ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1979

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, №6, 1979 Механика

А. А. БАБЛОЯН, А. М. МКРТЧЯН

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ СОЕДИНЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ И КОЛЬЦЕВЫХ СЕКТОРОВ

В работе рассматриваются некоторые задачи кручения однородных и неоднородных призматических стержней, когда поперечное сечение стержня представляет собой соединение криволинейных прямоугольников, границы которых образованы частями координатных линий в декартовой и полярной системах координат.

Такие задачи встречаются в строительной и машиностроительной технике и имеют практическое значение.

Задачи решаются с использованием аппарата сингулярных интегральных уравнений. Предложенный метод позволяет получить точные численные результаты как для жесткости, так и для напряжений в зависимости от геометрических и физических параметров профиля.

§ 1. Рассмотрим задачу кручения полого составного стержня постоянной толщины с поперечным сечением в виде чередующихся прямоугольников и кольцевых секторов из различных материалов (фиг. 1, 2)

Как известно [1—3], решение задачи кручения в постановке Сен-Венана сводится к определению функции напряжений, которая в области поперечного сечения удовлетворяет уравнению Пуассона, а на границе области принимает постоянные значения.

Для полого призматического стержня одно из постоянных значений произвольно, а другое определяется по формуле Бредта [1].

Пользуясь наличием осей симметрии, для области поперечного сечения стержня берем $\frac{1}{2}$ m-ую часть основной области (фиг. 2), где m — число осей симметрии профиля (при $m=3$ имеем правильный треугольник с закругленными углами (фиг. 3), при $m=4$ — полое квадратное сечение (фиг. 1)).

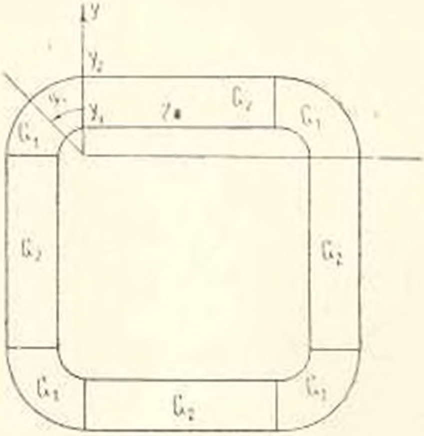
Отделенную $\frac{1}{2}$ m-ую область берем в виде соединения прямоугольной области с сектором кольца, имеющих одинаковую толщину и составленных из различных материалов, угол $\varphi_1 = \frac{\pi}{m}$ (фиг. 2) зависит от числа осей симметрии.

Функцию напряжений ищем в виде

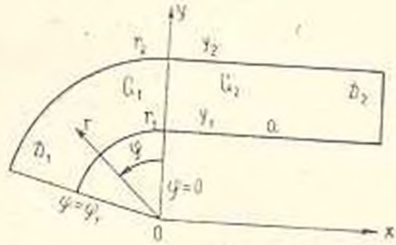
$$u = \begin{cases} u_1(r, \varphi) \text{ в кольцевой области } D_1 \\ u_2(x, y) \text{ в прямоугольной области } D_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

На линии контакта областей D_1 и D_2 функции $u_i(i=1, 2)$ должны удовлетворять следующим условиям сопряжения:

$$u_1(r,\ 0)=u_2(0,\ y), \qquad \frac{1}{G_1 r}\frac{\partial u_1}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = -\frac{1}{G_2}\frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=0} \tag{1.2}$$



Фиг. 1.

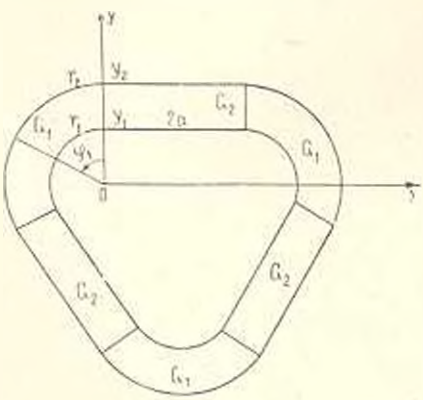


Фиг. 2.

На осях симметрии ($x=a$ и $\varphi=\varphi_1$) нормальная производная функции напряжений должна равняться нулю

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=a}=0, \qquad \varphi_1=\frac{\pi}{m} \tag{1.3}$$

а на контурах сечения необходимо удовлетворять условиям



Фиг 3.

$$\begin{gathered} u_1(r_2,\ \varphi)=u_2(x,\ r_2)=0 \\ u_1(r_1,\ \varphi)=u_2(x,\ r_1)=C_0 \end{gathered} \tag{1.4}$$

где постоянная C_0 должна определяться по формуле Бредта [1].

Функции u_i $(i=1, 2)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2}=-2G_1 \quad \text{для } D_1 \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=-2G_2 \quad \text{для } D_2 \end{gathered} \tag{1.5}$$

ищем в виде

$$\begin{gathered} \frac{1}{G_1}u_1(r,\ \varphi)=\frac{C_0}{G_1}\left(1-\frac{t}{t_1}\right)+f_1(r)-\sum_{k=1}^{\infty} A_k\frac{\operatorname{ch}\beta_k(\varphi_1-\varphi)}{\beta_k \operatorname{sh}\beta_k\varphi_1}\sin\beta_k t \\ \frac{1}{G_2}u_2(x,\ y)=\frac{C_0(r_2-y)}{G_2(r_2-r_1)}+f_2(y)+\sum_{k=1}^{\infty} B_k\frac{\operatorname{ch}\gamma_k(a-x)}{\gamma_k \operatorname{sh}\gamma_k a}\sin\gamma_k(y-r_1) \end{gathered} \tag{1.6}$$

где

$$t = \ln \frac{r}{r_1}, \quad t_1 = \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad \gamma_k = \frac{\pi k}{r_2 - r_1}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{t_1} \tag{1.7}$$

функции $G_1 f_1$ и $G_2 f_2$ являются частными решениями неоднородных уравнений (1.5), обращающимися в нуль на концах интервалов определения

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \frac{r_1^2 - r^2}{2} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2t_1} \ln \frac{r}{r_1} \quad (r_1 \leqslant r \leqslant r_2) \\ f_2(y) &= (r_2 - y)(y - r_1) \qquad (r_1 \leqslant y \leqslant r_2) \end{aligned} \tag{1.8}$$

Функции (1.6) удовлетворяют (1.5) и (1.4).

Введем вспомогательную неизвестную функцию

$$f(r) = \frac{1}{G_1} \frac{\partial u_1}{r \partial \varphi}\bigg|_{\varphi=0} = -\frac{1}{G_2} \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=0} \tag{1.9}$$

Удовлетворяя второму условию (1.2), получим

$$f(r) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \beta_k t = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin \gamma_k (r - r_1) \tag{1.10}$$

откуда для коэффициентов A_k и B_k получим следующие представления:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{t_1} \int_{r_1}^{r_2} f(\rho) \sin \left(\beta_k \ln \frac{\rho}{r_1} \right) d\rho \\ B_k &= \frac{2}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} f(\rho) \sin \gamma_k (\rho - r_1)\, d\rho \end{aligned} \tag{1.11}$$

Удовлетворяя первому условию (1.2), используя при этом (1.10) и (1.11), после некоторых преобразований для определения неизвестной функции $f(r)$ получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\int_{r_1}^{r_2} f(\rho) \left[G_1 K_1(\rho, r) + G_2 K_2(r, \rho) \right] d\rho = g(r), \quad (r_1 \leqslant r \leqslant r_2) \tag{1.12}$$

где

$$\begin{aligned} K_1(r, \rho) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{cth} \beta_n \varphi_1 \sin \left(\beta_n \ln \frac{r}{r_1} \right) \sin \left(\beta_n \ln \frac{\rho}{r_1} \right) \\ K_2(r, \rho) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{cth} \gamma_n a \sin \gamma_n (r - r_1) \sin \gamma_n (\rho - r_1) \\ g(r) &= G_1 f_1(r) - G_2 f_2(r) + C_0 \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1} - \frac{t}{t_1} \right) \end{aligned} \tag{1.13}$$

Введем обозначение

$$K(r, \rho) = K_1(r, \rho) - K_2(r, \rho) \tag{1.14}$$

Нетрудно убедиться, что функция $K(r, \rho)$ непрерывна и на границе области определения обращается в нуль.

Действительно, если воспользоваться значением ряда [7]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} = \ln \frac{1}{2\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \quad (0 < x < 2\pi) \tag{1.15}$$

и представить функцию $K(r, \rho)$ в виде

$$K(r, \rho) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\operatorname{cth} \beta_n \varphi_1 - 1) \sin\left(\beta_n \ln \frac{r}{r_1}\right) \sin\left(\beta_n \ln \frac{\rho}{r_1}\right) -$$

$$- \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\operatorname{cth} \gamma_n a - 1) \sin \gamma_n (r - r_1) \sin \gamma_n (\rho - r_1) + \tag{1.16}$$

$$+ \ln \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2t_1} \ln \frac{r\rho}{r_1^2}\right) \sin \frac{\pi (r-\rho)}{2(r_2 - r_1)}}{\sin \frac{\pi (r + \rho - 2r_1)}{2(r_2 - r_1)} \sin\left(\frac{\pi}{2t_1} \ln \frac{r}{\rho}\right)} \right|$$

тогда каждое слагаемое (1.16) будет обладать вышеупомянутыми свойствами. Благодаря равномерной сходимости рядов (1.16) относительно переменных r, ρ, функция $K(r, \rho)$ также будет обладать этими свойствами.

Функция $g(r)$ (1.13) дважды дифференцируема при $r_1 > 0$ и на концах интервала $[r_1, r_2]$ обращается в нуль.

Пользуясь формулами (1.10—1.14), сводим интегральное уравнение (1.12) к решению двух независимых друг от друга бесконечных систем линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных A_k, B_k

$$A_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} A_k + a_p \qquad B_p = \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk} B_k + b_p \quad (p = 1, 2) \tag{1.17}$$

где

$$a_{pk} = \frac{2\beta_p G_2 \operatorname{th} \beta_p \varphi_1}{(G_1 + G_2) t_1} \int_{r_1}^{r_2}\int_{r_1}^{r_2} K(r, \rho) \sin\left(\beta_k \ln \frac{\rho}{r_1}\right) \sin\left(\beta_p \ln \frac{r}{r_1}\right) \frac{d\rho\, dr}{\rho r}$$

$$b_{pk} = -\frac{2\gamma_p G_1 \operatorname{th} \gamma_p a}{(G_1 + G_2)(r_2 - r_1)} \int_{r_1}^{r_2}\int_{r_1}^{r_2} K(r, \rho) \sin \gamma_p (r - r_1) \sin \gamma_k (\rho - r_1)\, dr\, d\rho$$

$$a_p = \frac{2\beta_p \operatorname{th} \beta_p \varphi_1}{(G_1 + G_2) t_1} \int_{r_1}^{r_2} g(r) \sin\left(\beta_p \ln \frac{r}{r_1}\right) \frac{dr}{r} \tag{1.18}$$

$$b_p = \frac{2\gamma_p \operatorname{th} \gamma_p a}{(G_1 + G_2)(r_2 - r_1)} \int_{r_1}^{r_2} g(r) \sin \gamma_p (r - r_1)\, dr$$

Из свойств функций $K(r, \varphi)$ и $g(r)$ следует [4, 5], что коэффициенты a_{pk} и b_{pk} при фиксированном значении p и $k \to \infty$ стремятся к нулю, как $O(k^{-3})$, а при фиксированном k и $p \to \infty$ имеют порядок $O(p^{-1})$. Свободные члены бесконечных систем при возрастании индекса p стремятся к нулю, как $O(p^{-1})$.
При таких условиях нетрудно убедиться, что [6]

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| = 0, \qquad \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| = 0$$

то есть система (1.17) при $r_1 > 0$, $a > 0$, $\varphi_1 > 0$ квазивполне регулярна. Применяя метод последовательных приближений к системам (1.7), получим, что при $p \to \infty$ неизвестные A_p и B_p стремятся к нулю, как $O(p^{-2})$. Отсюда следует, что функция $f(r)$ непрерывна и на концах интервала $[r_1, r_2]$ обращается в нуль.

Пользуясь формулой Бредта, которая в этом случае принимает вид

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{r}{G_1} \frac{\partial u_1}{\partial r}\bigg|_{r=r_1} d\varphi - \int_0^{a} \frac{1}{G_2} \frac{\partial u_2}{\partial y}\bigg|_{y=r_1} dx = -2\Omega_0$$

$$\Omega_0 = \frac{a^2}{2} \operatorname{ctg} \varphi_1 + a r_1 + \frac{r_1^2}{2} \varphi_1 \tag{1.19}$$

для постоянной C_0 и жесткости при кручении получим следующие выражения:

$$C_0 \left[\frac{\varphi_1}{G_1 t_1} + \frac{a}{G_2 (r_2 - r_1)} \right] = a (r_1 - r_2) + a^2 \operatorname{ctg} \varphi_1 + \\ + \frac{\varphi_1 (r_2^2 - r_1^2)}{2 t_1} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A_k}{\beta_k} - \frac{B_k}{\gamma_k} \right) \tag{1.20}$$

$$\frac{1}{4m} C = \frac{1}{2} C_0 \left[a^2 \operatorname{ctg} \varphi_1 + a (r_1 + r_2) + \varphi_1 \frac{r_2^2 - r_1^2}{2 t_1} \right] + \\ + \frac{1}{8} G_1 \varphi_1 \left[r_2^4 - r_1^4 - \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2}{t_1} \right] + G_2 \frac{a (r_2 - r_1)^3}{6} - \\ - G_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_2^2 - (-1)^k r_1^2}{\beta_k (\beta_k^2 + 4)} A_k + G_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{\gamma_k^3} B_k \tag{1.21}$$

Используя формулы

$$\tau_{rz} = \theta \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \tau_{xz} = \theta \frac{\partial u}{\partial y}$$

для напряжений получим

$$\frac{1}{G_1 \theta} \tau_{\varphi z} (r, \varphi) = - \frac{C_0}{G_1 r t_1} + f_1(r) - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{\operatorname{ch} \beta_k (\varphi_1 - \varphi)}{r \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1} \cos \beta_k t \tag{1.22}$$

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{G_2\theta}\tau_{zx}(x, y) = -\frac{C_0}{G_2(r_2 - r_1)} + f_2(y) + \\
+ \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{\operatorname{ch}\gamma_k(a - x)}{\operatorname{sh}\gamma_k a}\cos\gamma_k(y - r_1)
\end{gathered}
\tag{1.23}
$$

где $f_1(r)$ и $f_2(r)$ даются формулами (1.8).

Отметим, что достаточно решить только одну из бесконечных систем (1.17), так как имея значения $A_k(B_k)$, неизвестное $B_k(A_k)$ можно определить по формулам

$$
A_k = \frac{r_2 - r_1}{l_1}\sum_{p=1}^{\infty} B_k M_{pk}, \qquad B_k = \frac{l_1}{r_2 - r_1}\sum_{p=1}^{\infty} A_p N_{kp}
\tag{1.24}
$$

которые получаются из формул (1.10), (1.11).
Здесь

$$
\begin{gathered}
M_{kp} = \frac{1}{r_2 - r_1}\int_{r_1}^{r_2}\sin\left(\beta_k \ln\frac{r}{r_1}\right)\sin\gamma_p(r - r_1)\,dr \\
N_{pn} = \frac{2}{l_1}\int_{r_1}^{r_2}\sin\left(\beta_p \ln\frac{r}{r_1}\right)\sin\gamma_n(r - r_1)\frac{dr}{r}
\end{gathered}
\tag{1.25}
$$

Пользуясь обозначениями (1.25), выражения (1.18) можно представить в виде, удобном для вычислений

$$
\begin{gathered}
a_{pk} = \frac{G_2}{G_1 + G_2}\left[\delta_{pk} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p\operatorname{th}\beta_p\varphi_1}{n\operatorname{th}\gamma_n a}N_{kn}N_{pn}\right] \\
b_{pk} = \frac{G_1}{G_1 + G_2}\left[\delta_{pk} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p\operatorname{th}\gamma_p a}{n\operatorname{th}\beta_n\varphi_1}M_{np}M_{nk}\right] \\
a_p = \frac{\beta_p\operatorname{th}\beta_p\varphi_1}{(G_1 + G_2)}\left[G_1\alpha_p^{(1)} + C_0\alpha_p^{(2)} - \frac{4G_2}{r_2 - r_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - (-1)^n}{\gamma_n^2}N_{pn}\right] \\
b_p = \frac{\gamma_p\operatorname{th}\gamma_p a}{G_1 + G_2}\left[G_1\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(1)}M_{kp} + C_0\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(2)}M_{kp} - \frac{4G_2[1-(-1)^p]}{(r_2 - r_1)\gamma_p^2}\right]
\end{gathered}
\tag{1.26}
$$

где δ_{pk} — символ Кронекера, а

$$
\alpha_k^{(1)} = \frac{4[r_1^2 - (-1)^k r_2^2]}{l_1\beta_k(\beta_k^2 + 4)}, \qquad \alpha_k^{(2)} = -\frac{2[r_1 - (-1)^k r_2]}{l_1\beta_k(r_2 - r_1)(\beta_k^2 + 1)}
$$

Отметим, что ряд в выражении для a_p суммируется, а сходимость ряда в выражении C_0 можно улучшить.

$$
\frac{2}{r_2 - r_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - (-1)^n}{\gamma_n^2}N_{pn} = \alpha_p^{(1)} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2}\alpha_p^{(2)}
$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{A_k \cos \beta_k t}{\beta_k} - \frac{B_k \cos \gamma_k (r - r_1)}{\gamma_k}\right] = \tag{1.27}$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} f(r)\left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1} - \frac{t}{t_1}\right) dr = \frac{t_1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k \alpha_k^{(2)}$$

§ 2. Рассмотрим числовые примеры. Вычисления проведены для различных значений безразмерных величин:

$$\mu = \frac{G_1}{G_2}, \quad \eta = \frac{x}{r_1}, \quad \eta_1 = \frac{a}{r_1}, \quad \xi = \frac{r}{r_1}, \quad \xi_1 = \frac{r_2}{r_1}, \quad U_0 = \frac{C_0}{G_2 r_1^2}$$

$$G_0 = \frac{C}{G_2 r_1^4}, \quad m = \frac{\pi}{\varphi_1}, \quad \tau_0 = \begin{cases} \tau_{z r}(r, \varphi)/G_2 \theta r_1 & \text{для круговой области} \\ \tau_{z x}(x, y)/G_2 \theta r_1 & \text{для прямоугольной области} \end{cases}$$

В табл. 1—4 приведены значения жесткости G_0, постоянного U_0 и напряжения τ_0 вдоль внутреннего $\xi = 1$ и наружного $\xi = \xi_1$ контуров поперечного сечения при следующих соотношениях геометрических и физических параметров:

$m = 2; 3; 4.$

$\eta_1 = 0.25; 0.5; 1; 2; 4; 8.$

$\mu = 0.5; 1; 2; 4.$

$\xi = 1, \xi_1.$

$\xi_1 = 1.2; 2.$

На основе табл. 1—4 можно сделать следующие выводы:

1. При $\mu \leqslant 2$ на внутреннем контуре сечения максимальное напряжение достигается в центре круговой части, а на внешнем контуре—в середине прямолинейной части.

2. При $\mu > 2$ на внутреннем контуре максимальное напряжение достигается на середине прямоугольной части. Причем, когда $\eta_1 \leqslant 4$, при перемещении от середины дуги круговой части к середине прямолинейной части напряжения монотонно возрастают. На внешнем контуре, наоборот, максимальное напряжение — на середине круговой части и уменьшается по мере приближения к центру прямолинейной части.

3. При переходе по нормали от внутреннего контура к наружному на прямолинейных частях напряжения возрастают.

На круговых частях от внутреннего контура к внешнему напряжения возрастают при малых значениях η_1. При больших η_1 напряжения на внешнем контуре круговой части не превышают соответствующие значения напряжений на внутреннем контуре.

4. На круговых и прямоугольных частях в отдельности напряжения мало изменяются вдали от точек стыка. В окрестностях стыка от круговых частей к прямолинейным напряжения претерпевают плавный переход.

На основе табл. 1—4 и формул (1.20)—(1.23) нетрудно получить приближенные выражения для искомых величин:

Таблица 1

$\xi_1 = 2;\ m = 2$

μ	η_1	G_0	U_0	ξ	τ_0: φ_1	$\varphi_1/2$	0	$-\varphi_1/2$	$-\varphi_1$
$\frac{1}{2}$	0.25	16.187	0.8657	1	0.6651	0.6591	0.4405	0.27636	0.2383
				2	1.0829	1.0859	1.2760	1.4544	1.4921
	0.5	21.148	0.9693	1	0.8167	0.8069	0.5314	0.2178	0.1536
				2	1.1588	1.1629	1.4129	1.7237	1.7867
	1	32.304	1.1530	1	1.0806	1.0715	0.7611	0.2576	0.19429
				2	1.2909	1.2955	1.5629	2.0489	2.1115
	2	58.075	1.4353	1	1.4880	1.4779	1.1248	0.4583	0.4372
				2	1.4968	1.4979	1.7925	2.4123	2.4333
	4	117.74	1.8021	1	2.0165	2.0051	1.5976	0.8028	0.8017
				2	1.7590	1.7648	2.0891	2.8006	2.8017
	8	251.43	2.1839	1	2.5679	2.5550	2.0907	1.1839	1.1839
				2	2.0364	2.0412	2.3988	3.1839	3.1839
1	0.25	30.818	1.6458	1	1.2101	1.2034	0.9702	0.8757	0.8547
				2	2.1055	2.1089	2.3175	2.4178	2.4335
	0.5	38.472	1.7674	1	1.3853	1.3766	1.0807	0.9029	0.8678
				2	2.1932	2.1976	2.4568	2.6337	2.6678
	1	54.560	1.9556	1	1.6567	1.6466	1.2996	1.0138	0.9761
				2	2.3290	2.3341	2.6173	2.8981	2.9327
	2	88.552	2.2001	1	2.0093	1.9979	1.5968	1.2131	1.2012
				2	2.5053	2.5111	2.8369	3.1871	3.1990
	4	159.73	2.4551	1	2.3732	2.3644	1.9074	1.4558	1.4552
				2	2.6894	2.6959	3.0550	3.4545	3.4551
	8	306.16	2.6673	1	2.6832	2.6692	2.1658	1.6673	1.6673
				2	2.8425	2.8495	3.2565	3.6673	3.6673
4	0.25	97.206	5.0920	1	2.6918	2.7210	3.7298	3.8408	3.8638
				2	7.3441	7.3293	6.4599	6.3368	6.3155
	0.5	103.17	4.6031	1	1.9873	2.0232	3.2626	3.4633	3.5001
				2	6.9915	6.9733	5.9392	5.7393	5.7051
	1	118.33	4.0936	1	1.2506	1.2915	2.7222	3.0337	3.0694
				2	6.6228	6.6022	5.4444	5.1503	5.1156
	2	152.75	3.6673	1	0.63731	0.6819	2.2594	2.6547	2.6662
				2	6.3159	6.2934	5.0449	4.6798	4.6684
	4	225.41	3.3752	1	0.21606	0.2632	1.9409	2.3746	2.3752
				2	6.1052	6.0814	4.7711	4.3758	4.3752
	8	373.51	3.2001	1	0.03652	0.0121	1.7500	2.2001	2.2001
				2	5.9788	5.9542	4.6069	4.2001	4.2001

$$G_0 = 4m\left[\frac{c}{2}U_0 + d\right] \tag{2.1}$$

$$U_0 = \frac{1}{b}\left[c + \frac{u^2(1+\xi_1)X_1}{\pi(\xi_1-1)(u^2+\pi^2)}\right] \tag{2.2}$$

$$\frac{\tau_{\xi\eta}(\xi,\eta)}{G_2\theta r_1} = \xi_1 + 1 - 2\xi - \frac{U_0}{\xi_1-1} \qquad |\eta-\eta_1| < \frac{\eta_0}{2} \tag{2.3}$$

$$\frac{\tau_{\varphi z}(\xi,\varphi)}{G_2\theta r_1} = -\frac{U_0}{u\xi} - \xi\mu + \frac{\xi_1^2-1}{2u\xi}\mu - \frac{\mu X_1 \operatorname{ch}\pi/u(\varphi_1-\varphi)}{\xi \operatorname{sh}(\pi^2/mu)} \tag{2.4}$$

где введены следующие обозначения:

Таблица 2'

$\xi_1 = 2,\ m = 3$

μ	τ_1	G_0	U_0	ξ	τ_0: $-\tau_1$	$-\tau_1/2$	0	$\tau_1/2$	τ_1
$\frac{1}{2}$	0.25	18.964	0.928	1	0.7538	0.7362	0.5258	0.3529	0.3135
				2	1.1308	1.1399	1.3368	1.5080	1.5464
	0.5	28.336	1.105	1	1.0064	0.9827	0.7059	0.3676	0.2993
				2	1.2587	1.2712	1.5216	1.8457	1.9118
	1	54.118	1.447	1	1.4992	1.4706	1.1351	0.5642	0.4933
				2	1.5062	1.5211	1.8141	2.3317	2.4011
	2	138.60	2.100	1	2.4398	2.4045	1.9713	1.1286	1.1026
				2	1.9780	1.9964	2.3518	3.0719	3.0978
	4	480.50	3.342	1	4.2281	4.1801	3.5653	2.3434	2.3417
				2	2.8751	2.8999	3.3553	4.3401	4.3417
	8	2190.6	5.730	1	7.6681	7.5959	6.6412	4.7303	4.7303
				2	4.6009	4.6381	5.3042	6.7303	6.7303
1	0.25	35.329	1.729	1	1.3255	1.3019	1.0697	0.9717	0.9491
				2	2.1673	2.1777	2.3961	2.4899	2.5114
	0.5	49.669	1.939	1	1.6274	1.6004	1.2863	1.0890	1.0498
				2	2.3199	2.3341	2.6114	2.7929	2.8299
	1	86.574	2.322	1	2.1777	2.1437	1.7378	1.3914	1.3491
				2	2.5967	2.6144	2.9514	3.2536	3.2945
	2	197.98	3.007	1	3.1640	3.1194	2.5745	2.0249	2.0086
				2	3.0023	3.1154	3.5441	3.9893	4.0055
	4	611.97	4.260	1	4.9676	4.9038	4.0861	3.2614	3.2603
				2	3.9985	4.0313	4.6187	5.2592	5.2603
	8	2538.7	6.643	1	8.3961	8.2957	7.0066	5.6425	5.6425
				2	5.7210	5.7725	6.6536	7.6425	7.6425
2	0.25	62.431	3.036	1	2.0515	2.0513	2.0419	2.0398	2.0393
				2	4.0259	4.0262	4.0131	4.0324	4.0327
	0.5	80.419	3.115	1	2.1648	2.1625	2.1316	2.1210	2.1192
				2	4.0829	4.0841	4.1030	4.1089	4.1103
	1	125.05	3.328	1	2.4719	2.4652	2.3647	2.3349	2.3308
				2	4.2375	4.2409	4.2966	4.3217	4.3255
	2	253.86	3.837	1	3.2034	3.1864	2.9564	2.8402	2.8372
				2	4.6056	4.6143	4.7538	4.8336	4.8366
	4	711.25	4.941	1	4.7910	4.7514	4.2251	3.9412	3.9400
				2	5.4046	5.4247	5.7541	5.9405	5.9409
	8	2760.5	7.218	1	8.0661	7.9799	6.8175	6.2183	6.2183
				2	7.0527	7.0965	7.8161	8.2183	8.2183
4	0.25	102.00	4.877	1	2.4000	2.4870	3.4907	3.6107	3.6353
				2	7.1799	7.1344	6.2628	6.1347	6.1125
	0.5	117.92	4.468	1	1.8134	1.9175	3.1179	3.3231	3.3611
				2	6.8826	6.8283	5.8125	5.6077	5.5726
	1	163.00	4.250	1	1.5008	1.6120	2.8938	3.1930	3.2275
				2	6.7247	6.6667	5.5918	5.3058	5.2822
	2	298.60	4.452	1	1.7919	1.8982	3.1154	3.4417	3.4515
				2	6.8714	6.8159	5.7809	5.4632	5.4534
	4	777.63	5.371	1	3.1119	3.1958	4.1168	4.3706	4.3710
				2	7.5365	7.4924	6.6420	6.3714	6.3710
	8	2890.8	7.546	1	6.2380	6.2686	6.4883	6.5462	6.5462
				2	9.1117	9.0947	8.6812	8.5462	8.5462

$\xi_1 = 2, \quad m = 4$

μ	τ_1	G_0	U_r	ξ	τ_a: τ_1	$\tau_1/2$	0	$\tau_1/2$	τ_1
$\frac{1}{2}$	0.25	22.026	0.993	1	0.8364	0.8098	0.6092	0.4294	0.3885
				2	1.1817	1.1964	1.3968	1.5617	1.6009
	0.5	36.886	1.240	1	1.1874	1.1501	0.8802	0.5170	0.4445
				2	1.3627	1.3832	1.6305	1.9676	2.0366
	1	83.155	1.737	1	1.9003	1.8532	1.5051	0.8661	0.7878
				2	1.7240	1.7497	2.0500	2.6104	2.6864
	2	262.45	2.731	1	3.3313	3.2687	2.7831	1.7678	1.7372
				2	2.4472	2.4810	2.8450	3.7010	3.7314
	4	1135.9	4.732	1	6.1972	6.1038	5.3466	3.7336	3.7315
				2	3.8956	3.9453	4.4632	5.7294	5.7315
	8	6286.0	8.729	1	11.936	11.779	10.504	7.7292	7.7292
				2	6.7946	6.8764	7.7330	9.7292	9.7292
1	0.25	40.213	1.810	1	1.4316	1.4005	1.1703	1.0656	1.0417
				2	2.2316	2.2487	2.4618	2.5508	2.5830
	0.5	62.592	2.105	1	1.8505	1.8066	1.4872	1.2684	1.2253
				2	2.4475	2.4715	2.7530	2.9465	2.9864
	1	127.33	2.664	1	2.6504	2.5917	2.1561	1.7446	1.6959
				2	2.8548	2.8866	3.2463	3.5863	3.6331
	2	357.34	3.727	1	4.1710	4.0876	3.4408	2.7491	2.7288
				2	3.6274	3.6720	4.1562	4.7049	4.7250
	4	1386.9	5.779	1	7.1080	6.9769	5.9342	4.7804	4.7790
				2	5.1195	5.1887	5.9203	6.7775	6.7790
	8	7067.5	9.815	1	12.884	12.659	10.832	8.1447	8.1447
				2	8.0539	8.1716	9.3711	10.815	10.815
2	0.25	68.829	3.076	1	2.1089	2.1069	2.0893	2.0847	2.0838
				2	4.0555	4.0565	4.0667	4.0691	4.0696
	0.5	96.924	3.233	1	2.3334	2.3264	2.2683	2.2466	2.2429
				2	4.1702	4.1738	4.2098	4.2220	4.2247
	1	174.88	3.637	1	2.9088	2.8892	2.7287	2.6499	2.6418
				2	4.4641	4.4743	4.5745	4.6243	4.6316
	2	438.25	4.556	1	4.2211	4.1731	3.7765	3.5622	3.5565
				2	5.1343	5.1592	5.4076	5.5498	5.5555
	4	1561.9	6.561	1	6.9969	6.8888	6.0023	5.5012	5.5006
				2	6.5519	6.6080	7.1636	7.5000	7.5006
	8	7539.7	10.467	1	12.659	12.429	10.540	9.4673	9.4673
				2	9.1437	9.5633	10.747	11.467	11.467
4	0.25	107.69	4.728	1	2.2334	2.3691	3.3258	3.4518	3.4775
				2	7.0483	6.9747	6.1261	5.9946	5.9718
	0.5	135.15	4.418	1	1.7970	1.9541	3.0603	3.2719	3.3103
				2	6.8188	6.7330	5.7659	5.5594	5.5239
	1	217.46	4.450	1	1.8440	2.0024	3.1125	3.3957	3.4286
				2	6.8415	1.7548	5.7792	5.5035	5.4714
	2	497.31	5.128	1	2.8099	2.9434	3.8524	4.1191	4.1274
				2	7.3368	7.2631	6.4142	6.1372	6.1289
	4	1670.7	6.935	1	5.3836	5.4503	5.8221	5.9348	5.9350
				2	8.6567	8.6177	8.1081	7.9352	7.9350
	8	7804.8	10.828	1	10.930	10.852	10.066	9.8284	9.8284
				2	11.501	11.537	11.758	11.828	11.828

Таблица 4

$\xi_1 = 1.2;\quad m = 2$

μ	η_1	G_0	U_0	$\tau_\eta(\xi = 1)$				
				η_1	$\eta_1/4$	0	$\eta_2/4$	η_2
0.25	0.25	0.6766	0.0685	0.3239	0.3238	0.2878	0.1872	0.1469
	0.5	0.9805	0.0810	0.3928	0.3928	0.3520	0.2222	0.2053
	1	1.7149	0.1038	0.5175	0.5175	0.4743	0.3213	0.3189
	2	3.5908	0.1416	0.7249	0.7249	0.6818	0.5080	0.5079
	4	8.4481	0.1964	1.0254	1.0254	0.9771	0.7819	0.7819
	8	20.506	0.2618	1.3843	1.3843	1.3297	1.1091	1.1091
0.5	0.25	1.3059	0.1323	0.6224	0.6223	0.5693	0.4946	0.4649
	0.5	1.8332	0.1518	0.7293	0.7292	0.6699	0.5719	9.5591
	1	3.0373	0.1842	0.9070	0.9070	0.8421	0.7230	0.7210
	2	5.8517	0.2312	1.1646	1.1646	1.0957	0.9559	0.9559
	4	12.341	0.2873	1.4723	1.4723	1.3944	1.2369	1.2363
	8	26.658	0.3406	1.7650	1.7650	1.6786	1.5032	1.5032
1	0.25	2.4456	0.2479	1.1528	1.1528	1.0967	1.0568	1.0411
	0.5	3.2525	0.2695	1.2713	1.2713	1.2078	1.1543	1.1474
	1	4.9564	0.3008	1.4431	1.4430	1.3743	1.3050	1.3039
	2	8.5555	0.3382	1.6482	1.6481	1.5705	1.4909	1.4909
	4	16.051	0.3738	1.8433	1.8432	1.7571	1.6688	1.6688
	8	31.375	0.4010	1.9928	1.9927	1.9001	1.8050	1.8050
2	0.25	4.3435	0.4400	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
	0.5	5.3138	0.4400	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
	1	7.2555	0.4400	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
	2	11.138	0.4400	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
	4	18.903	0.4400	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
	8	34.434	0.4400	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
4	0.25	7.1035	0.7184	3.1139	3.1142	3.3334	3.3753	3.3905
	0.5	7.9906	0.6437	2.7037	2.7040	2.9515	3.0113	3.0183
	1	9.4621	0.5725	2.3134	2.3137	2.5883	2.6614	2.6625
	2	13.138	0.5180	2.0144	2.0147	2.3101	2.3899	2.3899
	4	20.770	0.4828	1.8214	1.8217	2.1305	2.2139	2.2139

$$X_1 = \frac{2u\,\mathrm{th}\left(\frac{\pi^2}{um}\right)}{1+\mu}\left\{2(\mu-2)\frac{1+\xi_1^2}{\pi^2+4u^2} + \frac{\xi_1+1}{\pi^2+u^2}\left[\xi_1+1-\frac{c}{b(\xi_1-1)}\right]\right\}$$

$$c = \eta_1(1+\xi_1) + \frac{\pi(\xi_1^2-1)}{2um} + \eta_1^2 \operatorname{ctg}\frac{\pi}{m}$$

$$b = \frac{\pi}{\mu m u} + \frac{\eta_1}{\xi_1 - 1}$$

$$d = \frac{\pi\mu}{8m}\left[\xi_1^4 - 1 - \frac{(\xi_1^2-1)^2}{u}\right] + \frac{\eta_1(\xi_1-1)^2}{6}$$

$$u = t_1, \quad \eta_1 = \frac{a}{r_1}, \quad X_1 = \frac{A_1}{r_1^2}$$

Погрешность этих приближенных формул легко оценивается при помощи приведенных табл. 1—4.

Так, например, погрешность формулы (2.4) при $\eta_1 > 2$ и для любого μ не превышает 1%. Погрешность уменьшается при возрастании μ и η_1 при $\xi_1 = 2$, для $\xi_1 < 2$ погрешность меньше 1%, начиная с $\eta_1 > 1$.

В табл. 5 приведены сравнения значений напряжений вдоль круговой части внутреннего контура, вычисленных по точным и приближенным формулам.

Таблица 5

$\mu = 1;\ \xi_1 = 2;\ m = 4;\ \xi = 1$

η_1	$\tau_0(1, \varphi)$	$\varphi = \varphi_1$	$\varphi = \frac{\varphi_1}{2}$	$\varphi = 0$
0.5	прибл.	1.8499	1.8041	1.4603
	точн.	1.8505	1.8066	1.4872
1	прибл.	2.6515	2.5931	2.1596
	точн.	2.6504	2.5917	2.1561
2	прибл.	4.1576	4.0443	3.4797
	точн.	4.1710	4.0876	3.4408
8	прибл.	12.889	12.669	11.043
	точн.	12.884	12.659	10.832

Сравнение табл. 3 при $\mu = 1$, $m = 4$ с таблицами, приведенными в книге [1] для задачи кручения полого однородного стержня коробчатого сечения показывает (табл. 6), что для тонкостенных стержней значения жесткости G_0, параметра U_0 и напряжений, действующих вдали от углов, мало изменяются при закруглении углов профиля стержня.

Таблица 6

$\mu = 1;\ \xi_1 = 2;\ m = 4$

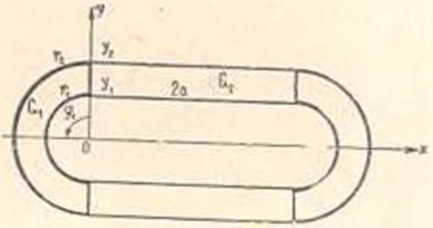
η_1		Без закруг. [1]	С закруглением углов		
			точное	I прибл.	II прибл.
0.5	G_0	73.780	62.592	62.581	—
	$U_0(\eta_1, \xi_1)$	2.1941	2.1049	2.1123	2.1046
	$\tau_0(\eta_1, \xi_1)$	3.1791	2.9864	3.1056	—
1	G_0	139.52	127.33	127.32	—
	U_0	2.7012	2.6644	2.6720	2.6645
	$\tau_0(\eta_1, \xi_1)$	3.6970	3.6331	3.6645	—
2	G_0	369.72	357.34	357.34	—
	U_0	3.7081	3.7269	3.7342	3.7270
	$\tau_0(\eta_1, \xi_1)$	4.7250	4.7080	4.7270	—
8	G_0	7035.1	7067.5	7072.3	—
	U_0	9.7200	9.8147	9.8214	9.8148
	$\tau_0(\eta_1, \xi_1)$	10.720	10.815	10.815	—

Под первым приближением понимается случай, когда принимается $X_1 = 0$.

§ 3. Особый интерес представляет частный случай задачи, рассмотренной в § 1, фиг. 4.

При $m = 2$, $\mu = 2$ задача допускает замкнутое решение в виде элементарных функций

$$u_1(r, \varphi) = \frac{G_1}{2}(r_2^2 - r^2)$$
$$u_2(x, y) = G_2(y_2^2 - y^2) \qquad (3.1)$$



Фиг. 4.

Напряжения определяются формулами

$$\frac{\tau_{z\varphi}(r, \varphi)}{G_2 r_1 \theta} = -2\frac{r}{r_1} = -2\xi$$
$$\frac{\tau_{zx}(x, y)}{G_2 r_1 \theta} = -2\frac{y}{r_1} = -2\eta \qquad (3.2)$$

Постоянная U_0 и жесткость при кручении имеют вид

$$U_0 = \xi_1^2 - 1, \qquad G_0 = \pi(\xi_1^4 - 1) + 16\eta_1(\xi_1^3 - 1)$$

Из (3.2) следует, что напряжения вдоль контуров, а также вдоль линий, равноудаленных от контуров, имеют постоянные значения независимо от соотношений геометрических параметров ξ_1 и η_1.

Способ, использованный в настоящей работе, позволяет решить также задачи кручения для открытых составных профилей.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 13 II 1979

Ա. Հ. ԲԱՐԼՈՅԱՆ, Ա. Մ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ՕՂԱԿԱՅԻՆ ՍԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ՄԻԱՑՄԱՆ ՏԵՍՔԻ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ ՁՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Ամփոփում

Բերվում է տարբեր նյութերից պատրաստված ուղղանկյունների և օղակային սեկտորների միացման տեսքով լայնական հատույթ ունեցող պրիզմատիկ ձողերի ոլորման խնդրի ճշգրիտ լուծումը։

Ընդհանուր դեպքում խնդիրը բերվում է քվազի-լիովին ռեգուլյար անվերջ հավասարումների սիստեմի։

Բերված են թվային հաշվարկների արդյունքները սնամեջ, կլորացված անկյուններով քառակուսի և եռանկյան ձևով հատվածքների, ինչպես նաև երկու ուղղանկյունների և երկու կիսաշրջանային օղակների միացումից առաջացած մակերեսով հատվածքի համար։

Ստացված են մոտավոր բանաձևեր կոշտության և լարումների համար։

TORSION OF RODS WITH CROSS SECTION AS COMBINATION OF DIFFERENT CURVILINEAR RECTANGLES

A. H. BABLOYAN, A. M. MKRTCHIAN

S u m m a r y

An accurate solution of the torsion problem for prismatic rods with cross section as combination of rectangles and ring sectors is presented.

In the general case the problem is reduced to a quasi-quite regular infinite system of algebraic equations.

The results of calculation for hollow quadratic and triangle sections with rounded angles as well as for a profile consisting of two rectangles connected with two semi-circular rings are given. The approximate formulas for strength and stress are derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
2. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. Л., ОНТИ, 1937
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд. АН СССР, 1954.
4. *Винер Н.* Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М., изд. Физматгиз, 1963.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
6. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М., Гостехиздат, 1949.
7. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 6, 1979 Механика

Л. М. КУРШИН, Г. И. РАСТОРГУЕВ

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЕ СЕЧЕНИЯ СКРУЧИВАЕМОГО СТЕРЖНЯ

В работе [1] доказано, что из всех призматических стержней с односвязным поперечным сечением с заданными осевыми моментами инерции максимальную жесткость кручения будет иметь стержень с эллиптическим сечением. Доказательство сводится к сравнению жесткостей кручения стержней эллиптического и любого другого сечений, имеющих те же осевые моменты инерции. Та же задача об определении формы поперечного сечения стержня максимальной крутильной жесткости с известными осевыми моментами инерции рассматривается в настоящей работе как изопериметрическая вариационная задача о стационарном значении некоторого функционала в области с подвижной границей. В качестве естественных условий стационарности функционала, кроме обычных уравнений для функции кручения, получено дополнительное условие, позволяющее определить форму искомого контура. Показано, что дополнительному краевому условию удовлетворяет контур сечения в виде эллипса.

1. Рассмотрим работающий на кручение призматический стержень с односвязным поперечным сечением B, ограниченным контуром L. Поместим начало декартовой системы координат $x0y$ в некоторую внутреннюю точку сечения. Пусть заданы осевые моменты инерции сечения

$$I_x = \iint\limits_B y^2 dxdy, \qquad I_y = \iint\limits_B x^2 dxdy \tag{1.1}$$

Функция напряжений при кручении $\varphi(x, y)$ [2] должна удовлетворять уравнению

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + 2 = 0 \quad (x, y) \in B \tag{1.2}$$

и краевому условию

$$\varphi = 0 \quad (x, y) \in L \tag{1.3}$$

Согласно [3], задача об определении формы поперечного сечения стержня, имеющего максимальную крутильную жесткость при заданных осевых моментах инерции (1.1) сечения, может быть поставлена как вариационная задача о стационарном значении функционала

$$V = \iint\limits_B (4\varphi - \varphi_x^2 - \varphi_y^2)\, dxdy + \lambda_1 \iint\limits_B y^2 dxdy + \lambda_2 \iint\limits_B x^2 dxdy \tag{1.4}$$

в области с подвижной границей при условии (1.3): через λ_1, λ_2 обозначены постоянные. Условию стационарности функционала (1.4) с учетом (1.3) соответствуют уравнение в области (1.2) и вследствие варьирования границы условие

$$\varphi_n^2 + \lambda_1 y^2 + \lambda_2 x^2 = 0 \quad (x,\ y) \in L \tag{1.5}$$

Здесь φ_n — производная функции $\varphi(x,\ y)$ по нормали к контуру. Условие (1.5) является дополнительным для обычной краевой задачи (1.2), (1.3) кручения стержней с односвязным поперечным сечением и позволяет определить форму искомого контура.

Для определения отличных от нуля постоянных λ_1, λ_2 разыскиваем решение уравнения (1.2), удовлетворяющее условию (1.3) в виде

$$\varphi = -c_1 x^2 + (c_1 - 1) y^2 + c_2 \quad (x,\ y) \in B + L$$

где $0 < c_1 < 1$, $c_2 > 0$ — постоянные, и получаем уравнение границы сечения

$$y^2 = (-c_1 x^2 + c_2)/(1 - c_1) \quad (x,\ y) \in L$$

определяющее эллипс. В этом случае

$$\varphi_n^2 = 4[c_1(2c_1 - 1) x^2 + c_2(1 - c_1)] \quad (x,\ y) \in L$$

и постоянные λ_1, λ_2 однозначно определяются из дополнительного краевого условия (1.5).

2. Аналогичный результат — эллиптическая форма области — может быть получен и в задаче о равностороннем растяжении пластинки. Рассмотрим пластинку постоянной толщины h, ограниченную замкнутым контуром L и нагруженную постоянным напряжением $\sigma_n = p$, направленным по нормали к контуру. Форму границы разыскиваем из условия минимума энергии упругой деформации пластинки при заданных осевых моментах инерции (1.1) ($x0y$ — срединная плоскость пластинки). Тогда на границе L получается дополнительное краевое условие вида

$$h(1 - \nu) p^2/E - \lambda_3 y^2 + \lambda_4 x^2 = 0 \quad (x,\ y) \in L$$

где λ_3, λ_4 — некоторые постоянные, E, ν — упругие постоянные материала. Эту задачу можно трактовать и как задачу об определении формы плоской замкнутой кривой, ограничивающей минимальную площадь при заданных осевых моментах инерции, поскольку рассматриваемая пластинка находится в состоянии равностороннего растяжения, и энергия упругой деформации пропорциональна площади, охватываемой L.

Форма сечения в виде эллипса или окружности соответствует стержню наименьшего веса при ограничениях на крутильную и изгибную жесткости [4]. В работе [4] исследованы также аналогичные задачи.

Новосибирский электротехнический
институт

Поступила 12 I 1979

Լ. Մ. ԿՈՒՐՇԻՆ, Գ. Ի. ՌԱՍՏՈՐԳՈՒԵՎ

ՈԼՈՐՎՈՂ ՁՈՂԻ ԿՏՐՎԱԾՔԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՁԵՎԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է տրված իներցիայի առանցքային մոմենտներով և ամենամեծ ոլորման կոշտություն ունեցող պրիզմատիկ ձողի կտրվածքի ձևի որոշման խնդիրը։

Շարժվող եզրագծով տիրույթում տրված որոշակի ֆունկցիոնալի կայունության պայմանից հետևում է անհայտ եզրագծի վրա լրացուցիչ եզրային պայման, որին բավարարում է էլիպսի տեսքով կտրվածքի եզրագիծը։ Այդ համապատասխանում է Ե. Լ. Նիկոլաիի կողմից ապացուցված թեորեմին։

ON THE OPTIMAL SECTIONAL FORM OF THE TORSIONAL ROD

L. M. KURSHIN, G. I. RASTORGUEV

S u m m a r y

The problem on determination of the prismatic rod sectional form having maximum torsion stiffness with the given moments of inertia about its axis is discussed. The additional condition on the unknow boundary results from the stationarity of a functional in the field with a movable boundary. The elliptical form of the section contour satisfies this condition. It corresponds to the theorem proved by E. L. Nickolaji.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nikolai E. L.* Über die Drillungssteifigkeit zylindrischer Stabe. Zeitschrift fur angew. Math. und Mech., 1924, 4. См. также Николаи Е. Л., Тр. по механике. М., Гостехиздат, 1955, стр. 67—70.
2. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
3. *Куршин Л. М.* К задаче об определении формы сечения стержня максимальной крутильной жесткости. Докл. АН СССР, 1975, 223, 3.
4. *Banichuk N. V., Karihaloo B. L.* Minimum-Weight design of multi-purpose cylindrical bars. Internat. J. Solids and Structures, 1976, 12, 4.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 6, 1979 Механика

В. А. ГОРДОН, Г. Б. КОЛЧИН

МЕТОД ФАЗОВЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА

1. Квазистатическая осесимметричная плоская задача термоупругости для полого цилиндра, модуль упругости E которого зависит от температуры T, сводится, как известно, к уравнению [1, 2]

$$\sigma_r'' + a(r)\sigma_r' + b(r)\sigma_r = c(r) \tag{1.1}$$

где

$$a(r) = \frac{3}{r} - \frac{E'}{E}, \qquad b(r) = -\bar{\nu}\frac{E'}{rE}, \qquad c(r) = \frac{E}{r(\nu-1)}\varepsilon_T$$

$$\varepsilon_T = \int_{T_0}^{T} \alpha dT$$

$$\bar{\nu} = \begin{cases} \dfrac{1-2\nu}{1-\nu} & \text{в случае плоской деформации} \\ 1-\nu & \text{в случае плоского напряженного состояния} \end{cases}$$

r — радиальная координата

Здесь и далее штрихом обозначается операция дифференцирования.

Введем безразмерные радиус $\rho = r/R_1$ и температуру $\tau = T/T_1$, где R_1 и T_1—соответственно радиус и температура внутренней поверхности цилиндра. Распределение температур по толщине цилиндра в стационарном случае при условии постоянства коэффициента теплопроводности описывается зависимостью [3]

$$\tau = 1 + \frac{\Delta T}{\ln \mu} \ln \rho \tag{1.2}$$

где

$$\mu = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\Delta T = \frac{T_2 - T_1}{T_1} \quad (T_2 < T_1)$$

Здесь R_2 и T_2 — соответственно радиус и температура внешней поверхности цилиндра.

Принимая в качестве независимой переменной температуру τ и произведя в уравнении (1.1) замену переменной, получим разрешающее уравнение осесимметричной задачи неоднородной термоупругости в виде

$$\sigma'' + \beta(\tau)\sigma' + \gamma(\tau)\sigma = \delta(\tau) \tag{1.3}$$

где $\sigma = \frac{\sigma_r}{p_1}$, p_1 — внутреннее давление

$$\beta(\tau) = 3\frac{\rho'}{\rho} - \frac{E'}{E}, \quad \gamma(\tau) = -\nu\frac{E'\rho'}{E\rho}, \quad \delta(\tau) = \frac{E(\rho')^2}{p_1\rho(\nu-1)}\alpha_T$$

Радиус выражается через температуру τ с помощью зависимости (1.2)

$$\rho = \exp h(\tau - 1) \tag{1.4}$$

где $h = \frac{\ln\beta}{\Delta T}$.

Аргумент изменяется в пределах

$$\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$$

где $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 1 + \Delta T$.

Решение уравнения (1.3) должно удовлетворять граничным условиям

$$\sigma(1) = 1, \quad \sigma(1 + \Delta T) = \lambda \tag{1.5}$$

где $\lambda = \frac{p_2}{p_1}$, p_2 — наружное давление.

Классический подход к решению уравнения типа (1.3), заключающийся в отыскании базисных функций в виде бесконечных полиномов и определении частного решения методом вариации постоянных удается применить к сравнительно небольшому классу специальных уравнений. Сюда относятся уравнения Бесселя, Матье, Лежандра, Лаггера, Вебера, Эйри, гипергеометрические, для которых найдены и табулированы базисные функции. Эти уравнения представляют незначительную часть возможных линейных уравнений с переменными коэффициентами.

В случае произвольной неоднородности в основной массе работ, посвященных этой проблеме, используется метод последовательных приближений в различных модификациях [1].

2. В качестве одного из методов получения приближенного замкнутого решения поставленной задачи при произвольном характере неоднородности предлагается использовать матричный вариант метода фазовых интегралов (ВКБ) [4, 5].

С помощью подстановки

$$\sigma = \Sigma\exp\left(-\frac{1}{2}\int^{\tau}\beta d\tau\right) \tag{2.1}$$

приведем (1.3) к виду

$$\Sigma'' + k^2(\tau)\Sigma = q(\tau) \tag{2.2}$$

где

$$k^2(\tau) = \gamma(\tau) - \frac{1}{4}\beta^2(\tau) - \frac{1}{2}\beta'(\tau)$$

$$q(\tau) = \delta(\tau)\exp\left(\frac{1}{2}\int^{\tau}\beta d\xi\right)$$

Обозначив

$$\Sigma = x_1, \ \Sigma' = x_2 \tag{2.3}$$

получим из (2.2) каноническое уравнение в фазовых координатах

$$X' = A(\tau)X + Bq(\tau) \tag{2.4}$$

где

$$X(\tau) = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}, \quad A(\tau) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Собственные числа матрицы A определяются из уравнения

$$\det(A - zE) = 0$$

и равны

$$z_1 = ik, \quad z_2 = -ik$$

а соответствующие собственные векторы — $\{1, ik\}$ и $\{1, -ik\}$.

Введем преобразование

$$X = RF \tag{2.5}$$

где $F = \{f_1, f_2\}^T$ — неизвестный вектор, R — квадратная (2×2) матрица, столбцами которой являются координаты собственных векторов матрицы A.

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ ik & -ik \end{vmatrix} \tag{2.6}$$

Тогда уравнение относительно F принимает вид

$$\begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} ik & 0 \\ 0 & -ik \end{vmatrix}\begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \end{vmatrix} - \frac{k'}{2k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \end{vmatrix} + \frac{iq}{2k}\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} \tag{2.7}$$

Структура системы уравнений (2.7) показывает, что в случае, когда функция k изменяется плавно и не принимает нулевых значений во всем диапазоне изменения аргумента, взаимодействие уравнений слабое и система распадается на два независимых неоднородных уравнения первого порядка относительно введенных фазовых координат f_1 и f_2.

$$f_1' = \left(ik - \frac{k'}{2k}\right) f_1 - \frac{iq}{2k}$$

$$f_2' = \left(-ik - \frac{k'}{2k}\right) f_2 + \frac{iq}{2k}$$

решения которых (фазовые интегралы) легко определяются

$$f_1 = \left(C_1 - \frac{i}{2}\psi_2\right)\varphi_1 \tag{2.8}$$

$$f_2 = \left(C_2 + \frac{i}{2}\psi_1\right)\varphi_2 \tag{2.9}$$

где

$$\varphi_1 = k^{-\frac{1}{2}} \exp\left(i\int^{\xi} k\,d\xi\right), \qquad \psi_1 = \int^{\xi} q(\xi)\,\varphi_1(\xi)\,d\xi\,.$$

$$\varphi_2 = k^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-i\int^{\xi} k\,d\xi\right), \qquad \psi_2 = \int^{\xi} q(\xi)\,\varphi_2(\xi)\,d\xi$$

Располагая решениями (2.8), (2.9), учитывая вид матрицы R (2.6), из представлений (2.5), (2.3) и (2.1) получим

$$c = C_1\tilde{\varphi}_1 + C_2\tilde{\varphi}_2 + \frac{i}{2}\left(\psi_1\tilde{\varphi}_2 - \psi_2\tilde{\varphi}_1\right) \tag{2.10}$$

где

$$\tilde{\varphi}_1 = k^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\int^{\xi}\left(ik - \frac{1}{2}\beta\right)d\xi\right]$$

$$\tilde{\varphi}_2 = k^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\int^{\xi}\left(ik + \frac{1}{2}\beta\right)d\xi\right]$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий (1.5).

3. Функции $f_1^0 = C_1\tilde{\varphi}_1$ и $f_2^{1} = C_2\tilde{\varphi}_2$ являются приближенными базисными функциями уравнения (2.2) и точными базисными функциями уравнения сравнения, образованного двукратным дифференцированием функции f_1^{II} (или f_2^{0})

$$f'' + k^2(1 + g)f = 0 \tag{3.1}$$

где f означает любое из частных решений f_1^{II} или f_2^{I}.

$$g = \frac{1}{2k^2}\left[\frac{k''}{k} - \frac{3}{2}\left(\frac{k'}{k}\right)^2\right] \tag{3.2}$$

Левые части уравнений (3.2) и (2.2) совпадают, если

$$|g| \ll 1$$

Таким образом, необходимым условием существования приближенных решений (2.8) и (2.9) является неравенство, накладываемое на функцию неоднородности

$$\left|\frac{1}{2k^2}\left[\frac{k''}{k}-\frac{3}{2}\left(\frac{k'}{k}\right)^2\right]\right| \ll 1 \tag{3.3}$$

4. Пусть зависимость модуля Юнга от температуры носит линейный характер [6]

$$E = E_0(1-\Delta E_1\tau) \tag{4.1}$$

где E_0 — невозмущенный модуль упругости

$$\Delta E_1 = \frac{\beta_1 T_1}{E_0}$$

β_1 — эмпирическая константа материала.
Величина $\Delta E_1 \cdot 100\%$ показывает, на сколько процентов снижается модуль упругости на внутренней поверхности в результате нагрева по сравнению с невозмущенным модулем.

Левая часть неравенства (3.3) в случае зависимости (4.1) принимает вид

$$g = \frac{M(\tau)}{2N^2(\tau)}\left[S(\tau)-\frac{5}{8}\frac{M(\tau)}{N(\tau)}\right] \tag{4.2}$$

где

$$M(\tau) = h(\bar{\nu}-1.5\,S^2(\tau)) - 1.5\,S^3(\tau)$$

$$N(\tau) = -2.25\,h^2 + (\bar{\nu}-1.5)\,hS(\tau) - 0.75\,S^2(\tau)$$

$$S(\tau) = \frac{\Delta E_1}{1-\Delta E_1\tau}$$

Анализ выражения (4.2) показывает, что при $h \to \infty$, то есть в случае отверстия радиуса R_1 в бесконечной плоскости, получаем точное решение, так как $g(\tau) \to 0$, при $\Delta E_1 = 0$ ($\beta_1 = 0$) получаем точное решение, так как $g(\tau) \equiv 0$. В остальных случаях получаем приближенное решение.

Рассмотрим случай нагружения толстостенного цилиндра ($\mu = 10$) со значительным перепадом температур ($T_2 \ll T_1$, $\tau_2 \to 0$), причем модуль упругости материала на внутренней поверхности составляет 50% модуля в ненагретом состоянии ($\Delta E_1 = 0.5$). Коэффициент Пуассона примем 0,33. В этом случае аргумент изменяется в пределах от 1 на внутренней до 0 — на наружной поверхностях. Степень точности приближенного решения будет переменной для разных температур и определяется величиной $g-g(\tau)$. Абсолютная величина g при указанных значениях параметров цилиндра изменяется между значениями

$$|g(1)| = 0.0115 \ll 1, \quad |g(0)| = 1.0013 \ll 1$$

Отсюда следует, что использование решений типа (2.10) в этом случае корректно.

Очевидно, что предлагаемая методика допускает обобщение и на другие случаи распределения температуры по толщине цилиндра.

Институт математики
с ВЦ АН МССР
Кишиневский политехнический
институт им. С. Лазо

Поступила 13 II 1979

Վ. Ա. ԳՈՐԴՈՆ, Գ. Բ. ԿՈԼՉԻՆ

ՓԱԶԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ ՈՉ ՀԱՄԱՍԵՌ ԳԼԱՆԻ ՋԵՐՄԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԽՆԴՐՈՒՄ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է քվազիստատիկ առանցքասիմետրիկ խնդիր, երբ նյութի առաձգականության մոդուլը տրված է որպես ջերմաստիճանի ֆունկցիա։

Փոփոխական գործակիցներով անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարումը շառավղային լարման համար, երբ դիտարկվում է որպես ջերմաստիճանի ֆունկցիա, լուծվում է փազային ինտեգրալների մատրիցային մեթոդով։

Ստացվել է փակ մոտավոր լուծում։ Սկզբնական հավասարման և ստացված լուծումների դիֆերենցելուց և նրանց օգնությամբ ստացված հավասարման բաղդատման նույնությունից ելնելով ձևակերպվում է մոտավոր լուծումների գոյության անհրաժեշտ պայմանը ու համասեռության ֆունկցիայի վրա դրված անհավասարության ձևով։

Թվային օրինակի վրա ցույց է տրված մեթոդի կիրառման հնարավորությունը, երբ առաձգականության մոդուլը գծայնորեն է կախված ջերմաստիճանից։

PHASE INTEGRAL METHOD IN THE PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR THE NON-HOMOGENIOUS CYLINDER

V. A. GORDON, G. B. COLTHCIN

Summary

The axisymmetrical problem of a non-homogeneous thermoelasticity is solved by the phase integral method. The problem is redused to the

solution of two coupled first-order differential equations. The coefficients of initial equation must subordinate by certain unequality.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колчин Г. Б.* Плоские задачи теории упругости неоднородных тел. Кишинев, Штиинца, 1977.
2. *Москвитин В. В.* Сопротивление вязкоупругих материалов. М., Наука, 1974.
3. *Карлсроу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М., Наука, 1964.
4. *Хединг Д.* Введение в метод фазовых интегралов. М., Мир, 1965.
5. *Гордон В. А.* Изгиб неоднородной балки на неоднородном упругом основании. Сб. исследования механического сопротивления материалов и конструкций. Вып. 28. М., МИСИ, 1978.
6. *Колчин Г. Б.* Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов. Кишинев, Картя молдовеняскэ, 1971.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, №6, 1979 Механика

А. М. СИМОНЯН

ИССЛЕДОВАНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ АЛЮМИНИЕВЫХ МОНОКРИСТАЛЛОВ

Как известно [1], обычно применяемые металлы являются поликристаллическими, то есть составленными из большого числа соединенных друг с другом мелких зерен, каждое из которых собою представляет монокристалл, в пределах которого ориентация атомных плоскостей является неизменной.

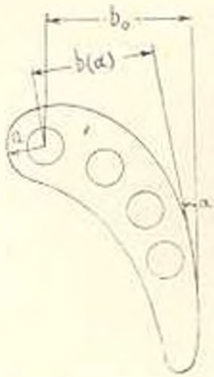
Реологические и прочностные свойства металлов существенно зависят от таких регулируемых характеристик, как размер зерна [2, 3], упрочнение границ зерен [4] и др. Для изучения средств воздействия на реологические свойства металлов полезным представляется исследование закономерностей ползучести самих монокристаллов, составляющих зерна. С другой стороны, это могло бы помочь моделированию работы металла при длительных температурно-силовых воздействиях.

В настоящей работе проведены исследования монокристаллов алюминия, имеющих кубическую гране-центрированную структуру, в условиях ступенчатых изменений напряжения и температуры.

1. Методика исследований

Для получения монокристаллов алюминия использовался метод Чалмерса, основанный на плавлении и медленном однонаправленном остывании расплавленного металла. Принципиальная конструктивная схема заключается в следующем. В графитном контейнере помещаются приставленные друг к другу поликристаллический стержень и кусок монокристалла, являющийся семенем. Контейнер помещен в кварцевую трубу, внутри которой создается атмосфера аргона для предотвращения коррозии алюминия. Кварцевая труба закреплена на уровне цилиндрического отверстия печи, перемещающейся вдоль образующей цилиндрической поверхности трубы по рельсам со скоростью 9.5 *см/час*. Печь снабжена терморегулирующим и контролирующим приспособлениями. Первоначальным нагревом печи добивались того, чтобы стык между семенем и поликристаллическим стержнем расплавился бы, в то время как часть семени оставалась бы в твердом состоянии. После этого включался механизм перемещения печи. Тем самым создавалась зона затвердения внутри семени, перемещающаяся затем по длине всего образца. Важным оказывался вопрос хорошего соединения в стыке между семенем и поликристаллическим стержнем. После протравливания в растворе NaOH монокристаллические стержни помещались в рентгеновский аппарат Philips Electronics Ltd. На поверхность кристалла подавался тонкий пучок лучей, отражающийся на специальную пленку Kodak Safety film NS, причем отражение, естественно, имело место от плоскостей, проходящих через любые три узла кристаллической решетки. На пленке после проявления возникала система точек, по которым расшифровывалась ориентация атомных плоскостей внутри монокристалла. Для получения заданной ориентации семя поворачивалось в двух плоскостях на некоторые рассчитываемые углы по отношению к поликристаллическому стержню, для чего изготовлялись специальные графитовые вкладыши внутрь контейнера.

Испытания монокристаллических образцов проводились в масле Vegetable oil, постоянно перемешиваемом магнитиками, вращающимися в переменном магнитном поле, при температурах в пределах 200—240 С и растягивающих напряжениях 0.562—1.698 $кг/мм^2$, при этом обеспечивалось постоянство напряжения, благодаря специальной конфигурации рычага, передающего нагрузку. Плечо a рычажного приспособления (фиг. 1), передающее нагрузку на образец, было принято не зависящим от поворота рычага, а плечо b, к которому подвешен внешний груз, был сконструирован по форме



Фиг. 1. Форма нагрузочного рычага

$$b(\alpha) = \frac{b_0}{1 + \frac{2a}{l_0}} \tag{1.1}$$

где $b_0 = b(0)$, l_0 — длина образца до деформации. Форма рычага была сконструирована соответственно длине образца 45 *мм*. Формула (1.1) основана на гипотезе объемной несжимаемости материала и не учитывает возможности образования шейки у образца. Однако, как показали эксперименты, у образцов монокристаллов алюминия шейка не образовывалась ни в одном из испытаний даже при достижении деформаций, равных 20%.

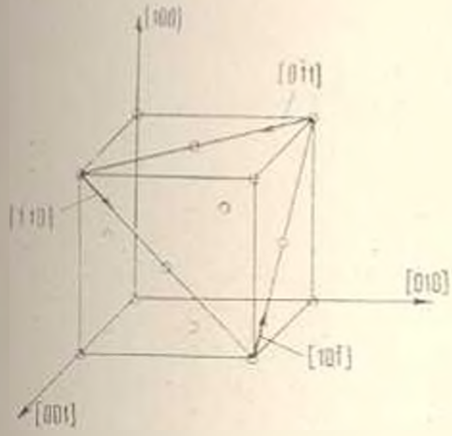
2. *Расчет напряжений в системах скольжения кристаллов с гране-центрированной кубической структурой*

Как известно [5], скольжение внутри кристалла возможно лишь в определенных кристаллографических плоскостях и лишь в определенных направлениях, то есть лишь в так называемых системах скольжения. Для любой гране-центрированной кубической решетки скольжение возможно лишь в четырех октаэдрических плоскостях, которые в индексах Миллера запишутся так: (111), $(11\bar{1})$, $(1\bar{1}1)$ и $(\bar{1}11)$ или, что то же, в системе плоскостей $\{111\}$, причем лишь в системе направлений $\langle 110 \rangle$. Поясним это иллюстрацией на фиг. 2. Здесь взаимно-перпендикулярные плоскости (001), (010) и (100) соответствуют граням куба в кубической решетке.

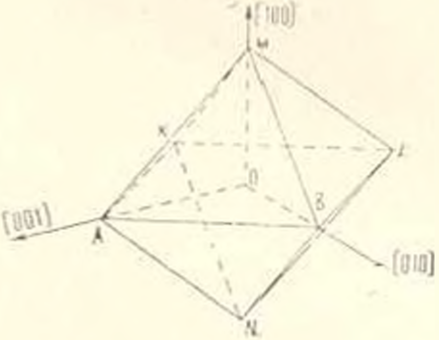
плоскость (111), нормаль которой имеет направление [111], является одной из октаэдрических плоскостей, по которым возможно скольжение. Направлениями скольжения здесь могут быть $[10\bar{1}]$, $[0\bar{1}1]$ и $[\bar{1}10]$, полученные при обходе контура против часовой стрелки, система $<110>$ здесь включает и противоположные им направления $[\bar{1}01]$, $[01\bar{1}]$ и $[1\bar{1}0]$. Ясно, что, например, $\tau_{[10\bar{1}]}(111) = -\tau_{[\bar{1}01]}(111)$, то есть рассмотрение первых трех направлений достаточно для индексации напряжений в системе скольжения (111), $<110>$.

Система плоскостей скольжения, равноудаленных от точки 0, составляет октаэдр, показанный на фиг. 3. Положим, что осевое напряжение σ имеет следующую ориентацию относительно осей x, y, z, или, что то же, [100], [010] и [001]:

$$(\widehat{\sigma, x}) = \alpha; \quad (\widehat{\sigma, y}) = \beta; \quad (\widehat{\sigma, z}) = \delta$$



Фиг. 2. Иллюстрация кубической гранецентрированной решетки



Фиг. 3. Иллюстрация плоскостей скольжения

Если направление σ задано в индексах Миллера в виде $[abc]$, то углы α, β и δ могут быть вычислены по формулам:

$$\alpha = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \qquad \beta = \arccos \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\delta = \arccos \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{2.1}$$

После ряда выкладок получили нижеследующие формулы для определения касательных напряжений, соответствующих всем системам скольжения:

$$\tau_{AB}(AMB) = \tau_{[01\bar{1}]}(111) = \frac{\sigma}{\sqrt{6}}(\cos\beta - \cos\delta)(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\delta)$$

$$\tau_{MA}(AMB) = \tau_{[\bar{1}01]}(111) = \frac{\sigma}{\sqrt{6}}(\cos\delta - \cos\alpha)(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\delta)$$

$$\tau_{BM}(AMB) = \tau_{[\bar{1}10]}(111) = \frac{\sigma}{\sqrt{6}}(\cos\alpha - \cos\beta)(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\delta)$$

$$\tau_{KL}(BML) = \tau_{[0\bar{1}\bar{1}]}(11\bar{1}) = \frac{\sigma}{\sqrt{6}}(-\cos\beta - \cos\delta)(\cos\alpha + \cos\beta - \cos\delta)$$

$$\tau_{LM}(BML) = \tau_{[101]}(11\bar{1}) = \frac{\sigma}{\sqrt{6}}(\cos\alpha + \cos\delta)(\cos\alpha + \cos\beta - \cos\delta)$$

$$\tau_{MB}(BML) = \tau_{[\bar{1}10]}(11\bar{1}) = \frac{\sigma}{\sqrt{6}}(\cos\beta - \cos\alpha)(\cos\alpha + \cos\beta - \cos\delta) \qquad (2.2)$$

$$\tau_{LK}(LMK) = \tau_{[0\bar{1}1]}(1\bar{1}\bar{1}) = \frac{\sigma}{\sqrt{6}}(\cos\delta - \cos\beta)(\cos\alpha - \cos\beta - \cos\delta)$$

$$\tau_{KM}(LMK) = \tau_{[110]}(1\bar{1}\bar{1}) = \frac{\sigma}{\sqrt{6}}(\cos\alpha + \cos\beta)(\cos\alpha - \cos\beta - \cos\delta)$$

$$\tau_{ML}(LMK) = \tau_{[\bar{1}0\bar{1}]}(1\bar{1}\bar{1}) = \frac{\sigma}{\sqrt{6}}(-\cos\alpha - \cos\delta)(\cos\alpha - \cos\beta - \cos\delta)$$

$$\tau_{KA}(AMK) = \tau_{[011]}(1\bar{1}1) = \frac{\sigma}{\sqrt{6}}(\cos\beta + \cos\delta)(\cos\alpha - \cos\beta + \cos\delta)$$

$$\tau_{AM}(AMK) = \tau_{[10\bar{1}]}(1\bar{1}1) = \frac{\sigma}{\sqrt{6}}(\cos\alpha - \cos\delta)(\cos\alpha - \cos\beta + \cos\delta)$$

$$\tau_{MK}(AMK) = \tau_{[\bar{1}\bar{1}0]}(1\bar{1}1) = \frac{\sigma}{\sqrt{6}}(-\cos\alpha - \cos\beta)(\cos\alpha - \cos\beta + \cos\delta)$$

На остальных гранях напряжения, естественно, такие же. Формально можно их переписать, меняя знаки всех индексов Миллера, например,

$$\tau_{BA}(BAN) = \tau_{[0\bar{1}1]}(\bar{1}11) = \tau_{[01\bar{1}]}(1\bar{1}\bar{1}) = \tau_{LK}(LKM) \qquad (2.3)$$

Рассматривая осевую деформацию ε в направлении действия напряжения σ как сумму вкладов от сдвиговых деформаций γ по всем системам скольжения, получим

$$\begin{aligned}\sqrt{6}\,\varepsilon = {} & (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\delta)[(\cos\beta - \cos\delta)\gamma_{[01\bar{1}]}(111) + \\ & + (\cos\alpha - \cos\beta)\gamma_{[1\bar{1}0]}(111) + (\cos\delta - \cos\alpha)\gamma_{[\bar{1}01]}(111)] + \\ & + (\cos\alpha + \cos\beta - \cos\delta)[-(\cos\beta + \cos\delta)\gamma_{[0\bar{1}\bar{1}]}(11\bar{1}) + \\ & + (\cos\alpha + \cos\delta)\gamma_{[101]}(11\bar{1}) + (\cos\beta - \cos\alpha)\gamma_{[\bar{1}10]}(11\bar{1})] + \\ & + (\cos\alpha - \cos\beta - \cos\delta)[(\cos\delta - \cos\beta)\gamma_{[0\bar{1}1]}(1\bar{1}\bar{1}) + \\ & + (\cos\alpha - \cos\beta)\gamma_{[110]}(1\bar{1}\bar{1}) - (\cos\alpha + \cos\delta)\gamma_{[\bar{1}0\bar{1}]}(1\bar{1}\bar{1})] + \\ & + (\cos\alpha - \cos\beta + \cos\delta)[-(\cos\beta + \cos\delta)\gamma_{[011]}(1\bar{1}1) + \\ & + (\cos\alpha - \cos\delta)\gamma_{[10\bar{1}]}(1\bar{1}1) - (\cos\alpha + \cos\beta)\gamma_{[\bar{1}\bar{1}0]}(1\bar{1}1)]\end{aligned} \qquad (2.4)$$

Примем гипотезу Кокса [6], согласно которой сдвиг в некоторой системе скольжения определяется лишь соответствующим касательным напряжением. Тогда из сравнения (2.2) и (2.4) убеждаемся, что вклад каждого из скольжений в деформацию ε является положительным.

Рассмотрим здесь два случая, использованные в настоящих экспериментальных исследованиях:

1) Положим, что σ совпадает с направлением [100], то есть $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$. Из формул (2.2) получим

$$\tau_{[0\bar{1}1]}(111) = \tau_{[011]}(11\bar{1}) = \tau_{[0\bar{1}1]}(1\bar{1}\bar{1}) = \tau_{[011]}(1\bar{1}1) = 0$$

$$\tau_{[10\bar{1}]}(111) = \tau_{[\bar{1}10]}(111) = \tau_{[101]}(11\bar{1}) = \tau_{[\bar{1}10]}(11\bar{1}) = \tag{2.5}$$

$$= \tau_{[110]}(1\bar{1}\bar{1}) = \tau_{[101]}(1\bar{1}\bar{1}) = \tau_{[101]}(\bar{1}11) = \tau_{[110]}(\bar{1}11) = \frac{\sigma}{\sqrt{6}}$$

Из (2.4) и (2.5) получим

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{6}} [\gamma_{[10\bar{1}]}(111) + \gamma_{[\bar{1}10]}(111) + \gamma_{[101]}(11\bar{1}) + \gamma_{[\bar{1}10]}(11\bar{1}) +$$

$$+ \gamma_{[110]}(1\bar{1}\bar{1}) + \gamma_{[101]}(1\bar{1}\bar{1}) + \gamma_{[10\bar{1}]}(\bar{1}11) + \gamma_{[110]}(\bar{1}11)] \tag{2.6}$$

2) Положим, что σ совпадает с направлением [110], то есть $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Вместо (2.5) и (2.6) здесь будем иметь

$$\tau_{[0\bar{1}1]}(111) = \tau_{[10\bar{1}]}(111) = \tau_{[011]}(11\bar{1}) = \tau_{[101]}(11\bar{1}) = \frac{\sigma}{\sqrt{6}}$$

$$\tau_{[\bar{1}10]}(111) = \tau_{[0\bar{1}1]}(1\bar{1}\bar{1}) = \tau_{[\bar{1}10]}(11\bar{1}) = \tau_{[110]}(1\bar{1}\bar{1}) =$$

$$= \tau_{[101]}(1\bar{1}\bar{1}) = \tau_{[011]}(\bar{1}11) = \tau_{[10\bar{1}]}(\bar{1}11) = \tau_{[110]}(\bar{1}11) = 0 \tag{2.7}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{6}} [\gamma_{[0\bar{1}1]}(111) + \gamma_{[10\bar{1}]}(111) + \gamma_{[011]}(11\bar{1}) + \gamma_{[101]}(11\bar{1})] \tag{2.8}$$

Если полагать, что скольжение при ползучести происходит только по одной наиболее слабой системе скольжения*, то при действии σ в направлении [100] или в направлении [110] мы должны были бы получить одинаковые деформации ползучести ε.

Если же полагать, что скольжение при ползучести происходит по всем системам скольжения, то при действии напряжения σ в направлении [100] мы должны были бы получить вдвое большую деформацию, чем при действии того же напряжения в направлении [110].

---

* Под «слабой» системой скольжения здесь подразумевается такая, в которой соответствующее напряжение τ оказывается несколько большим, чем у других, за счет неабсолютно точного соблюдения заданной ориентации образца относительно кристаллографических плоскостей.

3. Результаты экспериментальных исследований

Эксперименты, проведенные на монокристаллах алюминия при ориентации осевого напряжения [100] при следующих парах напряжений и температур: 0.562 $кг/мм^2$, 200°C; 1.019 $кг/мм^2$, 200°C; 1.47 $кг/мм^2$, $T = 200$°C; 1.019 $кг/мм^2$, 220°C; 1.019 $кг/мм^2$, 240°C показали, что кривые ползучести довольно точно аппроксимируются формулой

$$\varepsilon_э(t) = \varkappa \ln(1 + \eta t) \tag{3.1}$$

где $\varkappa$ и η — функции от напряжения и температуры, значения которых приведены в табл. 1.

Таблица 1

σ $кг/мм^2$ T°C	0.562 200	1.019 200	1.47 200	1.019 220	1.019 240
$\varkappa$	0.00104	0.04069	0.06968	0.04534	0.05604
η	1.320	2.354	3.423	2.566	8.660
δ %	7.97	0.25	1.13	1.203	0.384

Значения δ, оценивающие близость экспериментальных и теоретических кривых и приведенные в табл. 1, вычислены по формуле

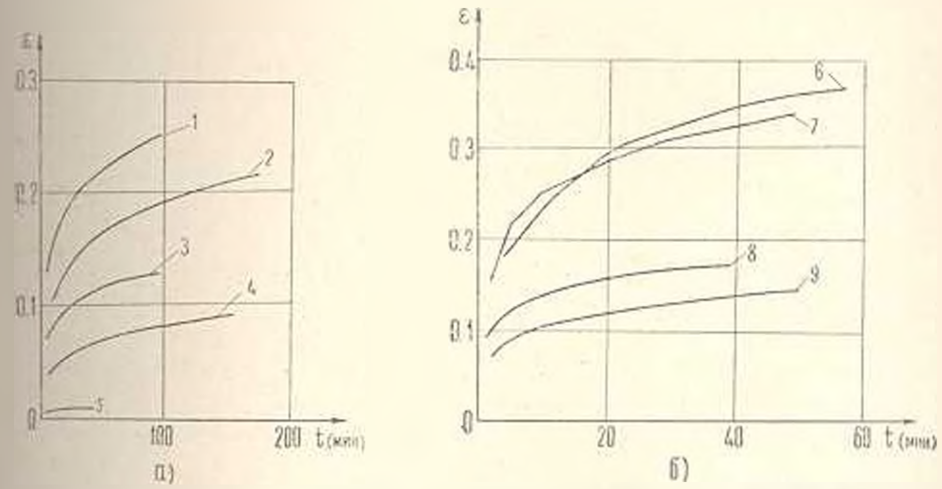
$$\delta = \frac{\int\limits_0^t |\varepsilon_c(\tau) - \varepsilon_э(\tau)|\, d\tau}{\int\limits_0^t |\varepsilon_э(\tau)|\, d\tau} \tag{3.2}$$

На фиг. 4 приведены экспериментальные кривые ползучести при указанных парах значений напряжения и температуры, а также в аналогичных условиях, но при ориентации осевого напряжения [110] относительно кристаллографических плоскостей. Как можно заключить из фиг. 4, тезис о том, что при ориентации [100] при одних и тех же условиях проведения эксперимента имеют место деформации ползучести вдвое большие, чем при ориентации [110], вполне оправдывается.

Попытаемся сконструировать общую схему деформирования алюминиевых монокристаллов. Положим, что параметр η связан с длиной пробега дислокаций и определяется значениями действующего напряжения и температуры, а взаимоуничтожение и размножение дислокации компенсируют друг друга, то есть параметр $\varkappa$, предполагаемый связанным с плотностью подвижных дислокаций, практически не зависит от времени и также определяется текущими значениями напряжения и температуры. Положим также, что в процессе ползучести происходит заклинивание дислокаций, препятствующее дальнейшему их перемещению и являющееся причиной затухания ползучести. Естественно положить, что некоторый параметр ползучести ω, определяемый процессом закаливания и взаимоуничтожения дислокаций, будет тем больше, чем больше плотность дислокации. Используя вышеуказанные предположения, в применении к аппроксимации (3.1) построим нижеследующую модель деформирования:

$$\frac{\partial \varepsilon_c}{\partial t} = \eta \varkappa e^{-\frac{\omega}{\varkappa^{\nu}}}, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon_c} = \varkappa^{\nu-1} \tag{3.3}$$

где в дальнейшем ν принят зависящим только от температуры. Легко видеть, что при постоянных напряжении и температуре система (3.3) принимает вид (3.1) при любом ν.



Фиг. 4. Экспериментальные кривые ползучести при 1. $\sigma = 1.019$ *кг/мм²*, $T = 220$°C, [100]; 2. $\sigma = 1.019$ *кг/мм²*, $T = 200$°C, [100]; 3. $\sigma = 1.019$ *кг/мм²*, $T = 220$°C, [110]; 4. $\sigma = 1.019$ *кг/мм²*, $T = 200$°C, [110]; 5. $\sigma = 0.562$ *кг/мм²*, $T = 200$°C, [100]; 6. $\sigma = 1.47$ *кг/мм²*, $T = 200$°C, [100]; 7. $\sigma = 1.019$ *кг/мм²*, $T = 240$°C [100]; 8. $\sigma = 1.47$ *кг/мм²*, $T = 200$°C, [110]; 9. $\sigma = 1.019$ *кг/мм²*, $T = 240$°C, [110]

Примем следующую программу эксперимента:

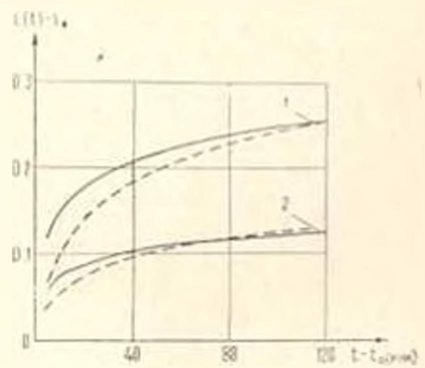
$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma_1; \quad T(t) = T_1 \ \text{при} \ t < t_0 \\ \sigma(t) &= \sigma_2; \quad T(t) = T_2 \ \text{при} \ t > t_0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

В применении к (3.4) из системы (3.3) получим

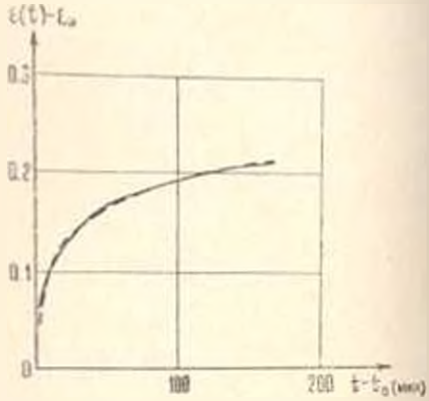
$$\varepsilon(t > t_0) = \varepsilon_0 + \varkappa_2 \ln \left[1 + \eta_2 (t - t_0) \exp\left(-\frac{\varkappa_1^{\nu_1 - 1} \varepsilon_0}{\varkappa_2^{\nu_2}} \right) \right] \tag{3.5}$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon(t_0) = \varkappa_1 \ln(1 + \eta_1 t_0)$, а индексы при η, $\varkappa$ и ν приняты соответственными индексам σ и T. При обработке экспериментальных данных было принято $\nu(200\,°C) = 1.3$, $\nu(220\,°C) = 1.357$, $\nu(240) = 1.414$.

На фиг. 5 приведены экспериментальные и теоретические кривые при $T = 200°C$ при напряжении $\sigma_1 = 1.47$ *кг/мм²* после предварительной ползучести при $\sigma_0 = 1.019$ *кг/мм²* для ориентации [100] и [110]. При построении теоретической (штриховой) кривой при ориентации образца [110] здесь и в дальнейшем были использованы значения $\varkappa$ из табл. 1, уменьшенные в два раза. Кривые 1 построены после достижения деформации ползучести $\varepsilon_0 = 0.348$, а кривые 2 — после достижения $\varepsilon_0 = 0.1623$. Расхождение экспериментальных и теоретических кривых, согласно (3.3), наблюдается, в основном, в первое время после изменения нагрузки, при этом теория предсказывает меньшую скорость ползучести, чем это имеет место в действительности. Аналогичный, но менее контрастный результат имеет место в условиях ползучести при $\sigma_1 = 1.019$ *кг/мм²* после предварительной ползучести при $\sigma_0 = 0.562$ *кг/мм²* в течение 45 *мин* (фиг. 6).



Фиг. 5. Кривые ползучести при $\sigma = 1.47$ *кг/мм²* после предварительной ползучести при $\sigma = 1.019$ *кг/мм²*. 1. для ориентации [100], 2. для ориентации [110], —— эксперимент, - - - формула (3.5)



Фиг. 6. Кривые ползучести при $\sigma = 1.019$ *кг/мм²* после предварительной ползучести при $\sigma = 0.562$ *кг/мм²* для ориентации [100]

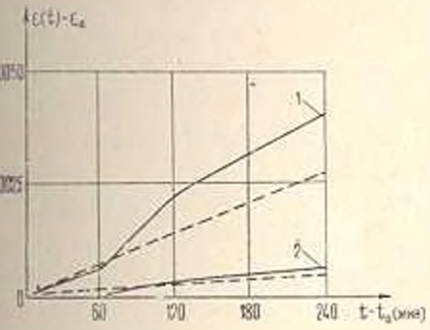
При изучении ползучести при уменьшающихся напряжениях не было получено деформаций обратной ползучести, что согласуется с (3.3). При изучении ползучести при $200°C$ по программам

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1.47 \ \text{кг/мм}^2 & \text{при } t < t_0 \\ 1.019 \ \text{кг/мм}^2 & \text{при } t > t_0 \end{cases} \tag{3.6}$$

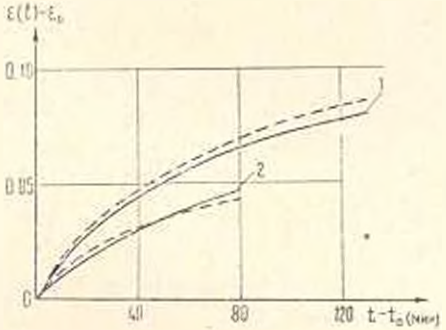
$$\sigma(t) = \begin{cases} 1.47 \ \text{кг/мм}^2 & \text{при } t < t_0 = 45 \ м \\ 0.565 \ \text{кг/мм}^2 & \text{при } t > t_0 \end{cases} \tag{3.7}$$

при ориентациях [100] и [110] при $t > t_0$ были получены дополнительные деформации $\varepsilon(t) - \varepsilon(t_0)$ на два порядка меньше, чем деформации, достигнутые к моменту t_0. Расхождение экспериментальных и теоретических данных для программы (3.6) достигает 30% (фиг. 7), однако и сами эти деформации пренебрежимо малы. Соответственно программе (3.7) деформации $\varepsilon(t) - \varepsilon_0$ в экспериментах были равны нулю; по формуле (3.5) предсказываются деформации $\varepsilon(t) - \varepsilon_0$, равные $0.5\cdot 10^{-}$[illegible] $\simeq 0$ при $t - t_0 = 160$ *м*.

Исследования ползучести при переменных температурах показали хорошее совпадение экспериментальных данных с моделью (3.3) (фиг. 8).

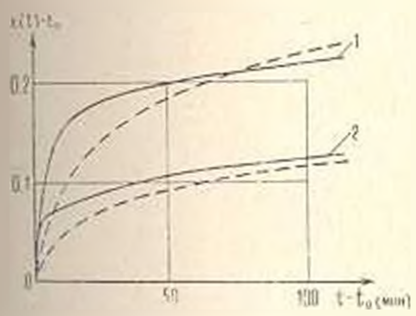


Фиг. 7. Кривые ползучести при $\sigma = 1.019$ *кг/мм²* после предварительной ползучести при $\sigma = 1.47$ *кг/мм²*. 1. для ориентации [100] при $\varepsilon_0 = 0.507$; 2. для ориентации [110] при $\varepsilon_0 = 308$

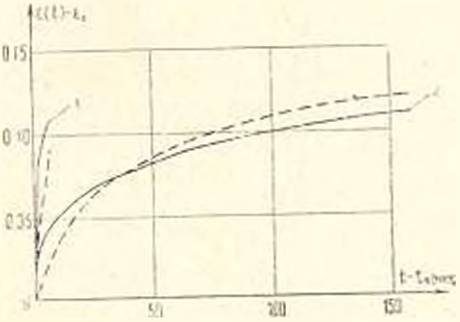


Фиг. 8. Кривые ползучести при $\sigma = 1.019$ *кг/мм²*, $T = 220$°C после предварительной ползучести при $\sigma = 1.019$ *кг/мм²*, $T = 200$°C. 1. для ориентации [100], $\varepsilon_0 = 0.2515$; 2. для ориентации [110], $\varepsilon_0 = 0.113$

При исследовании ползучести при одновременном уменьшении температуры и повышении напряжения (фиг. 9 и 10) получены некоторые расхождения эксперимента с моделью (3.3), в основном, в первое время после изменения нагрузки и температуры, как это наблюдалось и при росте напряжения при постоянной температуре (фиг. 5). Модель (3.3) предсказывает менее интенсивную ползучесть сразу после повышения нагрузки, чем



Фиг. 9. Кривые ползучести при $\sigma = 1.47$ *кг/мм²*, $T = 200$°C после предварительной ползучести при $\sigma = 1.019$ *кг/мм²*, $T = 220$°C; 1. для ориентации [100] при $\varepsilon_0 = 0.416$; 2. для ориентации [110] при $\varepsilon_0 = 0.2275$



Фиг. 10. Кривые ползучести при $\sigma = 1.47$ *кг/мм²*, $T = 200$°C после предварительной ползучести при $\sigma = 1.019$ *кг/мм²*, $T = 240$°C; 1. для ориентации [100] при $\varepsilon_0 = 0.603$; 2. для ориентации [110] при $\varepsilon_0 = 0.259$

это имеет место в действительности, в дальнейшем же расхождение уменьшается. Таким образом, при постоянных напряжениях и температурах, а также при различных программах ступенчатых изменений напряжений и температур модель (3.3) вкупе с гипотезой о зависимости скольжения в некоторой системе скольжения только от соответствующего касательного напряжения, независимо от скольжений в других системах, приводит к принципиальному согласию с экспериментальными данными, что позволяет рекомендовать ее для описания ползучести монокристаллов.

Рассмотрим теперь, собственно, скольжение в кристаллографических системах скольжения. Согласно формулам (2.5) и (2.6), для ориентации осевого напряжения σ в направлении [100] для любой активной системы скольжения имеем

$$\gamma = \frac{\sqrt{6}}{8}\varepsilon; \qquad \tau = \frac{\sigma}{\sqrt{6}} \tag{3.8}$$

Используя данные настоящего пункта, получим

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \xi \eta e^{-\frac{\gamma}{\xi}}; \qquad \frac{\partial \eta}{\partial \gamma} = \xi^{-1} \tag{3.9}$$

что при постоянных напряжении и температуре соответствует аппроксимации

$$\gamma = \xi \ln (1 + \eta t) \tag{3.10}$$

На основе данных табл. 1 и формул (3.8) составим таблицу экспериментальных значений функций ξ и η, определяющих соотношения (3.9).

Таблица 2

σ *кг/мм²* T C	0.2294 200	0.416 200	0.600 200	0.416 220	0.416 240
ξ	0.003184	0.012459	0.021335	0.013882	0.017159
η	1.320	2.354	3.423	2.566	8.660

Формулы (3.9) в отличие от (3.3) могут быть использованы для произвольной ориентации действующих напряжений. Отметим, что при процедурах построения теоретических кривых при ориентации осевого напряжения [110] фактически были использованы соотношения (3.9).

Использование соотношений (3.9) для монокристаллов имеет и еще одно достоинство. Заложенный в основе соотношений (3.9) тезис о зависимости скольжения в некоторой системе скольжения лишь от истории температуры и касательного напряжения, соответствующего данной системе скольжения, позволяет использовать соотношения (3.9) вообще для любого напряженного состояния. Действительно, в случае сложного напряженного состояния лишь изменятся формулы для определения касательного напряжения, соответствующего данной системе скольжения, и не видно, какое значение для скольжения имеет факт существования некоторым образом ориентированных в пространстве двух главных площадок с нулевыми напряжениями, имеющими место при осевом растяжении.

4. Обсуждение результатов

Перейдем к рассмотрению ряда свойств соотношений (3.9) для описания ползучести монокристаллов. В работе [7] постулировалось, а в работе [8] в условиях третьей стадии изучалось свойство преемственности материала, заключающееся в том, что материал, получивший некоторую деформацию ползучести ε_0 будет иметь тем меньшую сопротивляемость ползучести, чем при меньшем напряжении была достигнута деформация ε_0. Принимая в формуле (3.5) $\nu_1 = \nu_2 > 1$, что соответствует постоянству температуры, получим, что при одних и тех же значениях $t-t_0$, γ_0, $\varkappa_0$, ν_0 значение $\dot{\varepsilon}$ будет тем больше, чем меньше $\varkappa_1$. Поскольку $\varkappa$ является возрастающей функцией от σ, так как при постоянных напряжениях, естественно, ползучесть тем интенсивнее, чем выше напряжение, приходим отсюда к выводу, что преемственность описывается соотношениями (3.3), а следовательно, и соотношениями (3.9).

Для рассмотрения вопроса о нарушении коммутативности при ползучести [7] примем следующие программы напряжения:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad \sigma(t) = \begin{cases} \sigma_1 & 0 < t < t_0 \\ \sigma_2 & t_0 < t < 2t_0 \end{cases} \\
&2)\quad \sigma(t) = \begin{cases} \sigma_2 & 0 < t < t_0 \\ \sigma_1 & t_0 < t < 2t_0 \end{cases}
\end{aligned}
\qquad \sigma_1 < \sigma_2; \quad T = \mathrm{const} \tag{4.1}
$$

Согласно нормальному нарушению коммутативности должны иметь $\varepsilon_1(2t_0) - \varepsilon_2(2t_0) > 0$, где индексы при ε соответствуют программам нагружения (4.1). Используя соотношения (3.3) в применении к программам (4.1), получим

$$
f(x,\ y) = \varepsilon_1(2t_0) - \varepsilon_2(2t_0) =
$$

$$
= \varkappa_1 \ln \left\{ \frac{1 + \gamma_1 t_0}{1 + \gamma_1 t_0 (1 + \gamma_1 x t_0)^{-\nu'}} \left[\frac{\gamma_1 t_0 [(1 + \gamma_1 t_0)^{-\nu'} - 1]}{\frac{1}{x} + \gamma_1 t_0} + 1 \right]^y \right\} \tag{4.2}
$$

где

$$
x = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \qquad y = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}
$$

Из выражения (4.2) видно, что функция $f(x,\ y)$ является возрастающей по x и, кроме того, $f(1,\ y) > 0$, вследствие чего выражение (4.2) положительно для всех $x > 1$, $y > 1$, что соответствует $\sigma_1 < \sigma_2$, и, следовательно, соотношения (3.3) описывают нормальное нарушение коммутативности.

Соотношения (3.3) или (3.9) отрицают обратную ползучесть даже после полной разгрузки. В настоящих экспериментах при частичной разгрузке обратная ползучесть не наблюдалась. В работе [9] на монокристаллической меди обратная ползучесть не наблюдалась и при полной разгрузке.

Согласно концепции скольжения в форме (3.9), ползучесть монокристаллов при сжатии и растяжении одна и та же. Мы не располагаем какими-либо экспериментальными данными о ползучести монокристаллов при равных нагрузках противоположных знаков, но представляется полезным здесь привести аналогичные данные для поликристаллов.

Как показано в работах [10, 11], экспериментальные данные ползучести металлов при сжатии и растяжении в условиях отсутствия разупрочнения материала, то есть при отсутствии 3-й стадии, практически одни и те же.

В случае же, когда ползучесть протекает без упрочнения или при явно выраженной 3-й стадии [12—14], деформации ползучести при растяжении порою существенно превосходят деформации ползучести при сжатии в аналогичных условиях эксперимента. Однако, как показано тщательными исследованиями в работе [15], деформации с возрастающей скоростью возникают при межкристаллитном скольжении. Учитывая это, а также и то, что при изучении ползучести монокристаллов не наблюдалась третья стадия ползучести, естественным представляется предположить, что здесь концепция скольжения в форме (3.9), которая соответствует одинаковому деформированию при сжатии и растяжении, имеет основания.

Соотношения (3.3) формально могут быть рассмотрены как разновидность кинетических уравнений поврежденности, согласно модели Ю. Н. Работнова [16]

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = f(\sigma, \omega); \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \varphi(\sigma, \omega)$$

если здесь положить

$$\varphi(\sigma, \omega) = \eta\varkappa^{2} e^{-\frac{\omega}{\varkappa^{2}}}; \quad f(\sigma, \omega) = \eta\varkappa e^{-\frac{\omega}{\varkappa}}$$

где η и $\varkappa$ определяются значением σ.

Институт механики
АН Арм. ССР
Отдел металлургии
Университета Британской
Колумбии, Канада

Поступила 24 I 1979

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ԱԼՅՈՒՄԻՆԻ ՄՈՆՈԲՅՈՒՐԵՂՆԵՐԻ ՍՈՂՔԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հետազոտված է ալյումինի մոնոբյուրեղների միառանցք սողքը լարումների և ջերմաստիճանի փոփոխության տարբեր ծրագրերի դեպքում։ Փորձերը դրված են լարումների (100) և (110) բյուրեղագրաֆիկ կողմնորոշումների

...ցված։ Առաջարկված է ռեոլոգիական մոդել, որը բավարար է գրանցում սողքի պրոցեսները մոնոբյուրեղում։

ON CREEP OF ALUMINUM MONOCRYSTALS

A. M. SIMONIAN

Summary

The creep of monocrystals of aluminum under orientations [100] and [110] of tensil stress in investigated.

Experiments are carried out by different programmes of changes in stress, temperature and simultaneous change in stress and temperature.

Using the investigations on shear stresses in all twelve slip systems $\{111\}$, $\langle 110 \rangle$ and the relation of slip strain in a certain slip system and general axial strain in direction of axial stress for the experimental results, the rheological model

$$\frac{d\gamma}{dt} = \xi\gamma_* e^{-\frac{\omega}{\xi}}$$

$$\frac{d\omega}{d\gamma} = \xi^{\nu-1}$$

is suggested. At constant stress and temperature it corresponds to the following approximation

$$\gamma = \xi \ln (1 + \gamma_* t)$$

Here γ is the shear strain in a certain system, ξ and γ_* are the functions of temperature and a proper shear stress, ν is dependent on temperature only.

It is shown theoretically and experimentally that the axial creep strain of monocrystals under orientation of tensile stress [100] is twice as much as the creep under orientation of tensile stress [110].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коттрелл А. Х.* Строение металлов и сплавов. М., Металлургиздат, 1961.
2. *Куров В. Д., Мельников Г. П., Соколов А. А.* Влияние структуры материала на длительную прочность. Научн. тр. института механики МГУ, № 23, 1973.
3. *Immarigeon J.-P. A., Wallace W., Van Drunen G.* The Hot Working Behaviour of Mar M 200 superalloy compacts. DME/NAE Quarterly Bulletin. National Research Council Canada, Ottawa, April, 1977.
4. *Иванова В. С., Гордиенко Л. К.* Новые пути повышения прочности металлов. М., «Наука», 1964.
5. *Чалмерс Б.* Физическое металловедение. М., Металлургиздат, 1963.

6. *Kocks U. F.* The Relation Between Policristal Deformation and Single-Crystal Deformation. Metallurgical Transactions. vol. 1. May, 1970.
7. *Симонян А. М.* О двух вопросах в одномерной теории ползучести. Изв. АН АрмССР, Механика, 1977, т. XXX, № 3.
8. *Симонян А. М.* Экспериментальное исследование преемственности при высокотемпературной трехстадийной ползучести хромо-никелевой стали. Изв. АН АрмССР, Механика, 1978, т. XXXI, № 6.
9. *Davies P. W., Nelmes G., Williams K. R., Wilshire B.* Stress-change experiments during high-temperature creep of copper, iron and zinc. Metal Sci. J. 1973, t. 7, May.
10. *Sully A.* Creep testing in compression for simple creep assesment. Prod. Engin., 1953, t. 24, No. 4.
11. *Торшенов Н. Г.* Ползучесть алюминиевого сплава Д-16Т при сжатии. ПМТФ, 1961, № 6.
12. *Лепин Г. Ф., Тихонов А. П., Горшнич В. Ф., Дубинин В. П., Осасюк В. В.* К вопросу о ползучести металлов и сплавов в условиях растяжения и сжатия при повышенных температурах. Проблемы прочности. 1969, № 3.
13. *Соснин О. В.* О ползучести материалов с различными характеристиками на растяжение и сжатие. ЖПМТФ, 1970, № 5.
14. *Tilly G. P., Harrison G. F.* Interpretation of tensile and compressive creep behaviour of two nickel alloys. J. Strain Anal., 1973, t. 8, No. 2.
15. *Грант Н. Дж., Чаудхури А. Р.* Ползучесть и разрушение. Сб. «Ползучесть и возврат». М., Металлургиздат, 1961.
16. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. М., «Наука», 1974.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 6, 1979 Механика

А. А. ЗЕВИН

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ СТАРЕЮЩИХ МАТЕРИАЛОВ

В предлагаемой статье для описания поведения упругих и стареющих наследственных сред используются операторы специальной конструкции. Применение их позволяет представить решение широкого класса задач в виде функций одного оператора и распространить принцип Вольтерра на некоторые типы неоднородных сред.

Приводится ряд методов приближения функций оператора, используя которые можно построить решение задачи наследственной теории упругости или теории ползучести стареющих материалов на основе численного решения соответствующей задачи для упругого тела.

Для упрощения обозначений операторы, описывающие поведение анизотропного материала, идентифицируются одним индексом, в отличие от общепринятого обозначения $\tilde{E}_{ijkl}$.

§ 1. Пусть свойства наследственной среды (возможно, анизотропной) описываются операторами

$$\tilde{E}_s = E_s[I - \Gamma_s^*], \qquad \Gamma_s^* y(t) = \int_{\tau_0}^{t} \Gamma_s(t, \tau) y(\tau) d\tau, \qquad I y(t) = y(t) \quad (1.1)$$

Принцип Вольтерра [1] позволяет получить решение наследственной задачи, заменив упругие константы E_s в решении задачи теории упругости операторами (1.1). Таким образом, устанавливается соответствие

$$F_0(E_1, \ldots, E_n) \leftrightarrow F_0(\tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_n) \quad (1.2)$$

между функциями упругих констант и функциями операторов.

Если свойства материала в различных точках тела различны, то принцип Вольтерра в указанной формулировке не может быть использован, так как операции дифференцирования и интегрирования по координатам непереставимы с операцией умножения на $\tilde{E}_s(r)$ ($r = (x_1, x_2, x_3)$ — точка тела). Кроме того, возникают существенные трудности при фактической реализации принципа в случаях, когда решение упругой задачи является трансцендентной функцией упругих постоянных, или задача решается численно и зависимость решения от констант в явном виде неизвестна. Эти трудности частично преодолеваются методом аппроксимаций

[2, 3], который применим к задачам наследственной теории упругости, если свойства наследственно-упругого материала описываются одним оператором (обычно полагается, что модуль объемной деформации — константа). В общем случае затруднения остаются существенными.

Более гибкой является несколько иная трактовка принципа Вольтерра, развитая в [4], которая позволяет распространить его на некоторые классы неоднородных сред и оказывается удобной при фактической реализации.

Все операторы Γ_s^*, фигурирующие в исходных уравнениях, представим (если это возможно) в виде функций некоторого одного оператора H^*:

$$\Gamma_s^* = P_s(H^*) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k H^{*k} \tag{1.3}$$

причем функции $P_s(\lambda)$ предполагаются регулярными в точке $\lambda = 0$.

Наследственной задаче поставим в соответствие задачу теории упругости с константами материала

$$E_s^0(\lambda) = E_s[1 - P_s(\lambda)] \tag{1.4}$$

зависящими от числового параметра λ. Решение наследственной задачи получим, заменив в решении упругой задачи параметр λ оператором H^*.

Таким образом, вместо соответствия (1.2) устанавливается соответствие

$$F(\lambda) \leftrightarrow F(H^*) \tag{1.5}$$

между функциями фиктивного параметра λ, введенного в уравнения упругой задачи, и функциями оператора H^*.

Операторы типа (1.3) позволяют распространить принцип Вольтерра на некоторые классы неоднородных сред.

Пусть от точки тела зависят упругие модули и параметры функций P_s (но не H^*):

$$E_s = E_s(r), \quad \Gamma_s^*(r) = P_s(r, H^*) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(r) H^{*k} \tag{1.6}$$

Наследственной задаче поставим в соответствие задачу для неоднородного упругого тела с упругими модулями

$$E_s^0(r, \lambda) = E_s(r)[1 - P_s(r, \lambda)] \tag{1.7}$$

Соответствие (1.5) между решениями упругой и наследственной задачи остается справедливым [4].

Таким образом, если возможно представление исходных операторов в виде (1.3) или (1.6), то решение наследственной задачи приводится к вычислению функций вида

$$\varphi(r, t) = F(r, H^*) f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(r) H^{*k-1} f(t) \tag{1.8}$$

где q — некоторый параметр, характеризующий напряженно-деформированное состояние тела; $I(r, \lambda)$ — решение соответствующей упругой задачи; $l(t)$ — известная функция времени, пропорционально которой изменяются внешние воздействия.

Несмотря на то, что в исходных уравнениях может фигурировать несколько операторов Γ_s^*, решение (1.8) является функцией только одного оператора H^*. Методы приближения функций одного оператора, применимые в общем случае к операторам с неинвариантными ядрами, приводятся в разделах 3—5 настоящей статьи.

Рассмотрим некоторые типы наследственных сред, поведение которых может быть описано операторами вида (1.3), (1.6).

В теории наследственной упругости находят широкое применение резольвентные операторы, ядра которых имеют интегрируемую особенность [1]. Пусть упруго-наследственная среда или однородна, или неоднородна, но во всех точках операторы остаются инвариантными относительно начала отсчета времени (например, неоднородность обусловлена воздействием стационарного неоднородного температурного поля). Тогда в каждой точке r ядра операторов Γ_s^* могут быть достаточно точно аппроксимированы агрегатами обобщенных дробно-экспоненциальных функций

$$\Gamma_s(r, t-\tau) = \sum_{p=1}^{l} \chi_{sp}(r) \exp[-\mu(t-\tau)]\, \Im_\alpha(-\beta_{sp}(r), t-\tau), \quad -1 < \alpha \tag{1.9}$$

где $\Im_\alpha(-\beta, t-\tau)$ — дробно-экспоненциальная функция Ю. Н. Работнова [1].

Каждое слагаемое в выражении (1.9) является резольвентой ядра А. Р. Ржаницына [5] с параметром $(-\beta_{sp})$. Используя операторную конструкцию резольвенты, получим оператор, соответствующий ядру (1.9)

$$\Gamma_s^*(r) = \sum_{p=1}^{l} \frac{\chi_{sp}(r) H^*}{I + \beta_{sp}(r) H^*}, \qquad H(t-\tau) = e^{-\mu(t-\tau)}(t-\tau)^\alpha / \Gamma(\alpha+1) \tag{1.10}$$

Представление (1.10) является частным случаем (1.6).

Отметим, что параметры μ и α являются внутренними параметрами ядра H, поэтому они полагаются независящими от координат и индексов s, p.

В частности, если свойства материала описываются агрегатами дробных экспонент, то операторы $\Gamma_s^*(r)$ также имеют конструкцию (1.10), но $H(t-\tau) = (t-\tau)^\alpha / \Gamma(\alpha+1)$, то есть ядро H совпадает с ядром Абеля.

Характеристики материала упругой задачи, соответствующие оператору (1.10), имеют вид

$$E_s^\circ(r, \lambda) = E_s(r) \left| 1 - \sum_{p=1}^{l} \frac{\chi_{sp}(r)\lambda}{1 + \beta_{sp}(r)\lambda} \right| \tag{1.11}$$

Поведение стареющих материалов может быть описано операторами вида (1.3), (1.6) лишь при определенных допущениях. Однако, и в этом случае изложенная трактовка принципа Вольтерра оказывается полезной.

Пусть, например, свойства неоднородного изотропного стареющего тела описываются операторами сдвига и объемной деформации $\bar{E}_1(r)$ и $\bar{E}_2(r)$, ядра которых отличаются только множителем

$$\bar{E}_1(r) = E_1(r)[I - Z_1(r)H^*], \qquad \bar{E}_2(r) = E_2(r)[I - Z_2(r)H^*] \tag{1.12}$$

Даже в этом простейшем случае принцип Вольтерра в формулировке [1] не может быть использован. Подход, изложенный выше, позволяет применить к решению операторный метод, поставив в соответствие наследственной задаче задачу теории упругости для неоднородного тела с характеристиками материала

$$E_1(r, \lambda) = E_1(r)[1 - Z_1(r)\lambda], \qquad E_2(r, \lambda) = E_2(r)[1 - Z_2(r)\lambda] \tag{1.13}$$

Важный для практики случай неоднородно стареющей наследственной среды, поведение которой описывается уравнениями Н. Х. Арутюняна [6], рассмотрен в [7].

В общем случае представления (1.3), (1.6) следует рассматривать как аппроксимацию ядер $\Gamma_n(t, \tau)$, получаемых из опытов, разложениями по итерированным ядрам, порождаемым некоторым (произвольным) ядром $H(t, \tau)$.

Отметим, что операторы вида (1.3) естественным образом появляются в соотношениях, связывающих внутренние усилия и деформации неоднородно армированных стержневых систем из стареющего наследственного материала [8].

§ 2. Для обоснования методов приближения функций оператора, излагаемых в разделах 3, 4, предварительно получим решение уравнения типа Вольтерра в форме, несколько отличной от классической. Такое представление имеет также самостоятельное значение, так как может быть использовано для эффективного приближенного решения уравнений

Рассмотрим интегральное уравнение типа Вольтерра 2-го рода

$$y(t) - \lambda H^* y(t) = f(t) \tag{2.1}$$

в котором $y(t)$ — искомая, $f(t)$ — заданная функция; λ — параметр уравнения в общем случае комплексный.

Классическое решение уравнения (2.1) представляет собой ряд по степеням параметра λ:

$$y(t) = f(t) + \lambda R^*(\lambda) f(t), \qquad R^*(\lambda) f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} y_n(t), \quad y_0(t) = f(t) \tag{2.2}$$

где $y_n(t) = H^{*n} f(t)$ — итерированные функции, $R^*(\lambda)$ — резольвента H^*.

Покажем прежде всего, что итерированные функции линейно независимы. Для доказательства воспользуемся интегральным представлением регулярной функции оператора [9]

$$F(H^*)f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega} F(\lambda)\, W(\lambda, t)\, d\lambda$$

$$W(\lambda, t) = \lambda^{-1}\,[I + \lambda^{-1} R^*(\lambda^{-1})]\, f(t) \tag{2.3}$$

где ω — замкнутый контур в области регулярности $F(\lambda)$, обходящий точку $\lambda = 0$, $R^*(\lambda^{-1})$ — резольвента уравнения типа (2.1) с параметром λ^{-1}.

Допустим, что $[\beta_0 + \beta_1 H^* + \cdots + \beta_m H^{*m}]\, f(t) = 0$, из (2.3) получим $\beta_0 + \beta_1\lambda + \cdots + \beta_m\lambda^m = 0$ на любом контуре ω. Это невозможно в силу линейной независимости функций λ^n.

Рассмотрим теперь, наряду с (2.1), уравнение

$$\tilde{y}(t) - \lambda H^* \tilde{y}(t) = f(t) + \delta Q_m(H^*)\, f(t) \tag{2.4}$$

где $Q_m(H^*)$ — некоторый полином с коэффициентом, равным единице при старшей степени H^*:

$$Q_m(H^*)\, f(t) = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n H^{*n} f(t) = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n y_n(t), \qquad \alpha_m = 1 \tag{2.5}$$

δ — неопределенный параметр. Коэффициенты α_n полагаем заданными.

Будем искать решение уравнения (2.5) в виде

$$\tilde{y}(t) = \sum_{n=0}^{m-1} a_n H^{*n} f(t) = \sum_{n=0}^{m-1} a_n y_n(t) \tag{2.6}$$

Ввиду линейной независимости итерированных функций, для определения a_n воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Подставляя (2.6) в (2.5) и приравнивая коэффициенты при $y_n(t)$, получим

$$a_0 = 1 + \delta\alpha_0, \quad a_n = \lambda a_{n-1} + \delta\alpha_n \ (n = 1, \ldots, m-1), \ \lambda a_{m-1} + \delta = 0 \tag{2.7}$$

откуда

$$a_n = \lambda^n + \delta \sum_{s=0}^{n} \alpha_s \lambda^{n-s}, \qquad \delta = -1/Q_m(\lambda^{-1}) \tag{2.8}$$

Таким образом, уравнение (2.5) удовлетворяется конечным разложением по итерированным функциям.

Разность между решениями уравнений (2.1) и (2.5) $\varepsilon_m(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$ может быть найдена из уравнения

$$\varepsilon_m(t) - \lambda H^* \varepsilon_m(t) = -\delta\varepsilon_0(t), \quad \varepsilon_0(t) = Q_m(H^*)\, f(t) \tag{2.9}$$

Из (2.9) получим

$$\varepsilon_m(t) = -\delta[I + \lambda R^*(\lambda)]\,\varepsilon_0(t) \tag{2.10}$$

Таким образом, решение исходного уравнения (2.1) можно представить в виде

$$y(t) = \tilde{y}(t) + \varepsilon_m(t) = \sum_{n=0}^{m-1} \alpha_n y_n(t) + Q_m^{-1}(\lambda^{-1})[I + \lambda R^{\alpha}(\lambda)]\varepsilon_0(t) \quad (2.11)$$

Полученный результат может быть использован для приближенного решения уравнения (2.1). Распорядимся коэффициентами α_n таким образом, чтобы уклонение функции $\varepsilon_m(t)$ от нуля в рассматриваемом интервале $[\tau_0, \tau_*]$ было по возможности малым. Для этого можно минимизировать максимальное уклонение функции $|\varepsilon_m(t)|$, или квадратичное уклонение, или приравнять $\varepsilon_m(t)$ нулю в m точках $\tau_i \in [\tau_0, \tau_*]$. Последние два критерия приводят к системе линейных уравнений относительно α_n.

Если величина λ^{-1} не очень близка к корню полинома $Q_m(z)$, то функция $\varepsilon_0(t)$ будет мало отличаться от нуля, а функция $\tilde{y}(t)$ близка к $y(t)$.

Отметим, что при любом m условие $\alpha_n = 0$ дает: $\lambda = -\lambda^m$, $a_0 = 1$, $a_n = \lambda^n$, то есть приближение отрезком ряда (2.2) есть частный случай рассматриваемого. При этом погрешность приближения определяется выражением (2.10), в котором $\varepsilon_0(t) = y_m(t)$.

Эффективность рассматриваемого метода приближенного решения уравнения определяется тем, что уже при небольших m уклонение от нуля функции $\varepsilon_m(t)$ может быть сделано малым за счет соответствующего выбора α_n, в то время как функции $y_m(t)$ стремятся к нулю более медленно.

В качестве примера было решено уравнение с ядром Абеля $H(t-\tau) = (t-\tau)^{\alpha}/\Gamma(\alpha+1)$ при $\lambda = -1$, $f(t) = 1$ и $\alpha = -0.8$. Максимум абсолютной погрешности в интервале $0 \leqslant t^{\alpha+1} \leqslant 5$ составил 0.0018 при аппроксимации решения восьмью итерированными функциями.

Решение с помощью ряда (2.1) при указанных значениях параметров сходится чрезвычайно медленно. Для получения приближения с погрешностью, не превосходящей 0.0018, необходимо просуммировать около 40000 членов.

§ 3. Рассмотрим теперь задачу аппроксимации функции (1.8). Полагаем, что решение соответствующей упругой задачи $F(\lambda)$ известно в некоторых узлах λ_j (здесь и в дальнейшем точку тела считаем фиксированной и зависимость решения от r не отмечаем). Ядро $H(t, \tau)$ полагаем непрерывным или имеющим степенную особенность порядка $\alpha > -1$; функция $F(\lambda)$ предполагается регулярной в некотором круге $|\lambda| \leqslant \rho$, $\rho > 0$.

Значения $F(\lambda_j)$ могут быть найдены в результате численного решения задачи для упругого материала с фиктивными упругими модулями (1.4) или (1.7), в которых $\lambda = \lambda_j$.

Отметим, что при $\lambda = 0$ фиктивные упругие модули совпадают с фактическими, поэтому допущение о регулярности $F(\lambda)$ выполняется, если задача теории упругости с модулями $E_s(r)$ имеет единственное решение.

Будем разыскивать приближение функции $\varphi(t)$ в виде линейной комбинации итерированных функций

$$\varphi(t) = F(H^*) f(t) = \Phi_m(t) + \varepsilon(t), \qquad \Phi_m(t) = \sum_{n=0}^{m-1} c_n^{(m)} y_n(t) \tag{3.1}$$

где $\varepsilon(t)$ — погрешность аппроксимации.

Пусть λ_j $(j = 1, 2, \ldots)$ — последовательность попарно различных комплексных чисел и $G_{m-1}(\lambda)$ — полином, интерполирующий функцию $F(\lambda)$ в узлах $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Покажем, что при некоторых ограничениях на предельное распределение точек λ_j при $j \to \infty$ последовательность $\Phi_m(t) \to \varphi(t)$, если коэффициенты $c_n^{(m)}$ совпадают с коэффициентами полинома $G_{m-1}(\lambda)$.

Предположим, что последовательность λ_j удовлетворяет условиям:

а) в узлах λ_j функция $F(\lambda)$ регулярна;

б) при $j > j_*$ все числа λ_j лежат в круге $|\lambda| \leqslant \rho/3$.

Используя представление (2.3) и учитывая, что функция $w(\lambda, t)$ только множителем λ^{-1} отличается от решения уравнения (2.1) с параметром λ^{-1}, получим

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\omega \frac{F(\lambda) \sum\limits_{n=0}^{m-1} U_{m-n-1}(\lambda)\, y_n(t)\, d\lambda}{Q_m(\lambda)} + \varepsilon(t) \tag{3.2}$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\omega \frac{F(\lambda)[I + \lambda^{-1} R^*(\lambda^{-1})]\varphi_0(t)\, d\lambda}{\lambda Q_m(\lambda)} \tag{3.3}$$

где

$$U_0 = 1, \quad U_{m-n-1}(\lambda) = \sum_{s=n+1}^{m} \alpha_s \lambda^{s-n-1} \tag{3.4}$$

— полином степени $m-n-1$.

При выводе выражений (3.2)—(3.4) использовались соотношения (2.8), (2.9), (2.11).

Пусть все корни λ_j полинома $Q_m(\lambda)$ простые и лежат в замкнутой области V, заключенной внутри контура ω. Учитывая, что числитель в (3.2) — регулярная функция в области V и используя теорему о вычетах, получим

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{m-1} c_n^{(m)} y_n(t) + \varepsilon(t), \qquad c_n^{(m)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{F(\lambda_j)\, U_{m-n-1}(\lambda_j)}{Q_m'(\lambda_j)} \tag{3.5}$$

Второе из выражений (3.5) совпадает с выражением для коэффициентов интерполяционного полинома.

Покажем, что $\varepsilon(t) \to 0$ при $m \to \infty$.

Пусть контур ω совпадает с окружностью радиуса ρ. Представим функцию $E_m(\lambda, t) = \varepsilon_m(t)/Q_m(\lambda)$ в виде

$$E_m(\lambda, t) = \frac{\left(\frac{\rho}{3}\right)^{n-1} \prod\limits_{s=1}^{n-1} (K^* - z_s)\,\varphi(t)}{\prod\limits_{s=1}^{n-1} (\lambda - \lambda_{j_0+s+1})}, \tag{3.6}$$

где $z_s = \frac{3}{\rho}\lambda_{j_0+s+1}$, $K^* = \frac{3}{\rho}H^*$, $n = m - j_0$

$$\varphi(t) = \prod_{s=1}^{j_0+1} \frac{(H^* - \lambda_s) f(t)}{(\lambda - \lambda_s)} \tag{3.7}$$

— функция, ограниченная в области $t \in [t_0, \infty)$, $\lambda \in \omega$.

В силу условия б) при $j > j_0$ расстояние от λ_j до ω не меньше, чем $2\rho/3$, поэтому

$$\left|\prod_{s=1}^{n-1} (\lambda - \lambda_{j_0+s+1})\right| \geqslant \left(\frac{2\rho}{3}\right)^{n-1} \tag{3.8}$$

Таким образом,

$$|E_m(\lambda, t)| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} \gamma_{nk} K^{*k-1} \varphi(t)\right|, \qquad \gamma_{nk} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u_{nk} \tag{3.9}$$

где u_{nk} — коэффициенты полинома $(z - z_1) \dots (z - z_{n-1})$.

На основании теоремы Виетта каждый из коэффициентов u_{nk} равен сумме C_{n-1}^{n-k} произведений вида $z_{s_1} z_{s_2} \dots z_{s_{n-k}}$. Учитывая, что $|z_s| \leqslant 1$, получим оценку

$$|\gamma_{n1}| + \dots + |\gamma_{nk}| \leqslant \left(1 + \sum_{k=2}^{n} C_{n-1}^{n-k}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1$$

При фиксированном k

$$|\gamma_{nk}| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} C_{n-1}^{n-k} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n-1)^{k-1} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, коэффициенты γ_{nk} удовлетворяют условиям (а), (б) теоремы Теплица [10].

Так как $K^{*k-1}\varphi(t) \to 0$ при $k \to \infty$, на основании теоремы Теплица правая часть выражения (3.9) стремится к нулю при $n \to \infty$ и $\lambda \in \omega$. Из (3.3) следует, что $\varepsilon(t) \to 0$, так как длина контура ω ограничена.

Оценим погрешность приближения при фиксированном m.

Пусть L — длина контура ω, M — максимум модуля функции F на ω, δ_0 — минимальное расстояние от $\lambda = 0$ до ω и δ — минимальное расстояние от λ_j $(j = 1, \dots, m)$ до ω. Из (3.3) следует оценка

$$|\varepsilon(t)| \leqslant \max_{\lambda} |\varepsilon_n(t)|\, L\, M\, \xi(\delta_0, t)/2\pi\delta_0\delta^m \tag{3.10}$$

где $\xi(\delta_0, t) = 1 + \delta_0^{-1} R_0^*(\delta_0^{-1})\, 1$, R_0 — резольвента ядра $|H(t, \tau)|$.

§ 4. Доказанная сходимость последовательности $\Phi_m(t)$ к $\varphi(t)$ позволяет построить приближение (3.1), определив коэффициенты $c_k^{(m)}$ как коэффициенты полинома $G_{m-1}(\lambda)$, интерполирующего функцию $F(\lambda)$ в узлах λ_k. Точность приближения в некотором интервале времени $[\tau_0, \tau_*]$ зависит от выбора узлов интерполяции.

Из оценки (3.10) следует, что погрешность приближения будет мала, если мало уклонение от нуля функции $\varepsilon_0(t)$. Поэтому представляется целесообразным выбрать узлы λ_j так, чтобы минимизировать в интервале $[\tau_0, \tau_*]$ квадратичное уклонение, или из условия равенства $\varepsilon_0(t)$ нулю в m точках $t_i \in [\tau_0, \tau_*]$. Указанные критерии приводят к системе линейных уравнений относительно коэффициентов a_n полинома $Q_m(H^*)$. Корни уравнения $Q_m(\lambda) = 0$ определяют эффективные узлы λ_j [7]. Среди узлов, найденных изложенным методом, имеются, как правило, комплексные. Это не приводит к затруднениям, если функция $F(\lambda_j)$ известна в явном виде. Однако в случае, когда соответствующая задача теории упругости решается численно, для получения $F(\lambda_j)$ необходимо решать упругую задачу с комплексными модулями, что связано с определенными вычислительными неудобствами. В этом случае целесообразно использовать действительные узлы, определив их из условия минимума функционала

$$U(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \int_{\tau_0}^{\tau_*} \varepsilon_0^2(t)\, dt = \int_{\tau_0}^{\tau_*} [(H^* - \lambda_1 I) \ldots (H^* - \lambda_m I)\, f(t)]^2\, dt \qquad (4.1)$$

где λ_j рассматриваются как действительные параметры.

Отметим, что найденные изложенным методом узлы λ_j и, следовательно, коэффициенты приближения (3.1) зависят от оператора H^* и рассматриваемого интервала времени. Это позволяет получить хорошее приближение уже при $m = 4 \div 7$. Примеры приведены в § 6.

Из представления (2.3) следует, что последовательность $G_{m-1}(H^*) f(t) \to \varphi(t)$, если последовательность $G_{m-1}(\lambda) \to F(\lambda)$ на контуре ω. Так как ω — произвольный контур, при определении коэффициентов приближения (3.1) можно использовать некоторую заранее заданную последовательность узлов, если при этом последовательность $G_{m-1}(\lambda)$ сходится к $F(\lambda)$ в некоторой окрестности $\lambda = 0$. В частности, последовательность полиномов, интерполирующих $F(\lambda)$ в узлах Чебышева сходится к $F(\lambda)$ внутри наибольшего эллипса с фокусами $(-1,0)$, $(1,0)$, на границе которого функция F перестает быть регулярной [11]. Таким образом, коэффициенты приближения (3.1) могут быть найдены в результате интерполяции в узлах Чебышева. При этом, однако, сходимость может оказаться более медленной, чем при использовании узлов, найденных в результате минимизации функционала (4.1). Это объясняется тем, что при выборе узлов не используется информация о конкретном виде оператора H^* и интервале времени, в котором разыскивается приближение.

§ 5. Метод, изложенный в разделах 3, 4, основан на приближении функции $\varphi(t)$ линейной комбинацией итерированных функций. В настоящем разделе развит метод разложения по функциям $u_k(t)$, которые могут быть найдены из независимых интегральных уравнений, решение которых в некоторых случаях проще, чем построение итерированных функций.

Представим функцию $F(\lambda)$ в виде ряда по рациональным функциям

$$F(\lambda) = a_0 + a_1 \frac{(\lambda - \lambda_1)}{(\lambda - \alpha_1)} + a_2 \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}{(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)} + \dots \quad (5.1)$$

где λ_j и α_j — заданные числа. Коэффициенты a_0, $a_1, \dots$ легко найти, последовательно приравнивая левую часть (5.1) правой в точках $\lambda_1, \lambda_2, \dots$

Пусть точки $\lambda_j (j = 1, 2, \dots)$ стремятся к нулю, точки α_j стремятся к бесконечности и $\alpha_j \neq \alpha_k$. При указанных условиях ряд (5.1) сходится равномерно к $F(\lambda)$ в круге регулярности [12].

Рассмотрим разложение

$$\varphi(t) = F(H^*) f(t) = \left[a_0 + a_1 \frac{(H^* - \lambda_1 I)}{(H^* - \alpha_1 I)} + \right.$$

$$\left. + a_2 \frac{(H^* - \lambda_1 I)(H^* - \lambda_2 I)}{(H^* - \alpha_1 I)(H^* - \alpha_2 I)} + \dots \right] f(t) \quad (5.2)$$

Из представления (2.3) и равномерной сходимости ряда (5.1) на контуре ω следует равномерная сходимость ряда (5.2) для $t \in [\tau_0, \tau_*]$, $\tau_* < \infty$.

Каждое слагаемое ряда (5.2) можно выразить через сумму функций вида

$$u_j(t) = R^*(\vartheta_j) f(t) = \int_{\tau_0}^{t} R(\vartheta_j, t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad \vartheta_j = 1/\alpha_j \quad (5.3)$$

где $R(\vartheta_j, t, \tau)$ — резольвента ядра $H(t, \tau)$ с параметром ϑ_j.

Используя теоремы умножения резольвенты операторов [1, 13] и ограничиваясь в разложении (5.2) конечным числом членов, после некоторых преобразований получим

$$\varphi(t) \simeq \Phi_m(t) = b_0 f(t) + \sum_{j=1}^{m-1} b_j u_j(t) \quad (5.4)$$

где

$$b_j = \sum_{k=j}^{m-1} a_j d_j^{(k)} \quad (j = 0, \dots, m-1) \quad (5.5)$$

а коэффициенты $d_j^{(k)}$ определяются последовательно по формулам

$$d_0^{(1)} = r_1, \qquad d_1^{(1)} = \gamma_1$$

$$d_0^{(k)} = r_k d_0^{(k-1)}, \qquad d_1^{(k)} = d_1^{(k-1)}\left(r_k + \frac{\gamma_k}{\vartheta_1 - \vartheta_k}\right), \ldots$$

$$d_{k-1}^{(k)} = d_{k-1}^{(k-1)}\left(r_k + \frac{\gamma_k}{\vartheta_{k-1} - \vartheta_k}\right) \tag{5.6}$$

$$d_k^{(k)} = \gamma_k\left(d_0^{(k-1)} - \frac{d_1^{(k-1)}}{\vartheta_1 - \vartheta_k} - \ldots - \frac{d_{k-1}^{(k-1)}}{\vartheta_{k-1} - \vartheta_k}\right)$$

где

$$r_k = \lambda_k \vartheta_k, \quad \gamma_k = \vartheta_k (r_k - 1)$$

Из (5.2) следует, что погрешность приближения $\Xi(t) = \varphi(t) - \Phi_m(t)$ можно записать в виде

$$\xi(t) = \left| a_m I + \sum_{k=1}^{\infty} a_{m+k} \prod_{s=1}^{k} \frac{(H^* - \lambda_{m+s} I)}{(H^* - \alpha_{m+s} I)} \right| \xi_0(t)$$

$$\xi_0(t) = \prod_{k=1}^{m} \frac{(H^* - \lambda_k I)}{(H^* - \alpha_k I)} f(t) \tag{5.7}$$

Если параметры α_j заданы, то величина погрешности зависит от узлов λ_j. Эти узлы целесообразно выбрать так, чтобы в рассматриваемом интервале времени $[\tau_0, \tau_*]$ по возможности уменьшить уклонение от нуля функции $\xi_0(t)$, которая является одним из сомножителей в выражении для погрешности.

§ 6. Приведем числовые примеры, иллюстрирующие точность изложенных методов.

1. Вычислялась функция

$$\varphi(t) = F(H^*)1 = [I + \beta\omega_0(I - H^*(I + H^*)^{-1})]^{-1}, \quad \omega_0 = 0.4 \tag{6.1}$$

при различных значениях параметра β.

Ядро оператора H^* принято в виде

$$H(t, \tau) = -E_0 \frac{\partial}{\partial\tau} C(t, \tau)$$

$$C(t, \tau) = \left(C_0 + \frac{A_1}{r + \tau}\right)[1 - B_1 e^{-\gamma_1(t-\tau)} - B_2 e^{-\gamma_2(t-\tau)}] \tag{6.2}$$

Числовые значения параметров (единице времени — 10 *сут*):

$$r = 0; \quad B_1 = 1; \quad B_2 = 0; \quad E_0 C_0 = 0.44; \quad A_1 E_0 = 0.61; \quad \gamma_1 = 0.25$$

При построении приближения методом, изложенным в разделах 3, 4, в разложении (3.1) удерживалось 6 слагаемых; для определения коэффициентов использовались значения $F(\lambda_j)$ в узлах, найденных при минимизации функционала (4.1).

При решении задачи методом § 5 в разложении (5.4) удерживалось 7 членов. Узлы λ_i определялись в результате минимизации квадратичного уклонения от нуля функции $\xi_n(t)$ из (5.7).

Найденные приближения сравнивались с точными значениями $\varphi(t)$, которые можно получить, расшифровав рациональную дробь (6.1) оператора H^*. Для ядра (6.2) при $r - B_1 = 0$ функция $\varphi(t)$ выражается через решение уравнения с ядром Н. Х. Арутюняна, полученное в замкнутом виде [14].

В табл. 1 приведены значения максимума абсолютной погрешности в интервале $0.07 \leqslant t \leqslant 20$, полученные при приближении $\varphi(t)$ методами § 4 (метод I) и § 5 (метод II).

Таблица 1

t	0.1	3.5	11	25
Метод I	0.0003	0.0011	0.0004	0.0002
Метод II	0.0002	0.0012	0.0018	0.0033

Как видно из табл. 1, погрешность метода I не превосходит 0.0011, метода II — 0.0033.

2. Рассмотрена задача расчета бетонного блока прямоугольного поперечного сечения, расположенного на скальном основании. Предполагается, что длина блока велика и система блок—основание находится в условиях плоской деформации. В момент τ_0 температура блока увеличивается на 1°С и в дальнейшем не изменяется. Свойства бетона описываются оператором $\overline{E}^{-1} = E_б^{-1}(I + H^*)$, основание предполагается идеально упругим. При решении задачи приняты следующие значения параметров: отношение высоты блока к ширине $\varkappa = 0.25$; $E_б = 3.33 \cdot 10^4$ *МПа*; модуль упругости основания $E_o = 1 \cdot 10^4$ *МПа*; коэффициенты Пуассона блока и основания: $\nu_б = 0.16$, $\nu_o = 0.20$; коэффициент линейного расширения бетона $\alpha = 1 \cdot 10^{-5}$ 1/*град*.

Ядро оператора H^* принято в виде (6.2) при следующих значениях параметров (единица времени — 10 *сут*); $r = 0.15$; $E_0C_0 = 0.5395$; $A_1E_0 = 0.9152$; $B_1 = 0.35$; $B_2 = 0.65$; $\gamma_1 = 0.3$; $\gamma_2 = 5.8$. Момент приложения температуры $\tau_0 = 3.5$ *сут*.

Задача решалась методом, изложенным в § 4; для построения приближения (3.1) использовалось численное решение задачи теории упругости с модулями $E(\lambda_j) = E_0(1 + \lambda_j)^{-1}$ $(j = 1, \dots, 4)$*. Значения λ_j определялись в результате минимизации функционала (4.1).

В табл. 2 приведены значения напряжений $\sigma_{yx}(0, y_i, t)$ в точках $(0, y_i)$, расположенных на равных расстояниях по вертикальной оси блока

* Задача теории упругости решалась методом «Конечных полос» [15]. Расчеты выполнены в институте гидротехники им. Б. Е. Веденеева.

($y_1 = 0$ — точка, расположенная на границе блока и основания; y_{11} — точка на верхней граничной поверхности).

Таблица 2

t (*сут*)	Номер точки					
	1	3	5	7	9	11
3.5	−1.49	−1.15	−0.81	−0.47	−0.14	+0.15
4	−1.17	−0.93	−0.68	−0.45	−0.22	−0.03
10	−0.74	−0.61	−0.49	−0.37	−0.27	−0.18
20	−0.68	−0.57	−0.46	−0.36	−0.27	−0.21
30	−0.64	−0.54	−0.44	−0.35	−0.27	−0.22

Таблица 3

t (*сут*)	Номер точки					
	1	3	5	7	9	11
3.5	−1.49	−1.15	−0.81	−0.47	−0.14	+0.15
4	−1.20	−0.95	−0.69	−0.45	−0.21	−0.01
10	−0.73	−0.61	−0.49	−0.37	−0.27	−0.19
20	−0.68	−0.57	−0.46	−0.36	−0.27	−0.20
30	−0.64	−0.54	−0.45	−0.35	−0.27	−0.22

В табл. 3 даны результаты решения рассматриваемой задачи, найденные численно, методом «шаг за шагом» [15]. Максимальное абсолютное расхождение между решениями, полученными различными методами, составило 0.03.

НИЛКЭС Северо-Западного
отделения ин-та «Энергосетьпроект»

Поступила 18 V 1979

Ս. Ա. ԶԵՎԻՆ

ԾԵՐԱՑՈՂ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ՎՈԼՏԵՐՅԱՆ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄՈՏԱՐԿՈՒՄԸ

Ամփոփում

Առաձգական և ծերացող ժառանգական միջավայրերի վարքի նկարագրման համար օգտագործվում են հատուկ կառուցվածքի օպերատորներ։ Նրանց կիրառումը հնարավորություն է տալիս ներկայացնել լուծումը մի օպերատորի ֆունկցիաների տեսքով և տարածել Վոլտերի սկզբունքը որոշ տեսակի անհամասեռ միջավայրերի վրա։

Բերվում են օպերատորի ֆունկցիաների մոտարկման մի շարք մեթոդներ, որոնց օգտագործումով կարելի է առաձգական մարմնի համար համապատասխան խնդրի թվային լուծման հիման վրա կառուցել ժառանգական խնդրի լուծումը։

APPROXIMATION OF VOLTERRA'S OPERATORS FUNCTIONS IN PROBLEMS FOR AGEING MATERIALS IN THE CREEP THEORY

A. A. ZEVIN

S u m m a r y

Special design operators are applied to describe behaviour of elastic and ageing hereditary media. Their application enables us to present a solution in the form of one-operator functions and to extend Volterra's principle to some types of heterogeneous media.

There are given some methods of approximation of operator functions, applying which the construction of a hereditary problem may be based on a numerical solution of the appropriate elastic body problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной техники твердых тел. М., «Наука», 1977.
2. *Ильюшин А. А.* Метод аппроксимаций для расчета конструкций по линейной теории термовязкоупругости. Механика полимеров, 1968, № 2.
3. *Алим М. Н. М., Победря Б. Е.* К решению квазистатических задач анизотропной вязкоупругости. Изв. АН АрмССР, Механика, 1978, 31, № 2.
4. *Зевин А. А.* Напряжения и деформации неоднородной наследственной среды. ПМ, 1973, т. 9, вып. 3.
5. *Ржаницын А. Р.* Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М.—Л., Гостеоретиздат, 1949.
6. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые задачи теории ползучести для неоднородных стареющих тел. Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 3.
7. *Зевин А. А.* Распространение принципа Вольтерра на случай неоднородно стареющей наследственной среды. Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 4.
8. *Зевин А. А.* К расчету статически неопределимых железобетонных конструкций с учетом ползучести бетона. ПМ, 1974, т. 10, вып. 7.
9. *Пеллегрино Ф.* Теория аналитических функционалов и ее приложения. В кн.: Леви П. Конкретные проблемы функционального анализа. М., «Наука», 1967.
10. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М., Физматгиз, 1959.
11. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций. М., ГИТТЛ, 1954.
12. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М., ИЛ, 1961.
13. *Розовский М. И.* Об одном классе функций и их приложениях. Журн. вычисл. мат. и мат. физ.», 1962, т. 2, № 1.
14. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
15. *Маркевич Т. Г., Трапезников Л. П.* Применение начала возможных изменений напряженного состояния к решению задач термоползучести для бетонного блока на скальном основании. Известия ВНИИГ, т. 114, 1976.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 6, 1979 Механика

Н. Б. ГРИГОРЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ СЛЕДЯЩЕЙ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКЕ

Задача об устойчивости однородного стержня, шарнирно опертого по концам и нагруженного равномерно распределенной следящей нагрузкой, впервые была поставлена Пфлугером в 1950 г. [1]. Начиная с 1962 г. [2], Лайпольц посвятил целую серию работ различным аспектам этой проблемы. Лайпольцем и Маданом получено точное значение критической нагрузки для консольного стержня, нагруженного равномерно распределенной следящей нагрузкой [3]. Сформулирована и доказана теорема о нижней границе нагрузки выпучивания для стержней, нагруженных следящими силами [4]. Исследовано расположение кривых собственных колебаний стержней при нагружении следящими распределенными силами и собственным весом [5]. Проведена классификация систем, нагруженных следящими и «мертвыми» силами, и исследована возможность применения вариационных методов для решения задач устойчивости [6] и т. д.

Хугером и Леонардом исследована задача об устойчивости стержня, нагруженного следящими распределенными силами и сосредоточенной силой, приложенной на конце стержня [7]. В другой работе эти же авторы исследовали влияние концевых условий стержня на его устойчивость [8]. В работе [9] рассмотрены колебания и устойчивость упругой колонны при совместном действии равномерно распределенных следящих и вертикальных сил для шести различных граничных условий.

В данной работе рассматривается устойчивость трехслойного консольного упругого стержня, нагруженного равномерно распределенной по длине стержня следящей нагрузкой интенсивности q. Используется теория трехслойного стержня Григолюка—Чулкова [10]. Заполнитель трехслойного стержня — жесткий, длина стержня—L, а высота пакета — h. В силу неконсервативности задачи для ее решения применяется динамический метод.

Рассмотрим малые колебания стержня вокруг положения равновесия. Для вывода основного уравнения выделим из стержня элемент длиной dx (фиг. 1) и для него составим уравнения равновесия. Проектируя все силы на нормаль к изогнутой оси стержня с учетом инерционной силы, получим

$$\rho F \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \left(N + \frac{\partial N}{\partial x} dx\right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx = 0$$

где F — площадь поперечного сечения стержня, ρ — осредненная плотность материала стержня [10].

Пренебрегая величинами высшего порядка малости, учитывая, что

$$N = q(L - x)$$

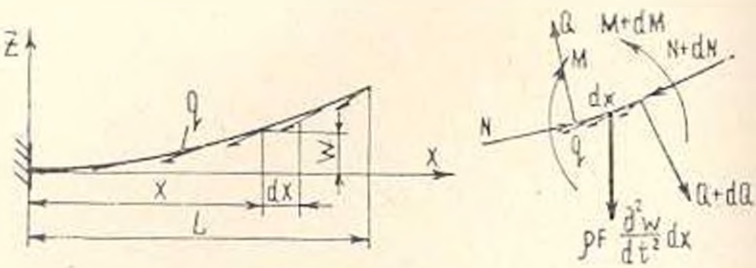
и разделяя на dx, получим

$$\rho F \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} + q(L - x)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \qquad (1.1)$$

По теории трехслойного стержня Григолюка—Чулкова введем функцию перемещения χ, определяемую выражением

$$W = \left(1 - \frac{h^2}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)X \qquad (1.2)$$

где β — параметр, характеризующий жесткость заполнителя на сдвиг.



Фиг. 1.

Поперечная сила Q выражается через функцию перемещения следующим образом [10]:

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} = D\left(1 - \frac{\vartheta h^2}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} \qquad (1.3)$$

где D — изгибная жесткость трехслойного стержня, а ϑ — параметр, характеризующий собственную изгибную жесткость несущих слоев трехслойного стержня.

Подставив выражения Q и W в уравнение (1.1), получим дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами в частных производных шестого порядка, описывающее малые поперечные колебания трехслойного стержня,

$$\rho F\left(1 - \frac{h^2}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + D\left(1 - \frac{\vartheta h^2}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} + q(L - x)\left(1 - \frac{h^2}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0 \qquad (1.4)$$

Для решения этого уравнения пользуемся методом разделения переменных, представляя функцию X в виде,

$$X(x,\, t) = \chi(x)\, e^{i\omega t} \tag{1.5}$$

где $\chi(x)$ — функция только переменного x,

$$\omega = \omega' + i\omega'' \tag{1.6}$$

— комплексная частота колебания трехслойного стержня, нагруженного распределенной следящей нагрузкой.

Введем безразмерные параметры

$$k = \frac{h^2}{\vartheta L^2}, \quad K^2 = \frac{qL^3}{D}, \quad \omega_*^2 = \omega^2 L^4 \frac{\rho F}{D}, \quad x = \frac{x}{L}, \quad X = \frac{\chi(x)}{L} \tag{1.7}$$

и обозначим дифференцирование по безразмерному x штрихом. Тогда из уравнения (1.4) вытекает обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами для функции X:

$$X^{(VI)} - \left[\frac{1}{\vartheta k} - \frac{K^2}{\vartheta}(1 - x)\right] X^{(IV)} - \left[\frac{K^2}{\vartheta k}(1 - x) + \frac{\omega_*^2}{\vartheta}\right] X'' + \frac{\omega_*^2}{\vartheta k} X = 0 \tag{1.8}$$

Рассмотрим два условия на концах стержня:

1. Один конец стержня жестко защемлен ($x = 0$), а на другом конце ($x = 1$) имеется абсолютно жесткая диафрагма, которая исключает поперечный сдвиг в торцевом сечении стержня

$$W = W' = \alpha\gamma = 0 \quad \text{при} \quad x = 0$$
$$M = Q = \alpha\gamma = 0 \quad \text{при} \quad x = 1$$

Исходя из выражений M, Q и $\alpha\gamma$, согласно [10], найдем

$$\begin{aligned} X' = X''' = X - kX'' = 0 \ \text{при} \ x = 0 \\ X''' = X^{(V)} = X'' - \vartheta k X^{(IV)} = 0 \ \text{при} \ x = 1 \end{aligned} \tag{1.9}$$

2. Один конец стержня жестко защемлен, а другой свободен.

$$W = W' = \alpha\gamma = 0 \quad \text{при} \quad x = 0$$
$$M = Q = S = 0 \quad \text{при} \quad x = 1$$

Здесь S — силовой фактор, связанный с кинематическим фактором $\alpha\gamma$ [10]. Отсюда имеем

$$\begin{aligned} X' = X''' = X - kX'' = 0 \ \text{при} \ x = 0 \\ X'' = X^{IV} = X''' - \vartheta k X^{(V)} = 0 \ \text{при} \ x = 1 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Таким образом, задача свелась к краевой задаче на собственные значения (1.8) с условиями (1.9) или (1.10) на концах стержня. Как известно [11], динамический метод исследования устойчивости неконсервативных систем сводится к исследованию зависимости частоты колебания системы от величины внешней нагрузки и считается, что система потеряла устойчивость, если она при некотором значении нагрузки $K^2 = K^2_{кр}$ нач и нает совершать колебания с возрастающей амплитудой. Но стержень будет колебаться с возрастающей амплитудой, если мнимая часть ω'' комплексной частоты имеет знак минус. Если внешняя нагрузка не действует на стержень, то частота колебания — вещественная величина ($\omega'' = 0$) и стержень совершает гармоническое колебание. Частота колебаний останется вещественной и при малых значениях внешней нагрузки ($K^2 < K^2_{кр}$). Следовательно, для определения критической силы мы можем ограничиться лишь вещественными значениями частоты.

Поскольку коэффициенты уравнения (1.8) являются аналитическими функциями в любой точке x, то решение этого уравнения можно представить в виде ряда Тейлора

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (1-x)^n \tag{1.11}$$

где A_n — неизвестные коэффициенты.

Подставляя ряд (1.11) и его производные в уравнение (1.8), выводим рекуррентное соотношение для определения коэффициентов A_n

$$A_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}\Big[\frac{1}{\theta k}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)A_{n-2} - \frac{K^2}{\theta}(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)A_{n-3} + \frac{\omega^2}{\theta}(n-4)(n-5)A_{n-4} + \frac{K^2}{\theta k}(n-5)(n-6)A_{n-5} - \frac{\omega^2}{\theta k}A_{n-6} \tag{1.12}$$

С помощью этой формулы неизвестные коэффициенты A_n, начиная с $n=6$, можно выразить через предыдущие коэффициенты.

С учетом (1.11) условия на концах стержня (1.9) и (1.10) принимают такой вид

$$\begin{gathered} \sum nA_n = 0 \\ \sum n(n-1)(n-2)A_n = 0 \\ \sum A_n - k\sum n(n-1)A_n = 0 \\ A_3 = 0,\ A_5 = 0,\ A_2 - 12\theta kA_4 = 0 \end{gathered} \tag{1.13}$$

и

$$\begin{gathered} \sum nA_n = 0 \\ \sum n(n-1)(n-2)A_n = 0 \\ \sum A_n - k\sum n(n-1)A_n = 0 \\ A_2 = 0,\ A_4 = 0,\ A_3 - 20\theta kA_5 = 0 \end{gathered} \tag{1.14}$$

Выше во всех суммах пределы суммирования от 0 до ∞.

Из (1.13) или (1.14) с использованием формулы (1.12) получим системы трех линейных алгебраических однородных уравнений относительно A_0, A_1, A_3:

$$a_{1,1}A_0 + a_{1,2}A_1 + a_{1,3}A_3 = 0$$

$$a_{2,1}A_0 + a_{2,2}A_1 + a_{2,3}A_3 = 0$$

$$a_{3,1}A_0 + a_{3,2}A_1 + a_{3,3}A_3 = 0 \qquad (1.15)$$

или A_0, A_1, A_2:

$$b_{1,1}A_0 + b_{1,2}A_1 + b_{1,3}A_2 = 0$$

$$b_{2,1}A_0 + b_{2,2}A_1 + b_{2,3}A_2 = 0$$

$$b_{3,1}A_0 + b_{3,2}A_1 + b_{3,3}A_2 = 0 \qquad (1.16)$$

Для существования нетривиального решения этих систем необходимо, чтобы их определители были равны нулю. Отсюда получим частотные уравнения в виде

$$\Delta(K^2, \omega_*) = 0 \qquad (1.17)$$

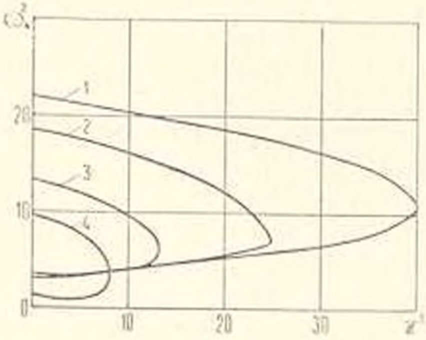
С помощью соотношения (1.17) можно построить зависимость частоты ω_* собственных колебаний стержня от безразмерной силы K^2.

Разработан алгоритм и составлена программа для построения зависимости ω_* от K^2 численным способом. На фиг. 2 приведен график этой зависимости при некоторых значениях θ и k. При $K^2 = 0$ имеем первую ω_*^0 и вторую ω_*^1 безразмерные частоты собственных колебаний. По мере увеличения силы K^2 нижняя частота увеличивается, а верхняя частота уменьшается, и при $K^2 = K^2_{кр}$ эти кривые смыкаются. В этой точке имеет место кратность корней ω_* в уравнении (1.17), и при дальнейшем увеличении K^2 корни становятся комплексно сопряженными, и существует корень с отрицательной мнимой частью. По выражению (1.5) это соответствует появлению формы колебаний с нарастающей амплитудой.

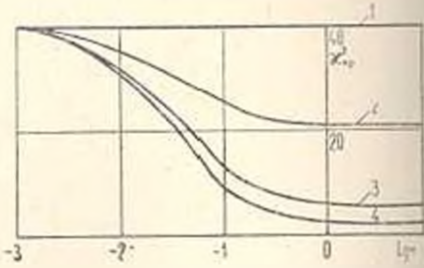
Численный анализ показывает, что число членов ряда (1.11), при котором ряд сходится, зависит от значения параметров θ и k и меняется от 20—30 ($\theta \geqslant 0.1$, $k \geqslant 1$) до 80—100 ($\theta < 0.01$, $k < 0.01$).

Из приведенных графиков (фиг. 3) видно, что при увеличении θ значение критической нагрузки увеличивается. Например, при $k = 0.1$ увеличение θ от 0.01 до 0.1 приводит к увеличению значения $K^2_{кр}$ от 8.1 до 13.4, то есть на 65%. При дальнейшем увеличении θ от 0.1 до 0.5 и до 1 (при $\theta = 1$ трехслойный стержень переходит в однородный, состоящий только из одного несущего слоя) значение $K^2_{кр}$ изменяется, соответственно, от 13.4 до 25.5, то есть на 91% и от 25.5 до 40.05, то есть на 57%. Таким образом, более существенное влияние θ оказывает при своих больших значениях. При малых k ($k \leqslant 0.01$) влияние θ на значение $K^2_{кр}$ менее заметно.

Отметим, что при $\theta = 1$ полученное значение $K^2_{кр} = 40.05$ полностью совпадает с известным [3] значением критической нагрузки для однородного стержня.



Фиг. 2. Зависимость ω_* от K^2 при $k = 0.1$ для следующих значений θ: $1-\theta=1$; $2-\theta=0.5$; $3-\theta=0.1$; $4-\theta=0.01$.



Фиг. 3. Зависимость критической силы от величины k при 1 условиях на концах стержня. Отмеченные линии соответствуют следующим значениям θ: $1-\theta=1$; $2-\theta=0.5$; $3-\theta=0.1$; $4-\theta=0.01$

Изменение параметра k в пределах $k > 10$ практически не приводит к изменению значения $K^2_{кр}$. Если же k изменяется в пределах $0.001 \leqslant k \leqslant 1$, то значение $K^2_{кр}$ существенно увеличивается с уменьшением k. При $k \leqslant 0.001$ значение $K^2_{кр}$ приближается к значению $K^2_{кр} = 40.05$, что соответствует однородному стержню.

Наличие жесткой диафрагмы на свободном конце стержня заметно влияет на величины $K^2_{кр}$ лишь при больших k. Например, при $k = 1$ и $\theta = 0.1$ значение $K^2_{кр}$ увеличивается на 15%, а при $k \leqslant 0.1$ и $\theta = 0.1$ значение $K^2_{кр}$ практически не меняется.

Ленинаканский филиал
ЕрПИ им. К. Маркса

Поступила 12 IV 1979

Ն. Ե. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ԵՌԱՇԵՐՏ ՁՈՂԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՀԵՏԵՎՈՂ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԲԱՇԽՎԱԾ ԲԵՌԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Հետազոտված է եռաշերտ, մի ծայրով կոշտ ամրակցված հավասարաչափ բաշխված հետևող բեռով բեռնավորված ձողի կայունությունը։ Այս ոչ կոնսերվատիվ խնդիրը լուծված է տատանումների կայունության հետազոտման դինամիկ մեթոդով։ Ուսումնասիրվում են եռաշերտ ձողի կրող շերտերի ծռման սեփական կոշտությունների և լցոնի սահքի կոշտության ազդեցությունները կրիտիկական ուժի մեծության վրա։

STABILITY OF A SANDWICH ROD UNDER A UNIFORMLY DISTRIBUTED FOLLOWER LOAD

N. B. GRIGORIAN

S u m m a r y

The non-conservative problem on stability of a sandwich cantilever subjected to a uniformly distributed follower load is considered. The effect of intrinsic flexural rigidity of the faces and of shear stiffness of the core on flatter load is studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pflüger A.* Stabilitatsprobleme der Elastostatik. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1950, p. 337.
2. *Leipholz H.* Die Knicklast des einseitig eingespannten Stabes mit gleichmässig verteilter, tangentialer Längsbelastung. ZAMP, 1962, 13, 581—589.
3. *Leipholz H., Madan P.* One the solution of the stability problem of elastic rods subjected to uniformly distributed, tangential follower forces. Ingenieur-Archiv, Springer-Verlag, 1975, 44, 347—357.
4. *Leipholz H., Polzin T.* On a lower bound theorem for the buckling load of elastic beams subjected to nonconservative compressive follower loads. Acta Mechanica, 1977, 25, 171—186.
5. *Leipholz H.* On the analysis situs of eigenvalue curves of rods subjected to conservative and nonconservative loads. Acta Mechanica, 1973, 17, 69—80.
6. *Leipholz H.* On conservative elastic systems of the first and second kind. Ingenieur-Archiv, 1974, 43, 255—271.
7. *Hauger W., Leonhard M.* Exact calculation of buckling loads of elastic bars subjected to tangential forces. Mech. Res. Comm., 1976, 3, 39—43.
8. *Hauger W., Leonhard M.* Influence of the end-supports on the stability of bars. Journal of Sound and Vibration, 1977, 55 (1), 153—156.
9. *Sugiyama Y., Kawagoe H.* Vibration and stability of elastic columns under the combined action of uniformly distributed vertical and tangential forces. Journal of Sound and Vibration, 1975, 38 (3), 341—355.
10. *Григолюк Э. И., Чулков П. П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М., Машиностроение, 1973, с. 172.
11. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961, с. 340.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 6, 1979 Механика

Н. Е. САРКИСЯН, М. М. МАРТИРОСЯН, А. Н. КАГРАМАНЯН

ВЛИЯНИЕ СЛОЖНОЙ ПРЕДЫСТОРИИ СИЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ДЛИТЕЛЬНУЮ ДЕФОРМАТИВНОСТЬ СТЕКЛОТЕКСТОЛИТА

Экспериментальное исследование влияния различного рода предварительного силового воздействия на изменение механических свойств композиционных материалов, в том числе стеклопластиков, представляет определенный практический и научный интерес. Выяснение степени изменяемости прочности и деформативности материалов, в частности, дает возможность более реальной оценки их работоспособности в конструкции.

К настоящему времени накоплен известный объем экспериментальной информации*. Необходимо отметить, что изучено лишь влияние простого силового воздействия, большей частью циклического. При этом рассматривалось только изменение кривой статического деформирования и предела прочности композита. Задача в такой же постановке, но при более сложном случае предварительного силового воздействия, была изучена в работе [1].

В последнее время привлекает внимание также вопрос оценки влияния предварительного циклического нагружения на изменение усталостной прочности композитов. В частности, установлено, что предварительное нагружение образцов из стекло- и углепластиков напряжением малой амплитуды существенно повышает долговечность при последующем циклическом нагружении с более высоким напряжением [2].

Предварительное нагружение улучшало усталостные свойства также бороалюминиевых и бороэпоксидных композитов [3]. В работе [4] было показано, что предварительное статическое и циклическое деформирование не вызывает такого повреждения материала, которое заметно повлияло бы на усталостную прочность стеклопластика.

В исследованиях [2—4] виды предварительного и последующего силового воздействия были идентичными, например, растяжение — растяжение. В настоящей работе впервые экспериментально изучается влияние одного вида предварительного воздействия (здесь мало- и многоциклового растяжения) на деформативность стеклопластика в условиях последующего, другого вида деформирования (здесь ползучесть), и наоборот.

Рассмотрено влияние комплекса следующих видов силового воздействия: 1) многоциклового растяжения частотой 1200 цикл/мин (для удобства изложения этот вид нагружения далее условно обозначим через α);

* Обзор литературы см., например, [1].

2) малоциклового растяжения частотой 1 *цикл/мин* (вид нагружения β) и 3) статической ползучести, воздействие которой обозначим через γ.

Исследование проведено с учетом анизотропии механических свойств стеклопластика, для чего нагрузка прикладывалась в направлении основы ткани ($\varphi = 0^\circ$) и в направлении под углом $\varphi = 45^\circ$.

Материалом для испытаний служил стеклотекстолит, изготовленный методом прессования ткани ТСУ-8/3 и связующего ЭДТ-10. Форма и размеры образцов, методика проведения испытаний на циклическую и статическую усталость подробно описаны в [1].

Предварительное деформирование осуществлялось в зависимости от порядка чередования видов нагружения по форме

$$\alpha_i \to \beta_j \to \gamma \tag{1.1}$$

$$\beta_i \to \alpha_j \to \gamma \tag{1.2}$$

$$\gamma_i \to \alpha_j \to \beta \tag{1.3}$$

где через индексы i и $j = 1, 2, 3$ условно обозначены уровни накопленной повреждаемости в условиях предварительного деформирования одного вида нагружения.

Повреждаемость материала в данной работе трактуется как отвлеченное число (меньшее единицы), являющееся отношением количества циклов (или времени) предварительного деформирования к числу циклов (времени) до разрушения в условиях одного и того же вида нагружения. Одновременно принимается справедливость гипотезы линейности суммирования повреждений и независимость повреждаемости в указанном выше смысле от вида деформации. Далее в статье повреждаемость (или сумма повреждаемостей) условно заменена латинскими индексами, которые в этом случае, очевидно, могут непрерывно менять свое значение от 0 до 1.

Как и ранее [1], рассмотрены три уровня предварительной повреждаемости, которые соответствовали длительности деформирования 0.1, 0.2 и 0.3 от базового значения долговечности при данном виде нагружения. Базовое значение долговечности было принято равным числу циклов до разрушения образца, составляющим соответственно $N_\alpha = 2\cdot10^6$, $N_\beta = 200$ *цикл* и $\tau_\gamma = 240$ *час*. Таким образом, имели $\alpha_1 = 2\cdot10^5$, $\alpha_2 = 4\cdot10^5$ и $\alpha_3 = 6\cdot10^5$ *цикл*; $\beta_1 = 20$, $\beta_2 = 40$ и $\beta_3 = 60$ *цикл*; $\gamma_1 = 24$, $\gamma_2 = 48$ и $\gamma_3 = 72$ *часа*. Величину напряжения, соответствующего базовому значению долговечности, вычисляли по результатам отдельно поставленных серий испытаний α, β и γ, проводившихся обычным образом до разрушения образца. При нагружении вдоль основы ткани напряжения σ_α, σ_β и σ_γ составляли соответственно 0.2, 0.75 и 0.7 $\sigma_в$, где $\sigma_в$ — предел прочности стеклотекстолита на растяжение в направлении $\varphi = 0^\circ$. При растяжении под углом $\varphi = 45^\circ$ напряжения σ_α, σ_β и σ_γ соответственно равны 0.2; 0.9 и 0.65 $\sigma_в$, где $\sigma_в$ — прочность композита в этом направлении.

Контрольные испытания (в отсутствии предварительного нагружения) и этапы предварительного и последующего растяжения образцов проводились при указанных выше фиксированных значениях напряжений.

Таким образом, влияние предварительного растяжения в данной работе изучено в зависимости от очередности воздействия силовых факторов (форма 1 и 2), вида фактора и уровня предварительной поврежденности (форма 1—3)*.

На фиг. 1 представлены кривые**, иллюстрирующие влияние предварительного циклического растяжения на последующий процесс ползучести испытанного стеклотекстолита в направлении $\varphi = 0°$. Деформации ползучести оказываются больше или меньше, чем соответствующие деформации контрольных образцов (кривая 3), смотря по тому, предыстория образцов имела малоцикловое (кривая 1) или многоцикловое (кривая 4) растяжение. В первом случае, поскольку напряжение σ_a является достаточно высоким $(0.75\ \sigma_b)$ происходит существенное деформационное разупрочнение*** материала исходного состояния. В условиях, когда вначале осуществляется малоцикловое растяжение, имевшее место в данной работе при сравнительно малом напряжении $(\sigma_a = 0.2\ \sigma_b)$, наоборот, происходит некоторое упрочнение деформационных свойств композита. На фиг. 1 кривые 2 и 3 идут достаточно близко друг от друга, что свидетельствует о практической компенсации процессов циклического деформационного упрочнения и разупрочнения материала, когда деформированию с большой частотой нагружения следует непродолжительное малоцикловое растяжение с высоким напряжением.

Сделанный выше вывод о том, что предварительное растяжение малым напряжением и высокой частотой способствует деформационному упрочнению композита, подтверждается графиками, показанными на фиг. 2, где кривые 3, 4 и 5 располагаются ниже не только кривой 1, соответствующей образцам исходного состояния, но и кривой 2, при которой предварительному циклическому деформированию α_1 предшествовало статическое растяжение γ_1. Наконец, качественно подобная картина наблюдалась также и в испытаниях нетканого стеклопластика СВАМ [5]. Эти данные дополняют экспериментальные результаты настоящей работы, поскольку они соответствуют режиму нагружения, когда процессу ползучести предшествует длительное циклическое растяжение (режим $\alpha \to \gamma$).

Как видно из фиг. 1, деформации ползучести стеклотекстолита образцов рабочей и контрольной группы отличаются**** примерно в 1.5 раза в условиях разупрочнения и 0.8 раза в условиях деформационного упрочнения материала. Однако, если сравнение вести в отношении величины об-

---

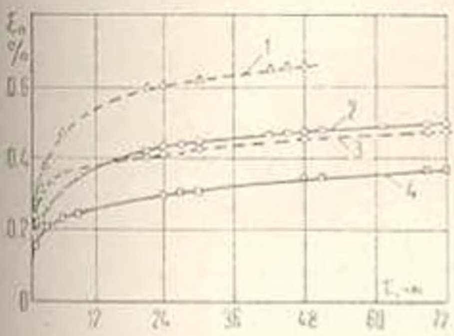
* Все испытания проводили практически беспрерывно. Перевод образца от одного вида нагружения к другому занимал не более 5 мин.

** Приводимые в работе графики построены по средним данным из испытания трех образцов на каждый эксперимент.

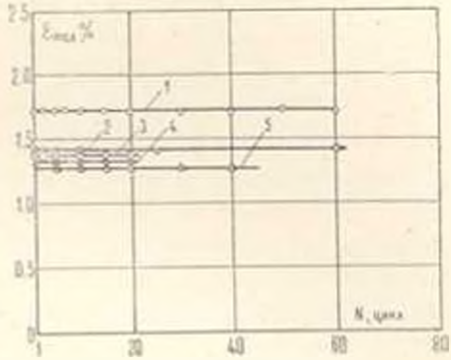
*** Здесь и далее в статье под понятием деформационного упрочнения материала (разупрочнения) подразумевается изменение отношения деформаций в данный момент времени τ или числа циклов N образцов рабочей и контрольной группы, когда другие условия испытания остаются неизменными. Для случая упрочнения это отношение меньше единицы, а при разупрочнении, наоборот, больше единицы.

**** Деформации статической ползучести здесь сравниваются к моменту времени $\tau = 48$ час.

щих деформаций (включая мгновенные), то количественные изменения деформаций вследствие рассмотренной сложной предыстории нагружения окажутся небольшими (1.1 и 0.95 раза).



Фиг. 1. Влияние режима предварительного растяжения на статическую ползучесть стеклотекстолита ($\varphi = 0°$) 1 — [illegible]; 2 — [illegible] и [illegible]; 3 — контрольная группа



Фиг. 2. Влияние режима предварительного растяжения на малоцикловую деформативность стеклотекстолита ($\varphi = 0°$). 1 — контрольная группа; 2 — [illegible]; 3 — [illegible]; 4 — [illegible]; 5 — [illegible]

В направлении $\varphi = 0°$ типы силового воздействия α, или α и γ вместе, но и разной комбинации, являются факторами, способствующими некоторому деформационному упрочнению материала. В самом деле, предыстория нагружения качественно не влияет на характер зависимости деформаций от числа циклов нагружения в условиях малоцикловой усталости, поскольку во всех случаях явление циклической ползучести отсутствует. В количественном отношении деформация ε_{max}* образцов рабочей группы составляет примерно $0.75 \div 0.85$ деформации образцов, не подвергшихся предварительному нагружению.

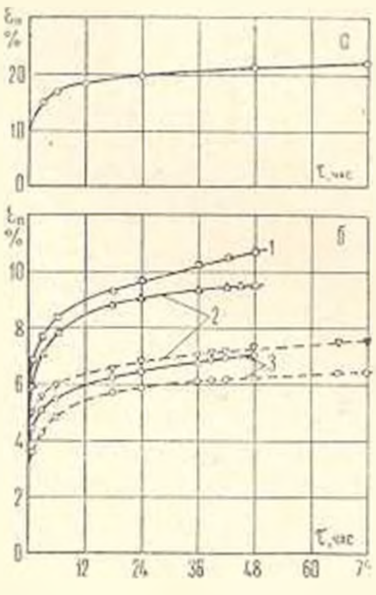
Наиболее ощутимое влияние история предварительного нагружения оказывает при деформировании образцов, вырезанных под углом 45° по отношению к волокнам. В этом случае становится существенной роль нелинейных свойств полимерного связующего в образовании деформация, особенно ее части, соответствующей процессу ползучести (статической или циклической). Все виды предварительного силового воздействия (форма 1—3) при $\varphi = 45°$ оказывают существенное деформационно-упрочняющее влияние на стеклоармированный композит.

Деформация статической ползучести образцов, испытавших предварительное растяжение, в зависимости от предыстории (1—2) оказывается в $2.0 \div 3.5$ раза меньше, чем деформация ползучести образцов контрольной группы (фиг. 3, *а* и *б*). При этом в деформационном упрочнении стеклотекстолита значительную роль играют как очередность нагрузки (α или β), так и длительность предварительного нагружения. Как и в случаях нагружения вдоль волокон, при одинаковом уровне накопленной повреждаемости (условие $i + j = \text{const}$) большее деформационное упрочнение на-

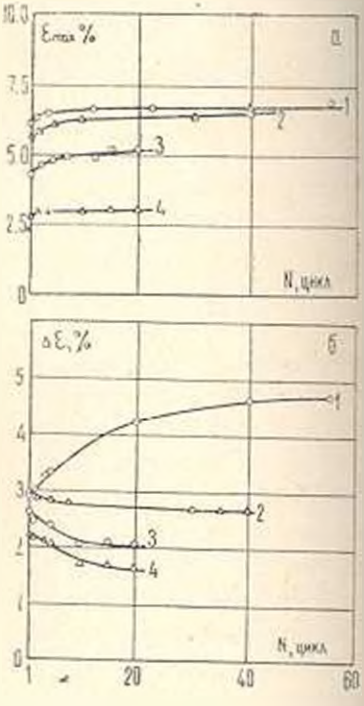
---

* Соответствуют моментам времени, когда напряжение в цикле достигает максимальной величины.

блюдается, когда в процессе предварительного нагружения малоцикловому утомлению (β) материала предшествует утомление под воздействием сравнительно малой по величине, но изменяющейся с большой частотой, нагрузки α. Так, например, деформация ползучести при предварительном растяжении по режиму $\alpha_3 \to \beta_1$ составляет 0.8 часть деформации ползучести режима нагружения $\beta_1 \to \alpha_3$ (пунктирная и сплошная кривая 2 на фиг. 3, *б*). Эти же кривые в сравнении с кривыми 3 ($i + j = 0.3$) показывают, что чем ниже уровень предварительной повреждаемости, тем в большей степени материал может упрочиться в деформационном отношении. Так, если в условиях предварительного растяжения $\beta_2 \to \alpha_3$, которому соответствует условная повреждаемость 0.5 (кривая 1, фиг. 3, *б*), деформационное упрочнение* составляет 0.5, то уровням повреждаемости 0.4 и 0.3 этому коэффициенту соответствуют значения 0.35÷0.45 и 0.30÷0.32.



Фиг. 3. Влияние режима предварительного растяжения на статическую ползучесть стеклотекстолита ($\varphi = 45°$): *а* — контрольная группа; *б*—1—$\beta_2 \to \alpha_3$; 2—$\beta_2 \to \alpha_1$ и $\alpha_3 \to \beta_1$; 3—$\beta_1 \to \alpha_3$ и $\alpha_3 \to \beta_2$



Фиг. 4. Влияние режима предварительного растяжения на малоцикловую деформативность стеклотекстолита ($\varphi = 45°$). 1—контрольная группа; 2—α_3; 3—α_3; 4—$\beta_3 \to \alpha_1$

На фиг. 4 представлены графики, иллюстрирующие влияние предварительного растяжения на изменение экстремальных деформаций цикла в случаях, когда нагрузка действует в направлении $\varphi = 45°$. На фиг. 4*б* через $\Delta\varepsilon$ обозначена разность деформаций $\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}$, где деформация ε_{min} соответствует минимальному напряжению цикла.

---

* Отношение деформаций ползучести образцов рабочей и контрольной группы по кривым 1—3 на фиг. 3, *б* и фиг. 3, *а*.

Как показывают экспериментальные данные, при ориентации $\varphi = 45°$ предварительное растяжение вызывает деформационное упрочнение материала, которое может существенно (более чем в 2 раза) уменьшать деформацию ε_{max} по сравнению с деформациями контрольных образцов (фиг. 4, *а*). При этом наблюдается определенная закономерность. Чем дольше ($\alpha_1 = 3\alpha_1$) образцы подвергаются циклическому растяжению с сравнительно малым напряжением и большей частотой, тем ощутимее уменьшение деформаций при последующем малоцикловом растяжении (фиг. 4, кривые 2 и 3). Упрочняющая роль предварительного растяжения в последующем процессе растяжения должна больше проявляться в тех случаях, когда предварительное деформирование включает в себя также и этап статической ползучести (фиг. 4, кривая 4). В этих условиях в материале в основном завершается процесс «насыщения» деформациями ползучести. Поскольку последующее деформирование такого же знака, что и предварительное (растяжение), то тем самым создаются более благоприятные условия для сопротивления материала новому процессу деформирования.

Наконец, обратим внимание на качественно разный ход кривых разности деформаций $\Delta\varepsilon$ на фиг. 4, б при малоцикловом растяжении контрольной (1) и рабочей (2—4) группы образцов. Это как раз иллюстрирует процесс деформационного упрочнения материала, поскольку значение секущего модуля упругости $\frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}$ непрерывно возрастает.

В условиях отсутствия предварительного растяжения разность экстремальных значений циклической деформации непрерывно растет по мере увеличения числа циклов нагружения (на базе $N = 20$ *цикл* в 1,4 раза). Если же материал предварительно подвергается длительному циклическому или статическому деформированию, то указанная разность деформаций $\Delta\varepsilon$ при последующем малоцикловом растяжении непрерывно уменьшается (в $1.1 \div 1.4$ раза на той же базе). Примечательным является тот факт, что влияние предыстории нагружения больше всего сказывается не в первом цикле малоциклового растяжения, а по мере увеличения числа циклов N. Как показывают экспериментальные данные, в зависимости от режима предварительного растяжения отношение деформаций $\Delta\varepsilon$ контрольных и рабочих образцов в 1-ом цикле составляет $1.0 \div 1.3$, а при $N = 20$ *цикл* достигает значения $1.3 \div 2.7$.

Выводы: 1. При растяжении стеклотекстолита в направлении основы ткани ($\varphi = 0°$) деформация статической ползучести оказывается больше или меньше, чем деформация ползучести контрольных образцов (не подвергшихся предварительному нагружению) в зависимости от того, предыстория образцов имела малоцикловое (частота 1 *цикл/мин*, напряжение $\sigma_3 = 0.75\,\sigma_в$) или многоцикловое растяжение (1200 *цикл/мин*, $\sigma_7 = 0.2\,\sigma_в$). В первом случае происходит существенное деформационное разупрочнение материала; во втором, наоборот, имеет место некоторое упрочнение деформационных свойств композита.

2. В направлении $\varphi = 0^\circ$ предварительное силовое воздействие (α или α и статическая ползучесть γ вместе, но в разной комбинации), является фактором, способствующим деформационному упрочнению материала в условиях последующего малоциклового растяжения.

3. История предварительного нагружения наиболее сильное влияние оказывает при деформировании образцов, вырезанных под углом 45°. В этом случае все рассмотренные виды силового воздействия вызывают значительное деформационное упрочнение стеклотекстолита.

4. В направлении $\varphi = 45^\circ$ деформация статической ползучести в зависимости от предыстории нагружения в $2.0 \div 3.5$ раза меньше, чем деформация ползучести контрольной группы образцов.

а) При одинаковом уровне предварительной повреждаемости материала большее деформационное упрочнение наблюдается, когда в предыстории нагружения малоцикловому утомлению композита предшествует воздействие сравнительно малого по величине, но изменяющегося с большой частотой напряжения.

б) Чем ниже уровень предварительной повреждаемости, тем в большей мере упрочняется материал в деформационном отношении.

5. В направлении $\varphi = 45^\circ$ предварительное растяжение может более, чем в 2 раза уменьшить максимальные деформации цикла в условиях последующего малоциклового растяжения.

а) Чем дольше материал подвергается циклическому растяжению с сравнительно малым напряжением и большой частотой, тем ощутимее уменьшение деформации при последующем нагружении.

б) Упрочняющая роль предварительного растяжения усиливается, когда предыстория нагружения включает в себя также и этап статической ползучести.

6. Если в условиях отсутствия предварительного растяжения разность экстремальных значений деформации цикла непрерывно растет (циклический модуль упругости снижается), то вследствие воздействия рассмотренных видов предварительных нагрузок эта разность деформаций, наоборот, с увеличением числа циклов N последовательно уменьшается (модуль упругости возрастает).

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 22 III 1979

Ն. Ե. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Մ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, Ա. Ն. ՂԱՀՐԱՄԱՆՅԱՆ

ԲԱՐԴ ՈՒԺԱՅԻՆ ՆԵՐԳՈՐԾՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՊԱՏՄՈՒԹՅԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՊԱԿԵՏԵՔՍՏՈԼԻՏԻ ԵՐԿԱՐԱՏԵՎ ԴԵՖՈՐՄԱՏԻՎՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Ամփոփում

Բերված են նախնական ձգման կոմպլեքսի (բազմացիկլային, սակավացիկլային և ստատիկական) ազդեցության փորձնական հետազոտության արդյունքները ապակետեքստոլիտի դեֆորմատիվության վրա հետագա սողքի

ռեկավացիկլային ձգման պայմաններում։ Բեռնավորումը կատարված է ապակեգործվածքի հենքի և 45° անկյան ուղղություններով։

Սահմանված են նախնական ձգման ազդեցության առանձնահատկությունները կախված դիտարկվող ուժային գործոնների կիրառման հաջորդականությունից, նրանց տեսակից և կուտակված նախնական վնասվածքների մակարդակից (դեֆորմացման երկարատևությունից)։

THE INFLUENCE OF COMPLEX PREHISTORY OF FORCE EFFECT ON PROLONGED DEFORMATION OF FIBRE-GLASS LAMINATE

N. E. SARKISIAN, M. M. MARTIROSIAN, A. N. KAGRAMANIAN

Summary

The experimental investigation of the influence of the complex preliminary tension (polycyclic, small-cyclic, statical) on the deformation of the fibre-glass laminate under the conditions of subsequent creeping and small-cycle tension is discussed. Loading is applied in the direction of the material base and at a 45° angle.

The influence peculiarities of preliminary tension, depending on the succession of the effect of force factors, of their type and level of preliminary damage (prolonged deformation), are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саркисян Н. Е., Сироткин О. С., Воробей В. В., Мартиросян М. М., Каграманян А. Н.* Суммирование повреждений при квазистатическом и переменном нагружении элементов из композиционных материалов. Изв. АН АрмССР, Механика, 1979, т. 32, № 2.
2. *Berg C. A., Salama M.* Coaxing in fatique of composites. Fibre Sci. and Technol., 1973, No. 6, No. 2.
3. *Stinchcomb W. W., Reifsnider K. L., Williams R. S.* Critical factors for frequency-dependent fatique processes in composite materials. "Exp. Mech"., 1976, 15, No. 19,
4. *Петренко И. П.* Влияние асимметрии и частоты нагружения на усталостные характеристики предварительно деформированного стеклопластика. Прикл. механ., 1977, 13, № 2.
5. *Саркисян Н. Е.* О влиянии предварительного циклического нагружения на статическую прочность и деформативность стеклопластика. Изв. АН АрмССР, Механика, 1973, т. 26, № 1.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, №6, 1979 Механика

ВТОРАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ ИНСТИТУТА МЕХАНИКИ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

С 14 по 16 мая 1979 года в Доме симпозиумов АН АрмССР проходила Вторая конференция молодых ученых Института механики АН АрмССР.

В работе конференции приняли участие около 50 человек.

На конференции были заслушаны доклады молодых ученых по различным вопросам механики деформируемого твердого тела.

Доклад В. В. Стамболцяна был посвящен задаче отыскания максимума наименьшей частоты собственных колебаний слоистой цилиндрической оболочки и максимума критической нагрузки при различных вариантах нагружения путем варьирования толщины слоев и углов намотки.

В докладе А. О. Кизояна сообщалось о задаче оптимизации устойчивости моментного состояния цилиндрической панели под действием внешнего давления.

С. П. Сейранян выступил с докладом об оптимизации устойчивости анизотропной слоистой цилиндрической оболочки с учетом моментности начального состояния.

Доклад А. Д. Азатян был посвящен вопросу взаимодействия акустической ударной волны с слоистой ортотропной пластинкой. Решалась оптимизационная задача по определению углов укладки ленты в слоях пластинки и толщин слоев, при которых достигается минимум наибольшего прогиба пластинки, обусловленного ударной волной.

Вопросы колебаний слоистой ортотропной оболочки, контактирующей с жидкостью, обсуждались в докладе Р. С. Казаряна.

Р. А. Багдасарян выступил с докладом о распространении поперечных волн в стержнях при различных граничных условиях.

Сообщение об асимптотическом методе определения напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки, обладающей свойством общей анизотропии, сделал Ш. М. Хачатрян.

В докладе В. А. Тарханяна приводилась задача построения функции Грина для произвольно нагруженной конической оболочки с отверстием.

Доклад Г. Г. Оганяна посвящен задаче распространения слабых модулированных волн в смеси химически активных жидкостей, содержащей пузырьки газа, при протекании одной химической реакции.

В докладе Э. Н. Даноян сообщалось о распространении магнитоупругих волн в идеально проводящих средах с кубической симметрией.

Доклад А. Е. Гаспаряна был посвящен задаче распространения одномерной магнитоупругой волны в конечно-проводящей среде.

П. А. Мкртчян на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел рассмотрел задачу колебаний цилиндрической оболочки в однородном магнитном поле.

С. В. Саркисян сделал сообщение о магнитоупругих колебаниях пластин с учетом поперечных сдвигов.

Доклад К. Б. Казаряна был посвящен вопросу влияния внешнего продольного магнитного поля на устойчивость токонесущей цилиндрической оболочки.

К. Л. Агаян сделал сообщение о контактной задаче для бесконечной плоскости, ослабленной двоякопериодической системой трещин.

В. С. Макарян рассмотрел задачу о болтовом соединении двух слоев из различных материалов, имеющих одинаковые цилиндрические отверстия при различных условиях частичного контакта между слоями.

В. Н. Акопяном была рассмотрена осесимметричная контактная задача упругой среды, сжатой двумя толстыми плитами.

В докладе А. В. Саакяна сообщалось о задаче вдавливания равномерно движущихся штампов в упругую полосу.

А. А. Шекяном было сделано сообщение о некоторых квазистатических контактных задачах для степенно упрочняющихся твердых тел.

О. Б. Агаларян доложил о задаче кручения упругого пространства с плоскими кольцевыми и круговыми разрезами.

Доклад А. А. Енгибаряна был посвящен контактным задачам теории упругости для прямоугольников и кольцевых секторов из различных материалов при наличии сцепления.

Г. Г. Тарпошян сообщил о применении метода разложения в интеграл Фурье в задачах колебаний тонких оболочек.

Минасян В. В. выступил с докладом об изгибе круглой пластинки, предварительно растянутой за пределами упругости.

Для молодых участников конференции были организованы лекции. Проф. А. Б. Нерсисян прочел лекцию «О разложениях по некоторым системам тригонометрических функций», кандидат технических наук А. М. Симонян прочел лекцию «Некоторые вопросы реологии материалов в свете исследований, проводимых в Канаде».

СОВЕТ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ ИНСТИТУТА
МЕХАНИКИ АН АРМССР