e_\theta &= -\frac{z}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) + \frac{3}{r}\overline{J}_0(z)\left[\frac{e_i}{\sigma_i}\varphi(r, \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{e_i}{\sigma_i}\psi(r, \theta)\right)\right] \\ \delta e_{r\theta} &= -z\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta}\right] + \\ &+ 3\overline{J}_0(z)\left\{r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{e_i}{r\sigma_i}\psi(r, \theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{e_i}{\sigma_i}\varphi\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{1.12}$$

Внеся (1.12) в (1.4) и присоединив к ним (1.6), для приращений напряжений выпученной пластинки находим

$$\begin{aligned} \delta\sigma_r = -z\Big\{ & a_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + a_{12}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) + \\ & + a_{13}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta}\right]\Big\} + \end{aligned}$$

$$+3\overline{J}_0(z)\left\{a_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i}{\sigma_i}\varphi\right)+\frac{a_{12}}{r}\left[\frac{e_i}{\sigma_i}\varphi(r,\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i}{\sigma_i}\psi\right)\right]+\right.$$

$$\left.+a_{13}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i}{r\sigma_i}\psi\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)\right]\right\}$$

$$\delta\sigma_\theta=-z\left\{\frac{a_{22}}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)+a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\right.$$

$$\left.+a_{23}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}\right]\right\}+$$

$$+3\overline{J}_0(z)\left\{\frac{a_{22}}{r}\left[\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\psi}{\sigma_i}\right)\right]+a_{12}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)+\right.$$

$$\left.+a_{23}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\psi}{r\sigma_i}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\theta_i}\right)\right]\right\}$$

$$\delta\tau_{r\theta}=-z\left\{a_{33}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}\right]+\right.$$

$$\left.+a_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{a_{23}}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right\}+$$

$$+3\overline{J}_0(z)\left\{a_{33}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\psi}{r\sigma_i}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+a_{13}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)+\frac{a_{23}}{r}\left[\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\psi}{\sigma_i}\right)\right]\right\}$$

$$\tau_{rz}=f(z)\varphi(r,\theta),\quad \tau_{\theta z}=f(z)\psi(r,\theta) \tag{1.13}$$

Поступая как обычно, для приращений моментов и поперечных сил получим

$$\delta M_r=-\frac{h^3}{12}\left\{a_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{a_{12}}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)+\right.$$

$$\left.+a_{13}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}\right]\right\}+$$

$$+3\overline{J}_1\left\{a_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)+\frac{a_{12}}{r}\left[\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\psi}{\sigma_i}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+a_{13}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\psi}{r\sigma_i}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)\right]\right\}$$

$$\delta M_\theta=-\frac{h^3}{12}\left\{\frac{a_{22}}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)+a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\right.$$

$$\left.+a_{23}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}\right]\right\}+$$

$$+3\overline{J}_1\left\{\frac{a_{22}}{r}\left[\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\psi}{\sigma_i}\right)\right]+a_{12}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)+\right.$$

$$\left.+a_{23}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\psi}{r\sigma_i}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)\right]\right\}$$

$$\delta H=-\frac{h^3}{12}\left\{a_{33}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}\right]+\right.$$

$$\left.+a_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{a_{23}}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right\}+$$

$$+3\overline{J}_1\left\{a_{33}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\psi}{r\sigma_i}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)\right]+a_{13}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{a_{23}}{r}\left[\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\psi}{\sigma_i}\right)\right]\right\}$$

$$N_r=\overline{J}_2\varphi(r,\theta),\qquad N_\theta=\overline{J}_2\psi(r,\theta) \tag{1.14}$$

где

$$\overline{J}_1=\int\limits_{-h/2}^{h/2}z\overline{J}_0(z)\,dz,\qquad \overline{J}_2=\int\limits_{-h/2}^{h/2}f(z)\,dz \tag{1.15}$$

Уравнения равновесия дифференциального элемента пластинки после выпучивания имеют вид [8]

$$\frac{\partial\delta M_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\delta H}{\partial\theta}+\frac{\delta M_r-\delta M_\theta}{r}=N_r$$

$$\frac{\partial\delta H}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\delta M_\theta}{\partial\theta}+\frac{2\delta H}{r}=N_\theta \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial N_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial N_\theta}{\partial\theta}+\frac{N_r}{r}+T_r^0\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+T_\theta^0\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)+$$

$$+2S^0\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)=0$$

где T_r^0, T_θ^0, S^0 — внутренние тангенциальные силы начального безмоментного состояния

$$T_r^0=h\sigma_r,\qquad T_\theta^0=h\sigma_\theta,\qquad S^0=h\tau_{r\theta} \tag{1.17}$$

Подставляя (1.14) в (1.16), получим следующую систему относительно $w(r,\theta)$, $\varphi(r,\theta)$ и $\psi(r,\theta)$:

$$
\frac{\partial}{\partial r}\left\{a_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{a_{12}}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)+a_{13}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial \theta}\right]\right\}+
$$

$$
+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left\{a_{33}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial \theta}\right]+a_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\right.
$$

$$
\left.+\frac{a_{23}}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right\}+
$$

$$
+\frac{1}{r}\left\{(a_{11}-a_{12})\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+(a_{12}-a_{22})\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)+\right.
$$

$$
\left.+(a_{13}-a_{23})\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial \theta}\right)\right]\right\}-
$$

$$
-\frac{36\overline{J}_1}{h^3}\frac{\partial}{\partial r}\left\{a_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)+\frac{a_{12}}{r}\left[\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{e_i\psi}{\sigma_i}\right)\right]+\right.
$$

$$
\left.+a_{13}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\psi}{r\sigma_i}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)\right]\right\}-
$$

$$
+\frac{36\overline{J}_1}{h^3}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left\{a_{33}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\psi}{r\sigma_i}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)\right]+\right.
$$

$$
\left.+a_{13}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)+\frac{a_{23}}{r}\left[\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{e_i\psi}{\sigma_i}\right)\right]\right\}-
$$

$$
-\frac{36\overline{J}_1}{h^3}\frac{1}{r}\left\{(a_{11}-a_{12})\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)+(a_{12}-a_{22})\frac{1}{r}\left[\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{e_i\psi}{\sigma_i}\right)\right]+\right.
$$

$$
\left.+(a_{13}-a_{23})\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\psi}{r\sigma_i}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)\right]\right\}+\frac{12\overline{J}_2}{h^3}\varphi=0 \qquad (1.18)
$$

$$
\frac{\partial}{\partial r}\left\{a_{33}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial \theta}\right]+a_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{a_{23}}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right\}+
$$

$$
+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left\{\frac{a_{22}}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)+a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\right.
$$

$$
\left.+a_{23}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial \theta}\right]\right\}+
$$

$$
+\frac{2}{r}\left\{a_{33}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial \theta}\right]+a_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{a_{23}}{r}\left[\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right]\right\}-
$$

$$
-\frac{36\overline{J}_1}{h^3}\frac{\partial}{\partial r}\left\{a_{33}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\psi}{r\sigma_i}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)\right]+\right.
$$

$$
\left.+a_{13}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)+\frac{a_{23}}{r}\left[\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{e_i\psi}{\sigma_i}\right)\right]\right\}-
$$

$$
-\frac{36\overline{J}_1}{h^3}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{a_{22}}{r}\left[\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\psi}{\sigma_i}\right)\right]+a_{12}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)+\right.
$$

$$
\left.+a_{23}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\psi}{r\sigma_i}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)\right]\right\}-
$$

$$
-\frac{72\overline{J}_1}{h^3}\frac{1}{r}\left\{a_{33}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\psi}{r\sigma_i}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)\right]+\right.
$$

$$
\left.+a_{13}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)+\frac{a_{23}}{r}\left[\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\psi}{\sigma_i}\right)\right]\right\}+\frac{12\overline{J}_2}{h^3}\psi(r,\theta)=0
$$

$$
\overline{J}_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\varphi}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+T_r^0\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+T_\theta^0\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)+
$$

$$
+2S^0\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)=0
$$

Это — система устойчивости пластинки за пределами упругости материала с учетом влияний деформаций поперечных сдвигов.

2. Рассмотрим задачу об устойчивости круглой пластинки, сжатой в своей плоскости радиальным давлением p, при осесимметричных формах потери устойчивости. Пусть в пластинке реализовано однородное деформированное состояние с интенсивностью деформаций e_i. Для простоты ограничимся случаем линейного упрочнения [1]

$$
\sigma_i=3G[(1-\lambda)e_i+\lambda e_s],\qquad \lambda=\begin{cases}0, \text{ если } e_i\le e_s\\ 1-\dfrac{1}{3G}\dfrac{d\sigma_i}{de_i}=\text{const}, \text{ если } e_i>e_s\end{cases}\tag{2.1}
$$

Здесь G — модуль сдвига, e_s — предел упругих деформаций материала.

В отличие от обычного, состояние пластинки до потери устойчивости будем представлять ее деформированным состоянием, а не напряженным. Это означает, что вместо критических значений напряжений (нагрузок) будем отыскивать критические значения интенсивности деформаций начального плоского состояния пластинки. Как будет показано в пункте 3, этот вопрос, который при упругом и упрочняющемся материалах не важен, при идеальной пластичности приобретает принципиально важное значение.

Полагая

$$
T_r^0=T_\theta^0=-ph=-3Gh[(1-\lambda)e_i+\lambda e_s],\quad S^0=0\tag{2.2}
$$

и используя (1.1), (1.2), (2.1), находим

$$
a_{11}=a_{22}=\frac{G}{e_i}[4(1-\lambda)e_i+\lambda e_s],\qquad a_{33}=\frac{G}{e_i}[(1-\lambda)e_i+\lambda e_s]
$$

$$
a_{12}=\frac{G}{e_i}[2(1-\lambda)e_i+\lambda e_s],\qquad a_{13}=a_{23}=0\tag{2.3}
$$

Имея в виду, что коэффициенты a_{ij} не зависят от координат, а в силу осесимметричности выпучивания пластинки $\psi = 0$, из (1.18) с учетом (2.3) получим

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) - a\frac{d}{dr}\left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r}\right) + b\varphi = 0 \\
\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} - c\left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r}\right) = 0
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

где

$$
\begin{gathered}
a = \frac{12\bar{J}_1 e_i}{Gh^3[(1-\lambda)e_i + \lambda e_s]}, \qquad b = \frac{12\bar{J}_2 e_i}{Gh^3[4(1-\lambda)e_i + \lambda e_s]} \\
c = \frac{\bar{J}_2}{3Gh[(1-\lambda)e_i + \lambda e_s]}
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

С помощью простых преобразований функцию φ выразим через w

$$
\begin{gathered}
\varphi = -\gamma\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) \\
\gamma = \frac{c-a}{bc} = \frac{Gh^3}{12\bar{J}_2 e_i}[4(1-\lambda)e_i + \lambda e_s]\left(1 - 36\frac{\bar{J}_1}{\bar{J}_2}\frac{e_i}{h^2}\right)
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы (2.4), приходим к дифференциальному уравнению Бесселя относительно прогиба

$$
\nabla^4 w + \alpha^2 \nabla^2 w = 0 \tag{2.7}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} \\
\alpha^2 = \frac{1}{c\gamma} = \frac{36e_i}{h^2}\,\frac{(1-\lambda)e_i + \lambda e_s}{4(1-\lambda)e_i + \lambda e_s}\,\frac{1}{1 - 36\dfrac{\bar{J}_1}{\bar{J}_2}\dfrac{e_i}{h^2}}
\end{gathered}
\tag{2.8}
$$

Ограниченное решение уравнения (2.7), которое на контуре пластинки $r = R$ превращается в нуль, имеет вид [4]

$$
w(r) = C[J_0(\alpha r) - J_0(\alpha R)] \tag{2.9}
$$

Здесь C — постоянная интегрирования, J_0 — бесселева функция первого рода с нулевым индексом. Из (2.6) с учетом (2.9) для функции φ находим

$$
\varphi = -C\gamma\alpha^3 J_1(\alpha r) \tag{2.10}
$$

где J_1 — бесселева функция первого рода с индексом 1.

Вычислим изгибающий момент и угол наклона в радиальном направлении пластинки.

Первая формула (1.14) в нашем случае принимает вид

$$\delta M_r = -\frac{h^3}{12}\left(a_{11}\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{a_{12}}{r}\frac{dw}{dr}\right)+$$

$$+\frac{\overline{J}_1 e_i}{G[(1-\lambda)e_i+\lambda e_s]}\left(a_{11}\frac{d\varphi}{dr}+a_{12}\frac{\varphi}{r}\right) \tag{2.11}$$

Имея в виду (2.3), (2.9) и (2.10), получим

$$\delta M_r = \frac{C\alpha^2h^3}{12}a_{11}\left(1-36\frac{\overline{J}_1}{J_2}\frac{e_i}{h^2}\right)\left[J_0(\alpha r)-\frac{2[(1-\lambda)e_i+\lambda e_s]}{4(1-\lambda)e_i+\lambda e_s}\frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r}\right] \tag{2.12}$$

Для угла наклона из (2.9) находим

$$\frac{dw}{dr} = -C\alpha J_1(\alpha r) \tag{2.13}$$

В случае защемленной по контуру пластинки граничное условие имеет вид

$$\left.\frac{dw}{dr}\right|_{r=R} = 0 \tag{2.14}$$

В случае же шарнирно опертой пластинки —

$$\delta M_r\big|_{r=R} = 0 \tag{2.15}$$

Следовательно, критические значения интенсивности деформаций начального состояния пластинки e_i определяются корнями уравнений

$$J_1(\alpha R) = 0 \quad \text{(случай защемления)} \tag{2.16}$$

$$J_0(\alpha R)-\beta\frac{J_1(\alpha R)}{\alpha R} = 0 \quad \text{(случай шарнирного опирания)} \tag{2.17}$$

где

$$\beta = \frac{2[(1-\lambda)e_i+\lambda e_s]}{4(1-\lambda)e_i+\lambda e_s}$$

$$\alpha R = \frac{6R}{h}\sqrt{\frac{e_i[(1-\lambda)e_i+\lambda e_s]}{[4(1-\lambda)e_i+\lambda e_s]\left(1-36\frac{\overline{J}_1}{J_2}\frac{e_i}{h^2}\right)}} \tag{2.18}$$

Соответствующие критические значения сжимающего давления p однозначным образом определяются по формуле

$$p = 3G[(1-\lambda)e_i+\lambda e_s] \tag{2.19}$$

При $\lambda = 0$, $\bar{J}_1/\bar{J}_2 = 0$ (2.16) ÷ (2.18) совпадают с соответствующими уравнениями и выражениями классической теории упругой пластинки при несжимаемости материала [4].

3. Рассмотрим случай идеальной пластичности ($\lambda = 1$). Допустим, что начальное состояние пластинки предельное ($\sigma_i = \sigma_s = \mathrm{const}$), то есть в любой ее точке достигнут предел упругости материала. Исследуем вопрос возможности существования искривленных форм предельного равновесия такой пластинки. Полагая $\lambda = 1$, из (2.18) получим

$$\beta = 2, \qquad \alpha R = \frac{6R}{h} \sqrt{\frac{e_i}{1 - 36 \dfrac{\bar{J}_1}{\bar{J}_2} \dfrac{e_i}{h^2}}} \tag{3.1}$$

Имея в виду условия существования нетривиальных форм равновесия (2.16), (2.17), с учетом (3.1) заключаем, что для идеально пластической пластинки существуют такие определенные степени развития пластического течения начального состояния, то есть такие определенные значения интенсивности деформаций $e_i^{(n)}$, при которых возможно предельное равновесие искривленных форм пластинки.

Эти значения $e_i^{(n)}$, которые условно назовем критическими, получаются корнями уравнений (2.16), (2.17).

Если

$$e_s < e_i \neq e_i^{(n)} \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots) \tag{3.2}$$

где $e_i^{(n)}$ — критическое значение, соответствующее n-ому корню уравнений (2.16), (2.17), то возможна только плоская форма предельного равновесия пластинки ($C = 0$).

При

$$e_i = e_i^{(n)} \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots) \tag{3.3}$$

кроме плоской возможно существование еще n-ой формы предельного равновесия пластинки

$$w^{(n)}(r) = C[J_0(\alpha^{(n)} r) - J_0(\alpha^{(n)} R)], \quad \alpha^{(n)} = \frac{6}{h} \sqrt{\frac{e_i^{(n)}}{1 - 36 \dfrac{\bar{J}_1}{\bar{J}_2} \dfrac{e_i^{(n)}}{h^2}}} \tag{3.4}$$

Момент появления возможности существования искривленной формы равновесия, вообще говоря, не совпадает с моментом наступления предельного равновесия пластинки. Такое совпадение имеет место лишь в одном частном случае, когда

$$e_i^{(1)} = e_s \tag{3.5}$$

Если граничные условия допускают свободное течение материала при плоской форме равновесия пластинки, то со временем обязательно поочередно наступят моменты достижения критических состояний $e_i^{(1)}, e_i^{(2)}, e_i^{(3)}, \ldots$ и т. д.

Это явление имеет простое физическое объяснение. Из (1.5) с учетом (2.1) при идеальной пластичности ($\lambda = 1$) получаем

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = G\frac{e_s}{e_i}, \quad a_{12} = -G\frac{e_s}{e_i}, \quad a_{13} = a_{23} = 0 \qquad (3.6)$$

откуда видно, что с ростом пластического течения начального состояния (с возрастанием e_i) изменяются механические свойства материала, что заключается в увеличении его деформативности. В связи с этим, если при $e_i < e_i^{(n)}$ невозможно равновесие пластинки по n-ой форме искривления, то это становится возможным при $e_i = e_i^{(n)}$, когда материал пластинки уже обладает соответствующими деформативными свойствами.

Важно отметить, что возможность существования искривленных форм предельного состояния нельзя отождествлять с обычным понятием потери устойчивости пластинки. Дело в том, что при переходе от плоской формы к любой искривленной форме, который происходит на площадке текучести материала, вариация потенциальной энергии упругого деформирования всегда равна нулю. Поэтому, в смысле минимальности потенциальной энергии системы, плоская форма пластинки никакого преимущества не имеет по сравнению с искривленной формой. По этой причине не может существовать тенденция возвращения искривленной пластинки к ее исходной плоской форме равновесия. В силу этого, если при условии (3.3) искривлять пластинку по форме (3.4) и оставить самой себе, то реализуется безразличное предельное равновесие такой искривленной пластинки. Если же искривлять пластинку при условии (3.2) по любой форме и оставить, то состояние равновесия не реализуется. Однако это не означает, что искривленная пластинка возвратится к ее исходной плоской форме. Движение пластинки будет способствовать удалению от плоской формы. Пластинка разрушится по заданной схеме. В окончательном счете предельное равновесие пластинки всегда не устойчиво. Любопытно отметить, что если в качестве характеризующего параметра начального состояния принимать напряжение, то в случае идеальной пластичности это приводит к неизбежному исключению из поля рассмотрения или всех возможных нетривиальных форм предельного равновесия (случай (3.2)), или всех, кроме первой (случай (3.5)). Причина этого обстоятельства заключается в том, что между напряжениями и деформациями идеально-пластического тела существует невзаимнооднозначная зависимость: единственному полю напряжений соответствует бесконечное множество полей деформаций. Во избежание этого при идеальной пластичности необходимо начальное состояние характеризовать параметрами деформаций, а не напряжений, что и сделано в настоящей статье. Разумеется, для упругого и упрочняющегося материалов не имеет значения, из какого состояния исходить, из напряженного или из деформированного.

Таблица 1

R/λ		$\lambda=0$						$\lambda=0.2$						$\lambda=0.4$					
		$10^3\, e_i$			$10^3\, p/3G$			$10^3\, e_i$			$10^3\, p/3G$			$10^3\, e_i$			$10^3\, p/3G$		
		I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
2.5	кл.	261.01	875.00	1840.0	261.01	875.00	1840.0	260.83	874.81	1839.8	208.86	700.01	1472.0	260.51	874.49	1839.5	156.71	525.10	1104.1
	ут.	134.57	210.84	241.34	134.57	210.84	241.34	134.47	210.80	241.32	107.78	168.84	193.26	134.31	210.72	241.28	80.99	126.83	145.17
5	кл.	65.25	218.75	460.00	65.25	218.75	460.00	65.07	218.56	459.81	52.25	175.05	368.05	64.75	218.25	459.50	39.25	131.35	276.10
	ут.	52.84	122.38	173.19	52.84	122.38	173.19	52.69	122.27	173.12	42.35	98.02	138.70	52.41	122.10	173.00	31.86	73.66	104.20
10	кл.	16.31	54.69	115.00	16.31	54.69	115.00	16.13	54.50	114.81	13.10	43.80	92.05	15.82	54.19	114.50	9.89	32.91	69.10
	ут.	15.41	45.69	81.33	15.41	45.69	81.33	15.23	45.54	81.20	12.39	36.63	65.16	14.94	45.28	80.98	9.36	27.57	48.99

R/λ		$\lambda=0.6$						$\lambda=0.8$						$\lambda=1$					
2.5	кл.	259.89	873.87	1838.9	104.56	350.15	736.14	258.02	872.00	1836.9	52.40	175.20	368.20	65.25	218.76	460.03	1	1	1
	ут.	133.99	210.57	241.20	54.20	84.83	97.08	133.03	210.12	240.95	27.41	42.82	48.99	52.84	122.38	173.19	1	1	1
5	кл.	64.13	217.63	458.87	26.25	87.65	184.15	62.30	215.76	457.00	13.26	43.95	92.20	16.31	54.69	115.00	1	1	1
	ут.	51.94	121.75	172.77	21.37	49.30	69.71	50.46	120.71	172.07	10.89	24.94	35.21	15.41	45.69	81.33	1	1	1
10	кл.	15.21	53.57	113.88	6.69	22.03	46.15	13.52	51.74	112.03	3.50	11.15	23.21	4.078	13.67	28.75	1	1	1
	ут.	14.37	44.76	80.54	6.35	18.50	32.81	12.78	43.21	79.23	3.36	9.45	16.65	4.019	13.03	26.05	1	1	1

Важно отметить, что если в рамках деформационной теории пластичности, путем представления начального состояния пластинки через ее деформированное состояние, можно устранить этот недостаток, то это невозможно сделать при теории течения. Причина этого обстоятельства заключается в том, что в теории течения невозможно записать механические соотношения, разрешенные относительно компонент полных деформаций.

В заключение заметим, что существование критической деформации при идеальной пластичности впервые было обнаружно в работе [6]. Обсуждение вопроса там проводится на примере длинной полосы с использованием другого подхода, основанного на разрывной зависимости критического напряжения от гибкости.

4. В табл. 1 и 2 приведены некоторые численные результаты решения задачи защемленной пластинки в уточненной и классической постановках для первых трех форм потери устойчивости. Как и следовало ожидать, критические напряжения с возрастанием λ монотонно убывают и при идеальной пластичности ($\lambda = 1$) независимо от форм выпучивания равняются пределу текучести материала (табл. 1). Этот вывод справедлив как при учете, так и при пренебрежении влияний поперечных сдвигов.

Таблица 2

R/h \ λ	$P^{(1)}_{кл.}$ $P^{(2)}_{ут.}$					
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
2.5	1.939	1.938	1.935	1.929	1.912	1
5	1.235	1.234	1.232	1.228	1.218	1
10	1.058	1.057	1.057	1.054	1.042	1

Влияние поперечных сдвигов существенным образом зависит от относительной толщины пластинки. Если при $R/h = 2.5$ уточненные значения критического напряжения для обычных упрочняющихся материалов ($0 < \lambda < 0.95$) почти в два раза меньше, чем классические, то при $R/h = 10$ поправка составляет примерно 6% (табл. 2). Влияние поперечных сдвигов настолько сильно, насколько материал ближе к линейно упругому. С увеличением пластических свойств материала это влияние ослабляется. Для идеально-пластических пластин ($\lambda = 1$) учет влияния деформаций поперечных сдвигов приводит к понижению значений критических деформаций. При этом понижение настолько ощутимо, насколько толще пластинка.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 20 XI 197[illegible]

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ՈՉ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԼՈՐ ՍԱԼԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՍԱՀՔԵՐԻ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ

Ամփոփում

Կամայական ամրապնդվող նյութի համար փոքր առաձգա-պլաստիկական դեֆորմացիաների տեսության շրջանակներում ստացվում է կլոր սալերի կայունության խնդրի դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմը՝ լայնական սահքերի դեֆորմացիաների ազդեցության հաշվառմամբ։ Որպես կիրառություն լուծվում է շառավղի ուղղությամբ սեղմված կլոր սալերի կայունության առանցքասիմետրիկ խնդիրը եզրագծով հոդակապորեն հենման և կոշտ ամրակցման դեպքերում։ Մանրամասն քննարկվում է իդեալական պլաստիկության դեպքը։ Բերվում են թվային արդյունքներ։

ON STABILITY OF UNELASTIC CIRCULAR PLATES. CONSIDERING TRANSVERSAL DISPLACEMENTS

R. M. KIRAKOSIAN

S u m m a r y

Within the theory of small elastic-plastic deformations of arbitrary hardening material a system of differential equations is obtained for the stability of circular plates, considering transversal displacements. As application the stability problem is solved for circular plates compressed radially, hinge-supported and rigidly fastened over their contour with an axisymmetric form of stability loss. The ideal plasticity case is considered. A numerical example is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
2. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М., Физматгиз, 1969.
3. *Хорн М.* Устойчивость упруго-пластических конструкций. Механика, 1965, № 1.
4. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. М., Физматгиз, 1963.
5. *Клюшников В. Д.* Развитие теории устойчивости конструкций за пределом упругости и критерий бифуркации процесса деформирования. Прикл. механика, 1975, т. XI (XXI), в. 6.
6. *Клюшников В. Д.* О некоторых особенностях явления неустойчивости за пределом упругости. В кн.: «Успехи механики деформируемых сред». М., Наука, 1975.
7. *Амбарцумян С. А.* Об устойчивости неупругих пластинок с учетом деформаций поперечных сдвигов. ПММ, 1963, т. XXVII, в. 4.
8. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М., Физматгиз, 1967.
9. *Киракосян Р. М.* Об устойчивости пластинок за пределами упругости с учетом поперечных сдвигов. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 4.
10. *Киракосян Р. М.* Об устойчивости неупругой прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по двум противоположным сторонам, с учетом поперечных сдвигов. Изв. АН АрмССР, Механика, 1977, т. XXX, № 2.
11. *Shanley F. R.* Inelastic column theory. Journ. of the Aeronautical Sciences, 1947, v. XIV, No. 5.
12. *Работнов Ю. Н., Шестериков С. А.* Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. XXI, в. 3.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIII, № 2, 1980 Механика

К. С. КАРАПЕТЯН, Р. А. КОТИКЯН, К. А. КАРАПЕТЯН

ВЛИЯНИЕ ВОДОНАСЫЩЕНИЯ НА АНИЗОТРОПИЮ ПРОЧНОСТИ, МОДУЛЯ ДЕФОРМАЦИИ И ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА ПРИ СЖАТИИ И РАСТЯЖЕНИИ

В работе [1] впервые было установлено, что влияние водонасыщения на прочность и деформативность бетона в большой мере зависит от направления сжимающей нагрузки по отношению к слоям бетонирования — водонасыщение приводит к существенному изменению степени анизотропии бетона по прочности и модулю деформации. Исследования привели автора к выводу, что при водонасыщении изменения физико-механических и анизотропных свойств бетона происходят по следующим трем причинам:

1. Раздвигающих действий адсорбционных пленок воды, проникающих в микрощели твердого тела [2, 3].

2. Возобновления процесса твердения бетона — вторичное твердение.

3. Заполнения образовавшихся под частицами заполнителя пустот (дефектов) водой.

Первые две причины, которые приводят к изменению физико-механических свойств бетона, общеизвестны, однако еще недостаточно изучены. Что касается положительного эффекта водных прослоек, которые восстанавливаются в связи с заполнением пустот (дефектов) водой, то эту гипотезу предложил К. С. Карапетян [1].

Согласно К. С. Карапетяну, причиной неодинаковости свойств бетона в различных направлениях, то есть анизотропии, являются те водные прослойки, которые неизбежно образуются под частицами заполнителя в результате внутреннего расслаивания бетона при его укладке и уплотнении. При испарении всех этих прослоек на их местах остаются пустоты (дефекты), которые ослабляют сечение бетонного элемента и снижают его прочность, увеличивают деформации. Отрицательное влияние дефектов на прочность бетона более существенно в том случае, когда призмы испытываются перпендикулярно слоям бетонирования, так как в этом случае ослабление сечения образцов дефектами получается наибольшее [4—6].

В работе [1] опытами над шлакобетонными призмами, изготовленными в вертикальных и горизонтальных формах, было показано, что водонасыщение приводит к упрочнению бетона не только за счет вторичного твердения, но и за счет заполнения вышеуказанных пустот (дефектов) несжимаемой жидкостью — водой.

Влияние водонасыщения на прочность, модуль деформации и на анизотропные свойства бетона при сжатии исследовалось также в работе [7].

Методика опытов отличалась тем, что в этом случае впервые испытанию подвергались небольшие цилиндрические образцы, которые вырезывались в двух взаимно перпендикулярных направлениях из одного и того же бетонного элемента возраста 23 года. Кроме того, для установления закономерности влияния водонасыщения на прочность и модуль деформации бетона в зависимости от направления сжимающей нагрузки по отношению к слоям бетонирования, образцы испытывались через 7 различных сроков хранения в воде.

Ниже рассматриваются результаты большой серии опытов, которые были поставлены для изучения влияния водонасыщения на прочность, деформативность и ползучесть бетона с учетом анизотропии как при сжатии, так и при растяжении.

Для проведения намеченных программой исследований из бетона на литоидной пемзе и портландцементе активностью 380 $кгс/см^2$ (состав в массе 1:1,66:2,99, В/Ц = 1, Ц = 260 *кг* на 1 $м^3$ бетона) было изготовлено 108 призм размерами 10×10×40 *см* и 90 восьмерок сечением 10×10 *см*, высотой 60 *см*. При изготовлении образцов половина их бетонировалась в вертикальных формах, а другая половина — в горизонтальных формах, так что при испытании в первом случае нагрузка действовала перпендикулярно, а во втором случае — параллельно слоям бетонирования. Образцы освобождались от форм через трое суток, после чего до месячного возраста они хранились во влажных условиях, а затем до обводнения в возрасте 11 месяцев — в обычных лабораторных условиях.

Для исследования влияния водонасыщения на прочность и деформативность бетона при сжатии и растяжении были испытаны 36 призм и 30 восьмерок. Испытывались как контрольные сухие образцы, так и образцы после хранения в воде 1, 3, 7 и 28 сут., а на сжатие еще и 3 мес. Остальные образцы были предназначены для исследования водонасыщения на дальнейшую ползучесть бетона под длительной нагрузкой. С этой целью длительному сжатию и растяжению было подвергнуто 36 призм и 30 восьмерок и на таком же количестве образцов определялись усадочные деформации. После изъятия из воды и длительного загружения образцы находились в обычных лабораторных условиях, где температура составляла $T = 23 \pm 4$ C, а относительная влажность — $P = 68 \pm 9\%$. Напряжение для всех призм составляло 40 $кгс/см^2$, а для восьмерок — 6 $кгс/см^2$. Длительные деформации каждого образца замерялись двумя мессурными индикаторами на базе 160 *мм*. Кубиковая прочность бетона в месячном возрасте составляла 267 $кгс/см^2$.

Экспериментальные кривые кратковременных деформаций как при сжатии, так и при растяжении аппроксимировались по корреляционному уравнению

$$\varepsilon = \frac{a\dfrac{\sigma}{R}}{1 - b\dfrac{\sigma}{R}}$$

где a и b — опытные параметры, а R — прочность бетона (при сжатии призменная прочность, а при растяжении — прочность на растяжение).

Касательные модули деформации при различных напряжениях определялись по формуле

$$E = \frac{R}{a}\left(1 - b\frac{\sigma}{R}\right)^2$$

где R/a представляет начальный модуль деформации.

По данным табл. 1, где приведены прочностные характеристики и касательные модули деформации бетона при сжатии, водонасыщение по-разному влияет на прочность призм, испытанных перпендикулярно и параллельно слоям бетонирования. Как видим, водонасыщение практически не оказало влияния на прочность призм, испытанных перпендикулярно слоям, но в призмах, испытанных параллельно слоям, привело сперва к спаду, а в дальнейшем—к росту прочности. В конце опытов прочность водонасыщенных призм, испытанных параллельно слоям, превышает прочность соответствующих контрольных сухих призм на 10% и при этом перекрыто начальное адсорбционное понижение прочности, которое на 7 сут. водного хранения составило 12%.

Водонасыщение оказывает существенное влияние на степень анизотропии бетона по прочности. В первые сутки водного хранения коэффициент анизотропии по призменной прочности $K_1 = R'_{пр}/R_{пр}$ (где $R_{пр}$ и $R'_{пр}$ — соответственно прочности призм, испытанных перпендикулярно и параллельно слоям бетонирования) уменьшается и бетон по прочности становится изотропным. Однако, в дальнейшем анизотропные свойства бетона вновь начинают проявляться и с увеличением продолжительности водного хранения K_1 возрастает до значения 1.27, что на 12% больше, чем для контрольных сухих образцов. Изменение коэффициента K_1 во времени объясняется тем, что водное хранение по-разному влияет на прочность призм, испытанных перпендикулярно и параллельно слоям бетонирования [1].

По данным табл. 1 в результате обводнения модуль деформации бетона сперва снижается, а в последующем возрастает. При этом как спад, так и рост модуля деформации в случае испытания образцов параллельно слоям более чувствительны, чем в случае испытания образцов перпендикулярно слоям. В конце опытов, то есть через 3 мес. водного хранения, при $\sigma = 0$ модуль деформации образцов, испытанных перпендикулярно слоям на 8%, а образцов, испытанных параллельно слоям, на 21% больше модуля деформации соответствующих контрольных сухих образцов.

При рассмотренных сжимающих напряжениях изменение степени анизотропии бетона по модулю деформации в процессе водного хранения качественно имеет один и тот же характер. С увеличением продолжительности водного хранения до 7 сут. коэффициент анизотропии бетона по модулю деформации $K_2 = E_{сж}/E_{сж}$ (где $E_{сж}$ и $E_{сж}$ — соответственно модули деформации образцов, испытанных перпендикулярно и параллельно слоям бетонирования) уменьшается до единицы, а в дальнейшем существенно возрастает и превосходит таковой контрольных образцов (табл. 1). $K_2 = 1$ значит, что бетон по модулю деформации изотропный.

Рассмотрим результаты опытов по исследованию влияния водонасыщения на прочность, модуль деформации и степень анизотропии бетона при растяжении. Как видно из табл. 2, адсорбционный спад прочности в этом случае намного больше, чем это было в опытах на сжатие. На 3 *сут.* водного хранения спад прочности на растяжение, независимо от направления растягивающей нагрузки по отношению к слоям бетонирования, составляет 30%, после чего наблюдается устойчивое нарастание прочности во времени. При этом, повышение прочности образцов, испытанных перпендикулярно слоям, протекает более интенсивно, чем образцов, испытанных параллельно слоям. В результате упрочнения бетона через 28 *сут.* водного хранения прочность образцов, испытанных перпендикулярно слоям всего на 5% ниже прочности таких же контрольных сухих образцов, в то время как для образцов, испытанных параллельно слоям, то же самое составляет 19%.

При контрольных сухих образцах коэффициент анизотропии по прочности бетона при растяжении $K_1 = R_b/R_p$ (где R_b и R_p — соответственно прочности восьмерок, испытанных перпендикулярно и параллельно слоям) гораздо больше, чем коэффициент анизотропии по призменной прочности K_1. С увеличением продолжительности водного хранения до 3-х *сут.* K_1 изменяется незначительно, а в дальнейшем существенно уменьшается и бетон по прочности становится практически изотропным ($K_1 = 1.07$).

Водонасыщение оказывает существенное влияние и на модуль деформации бетона при растяжении. В этом случае также сначала водонасыщение приводит к спаду модуля деформации, а в дальнейшем — к ее нарастанию во времени. Максимальный спад модуля деформации при испытании образцов перпендикулярно слоям составляет 53%, а при испытании образцов параллельно слоям — 35%. После 7 *сут.* в результате дальнейшего водного хранения разница модулей деформаций контрольных сухих и водонасыщенных образцов существенно уменьшается (табл. 2).

Коэффициент анизотропии бетона по модулю деформации при растяжении $K_2 = E_b/E_p$ (где E_p и E_b — соответственно модули деформации образцов, испытанных перпендикулярно и параллельно слоям) зависит как от величины напряжения, так и от продолжительности водного хранения. При контрольных сухих образцах с увеличением напряжения K_2 уменьшается, а при водонасыщенных образцах — увеличивается. При $\sigma = 0$ с увеличением продолжительности водного хранения коэффициент анизотропии по модулю деформации при растяжении уменьшается и приобретает значение, близкое к единице, то есть бетон по модулю деформации становится изотропным. При напряжениях 5 и 10 *кгс/см²* четкая закономерность в изменении K_2 в зависимости от продолжительности водного хранения не наблюдается.

Таблица 1

Влияние водонасыщения на прочность и касательный модуль деформации бетона на литоидной пемзе при сжатии

Условия хранения образцов	Направление сжимающей нагрузки по отношению к слоям бетона при испытании	Призменная прочность бетона в кгс/см²	Отношение прочности образцов, хранившихся в воде, к прочности сухих образцов	Отношение прочности образцов, испытанных парал. слоям, к прочности образцов, испытанных перпен. слоям	Модуль деформации бетона в т/см² при напряжении (кгс/см²)			Отношение модуля деформации образцов, хранившихся в воде, к модулю деформации сухих образцов при напряжении (кгс/см²)			Отношение модуля деформации образцов, испытанных парал. слоям, к модулю деформации образцов испытанных перпен. слоям при напряжении (кгс/см²)		
					0	50	100	0	50	100	0	50	100
Образцы сухие	перпен. парал.	205 231	1.00 1.00	1.13	129 147	112 129	96 113	1.00 1.00	1.00 1.00	1.00 1.00	1.14	1.15	1.17
24 *часа* в воде	перпен. парал.	214 207	1.04 0.90	0.97	118 132	110 112	102 94	0.91 0.90	0.98 0.87	1.06 0.83	1.12	1.02	0.92
3 *сут.* в воде	перпен. парал.	209 219	1.02 0.95	1.05	123 128	116 120	110 114	0.95 0.87	1.04 0.92	1.15 1.01	1.04	1.03	1.04
7 *сут.* в воде	перпен. парал.	218 203	1.06 0.88	0.93	129 128	119 118	109 107	1.00 0.87	1.06 0.91	1.14 0.95	1.00	1.00	0.98
28 *сут.* в воде	перпен. парал.	194 231	0.95 1.00	1.19	115 151	111 135	108 120	0.90 1.03	1.00 1.05	1.13 1.06	1.31	1.22	1.11
3 *мес.* в воде	перпен. парал.	201 255	0.98 1.10	1.27	139 178	120 152	103 129	1.08 1.21	1.07 1.18	1.07 1.14	1.28	1.27	1.25

Таблица 2

Влияние водонасыщения на прочность и касательный модуль деформации бетона на литоидном цементе при растяжении

Условия хранения образцов	Направление растягивающей нагрузки по отношению к слоям бетона при испытании	Прочность бетона на растяжение в $кгс/см^2$	Отношение прочности образцов, хранившихся в воде, к прочности сухих образцов	Отношение прочности образцов, испытанных парал. слоям, к прочности образцов, испытанных перпен. слоям	Модуль деформации бетона в $т/см^2$ при напряжении ($кгс/см^2$)			Отношение модуля деформации образцов, хранившихся в воде, к модулю деформации сухих образцов при напряжении ($кгс/см^2$)			Отношение модуля деформации образцов, испытанных парал. слоям, к модулю деформации образцов, испытанных перпен. слоям, при напряжении ($кгс/см^2$)		
					0	5	10	0	5	10	0	5	10
Образцы сухие	перпен.	15.4	1.00	1.27	151	122	97	1.00	1.00	1.00	1.28	1.25	1.21
	парал.	19.6	1.00		194	153	117	1.00	1.00	1.00			
24 *часа* в воде	перпен.	12.0	0.78	1.17	106	80	58	0.70	0.66	0.60	1.24	1.33	1.43
	парал.	14.1	0.72		131	106	83	0.67	0.69	0.71			
3 *сут.* в воде	перпен.	10.8	0.70	1.27	129	99	58	0.85	0.73	0.60	1.21	1.28	1.31
	парал.	13.7	0.70		156	114	76	0.80	0.75	0.65			
7 *сут.* в воде	перпен.	11.9	0.77	1.22	153	91	46	1.01	0.75	0.47	1.19	1.37	1.72
	парал.	14.5	0.74		182	125	79	0.94	0.82	0.68			
28 *сут.* в воде	перпен.	14.7	0.95	1.07	172	116	70	1.14	0.87	0.72	1.02	1.15	1.37
	парал.	15.8	0.81		176	133	96	0.91	0.90	0.82			

Таблица 3

Влияние водонасыщения на усадку и ползучесть бетона

Условия хранения образцов перед длительным загружением	Направление нагрузки по отношению к слоям бетона при испытании	Усадка бетона при $t=150$ *сут* $(\varepsilon_y \times 10^5)$	Отношение усадки образцов, хранившихся в воде, к усадке сухих образцов	Уровень напряжения в момент длительного загружения на ползучесть		Мера ползучести бетона при $t=200$ *сут.* $(C \cdot 10^6)$		Отношение меры ползучести при растяжении к мере ползучести при сжатии	Отношение меры ползучести образцов, хранившихся в воде, к мере ползучести сухих образцов		Отношение меры ползучести образцов, испытанных перпен. слоям, к мере ползучести образцов, испытанных парал. слоям	
				$\frac{\sigma}{R_{пр}}$	$\frac{\sigma}{R_р}$	при сжатии	при растяжении		при сжатии	при растяжении	при сжатии	при растяжении
Обычное (сухие образцы)	перпен.	2.85	1.00	0.20	0.39	4.00	4.17	1.04	1.00	1.00	1.42	1.75
	парал.	4.90	1.00	0.17	0.31	2.82	2.33	0.83	1.00	1.00		
24 *часа* в воде	перпен.	29.5	10.35	0.19	0.50	8.45	26.2	3.10	2.11	6.28	0.99	1.31
	парал.	26.4	5.39	0.19	0.43	8.50	20.0	2.35	3.01	8.58		
3 *сут.* в воде	перпен.	35.0	12.28	0.19	0.56	7.50	47.5	6.33	1.87	11.40	0.84	1.48
	парал.	38.0	7.76	0.18	0.44	8.95	32.2	3.60	3.17	13.80		
7 *сут.* в воде	перпен.	40.8	14.32	0.18	0.50	9.20	25.0	2.72	2.30	6.00	1.13	1.58
	парал.	41.3	8.43	0.20	0.41	8.12	15.8	1.94	2.88	6.79		
28 *сут.* в воде	перпен.	35.3	12.39	0.21	0.41	8.00	25.0	3.12	2.00	6.00	1.30	1.10
	парал.	32.7	6.67	0.17	0.40	6.17	22.8	3.70	2.19	9.80		
3 *мес.* в воде	перпен.	34.9	12.25	0.20	—	8.50*	—	—	—	—	1.91	—
	парал.	43.8	8.94	0.16	—	4.37*	—	—	—	—		

* Меры ползучести соответствуют $t=150$ *сут.*

При водонасыщении эффект водных прослоек в увеличении прочности и модуля деформации бетона при растяжении исключается и их изменение, в основном, определяется адсорбционными явлениями и эффектом вторичного твердения. Об этом свидетельствует наблюдаемое большее адсорбционное понижение прочности и модуля деформации бетона при растяжении, чем при сжатии.

Прежде чем перейти к рассмотрению результатов опытов по исследованию влияния предварительного водного хранения на последующую ползучесть бетона как при сжатии, так и при растяжении отметим, что этот вопрос до сих пор мало изучен, а с учетом анизотропии, по-видимому, никем не изучался.

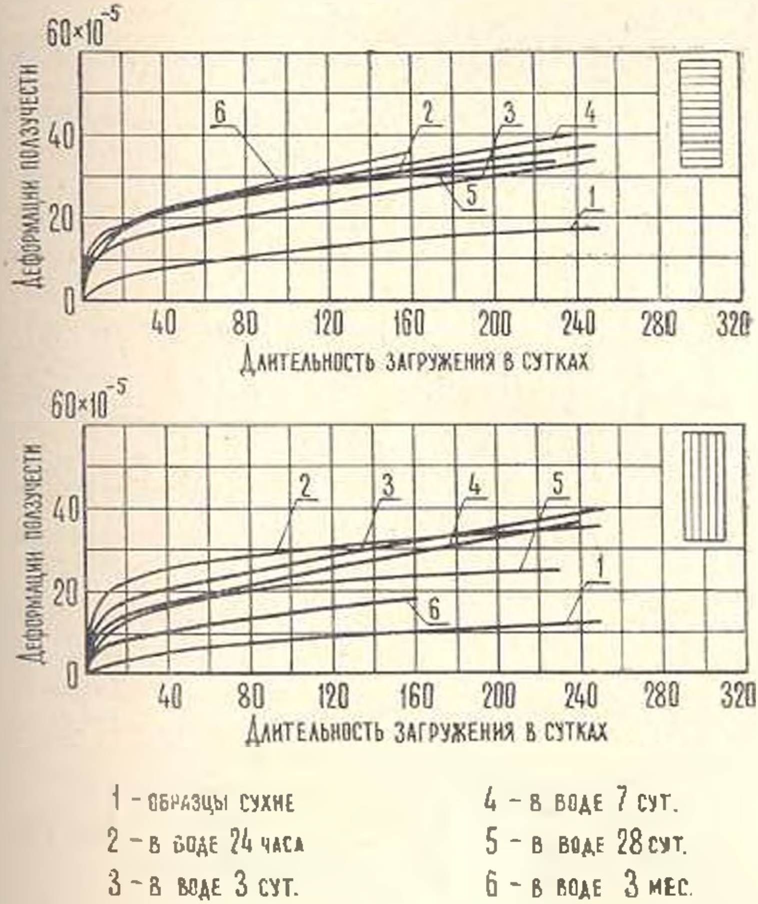
Рассмотрим теперь результаты опытов по исследованию влияния водонасыщения на ползучесть бетона на литоидной пемзе при сжатии и растяжении. Кривые ползучести при сжатии представлены на фиг. 1 и 2, а при растяжении — на фиг. 3 и 4. Одновременно для облегчения качественного и количественного анализа результатов опытов необходимые данные сведены в табл. 3.

Как видно из фиг. 1—4, водонасыщение и последующее высыхание бетона под длительной сжимающей и растягивающей нагрузками привело к существенному увеличению ползучести бетона. По данным табл. 3 максимальное увеличение меры ползучести бетона получилось в случае тех образцов, которые были загружены на длительное сжатие и растяжение после трехсуточного водного хранения. При этом рост меры ползучести при растяжении гораздо больше, чем при сжатии и это в большой мере зависит от направления сжимающей и растягивающей нагрузок по отношению к слоям бетонирования. В результате трехсуточного водного хранения мера ползучести бетона при растяжении по данным испытаний образцов перпендикулярно слоям возросла в 11.4 раза, а по данным испытаний образцов параллельно слоям — в 13.8 раза.

Как видно из табл. 3, более длительное хранение бетона в воде (более 3-х сут.) уже приводит к чувствительному уменьшению разницы мер ползучести контрольных сухих и водонасыщенных образцов. Однако, все же меры ползучести водонасыщенных образцов, особенно при растяжении, намного больше меры ползучести контрольных сухих образцов.

В существующих теориях ползучести бетона принято, что мера ползучести бетона не зависит от знака напряжения, то есть меры ползучести бетона при сжатии и растяжении равны. Однако, как показали опыты, отношение меры ползучести бетона при растяжении (C_p) к мере ползучести при сжатии ($C_{сж}$), то есть $C_p/C_{сж}$, зависит от многих факторов и для одного и того же бетона оно может быть меньше, равно и намного больше единицы [8].

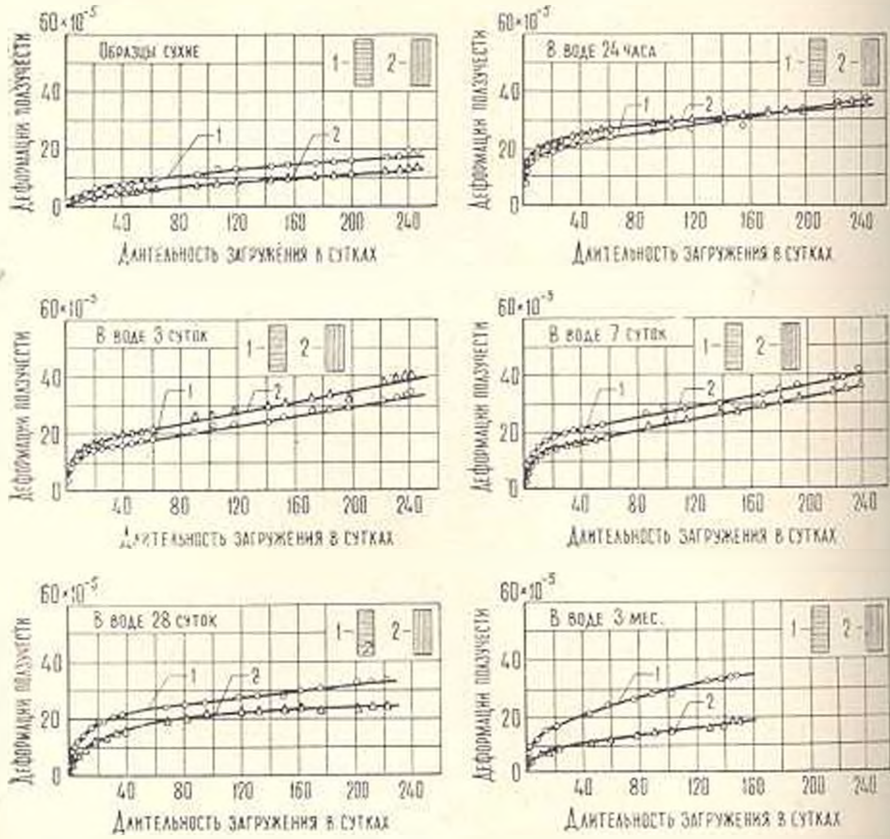
По данным табл. 3 соотношение мер ползучести бетона при растяжении и сжатии в большой мере зависит от продолжительности водного хранения и во всех случаях водонасыщение приводит к чувствительному увеличению $C_p/C_{сж}$. В наших опытах больше всех $C_p/C_{сж}$ возрастало в том случае, когда образцы были загружены на длительное растяжение и сжатие после 3-х сут. водного хранения. Наблюдаемое в этом случае значение $C_р/C_{сж}$, которое для образцов, испытанных перпендикулярно слоям, составляет 6.33, пожалуй пока является наибольшим из всех тех значений, которые были получены до сих пор разными исследователями. Кроме этого, еще раз подтверждается и тот ранее установленный факт, что при испытании образцов перпендикулярно слоям $C_р/C_{сж}$ гораздо больше, чем при испытании образцов параллельно слоям [8].



Фиг. 1. Влияние водонасыщения на ползучесть бетона при сжатии.

Водное хранение бетона в течение 3-х сут. привело к увеличению меры ползучести бетона по данным испытаний восьмерок перпендикулярно слоям в 6 раз, а по данным испытаний восьмерок параллельно слоям — почти в 4 раза. Это обстоятельство является положительным фактором, так как столь существенное увеличение растяжимости бетона может привести к релаксации усадочных напряжений, вызванных интенсивной усадкой водонасыщенного бетона в процессе его высыхания (табл. 3).

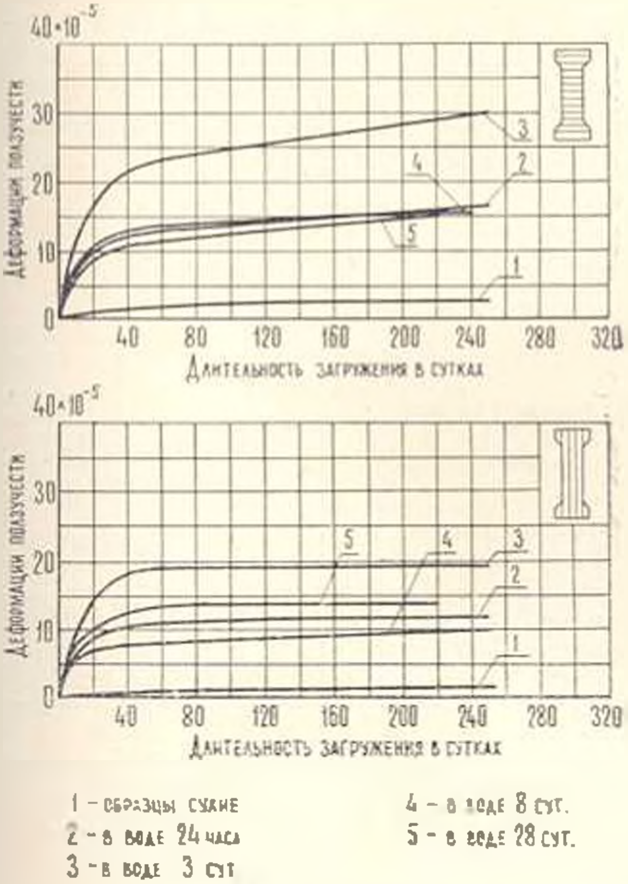
Рассмотрим теперь, как влияет водонасыщение на изменение степени анизотропии бетона по деформациям ползучести при сжатии и растяжении. Для этого в табл. 3 приведены значения коэффициентов анизотропии мер ползучести при сжатии ($K_{пс} = C_{сж}/C'_{сж}$) и растяжении $K_{пр} = C_р/C'_р$) как для сухих, так и для водонасыщенных образцов. Отметим, что $C_{сж}$ и $C_р$ — соответственно меры ползучести при сжатии и растяжении образцов, испытанных перпендикулярно слоям, а $C'_{сж}$ и $C'_р$ — образцов, испытанных параллельно слоям.



Фиг. 2. Влияние водонасыщения на анизотропию деформации ползучести бетона при сжатии.

Как видно из табл. 3, коэффициент анизотропии бетона по мере ползучести при сжатии $K_{пс}$, который для сухих образцов составляет 1.42, через суточное водное хранение уменьшается до 0.99 (то есть бетон по мере ползучести стал изотропным), к 3-м *сут.* обводнения уменьшается до 0.84, после чего до 3-х *мес.* устойчиво возрастает до значения 1.91. Коэффициент анизотропии бетона по мере ползучести при растяжении $K_{пр}$ в результате суточного водного хранения с 1.75 уменьшается до 1.31, а затем до 7 *сут.* возрастает до значения 1.58. При дальнейшем хранении бетона в воде (от 7 до 28 *сут.*) коэффициент $K_{пр}$ вновь уменьшается и приобретает значение, равное 1.1, то есть бетон по мере ползучести становится почти изотропным.

Таким образом, водонасыщение оказывает существенное влияние на степень анизотропии бетона по деформациям ползучести как при сжатии, так и при растяжении. Степень анизотропии бетона по деформациям ползучести при растяжении гораздо больше, чем при сжатии.

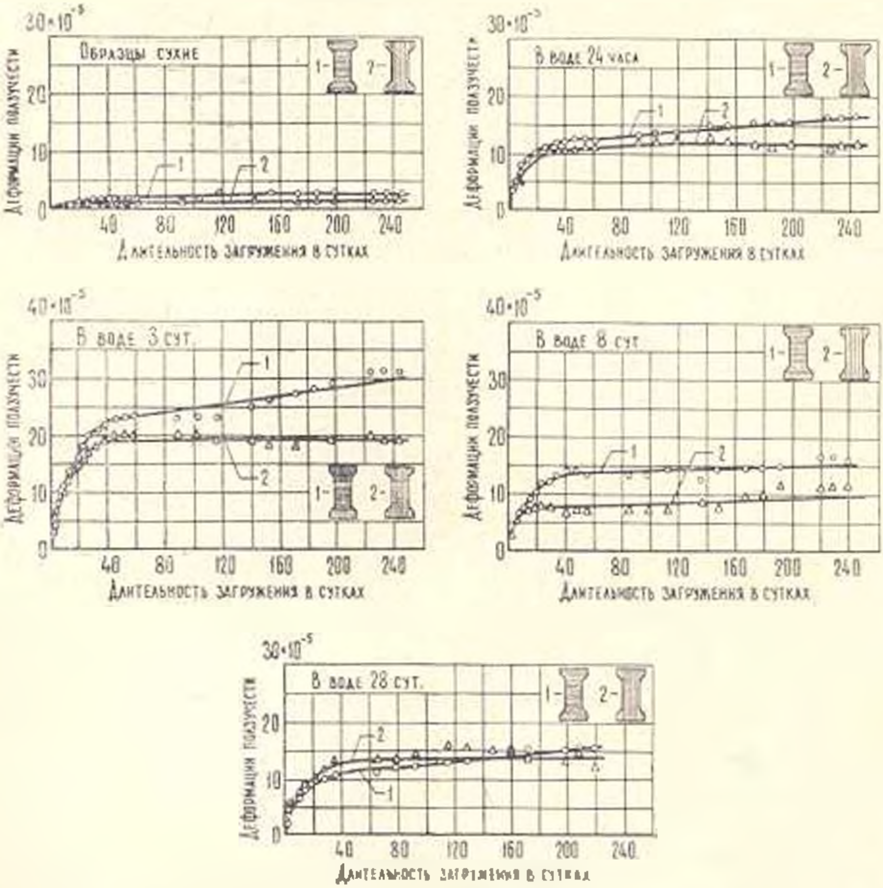


Фиг. 3. Влияние водонасыщения на ползучесть бетона при растяжении.

Теперь объясним те причины, которые обусловили столь существенное увеличение деформаций ползучести бетона как при сжатии, так и при растяжении в результате водонасыщения.

Согласно гипотезе Карапетяна К. С. [9—11] ползучесть бетона при сжатии до напряжения $R_т$ является следствием вязкости гелевой структурной составляющей цементного камня, капиллярных явлений и деформации кристаллической структуры цементного камня, а при более высоких напряжениях еще и следствием появления и развития микротрещин в бетоне.

Так как в наших опытах бетон был старый и напряжения в призмах были намного ниже $R_т$, то деформации ползучести сухих образцов, в основном, развивались за счет деформации кристаллической структуры цементного камня. Что касается деформаций ползучести водонасыщенных образцов, то они, кроме этого, развивались также за счет капиллярных явлений и вязкости вновь образовавшегося геля в результате вторичного твердения, вызванного обводнением бетона. При этом, большей ползучести образцов, хранившихся в воде до 3-х сут., способствовал также некоторый спад модуля деформации бетона, вызванный адсорбционными явлениями. Однако, основной причиной столь существенного увеличения деформаций ползучести бетона при сжатии являются капиллярные явления [9—11]. Об этом свидетельствует тот факт, что водонасыщение и последующее высыхание привело также к весьма существенному увеличению усадочных деформации (табл. 3).



Фиг. 4. Влияние водонасыщения на анизотропию деформации ползучести бетона при растяжении

Как уже было показано, водонасыщение привело к чувствительному спаду прочности и модуля деформации бетона при растяжении (табл. 3) и уровни напряжений в момент длительного загружения хотя в водонасыщенных образцах были заметно выше, чем в сухих образцах, но не превышали линейную область ползучести [12]. Спад модуля деформаций и более высокие уровни напряжений и способствовали большей ползучести водонасыщенных образцов. Сказанное подтверждается тем, что максимальное увеличение деформаций ползучести при растяжении получилось именно в том случае, когда имел место наиболее существенный спад прочности и модуля деформации бетона, то есть когда восьмерки были загружены на длительное растяжение после 3-х *сут.* водного хранения.

Конечно, столь существенное увеличение деформаций ползучести бетона в результате водонасыщения не является только следствием отмеченных причин тем более, что при растяжении роль капиллярных явлений в ползучести исключается и ползучесть, в основном, протекает за счет вязкости гелевой структурной составляющей цементного камня и деформаций кристаллической структуры цементного камня. Большей ползучести, несомненно, способствовали и объемные изменения пористого заполнителя бетона литоидной пемзы.

Основные выводы

1. Водное хранение старого бетона в первые сутки приводит к снижению, а в дальнейшем — к росту его прочности как на сжатие, так и на растяжение. Адсорбционное понижение прочности и дальнейшее упрочнение бетона зависит от продолжительности водного хранения и направления сжимающей и растягивающей нагрузок по отношению к слоям бетонирования.

2. Водонасыщение оказывает существенное влияние на степень анизотропии старого бетона по его призменной прочности и прочности на растяжение. В результате суточного водного хранения бетон по призменной прочности становится изотропным, однако, в дальнейшем анизотропные свойства бетона вновь начинают проявляться и с увеличением продолжительности водного хранения коэффициент анизотропии возрастает и намного превосходит таковой контрольных сухих образцов. Коэффициент анизотропии по прочности бетона при растяжении в первые 3 *сут.* водного хранения практически не изменяется, а в дальнейшем уменьшается и на 28 *сут.* водного хранения бетон практически становится изотропным.

3. Водное хранение старого бетона в начальное время приводит к снижению, а в дальнейшем — к росту его модуля деформации как при сжатии, так и при растяжении. Адсорбционный спад и дальнейшее нарастание модуля деформации зависят от продолжительности водного хранения, а также от величины и направления сжимающей и растягивающей нагрузок по отношению к слоям бетонирования.

4. Водонасыщение оказывает существенное влияние на степень анизотропии бетона по его модулю деформации как при сжатии, так и при растяжении.

Степень анизотропии по модулю деформации бетона при сжатии сначала с увеличением продолжительности водного хранения уменьшается и на 7 *сут.* он становится изотропным. В дальнейшем анизотропные свойства бетона вновь начинают проявляться, и с увеличением продолжительности водного хранения коэффициент анизотропии по модулю деформации возрастает и превосходит таковой контрольных сухих образцов.

Степень анизотропии по модулю деформации бетона при растяжении (при $\sigma = 5$ *кгс/см*^{2}) с увеличением продолжительности водного хранения до 7 *сут.* увеличивается, а в дальнейшем — уменьшается.

5. Водонасыщение приводит к существенному увеличению усадочных деформаций старого бетона при последующем его высыхании. До 7 *сут.* чем больше продолжительность водного хранения, тем больше усадка, а в дальнейшем имеет место обратное явление.

6. Предварительное водное хранение старого бетона приводит к существенному увеличению его последующей ползучести при высыхании под сжимающей и растягивающей нагрузками. До 3-х *сут.* с увеличением продолжительности водного хранения ползучесть возрастает, а в дальнейшем — уменьшается.

7. Предварительное водное хранение старого бетона приводит к существенному увеличению отношения меры ползучести при растяжении (C_p) к мере ползучести при сжатии ($C_{сж}$). С увеличением продолжительности водного хранения до 3-х *сут.* отношение $C_p/C_{сж}$ увеличивается, а в дальнейшем уменьшается.

8. Предварительное водное хранение старого бетона приводит к существенному изменению степени его анизотропии по деформациям ползучести как при сжатии, так и при растяжении.

В первые сутки водного хранения коэффициент анизотропии бетона по деформациям ползучести при сжатии существенно уменьшается и становится меньше единицы, а в дальнейшем с увеличением продолжительности водного хранения до 3-х *мес.* возрастает до значения 1,91, что на 35% больше коэффициента анизотропии контрольных сухих образцов. Качественно аналогично водонасыщение влияет и на коэффициент анизотропии по деформациям ползучести при растяжении. Разница заключается лишь в том, что этот коэффициент в первые 7 *сут.* обводнения остается существенно больше единицы, а затем к 28 *сут.* водного хранения существенно уменьшается и по своему значению приближается к единице.

9. Как при сухих, так и при водонасыщенных образцах степень анизотропии бетона по прочности, модулю деформации и деформациям ползучести при растяжении гораздо больше, чем при сжатии.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 27 IV 1979

Կ. Ս. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ, Ռ. Ա. ԿՈՏԻԿՅԱՆ, Կ. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

ՋՐԱՀԱԳԵՑՄԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲԵՏՈՆԻ ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ, ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ՄՈԴՈՒԼԻ ԵՎ ՍՈՂՔԻ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊԻԱՅԻ ՎՐԱ ՁԳՄԱՆ ԵՎ ՍԵՂՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Աշխատանքում բերված են բետոնի ամրության, դեֆորմացիաների մոդուլի և սողքի անիզոտրոպիայի աստիճանի փոփոխության վրա ջրահագեց-

ման ազդեցության փորձարարական հետազոտությունների արդյունքները ձգման և սեղմման դեպքերում: Հետազոտությունները ցույց են տվել, որ ջրի մեջ պահումը սկզբնական ժամանակաշրջանում բերում է ամրության և դեֆորմացիաների մոդուլի անկմանը, իսկ հետագայում՝ նրանց աճին: Երկարատև բեռնավորման ժամանակ ջրի մեջ նախնական պահումը բերում է բետոնի սողքի էական աճին:

Ջրահագեցման ազդեցությունը էապես կախված է բետոնավորման շերտերի նկատմամբ ձգող և սեղմող ուժերի ուղղությունից և այդ պատճառով էլ բետոնի անիզոտրոպիայի աստիճանը ըստ ամրության, դեֆորմացիաների մոդուլի և սողքի դեֆորմացիաների ջրահագեցման տևողությունից կախված փոփոխվում է:

THE INFLUENCE OF SATURATION ON STRENGTH ANISOTROPY, MODULUS OF DEFORMATION AND CREEP OF CONCRETE AT COMPRESSION AND TENSION

K. S. KARAPETIAN, R. A. KOTIKIAN, K. A. KARAPETIAN

Summary

The paper deals with the results of the experimental investigations on the influence of saturation on strength, modulus of deformation and creep of concrete at compression and tension and on change in the degree of its anisotropy. The invectigations show that the keeping of specimens in water results at first in the decrease of strength and modulus of deformation, and subsequently in its increase. The preliminary keeping of specimens in water results in a considerable increase of subsequent creep of concrete in the process of prolonged loading.

The influence of saturation substantially depends on the direction of the compressive and tensile loading with respect to the layers of concrete, and for that reason the degree of anisotropy in strength, modulus of deformation and creep strains, depending on the duration of keeping the specimens in water, changes.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карапетян К. С.* О вторичном твердении и изменения анизотропных свойств бетона при его водонасыщении. Докл. АН АрмССР, 1973, т. 17, № 3.
2. *Дерягин Б. В.* Расклинивающее действие жидких пленок и его практическое значение. «Природа», 1943, № 2.
3. *Ребиндер П. А.* Физико-механические исследования процессов деформаций твердых тел. Юбилейный сб. АН СССР, 1947.
4. *Карапетян К. С.* Об одном существенном факторе в прочностных и деформативных свойствах бетона. Докл. АН АрмССР, 1957, т. 24, № 4.
5. *Карапетян К. С.* Влияние анизотропии на ползучесть бетона. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 1957, т. 10, № 6.
6. *Карапетян К. С.* Влияние анизотропии на ползучесть бетона в зависимости от влажности среды. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 1965, т. 18, № 2.

7. *Карапетян К. С., Котикян Р. А., Карапетян К. А.* Исследование анизотропии прочности и модуля деформации весьма старого бетона. Третий национальный конгресс по теоретической и прикладной механике. Доклады, книга 1. Болгария, Варна, 1977.
8. *Карапетян К. С., Котикян Р. А.* Исследование отношений мер ползучести бетона при растяжении, сжатии и кручении. Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 5.
9. *Карапетян К. С.* Ползучесть бетона при высоких напряжениях. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат., ест. и техн. наук, 1953, т. 6, № 2.
10. *Карапетян К. С.* Влияние размеров образца на усадку и ползучесть бетона. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат., ест. и техн. наук, 1956, т. 9, № 1.
11. *Карапетян К. С.* Влияние влажности среды на ползучесть бетона. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 1965, т. 18, № 3.
12. *Карапетян К. С.* Влияние анизотропии на ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от величины напряжения. Докл. АН АрмССР, 1964, т. 39, № 1.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 2, 1980 Механика

В. Н. ЛОЖКИН

ДИНАМИКА ПЬЕЗОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

Упругое равновесие тонких анизотропных пластин, которые имеют плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости, хорошо изучено [1, 8, 16, 19].

Теория пластин с общим характером упругой анизотропии рассмотрена в работах [3, 20, 22]. В [20, 22] выведены статические уравнения в предположениях, при которых справедливы кинематические гипотезы Кирхгофа. В [3] получены уравнения статики и динамики пластин с общим характером неоднородности и упругой анизотропии в предположениях, менее жестких, чем в [20, 22], и указаны некоторые случаи, когда гипотезы Кирхгофа не имеют места.

Упругое равновесие тонких пьезокристаллических пластин, у которых имеется плоскость материальной симметрии, изучено в работах [5, 7, 11—13]. Общий случай материальной анизотропии рассмотрен в работе [14].

Общий подход к исследованию линейных задач магнитоупругости для проводящих пластин и оболочек изложен в монографии [2].

Некоторые задачи динамики пьезокристаллических пластин решены в работах [9, 10] и пьезокерамических пластин — в [17, 18, 21]. Обзор исследований по этой проблеме сделан в книге [15].

В предполагаемой работе асимптотический метод, предложенный в работе [6] и обобщенный на пьезоэлектрическую среду [13, 14], применен для изучения среднечастотных установившихся колебаний тонких пьезокристаллических пластин в трехмерной постановке. При этом под средними подразумеваются частоты установившихся колебаний тонкой пластины, которые с уменьшением ее толщины стремятся к некоторым постоянным величинам, отличным от нуля.

1. Рассмотрим в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 пьезокристаллическую пластину постоянной толщины $2h$, $|x_3| \leq h$. Срединная поверхность пластины занимает в плоскости $x_3 = 0$ конечную область S с границей Γ. Материал пластины обладает общей материальной анизотропией.

Уравнения установившихся колебаний рассматриваемой пластины запишем так [4, 21]:

$$\Omega^2 y_1 + M_1 y_4 + \varepsilon^{-1} \partial_3 y_3 = 0$$

$$\Omega^2 w_3 + M_2 y_3 + \varepsilon^{-1} \partial_3 \tau_{33} = 0, \qquad M_3 y_2 + \varepsilon^{-1} \partial_3 d_3 = 0 \tag{1.1}$$

Термодинамические соотношения, связывающие линейной зависимостью упругие и электрические величины, возьмем в виде [4]

$$
\begin{aligned}
\lambda^{-1}\partial_3 w_3 &= A_{11}y_2 + A_{12}y_3 + m_{33}d_3 + l_{33}\tau_{33} \\
\lambda^{-1}\partial_3 y_1 + M_2^* w_3 &= A_{21}y_2 + A_{22}y_3 + A_{23}^* d_3 + A_{12}^* \tau_{33} \\
M_1^* y_1 + M_3^* \varphi &= A_{31}y_2 + A_{21}^* y_3 + A_{32}^* d_3 + A_{11}^* \tau_{33} \\
\lambda^{-1}\partial_3 \varphi &= A_{32}y_2 + A_{23}y_3 - n_{33}d_3 + m_{33}\tau_{33}
\end{aligned}
\qquad (1.2)
$$

Здесь звездочкой обозначено транспонирование матрицы.

$$A_{11} = \| l_{13}\ l_{23}\ l_{36}\ m_{13}\ m_{23} \|, \quad A_{12} = \| l_{35}\ l_{34} \|$$

$$A_{23} = \| m_{35}\ m_{34} \|, \quad A_{32} = \| m_{13}\ m_{23}\ m_{36}\ -n_{13}\ -n_{23} \|$$

$$M_1 = \| \partial_1\ \partial_2 \|, \quad M_3 = \| 0\ 0\ 0\ \partial_1\ \partial_2 \|$$

$$y_1 = \begin{Vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Vmatrix}, \quad y_3 = \begin{Vmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Vmatrix}, \qquad M_2 = \begin{Vmatrix} \partial_1 & 0 & \partial_2 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & \partial_1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{Vmatrix} l_{55} & l_{45} \\ l_{45} & l_{44} \end{Vmatrix}, \qquad A_{21} = \begin{Vmatrix} l_{15} & l_{25} & l_{56} & m_{15} & m_{25} \\ l_{14} & l_{24} & l_{46} & m_{14} & m_{24} \end{Vmatrix} \qquad (1.3)$$

$$y_2 = \begin{Vmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{12} \\ d_1 \\ d_2 \end{Vmatrix}, \qquad A_{31} = \begin{Vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{16} & m_{11} & m_{21} \\ l_{12} & l_{22} & l_{26} & m_{12} & m_{22} \\ l_{16} & l_{26} & l_{66} & m_{16} & m_{26} \\ m_{11} & m_{12} & m_{16} & -n_{11} & -n_{12} \\ m_{21} & m_{22} & m_{26} & -n_{12} & -n_{22} \end{Vmatrix}$$

Рассмотрим два варианта граничных условий на плоских гранях пластины, физическая сущность которых изложена в работе [21].

$$y_3 = Q_{\pm}, \quad d_3 = \sigma_{\pm}, \quad \tau_{33} = q_{\pm}, \quad \xi_3 = \pm 1 \qquad (1.4)$$

$$\varphi = \varphi_{\pm}, \quad y_3 = Q_{\pm}, \quad \tau_{33} = q_{\pm}, \quad \xi_3 = \pm 1 \qquad (1.5)$$

Граничные условия на боковой поверхности пластины пока конкретизировать не будем.

В равенствах (1.1)—(1.5) введены следующие безразмерные величины:

$$x_1 = a\xi_1, \quad x_2 = a\xi_2, \quad x_3 = h\xi_3, \quad h = a\lambda, \quad \partial_j = \partial/\partial\xi_j$$

$$u_j = a w_j, \quad v = v_0\varphi, \quad t_0\Omega^2 = a^2\rho\omega^2$$

$$t_{jq} = t_0\tau_{jq}, \quad a t_0 d_j = v_0 D_j$$

$$l_{jq} = t_0 s^D_{jq}, \quad v_0 m_{jq} = a t_0 g_{jq}, \quad v_0^2 n_{jq} = a^2 t_0 \beta^t_{jq}$$

где $u_j e^{i\omega t}$ — компоненты вектора смещения, $t_{jq}e^{i\omega t}$ — компоненты тензора упругих напряжений, $v e^{i\omega t}$ — электрический потенциал, $D_j e^{i\omega t}$ — компоненты вектора электрического смещения, s^D_{jq}, g_{jq}, β^t_{jq} — материальные постоянные [4]; ρ — удельная плотность материала пластины;

a — линейный параметр пластины в области S; ω — частота установившихся колебаний; l_0 и ψ_0 — постоянные, имеющие размерности упругого напряжения и электрического потенциала соответственно.

2. Материал пластины обладает общей анизотропией. Поэтому при малых значениях λ представим величину Ω^2 так:

$$\Omega^2 = \sum_{n=0}^{N} \lambda^n \Omega^2_{n}, \qquad \Omega_0^2 \neq 0 \tag{2.1}$$

Не ограничивая общности, можно предположить, что для функций, входящих в условия (1.4), имеют место равенства

$$(Q_{\pm},\ \sigma_{\pm},\ q_{\pm}) = \sum_{n=0}^{N} \lambda^{n+\nu}(Q^{(n)}_{\pm},\ \sigma^{(n)}_{\pm},\ q^{(n)}_{\pm}) \tag{2.2}$$

Чтобы построить непротиворечивый основной итерационный процесс [6, 13, 14] для задачи (1.1), (1.2), (1.4), необходимо предположить, что асимптотические разложения электроупругих характеристик должны начинаться со следующих степеней λ:

$$y_1,\ \varphi,\ y_2 - \lambda^{\nu-2}; \qquad w_3,\ y_3,\ d_3 - \lambda^{\nu-1}; \quad \sigma_{33} - \lambda^{\nu} \tag{2.3}$$

Для первых двух приближений ($m = 0, 1$) этого процесса найдем

$$y_1^{(m)} = y_1^{(m,0)}(\xi) + \zeta A_{21} y_2^{(m-1,0)}, \quad \xi = (\xi_1,\ \xi_2)$$

$$\varphi^{(m)} = \varphi^{(m,0)}(\xi) + \zeta A_{32} y_2^{(m-1,0)}$$

$$y_2^{(m)} = y_2^{(m,0)} + \zeta y_2^{(m-1,1)}$$

$$y_2^{(m,0)} = A_{31}^{-1}(M_1^{*} y_1^{(m,0)} + M_3^{*} \varphi^{(m,0)})$$

$$y_2^{(m,1)} = A_{31}^{-1}(M_1^{*} A_{21} + M_3^{*} A_{32})\, y_2^{(m,0)}$$

$$w_3^{(m)} = w_3^{(m,0)} + \zeta A_{11} y_2^{(m,0)} + \frac{1}{2}(1-\zeta^2) A_{11} y_2^{(m-1,1)} \tag{2.4}$$

$$w_3^{(m,0)} = -\frac{1}{2}\Omega_0^{-2}[q_+^{(m)} - q_-^{(m)} + M_2(Q_+^{(m-1)} + Q_-^{(m-1)}) + 2\Omega_1^2 w_3^{(m-1,0)}] -$$

$$-\frac{1}{3}[(\Omega_0^{-2} M_2 M_1 - A_{11}) y_2^{(m-1,1)} + M_2 A_{21} y_2^{(m-1,0)}]$$

$$y_3^{(m)} = \frac{1}{2}(Q_+^{(m-1)} + Q_-^{(m-1)}) + \frac{1}{2}\zeta(Q_+^{(m-1)} - Q_-^{(m-1)}) +$$

$$+ \frac{1}{2}(1-\zeta^2)\, M_1 y_2^{(m-1,1)} + \Omega_0^2 A_{21} y_2^{(m-1,0)})$$

$$d_3^{(m)} = \frac{1}{2}(\sigma_+^{(m-1)} + \sigma_-^{(m-1)}) + \frac{1}{2}\zeta(\sigma_+^{(m-1)} - \sigma_-^{(m-1)}) + \frac{1}{2}(1-\zeta^2) M_3 y_2^{(m-1,1)}$$

$$\sigma_{33}^{(m)} = \frac{1}{2}(q_+^{(m)} + q_-^{(m)}) + \frac{1}{2}\xi_3(q_+^{(m)} - q_-^{(m)}) +$$

$$+ \frac{1}{2}(1 - \xi_3^2)\left[\frac{1}{2}M_2(Q_+^{(m-1)} + Q_-^{(m-1)}) + A_{11}(\Omega_0^2 y_2^{(m,0)} + \Omega_1^2 y_2^{(m-1,0)})\right] -$$

$$- \frac{1}{6}(\xi_3 - \xi_3^3)\left[(M_2 M_1 - \Omega_0^2 A_{11})\, y_2^{(m-1,1)} + \Omega_0^2 M_2 A_{23} y_2^{(m-1,0)}\right]$$

Система дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $y_1^{(m,0)}$ и $\varphi^{(m,0)}$ имеет вид

$$M_1 A_{31}^{-1}(M_1^* y_1^{(m,0)} + M_3^* \varphi^{(m,0)}) + \Omega_0^2 y_1^{(m,0)} =$$

$$= -\frac{1}{2}(Q_+^{(m-1)} - Q_-^{(m-1)}) - \Omega_1^2 y_1^{(m-1,0)} \tag{2.5}$$

$$M_3 A_{31}^{-1}(M_1^* y_1^{(m,0)} + M_3^* \varphi^{(m,0)}) = -\frac{1}{2}(\varphi_+^{(m-1)} - \varphi_-^{(m-1)})$$

Предположим, что для функций, входящих в условия (1.5), при малых значениях λ справедливы представления

$$(\varphi_\pm,\ Q_\pm,\ q_\pm) = \sum_{n=0}^{N} \lambda^{n+\varkappa}(\varphi_\pm^{(n)},\ Q_\pm^{(n)},\ q_\pm^{(n)}) \tag{2.6}$$

Тогда асимптотические разложения электроупругих характеристик должны начинаться со следующих степеней λ:

$$y_1,\ y_2,\ d_3 - \lambda^{\varkappa-2};\quad w_3,\ \varphi,\ y_3 - \lambda^{\varkappa-1};\quad \sigma_{33} - \lambda^{\varkappa} \tag{2.7}$$

Для первых двух приближений основного итерационного процесса задачи (1.1), (1.2), (1.5) получим

$$y_1^{(m)} = y_1^{(m,0)}(\xi) + \xi_3(A_{21} y_2^{(m-1,0)} + A_{23}^* d_3^{(m-1,0)})$$

$$d_3^{(m)} = d_3^{(m,0)} - \xi_3 M_2 y_2^{(m-1,0)}$$

$$d_3^{(m,0)} = (n_{33} + A_{32} A_{31}^{-1} A_{32}^*)^{-1}\left[A_{32} A_{31}^{-1} M_1^* y_1^{(m,0)} - \frac{1}{2}(\varphi_+^{(m-1)} - \varphi_-^{(m-1)})\right]$$

$$y_2^{(m)} = y_2^{(m,0)} + \xi_3 y_2^{(m-1,1)}$$

$$y_2^{(m,0)} = A_{11}^{-1}(M_1^* y_3^{(m,0)} - A_{12}^* d_3^{(m,0)})$$

$$y_2^{(m,1)} = A_{31}^{-1}\left[(M_1^* A_{21} + A_{32}^* M_3)\, y_2^{(m,0)} + M_1^* A_{23}^* d_3^{(m,0)}\right]$$

$$w_3^{(m)} = w_3^{(m,0)} + \xi_3(A_{11} y_2^{(m,0)} + m_{33} d_3^{(m,0)}) -$$

$$- \frac{1}{2}(1 - \xi_3^2)(A_{11} y_2^{(m-1,0)} - m_{33} M_3 y_2^{(m-1,0)}) \tag{2.8}$$

$$w_2^{(m,0)} = -\frac{1}{2}\Omega_0^{-2}[q_+^{(m)} - q_-^{(m)} + M_2(Q_+^{(m-1)} + Q_-^{(m-1)}) + 2\Omega_1^2 w_3^{(m-1,0)}] -$$

$$-\frac{1}{3}[(\Omega_0^{-2}M_2M_1 - A_{11})\, y_2^{(m-1,1)} +$$

$$+ (m_{33}M_2 + M_2A_{21})\, y_2^{(m-1,0)} + M_2^{*}A_{23}^{*}\, d_3^{(m-1,0)}]$$

$$\varphi^{(m)} = \frac{1}{2}(\varphi_+^{(m-1)} + \varphi_-^{(m-1)}) + \frac{1}{2}\xi_3(\varphi_+^{(m-1)} - \varphi_-^{(m-1)}) -$$

$$-\frac{1}{2}(1 - \xi_3^2)(A_{21}y_2^{(m-1,1)} + m_{33}M_2y_2^{(m-1,0)})$$

$$y_3^{(m)} = \frac{1}{2}(Q_+^{(m-1)} + Q_-^{(m-1)}) + \frac{1}{2}\xi_3(Q_+^{(m-1)} - Q_-^{(m-1)}) +$$

$$+\frac{1}{2}(1 - \xi_3^2)[M_1y_2^{(m-1,1)} + \Omega_0^2(A_{11}y_2^{(m-1,0)} + A_{23}^{*}d_3^{(m-1,0)})]$$

$$\sigma_{33}^{(m)} = \frac{1}{2}(q_+^{(m)} + q_-^{(m)}) + \frac{1}{2}\xi_3(q_+^{(m)} - q_-^{(m)}) +$$

$$+\frac{1}{2}(1 - \xi_3^2)\Big[\frac{1}{2}M_2(Q_+^{(m-1)} + Q_-^{(m-1)}) +$$

$$+\Omega_0^2(A_{11}y_2^{(m,0)} + m_{33}d_3^{(m,0)}) + \Omega_1^2(A_{11}y_2^{(m-1,1)} + m_{33}d_3^{(m-1,0)})\Big] -$$

$$-\frac{1}{6}(\xi_3 - \xi_3^3)\Omega_0^2[(\Omega_0^{-2}M_2M_1 - A_{11})\, y_2^{(m-1,1)} +$$

$$+ (m_{33}M_2 + M_2A_{21})\, y_2^{(m-1,0)} + M_2A_{23}^{*}d_3^{(m-1,0)}]$$

Разрешающее уравнение основного процесса будет таким:

$$[M_1A_{31}^{-1}M_1^{*} - (n_{33} + A_{32}A_{31}^{-1}A_{32}^{*})^{-1}M_1A_{31}^{-1}A_{32}^{*}A_{32}A_{31}^{-1}M_1^{*} + \Omega_0^2]\, y_1^{(m,0)} =$$

$$= -\frac{1}{2}[Q_+^{(m-1)} - Q_-^{(m-1)} + 2\Omega_1^2y_1^{(m-1,0)} + \qquad (2.9)$$

$$+ (n_{33} + A_{32}A_{31}^{-1}A_{32}^{*})^{-1}M_1A_{31}^{-1}A_{32}^{*}(\varphi_+^{(m-1)} - \varphi_-^{(m-1)})]$$

В соотношениях (2.4), (2.5), (2.8), (2.9) величины с индексом m равны нулю при $m < 0$.

Из разрешающих уравнений основного итерационного процесса (2.5) и (2.9) видно, что среднечастотная динамика определяется установившимися колебаниями, параллельными плоскости S пластины.

Вспомогательные итерационные процессы [6] для рассматриваемых граничных задач при предположении (2.1) совпадают по виду с аналогичными процессами статики исследуемых пластин и поэтому характеризуют их электроупругое состояние типа пограничного слоя.

3. Рассмотрим свободные колебания тонкой пластины $(a \times b \times 2h)$, являющейся Y—срезом кварца [4]. Предположим, что на плоских гранях пластины выполняются однородные условия (1.4)

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = d_3 = \sigma_{33} = 0, \quad \zeta = \pm 1 \tag{3.1}$$

а на боковой поверхности задан один из вариантов условий свободного опирания [6] и такие электрические условия:

$$\begin{aligned} & w_2 = w_3 = \sigma_{11} = d_1 = 0, \quad \xi_1 = 0,\ 1 \\ & w_1 = w_3 = \sigma_{22} = \varphi = 0, \quad \xi_2 = 0,\ \epsilon^{-1}, \quad \epsilon = \frac{a}{b} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Исходя из соотношений (2.4) и (2.5) для начального приближения будем иметь

$$\begin{aligned} & w_1^{(0)} = \gamma_1 \cos k_1\xi_1 \sin k_2\xi_2, \quad w_2^{(0)} = \gamma_2 \sin k_1\xi_1 \cos k_2\xi_2 \\ & \varphi^{(0)} = \gamma_3 \cos k_1\xi_1 \sin k_2\xi_2, \quad k_1 = m\pi, \quad k_2 = n\pi\epsilon \\ & w_3^{(0)} = -\zeta[(a_{11}l_{12} + a_{12}l_{22} + b_{11}m_{12})k_1\gamma_1 + (a_{12}l_{12} + a_{22}l_{22} + b_{12}m_{12})k_2\gamma_2 + \\ & \quad + (b_{11}l_{12} + b_{12}l_{22} - c_{11}m_{12})k_1\gamma_3] \sin k_1\xi_1 \sin k_2\xi_2 \\ & \sigma_{11}^{(0)} = -(a_{11}k_1\gamma_1 + a_{12}k_2\gamma_2 + b_{11}k_1\gamma_3) \sin k_1\xi_1 \sin k_2\xi_2 \\ & \sigma_{22}^{(0)} = -(a_{12}k_1\gamma_1 + a_{22}k_2\gamma_2 + b_{12}k_1\gamma_3) \sin k_1\xi_1 \sin k_2\xi_2 \\ & \sigma_{12}^{(0)} = a_{66}(k_2\gamma_1 + k_1\gamma_2) \cos k_1\xi_1 \cos k_2\xi_2 \\ & d_1^{(0)} = -(b_{11}k_1\gamma_1 + b_{12}k_2\gamma_2 - c_{11}k_1\gamma_3) \sin k_1\xi_1 \sin k_2\xi_2 \\ & d_2^{(0)} = c_{22}k_2\gamma_3 \cos k_1\xi_1 \cos k_2\xi_2, \quad \sigma_{13}^{(0)} = \sigma_{23}^{(0)} = d_3^{(0)} = 0 \\ & \sigma_{33}^{(0)} = -\frac{1}{2}(1 - \zeta^2)\Omega_0^2[(a_{11}l_{12} + a_{12}l_{22} + b_{11}m_{12})k_1\gamma_1 + (a_{12}l_{12} + a_{22}l_{22} + \\ & \quad + b_{12}m_{12})k_2\gamma_2 + (b_{11}l_{12} + b_{12}l_{22} - c_{11}m_{12})k_1\gamma_3] \sin k_1\xi_1 \sin k_2\xi_2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь

$$\begin{aligned} & \gamma_1 = \Omega_*^2 - a_{66}k_1^2 - (a_{22} + b_{12}^2\Delta_1^{-1}k_1^2)k_2^2 \\ & \gamma_2 = (a_{12} + a_{66} + b_{11}b_{12}\Delta_1^{-1}k_1^2)k_1k_2 \\ & \gamma_3 = (b_{11}k_1^2\gamma_1 + b_{12}k_2^2\gamma_2)\Delta_1^{-1}, \quad \Delta_1 = c_{11}k_1^2 + c_{22}k_2^2 \\ & a_{11} = l_{22}n_{11}\Delta_2^{-1}, \quad a_{22} = (l_{11}n_{11} + m_{11}^2)\Delta_2^{-1} \\ & a_{12} = -l_{12}n_{11}\Delta_2^{-1}, \quad a_{66} = l_{66}^{-1} \\ & b_{11} = l_{22}m_{11}\Delta_2^{-1}, \quad b_{12} = -l_{12}m_{11}\Delta_2^{-1} \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$c_{11} = (l_{11} l_{22} - l_{12}^2)\, \Delta_2^{-1}, \qquad c_{22} = n_{22}^{-1}$$

$$\Delta_2 = (l_{11} l_{22} - l_{12}^2)\, n_{11} + l_{22} m_{11}^2, \quad t_0 = 10^{12}\ н/м^2, \quad e_1 = 10^{11}\ b$$

Дисперсионное уравнение для исследуемой пластины имеет вид

$$\Omega_0^4 - [a_{11} k_1^2 + a_{22} k_2^2 + a_{66} (k_1^2 + k_2^2) + (b_{11}^2 k_1^2 + b_{12} k_2^2)\, \Delta_1^{-1} k_1^2]\, \Omega_0^2 +$$
$$+ [(a_{11} + b_{11}^2 \Delta_1^{-1} k_1^2) k_1^2 + a_{66} k_2^2]\,[a_{66} k_1^2 + (a_{22} + b_{12}^2 \Delta_1^{-1} k_1^2)\, k_2^2] -$$
$$- (a_{12} + a_{66} + b_{11} b_{12} \Delta_1^{-1} k_1^2)^2\, k_1^2 k_2^2 = 0 \qquad (3.5)$$

С учетом и без учета связанности упругого и электрического полей оно запишется соответственно так:

$$\Omega_0^4 - (0.1266\, m^2 + 0.1520\, n^2 \varepsilon^2)\, \pi^2 \Omega_0^2 +$$
$$+ [(0.0767\, m^2 + 0.0499\, n^2 \varepsilon^2)(0.0499\, m^2 + 0.1021\, n^2 \varepsilon^2) -$$
$$- 0.0036\, m^2 n^2 \varepsilon^2]\, \pi^4 = 0 \qquad (3.6)$$

$$\Omega_0^4 - (0.1299\, m^2 + 0.1553\, n^2 \varepsilon^2)\, \pi^2 \Omega_0^2 +$$
$$+ [(0.0800\, m^2 + 0.0499\, n^2 \varepsilon^2)(0.0499\, m^2 + 0.1054\, n^2 \varepsilon^2) -$$
$$- 0.0036\, m^2 n^2 \varepsilon^2]\, \pi^4 = 0$$

Из соотношений (3.6) следует, что наличие связанности вышеназванных полей ведет к уменьшению (до 2% для различных значений ε) величин собственных частот свободных колебаний рассматриваемой пластины.

Автор считает приятным долгом выразить благодарность члену-корреспонденту АН УССР А. С. Космодамианскому за неоднократные полезные обсуждения результатов исследований, изложенных в предлагаемой работе.

Институт математики
и механики АН УССР

Поступила 3 V 1979

Վ. Ն. ԼՈԺԿԻՆ

ՊՅԵԶՈԿԵՐԱՄԻԿԱԿԱՆ ՍԱԼԵՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հաստատուն հաստությամբ բարակ պյեզոկերամիկական սալերի կայունացված տատանումների համար կատարվել է ասիմպտոտական վերլուծություն։

Ուսումնասիրվել է նյութական անիզոտրոպիայի ընդհանուր դեպքը։

Հաստատվել է, որ միջին հաճախականության դինամիկան որոշվում է սալի միջին հարթության զուգահեռ կայունացված տատանումներով (սիմետրիկ տատանումներով)։

Որպես օրինակ ուսումնասիրվել են բարակ ուղղանկյունաձև սալերի սիմետրիկ ազատ տատանումները։

DYNAMICS OF PIEZOCRYSTAL PLATES

V. N. LOZKIN

S u m m a r y

An asymptotic analysis of stabilized oscillations of a thin piezocrystal plate for moderate frequencies is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М., «Наука», 1967.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М., «Наука», 1977.
3. *Бердичевский В. Л.* Динамические уравнения анизотропных пластин. Докл. АН СССР, 1975, т. 224, № 1.
4. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях. Физическая акустика, т. 1, А. М., «Мир», 1966.
5. *Вековищева И. А.* Плоская задача теории электроупругости для пьезоэлектрической пластинки. Прикл. механ., 1975, т. 11, в. 2.
6. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, в. 4.
7. *Жиров В. Е.* Электроупругое равновесие пьезокерамической плиты. ПММ, 1977, т. 41, в. 6.
8. *Космодамианский А. С.* Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями и полостями. Киев—Донецк, «Вища школа», 1976.
9. *Космодамианский А. С., Ложкин В. Н.* Динамическая задача для пьезоэлектрического слоя. Докл. АН УССР, серия «А», 1975, № 4.
10. *Космодамианский А. С., Ложкин В. Н.* Квазистатическая задача термоупругости для анизотропного слоя с учетом пьезо- и пироэлектрических эффектов. Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. 28, № 3.
11. *Космодамианский А. С., Ложкин В. Н.* Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин. Прикл. механ., 1975, т. 11, в. 5.
12. *Космодамианский А. С., Ложкин В. Н.* Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин. Прикл. механ., 1977, т. 13, в. 10.
13. *Космодамианский А. С., Ложкин В. Н.* Асимптотический анализ электроупругого равновесия тонкого пьезоэлектрического слоя. Прикл. механ., 1978, т. 14, в. 5.
14. *Космодамианский А. С., Ложкин В. Н.* Электроупругое равновесие тонкого анизотропного слоя с учетом пьезоэлектрических эффектов. ПММ, 1978, т. 42, в. 4.
15. *Кудрявцев Б. А.* Механика пьезоэлектрических материалов. Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела, т. 11, М., ВИНИТИ, 1978.
16. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М.—Л., Гостехтеориздат, 1957.
17. *Мадорский В. В., Устинов Ю. А.* Симметрические колебания пьезоэлектрических пластин. Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. 29, № 45.
18. *Мадорский В. В., Устинов Ю. А.* Построение системы однородных решений и анализ дисперсионного уравнения антисимметричных колебаний пьезоэлектрической плиты. Журнал прикладной механики и теоретической физики, 1976, № 6.
19. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев, «Наукова думка», 1968.
20. *Седов Л. И.* Механика сплошных сред, т. 2, М., «Наука», 1974.
21. *Улитко А. Ф.* К теории колебаний пьезокерамических тел. Тепловые напряжения в элементах конструкций, Киев, «Наукова думка», 1975, в. 15.
22. *Шойхет Б. А.* Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры. Прикладная математика и механика, 1973, т. 37, в. 5.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIII, № 2, 1980 Механика

В. А. ШААДЫРВАН

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ПОСТРОЕНИЯ УТОЧНЕННЫХ ТЕОРИЙ ИЗГИБА ТРАНСТРОПНЫХ ПЛИТ

Попытка уточнения теории пластин и оболочек была начата работами Н. А. Кильчевского в 40-х годах (см., например, [1]). Работы Е. Рейсснера [2] стимулировали интерес к этой проблеме. Но особенно большое внимание этой проблеме уделяется после ряда работ А. Л. Гольденвейзера [3, 4] и И. И. Воровича [5], в которых содержится анализ области применимости классической теории пластин и оболочек и характера присущей ей погрешности. Кроме того, в этих работах предлагаются асимптотические методы исследования трехмерных задач упругости.

Наличие обстоятельных обзоров Н. А. Кильчевского [6], И. И. Воровича [5, 7], Л. Айнолы-У. Нигула [8], А. К. Галиньша [9] позволяет не касаться анализа разного рода допущений, обычно используемых при построении уточненных теорий. Отметим только общую идею используемых при этом методов, заключающуюся в предварительном задании некоторых из характеристик напряженно-деформированного состояния конечными рядами

$$u_i = \sum_{k=0}^{N} u_{ik}(x)\,\varphi_{ik}(x_3), \qquad \sigma_{ij} = \sum_{k=0}^{M} \sigma_{ijk}(x)\,\psi_{ik}(x_3)$$

$$x = \{x_1, x_2\} \in S, \quad x_3 \in [-h, h]$$

с последующим определением остальных из трехмерных уравнений теории упругости. Функции φ_{ik}, ψ_{ik}, как правило, задаются степенями x_3 или полиномами Лежандра, а для определения неизвестных функций u_{ik}, σ_{ijk} выводятся дифференциальные уравнения с помощью вариационных принципов или с использованием трехмерных уравнений теории упругости.

В данной работе предлагается один из способов получения уточненных теорий изгиба транстропных плит, базирующийся на использовании класса однородных решений.

1. Пусть транстропная плита, в каждой точке которой плоскость изотропии параллельна срединной плоскости S, занимает объем $V = S \times [-h, h]$ (в общем случае S — многосвязная область, ограниченная контуром $\partial S = \bigcup_{j=0}^{N} \partial S_j$). Имея в виду в последующем изучение концентрации напряжений, остановимся на случае задания изгибных напряжений на боковой поверхности плиты.

Компоненты вектора упругих смещений u_i произвольной точки плиты будем искать в виде

$$u_1(\xi, \zeta) = \sum_{k=0}^{N} \zeta^{2k+1} \partial_1 F_{2k+1}(\xi) + p(\zeta)\, \partial_2 \Phi(\xi) + n(\zeta)\, \partial_1 \Psi(\xi)$$

$$u_2(\xi, \zeta) = \sum_{k=0}^{N} \zeta^{2k+1} \partial_2 F_{2k+1}(\xi) - p(\zeta)\, \partial_1 \Phi(\xi) + n(\zeta)\, \partial_2 \Psi(\xi) \qquad (1.1)$$

$$u_3(\xi, \zeta) = \sum_{k=0}^{N} \zeta^{2k} F_{2k}(\xi) + q(\zeta)\, \Psi(\xi)$$

где F_i, Φ, Ψ и n, p, q — некоторые произвольные функции аргументов $\xi = \{\xi_1, \xi_2\}$ и ζ соответственно, $\xi_\alpha = x_\alpha / R$, $(\alpha = 1, 2)$, $\zeta = x_3/R$, $\partial_\alpha = \partial/\partial\xi_\alpha$, $\lambda = h/R$, R — радиус наименьшей из окружностей ∂s_j.

Требуя, чтобы выражения (1.1) удовлетворяли системе равновесия и условиям незагруженности торцов плиты, получим [10]

$$F_0 = -\frac{1}{\lambda} F + 2\mu_3 \lambda s_0^2 D^2 F, \quad F_2 = -\lambda \nu_2 \mu_3 D^2 F, \quad F_3 = -\lambda^2 \mu_4 D^2 F \quad (1.2)$$

$$F_k(\xi) = 0 \ (k > 4), \quad F_1 = F, \quad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad D^2 D^2 F = 0$$

$$p(\zeta) = \frac{2}{\gamma s_0} \sin \gamma s_0 \zeta, \quad D^2\Phi - (\gamma/\lambda)^2 \Phi = 0 \qquad (1.3)$$

Вид функций $n(\zeta)$, $q(\zeta)$ зависит от физико-механических характеристик материала, именно

$$\left(b_1 = \frac{s_0^2 - \nu_2}{1 - \nu}, \quad b_2 = \frac{\nu_2}{\nu_z} \frac{1 - \nu_2 \nu_z}{1 - \nu^2} \right)$$

1. Если $b_1 > 0$ и $b_1^2 \neq b_2$, то $\left(s_{1,2} = \sqrt{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - b_2}}\right)$

$$n(\zeta) = \sum_{j=1}^{2} H_j \sin \gamma s_j \zeta, \qquad q(\zeta) = \sum_{j=1}^{2} Q_j \cos \gamma s_j \zeta \qquad (1.4')$$

2. Если $b_1 > 0$ и $b_1^2 = b_2$, то $(s_1 = \sqrt{b_1})$

$$n(\zeta) = H_1 \sin \gamma s_1 \zeta + H_2 \zeta \cos \gamma s_1 \zeta, \quad q(\zeta) = Q_1 \cos \gamma s_1 \zeta + Q_2 \zeta \sin \gamma s_1 \zeta \quad (1.4'')$$

3. Если $b_1 < 0$ и $b_1^2 \neq b_2$, то $\left(s_{1,2} = \sqrt{|b_1| \pm \sqrt{b_2 - b_1^2}}\right)$

$$n(\zeta) = \sum_{j=1}^{2} H_j \operatorname{sh} \gamma s_j \zeta, \qquad q(\zeta) = \sum_{j=1}^{2} Q_j \operatorname{ch} \gamma s_j \zeta \qquad (1.4''')$$

4. Если $b_1 < 0$ и $b_1^2 = b_2$, то $(s_1 = \sqrt{|b_1|})$

$$n(\zeta) = H_1 \operatorname{sh} \gamma s_1 \zeta + H_2 \zeta \operatorname{ch} \gamma s_1 \zeta, \quad q(\zeta) = Q_1 \operatorname{ch} \gamma s_1 \zeta + Q_2 \zeta \operatorname{sh} \gamma s_1 \zeta \quad (1.4'''')$$

При этом функция Ψ удовлетворяет уравнению

$$D^2\Psi - (\gamma/\lambda)^2\Psi = 0 \tag{1.5}$$

Определяющие класс однородных решений параметры δ и γ являются решениями трансцендентных уравнений. В случае $b_1 > 0$ эти уравнения можно записать в таком виде:

$$\cos\delta s_0 = 0, \qquad \delta = \frac{\pi}{2s_0}(2k-1), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1.6}$$

$$\beta\sin 2\alpha\gamma - \alpha\,\mathrm{sh}\,2\beta\gamma = 0 \quad (b_1^2 < b_2) \tag{1.7a}$$

$$2s_1\gamma - \sin 2s_1\gamma = 0 \quad (b_1^2 = b_2) \tag{1.7b}$$

$$\omega\sin\Omega\gamma - \sin\omega\gamma\Omega = 0 \quad (b_1^2 > b_2) \tag{1.7c}$$

$$(\alpha \pm i\beta = s_{1,2}, \quad \omega = (s_1 - s_2)/2, \quad \Omega = s_1 + s_2)$$

Что касается случая $b_1 < 0$, то для него уравнения получаются из (1.7) формальной заменой s_j на is_j.

Тогда, на основании (1.1) с учетом (1.2)—(1.5) и в силу обобщенного закона Гука [11], получим выражения для напряжений

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\zeta D^2F + e(\zeta)\Psi, \quad \sigma_{zz} = t(\zeta)\Psi$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} =$$

$$= -4\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\zeta F - \zeta^3\frac{\lambda^2(2s_0^2 - \nu_0)}{6(1-\nu)}D^2F + ip(\zeta)\Phi + n(\zeta)\Psi\right] \tag{1.8}$$

$$\sigma_{xz} - i\sigma_{yz} = 2\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\lambda(1-\zeta^2)}{1-\nu}D^2F - ig(\zeta)\Phi + r(\zeta)\Psi\right]$$

Здесь

$$z = \xi + i\eta, \quad g(\zeta) = -(2\lambda s_0^2)^{-1}p'(\zeta) = -(\lambda s_0^2)^{-1}\cos\delta s_0\zeta$$

$$e(\zeta) = 2s(\zeta) + (\gamma/\lambda)^2 n(\zeta), \quad s(\zeta) = A_{12}(\gamma/\lambda)^2 n(\zeta) + \frac{1}{\lambda}A_{13}q'(\zeta)$$

$$r(\zeta) = \frac{1}{2s_0^2}\left[q(\zeta) + \frac{1}{\lambda}n(\zeta)\right]$$

$$t(\zeta) = A_{13}(\gamma/\lambda)^2 n(\zeta) + \frac{1}{\lambda}A_{33}q'(\zeta)$$

Корни уравнения (1.6) вещественные и группируются по два с одинаковым модулем. Уравнения (1.7) имеют нулевой корень и счетное множество комплексных, которые группируются по четыре с равным модулем. Кроме того, уравнение (1.7c) имеет счетное множество вещественных корней, которые также расположены симметрично относительно нуля.

Для формулировки уточненных теорий изгиба транстропных плит будем пользоваться разложением компонента вектора смещений в ряды по однородным решениям, ограничиваясь тем или иным количеством указанных корней. При этом получается следующая последовательность уточненных теорий.

2. Ограничиваясь первыми корнями уравнений (1.6) и (1.7) $\left(\gamma = 0\right.$ и $\left.\delta = \frac{\pi}{2\varkappa_0}\right)$, получим разрешающую систему первого приближения

$$D^2D^2F = 0, \qquad D^2\Phi - \frac{\pi^2}{4h^2\varkappa_0^2}\Phi = 0 \tag{2.1}$$

Следовательно, в указанном приближении получаем теорию С. А. Амбарцумяна [12], если вместо числа π подставить $\sqrt{10}$. Последнее обстоятельство обусловлено заданием закона распределения напряжений по толщине плиты в цитируемой работе.

Общий порядок разрешающей системы равен D^6, поэтому необходимо ставить по три граничных условия на каждом краю плиты.

Обозначим через $M_{\alpha\beta}^{(0)}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) изгибающие и крутящие моменты и $N_\alpha^{(0)}$ — перерезывающие силы, а через $M_{\alpha\beta}^{(n)}$, $N_\alpha^{(n)}$ $(n > 1)$ — их сверхстатические характеристики (полимоменты и полисилы). Указанные характеристики определим следующим образом [13]:

$$M_{\alpha\beta}^{(n)} = \int_{-1}^{1} \sigma_{\alpha\beta}\zeta^{2n+1}d\zeta, \qquad N_\alpha^{(n)} = \int_{-1}^{1} \tau_{\alpha 3}\zeta^{2n}d\zeta \tag{2.2}$$

Силовые краевые условия на границе плиты ∂S, выраженные с помощью сверхстатических характеристик, имеют следующий вид [14]:

$$M_{11}^{(n)}n_1 + M_{12}^{(n)}n_2 = \int_{-1}^{1} q_{n1}\zeta^{2n+1}d\zeta$$

$$N_1^{(n)}n_1 + N_2^{(n)}n_2 = \int_{-1}^{1} q_{n3}\zeta^{2n}d\zeta \tag{2.3}$$

$$M_{21}^{(n)}n_1 + M_{22}^{(n)}n_2 = -\int_{-1}^{1} q_{n2}\zeta^{2n+1}d\zeta \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

где (q_{n1}, q_{n2}, q_{n3}) — проекция внешней нагрузки, приложенной к поверхности Ω.

В рамках первого («амбарцумяновского») приближения краевым условиям соответствуют только статические характеристики распределения напряжений $(n = 0)$.

На основе соотношений (2.2) моменты и перерезывающие силы, статически эквивалентные напряжениям (1.8), равны

$$M_{\alpha\alpha}^{(0)} + M_{\beta\beta}^{(0)} = \frac{2}{3}\frac{1+\nu}{1-\nu}\operatorname{Re}\varphi'(z), \quad N_\alpha^{(0)} - iN_\beta^{(0)} = 4\varphi''(z) + \frac{8i}{\lambda\pi s_0^2}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$M_{\beta\beta}^{(0)} - M_{\alpha\alpha}^{(0)} + 2iM_{\alpha\beta}^{(0)} = -\frac{4}{3}\left[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\right] + \tag{2.4}$$

$$+\frac{8\lambda^2(2s_0^2-\nu_2)}{15(1-\nu)}\varphi'''(z) + \frac{128\, i\partial^2\Phi}{\pi^3\partial z^2}$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — комплексные потенциалы Колосова-Мусхелишвили.

Выпишем теперь выражения $M_{\alpha\beta}^{(0)}$, $N_\alpha^{(0)}$ в полярных координатах $(\alpha, \beta = r, \theta)$

$$M_{rr}^{(0)} = \frac{1}{1-\nu}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)F - \frac{2s_0^2-\nu_2}{15}\lambda^2\frac{\partial^2\nabla^2 F}{\partial r^2}\right] +$$

$$+\frac{32}{\pi^3}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)$$

$$M_{r\theta}^{(0)} = \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{15}\lambda^2\frac{2s_0^2-\nu_2}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\nabla^2 F}{\partial\theta}\right) +$$

$$+\frac{16}{\pi^3}\left(\frac{\pi^2\Phi}{4\lambda^2 s_0^2} - 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right) \tag{2.5}$$

$$N_\theta^{(0)} = \frac{2\lambda}{3(1-\nu)}\frac{1}{r}\frac{\partial\nabla^2 F}{\partial\theta} + \frac{4}{\pi\lambda s_0^2}\frac{\partial\Phi}{\partial r}$$

$$N_r^{(0)} = \frac{2\lambda}{3(1-\nu)}\frac{\partial\nabla^2 F}{\partial r} - \frac{4}{\pi\lambda s_0^2}\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$$

$$M_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{2}{3(1-\nu)}\left(\nu\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)F +$$

$$+\frac{\lambda^2(2s_0^2-\nu^2)}{15(1-\nu)}\frac{\partial^2\nabla^2 F}{\partial r^2} - \frac{32}{\pi^3}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)$$

Сравнивая эти выражения с аналогичными, приведенными в [15], видим, что они отличаются коэффициентами. Причина здесь та, которая отмечалась при сравнении разрешающих систем.

Таким образом, краевая задача в такой постановке соответствует второму варианту теории С. А. Амбарцумяна. Различие стоит в коэффициентах и в формулах, по которым вычисляются напряжения, после того как будут найдены разрешающие функции.

Отметим, что устремляя $\nu_2 \to \nu$, $E_1 \to E$, $G_2 \to G$, получим формулы рейсснеровского приближения для изотропных плит, приведенные в [14].

3. Для построения теории следующего приближения необходимо взять по два различных по модулю корня в каждом трансцендентном уравнении. Тогда разрешающая система этого приближения имеет вид

$$D^2D^2F = 0 \quad D^2\Phi_1 - \frac{\pi^2}{4\lambda^2 s_0^2}\Phi_1 = 0, \quad D^2\Phi_2 - \frac{9\pi^2}{4\lambda^2 s_0^2}\Phi_2 = 0$$

$$D^2\Psi - \left(\frac{\alpha_1 + i\beta_1}{\lambda}\right)^2\Psi = 0, \qquad D^2\overline{\Psi} - \left(\frac{\alpha_1 - i\beta_1}{\lambda}\right)^2\overline{\Psi} = 0 \tag{3.1}$$

$$(\gamma_1 = \alpha_1 + i\beta_1)$$

Из формул (1.8) в этом случае имеем

$$\sigma_r^{(2)} + \sigma_\theta^{(2)} = 4\zeta\frac{1+\nu}{1-\nu}\operatorname{Re}\varphi'(z) + 2\operatorname{Re}e(\zeta)\Psi$$

$$\sigma_\theta^{(2)} - \sigma_r^{(2)} + 2i\tau_{r\theta}^{(2)} = -2\zeta[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] + 8\lambda^2\alpha_4\varphi'''(z) -$$

$$-4i\sum_{k=1}^{2}p_k(\zeta)\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial z^2} - 8\operatorname{Re}n(\zeta)\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} \tag{3.2}$$

$$\tau_{rz}^{(2)} - i\tau_{\theta z}^{(2)} = \frac{4\lambda(1-\zeta^2)}{1-\nu}\varphi'' - 2i\sum_{k=1}^{2}q_k(\zeta)\frac{\partial\Phi_k}{\partial z} + 4\operatorname{Re}r(\zeta)\frac{\partial\Psi}{\partial z}$$

Порядок системы (3.1) D^{12}, поэтому на границе плиты надо поставить по шесть граничных условий. Силовые краевые условия будут включать как статические, так и сверхстатические характеристики первого порядка, статически эквивалентные напряжениям (3.2).

Аналогичным образом строятся теории более высоких порядков. Так на следующем шаге порядок разрешающей системы будет D^{18}, затем D^{24} и т. д. Силовые краевые условия будут наложены соответственно на сверхстатические характеристики до второго, третьего и т. д. порядка включительно.

Проиллюстрируем применение предлагаемого варианта второго порядка на задаче о концентрации напряжений в неограниченной плите из транстропного материала. Плита ослаблена поперечной полостью, ограниченной круговой цилиндрической поверхностью Ω. Для простоты будем считать, что поверхность Ω загружена нормальными изгибающими усилиями, изменяющимися только вдоль образующей, то есть

$$\sigma_{rr}|_\Omega = Pf(\zeta), \qquad \tau_{r\zeta}|_\Omega = 0$$

В этом случае задача будет осесимметричной, поэтому функции Φ_j $(j = 1, 2)$ обращаются в нуль. При $r = 1$ имеют место следующие граничные условия на контуре отверстия:

$$M_{rr}^{(j)} = P\int_{-1}^{1}f(\zeta)\zeta^{2j+1}d\zeta, \qquad N_r^{(j)} = 0 \qquad (j = 0, 1) \tag{3.3}$$

В полярной системе координат статические характеристики напряженного состояния имеют вид

$$M_{rr}^{(0)} = \frac{2}{3(1-\nu)}\left(\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dF}{dr}\right) + 2\,\mathrm{Re}\left(a_1\Psi + b_1\frac{d^2\Psi}{dr^2}\right)$$

$$M_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{2}{3(1-\nu)}\left(\nu\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr}\right) + 2\,\mathrm{Re}\left(a_1\Psi + b_1\frac{1}{r}\frac{d\Psi}{dr}\right) \qquad (3.4)$$

$$N_r^{(0)} = 2\,\mathrm{Re}\,d_0\frac{d\Psi}{dr} \qquad N_z^{(0)} = 2\,\mathrm{Re}\,e_0\Psi$$

Здесь

$$\begin{pmatrix} a_{2j+1} \\ b_{2j+1} \end{pmatrix} = \int_{-1}^{1}\begin{matrix} s(\zeta) \\ n(\zeta) \end{matrix}\,\zeta^{2j+1}d\zeta, \qquad d_{2j} = \int_{-1}^{1} r(\zeta)\,\zeta^{2j}d\zeta, \qquad e_{2j+1} = \int_{-1}^{1} t(\zeta)\,\zeta^{2j+1}d\zeta$$

Решение уравнений (3.1), удовлетворяющее условиям на бесконечности, будем искать в виде

$$F(r) = X\ln r, \quad \Psi(r) = ZK_0(r\gamma_1/h)/K_0(\gamma_1/h) \qquad (3.5)$$

где K_0 — функция Макдональда.

Из граничных условий (3.3) получаем систему для определения произвольных постоянных X, Z

$$X - 3\,\mathrm{Re}\left[a_1 + (\gamma_1/h)^2 b_1 - b_1P_0^-(\gamma_1/h)\right]Z = -3p\int_{-1}^{1} f(\zeta)\,\zeta\, d\zeta$$

$$X - 5\,\mathrm{Re}\left[a_3 + (\gamma_1/h)^2 b_3 - b_3P_0^-(\gamma_1/h)\right]Z = -5p\int_{-1}^{1} \zeta^3 f(\zeta)\,d\zeta \qquad (3.6)$$

$$\mathrm{Re}\,d_2P_0^-(\gamma_1/h)\,Z = 0, \qquad P_0^-(\gamma_1/h) = -(\gamma_1/h)\,K_1(\gamma_1/h)/K_0(\gamma_1/h)$$

Подставляя решения системы (3.6) в выражения (3.4), получаем формулу, по которой обычно вычисляется концентрация напряжений

$$M_{\theta\theta}^{(0)}(1) = \frac{2}{3}X + 2\,\mathrm{Re}\left[a_1 - b_1P_0(\gamma_1/h)\right]Z \qquad (3.7)$$

Предложенный процесс построения уточненных теорий изгиба плит, отличающийся достаточной прозрачностью, позволяет без труда получить уравнения задачи. Кроме того, преимущество такого подхода заключается в том, что, как и в трехмерной теории, формулы для вычисления характеристик напряженного состояния содержат коэффициенты, вид которых определяется в зависимости от физико-механических постоянных материала плит.

В заключение отметим, что другой подход используется в работах [16—21]. Решение трехмерных задач теории анизотропных пластин осуществляется с помощью итерационных процессов, построенных асимптотическими методами А. Л. Гольденвейзера и И. И. Воровича. В [19—21] на каждом этапе решается бигармоническая проблема для трансверсально-изотропных пластин, аналогичная проблеме Кирхгофа, но совпадающая с ней в нулевом приближении, и некоторые бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Для удовлетворения граничных условий на цилиндрической части границы применяется вариационный принцип Лагранжа. Теория внутреннего напряженно-деформированного состояния изгибаемых ортотропных пластинок построена в работах [16, 17]. Последнее описывается основным итерационным процессом, эквивалентным теории Кирхгофа. В [18] построено полное решение типа погранслоя для прямоугольных пластин.

Донецкий госуниверситет

Поступила 8 VI 1979

Վ. Ա. ՇԱԼԴԻՐՎԱՆ

ՏՐԱՆՍՏՐՈՊԱՅԻՆ ՍԱԼԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ՃՇԳՐՏՎԱԾ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՄԻ ՎԱՐԻԱՆՏԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ստացվել են խնդրի լուծող հավասարումները, որոնք բնորոշում են փոխադրային սալի լարված դեֆորմացված վիճակը լայնական սահքերի և նորմալ դեֆորմացիաների ու լարումների հաշվառումով։ Այդ հավասարումների հիման վրա կարելի է հաշվի առնել ավելի բարձր կարգի ծռման էֆեկտները, քան դասական տեսությունում։

Ընդ որում փոխադրային սալերի ծռման մոտավոր տեսությունների կառուցման խնդիրը մեկնաբանվում է ինչպես այս կամ այլ թվով մոտավորությունների կառուցման ընթացք համասեռ լուծումների տեսության շրջանակներում։

ON A VARIANT TO CONSTRUCT A MORE PRECISE THEORY FOR TRANSVERSAL ISOTROPIC PLATES

V. A. SHALDYRVAN

S u m m a r y

The resolving equations are obtained to describe the stress-strain state of transversal isotropic plates, considiring transversal shear and

normal strains and stresses, allowing to take into account the bending effects of the order higher than that of the classic theory. In this case the problem to construct approximate theories for transversal plate bending is treated as a process of obtaining a number of approximations within the theory of homogeneous solutions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кильчевский Н. А.* Обобщение современной теории оболочек. ПММ, 1939, 2, вып. 4.
2. *Reissner E.* On the theory of bending of elastic plates. J. Math. and Phys., 1944, 23, No. 4.
3. *Гольденвейзер А. Л.* К теории изгиба пластинок Рейсснера. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 4.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, 26, вып. 4.
5. *Ворович И. И.* Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек. В кн.: Тр. II Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике (1964). Обзорные докл. М., 1966, вып. 3.
6. *Кильчевский Н. А.* Основы аналитической механики оболочек. К., Изд. АН УССР, 1963.
7. *Ворович И. И.* Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек.— Материалы I Всесоюз. школы по теории и числен. методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси, 1975.
8. *Айнола Л., Нигул У.* Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек. Изв. АН Эст.ССР, 1965, 14, № 1.
9. *Галимов А. К.* Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям. Исследования по теории пластин и оболочек, 1967, вып. 5, 1970, вып. 6.
10. *Косколаминский А. С., Шалдырван В. А.* Толстые многосвязные пластины. К., Наукова думка, 1978.
11. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М., Наука, 1977.
12. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М., Наука, 1967.
13. *Прокопов В. К.* Применение символического метода к выводу уравнений теории плит. ПММ, 1965, 29, вып. 5.
14. *Гриадев Ю. А., Прокопов В. К.* К задаче изгиба толстой плиты. Прикл. механ., 1970, VI, вып. 5.
15. *Плсех Б. Л.* Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. К., Наукова думка, 1977.
16. *Агаловян Л. А.* Об уточнении классической теории изгиба анизотропных пластин. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 1965, т. XVIII, № 5.
17. *Агаловян Л. А.* К теории изгиба ортотропных пластин. Изв. АН СССР, МТТ, 1966, № 6.
18. *Агаловян Л. А.* О погранслое ортотропных пластинок. Изв. АН АрмССР. Механика, 1973, т. XXVI, № 2.
19. *Роменская Г. И., Шленев М. А.* Асимптотический метод решения задачи теории упругости о толстой трансверсально-изотропной плите. В кн.: Пластины и оболочки. Ростов-на-Дону, 1971.
20. *Роменская Г. И., Шленев М. А.* Асимптотический метод решения трехмерных задач о трансверсально-изотропной плите. В кн.: Теория оболочек и пластин. Л., Судостроение, 1975.
21. *Шленев М. А.* Асимптотический метод решения задачи об изгибе толстой трансверсально-изотропной плиты. В кн.: Толстые плиты и оболочки. Ростов-на-Дону, 1974.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 2, 1980 Механика

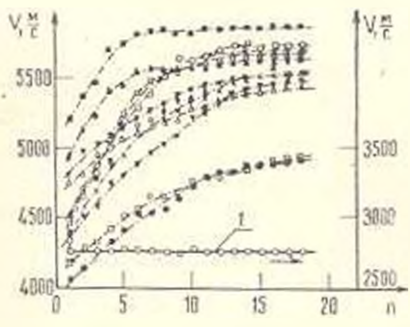
В. П. ЕПИФАНОВ, И. Ю. ВОРОНИНА

КИНЕТИКА РАЗРУШЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ГРАНИТА ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

Получена экспериментальная зависимость скорости распространения ультразвуковых волн от величины осевой нагрузки. Оценен объем материала, в котором возникает дефект, и прослежена кинетика процесса разрушения гранита.

Общеизвестно применение акустического метода исследования с целью получения информации о физико-механических свойствах вещества [1, 2] и его структурных особенностях [3, 4]. Естественно ожидать, что этот метод позволит составить более полную картину структурных изменений в граните при осевом сжатии.

Для получения воспроизводимых данных отбирались образцы с близкими по акустическим свойствам характеристиками. С этой целью использовалась следующая методика. Образцы насыщались маслом и по мере насыщения определялась скорость ультразвука, затем масло десорбировалось, а образцы сушились до постоянного веса. Изменение скорости ультразвука (фиг. 1) индивидуально для каждого образца, что может быть связано с различным расположением и величиной микротрещин. По сорбционным кривым можно получить представление о характере трещиноватости образца. Предполагалось, что одинаковым образцам должны соответствовать близкие по характеру сорбционные кривые.



Фиг. 1. Зависимость скорости распространения продольной акустической волны в граните v_l, $м с^{-1}$ (линия 1 — в оргстекле) от времени n, сутки

В работе использовались цилиндрические образцы мелкозернистого карельского гранита [5] диаметром 30 *мм* и высотой около 60 *мм*. Образцы имели преимущественную ориентацию микротрещин вдоль оси. Это обстоятельство позволило использовать различия в скоростях распространения звука в безграничной v_l и ограниченной v_c среде

$$v_1 = [E(1-\mu)/\rho(1+\mu)(1-2\mu)]^{1/2}; \quad v_2 = (E/\rho)^{1/2}$$

где μ — коэффициент Пуассона, ρ — плотность, E — модуль Юнга.

Выбирались такие соотношения диаметра излучателя и образца, для которых возможен переход от одного типа волн к другому при заполнении трещины более плотной средой.

Перед измерениями на торцевую поверхность образцов наносилось приблизительно одинаковое количество масла типа МВП. Для образцов гранита скорость продольной волны возрастала при заполнении пустот впитавшимся маслом. Для сравнения измерялась продольная скорость в образце полиметил-метакрилата. Полиметил-метакрилат не содержал трещин и не впитывал масла, поэтому для него скорость ультразвука оставалась постоянной.

Для некоторых образцов насыщение маслом достигалось помещением в масляную ванну при температуре 110°С. Десорбция для всех образцов, содержащих масло, осуществлялась в токе насыщенного водяного пара. Зная массу впитавшегося масла, его плотность и объем образца, можно определить суммарный объем пустот. Расчетная величина пористости составляет около 1%.

Дополнительную информацию о расположении трещин можно получить из сопоставления величин скорости, направленной вдоль $v_{\parallel}$ и поперек $v_{\perp}$ образца (табл. 1). В большинстве случаев $v_{\parallel} > v_{\perp}$. При осевом вращении образца значение скорости $v_{\perp}$ и амплитуда сигнала меняются. Эти факты можно рассматривать как подтверждение анизотропии материала, связанной с преимущественной ориентацией трещин вдоль образца.

Таблица 1

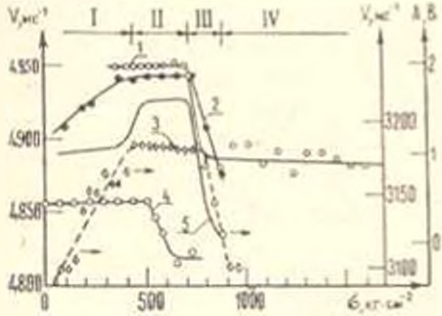
№	$v_{\parallel}$, $мс^{-1}$	$v_{\perp}$, $мс^{-1}$
1	5620	5110—5400
2	5700	5400—5490
3	5650	5600—5980
4	5840	5290—5810
5	5680	5490—5550
6	5540	5290—5370
7	5920	5990 ± 20
8	5160	5100 ± 20

Величина скорости продольной акустической волны, направленной вдоль $v_{\parallel}$, $мс^{-1}$ и перпендикулярно $v_{\perp}$, $мс^{-1}$ оси произвольно выбранных образцов гранита. Для $v_{\perp}$ приведены min и max значения, полученные при вращении образца ($\Delta v = \pm 10$ $мс^{-1}$).

Для нахождения зависимости скорости распространения v акустической волны от величины осевой нагрузки σ были опробованы два варианта наблюдения. В первом случае волна пропускалась вдоль оси образца, во втором — перпендикулярно ей. Измерения выполнялись по традиционной методике [6]. Образцы гранита, использовавшиеся для нахождения $v = f(\sigma)$, не содержали масла. В качестве акустической смазки использовался каучук СКН-18, а в отдельных случаях — вазелин. В полученной экспериментальной зависимости (фиг. 2) можно выделить четыре характерные области изменения скорости от нагрузки. Это области возрастания (1), постоянства (2), уменьшения (3) и нестабильных значений (4) скорости звуковой волны в образце гранита при увеличении нагрузки.

Увеличение скорости с возрастанием нагрузки (линии 2, 3) и участок, почти параллельный оси абсцисс, наблюдались и ранее [7].

Сначала при увеличении осевого сжатия происходит сокращение объема пустот и улучшается контакт отдельных зерен гранита друг с другом, что приводит к возрастанию модуля $E = d\sigma/d\varepsilon$, а также к увеличению скорости и уменьшению затухания акустического сигнала на этом участке кривой. Такое объяснение качественно правильно предсказывает изменение величины скорости, что подтверждается сопоставлением расчетных и экспериментальных значений продольной v_l и сдвиговой v_t скорости.



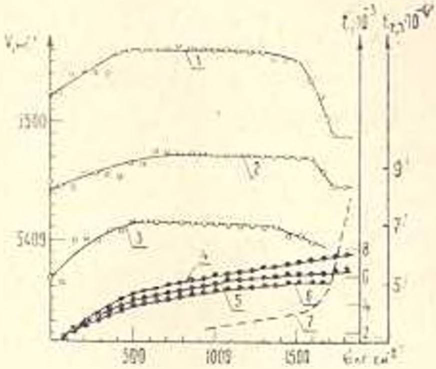
Фиг. 2. Зависимость скорости продольной v_l, мс$^{-1}$ (линии 1, 2, 4) и сдвиговой v_t, мс$^{-1}$ (3) волн от величины нормального напряжения σ, кГ см$^{-2}$. 1, 4 — импульсный луч направлен вдоль оси; 2, 3, 5 — поперек образца. 5 — изменение амплитуды A, B-вольт прошедшего сигнала продольной волны от σ, кГ см$^{-2}$, f = 1.25 МГц

Контроль скорости звука для луча, направленного вдоль оси образца (линии 1, 4, фиг. 2), выполнялся в разгруженном состоянии. В этих условиях зависимость скорости от величины осевого сжатия не наблюдалась вплоть до значительных напряжений. Этот факт свидетельствует об обратимом характере изменения свойств в первой области.

Дальнейшее увеличение нагрузки сопровождается резким уменьшением скорости (третья область). Она может заканчиваться «взрывом», то есть внезапным разрушением образца, при этом большая часть образца превращалась из монолита в мелкую щебенку (кривая 2, фиг. 2). Возможен, однако, переход в четвертую область (кривые 1, 3, 4, фиг. 2), для которой характерны нестабильные значения скорости и потрескивание образца. Заканчивается эта область разрушением.

Уменьшение скорости (область 3) при увеличении осевого сжатия может быть связано с увеличением числа дефектов и их развитием [8, 9]. В пользу этого предположения свидетельствует экспериментальный факт увеличения коэффициента затухания. Известна работа [10], где найдена зависимость скорости продольной волны от величины внутреннего дефекта, то есть поры. Есть основания предполагать, что и в нашем случае уменьшение скорости от величины осевого сжатия связано с возникновением и развитием дефектов. Поскольку микротрещины ориентируются параллельно оси наибольшего сжатия и раскрываются в направлении наименьшего сжатия, то увеличение объема при образовании трещин [11] должно вносить существенный вклад в $\varepsilon_{2,3}$.

Сопоставление скорости продольной волны и относительного сжатия от величины приложенной нагрузки приведено на фиг. 3. Кривые 1, 4; 2, 5; 3, 6, 7 соответствуют трем последним циклам нагружения образца перед разрушением. Прослеживается корреляция между относительным сжатием и скоростью распространения продольной волны $\varepsilon = f(\sigma)$.



Фиг. 3. Изменение скорости v_l, $мс^{-1}$ продольной волны (линии 1, 2, 3) и относительной продольной деформации ε_1 (линии 4, 5, 6), $\varepsilon_{2,3}$ (линия 7) от величины нормального напряжения σ, $кГ\,см^{-2}$.

Близкая к прямолинейной зависимость ε от σ при значительных σ дает $d\sigma/d\varepsilon = \mathrm{const}$, то есть участок, параллельный оси абсцисс на кривой $v \approx f(\sigma)$. Можно отметить, что скорость звука чувствительна к изменению состояния образца при сжатии и к остаточным структурным изменениям при циклических нагружениях.

По данным акустических измерений и из зависимости $\varepsilon_{1,2} = f(\sigma)$ можно рассчитать модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Сравнение значений для любого произвольно выбранного образца дает приемлемое совпадение, например, $E = 6.6 \cdot 10^{10}\ Н/м^2$, $\mu = 0.28$.

Как уже отмечалось, непосредственно перед разрушением в материале образца генерируются акустические сигналы. Спектрограмма такого импульса приведена на фиг. 4*а*. В зависимости от условий нагружения и

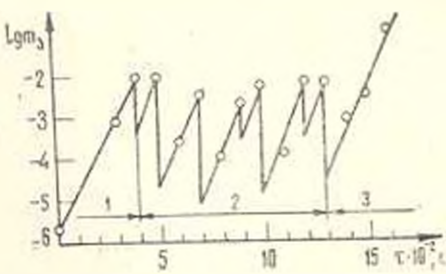
Фиг. 4. Спектрограмма характерного треска: *а* — предшествующего разрушению гранита, *б* — в момент разрушения.

предыстории образца можно наблюдать несколько таких сигналов длительностью 0.04—0.06 *сек* частотой 6—8 *кГц*. Видимых изменений обраца при этом не наблюдается. Аналогичные импульсы при нагружении материала наблюдались и в других материалах [12, 13].

Если генерирование акустических импульсов средой считать подобным излучению элементарного осциллятора [14] с частотой $f = 1/2\pi\sqrt{a/m}$, где a — коэффициент упругости, m — масса осциллятора, то можно оценить характерный размер среды, в котором происходит процесс элементарного разрушения.

Полагая для упрощения, что закон Гука оправдывается вплоть до разрушения образца $\sigma = a \cdot \Delta l$, где Δl — смещение ($\Delta l = r_- - r_0$) и принимая для ионной решетки $r_0 = 2A^\circ$, $r_- = 10A^\circ$, $\sigma = 6 \cdot 10^{-3}$ *дин* на связь, определим массу и характерный объем гранита, в котором генерируются сигналы акустической эмиссии. Соответствующие величины будут иметь значение $m_э = 5 \cdot 10^{-}$[illegible] *г* и $V_э = 6 \cdot 10^{-}$[illegible] *мм*^{3}.

За отдельными сигналами акустической эмиссии следует лавиноподобный процесс разрушения материала продолжительностью 0,08—0,18 *сек*. Частота акустических сигналов уменьшается от 6—8 *кГц* до десятков *герц* к концу разрушения. Используя модельные представления гармонического осциллятора, можно (фиг. 5) проследить механизм процесса разрушения гранита. Возникшая трещина растет до того момента, когда ее развитие будет ограничено другой трещиной. Однако процесс разрушения на этом не локализуется. Видимо, в плоскости будущего скола развиваются сразу несколько трещин (в пользу этого предположения свидетельствует наличие в спектрограмме по крайней мере одновременно двух импульсов: высокой и низкой частот (фиг. 4б)) и большинство из них заканчивает свой рост на имеющихся в образце микротрещинах. Этот процесс (участок 2) продолжается до тех пор, пока в сечении будущего разрушения не накопится достаточное количество дефектов и не станет возможным развитие магистральной макротрещины (участок 3, фиг. 5).



Фиг. 5. Изменение эффективной массы гранита $m_э$ в объеме разрушения от времени τ, с.

Таким образом, исследования зависимостей α, $v = f(\sigma)$ позволяют получить информацию о структурных особенностях материала (наличии трещин, пор, их преимущественной ориентации). Это направление можно определить как активный акустический контроль. Во-вторых, анализ спектрограмм сигналов акустической эмиссии до и в процессе разрушения интересен для определения прочностных свойств и кинетики разрушения.

Практическую ценность оба направления могут иметь для прогнозирования возникновения критической ситуации в напряженных конструкциях.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила 5 XI 1979

Վ. Պ. ԵՊԻՖԱՆՈՎ, Ի. Յու. ՎՈՐՈՆԻՆԱ

ՔԱՅՔԱՅՄԱՆ ԿԻՆԵՏԻԿԱՆ ԵՎ ԳՐԱՆԻՏԻ ԱԿՈՒՍՏԻԿԱԿԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ՓՈՓՈԽՈՒՄԸ ԱՌԱՆՑՔԱՅԻՆ ՍԵՂՄՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Բերվում են մանրահատիկավոր գրանիտի նմուշների ակուստիկական պարամետրերի կապակցությունների փորձարարական ուսումնասիրության արդյունքները կախված առանցքային սեղմման մեծությունից։

Ցույց մածուցիկությամբ հեղուկի սորբցիայի և դեսորբցիայի ակուստիկական իզոթերմերի տվյալներով գնահատվել է ծակոտկենությունը և նմուշների ճեղքերի յուրահատուկ ցանցը։

Ակուստիկական էմիսիայի նշանների սպեկտրոգրամմաներով գնահատվել է նյութի ծավալը, որում առաջանում է թերություն և նշմարվել է գրանիտի քայքայման ընթացքի կինետիկան։

KINETICS OF FRACTURE AND CHANGE IN ACOUSTIC PARAMETERS OF GRANITE UNDER AXIAL COMPRESSION

V. P. EPIFANOV, I. Y. VORONINA

S u m m a r y

The acoustic parameters dependence on the value of compression is investigated on the basis of uniaxial compression tests of fine — grained granite specimens.

Porosity of samples and their characteristic network of cracks are evaluated from the data of acoustic isotherms of sorption and desorption of a liquid with low viscosity.

The kinetics of fracture is traced and the volume of the material in which the defects arise is estimated from the acoustic emission spectrograms.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Matsushima S.* Compressional and shear wave velocities of volcanic rocks and glasses to 900° C at 20 kbar. "High-Pressure Sci and Technol. Proc. 6-th AIRAPT Conf., Boulder, Colo, 1977, Vol. 2". New-York-London, 1979, 216—222.

2. *Николаевский В. Н., Лившиц Л. Д., Сизов И. А.* Механические свойства горных пород. Деформация и разрушение. Сборник серии «Итоги науки и техники ВИНИТИ», «Механика деформируемого твердого тела», т. 11. М., 1978, стр. 123—250.
3. *Трээлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б.* Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М., «Мир», 1972, стр. 149—180.
4. *Рикитаке Т.* Предсказание землетрясений. М., «Мир», 1979, стр. 272—278.
5. Справочник (кадастр) физических свойств горных пород. Под ред. акад. Н. В. Мельникова и др., М., «Недра», 1975.
6. *Мак-Скимин Г.* Физическая акустика. Под ред. У. Мэзона, часть А, т. 1, «Мир», 1966, стр. 357—361.
7. *Matsushima S.* Variation of the elastic wave velocities of rocks in the process of deformation and fracture under high pressure. Bull. Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., 1960, 32, 2.
8. *Scholz C. H.* Experimental study of the fracturing process in brittle rock. J. Geophys. Res., 1968, 73, 1447.
9. *Brace W. F.* Current laboratory studies pertaining to earthquake prediction. Tectonophysics, 1968, 6, 75.
10. *Ranachowski J.* Propagation of ultrasonic waves in porous ceramics. Ultrasonics, 1975, Vol. 13, 5, 203—207.
11. *Brace W. F., Paulding B. W., Scholz C. H.* Dilatancy in the fracture of crystalline rocks. J. Geophys. Res., 1966, 71, 3939.
12. *Mogi K.* Study of the elastic shocks caused by the fracture of heterogeneous materials and its relation to earthquake phenomena. Bull. Earthquake Res. I., Univ. Tokyo, 1962, 40, 125.
13. *Byerlee J. D.* Frictional characteristics of granite under high confining pressure. J. Geophys. Res., 1967, 72, 3639.
14. *Кобеко П. П.* Аморфные вещества. АН СССР, М.—Л., 1952, стр. 8—9, 212—232.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIII, № 2, 1980 Механика

К. У. ОЛЬШЕВСКИЙ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИКИ ГИБКИХ СТЕРЖНЕЙ

Система нелинейных уравнений для определения усилий при конечных перемещениях в первоначально прямолинейном стержне кругового поперечного сечения имеет вид [1]

$$\vec q' = -\vec f; \qquad \vec m' = [\vec q, \vec\tau]$$
$$\varepsilon\{[\vec\tau, \vec\tau'] + \varkappa T\vec\tau\} = \vec m \tag{1.1}$$

Для определения упругой линии стержня к системе (1.1) следует добавить уравнение $\vec N' = \vec\tau$. Безразмерные переменные и параметры определяются следующим образом: $\vec q = \vec Q(qL)^{-1}$; $\vec m = \vec M(qL^2)^{-1}$ — векторы приведенных сил и моментов в произвольном сечении стержня, $\vec f = \vec F(g)^{-1}$ — вектор распределенной нагрузки, $\varepsilon = EJ(qL^3)^{-1}$ — относительная жесткость на изгиб, $\varkappa$ — отношение жесткостей на кручение и изгиб, T — кривизна кручения осевой линии стержня, $\vec\tau$ — единичный вектор касательной к изогнутой оси стержня, $t = sL^{-1}$ — независимая переменная, s, L — длина дуги и полная длина стержня, q — характерный параметр распределенной нагрузки, например, погонный вес стержня. Здесь и далее $[\vec a, \vec b]$, $(\vec a, \vec b)$ — векторное и скалярное произведение векторов.

Для нахождения асимптотического решения системы уравнений (1.1) применим один из вариантов метода сращиваемых асимптотических разложений [2]. Суть метода заключается в том, что равномерно пригодное решение для всей области изменения независимой переменной является суммой, состоящей из части, характеризуемой исходной независимой переменной, и части, характеризуемой увеличенной независимой переменной в области краевого эффекта.

Асимптотическое решение, характеризуемое исходной независимой переменной, является при $\varepsilon \to 0$ решением системы предельных уравнений.

$$\vec q' = -\vec f; \quad [\vec q, \vec\tau] = 0 \tag{1.2}$$

Система уравнений (1.2) описывает равновесие идеальной гибкой нити в потоке.

$$\vec{\tau} = \left(\vec{q}_0 - \int\limits_0^t \vec{f} dt \right) \cdot |\vec{q}|^{-1} \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) непригодно в области краевого эффекта около точек опирания или действия сосредоточенных сил. Для того, чтобы получить решение, пригодное в области краевого эффекта, введем преобразование $t = \varepsilon^{1/2}\tilde{t}$. Система уравнений (1.1) примет вид

$$\begin{gathered} \vec{q}^{\,\cdot} = -\varepsilon^{1/2}\vec{f} \\ \{[\vec{\tau}_0, \vec{\tau}^{\,\cdot}] + \varkappa T \vec{\tau}\}^{\cdot} = [\vec{q}, \vec{\tau}] \end{gathered} \tag{1.4}$$

Для линеаризации системы нелинейных уравнений (1.4) полагаем, что в области краевого эффекта $\vec{\tau} = \vec{\tau}_0 + \vec{\tau}_*$, где $\vec{\tau}_0 = \vec{q}_0 \cdot |\vec{q}_0|^{-1}$ — значение единичного вектора касательной к оси идеальной гибкой нити (1.3) в точке опирания стержня $t = 0$, $|\vec{\tau}_*| \ll 1$. Систему предельных линеаризованных уравнений (1.4) при $\varepsilon \to 0$ можно привести к следующему уравнению:

$$[\vec{\tau}_0, \vec{\tau}_*^{\,\cdot\cdot}] - \varkappa T \vec{\tau}_0^{\,\cdot} = [\vec{q}_0, \vec{\tau}_*]$$

Умножим векторно обе части последнего уравнения на $\vec{\tau}_0$. Используя формулу двойного векторного произведения

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = (\vec{a}, \vec{c})\vec{b} - (\vec{a}, \vec{b})\vec{c}$$

получим

$$(\vec{\tau}_0, \vec{\tau}_*^{\,\cdot\cdot})\vec{\tau}_0 - \vec{\tau}_*^{\,\cdot\cdot} = (\vec{\tau}_0, \vec{\tau}_*)\vec{q}_0 - (\vec{\tau}_0, \vec{q}_0)\vec{\tau}_*$$

После выполнения повторно операции векторного умножения на $\vec{\tau}_0$ запишем

$$[\vec{\tau}_0, \vec{\tau}_*]^{\cdot\cdot} - (\vec{\tau}_0, \vec{q}_0)[\vec{\tau}_0, \vec{\tau}_*] = 0 \tag{1.5}$$

Решение уравнения (1.5) имеет вид

$$[\vec{\tau}_0, \vec{\tau}_*] = \vec{c}_1 e^{-\lambda\tilde{t}} + \vec{c}_2 e^{\lambda\tilde{t}}$$

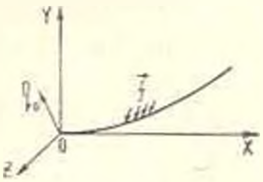
где $\lambda^2 = |\vec{q}_0|$. Из условия ограниченности вектора $\vec{\tau}_*$ в области краевого эффекта при $\tilde{t} \to \infty$ следует $\vec{c}_2 = 0$. Окончательно имеем

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_0 + \vec{c} e^{-\lambda\tilde{t}} \tag{1.6}$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для области в окрестности другой опоры, введя преобразование $t = 1-\varepsilon^{1/2}\bar{t}$. При $\bar{t} \to \infty$ значение вектора $\bar{\tau}$ совпадает со значением вектора $\bar{\tau}$, определяемого уравнением (1.3), при $t \to 0$. Из условия совпадения значений векторов $\bar{\tau}$ на границе области краевого эффекта и области, характеризуемой исходной независимой переменной, следует, что равномерно пригодное решение системы уравнений (1.1) во всей области изменения $t \in [0, 1]$ равно

$$\bar{\tau} = \bar{c}_1 e^{-\lambda \varepsilon^{-1/2} t} + \bar{c}_2 e^{-\lambda \varepsilon^{-1/2}(1-t)} + \left(\bar{q}_0 - \int_0^t \bar{f} dt\right) |\bar{q}|^{-1} \qquad (1.7)$$

Применим полученный результат для исследования изгиба стержня при безотрывном поперечном обтекании потоком жидкости. Рассмотрим случай, когда один конец стержня лежит на горизонтальной плоскости и удерживается лишь за счет трения, а второй расположен на значительном удалении от плоскости. Начало неподвижной декартовой системы координат расположим в точке касания провисшего участка стержня с опорной плоскостью. Положим, что часть стержня, лежащая на плоскости, прямолинейна и параллельна оси x, а к верхнему концу стержня приложено горизонтальное растягивающее усилие n в направлении оси x. Распределенная нагрузка, действующая на провисшую часть стержня, равна $\bar{f} = -\bar{j} - p\bar{k}$, где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные орты неподвижной декартовой системы координат.



Фиг. 1.

Отметим, что поскольку длина провисшей части стержня заранее неизвестна, то в качестве характерной длины можно принять расстояние от опорной плоскости до верхнего конца стержня H, то есть положить в выражениях для безразмерных параметров и переменных $L = H$.

В точке опирания провисшей части стержня с опорной плоскостью имеем следующие граничные условия: $\bar{\tau}(0) = \bar{i}$, $\bar{m}(0) = 0$. В области стержня, расположенной около опорной плоскости

$$\bar{\tau} = \bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

где $|y|, |z| \ll 1$. Из формулы (1.7) следует

$$\bar{\tau} = \bar{c}_1 e^{-n^{1/2}\varepsilon^{-1/2}t} + (\bar{q}_0 - \bar{f}t)\, n^{-1}$$

где

$$\bar{c}_1 = \varepsilon^{1/2} n^{-3/2} (\bar{j} + p\bar{k})$$

$$\bar{q}_0 = n\bar{i} - \varepsilon^{1/2} n^{-1/2} (\bar{j} + p\bar{k})$$

Значения изгибающего момента определяются по формуле

$$|m| = \frac{\varepsilon}{n}(1+p^2)^{-1/2}(1-e^{-n^{1/2}\varepsilon^{-1/2}r})$$

Точность асимптотической формулы (1.7) растет с увеличением ε^{-1} и n. Численное решение плоской задачи изгиба стержня ($p = 0$) показало, что при $\varepsilon = 0.001$ и $n = 1.7$ погрешность асимптотической формулы (1.7) не превышает 5%. При больших значениях ε эта же точность достигается увеличением значения n, например, при $\varepsilon = 0.03$, $n = 2.4$.

Киевский филиал ВНИИСТа

Поступила 4 VI 1979

Կ. Ու. ՕԼՇԵՎՍԿԻ

ՃԿՈՒՆ ՁՈՂԵՐԻ ՍՏԱՏԻԿԱՅԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿԱՆ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ԵՂԱՆԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Վերլուծությունների միաձուլման ասիմպտոտական մեթոդի օգնությամբ ուսումնասիրվում է կենտրոնացած ուժերի ազդման շրջանում սահմանային էֆեկտների ազդեցությունը։

Ստացված արդյունքները կիրառվում են հեղուկի համասեռ հոսանքում գտնվող ձողում ուժերի և մոմենտների որոշման համար։

A METHOD OF ASYMPTOTIC INVESTIGATION OF FLEXIBLE ROD STATICS

K. U. OLSHEVSKY

Summary

To find asymptotic solution of nonlinear equations a method of joined asymptotic expansions is proposed. The uniformly fitting solution obtained for the system of equations may be used to determine force and moments in the rod placed in a homogeneous fluid flow.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Е. П.* Нелинейные задачи статики тонких стержней. Л.—М., Гостехиздат, 1948.
2. *Ван-Дейк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В мою статью «Плоская задача для тонкого слоя в условиях установившейся нелинейной ползучести», опубликованной в журнале «Известия АН Армянской ССР, Механика», 1980 г., т. XXXIII, № 1, прошу внести следующие исправления:

1. Первая из формул (1.5) должна иметь вид

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_{11}^2 - \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2}{3} + \varepsilon_{12}^2}$$

2. Формула, предшествующая формуле (4.9) и стоящая во второй строке на стр. 41, должна иметь вид

$$\psi_{1,2} = 2\varepsilon_{12} = 2A\,|\tau(x_1)|^m \operatorname{sgn}(\tau)$$

3. Формула (4.3) должна иметь вид

$$\varepsilon_{12} = (h - x_2) f'(x_1) + \frac{(h - x_2)^2}{2} f''(x_1)$$

4. Последняя из формул (4.5) должна иметь вид

$$\varepsilon_{22} = (h - x_2) f'(x_1) + \frac{\nu}{1-\nu} h \frac{(h - x_2)^2}{2} f'''(x_1) \approx f'(x_1)(h - x_2)$$

М. А. СУМБАТЯН