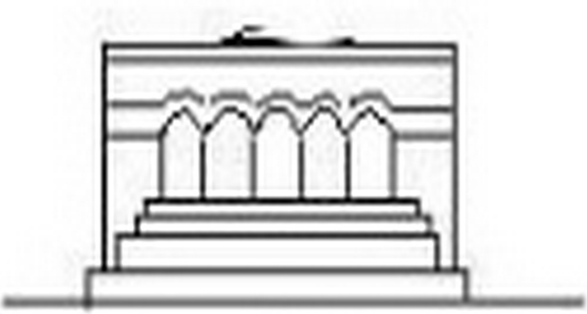
ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS



1979

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 5, 1979 Механика

А. А. БАБЛОЯН, А. А. ЕНГИБАРЯН

О ДВУХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ КОЛЬЦЕВОГО СЕКТОРА С ТРЕЩИНАМИ

Общее решение плоской задачи для изотропного кольцевого сектора граничные условия которого заданы в напряжениях, было построено в работе [1]. Решение этой же задачи для ортотропного материала приведено в работе [2]. Сжатие кругового кольца симметрично расположенными (внутренними или внешними) гладкими штампами со смешанными граничными условиями рассмотрено в работах [3, 4, 8, 9]. Задачи для круга, ослабленного внутренними или внешними радиальными трещинами, приведены в работах [10, 11, 12]. Аналогичные задачи для кольцевого сектора, ослабленного внешними трещинами, рассматривались в работах [5, 14].

В настоящей работе приводится решение двух задач теории упругости для вращающегося кругового кольца: а) контактная задача для двух круговых колец из различных изотропных материалов, насаженных и частично (симметрично) сцепленных друг с другом; б) задача для одного кольца, ослабленного симметрично расположенными внутренними и внешними радиальными трещинами.

Решения этих задач строятся единым методом [1] и после удовлетворения всем граничным условиям и условиям сопряжения сводятся к решению квазивполне регулярных бесконечных систем.

§ 1. Рассмотрим контактную задачу двух кольцевых секторов из различных изотропных материалов, соединенных друг с другом по n одинаковым участкам, расположенным симметрично вдоль дуги окружности (фиг. 1). Достаточно задачу решать только для заштрихованной части области, удовлетворяя при этом условиям симметрии

$$\tau_{t\varphi}^{(i)}(t, 0) = \tau_{t\varphi}^{(i)}(t, \varphi_1) = 0, \quad v^{(i)}(t, 0) = v^{(i)}(t, \varphi_1) = 0, \quad (i = 1, 2) \qquad (1.1)$$

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид

$$ae^{t_1}\sigma_t^{(1)}(t_1, \varphi) = f_1^{(1)}(\varphi) = f_{01}^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} f_{k1}^{(1)} \cos \alpha_k \varphi$$

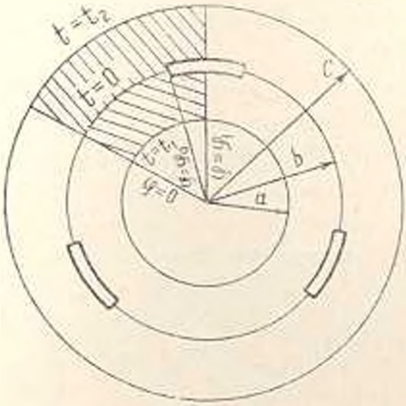
$$ae^{t_1}\tau_{t\varphi}^{(1)}(t_1, \varphi) = g_1^{(1)}(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{k1}^{(1)} \sin \alpha_k \varphi \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1)$$

$$be^{t_2}\sigma_t^{(2)}(t_2, \varphi) = f_1^{(2)}(\varphi) = f_{01}^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} f_{k1}^{(2)} \cos \alpha_k \varphi \qquad (1.2)$$

$$be^{t_2}\sigma_{t\varphi}^{(2)}(t_2,\varphi)=g_1^{(2)}(\varphi)-\sum_{k=1}^{\infty}g_{k1}^{(2)}\sin\alpha_k\varphi$$

$$\sigma_t^{(1)}(0,\varphi)=\sigma_t^{(2)}(0,\varphi)=0,\quad \tau_{t\varphi}^{(1)}(0,\varphi)=\tau_{t\varphi}^{(2)}(0,\varphi)=0,\quad (\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1)$$

На линии $t=0$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0<\varphi_1)$ должны удовлетворяться условия полного контакта двух материалов



Фиг. 1.

$$u^{(1)}(0,\varphi)=u^{(2)}(0,\varphi)$$
$$\sigma_t^{(1)}(0,\varphi)=\sigma_t^{(2)}(0,\varphi)$$
$$v^{(1)}(0,\varphi)=v^{(2)}(0,\varphi) \tag{1.3}$$
$$\tau_{t\varphi}^{(1)}(0,\varphi)=\tau_{t\varphi}^{(2)}(0,\varphi)$$

Решение задачи для каждого кругового кольца ищется в виде [1]

$$F^{(i)}(t,\varphi)=b^{(i)}(t)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k^{(i)}(t)\cos\alpha_k\varphi+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k^{(i)}(\varphi)\cos\beta_k^{(i)}t \tag{1.4}$$

где

$$\Phi_k^{(i)}(\varphi)=A_k^{(i)}\operatorname{sh}\beta_k^{(i)}(\varphi_1-\varphi)\sin(\varphi_1-\varphi)+B_k^{(i)}\operatorname{sh}\beta_k^{(i)}(\varphi_1-\varphi)\sin\varphi+$$
$$+C_k^{(i)}\operatorname{sh}\beta_k^{(i)}\varphi\sin(\varphi_1-\varphi)+D_k^{(i)}\operatorname{sh}\beta_k^{(i)}\varphi\sin\varphi$$
$$\Psi_k^{(i)}(t)=E_k^{(i)}\operatorname{sh}\alpha_k(t_1-t)\operatorname{sh}(t_1-t)+G_k^{(i)}\operatorname{sh}\alpha_k(t_1-t)\operatorname{sh}t+$$
$$+F_k^{(i)}\operatorname{sh}\alpha_k t\operatorname{sh}(t_1-t)+H_k^{(i)}\operatorname{sh}\alpha_k t\operatorname{sh}t \tag{1.5}$$
$$b^{(i)}(t)=b_0^{(i)}e^t+b_1^{(i)}te^{-t}+b_2^{(i)}te^t$$

$$0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1;\quad t_1\leqslant t\leqslant 0 - \text{при}\quad i=1,\quad 0\leqslant t\leqslant t_2\quad \text{при}\quad i=2;\ \alpha_k=\frac{k\pi}{\varphi_1};$$

$$\beta_k^{(i)}=\frac{k\pi}{t_i},\quad t=\ln\frac{r}{a},\quad t_1=-\ln\frac{b}{a},\quad t_2=\ln\frac{c}{b},\quad \varphi_1=\frac{\pi}{n},\quad n\geqslant 2$$

n — число участков соединений двух материалов. Случай $n=1$ получится после решения задачи предельным переходом.

Напряжения и перемещения с учетом инерционных сил выражаются через функцию Эри следующими формулами [7]:

$$r\sigma_r(t,\varphi)=\frac{\partial^2F}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial F}{\partial t}+F-\frac{2\lambda+3\mu}{4(\lambda+2\mu)}\rho\omega^2r^3$$

$$r\sigma_\varphi(t,\varphi)=\frac{\partial^2F}{\partial t^2}+\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{2\lambda+\mu}{4(\lambda+2\mu)}\rho\omega^2r^2$$

$$r\tau_{r\varphi}(t,\ \varphi) = -\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi\,\partial t} \tag{1.6}$$

$$u(t,\ \varphi) = \frac{1-\nu^2}{E}\left[\int\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} + F\right)dt + 2\gamma_1 F - \bar{\gamma}\,\frac{\partial F}{\partial t}\right] - \frac{\rho\omega^2 r^3}{8(\lambda + 2\mu)}$$

$$v(t,\ \varphi) = \frac{1-\nu^2}{E}\left[\int\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial t} - F\right)d\varphi - \iint F\,dt\,d\varphi - \int\frac{\partial F}{\partial\varphi}\,dt - \bar{\gamma}\,\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right]$$

где

$$\bar{\gamma} = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad \gamma_1 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1-\nu)} \tag{1.7}$$

ρ — плотность материала, ν — коэффициент Пуассона, ω — угловая скорость вращения.

Удовлетворяя граничным условиям и решая полученные системы уравнений относительно коэффициентов разложения, имеем

$$\begin{gathered}
A_k^{(i)} = B_k^{(i)} = C_k^{(i)} = D_k^{(i)} = 0 \\
H_k^{(i)}\alpha_k \operatorname{sh}\alpha_k t_i \operatorname{sh} t_i = g_{k1}^{(i)}, \qquad E_k^{(i)}\alpha_k \operatorname{sh}\alpha_k t_i \operatorname{sh} t_i = g_{k2}^{(i)} \\
\Delta_{k1}^{(i)} G_k^{(i)} = M_{k1}^{(i)}\alpha_k \operatorname{sh} t_i - M_{k2}^{(i)} \operatorname{sh}\alpha_k t_i \\
\Delta_{k1}^{(i)} F_k^{(i)} = M_{k1}^{(i)} \operatorname{sh}\alpha_k t_i - M_{k2}^{(i)}\alpha_k \operatorname{sh} t_i
\end{gathered} \tag{1.8}$$

где

$$\begin{aligned}
M_{k1}^{(i)} &= \alpha_k^{-1}(1 - \alpha_k \operatorname{cth}\alpha_k t_i + \operatorname{cth} t_i)\, g_{k1}^{(i)} - f_{k1}^{(i)} \\
M_{k2}^{(i)} &= \alpha_k^{-1}(1 + \alpha_k \operatorname{cth}\alpha_k t_i - \operatorname{cth} t_i)\, g_{k2}^{(i)} - f_{k2}^{(i)} \\
\Delta_{k1}^{(i)} &= \operatorname{sh}^2\alpha_k t_i - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_i
\end{aligned} \tag{1.9}$$

При этом свободные члены разложения (1.4) определяются из следующих уравнений:

$$\begin{gathered}
2b_0^{(i)} e^{t_i} + b_1^{(i)} e^{-t_i} - \frac{2\lambda_i + 3\mu_i}{4(\lambda_i + 2\mu_i)}\rho_i\omega^2 a^4 e^{3t_i} = f_{01}^{(i)} \\
2b_0^{(i)} + b_1^{(i)} - \frac{2\lambda_i + 3\mu_i}{4(\lambda_i + 2\mu_i)}\rho_i\omega^2 a^4 = f_{02}^{(i)}, \quad b_2^{(i)} = 0
\end{gathered} \tag{1.10}$$

Вычислим значения перемещений на линии $t = 0$

$$\begin{aligned}
v^{(i)}(0,\ \varphi) &= \frac{2(1-\nu_i^2)}{E_i}\sum_{p=1}^{\infty}\left[\alpha_p^{-1}(\gamma_i \bar{f}_{pi} - \bar{g}_{pi}) + R_{pi}\right]\sin\alpha_p\varphi \\
u^{(i)}(0,\ \varphi) &= \frac{2(1-\nu_i^2)}{E_i}\sum_{p=1}^{\infty}\left[\alpha_p^{-1}(\gamma_i \bar{g}_{pi} - \bar{f}_{pi}) + Q_{pi}\right]\cos\alpha_p\varphi + \\
&\quad + u_0^{(i)}(0) - \frac{\rho_i\omega^2 a^3}{8(\lambda_i + 2\mu_i)}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

где

$$(\alpha_p^2 - 1)\bar{f}_{pi} = \alpha_p(\alpha_p f_{pi} - g_{pi}), \qquad (\alpha_p^2 - 1)\bar{g}_{pi} = \alpha_p(\alpha_p g_{pi} - f_{pi})$$

$$E_i u_0^{(i)}(t) = (1 + \nu_i)\Big\{[2(1 - 2\nu_i) b_0^{(i)} e^{t} - b_1^{(i)} e^{-t}] + \tag{1.12}$$

$$+ \frac{2\lambda_i + 3\mu_i}{4(\lambda_i + 2\mu_i)}[2(1 - 2\nu_i) e^{t} \operatorname{ch} t_i + e^{t_i - t}]\rho_i \omega^2 a^3 e^{-t_i}\Big\} \qquad \begin{matrix}(i = 1, 2)\\ (p = 1, 2, 3\ldots)\end{matrix}$$

$$\alpha_p \Delta_{p1}^{(1)} R_{p1} = (\alpha_p f_{p1} - g_{p1})(\lambda_{p1}^{(1)} - \lambda_{p2}^{(1)}) + (\alpha_p f_{p2} - g_{p2})(\lambda_{p3}^{(1)} - \lambda_{p4}^{(1)}) +$$

$$+ g_{p2}(\lambda_{p5}^{(1)} - \lambda_{p4}^{(1)}) + g_{p1}(\lambda_{p6}^{(1)} - \lambda_{p1}^{(1)})$$

$$\alpha_p \Delta_{p2}^{(2)} R_{p2} = (\alpha_p f_{p2} - g_{p2})(\lambda_{p1}^{(2)} + \lambda_{p2}^{(2)}) - (\alpha_p f_{p1} - g_{p1})(\lambda_{p3}^{(2)} + \lambda_{p4}^{(2)}) -$$

$$- g_{p1}(\lambda_{p5}^{(2)} + \lambda_{p4}^{(2)}) - g_{p2}(\lambda_{p6}^{(2)} + \lambda_{p1}^{(2)})$$

$$\Delta_{p1}^{(1)} Q_{p1} = (\alpha_p f_{p1} - g_{p1})\lambda_{p2}^{(1)} - (\alpha_p f_{p2} - g_{p2})\lambda_{p3}^{(1)} + g_{p1}\lambda_{p1}^{(1)} + g_{p2}\lambda_{p4}^{(1)} \tag{1.13}$$

$$\Delta_{p1}^{(2)} Q_{p2} = (\alpha_p f_{p1} - g_{p1})\lambda_{p3}^{(2)} - (\alpha_p f_{p2} - g_{p2})\lambda_{p2}^{(2)} + g_{p1}\lambda_{p4}^{(2)} + g_{p2}\lambda_{p1}^{(2)}$$

$$\lambda_{p1}^{(i)} = \alpha_p \operatorname{sh}^2 t_i, \quad (\alpha_p^2 - 1)\lambda_{p2}^{(i)} = \operatorname{sh}\alpha_p t_i \operatorname{ch}\alpha_p t_i + \alpha_p \operatorname{sh} t_i \operatorname{ch} t_i - \Delta_{p1}^{(i)}$$

$$(\alpha_p^2 - 1)\lambda_{p3}^{(i)} = \alpha_p \operatorname{ch}\alpha_p t_i \operatorname{sh} t_i + \operatorname{sh}\alpha_p t_i \operatorname{ch} t_i, \qquad \lambda_{p4}^{(i)} = \operatorname{sh}\alpha_p t_i \operatorname{sh} t_i$$

$$\lambda_{p5}^{(i)} = \alpha_p \operatorname{ch}\alpha_p t_i \operatorname{sh} t_i - \operatorname{sh}\alpha_p t_i \operatorname{ch} t_i, \qquad \lambda_{p6}^{(i)} = \operatorname{sh}\alpha_p t_i \operatorname{ch}\alpha_p t_i - \alpha_p \operatorname{sh} t_i \operatorname{ch} t_i - \Delta_{p1}^{(i)}$$

Вводим следующие функции

$$\sigma_k(\varphi) = f_{0k} + \sum_{p=1}^{\infty} \bar{f}_{pk} \cos\alpha_p\varphi, \qquad \tau_k(\varphi) = \sum_{p=1}^{\infty} \bar{g}_{pk} \sin\alpha_p\varphi, \qquad (k = 1, 2) \tag{1.14}$$

При этом напряжения, действующие на дугах окружностей $t = 0$, в силу (1.12) будут выражаться через приведенные напряжения (1.14) соотношениями

$$f_k(\varphi) = \sigma_k(\varphi) + \int_0^{\varphi_1}\left[\chi(x - \varphi) - \frac{x}{\varphi_1}\right]\tau_k(x)\,dx, \qquad \chi(z) = \begin{cases}1 & z > 0\\ 0 & z < 0\end{cases}$$

$$g_k(\varphi) = \tau_k(\varphi) + \int_0^{\varphi_1}\left[\chi(\varphi - x) - \frac{\varphi}{\varphi_1}\right]\sigma_k(x)\,dx \tag{1.15}$$

Отметим, что перемещения (1.11) выражаются через приведенные напряжения $\sigma_k(\varphi)$ и $\tau_k(\varphi)$ более простыми формулами, удобными для дальнейшего применения, чем если бы они выражались через контактные напряжения $f_k(\varphi)$ и $g_k(\varphi)$. Эти функции вводятся с целью, чтобы регулярные части (вторые слагаемые) в формулах (1.11) для перемещений были бесконечно дифференцируемыми функциями.

Из формул (1.1) и (1.14) следует также, что

$$\int_0^{\varphi_1} \varphi_k(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\varphi_1} f_k(\varphi)\,d\varphi \tag{1.16}$$

Удовлетворяя теперь условиям контакта (1.3), для определения комплексного контактного давления

$$p(x) = \sigma^{(1)}(x) + i\tau^{(1)}(x) = \sigma^{(2)}(x) + i\tau^{(2)}(x), \quad (|x| < \varphi_0) \tag{1.17}$$

получим сингулярное интегральное уравнение с регулярной частью

$$P(\xi) = \frac{\gamma i}{2\pi}\int_{-c}^{c} P(\eta)\operatorname{ctg}\frac{\eta-\xi}{2}\,d\eta = f(\xi), \quad (-c < \xi < c) \tag{1.18}$$

где

$$f(\xi) = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p [\delta_2 (R_{p2}\cos p\xi + iQ_{p2}\sin p\xi) - \delta_1 (R_{p1}\cos p\xi +$$

$$+ iQ_{p1}\sin p\xi)] + \frac{1}{\pi}\int_0^{c} \alpha_2\left(\frac{\varphi_1\eta}{\pi}\right) d\eta \tag{1.19}$$

$$\gamma = \left[\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right] \Big/ \left[\frac{1-\nu_1^2}{E_1}\gamma_1 - \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\gamma_2\right]$$

$$\delta_k = \frac{1-\nu_k^2}{E_k} \Big/ \left[\frac{1-\nu_1^2}{E_1}\gamma_1 - \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\gamma_2\right], \quad c = \frac{\pi\varphi_0}{\varphi_1}, \quad (k = 1, 2)$$

Решение уравнения (1.18), следуя [15], записывается в виде

$$p(\xi) = Af(\xi) + \frac{BX(\xi)}{2\pi}\int_{-c}^{c} \frac{f(\eta)\,d\eta}{X(\eta)\sin\dfrac{\eta-\xi}{2}} +$$

$$+ 2BDX(\xi)\left(\operatorname{th} c\beta \sin\frac{\xi}{2} + i\cos\frac{\xi}{2}\right) \tag{1.20}$$

где

$$X(\xi) = \left(\sin\frac{c-\xi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-\beta i} \left(\sin\frac{c+\xi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+\beta i}, \quad \beta = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \tag{1.21}$$

Коэффициент D определяется из условия статического равновесия

$$4\pi\gamma \operatorname{ch} 2c\beta D = -(1-\gamma^2)\operatorname{ch}\pi\beta \operatorname{ch} c\beta \int_{-c}^{c} p(\xi)\,d\xi \tag{1.22}$$

Функция $f(\xi)$ в (1.19) содержит неизвестное контактное давление $p(\xi)$, поэтому (1.20) является уравнением Фредгольма для определения $p(\xi)$. Для того, чтобы интегральное уравнение (1.20) свести к решению бесконечных систем алгебраических уравнений, представим функцию $p(y)$ в виде

$$p(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos ky + ib_k \sin ky) \tag{1.23}$$

где

$$\pi a_k = \int_{-c}^{c} p(y) \cos ky dy, \qquad \pi b_k = \int_{-c}^{c} p(y) \sin ky dy \tag{1.24}$$

Из интегрального уравнения (1.20) и граничных условий на линии контакта для определения неизвестных a_k и b_k получим следующую систему:

$$\begin{aligned} a_k &= \sum_{p=1}^{\infty} (a_p M_{pk}^{(1)} + b_p N_{pk}^{(1)}) + \gamma_k^{(1)} \\ b_k &= \sum_{p=1}^{\infty} (a_p M_{pk}^{(2)} + b_p N_{pk}^{(2)}) + \gamma_k^{(2)} \end{aligned} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.25}$$

где

$$M_{pk}^{(1)} = \int_{-c}^{c} [iN_p^{(1)} S_p(\xi) + N_p^{(2)} C_p(\xi)] \cos k\xi d\xi$$

$$M_{pk}^{(2)} = \int_{-c}^{c} [N_p^{(1)} S_p(\xi) - iN_p^{(2)} C_p(\xi)] \sin k\xi d\xi$$

$$N_{pk}^{(1)} = \int_{-c}^{c} [iN_p^{(3)} S_p(\xi) + N_p^{(4)} C_p(\xi)] \cos k\xi d\xi$$

$$N_{pk}^{(2)} = \int_{-c}^{c} [N_p^{(3)} S_p(\xi) - iN_p^{(4)} C_p(\xi)] \sin k\xi d\xi$$

$$\pi \Delta_{p1} N_p^{(1)} = -[\lambda_{p1}(\delta_1 - \delta_2) + (\alpha_p^2 - 1)\lambda_{p2}(\delta_1 + \delta_2)]$$

$$\pi \alpha_p \Delta_{p1} N_p^{(2)} = [(\alpha_p^2 - 1)\lambda_{p2} - \lambda_{p4}](\delta_1 + \delta_2) - (\alpha_p^2 - 2)\lambda_{p1}(\delta_1 - \delta_2)$$

$$\pi \Delta_{p1} N_p^{(3)} = -\alpha_p \lambda_{p3}(\delta_1 - \delta_2), \qquad \pi \Delta_{p1} N_p^{(4)} = \lambda_{p3}(\delta_1 - \delta_2) - \lambda_{p4}(\delta_1 + \delta_2)$$

$$\gamma_k^{(1)} \operatorname{ch} \pi\beta = 4BD \{\operatorname{th} c\beta [B_k(0) - B_{k-1}(0)] + i[A_k(0) + A_{k-1}(0)]\} +$$

$$+ \frac{2 \operatorname{ch} \pi\beta}{\pi^2} \int_0^{\pi} \varphi_1\left(\frac{\beta_1 \eta}{\pi}\right) d\eta \int_{-c}^{c} C_p(\xi) \cos k\xi d\xi \tag{1.26}$$

$$-\pi\gamma_k^{(2)} = 2\pi BD\{i\,\mathrm{th}\,c\beta[A_k(0) - A_{k-1}(0)] + [B_k(0) + B_{k-1}(0)]\} +$$

$$+ 2\int_0^{\pi} \sigma_1\left(\frac{\varphi_1\eta}{\pi}\right) d\eta \int_{-c}^{c} C_0(\xi)\sin k\xi\, d\xi$$

$$\int_{-c}^{c} \frac{\cos\left[\left(p + \frac{1}{2}\right)x + \delta\right]dx}{X(x)} = \frac{2\pi}{\cos\pi\beta}A_p(\delta)$$

$$\int_{-c}^{c} \frac{\sin\left[\left(p + \frac{1}{2}\right)x + \delta\right]dx}{X(x)} = \frac{2\pi}{\cos\pi\beta}B_p(\delta)$$

$$C_k(x) = A\cos kx + \frac{BX(x)}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{\cos k\tau\, d\tau}{X(\tau)\sin\frac{\tau - x}{2}}$$

$$S_k(x) = A\sin kx + \frac{BX(x)}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{\sin k\tau\, d\tau}{X(\tau)\sin\frac{\tau - x}{2}}$$

$$C_0(x) = -\frac{BX(x)}{\cos\pi\beta}\sin\left(c\beta + \frac{x}{2}\right), \quad A = \frac{1}{1-\gamma_i^2}, \quad B = \frac{\gamma i}{1-\gamma_i^2}$$

Таким образом, рассмотренная задача сводится к решению бесконечной системы алгебраических уравнений. В силу введения новых неизвестных (1.12) коэффициенты бесконечных систем (1.25) стремятся к нулю, как $O(k^{-1/2}, pe^{-\lambda p})$. Из выражения (1.26) следует, что $\beta_0\varphi_1 = \pi\min(t_1, t_2)$. На основании вышесказанного и результатов работы [6] для коэффициентов бесконечных систем (1.25) имеем

$$\sum_{p=1}^{\infty}|M_{kp}^{(1)}|, \quad \sum_{p=1}^{\infty}|N_{pk}^{(1)}| \to 0, \quad k \to \infty$$

то есть система (1.25) квазивполне регулярна.

Как следует из физических соображений, ряд (1.23) сходится условно. Но используя решение (1.20), сходимость этого ряда улучшается и при этом выделяются соответствующие особенности контактных напряжений (1.27).

В качестве численного примера рассмотрим случай, когда внутреннее тело—из меди ($E = 10^6$ *кг/см*^{2}, $\nu = 0.32$), а наружное — из стали ($E = 2\cdot 10^6$ *кг/см*^{2}, $\nu = 0.27$). Принято, что $-t_1 = t_2 = \ln 2$,

$$\sigma(t_1, \varphi) = f_2^{(1)} = p_{01}, \quad \sigma(t_2, \varphi) = f_{01}^{(2)} = p_{02}, \quad c = 0.5\pi; \ n = 3$$

При таких значениях параметров комплексное контактное напряжение примет вид

$$p(x) = \frac{D}{\sqrt{\sin\frac{c-x}{2}\sin\frac{c+x}{2}}}\,[C(x) - iS(x)][K_1(x) + iK_2(x)] \tag{1.27}$$

где

$$C(x) = \cos\left(\beta \ln \frac{\sin\frac{c+x}{2}}{\sin\frac{c-x}{2}}\right), \quad S(x) = \sin\left(\beta \ln \frac{\sin\frac{c+x}{2}}{\sin\frac{c-x}{2}}\right)$$

$$K_1(x) = 0.166385\cos\frac{x}{2} - 0.077669\cos\frac{3x}{2} - 0.001102\cos\frac{5x}{2} +$$

$$+ 0.000022\cos\frac{7x}{2} - \cdots$$

$$K_2(x) = 0.024985\sin\frac{x}{2} + 0.005874\sin\frac{3x}{2} -$$

$$- 0.000339\sin\frac{5x}{2} + 0.0000009\sin\frac{7x}{2} + \cdots$$

Имеем также

$$\int_{-c}^{c} p(x)\,dx = 1.05238\,D \tag{1.28}$$

а для D получаем

$$D = -23.481324\rho_1\omega^2 a^3 - 129.96447\,\rho_2\omega^2 a^3 + 11.205104\,p_{01} -$$

$$- 23.146771\,p_{02} + 9.362577\cdot 10^{6}\,\frac{\delta}{a} \tag{1.29}$$

δ — сближения колец

$$\delta = u^{(1)}(0,\varphi) - u^{(2)}(0,\varphi), \quad |\varphi| < c$$

Из (1.28) и (1.29) можно получить те значения ω, зависящие от p_{01}, p_{02} и δ, при которых наступает момент отрыва колец друг от друга. Например, если $p_{01} = p_{02} = 0$, и разность радиусов колец до вращения была $u_1 - u_2 = \delta$, то тенденция к отрыву наступит при

$$\omega = 0.886256\cdot 10^{3}\sqrt{\frac{\delta}{a^3}}\ сек^{-1}$$

§ 2. Рассмотрим теперь задачу для кольца, ослабленного симметрично расположенными внешними или внутренними радиальными трещинами, когда на круговых частях и внутри трещин действуют равномерно распределенные нормальные нагрузки (фиг. 2).

Граничные условия этой задачи можно получить из (1.2) при

$$g_1^{(2)}(\varphi) = g_2^{(1)}(\varphi) = 0, \qquad f_{k1}^{(2)} = f_{k2}^{(1)} = 0$$

а условие для перемещения на линии $\varphi = \varphi_1$ заменяется одним из следующих смешанных условий:

а) внутренняя трещина

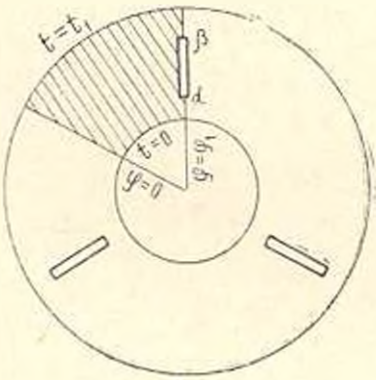
$$v(t, \varphi_1) = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant \alpha, \ \beta \leqslant t \leqslant t_1)$$
$$\sigma_\varphi(t, \varphi_1) = -p \quad (\alpha < t < \beta)$$

б) трещина, расположенная на внутренней поверхности

$$\sigma_\varphi(t, \varphi_1) = -p \quad (0 < t < \beta)$$
$$v(t, \varphi_1) = 0 \quad (\beta < t < t_1) \qquad (2.1)$$

в) трещина, расположенная на внешней поверхности

$$v(t, \varphi_1) = 0 \quad (0 < t < \alpha)$$
$$\sigma_\varphi(t, \varphi_1) = -p \quad (\alpha < t < t_1)$$



Фиг. 2.

Удовлетворяя условию (2.1,а), с учетом (1.2) — (1.5), для определения $f_3(t)$ получим следующее интегральное уравнение:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\psi(z)\,dz}{u - z} = \bar{f}(u) \qquad (-1 \leqslant u \leqslant 1) \tag{2.2}$$

где $\frac{1-\nu^2}{E} f_3(t)$ — нормальное перемещение точек берегов трещин

$$\psi(z) = f_3(y) - \bar{f}_3(y), \qquad \beta_1 y = \arccos(az + b)$$

$$\beta_1 t = \arccos(au + b), \quad 2a = \cos\beta_1\beta - \cos\beta_1\alpha$$

$$2b = \cos\beta_1\beta + \cos\beta_1\alpha, \quad \bar{f}(u) = g(t)$$

$$g(t) = D_0^{(0)}(t) + D_0^{(1)}(t_1) - \int_\alpha^\beta \psi(y)\, D_0^{(2)}(t, y)\, dy$$

$$D_0^{(0)}(t) = 4t_2\beta_1(b_1 e^{-t} - b_2 e^{t})$$

$$D_0^{(1)}(t_1) = -2t_1\beta_1[2b_0 e^{t_1} + b_1 e^{-t_1} + b_2(1 + 2t_1)e^{t_1} - a(P_2 - ape^{t_1})]$$

$$D_0^{(2)}(t, y) = 2\beta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin \beta_k y}{\beta_k^2 + 1} \left[(-1)^{k+1} (1 + R_p^{(1)}) - R_p^{(1)} (\beta_k^2 + 1) \cos \beta_k t\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2t_1}{\varphi_1 \Delta_{k1}} \left[Q_1(\alpha_k, y) H_k(t) - Q_1(\alpha_k, t_1 - y) H_k(t_1 - t) - \Delta_{k1} Q_1(\alpha_k, y)\right] \right\} \quad (2.3)$$

$$R_k^{(1)} \Delta_{k2} = -e^{-\beta_k \varphi_1} \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1 + \beta_k \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1$$

$$H_k(t) = \alpha_k \operatorname{sh} t_1 \left[\alpha_k^2 \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 - t) \operatorname{ch} t - \alpha_k (\alpha_k^2 - 2) \operatorname{ch} \alpha_k (t_1 - t) \operatorname{sh} t\right] +$$

$$+ \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \left[\alpha_k (\alpha_k^2 - 2) \operatorname{ch} \alpha_k t \operatorname{sh}(t_1 - t) - \alpha_k^2 \operatorname{sh} \alpha_k t \operatorname{ch}(t_1 - t)\right]$$

$$Q_1(\alpha_k, y) = \frac{1}{4\alpha_k} \left[\frac{\operatorname{sh}(\alpha_k - 1) y}{\operatorname{sh}(\alpha_k - 1) t_1} - \frac{\operatorname{sh}(\alpha_k + 1) y}{\operatorname{sh}(\alpha_k + 1) t_1} \right]$$

$$\Delta_{k2} = \operatorname{ch}^2 \beta_k \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1$$

$$\int_0^{\beta} a e^t \sigma_z(t, \varphi_1)\, dt = P_1, \quad \int_{\beta}^{t_1} a e^t \sigma_z(t, \varphi_1)\, dt = P_2$$

Представляя решение (2.2) в виде

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} \left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(z) \right] \quad (2.4)$$

для определения a_k получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$a_m = \sum_{k=0}^{\infty} A_{mk} a_k + g_m, \quad (m = 1, 2, 3, \ldots) \quad (2.5)$$

где

$$A_{mk} = -\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (1 - z^2)^{-1/2} \sqrt{1 - u^2}\, U_m(u)\, T_k(z)\, f_1(u, z)\, du\, dz$$

$$g_m = -\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - u^2}\, U_m(u)\, f_0(u)\, du \quad (2.6)$$

$$\pi f_0(u) = -2\left[D_0^{(0)}(t) + D_0^{(1)}(t_1)\right], \qquad \pi f_1(u, z) = -2 D_0^{(2)}(t, y)$$

$U_m(u)$, $T_k(u)$ — полиномы Чебышева.

Аналогичным образом, как это делалось в работах [3, 4], доказывается, что бесконечные системы этой задачи (2.5), а также следующей задачи (2.9) не только квазивполне регулярны, но и суммы модулей коэффициентов при неизвестных при возрастании номера строки стремятся к нулю, как $O(m^{-1/2})$.

При удовлетворении условий (2.1,в), то есть если трещина раскрывается к внешней поверхности, интегральное уравнение примет вид

$$\int_{\alpha}^{\pi} \frac{\psi(y)\sin\beta_1 y}{\cos\beta_1 y - \cos\beta_1 t}\, dy = g(t), \quad (\alpha < t < \pi) \tag{2.7}$$

решение которого ищется в виде

$$\psi(z) = \frac{a_0 \cos\frac{z}{2}}{\sqrt{\cos\alpha - \cos z}} + \sum_{p=1}^{\infty} a_p \cos\frac{z}{2} \int_{\alpha}^{z} \frac{y_p(\cos\theta)\, tg\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos\theta - \cos z}}\, d\theta \tag{2.8}$$

где

$$\beta_1 y = z, \quad \beta_1 t = u, \quad \beta_1\beta = \bar{\beta}, \quad \beta_1 g(t) = g(u)$$

Для определения a_n получим бесконечную систему алгебраических уравнений

$$a_m = \sum_{p=1}^{\infty} A_{pm} a_p + g_m, \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$a_0 B_0 = \sum_{p=1}^{\infty} B_p a_p + g_0 \tag{2.9}$$

где

$$\pi A_{pm} = m \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)} C_{mk}(\alpha)\, J_{pk}(\cos\alpha) -$$

$$- \frac{4\sqrt{2}\, m}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{k1}} \int_{\alpha}^{\pi} y_p(\cos\theta)\, R_{km}(\cos\theta)\, \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$\pi^2 g_m = - m\sqrt{2}\, A_{m0} + a_0 \pi m \sum_{k=1}^{\infty} \left| R_k^{(1)} C_{mk}(\alpha)\, y_k(\cos\alpha) - \frac{4\sqrt{2}}{\varphi_1} \frac{R_{km}(\cos\alpha)}{\Delta_{k1}} \right|$$

$$J_{pk}(\cos\alpha) = \int_{\alpha}^{\pi} y_p(\cos\theta)\, y_k(\cos\theta)\, \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$R_{km}(\cos\theta) = \int_{\theta}^{\pi} \frac{\cos y/2}{\sqrt{\cos\theta - \cos y}} [Q_1(\alpha_k, y)\, H_{km}(\alpha) -$$

$$- Q_1(\alpha_k, \pi - y)\, H_{km}(\pi - y)]\, dy$$

$$C_{mk}(\alpha) = \int_{\alpha}^{\pi} \cos mt \cos kt\, dt, \qquad H_{km}(\alpha) = \int_{\alpha}^{\pi} H_k(t) \cos mt\, dt$$

$$B_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)} y_k(\cos\alpha) \frac{\sin k\alpha}{k} - \frac{8}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_{k0}(\cos\alpha)}{\Delta_{k1}} \tag{2.10}$$

$$B_p = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,\frac{Z_p(\cos\theta)}{p} + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)} J_{pk}(\cos\alpha)\,\frac{\sin k\alpha}{k} +$$

$$+ \frac{8}{\beta_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Delta_{k1}}\int_0^{\pi} Y_p(\cos\theta)\,R_{k0}(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$g_0 = 8\left[b_1\left(e^{-\alpha}-e^{-\pi}\right) - b_2\left(e^{\pi}-e^{\alpha}\right)\right] + \frac{2(\pi-\alpha)D_0^{(1)}(\pi)}{\pi\beta_1} -$$

$$-\frac{4(\pi-\alpha)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{l_k}\left[\frac{(-1)^{k+1}\left(1+R_k^{(1)}\right)\sin\beta_k y}{\beta_k^2+1} - \frac{2\pi}{\beta_1}\,Q_2(\alpha_k, y)\right]\psi(y)\,dy$$

$$\overline{A}_{m0} = 4\pi\int_{\alpha}^{\pi}\left[b_1e^{-t} - b_2e^{t}\right]\cos mt\,dt - \frac{D_0^{(1)}(\pi)\sin m\alpha}{m\beta_1} +$$

$$+\frac{2\sin m\alpha}{m}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{l_k}\left[\frac{(-1)^{k+1}\left(1+R_k^{(1)}\right)\sin\beta_k y}{\beta_k^2+1} - \frac{2\pi}{\beta_1}\,Q_1(\alpha_k, y)\right]\psi(y)\,dy$$

$$Y_k(x) = P_{k-1}(x) + P_k(x),\quad P_k(x) \text{ — полиномы Лежандра.}$$

В случае выполнения условий (2.1,б), то есть если трещина раскрывается к внутренней поверхности, аналогично случаю (2.1, в) решение интегрального уравнения приводится к регулярной бесконечной системе.

Институт механики
АН Армянской ССР
Ереванский зооветеринарный
институт

Поступила 15 II 1979

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ա. Ա. ԵՆԳԻԲԱՐՅԱՆ

ՃԱՔԵՐՈՎ ՕՂԱԿԱՅԻՆ ՍԵԿՏՈՐԻ ՀԱՄԱՐ ԵՐԿՈՒ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է առաձգականության տեսության երկու խնդիր պատվող շրջանային օղակների համար ա) մասնակիորեն իրար հարակցված երկու համակենտրոն շրջանային օղակների հարթ կոնտակտային խնդիրը, բ) սիմետրիկ ձևով դասավորված ներքին և արտաքին շառավղային ճեղքերով թուլացված օղակի խնդիրը:

Լուծումը փնտրվում է Ֆուրյեի եռանկյունաչափական շարքերի օգնությամբ բևեռային կոորդինատական սիստեմում, և այն բերվում է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման: Վերջինս էլ փոխարինվում է համարժեք քվազի լիովին ռեգուլյար անվերջ սիստեմով: Բերվում է թվային օրինակ:

ON TWO PROBLEMS FOR RING SECTORS

A. H. BABLOYAN, A. A. ENGIBARIAN

Summary

Two problems for a rotating disc a) a contact problem for two circular rings from different materials partially (symmetrically) bounded to each other, b) a problem for one ring weakened by symmetrically placed internal and external radial cracks are considered.

The stress function in the form of trigonometrical Fourier series in polar coordinate system is presented.

The solution is reduced to singular integral equations, later reduced to a quasi-quite regular system of algebraic equations.

A numerical example is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баблоян А. А.* Решение плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора в напряжениях. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. н., 1962, т. 16, № 1.
2. *Баблоян А. А., Тоноян В. С.* Плоская задача для ортотропной пластинки в виде кольцевого сектора. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. н., 1964, т. 17, № 5.
3. *Баблоян А. А., Саакян В. Г.* Решение смешанной задачи теории упругости для кругового кольца. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1967, т. 20, № 5.
4. *Баблоян А. А., Саакян В. Г.* Об одной плоской контактной задаче теории упругости для кругового кольца. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1970, т. 23, № 1.
5. *Баблоян А. А., Гулканян Н. О.* Плоская задача для кругового кольца с радиальными трещинами. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1969, т. 22, № 3.
6. *Баблоян А. А., Енгибарян А. А.* Контактная задача для прямоугольника при наличии сцепления. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1977, т. 30, № 4.
7. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М., Изд. «Наука», 1975.
8. *Яу Вен-Фу.* Смешанная задача для упругого кольца. ПМ, 1968, т. 35, № 4.
9. *Rooke D. P., Tweed J.* The stress intensity factors of a radial crack in a point loaded disc. Intern. Journal, Eng. Sci., 1973, vol. 11, No. 2.
10. *Сапонджян О. М., Энфиаджян Р. Л.* Круговой диск с радиальным разрезом под действием сосредоточенных сил. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т. 28, № 5.
11. *Зарғарян С. С., Энфиаджян Р. Л.* Равномерно растянутая круглая пластинка с радиальными трещинами. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, т. 25, № 2.
12. *Tweed J., Rooke D. P.* The stress intensity factor of an edge crack in a finite elastic disc. Intern. Journal Eng. Sci., 1973, vol. 11, No. 1.
13. *Gregory R. D.* A circular disc containing a radial edge crack opened by a constant internal pressure. Math. Proceedings, 1977, vol. 81, No. 3.
14. *Tweed J., Rooke D. P.* The distribution of stress near the top of a radial crack of the edge of a circular hole. Int. J. Eng., Sci., 1973, 11, No. 11.
15. *Чибрикова Л. И.* О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений. Уч. записки Казанского ун-та, 1962, т. 122, кн. 3.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, №5, 1979 Механика

А. Н. ЗЛАТИН

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ОДНОРОДНЫМ РЕШЕНИЯМ ДЛЯ ЦИЛИНДРА

Одним из обобщений метода Фурье разделения переменных на задачи теории упругости является метод однородных решений [1]. Проблема нахождения этих решений сводится, как правило, к несамосопряженной задаче на собственные значения; получаемые при этом собственные функции (однородные решения) оказываются комплексными и неортогональными, поэтому для обоснования метода приходится исследовать вопрос о разложении по однородным решениям (или родственные вопросы полноты систем этих решений).

Впервые теоремы разложения по однородным решениям были получены в работе [2] для прямоугольной области. Дальнейшее развитие проблема получила в основном в связи с построением асимптотической теории пластин и оболочек [3]. Из работ, посвященных исследованию систем однородных решений для цилиндра, автору известна лишь заметка [4], где анонсированы результаты, полученные методами функционального анализа, для случая, когда на боковой поверхности цилиндра отсутствуют перемещения.

В настоящей работе исследуются условия, при которых формальное решение, получаемое с помощью соотношения обобщенной ортогональности Шиффа [5, 6], фактически удовлетворяет краевым условиям на торцах цилиндра. Работа является развитием статьи [2], как в смысле тематики, так и в смысле применяемого математического аппарата.

1. *Постановка задачи и формальное решение.* Рассмотрим сначала изотропный однородный цилиндр единичного радиуса, описываемый в цилиндрической системе координат (ρ, φ, x) неравенствами $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $-\infty < x \leqslant 0$, и предположим, что на боковой поверхности цилиндра отсутствуют напряжения.

Решение уравнений теории упругости, оставляющее боковую поверхность цилиндра свободной от напряжений и отвечающее условиям убывания на бесконечности $(x \to -\infty)$, может быть в осесимметричном случае построено в виде суперпозиции однородных решений

$$w(\rho, x) = C_0 + \sum_k{}' C_k w_k(\rho) e^{p_k x}$$
$$\tau(\rho, x) = (2G)^{-1} \tau_{\rho x} = \sum_k{}' C_k \tau_k(\rho) e^{p_k x} \tag{1.1}$$

$$\sigma(\rho, x) = (2G)^{-1}\sigma_x = \sum_k{}' C_k \sigma_k(\rho) e^{p_k x}$$
$$u(\rho, x) = \sum_k{}' C_k u_k(\rho) e^{p_k x} \tag{1.1}$$

где $\{u, 0, w\}$ — вектор перемещений; $\tau_{x\rho}$, σ_x — составляющие тензора напряжений; знак суммирования $\sum'$ распространяется на все корни p_k уравнения

$$s(p) = 2(1-\nu) J_1^2(p) - p^2 [J_0^2(p) + J_1^2(p)] = 0 \tag{1.2}$$

расположенные в правой полуплоскости ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$);

$$w_k(\rho) = w^*(p_k, \rho), \quad \tau_k(\rho) = \tau^*(p_k, \rho)$$
$$\sigma_k(\rho) = \sigma^*(p_k, \rho), \quad u_k(\rho) = u^*(p_k, \rho) \tag{1.3}$$

$$w^*(p, \rho) = J_0(p) J_0(p\rho) + \rho J_1(p) J_1(p\rho) - 2(1-\nu) p^{-1} J_1(p) J_0(p\rho)$$
$$\tau^*(p, \rho) = p [\rho J_1(p) J_0(p\rho) - J_0(p) J_1(p\rho)]$$
$$\sigma^*(p, \rho) = p J_0(p) J_0(p\rho) + p\rho J_1(p) J_1(p\rho) - 2 J_1(p) J_0(p\rho)$$
$$u^*(p, \rho) = \rho J_1(p) J_0(p\rho) - J_0(p) J_1(p\rho) - 2(1-\nu) p^{-1} J_1(p) J_1(p\rho)$$

G, ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала цилиндра. Заметим здесь, что распределение корней p_k дается следующей асимптотической формулой [7]:

$$p_{\pm k} \sim k\pi \pm \frac{i}{2} \ln(4k\pi), \quad k \to +\infty \tag{1.4}$$

Однородные решения (1.3) удовлетворяют соотношению обобщенной ортогональности Шиффа [5, 6], которое может быть представлено в форме

$$\int_0^1 [\tau_k(\rho) u_n(\rho) - w_k(\rho) \sigma_n(\rho)] \rho d\rho = S_k \delta_{nk}; \; n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.5}$$

где δ_{nk} — символ Кронекера, и введены обозначения для однородных решений, соответствующих корню $p_0 = 0$ уравнения (1.2)

$$w_0 = \sigma_0 = 1, \quad \tau_0 = 0, \quad u_0 = -\nu\rho(1+\nu)^{-1}$$

Известно, что с помощью соотношения (1.5) коэффициенты C_k могут быть найдены в явном виде, если на торце цилиндра ($x = 0$) задаются так называемые «перекрестные» граничные условия: то есть либо величины w и τ, либо σ и u. Рассмотрим здесь первый случай (второй рассматривается аналогично), именно, пусть

$$w|_{x=0} = W(\rho), \quad \tau|_{x=0} = T(\rho), \quad 0 \leqslant \rho < 1 \tag{1.6}$$

Формально перейдем к пределу в (1.1)

$$w(\rho, 0) = C_0 + \sum_k{}' C_k w_k(\rho) = W(\rho)$$

$$\tau(\rho, 0) = \sum_k{}' C_k \tau_k(\rho) = T(\rho), \quad 0 \leqslant \rho < 1$$

домножим эти равенства соответственно на $-\sigma_n(\rho)\rho$ и $\tau_n(\rho)\rho$, сложим и проинтегрируем по $\rho \in [0, 1]$. После перемены порядка суммирования и интегрирования, используя соотношение (1.5), получаем

$$C_k = S_k^{-1} \int_0^1 [T(\xi)\tau_k(\xi) - W(\xi)\sigma_k(\xi)]\xi d\xi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (1.7)$$

Формулы (1.1), (1.7) дают формальное решение поставленной задачи.

2. *Преобразование формального решения.* Рассмотрим последовательность контурных интегралов (см. (1.2))

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{L_n} F(p)\, dp^* \qquad (2.1)$$

где

$$F(p) = -\sigma^*(p, \xi)\, w^*(p, \rho)\, e^{px} \Delta^{-1}(p) \qquad (2.2)$$

$$\Delta(p) = (1 - \nu)\, p^{-2} J_1^2(p)\, s(p) \qquad (2.3)$$

L_n — контур, состоящий из отрезка мнимой оси $L_n^{(1)}$, замкнутого вправо полуокружностью $L_n^{(2)}$ большого радиуса $R_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$.

В силу симметрии поведение функции (2.2) на дугах $L_n^{(2)}$ достаточно исследовать лишь в первом квадранте. Используя асимптотические формулы для функции Бесселя в комплексной плоскости, можно получить при $\arg(p) \in (\alpha, \pi/2]$ и любом $\alpha \in (0, \pi/2)$:

$$F(p) = O(p^2 \exp[(2 - \xi - \rho)\, ip + xp]), \quad p \to \infty \qquad (2.4)$$

При $\arg(p) \in [0, \alpha]$ можно воспользоваться имеющимися в [8] оценками для функции $s(p)$, из которых следует, что $|F(p)|$ убывает при $n \to \infty$ на дугах $L_n^{(2)}$ за счет сомножителя e^{px}. Полученные оценки позволяют заключить, что

$$\int_{L_n^{(2)}} F(p)\, dp \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \qquad (2.5)$$

если $\rho + \xi < 2$, $x < 0$.

Подынтегральная функция (2.2) в правой полуплоскости имеет полюсы первого порядка в точках p_k и полюсы второго порядка в точках λ_k, где λ_k — положительные корни уравнения

---

* Интегрирование производится против часовой стрелки.

$$J_1(\lambda) = 0$$

Учитывая (2.5), перейдем в (2.1) к пределу при $n \to \infty$. Используя теорему Коши о вычетах, после некоторых выкладок получим

$$-\sum_{k}{}^{*} \sigma_k(\xi)\, w_k(\rho)\, e^{p_k x} S_k^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} 2 J_0^{-2}(\lambda_k)\, J_0(\lambda_k \xi)\, J_0(\lambda_k \rho) \left[1 - \frac{x \lambda_k}{2(1-\nu)} \right] e^{\lambda_k x} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(xy)\, \sigma^*(iy, \xi)\, w^*(iy, \rho)\, \Delta^{-1}(iy)\, i\,dy \quad (2.6)$$

В левую часть этой формулы помещены вычеты в точках p_k, вычисленные с помощью равенства

$$\frac{d}{dp} \Delta(p) \Big|_{p = p_k} = S_k$$

которое можно проверить, найдя S_k по формуле (1.5).

Рассматривая теперь контурный интеграл (2.1) от функции

$$F(p) = u^*(p, \xi)\, w^*(p, \rho)\, e^{px} \Delta^{-1}(p) \quad (2.7)$$

можно получить

$$u_0(\xi)\, w_0(\rho)\, S_0^{-1} + \sum_{k}{}^{*} u_k(\xi)\, w_k(\rho)\, e^{p_k x} S_k^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{1-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} J_0^{-2}(\lambda_k)\, J_1(\lambda_k \xi)\, J_0(\lambda_k \rho)\, x e^{\lambda_k x} - \quad (2.8)$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(xy)\, u^*(iy, \xi)\, w^*(iy, \rho)\, \Delta^{-1}(iy)\, i\,dy$$

Отличие от исследованного выше случая (2.2)—(2.6) состоит в том, что в левой части этого равенства учтен еще полувычет от полюса первого порядка подынтегральной функции (2.7) в нуле.

Домножим теперь (2.6) на $-W(\xi)\xi$, а (2.8) на $T(\xi)\xi$, сложим и проинтегрируем по $\xi \in [0, 1]$. Из-за наличия экспоненциально убывающих сомножителей $e^{\lambda_k x}$, $e^{p_k x}$ (см. (1.4)) в полученных равенствах может быть переменен порядок суммирования и интегрирования (единственным требованием для этого является интегрируемость функций $W(\rho)$ и $T(\rho)$ по Лебегу). После этого во внутренних точках цилиндра для перемещения w, определяемого (1.1), (1.7), оказывается справедливым представление

$$w(\rho, x) = w_{\rm I} - \frac{1}{2(1-\nu)} (w_{\rm II} + w_{\rm III}) + w_{\rm IV}, \qquad x < 0, \quad 0 \leqslant \rho < 1 \quad (2.9)$$

где $$w_{\rm I}(\rho, x) = D_0[W] + \sum_{k=1}^{\infty} D_k[W] J_0(\lambda_k\rho) e^{\lambda_k x}$$

$$w_{\rm II}(\rho, x) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k[W] J_0(\lambda_k\rho) x\lambda_k e^{\lambda_k x}$$

$$w_{\rm III}(\rho, x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k[T] J_0(\lambda_k\rho) x e^{\lambda_k x}$$

$$w_{\rm IV}(\rho, x) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 W(\xi)\,\xi d\xi \int_0^{\infty} \sin(xy)\,\sigma^*(iy, \xi)\, w^*(iy, \rho)\,\Delta^{-1}(iy)\, i dy -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^1 T(\xi)\,\xi d\xi \int_0^{\infty} \sin(xy)\, u^*(iy, \xi)\, w^*(iy, \rho)\,\Delta^{-1}(iy)\, i dy$$

и введены следующие обозначения для коэффициентов рядов Дини и Фурье—Бесселя функции $f(\rho)$

$$D_0[f] = 2\int_0^1 f(\xi)\,\xi d\xi \tag{2.10}$$

$$D_k[f] = 2 J_0^{-2}(\lambda_k)\int_0^1 f(\xi) J_0(\lambda_k\xi)\,\xi d\xi$$

$$F_k[f] = 2 J_0^{-2}(\lambda_k)\int_0^1 f(\xi) J_1(\lambda_k\xi)\,\xi d\xi, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Аналогично для напряжения τ имеем

$$\tau(\rho, x) = \tau_{\rm I} + \frac{1}{2(1-\nu)}(\tau_{\rm II} + \tau_{\rm III}) + \tau_{\rm IV}, \quad x < 0, \quad 0 \leqslant \rho < 1 \tag{2.11}$$

$$\tau_{\rm I}(\rho, x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k[T] J_1(\lambda_k\rho) e^{\lambda_k x}$$

$$\tau_{\rm II}(\rho, x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k[T] J_1(\lambda_k\rho) x\lambda_k e^{\lambda_k x}$$

$$\tau_{\rm III}(\rho, x) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k[W] J_1(\lambda_k\rho) x\lambda_k^2 e^{\lambda_k x}$$

$$\tau_{\rm IV}(\rho, x) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 W(\xi)\,\xi d\xi \int_0^{\infty} \sin(xy)\,\sigma^*(iy, \xi)\,\tau^*(iy, \rho)\,\Delta^{-1}(iy)\, i dy -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^1 T(\xi)\,\xi d\xi \int_0^{\infty} \sin(xy)\, u^*(iy, \xi)\, w^*(iy, \rho)\,\Delta^{-1}(iy)\, i dy$$

3. *Исследование формального решения.* Далее под рядами Фурье—Бесселя и Дини будут пониматься ряды по ортогональным с весом ρ полным системам функций $\{J_1(\lambda_k\rho)\}$ и $\{\rho, J_0(\lambda_k\rho)\}$, $k=1, 2, \ldots$ $\rho\in[0, 1]$. Обозначения для коэффициентов этих рядов даны формулами (2.10).

Центральное место в настоящей работе занимает следующая

Теорема 1. *Пусть*

a) *функция* $W(\rho)$ *является абсолютной непрерывной* ([9], стр. 226) *на промежутке* $[0, 1]$,

b) *а* $T(\rho)$ — *интегрируемой (по Лебегу) на* $[0, 1]$:

тогда для решения (1.1) в виде ряда по однородным решениям с коэффициентами (1.7) краевые условия (1.6) выполняются в тех точках $\rho\in(0, 1)$, *где одновременно:*

c) *ряд Дини функции* $W(\rho)$ *сходится к* $W(\rho)$,

d) *ряд Фурье—Бесселя* $T(\rho)$ *сходится к* $T(\rho)$,

e) *ряд Фурье—Бесселя производной* $W'(\rho)$ *сходится,*

f) *ряд Дини первообразной* $T^*(\rho)=\int_0^\rho T(\rho)d\rho$ *сходится.*

Доказательство основывается на исследовании предельного перехода $x\to-0$ в представлениях (2.9), (2.11).

В силу условий c), d) по признаку Абеля равномерной сходимости рядов заключаем:

$$\lim_{x\to-0} w_1(\rho, x)=W(\rho) \tag{3.1}$$

$$\lim_{x\to-0} \tau_1(\rho, x)=T(\rho), \quad 0<\rho<1$$

С помощью оценок типа (2.4) при $\rho=iy$ легко доказать, что для интегралов w_{IV} и τ_{IV} выполняются условия теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла ([9], стр. 142) при $\rho<1$, поэтому

$$\lim_{x\to-0} w_{IV}(\rho, x)=\lim_{x\to-0}\tau_{IV}(\rho, x)=0, \quad \rho<1 \tag{3.2}$$

Условия a), b) теоремы позволяют преобразовать интегрированием по частям ряды w_{III}, τ_{III}

$$w_{III}(\rho, x)=-\sum_{k=1}^{\infty} D_k[T^*]\,J_0(\lambda_k\rho)\,x\lambda_k e^{\lambda_k^2 x}$$

$$\tau_{III}(\rho, x)=-\sum_{k=1}^{\infty} F_k[W']\,J_1(\lambda_k\rho)\,x\lambda_k e^{\lambda_k^2 x}$$

Члены этих рядов также, как и ряды w_{II} и τ_{II}, представляют собой произведения слагаемых рядов Дини (Фурье—Бесселя) на варианту $a_k(x)=-x\lambda_k e^{\lambda_k^2 x}$, которая обладает следующими свойствами:

во-первых, при любых натуральном k и $x < 0$: $0 < a_k(x) \leqslant e^{-1}$, во-вторых, $a_k(x)$, как функция натурального аргумента k, монотонно возрастает при $0 < \lambda_k \leqslant -x^{-1}$ и монотонно убывает при $\lambda_k > -x^{-1}$.

На этот случай легко может быть обобщен признак Абеля [10], который совместно с условиями с) — 1) теоремы показывает, что для рядов $w_{\text{II, III}}$ и $\tau_{\text{II, III}}$ допустим почленный переход к пределу

$$w_{\text{II, III}}(\rho, x), \quad \tau_{\text{II, III}}(\rho, x) \to 0 \text{ при } x \to -0, \; 0 < \rho < 1 \tag{3.3}$$

Формулы (3.1), (3.2), (3.3) доказывают теорему 1.

Замечание. Поскольку при $\rho \in (0, 1)$, как известно [11, 12], ряды Фурье—Бесселя и Дини ведут себя в смысле сходимости так же, как тригонометрические [13], для выполнения условий с) — 1) теоремы 1 достаточно потребовать, например, чтобы в окрестности точки $\rho \in (0, 1)$ функции $W(\rho)$, $T(\rho)$ удовлетворяли условиям Липшица с показателем $\alpha \in (0, 1]$.

Кроме того, укажем (без доказательства) еще на одну возможную формулировку теоремы разложения:

Теорема 2. *Если функции $W(\rho)$ и $T(\rho)$ имеют ограниченное полное изменение на промежутке* $[0, 1]$, *то*

$$\lim_{x \to -0} w(\rho, x) = W(\rho), \quad 0 \leqslant \rho < 1$$

$$\lim_{x \to -0} \tau(\rho, x) = \begin{cases} 0, & \rho = 0 \\ \dfrac{1}{2}[T(\rho - 0) + T(\rho + 0)], & 0 < \rho < 1 \end{cases}$$

4. *Случай конечного цилиндра.* Рассмотрим теперь цилиндр конечной высоты $(-l < x < l)$ со свободной боковой поверхностью, на торцевых поверхностях которого заданы касательные напряжения и нормальные перемещения, и предположим для определенности, что деформация является симметричной относительно плоскости $x = 0$. (Антисимметричный случай рассматривается аналогично, а общий — как наложение упомянутых двух). Итак, пусть

$$w|_{x=l} = -w|_{x=-l} = W(\rho), \quad \tau|_{x=l} = -\tau|_{x=-l} = T(\rho), \quad 0 \leqslant \rho < 1$$

В этом случае решение задачи можно разыскивать в виде [6] (см. (1.1), (1.3))

$$\begin{aligned} w(\rho, x) &= \frac{x}{l} C_0 + \sum_k{}' C_k w_k(\rho) \operatorname{sh} p_k x / \operatorname{sh} p_k l \\ \tau(\rho, x) &= \sum_k{}' C_k \tau_k(\rho) \operatorname{sh} p_k x / \operatorname{sh} p_k l \end{aligned} \tag{4.1}$$

При такой форме записи решения после повторения выкладок пункта 2 оказывается, что неизвестные C_k даются той же формулой (1.7), что и для полубесконечного цилиндра.

Для исследования предельного перехода преобразуем (4.1) к виду

$$w(\rho, x) = w_{\infty}(\rho, x) - w_l(\rho, x), \quad \tau(\rho, x) = \tau_{\infty}(\rho, x) - \tau_l(\rho, x) \quad (4.2)$$

введя обозначения

$$\begin{Bmatrix} w_{\infty} \\ w_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 - \dfrac{x}{l} \end{Bmatrix} C_0 + {\sum_k}' C_k w_k(\rho) \begin{Bmatrix} e^{p_k(x-l)} \\ d_k(x) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{\infty} \\ \tau_l \end{Bmatrix} = {\sum_k}' C_k \tau_k(\rho) \begin{Bmatrix} e^{p_k(x-l)} \\ d_k(x) \end{Bmatrix}$$

$$d_k(x) = e^{p_k(x-l)} - \operatorname{sh} p_k x / \operatorname{sh} p_k l$$

Учитывая (1.4) и асимптотику

$$d_k(x) = O(\exp[-p_k(x-l)]), \quad k \to \infty$$

можно показать, что ряды w_l, τ_l сходятся равномерно, скажем, при $0 < x < l$. Поэтому, в силу очевидного свойства $d_k(l) = 0$, заключаем

$$w_l, \tau_l \to 0 \quad \text{при} \quad x \to l - 0, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \quad (4.3)$$

Первые слагаемые в (4.2) совпадают при замене $x - l$ на x с представлениями для соответствующих величин в полубесконечном цилиндре. Их поведение при приближении к торцу определяется теоремами 1 и 2. Учитывая (4.3), заключаем окончательно:

результаты теорем 1 и 2 распространяются и на случай конечного цилиндра.

Автор благодарит Я. С. Уфлянда и А. С. Зильберглейта за прочтение рукописи и сделанные замечания.

Ленинградский ордена Ленина
политехнический институт
им. М. И. Калинина

Поступила 21 XI 1978

Ա. Ն. ԶԼԱՏԻՆ

ԳԼԱՆԻ ՀԱՄԱՐ ԸՍՏ ՀԱՄԱՍԵՌ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ

Ամփոփում

Ստացված թեորեմներում ուսումնասիրվել են այն պայմանները, որոնց դեպքում ազատ կողմնային մակերևույթով կլոր գլանի համար առաձգականության տեսության հավասարումների լուծումը, որը կառուցվել է ըստ հա-

մասնռ լուծումների շարքի տեսքով, բավարարում է գլանի հիմքերի վրա եզրային պայմաններին: Շարքերի գործակիցները որոշվում են Պ. Ա. Շիֆֆի ընդհանրացված օրթոգոնալության հարաբերակցությունների օգնությամբ:

SOME THEOREMS ON EXPANSION INVOLVING ELEMENTARY SOLUTIONS FOR THE CYLINDER

A. N. ZLATIN

Summary

The end problem of the elastic cylinder is considered. The solution is assumed to be a series involving elementary ones for the cylinder with a free side surface. The limits on the realization of boundary conditions are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прокопов В. К.* Обзор работ по однородным решениям теории упругости. Тр. Ленинград. политехн. инст., 1967, № 279.
2. *Гринберг Г. А.* О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области, и о некоторых его обобщениях. ПММ, 1953, т. 17, вып. 2.
3. *Ворович И. И.* Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек. Материалы I Всес. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси, Изд-во Тбилисск. ун-та, 1975.
4. *Орлов М. Б.* О полноте собственных и присоединенных векторов самосопряженного квадратичного пучка. Функц. анализ и его прилож., 1976, т. 10, № 2.
5. *Schiff P. A.* Sur l'equilibre d'un cylindre elastiqe. J. math. pures et appl., 1883, ser. 3, t. 9.
6. *Нуллер Б. М.* О соотношении обобщенной ортогональности П. А. Шиффа. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
7. *Dougall J.* An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic rod of circular section. Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 1913—1914, v. 49, p. 4, No. 17.
8. *Прокопов В. К.* Осесимметричная задача теории упругости для изотропного цилиндра. Тр. Ленинград. политехн. инст., 1950, № 2.
9. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М., «Наука», 1974.
10. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М., «Наука», 1966.
11. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций, ч. 1. М., ИЛ, 1960.
12. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, ч. 1. М., ИЛ, 1960.
13. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М., «Мир», 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 5, 1979 Механика

А. Г. БАГДОЕВ, Л. А. МОВСИСЯН

К ВОПРОСУ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ПЛАСТИНКАХ

Рассматривается распространение квазимонохроматических волн произвольного вида в нелинейной диспергирующей среде. В качестве примера изучаются изгибные колебания пластинки со степенным законом физической нелинейности. Общий подход к изучению указанных процессов дан в работах [1—3]. Учет эффектов дисперсии для продольных колебаний стержней дается в работе [4]. Исследованию нелинейных процессов в волновой области в недиспергирующих упругих средах посвящены работы [5–7]. В данной статье для изгибных колебаний пластинки проводится конкретизация коэффициентов в уравнениях для медленных модуляций амплитуд и фаз, полученных в работе [8]. Получены условия устойчивости волн, решение для сходящихся пучков [9], в том числе и решение вблизи каустики. Дана постановка типично дифракционной нелинейной задачи.

1. Предполагается, что решение заданного нелинейного уравнения, описывающего рассматриваемый физический процесс, является квазимонохроматической волной, то есть в общем случае записывается в виде $\varphi = \psi e^{i\bar{\tau}}$, $\bar{\tau} = \bar{\tau}_1 - \omega t$ — эйконал для основной волны, относительно которой имеются малые модуляции. В немодулированной задаче значение комплексной амплитуды $\psi = K(x, y, z, t)$, где K есть заданная функция, называется по аналогии с геометрической оптикой лучевым решением. Поскольку в окрестности волны решение может быть существенно трехмерным, например, в задаче об узких пучках лучей и в дифракционных задачах, удобно ввести лучевые координаты t, $\bar{\tau}$, θ, ξ, где t — характерное время, θ и ξ — лучевые координаты. При этом в силу произвола выбора поверхностей $\theta = \mathrm{const}$ и $\xi = \mathrm{const}$ можно выбрать их линии пересечения с волной $\bar{\tau} = \mathrm{const}$ ортогональными и обозначать их соответственно через линии, вдоль которых отсчитываются координаты y и z. Поэтому можно записать вдоль указанных линий $dy = H_2 d\theta$ и $dz = H_3 d\xi$, где H_2 и H_3 — параметры Ламе.

В работе [8] для диспергирующей, слабо нелинейной среды получено нелинейное уравнение Шредингера для медленных модуляций комплексной амплитуды волны

$$i\Delta_\omega \frac{\partial \psi}{\partial t}\Big|_{\bar{\tau}} - \frac{1}{2}\Gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{\tau}^2} + \Lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{\tau}\partial y} + \Lambda_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{\tau}\partial z} + \frac{1}{2}\Delta_1 \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \theta^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \theta \partial \xi}\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\right)\psi - i\Delta_\omega \psi \frac{d \ln K}{dt} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_{a=a_0} |\psi|^2 \psi \quad (1.1)$$

Здесь $\Delta(\alpha, \beta, \gamma, \omega) = 0$ есть дисперсионное соотношение соответствующей линейной задачи, которое в дальнейшем для удобства выбирается в виде

$$\Delta = \omega - \omega_0(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \tag{1.2}$$

$\xi = \mathrm{const}$ дает уравнение лучей, $\left.\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|_{\xi=\mathrm{const}} = \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\frac{\Delta_{\alpha_i}}{\Delta_\omega}$ и $\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\Delta_{\alpha_i}}{\Delta_\omega}$ $(\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = \beta, \alpha_3 = \gamma)$.

В нелинейной задаче предполагается выполненным нелинейное дисперсионное соотношение

$$\omega = \omega_0(\alpha, \beta, \gamma) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 \tag{1.3}$$

которое можно получить из вариационного принципа для осредненного лагранжиана

$$\frac{\partial L}{\partial a^2} = 0, \quad L = a^2\Delta + \frac{a^4}{2} G(\alpha, \beta, \gamma, \omega) \tag{1.4}$$

Поскольку рассматривается окрестность заданной волны $\bar{\tau} = \mathrm{const}$, то все коэффициенты в уравнении (1.1), включая K, помимо несущей частоты ω, могут зависеть лишь от l, так как для неособых участков волны решение определяется переменными l и $\bar{\tau}$, а для вышеуказанных участков двух или трехмерности решения указанные коэффициенты можно вычислить для фиксированного луча, от точки пересечения которого с волной $\bar{\tau} = \mathrm{const}$ производится отсчет координат y и z. Причем, в неподвижной системе координаты x_i на указанном луче зависят только от l. Впрочем, далее рассматривается пример задачи, в которой K зависит и от координаты y, тогда в (1.1) следует считать $\frac{dK}{dt} = \left.\frac{\partial K}{\partial t}\right|_{x_i} - \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\frac{\Delta_{\alpha_i}}{\Delta_\omega}$.

Отметим, что вытекающее из (1.2) соотношение $\alpha = \alpha(\beta, \gamma, \omega)$ вычисляется в системе подвижного трехгранника x, y, z, где ось x направлена по нормали к волне $\bar{\tau} = \mathrm{const}$, $dx = H_1 d\bar{\tau}$, H_1 — параметр Ламе.

Как показано в [8], имеет место*

$$\Gamma = -\Delta_\omega a^2 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \alpha^2} = -\alpha_k \alpha_j \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j}$$

$$\Lambda = a\Delta_\omega \left(\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \alpha \partial \beta}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j}\left(\alpha_j \frac{\partial b}{\partial x_k} + \alpha_k \frac{\partial b}{\partial x_j}\right) \tag{1.5}$$

$$\Lambda_1 = a\Delta_\omega \left(\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} + \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \gamma \partial \alpha}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j}\left(\alpha_j \frac{\partial \zeta}{\partial x_k} + \alpha_k \frac{\partial \zeta}{\partial x_j}\right)$$

* Первая группа написанных соотношений верна в подвижной системе координат, связанной с волной, а вторая — для неподвижной системы координат.

Согласно (1.2) $\Delta_{\omega} = 1$. Полагая $\psi = ae^{i\varphi}$, где a — действительная амплитуда, а φ — фаза, можно из (1.1) получить уравнение для a и φ. Поскольку для рассматриваемой здесь среды все коэффициенты являются действительными (кроме i), для двухмерной, не зависящей от ξ и γ, задачи получится

$$\varphi_t|_{\xi} + \frac{1}{2}\Delta_2\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\varphi_y^2\right) - \frac{1}{2}\frac{\Delta_2}{a}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}a_{yy}\right) - \frac{\Gamma}{2a}(a\varphi_{\zeta}^2 - a_{\zeta\zeta}) + \frac{1}{a}\Lambda(a\varphi_{\zeta}\varphi_y - a_{\zeta y}) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_{a=0} a^2 = 0 \tag{1.6}$$

$$(a^2)_t|_{\xi} - a^2\frac{d\ln K^2}{dt} + \Delta_2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}(a^2\varphi_y)_y - \Gamma(a^2\varphi_{\zeta})_{\zeta} + \Lambda[(a^2\varphi_{\zeta})_y + (a^2\varphi_y)_{\zeta}] = 0$$

Вторые производные от a, которые отсутствуют в подходе нелинейной геометрической оптики, соответствуют дифракционному изменению профиля. Если эти члены отбросить и ввести обозначения $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = p$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = q$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = r$, получим систему гиперболических уравнений, характеристики которой следующие:

$$(\nu + \Gamma n_{\zeta}^2 - \Delta_2\alpha'' q n_y - \Lambda r n_y - \Lambda q n_{\zeta})^2 = a^2 Y\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0$$

$$Y = -\Gamma n_{\zeta}^2 + 2\Lambda n_{\zeta} n_y + \Delta_2\alpha'' n_y^2 \tag{1.7}$$

где $\nu = -\frac{\partial F}{\partial t}$, $n_y = \frac{\partial F}{\partial y}$, $n_{\zeta} = \frac{\partial F}{\partial\zeta}$, $\alpha'' = \frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}$, а $F = 0$ есть уравнение характеристической поверхности.

Условие действительности характеристик имеет вид

$$Y\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 > 0 \tag{1.8}$$

откуда в линейном случае получается условие устойчивости волны.

В частности, для неособых участков волны, где n_y мало, получается условие продольной устойчивости

$$\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\nu^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 > 0 \tag{1.9}$$

Для типично дифракционных задач, или узких пучков, в Y существенно последнее слагаемое, которое дает условие поперечной устойчивости

$$\Delta_2\alpha''\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 > 0 \tag{1.10}$$

Как видно из (1.10), поперечная устойчивость существенно зависит от знака кривизны дисперсионной кривой.

Для полных уравнений (1.6), которые уже не являются гиперболическими уравнениями, можно произвести линеаризацию относительно невозмущенного состояния, тогда условие устойчивости запишется в виде

$$Y^2 + 4a_0^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 Y > 0 \tag{1.11}$$

что расширяет предыдущую область устойчивости и дает (1.8) или $-Y^2 < 4a_0^2 Y\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 < 0.$

2. Пусть имеется нелинейно-упругая пластина, в которой распространяется квазимонохроматическая волна изгиба. Будем считать, что нелинейность материала характеризуется следующим образом: между интенсивностями напряжений и деформаций имеется степенная связь [10]

$$\sigma = A\epsilon + B\epsilon^3 \tag{2.1}$$

Для изгибных колебаний существенна лишь кубическая нелинейность, что заставило нас выбрать упругую связь (2.1); в то же время на этом простом варианте можно проследить общие закономерности модуляции волн.

Принимая несжимаемость материала пластинки и гипотезу недеформируемых нормалей, для лагранжиана будем иметь выражение

$$\begin{gathered}\bar{L} = \frac{1}{2}\rho h\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 - \frac{h^3}{18}\left(AL_1 + \frac{B}{10}h^2L_1^2\right)\\ L_1 = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\end{gathered} \tag{2.2}$$

Все параметры в (2.2) можно считать медленно меняющимися функциями координат на длине волны.

Для квазимонохроматической волны при получении нелинейного дисперсионного уравнения (1.4), ввиду малости амплитуд, можно полагать

$$w = a\cos\theta, \quad \theta = \alpha x + \beta y - \omega t \tag{2.3}$$

где α, β, ω — медленно изменяющиеся функции от x, y, t.

Подставляя (2.3) в (2.2) и введя осредненный лагранжиан

$$L = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{L}\,d\theta$$

получим

$$L = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\rho h a^2\omega^2 - \frac{a^2}{18}h^3(\alpha^2+\beta^2)^2\left[A + \frac{3}{80}Bh^2a^2(\alpha^2+\beta^2)^2\right]\right\} \tag{2.4}$$

Согласно (1.4) и (2.4) с учетом малости a получается следующее дисперсионное соотношение нелинейной задачи:

$$\omega = \frac{h}{3}(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{\frac{A}{\rho}}\left[1+\frac{3}{40}\,\frac{B}{A}h^2a^2(\alpha^2+\beta^2)^2\right] \tag{2.5}$$

В линейной задаче дисперсионное соотношение

$$\Delta = \omega - \frac{h}{3}\sqrt{\frac{A}{\rho}}(\alpha^2+\beta^2)=0, \quad \omega=\omega_0(\alpha,\beta), \quad \alpha=\alpha(\beta,\omega_0) \tag{2.6}$$

дает

$$\Delta=0, \quad \Delta_1=0, \quad \Gamma=-2A_1(\alpha^2+\beta^2), \quad \alpha''=-\sqrt{\frac{A_1}{\omega_0}}, \quad A_1=\frac{h}{3}\sqrt{\frac{A}{\rho}}$$

Здесь учтено, что при получении уравнения (1.1) ось x была направлена по нормали к волне, поэтому $\beta \approx 0$.

Поскольку знак $\frac{\partial\omega}{\partial a^2}$ определяется знаком B, из (1.9) и (1.10) получается, что условия устойчивости $\frac{\partial\omega}{\partial a^2}>0$ выполняются одновременно при $B>0$, то есть для нелинейных сред, близких к жидкости, а при $B<0$, то есть для обычных упругих сред, имеет место неустойчивость распространения. Первая среда будет дефокусирующей, а вторая — фокусирующей.

Для металлов отношение $\frac{3B}{A}\approx -10^5$, то есть имеет место неустойчивость согласно (1.10). Однако, по (1.11) можно найти диапазон амплитуд и волновых чисел, для которых уже будет иметь место устойчивость волнового движения

$$a_0^2<-\frac{20Ak_1^2}{9Bh^2k^6}$$

где $k=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$, а k_1 — волновое число для возмущения.

Рассмотрим задачу о распространении узких пучков изгибных волн в пластинках.

В таком случае можно пренебречь вторыми производными функции a в уравнениях (1.6), а также производными в продольном направлении. Тогда получится система уравнений, типичная для дифракционной задачи

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial X}+\frac{1}{2}\varphi_y^2-\Omega b^2=0\\
&\frac{\partial b^2}{\partial X}+(b^2\varphi_y)_y=0
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$\Omega = -K^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 / \Delta_y x^2, \quad a = bK, \quad dX = \Delta_y x^2 dt$$

Для полученных уравнений можно указать частное решение, задающее пучок, на границах которого $a = 0$, в виде

$$\varphi = \varphi(X) + \frac{1}{2}\frac{y^2}{R(x)} \tag{2.8}$$

Из (2.7) получится уравнение для σ и R, причем, введя $\frac{1}{R} = \frac{f'}{f}$, можно записать

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = -\frac{f'}{f}, \quad \frac{(f')^2}{f^2} + \left(\frac{f'}{f}\right)' = -\frac{4b_0^2\Omega}{y_0^2 f^3} \tag{2.9}$$

где b_0, y_0 — соответственно начальные амплитуда и ширина пучка. Если еще предполагать $\Omega = \mathrm{const}$, то есть рассматривать немодулированную волну как плоскую и среду — однородной, то можно проинтегрировать (2.9) и получить точное решение [9]

$$b^2 = \frac{b_0^2}{f(x)}\left[1 - \frac{y^2}{y_0^2 f^2(x)}\right]$$
$$X = \left(\frac{1}{4\Omega}\right)^{1/2}\frac{y_0}{b_0}\left[f^{1/2}(1-f)^{1/2} - \arcsin f^{1/2} + \frac{\pi}{2}\right] \tag{2.10}$$

Точка фокуса лучей определится из условия $f(X) = 0$, $X = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{4\Omega}\right)^{1/2}\frac{y_0}{b_0}$.

Полученное решение верно для фокусирующей среды ($B < 0$).

Для одномерной задачи в диспергирующей среде, отбрасывая вторые производные от a, можно из (1.6) получить для изгибных волн систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Gamma u\frac{\partial u}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 K^2\frac{\partial b^2}{\partial \xi} = 0$$
$$\frac{\partial b^2}{\partial t} - \Gamma\left(b^2\frac{\partial u}{\partial \xi} + u\frac{\partial b^2}{\partial \xi}\right) = 0, \quad \varphi_\xi = u \tag{2.11}$$

При $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 > 0$ полученная гиперболическая система имеет решение, характерное для уравнений газодинамики, и решение может опрокидываться, при этом следует в этой области удерживать отброшенные вторые производные от функции a [3]. При $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 < 0$ среда является фокусирующей и амплитуда профиля решения имеет заострение [3].

Здесь представляют интерес следующие задачи:

а) одномерная задача изгиба бесконечной пластины с произвольными начальными условиями, в которой для больших моментов времени асимптотика решения представляет квазимонохроматическую волну. Тогда можно решить систему (2.11), взяв в качестве начальных условий асимптотику линейной задачи [2].

Пусть при $t = 0$

$$w = f(x)e^{ik_0 x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \tag{2.12}$$

где $f(x)$ — медленно меняющаяся функция на длине волны $\left(\frac{2\pi}{k_0}\right)$. Решение задачи находится методом Фурье и имеет вид

$$w = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\left[e^{i(\alpha x+\omega(\alpha)t)} + e^{i(\alpha x-\omega(\alpha)t)}\right] d\alpha$$

$$F = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{i(k_0-\alpha)\xi}\, d\xi \tag{2.13}$$

Для больших x и t существенный вклад в решение дает окрестность стационарных точек

$$x \pm \omega'(\alpha_{1,2})\, t = 0 \tag{2.14}$$

поскольку

$$\omega = \pm A_1\alpha^2, \qquad \alpha_{1,2} = \mp\frac{x}{2A_1 t}, \qquad \omega_0 = \omega(\alpha_0)$$

Удерживая в разложении $\omega(\alpha)$ первые степени $\alpha - k_0$, получим

$$w = \frac{1}{2} f(\omega_0' t + x)\, e^{i(\omega_0 t + k_0 x)} + \frac{1}{2} f(x - \omega_0' t)\, e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \tag{2.15}$$

то есть начальные условия распадаются на две волны, амплитуды которых движутся с групповой скоростью.

Применяя метод стационарной фазы для четной $F(\alpha)$, из (2.13) получим

$$w = \frac{1}{\sqrt{\pi A_1 t}}\, F(\alpha_0)\cos\left(\frac{x^2}{2A_1 t} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{2.16}$$

Для решения нелинейных уравнений можно численно решать (2.7) при начальных условиях, взятых из (2.16).

Можно изучить также двумерную задачу, в которой имеются нулевые начальные условия, а граничные условия на крае пластинки следующие:

$$w = w_0 \delta(x)\delta(t), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \tag{2.17}$$

Дисперсионное соотношение имеет вид

$$\beta_{1,2} = \sqrt{\pm A_1 \omega - \alpha^2} \tag{2.18}$$

а решение записывается в таком виде

$$w = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{1,2} C_i e^{i(\alpha x + \beta_i y)} d\alpha \tag{2.19}$$

где согласно граничным условиям

$$C_1 = \frac{w_0}{2\pi} \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}, \quad C_2 = \frac{w_0}{2\pi} \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} \tag{2.20}$$

Стационарные точки находятся в виде

$$\beta_0 = \mp \frac{A_1 y}{t}, \quad \alpha_0 = \mp \frac{A_1 x}{t}, \quad \omega_0 = \pm \frac{A_1 r^2}{t^2}$$

Применение метода стационарной фазы к двойному интегралу приводит к решению

$$w = \frac{w_0}{2\pi} \frac{A_1 y}{t^2} \cos \frac{2A_1 r^2}{t} \tag{2.21}$$

Решения (2.16) и (2.21) не удовлетворяют одномерным по t, $\bar{\tau}$ уравнениям (1.6), где отброшен последний нелинейный член в первом уравнении и $\bar{\tau} = k_i x - \omega_i t$, что связано с характером (1.6), представляющих уравнения возмущений около заданной волны. Выражения (2.16) ($n = 1$) и (2.21) ($n = 2$) удовлетворяют полным уравнениям модуляции [2], которые для линейной задачи в приближении геометрической оптики имеют вид

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \omega'(\alpha) \frac{\partial a^2}{\partial x} + a^2 \frac{\partial \omega'}{\partial x} + \frac{n-1}{t} a^2 = 0, \quad \frac{x}{t} = \omega'(\alpha),$$

причем по (2.16) и (2.21) $a = F_1(\alpha)/t^{n-1}$.

б) Одномерный изгиб при наличии начальных условий в форме квазимонохроматической волны с расстройкой амплитуды или волнового числа.

Для этой задачи следует решать (2.11) при заданных начальных условиях, причем здесь можно для обоих видов сред указать аналитическое решение [3].

в) Определение асимптотической картины распространения волн при падении на границу полубесконечной пластинки изгибных плоских волн. При этом если пластинка является полуплоскостью, имеем одномерную задачу, а при наличии выреза в форме угла получается дифракционная картина.

Вблизи дифракционных лучей, на которых находятся точки касания отраженных от сторон угла волн с точечной волной, линейное решение для произвольной среды записывается через интеграл Френеля [8]

$$w = \psi e^{i\omega\tau}, \quad \psi = \frac{1}{2\sigma\sqrt{k_1 - k_2}} K e^{\frac{ip(\theta-\theta_0)^2}{2c_0(k_1-k_2)}} \left[1 \mp \Phi\left(\pm\frac{\sqrt{p}}{k}\right)\right] \qquad (2.22)$$

верхние (нижние) знаки определяются знаком $\theta - \theta_0$, $\frac{1}{k} = \frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{2c_0(k_1 - k_2)}}$, где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-t^2}\,dt$, k_1, k_2 — кривизны точечной волны и начального положения отраженной от стороны угла волны, $p = i\omega$.

Для плоской падающей волны и рассматриваемой здесь среды получается $k_2 = 0$, $k_1 = [A_1\omega t]^{-1/2}$, θ — угловая координата, θ_0 — значение θ в точке касания, c_0 — значение нормальной составляющей скорости волны, $c_0 = \frac{\omega}{\alpha} = A_1\alpha = \sqrt{A_1\omega}$.

Подставляя (2.22) в уравнение дифракционной задачи, которое соответствует уравнениям (2.7) без нелинейного члена и имеет вид

$$i\Delta_\omega \frac{\partial\psi}{\partial t}\Big|_\xi + \frac{1}{2}\Delta_\alpha \alpha^2(\beta, \omega)\frac{\partial^2\psi}{H_2^2\partial\theta^2} - i\Delta_\omega \frac{d\ln K}{dt} = 0 \qquad (2.23)$$

можно показать, что (2.22) удовлетворяется при выполнении равенства

$$\frac{dk_1}{dt}\Big|_\xi = -\frac{\Delta_\alpha\omega}{\Delta_\omega}\frac{\alpha^2}{H_2^2 c_0} \qquad (2.24)$$

Поскольку $k_1 = \frac{1}{r}$, $H_2 = r = \sqrt{A_1\omega}\,t$, $\frac{\partial r}{\partial t}\Big|_\xi = \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}$, $\Delta_\alpha = -2A_1\alpha = -2\sqrt{A_1\omega}$, то (2.24) удовлетворяется.

3. Можно получить также уравнения в диспергирующей среде с кубической нелинейностью близи каустики.

Решение вблизи каустики определяется переменными [8]

$$\bar\alpha_i = \frac{\alpha_i}{\omega}, \quad \bar x_1 = (\bar x - \bar x_0)\bar K, \quad y_1 = (\bar x - \bar x_0)\bar N, \quad \bar x = \{x_i\}, \quad \bar k = \{\alpha_i\} \qquad (3.1)$$

Здесь $\bar x_0$ есть радиус-вектор точки касания M некоторого выбранного луча с каустикой, y_1 — расстояние по нормали от точки $\{x_i\}$ до каустики, $\bar x_1$ — время пробега волны вдоль луча от M до основания нормали к каустике. В силу линейного решения имеют место порядки параметров $y_1 \sim \varepsilon$, $\bar x_1 \sim \varepsilon^{3/2}$, $\omega \sim \frac{1}{\bar x_1}$. Уравнения вблизи каустики для нелинейной задачи получены в [8] и имеют вид

$$\Phi = \psi e^{i\omega \bar{x}_1}, \quad \frac{1}{2}\Delta_{\bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_j} N_i N_j \frac{d^2\psi}{dy_1^2} - \lambda_1 y_1 \psi + \Delta_\omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 |\psi|^2 \psi = 0$$

$$\lambda_1 = \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_j^1}{\partial t}\right) \Delta_\omega \left(N_j - \frac{\alpha_i N_i}{\alpha_k \Delta_{\alpha_k}} \Delta_{\alpha_j}\right) \tag{3.2}$$

α_j^1 представляют значение α_j в точке M, $\bar{N}$—единичный вектор нормали к каустике в M. Решение линейной задачи, то есть уравнений (3.2) без третьего слагаемого, есть функция Эйри [12]

$$\psi = cv(\bar{y}), \qquad \bar{y} = y_1 \sqrt[3]{\varkappa}, \qquad \varkappa = \frac{2\lambda_1}{\Delta_{\alpha_i \alpha_j} N_i N_j} \tag{3.3}$$

Постоянная c может быть определена из сравнения с решением геометрической акустики, имеющим место при $\bar{y} \to -\infty$, причем асимптотические формулы для $v(\bar{y})$ дают

$$v(\bar{y}) = \frac{1}{2}(-\bar{y})^{-\frac{1}{4}} e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{1}{2}(-\bar{y})^{-\frac{1}{4}} e^{-i\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)} \tag{3.4}$$

где первое слагаемое соответствует падающей, а второе — отраженной от каустики волне. Тогда $\frac{c}{2}$ может быть найдено из лучевого решения для падающей волны. Вдали от каустики можно считать слагаемые, соответствующие падающей и отраженной волнам, разделяющимися и полагать $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\varphi_k}$. Полагая еще $\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 = 0$ в линейной задаче, можно получить для $a_k = 0$, $\varphi_k = \varphi$ уравнения

$$a\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\right)^2 - \frac{\partial^2 a}{\partial y_1^2} + \varkappa y_1 a = 0, \qquad a\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + 2\frac{\partial a}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0 \tag{3.5}$$

Отбрасывая $\frac{\partial^2 a}{\partial y_1^2}$ или дифракционное слагаемое, можно найти решение уравнений (3.5) в виде (3.3), (3.4).

В нелинейной задаче самый естественный способ решения задачи состоит в интегрировании уравнения (3.2) при начальном условии, взятом для ψ, $\frac{\partial \psi}{\partial y_1}$ из (3.3) при некотором значении $\bar{y}$. При этом $|\psi|^2 = \psi^2$, поскольку ψ выбрана действительной. В переменных $\bar{y}$, $\bar{\psi} = \frac{\psi}{\mu}$,

$\mu = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\mp \varkappa^{1/3} \Delta_\omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0}}$, где всегда $\frac{\lambda_1}{\varkappa^{1/3}} > 0$, $\Delta_\omega > 0$, знаки $\pm$ выбираются условием $\pm\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 >$ и (3.2) примет вид

$$\frac{d^2\bar{\psi}}{d\bar{y}^2} - \bar{y}\bar{\psi} \mp |\bar{\psi}|^2\bar{\psi} = 0 \tag{3.6}$$

а начальные условия из (3.3) $\bar{\psi} = c_1 v(\bar{y})$, $c_1 = \frac{c}{\varphi}$. Задавая значения c_1 и считая $|\bar{\psi}|^2\bar{\psi} = \bar{\psi}^3$ в (3.6), следует проводить численное интегрирование.

Можно также формально полагать в (3.6) на некотором отдалении от каустики $\bar{\psi} = ae^{i\varphi}$, тогда получится

$$a\left(\frac{d\varphi}{d\bar{y}}\right)^2 - \frac{d^2a}{d\bar{y}^2} + a\bar{y} \pm a^3 = 0, \quad a = \frac{\bar{c}}{\sqrt{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{y}}\right|}}, \quad \bar{c} = \mathrm{const} \tag{3.7}$$

Верхний и нижний знаки соответствуют знаку $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0$.

Отбрасывая еще $\frac{d^2a}{d\bar{y}^2}$, можно найти уравнение, верное вдали от каустики

$$\bar{c}^4 + \bar{y}a^4 \pm a^6 = 0 \tag{3.8}$$

Интересно, что для среды, в которой $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 > 0$, решение (3.8) становится мнимым вблизи каустики, в то время как при $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 < 0$ a действительно вплоть до $\bar{y} = 0$. Хотя во всех случаях уравнение (3.7) может быть проинтегрировано, однако вряд ли оно описывает решение около каустики. С другой стороны, при больших $\bar{y} < 0$ уравнение (3.8) дает переход к лучевому решению $a = \bar{c}(-\bar{y})^{-1/4}$, $\varphi = \pm\frac{2}{3}(-\bar{y})^{3/2}$, то есть на значительных расстояниях от каустики его можно использовать для определения амплитуд падающей и отраженной волны.

Для вычисления коэффициентов пересчета от φ, y к новым $\bar{\varphi}$, $\bar{y}$ найдем значения λ_{11}, $\varkappa$ и μ.

В силу (2.5) получается

$$\Delta_{x_j} = -2A_1\varphi_j \tag{3.9}$$

то есть луч параллелен нормали к фронту волны. Тогда

$$l_1 = -\frac{1}{2A_1} V_s \frac{\partial}{\partial t}[t_l - t_l^0] N_l \tag{3.10}$$

где введен единичный вектор $l_j = V_s\Delta_{x_j}$, $V_s = \frac{1}{|\Delta_{x_j}|}$ есть вектор лучевой скорости.

Поскольку t_i^1 зависит только от t, то производные по t могут считаться производными вдоль луча, то есть $\frac{\partial t_i^1}{V_\lambda \partial t} = \frac{\partial t_i^1}{\partial s}$, а это есть вектор кривизны луча. Тогда $\frac{\partial t_i^1}{\partial s} N_i = \frac{1}{R_s}$ есть проекция вектора кривизны поверхностного луча, а $\frac{\partial t_i}{\partial s} N_i = \frac{1}{R_r}$ есть проекция вектора кривизны данного луча на нормаль каустики. Тогда будем иметь

$$\lambda_1 = -[2A_1]^{-1/3}\frac{1}{R}, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_r} - \frac{1}{R_s} \tag{3.11}$$

Кроме того, из (3.5)

$$\Delta_{\alpha_i \alpha_j} = -2A_1\delta_{ij}, \quad \Delta_{\alpha_i \alpha_j} N_i N_j = -2A_1 \tag{3.12}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

При этом

$$\varkappa = \frac{2}{R}, \qquad \mu = \sqrt{\frac{[2A_1]^{-1}}{2^{1/3}R^{2/3}\left|\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0\right|}}$$

$$\left|\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0\right| = \frac{h^3}{40}\sqrt{\frac{1}{\rho A}}\,(\alpha^2+\beta^2)^3|B| \tag{3.13}$$

Поскольку знак $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0$ определяется знаком B, мы видим, что $B > 0$ соответствует верхнему знаку в (3.6) — (3.8), а $B < 0$ — нижним знакам.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 27 II 1978

Ս. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԱԼԵՐՈՒՄ ԾՌՄԱՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ՀԱՐՑԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է կամայական տեսքի քվազիմոնոխրոմատիկ ծռման ալիքների տարածումը բարակ սալում, որի նյութը ենթարկվում է աստիճանային տիպի ֆիզիկական ոչ-գծային օրենքին։ Դանդաղ մոդուլացվող ամպլիտուդների և ֆազերի հավասարումներում տրվում է գործակիցների կոնկրետացում։

Ստացված են ալիքների կայունության պայմանները, լուծումը զուգամիտվող փնջերի համար, ընդ որում նաև լուծումը կաուստիկայի մոտ։ Տրված է տիպիկ դիֆրակցիոն խնդրի դրվածքը։

ON PROPAGATION OF BENDING WAVES IN NON-LINEAR ELASTIC PLATES

A. G. BAGDOEV, L. A. MOVSISIAN

S u m m a r y

The propagation of quasi-monochromatic bending waves of arbitrary shape in a thin plate with the power law of physical non-linearity is considered. The concrete definition of coefficients of equations for slow modulations of anylitudes and phases is presented. The wave stability conditions, the solutions for convergent beams, the solutions near caustics are obtained.

The statement of a typically diffraction problem is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лайтхилл М. Дж.* Некоторые частные случаи применения теории Уизема. Нелинейная теория распространения волн. М., «Мир», 1970.
2. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
3. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
4. *Островский Л. А., Сутин А. М.* Нелинейные упругие волны в стержнях. ПММ, 1977, т. 41, вып. 3.
5. *Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные и линейные переходные волновые процессы. Таллин, Изд. АН Эст.ССР, 1972.
6. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* К вопросу определения ударной волны в нелинейных задачах теории упругости. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1968, т. XXI, № 3.
7. *Багдоев А. Г.* Уравнения нелинейной вязкотермомагнитоупругой среды вблизи фронтов волн. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 1.
8. *Багдоев А. Г.* Определение окрестности фронтов волн в пространственной задаче. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1977, т. XXX, № 6.
9. *Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.* О самофокусировке и самоканализации интенсивных световых пучков в нелинейной среде. ЖЭТФ, 50, 1966.
10. *Амбарцумян С. А.* Об изгибе нелинейно-упругих трехслойных пластинок. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 6.
11. *Багдоев А. Г.* Определение окрестности ударной волны вблизи особой линии. Докл. АН Арм.ССР, 1969, т. XIX, № 1.
12. *Ludwig D.* Uniform asymptotic expansions at a caustic, Commun. on Pure and Applied Math., 1966, vol. 19, No. 2.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 5, 1979 Механика

Г. С. ВАРДАНЯН, В. Н. ГЕТРИК

О ТЕОРИИ ТЕРМОПОЛЗУЧЕСТИ НЕОДНОРОДНО СТАРЕЮЩИХ СРЕД

Рассмотрим стареющую среду, возраст которой зависит от пространственных координат. С такими средами мы имеем дело, например, при наращивании или поэтапном возведении сооружений из элементов, обладающих свойством ползучести и старения или при действии на среду различных неоднородных полей, приводящих к изменению ее физико-механических свойств. Поля, обусловленные физико-химическими процессами внутри различных сред, приводят к их естественному старению, а поля, связанные с различными внешними воздействиями (например, действие облучения, радиации и др.), приводят к искусственному старению.

Как правило, указанные поля сопровождаются действием температурного поля, что в свою очередь существенно влияет на свойства данной среды. Таким образом, имеем неоднородно наследственно-стареющую среду в условиях неизотермического процесса деформирования.

Основные реологические уравнения изотермической ползучести неоднородно стареющих сред получены в работах Н. Х. Арутюняна [1, 2]. Реологические уравнения неизотермической ползучести однородно стареющих сред построены в работе [3].

На основании работ [1, 2] основное реологическое уравнение для неоднородно стареющего материала при одноосном напряженном состоянии и постоянной температуре $T = T_0$ представим в виде

$$\varepsilon_x(t) = \frac{1}{E[t+\varkappa(x)]}\left\{\sigma_x(t) + \int_{\tau_1(0)}^{t} \sigma_x(\tau)\, K[t+\varkappa(x), \quad \tau+\varkappa(x)]\,d\tau\right\} \tag{1.1}$$

где $\varkappa(x)$ — приращение возраста, отсчитываемое от элемента с координатой $x = 0$

$$\varkappa(x) = \tau_1(x) - \tau_1(0) \tag{1.2}$$

$$K[t+\varkappa(x), \tau+\varkappa(x)] = \\ = -E[t+\varkappa(x)]\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{1}{E[\tau+\varkappa(x)]} + C[t+\varkappa(x), \tau+\varkappa(x)]\right\} \tag{1.3}$$

При этом модуль упругости $E[t+\varkappa(x)]$ и мера ползучести $C[t+\varkappa(x), \tau+\varkappa(x)]$ определяются выражениями

$$E[t+\varkappa(x)] = E_0[t+\varkappa(x)] \tag{1.4}$$

$$C[t+\varkappa(x),\ \tau+\varkappa(x)] = \varphi[\tau+\varkappa(x)]f(t-\tau) \tag{1.5}$$

Здесь $\psi[t+\varkappa(x)]$ — монотонно возрастающая функция, стремящаяся к 1 при $t\to\infty$; $\varphi[\tau+\varkappa(x)]$ — монотонно убывающая функция, которая с увеличением возраста τ стремится к некоторой постоянной C_0, называемой предельным значением меры ползучести материала в его старом возрасте; $f(t-\tau)$ — функция, характеризующая наследственные свойства материала и в интервале $0\leq t-\tau<\infty$ изменяющаяся в пределах от 0 до 1.

При произвольной температуре

$$T(x,t) = T_0+\theta(x,t) \tag{1.6}$$

параметры, входящие в выражения (1.4) и (1.5), будут функциями от температуры $T(x,t)$, следовательно, модуль упругости и меру ползучести можно определить выражениями

$$E(T,t) = E_0(T)\psi[\rho(T)t+\varkappa(x)] \tag{1.7}$$

$$C(T,t,\tau) = \varphi[\rho(T)\tau+\varkappa(x)]f[\rho(T)t-\rho(T)\tau] \tag{1.8}$$

Здесь функции $E_0(T)$ и $\rho(T)$ должны удовлетворять условиям

$$E_0(T_0) = E_0;\quad \rho(T_0) = 1 \tag{1.9}$$

Функцию $\rho(T)$ выберем в виде

$$\rho(T) = \frac{\tau_1}{t}+\frac{1}{t}\int\limits_{\tau_1}^{t} a_T(T,t)\,dt \tag{1.10}$$

где $a_T(T,t)$ можно аппроксимировать выражением [4, 5]

$$a_T(T,t) = \exp\frac{C_1(t)(T-T_0)}{C_2(t)+T-T_0} \tag{1.11}$$

Если теперь ввести приведенную шкалу времени

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x,t) = \rho[T(x,t)]t+\varkappa(x)\\ \eta &= \xi(x,\tau) = \rho[T(x,\tau)]\tau+\varkappa(x)\end{aligned} \tag{1.12}$$

то при одновременном учете неоднородного старения и влияния температурного поля модуль упругости и мера ползучести примут вид

$$E(T,\xi) = E_0(T)\psi(\xi) \tag{1.13}$$

$$C(\xi,\eta) = \varphi(\eta)f(\xi-\eta) \tag{1.14}$$

Тогда реологическое уравнение неизотермической ползучести для неоднородно стареющего тела в шкале времени ξ, η при одноосном напряженном состоянии примет следующую форму:

$$E(T,\xi)[\varepsilon_x(\xi)-\alpha\theta(\xi)] = \sigma_x(\xi)+\int\limits_{\eta_1}^{\xi}\sigma_x(\eta)K(\xi,\eta)\,d\eta \tag{1.15}$$

В шкале истинного времени t, τ это выражение принимает вид

$$E[T, \xi(x, t)][\varepsilon_x(t) - \alpha\theta(t)] =$$

$$= \sigma_x(t) + \int_{\tau_1(0)}^{t} \sigma_x(\tau) K[\xi(x, t); \xi(x, \tau)] a_T(T, \tau) \, d\tau \tag{1.16}$$

В общем случае при трехосном напряженном состоянии основные уравнения неизотермической теории ползучести, описывающие изменение формы и объема неоднородно стареющих сред, будут иметь вид

$$2G[T, \xi(x_k, t)] e_{ij}(t) = S_{ij}(t) + \int_{\tau_1(0)}^{t} S_{ij}(\tau) K_1[\xi(x_k, t); \xi(x_k, \tau)] a_T(T, \tau) \, d\tau \tag{1.17}$$

$$E^*[T, \xi(x_k, t)] \varepsilon(t) = \sigma(t) + \int_{\tau_1(0)}^{t} \sigma(\tau) K_2[\xi(x_k, t); \xi(x_k, \tau)] a_T(T, \tau) \, d\tau \tag{1.18}$$

Здесь

$$\varepsilon(t) = \frac{e(t)}{3} - \alpha\theta(t); \quad S_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t) - \sigma(t)\delta_{ij}; \quad e_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}(t) - \frac{e(t)}{3}\delta_{ij} \tag{1.19}$$

$e(t)$ — объемная деформация: $\sigma(t)$ — среднее гидростатическое давление: E^* и G — модули мгновенной объемной деформации и деформации сдвига: S_{ij} и e_{ij} — девиаторы тензора напряжений и деформаций.

Уравнения (1.17) и (1.18) можно обратить, то есть напряжения выразить через деформации

$$\frac{S_{ij}}{2} = G[T, \xi(x_k, t)] e_{ij}(t) -$$

$$- \int_{\tau_1(0)}^{t} G[T, \xi(x_k, \tau)] e_{ij}(\tau) R_1[\xi(x_k, t); \xi(x_k, \tau)] a_T(T, \tau) \, d\tau \tag{1.20}$$

$$\sigma(t) = E^*[T, \xi(x_k, t)] \varepsilon(t) -$$

$$- \int_{\tau_1(0)}^{t} E^*[T, \xi(x_k, \tau)] \varepsilon(\tau) R_2[\xi(x_k, t), \xi(x_k, \tau)] a_T(T, \tau) \, d\tau \tag{1.21}$$

Обозначим

$$E^*[T, \xi(x_k, t)] = \bar{E}^*(t); \quad K_i[\xi(x_k, t); \xi(x_k, \tau)] a_T(T, \tau) = \bar{K}_i(t, \tau)$$

$$G[T, \xi(x_k, t)] = \bar{G}(t); \quad R_i[\xi(x_k, t); \xi(x_k, \tau)] a_T(T, \tau) = \bar{R}_i(t, \tau)$$

$$(i = 1, 2)$$

Ядра сдвиговой и объемной ползучести $\widetilde{K}_i(t, \tau)$ связаны с ядрами релаксации $\widetilde{R}_i(t, \tau)$ с помощью интегрального уравнения вида

$$\widetilde{K}_i(t, \tau) - \widetilde{R}_i(t, \tau) = \int_{\tau}^{t} R_i(s, \tau)\, \widetilde{K}_i(t, s)\, ds \qquad (1.22)$$

Пусть мера сдвиговой или объемной ползучести имеет вид

$$\widetilde{C}(t, \tau) = \widetilde{\varphi}(\tau)\left[1 - e^{-\gamma[\rho(T)t - \rho(T)\tau]}\right] \qquad (1.23)$$

Тогда ядро

$$\widetilde{K}(t, \tau) = -\widetilde{E}(t)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{\widetilde{E}(\tau)} + \widetilde{C}(t, \tau)\right] \qquad (1.24)$$

будет вырожденным

$$\widetilde{K}(t, \tau) = F_1(t)\,\Phi_1(\tau) + F_2(t)\,\Phi_2(\tau)$$

где

$$F_1(t) = \widetilde{E}(t); \quad \Phi_1(\tau) = \frac{\widetilde{E}'(\tau)}{\widetilde{E}^2(\tau)} - \widetilde{\varphi}'(\tau); \quad F_2(t) = \widetilde{E}(t)\, e^{-\gamma\rho(T)t}$$

$$\Phi_2(\tau) = \left[\widetilde{\varphi}'(\tau) + \gamma a_T(\tau)\widetilde{\varphi}(\tau)\right] e^{\gamma\rho(T)\tau}$$

В этом случае интегральное уравнение резольвенты $\widetilde{R}(t, \tau)$, получаемое из (1.22) при опускании индексов i, можно свести к дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial^2\widetilde{R}(t, \tau)}{\partial t^2} + \left\{\gamma a_T(t)\left[1 + \widetilde{E}(t)\widetilde{\varphi}(t)\right] - \frac{\widetilde{E}'(t)}{\widetilde{E}(t)} - \frac{a_T'(t)}{a_T(t)}\right\}\frac{\partial\widetilde{R}(t, \tau)}{\partial t} = 0 \qquad (1.25)$$

при начальных условиях

$$\widetilde{R}(\tau, \tau) = \widetilde{K}(\tau, \tau) = -\frac{\widetilde{E}'(\tau)}{\widetilde{E}(\tau)} + \gamma a_T(\tau)\,\widetilde{E}(\tau)\,\widetilde{\varphi}(\tau) \qquad (1.26)$$

$$\widetilde{R}_t'(\tau, \tau) = \widetilde{K}_t'(\tau, \tau) - \widetilde{K}^2(\tau, \tau) =$$

$$= -\gamma a_T(\tau)\left[\widetilde{E}(\tau)\widetilde{\varphi}(\tau)\right]' - \gamma^2 a_T^2(\tau)\,\widetilde{E}(\tau)\widetilde{\varphi}(\tau)\left[1 - \widetilde{E}(\tau)\widetilde{\varphi}(\tau)\right] \qquad (1.27)$$

Решение уравнения (1.25) имеет вид

$$\bar{R}(t, \tau) = A_1(\tau)\int_{\tau}^{t} a_T(z)\,\bar{E}(z)\,e^{-\gamma\omega(z,\tau)}\,dz + A_2(\tau) \qquad (1.28)$$

где

$$\omega(z, \tau) = \int_{\tau}^{z} a_T(s)\,[1 + \bar{E}(s)\,\tilde{\varphi}(s)]\,ds \qquad (1.29)$$

$$A_1(\tau) = -\gamma\,\frac{[\bar{E}(\tau)\,\tilde{\varphi}(\tau)]'}{\bar{E}(\tau)} = \gamma^2 a_T(\tau)\,\tilde{\varphi}(\tau)\,[1 - \bar{E}(\tau)\,\tilde{\varphi}(\tau)] \qquad (1.30)$$

$$A_2(\tau) = \frac{\bar{E}'(\tau)}{\tilde{E}(\tau)} + \gamma a_T(\tau)\,\tilde{E}(\tau)\,\tilde{\varphi}(\tau) \qquad (1.31)$$

Неизотермическая деформация составной трубы

Рассмотрим длинную двухслойную трубу, внутренний слой которой $(a \leqslant r \leqslant b)$ выполнен из упругого материала с характеристиками G_1, ν_1, α_1, а наружный $(b \leqslant r \leqslant c)$ — из неоднородно стареющего в радиальном направлении вязкоупругого материала с коэффициентом линейного теплового расширения $\alpha_2 < \alpha_1$.

В такой составной трубе при однородном температурном поле $T(t) = T_* + \theta(t)$ за счет разности коэффициентов линейного теплового расширения возникнет плоская осесимметричная деформация. Обозначим перемещение контактной поверхности $r = b$ через $\lambda(t)$, а давление на этой поверхности $-\sigma_r = -P(t)$. Внутренняя $(r = a)$ и наружная $(r = c)$ поверхности свободны $(\sigma_r = 0)$.

При переходе через контактную поверхность компоненты σ_r и ε_θ должны изменяться непрерывно, а компоненты σ_θ, σ_z и ε_r могут изменяться скачком.

Функция изменения возраста $\varkappa(r)$ известна, так что $\xi = \xi(r, t) = \rho(T)t + \varkappa(r)$ найдено. Требуется найти закон релаксации контактного давления $P(t)$.

Напряжения и радиальное перемещение для внутреннего слоя трубы определяются с помощью известного решения Ляме

$$\sigma_r = -\frac{b^2P(t)}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right); \quad \sigma_\theta = -\frac{b^2P(t)}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \qquad (1.32)$$

$$U_r = -\frac{b^2P(t)}{2G_1(b^2 - a^2)}\left[\frac{a^2}{r} + (1 - 2\nu_1)\,r\right] + \alpha_1(1 + \nu_1)\,r\theta(t) \qquad (1.33)$$

Учитывая, что при $r = b$ $U_r = \lambda(t)$, найдем связь между радиальным перемещением $\lambda(t)$ контактной поверхности и давлением $P(t)$ на этой поверхности

$$\lambda(t) = -\frac{a^2b + (1-2\nu_1)b^3}{2G_1(b^2-a^2)}P(t) + (1+\nu_1)\alpha_1 b\theta(t) \tag{1.34}$$

Для наружного слоя ($b \leqslant r \leqslant c$), принимая условие несжимаемости $\varepsilon(t) = 0$, получим

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} - 3\alpha_2\theta(t) \tag{1.35}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (1.35) с учетом условий $U_r = \lambda(t)$ при $r = b$, для перемещений U_r получим выражение

$$U_r = \left(\frac{3}{2}\alpha_2 r - \frac{3}{2}\alpha_2\frac{b^2}{r} + \alpha_1(1+\nu_1)\frac{b^2}{r}\right)\theta(t) - \frac{a^2b^2 + (1-2\nu_1)b^4}{2G_1(b^2-a^2)}\frac{P(t)}{r}$$

Отсюда найдем

$$\varepsilon_\theta = \frac{U_r}{r} = \left(\frac{3}{2}\alpha_2 - \frac{3}{2}\alpha_2\frac{b^2}{r^2} + \alpha_1(1+\nu_1)\frac{b^2}{r^2}\right)\theta(t) - \frac{a^2b^2 + (1-2\nu_1)b^4}{2G_1(b^2-a^2)}\frac{P(t)}{r^2} \tag{1.36}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U_r}{\partial r} = \left(\frac{3}{2}\alpha_2 + \frac{3}{2}\alpha_2\frac{b^2}{r^2} - \alpha_1(1+\nu_1)\frac{b^2}{r^2}\right)\theta(t) + \frac{a^2b^2 + (1-2\nu_1)b^4}{2G_1(b^2-a^2)}\frac{P(t)}{r^2} \tag{1.37}$$

С учетом (1.36) и (1.37) получим

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\theta = [3\alpha_2 - 2\alpha_1(1+\nu_1)]\frac{b^2}{r^2}\theta(t) + \frac{a^2b^2 + (1-2\nu_1)b^4}{G_1(b^2-a^2)}\frac{P(t)}{r^2} = \frac{1}{r^2}[A\theta(t) + BP(t)] \tag{1.38}$$

Здесь

$$A = [3\alpha_2 - 2\alpha_1(1+\nu_1)]b^2; \quad B = \frac{a^2b^2 + (1-2\nu_1)b^4}{G_1(b^2-a^2)} \tag{1.39}$$

На основании (1.20) находим

$$\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} = G_2[T; \xi(r,t)](\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) - \int_{\xi(0)}^{t} G_2[T; \xi(r,\tau)][\varepsilon_r(r,\tau) - \varepsilon_\theta(r,\tau)]\,R[\xi(r,t); \xi(r,\tau)]\,a_T(T,\tau)\,d\tau \tag{1.40}$$

С учетом (1.38) выражение (1.40) представим в виде

$$\frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{2} = [A\theta(t) + BP(t)]\,\frac{G_2[T; \xi(r, t)]}{r^2} -$$

$$- \int\limits_{\tau_1(0)}^{t} [A\theta(\tau) + BP(\tau)]\,\frac{G_2[T, \xi(r, \tau)]}{r^2}\, R[\xi(r, t); \xi(r, \tau)]\, a_T(T, \tau)\, d\tau \qquad (1.41)$$

Из условия равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = - \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r}$$

получим

$$\sigma_r = - \int\limits_{b}^{r} \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r}\, dr - P(t) \qquad (1.42)$$

Отсюда, учитывая, что при $r = c$ $\sigma_r = 0$, получим

$$\int\limits_{b}^{c} \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r}\, dr = - P(t) \qquad (1.43)$$

Если теперь разделить выражение (1.41) на r и проинтегрировать в пределах от b до c и учесть (1.43), то получим

$$\frac{P(t)}{2} = -[A\theta(t) + BP(t)]\,\overline{G}_2(t) - \int\limits_{\tau_1(0)}^{t} [A\theta(\tau) + BP(\tau)]\,\overline{R}(t, \tau)\, d\tau \qquad (1.44)$$

Здесь

$$\overline{G}_2(t) = \int\limits_{b}^{c} \frac{G_2[T; \xi(r, t)]}{r^3}\, dr \qquad (1.45)$$

$$\overline{R}(t, \tau) = a_T(\tau) \int\limits_{b}^{c} \frac{G_2[T; \xi(r, \tau)]}{r^3}\, R[\xi(r, t); \xi(r, \tau)]\, dr \qquad (1.46)$$

При заданной температуре $\theta(t)$ закон изменения давления $P(t)$ определяется из интегрального уравнения (1.44). При $\alpha_1 = \alpha_2$ и $\nu_1 = 0.5$ из (1.39) следует, что $A = 0$. В этом случае интегральное уравнение (1.44) приводится к однородному уравнению Вольтерра, которое имеет только нулевое решение $P(t) = 0$.

Численный пример. Рассмотрена составная труба в однородном температурном поле $T(t) = T_0 + \theta(t)$, где

$$
\theta(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau_1 \\ \dfrac{\theta_0}{\tau_2 - \tau_1}(t - \tau_1); & \tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2 \\ \theta_0 & ; \quad \tau_2 \leqslant t < \infty \end{cases}
$$

$T_1 = 9°C$, $\theta_0 = 81°C$, $\tau_1 = 7$ *сут*, $\tau_2 = 20$ *сут*.

Характеристики составной трубы выбраны следующие:

$$
G_1 = 0.769 \cdot 10^6 \; кг/см^2 \quad \nu_1 = 0.3, \quad \nu_2 = 0.5
$$

$$
\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6} \; град^{-1}, \quad \alpha_2 = 7 \cdot 10^{-6} \; град^{-1}
$$

$$
b/a = 1.02, \qquad c/a = 1.5
$$

Характеристики вязкоупругого материала приняты по зависимостям

$$
E(\tau) = E_0(1 - e^{-\beta\tau}), \quad C(t, \tau) = \varphi(\tau) f(t - \tau)
$$

$$
\varphi(\tau) = C_0 + \frac{C}{\tau}; \quad f(t - \tau) = 1 - e^{-\gamma(t-\tau)}
$$

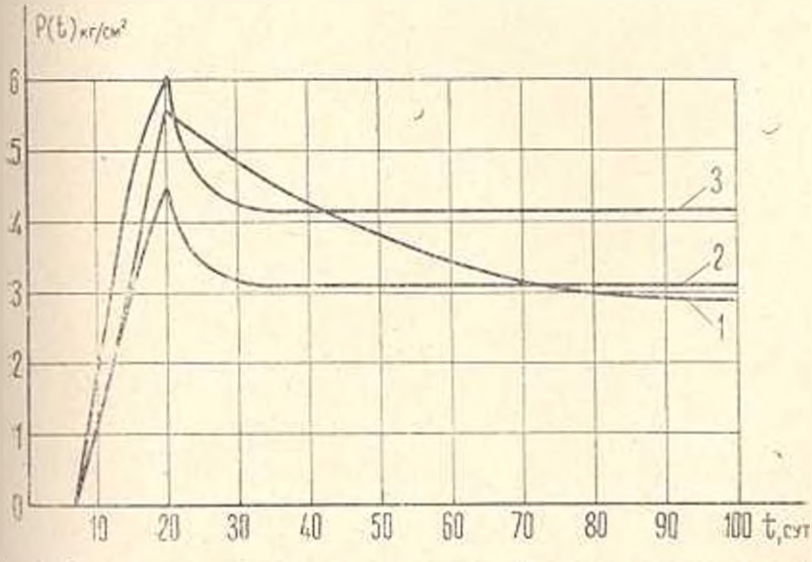
где $\qquad E_0 = 2 \cdot 10^5 \; кГ/см^2, \; \beta = 0.03 \; сут^{-1}, \; \gamma = 0.026 \; сут^{-1};$

$$
C_0 = 0.9 \cdot 10^{-5} \; см^2/кГ, \qquad C = 4.82 \cdot 10^{-5} \; (см^2/кГ) \; сут.
$$

$C_1(t)$ и $C_2(t)$ в формуле (1.11) приняты постоянными, имеющими значения $C_1 = 3.98$; $C_2 = 98.82$.

По результатам численного решения интегрального уравнения (1.44) построены графики изменения давления $P(t)$ для следующих трех случаев:

1. Материал наружного слоя трубы ($b \leqslant r \leqslant c$) однородно стареющий. Влияние температуры на свойства материала не учитывается (кривая 1 на фиг. 1).



Фиг. 1. График изменения давления на контактной поверхности двухслойной трубы.

2. Материал наружного слоя трубы однородно стареющий и учитывается влияние температуры на свойства материала (кривая 2).

3. Материал наружного слоя неоднородно стареющий. Он состоит из двух одинаковых по толщине слоев, один из которых (внутренний) имеет возраст 50 *сут*, а другой — 7 *сут*. При этом учитывается влияние температуры на свойства материала (кривая 3).

Из приведенных графиков видно, что учет влияния температуры на свойства вязкоупругого материала приводит к существенному ускорению релаксационных процессов, а учет неоднородного старения — к увеличению величины давления.

Московский инженерно-строительный
институт им. В. В. Куйбышева

Поступила 12 X 1978

Գ. Ս. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ, Վ. Ի. ԳԵՏՐԻԿ

ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԾԵՐԱՑՈՂ ՆՅՈՒԹԵՐԻ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Անհամասեռ ծերացող նյութերի սողքի տեսության և ջերմա-ժամանակային անալոգիայի հիման վրա ստացված են անիզոթերմիկ սողքի տեսության հիմնական հավասարումները, որոնցում հաշվի է առնվում նյութի առաձգական և ռեոլոգիական մեծությունների կախվածությունը հասակից և ջերմությունից։

Դիտարկված է ոչ ստացիոնար ջերմային դաշտում գտնվող անվերջ երկար երկշերտ խողովակի դեֆորմացիայի խնդիրը, երբ շերտերից մեկը պատրաստված է առաձգական նյութից, իսկ մյուսը — անհամասեռ ծերացող սողքի հատկությամբ օժտված նյութից։

ON THE THEORY OF THERMOCREEP IN HETEROGENEOUSLY AGEING MEDIA

G. S. VARDANIAN, V. I. GHETRIK

Summary

The initial equations of non-isothermic creep considering dependencies of elastic and rheologic characteristics of a material on age and temperature change with time are obtained. These equations are based on the creep theory of heterogeneously ageing media and on the thermal — time analogy.

The problem of deforming an infinitely long double walled pipe in a non-stationary temperature field under condition when one of the layers

is made of an elastic material and the second one — of a heterogeneously ageing material is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно стареющих тел. Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 3.
2. Арутюнян Н. Х. О теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред. ДАН СССР, 1976, т. 229, № 3.
3. Варданян Г. С. К теории термоползучести однородно стареющих тел. «Изв. АН АрмССР, Механика», 1976, т. XXIX, № 6.
4. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М., «Наука», 1970.
5. Уржумцев Ю. С., Максимов Р. Д. Прогностика деформативности полимерных материалов. Рига, «Зинатне», 1975.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, №5, 1979 Механика

М. М. МАРТИРОСЯН, А. Н. КАГРАМАНЯН

О ВЛИЯНИИ КОНЦЕНТРАТОРА НА ПРОЧНОСТЬ СТЕКЛОПЛАСТИКА

Использование высокопрочных стеклопластиков во многих отраслях промышленности связано с определенными затруднениями, вытекающими из способа крепления отдельных элементов конструкции.

Как известно, в отличие от термопластичных пластмасс, композиты на основе термореактивных смол и, в частности, слоистые стеклопластики не поддаются соединению сваркой. Поэтому создание сборных конструкций из стеклопластиков может быть осуществлено клеевыми или болтовыми и заклепочными соединениями.

Клеевые соединения находят широкое применение, однако, как справедливо отмечают [1], немаловажное значение имеют также болтовые и заклепочные соединения. В этом случае, как известно, в теле соединяемых материалов просверливается отверстие для заклепки или болта, которое, являясь концентратором напряжений, может влиять на прочность конструкции. В этом аспекте исследование прочности стеклопластиков при наличии концентратора напряжений представляет определенный интерес [2].

В настоящей статье приведены результаты экспериментального исследования влияния концентратора напряжений на кратковременную прочность двух типов стеклопластиков, имеющих различное структурное строение: стеклотекстолит СТЭФ и нетканый стеклопластик СВАМ 2 : 1.

Исследования проводились на образцах, имеющих форму двухсторонней лопатки и прямоугольной полоски, вырезанных из листового материала толщиной 5 *мм*. Для учета влияния ориентации волокон образцы из стеклопластиков в плоскости листа вырезались в 3-х направлениях $\varphi = 0, 45$ и 90°. Концентратором напряжений являлось круглое отверстие в середине ширины и длины рабочей зоны образца.

Методика исследования заключалась в следующем. Общее количество образцов разбивалось на две группы — контрольную и рабочую. В контрольную группу включались образцы без концентратора. В рабочую — образцы с концентратором. Влияние концентратора исследовалось как при различных диаметрах отверстий, так и для образцов с различной шириной рабочей зоны. В обоих случаях отношение d/b выдерживалось одинаковым, при этом одинаковые значения d/b в одном случае получались из условия $d = \text{const}$, а в другом — $b = \text{const}$.

Перед тем, как определить влияние концентратора на прочность стеклотекстолита, были проведены исследования по определению кратковременной прочности материала при растяжении в зависимости от ширины рабочей зоны и ориентации образца.

Исследованиями была выявлена довольно интересная картина влияния ширины образца на кратковременную прочность стеклопластика. В табл. 1 приведены результаты этих исследований со статистической обработкой данных. Эксперименты показали, что для образцов с $\varphi = 0$ и 90° (основа и уток) с увеличением ширины образца прочность, как правило, падает. Изменение прочности в результате увеличения ширины рабочей зоны образца по двум главным направлениям происходит примерно одинаково. С увеличением ширины в 2 раза (в наших исследованиях исходным значением ширины принято $b = 15$ *мм*), прочность падает примерно на 10%. Еще чувствительнее снижение прочности при ширине $b = 60$ *мм*. Здесь падение прочности составляет более, чем 30%. У образцов шириной рабочей зоны 10 *мм* наблюдается некоторое повышение прочности (примерно 5% при $\varphi = 90^\circ$), однако статистическая обработка экспериментальных данных показывает, что уменьшение ширины образца в общем не повлияло на его прочность, и в интервале от 10 до 15 *мм* прочность материала имеет максимальное значение.

Таблица 1

Зависимость кратковременной прочности стеклотекстолита от ширины образца

Ориентац. образца φ°	Ширина образца *мм*	Среднее значение *кг/мм*^{2}	Коэффициент масштаба M	Количество образцов шт.	Коэффициент вариации v, %	Показатель точности P, %
0	10	44.6	1.00	6	2.33	0.55
	15	44.8	1.00	12	3.13	0.90
	30	39.4	0.88	6	1.69	0.69
	60	31.1	0.69	5	12.15	5.47
45	10	23.2	1.04	5	3.37	1.51
	15	22.3	1.00	5	1.57	0.70
	30	22.9	1.03	5	3.62	1.61
	60	22.7	1.02	5	4.31	1.93
90	10	38.8	1.05	5	1.78	0.79
	15	36.8	1.00	5	2.30	1.03
	30	33.7	0.92	5	3.96	1.78
	60	25.7	0.70	5	5.69	2.54

Интересными оказались результаты исследования образцов, вырезанных в промежуточном направлении ($\varphi = 45^\circ$). Оказалось, что увеличение ширины образца в 6 раз совершенно не повлияло на изменение прочности. И хотя при ширине образца $b = 10$ *мм* прочность примерно на 4% выше, чем при ширине 15 *мм*, однако, в целом, можно утверждать, что для образцов, вырезанных в промежуточном направлении, изменение ширины образца не влияет на изменение прочности (табл. 1).

Приведенные нами результаты, в целом, соответствуют заключениям, сделанным в [3]. Однако, как показывают наши исследования, увеличение ширины образца свыше 30 *мм*, в данном случае вновь привело к чувствительному снижению прочности.

Теперь посмотрим, как влияет концентратор напряжений в виде кру лого отверстия на прочность стеклотекстолита. Изменение прочност а точнее, влияние концентратора будем выражать коэффициенто $K_p = \sigma_b/\sigma_k$, где σ_b — предел кратковременной прочности материала б концентратора, σ_k — условный предел прочности образца при наличи концентратора. Коэффициент K_p принято называть эффективным коэфф циентом концентрации [4, 5].

Рассмотрим случай, когда отношение $\lambda = d/b$ (фиг. 1) принимает ра личные значения в результате изменения диаметра отверстия при постоя ном значении ширины образца $b = 15$ *мм*. Значение коэффициента K_p зависимости от λ и φ приведено в табл. 2.

Таблица 2

Зависимость эффективного коэффициента концентрации от отношения d/b и φ для стеклотекстолита

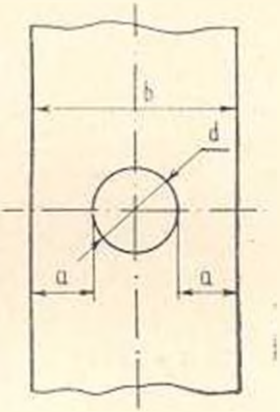
$\varphi°$		$\lambda = d/b$ (I – b = const = 15 *мм*; II – d = const = 4 *мм*)					
		0.067	0.133	0.267	0.333	0.400	—
0	I	1.31	1.49	1.53	1.57	1.54	—
	II	1.23	1.46	1.52	1.45	1.32	—
45	I	1.08	1.36	1.35	1.38	1.37	—
	II	1.10	1.32	1.35	1.36	1.37	—
90	I	1.31	1.48	1.53	1.53	1.54	—
	II	1.25	1.52	1.53	1.50	1.48	—
		$\lambda = d/b$, $2a$ = const = 11 *мм*, d = 1; 2; 4; 5; 6; 8 *мм*					
		0.083	0.151	0.267	0.313	0.353	0.421
0	III	1.34	1.46	1.52	1.57	1.53	1.63
45		1.09	1.37	1.37	1.37	1.38	1.37
90		1.30	1.45	1.52	1.59	1.55	1.67

Анализ данных показывает, что центральное круглое отверстие, нез висимо от диаметра, является концентратором напряжений, ослабляющи тело образца. Об этом свидетельствует тот факт, что коэффициент K всегда принимает значение больше единицы. В количественном отношени влияние отверстия тесно связано с ориентацией образца, при этом о больше в направлении армирования и меньше в промежуточном направл нии ($\varphi = 45°$). Говоря о коэффициенте концентрации, очевидно, следу подчеркнуть, что он для реальных материалов вряд ли может принима значения меньше единицы, так как отверстие в таких ситуациях не мож привести к упрочнению материала. Между тем, как это видно из табл. 3, некоторых случаях для СВАМ 2 : 1 коэффициент концентрации прин мает значение меньше единицы. Такое, в частности, наблюдается у обра цов с ориентацией $\varphi = 0$ и $45°$. Получение таких противоестественных р зультатов, по-видимому, всецело связано с конструктивными особенност ми материала. Действительно, пластина СВАМ 2 : 1 в направлении бол шого числа волокон в поперечном сечении имеет в два раза больше пр дольных волокон, чем в перпендикулярном. Такая укладка волокон дела материал сильно анизотропным в плоскости листа, в результате че прочность по двум главным направлениям чувствительно отличается (примерно вдвое). Отверстие диаметром 1 *мм* ($\lambda = 0.067$) уменьшает сечение образца и, безусловно, вызывает концентрацию напряжений, однако в условиях большего числа волокон эффект концентрации напряжений, по-видимому, выявляется относительно меньше, чем в перпендикулярном направлении, когда количество волокон вдвое меньше. В результате этого, разрушающая нагрузка образцов при $\varphi = 0°$ с концентратором в виде отверстия $d = 1$ *мм* отличается от разрушающей нагрузки контрольных образцов не намного. Следует отметить, что как показывают многочисленные эксперименты, уменьшение ширины образца на 1 *мм* совершенно не

Таблица 3

Зависимость эффективного коэффициента концентрации от отношения d/b и φ для стеклопластика СВАМ

	$\varphi°$	d/b, b = const = 15 *мм*, d = 1; 2; 4; 6 *мм*			
		0.067	0.133	0.267	0.400
СВАМ 2:1	0	0.96	1.08	1.17	1.25
	45	0.95	1.00	1.18	1.06
	90	1.03	1.14	1.23	1.19
СВАМ 1:1	0 90	1.06			



Фиг. 1.

влияет на изменение разрушающей нагрузки (в пределах разброса) в направлении $\varphi = 0°$. И так как разность величин разрушающих нагрузок для образцов без концентратора и с отверстием 1 *мм* меньше, чем разность площадей рабочих сечений этих образцов, то в итоге разрушающее напряжение при наличии концентратора оказывается больше предела прочности контрольных образцов

$$P_0 \approx P_k; \quad F_0 > F_k; \quad \sigma_0 = \frac{P_0}{F_0} < \sigma_k = \frac{P_k}{F_k}; \quad \sigma_0/\sigma_k < 1$$

Здесь P_0 — разрушающая нагрузка без концентратора; P_k — разрушающая нагрузка при концентраторе диаметром 1 *мм*; F_0 — сечение контрольного образца; F_k — сечение образца с концентратором диаметром 1 *мм*.

В подтверждение сказанного, можно привести результаты испытания образцов с $\varphi = 90°$ и результаты испытаний образцов, вырезанных из пластин СВАМ 1 : 1 в двух основных направлениях (табл. 3). Во всех этих случаях коэффициент K_p больше единицы, что несомненно подтверждает предположение, сделанное выше.

Коэффициент концентрации зависит также и от величины λ или же, если учесть, что в данном случае изменение λ происходит за счет изменения диаметра отверстия, то — и от диаметра концентратора. Наименьшее значение коэффициент концентрации, независимо от угла ориентации φ, имеет при $\lambda = 0.067$, то есть, когда $d = 1$ *мм*. Затем коэффициент концентрации возрастает, однако в промежутке от $\lambda = 0.133$ до $\lambda = 0.400$ изменение составляет не более 5% ($\varphi = 0°$). Следовательно, в результате проведенных исследований мы можем заключить, что после того, как λ приобретает значение 0.133 или начиная с диаметра $d = 2$ *мм* и выше, количественным изменением коэффициента концентрации можно пренебречь независимо от ориентации образца.

Рассмотрим теперь случай, когда величина λ имеет те же значения, что и в предыдущем случае, однако здесь постоянным остается диаметр концентратора, а изменение λ достигается изменением ширины образца. Принимая диаметр отверстия $d = 4$ *мм* постоянным, ширину образца варьировали так, что λ принимала значения 0.400; 0.333; 0.267; 0.133 и 0.067. В табл. 2 даны результаты экспериментального исследования влияния концентратора на прочность материала, когда при постоянном диаметре отверстия меняется ширина образца. Необходимо отметить, что в этом случае концентратор и масштабный фактор действуют на образец одновременно. Поэтому в данном случае при расчете коэффициента концентрации необходимо внести корректив масштабного эффекта. Приведенные в табл. 2 значения коэффициента концентрации рассчитаны по формуле, учитывающей также и масштабный эффект $K_p = \frac{\sigma_s M}{\sigma_k}$, здесь M — масштабный коэффициент.

В качестве масштабного коэффициента принято отношение условного предела кратковременной прочности образца данной ширины к пределу кратковременной прочности образца шириной 15 *мм*.

Наименьшее влияние отверстия, как концентратора, здесь, как и в случае b — const, наблюдается при $\lambda = 0.067$, то есть когда $b = 4$ *мм* и $b = 60$ *мм*. Наибольшее влияние концентратора для случая $\varphi = 0$ и 90° обнаруживается при $\lambda = 0.267$, затем с увеличением λ влияние концентратора снова уменьшается. Однако при более строгом подходе можно заметить, что и в этом случае для значения $\lambda = 0.133$ и выше, изменением коэффициента концентрации можно пренебречь. И действительно, в случае $\varphi = 0°$ среднее значение коэффициента K_p для $\lambda = 0.133$; 0.267; 0.333 и 0.400 составляет 1.44, при максимальном отклонении от среднего — не больше 8%. В случае, когда $\varphi = 90°$, среднее значение коэффициента K_p для перечисленных случаев составляет 1.51, а максимальное отклонение от среднего значения не превышает 2%.

Если пренебречь сравнением средних значений, то можно, по-видимому, сделать заключение, что когда изменение λ происходит за счет изменения ширины образца, то максимальное влияние концентратора наблюдается в случае $\lambda = 0.267$. При больших или меньших значениях λ влияние концентратора ослабевает.

Несколько иная картина наблюдается при испытаниях образцов с ориентацией $\varphi = 45°$. И хотя здесь также наименьшее влияние концентратор оказывает при $\lambda = 0.067$, однако, в целом, можно считать, что влияние концентратора не уменьшается в зависимости от величины λ. Действительно, при $\varphi = 45°$ для пяти значений λ среднее значение коэффициента концентрации составляет 1,3. Максимальное отклонение от этого значения составляет менее 4%. Естественно, таким разбросом можно пренебречь, считая, что приведенный ряд значений коэффициента концентрации с изменением λ не меняется.

Наконец, рассмотрим вариант, когда при изменяющемся диаметре концентратора несущее поперечное сечение образца остается постоянным, то есть неизменной остается номинальная ширина образца ($2a$ = const).

По-видимому, это именно тот вариант, когда влияние диаметра концентратора на величину эффективного коэффициента концентрации выявляется однозначно.

Во избежание побочного влияния масштабного фактора номинальная ширина образца была принята $2a = 11$ *мм*. Тогда при диаметрах отверстии 1; 2; 4; 5; 6 и даже 8 *мм* фактическая ширина образца находилась в интервале от 10-и до 20-и *мм*, что обеспечивало получение для прочности «максимального, достаточно стабильного значения» [3].

Здесь, как и в предыдущих случаях, особо нужно отметить результаты, полученные от испытания образцов, вырезанных в промежуточном направлении $\varphi = 45°$. Весьма стабильные значения для коэффициента концентрации получены независимо от диаметра концентратора. Этот момент, по-видимому, особо замечается уже потому, что в случаях $\varphi = 0$ и $90°$ при $d = 8$ *мм* наблюдается резкое повышение значения коэффициента концентрации, тогда как при $\varphi = 45°$ значение коэффициента концентрации совершенно не изменяется. С другой стороны, заметного различия в значениях коэффициента концентрации по каждому отдельно взятому углу ориентации образца, независимо от метода исследования, не обнаруживается.

На основании проведенных исследований можно заключить следующее:

1. Кратковременная прочность стеклотекстолита, определенная на плоских образцах путем одноосного растяжения, тесно связана с шириной рабочей зоны. Максимальные значения прочности получаются при ширине 10—15 *мм*. С увеличением ширины образца прочность падает.

2. Круглое центральное отверстие, независимо от диаметра, ослабляет тело материала, вызывая концентрацию напряжений.

3. Величина эффективного коэффициента концентрации напряжений зависит от отношения диаметра концентратора к ширине образца и увеличивается с увеличением этого отношения.

4. Для практических целей после того, как отношение d к b приобретает значение 0,133 и выше, изменением коэффициента концентрации можно пренебречь, принимая его постоянным.

5. Эффективный коэффициент концентрации практически не зависит от того, за счет какого из двух параметров (d и b) происходит изменение. Однако, если изменение происходит так, что номинальная ширина образца ($2a$ = const) всегда остается постоянной, то с увеличением диаметра концентратора коэффициент концентрации растет.

6. Коэффициент концентрации зависит от ориентации волокон. Он больше в направлении волокон и меньше в промежуточном направлении.

7. Величина коэффициента концентрации при прочих равных условиях (λ и φ) зависит и от структуры материала. Он больше у тканого и меньше у ориентированного стеклопластика (СВАМ).

Институт механики
АН Армянской ССР Поступила 13 XII 1978

Մ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, Ա. Ն. ՂԱՀՐԱՄԱՆՅԱՆ

ԿՈՆՑԵՆՏՐԱՏՈՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՊԱԿԵՊԼԱՍՏԻ ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում բերված են կլոր անցքի ձևով լարումների կոնցենտրատորի ազդեցությունը ապակետեքստոլիտի և կողմնորոշված ապակեպլաստի կարճատև ամրությանը նվիրված էքսպերիմենտալ հետազոտության արդյունքները։

Ցույց է տրված, որ կոնցենտրատորի ազդեցությունը կախված է ինչպես անցքի տրամագծի և նմուշի լայնության հարաբերությունից, այնպես էլ նյութի կառուցվածքից և նմուշների մեջ ապակե թելիկների ուղղությունից։

ON INFLUENCE OF CONCENTRATOR ON THE STRENGTH OF FIBRO-GLASS-REINFORCED PLASTIC

M. M. MARTIROSIAN, A. N. KAGRAMANIAN

S u m m a r y

The results of experimental investigations on influence of strain concentrator in the form of circular hole on the momentary strength of orientated fibro-glass-reinforced plastic and fibro-glass laminate are presented. It is shown that the influence of concentrator depends both on the ratio d/b and orientation of the specimen and the structure of the material.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рабинович А. Л., Аврасин Я. Д.* О механических характеристиках некоторых слоистых пластиков в связи с прочностью болтовых и заклепочных соединений. В кн.: Стеклотекстолиты и другие конструкционные пластики. М., 1960.
2. *Серенсен С. В., Стреляев В. С., Болотников Б. И.* Определение расчетных характеристик прочности стеклотекстолитов в зонах концентрации напряжений. Проблемы прочности, 1972, № 10, 3—9.
3. *Смирнова М. К., Соколов Б. П., Сидорин Я. С., Иванов А. П.* Прочность корпуса судна из стеклотекстолита. 1965, 331.
4. *Феодосьев В. И.* Сопротивление материалов. 1972, 544.
5. *Поляков А. Н., Степанычев Е. И.* Влияние концентрации напряжений на прочность ортогонально армированных полимеров. Машиноведение, 1975, № 1, 70—74.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 5, 1979 Механика

А. Н. ОЛЕЙНИК

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ

Исследовано электроупругое состояние тонкой анизотропной пьезоэлектрической полосы при заданных на боковых поверхностях физических воздействиях.

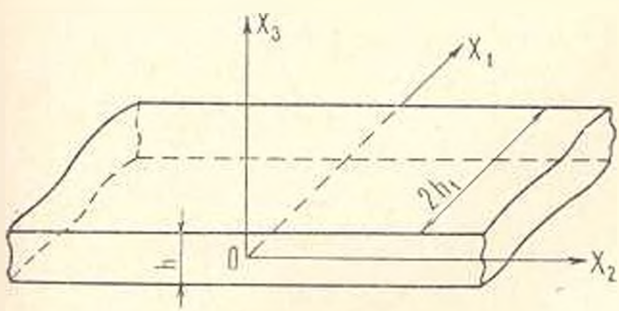
Задача решена методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений электроупругости [1]. Граничные условия на боковых поверхностях удовлетворены с помощью вариационного принципа Лагранжа [2], обобщенного на случай пьезоэлектрической среды [3].

Определение электроупругого состояния типа пограничного слоя сведено к решению бесконечной системы линейных уравнений.

Аналогичная задача о равновесии пьезокерамической пластинки с электродированными плоскими гранями решена методом однородных решений в работе [4].

§ 1. Рассмотрим тонкую анизотропную пьезоэлектрическую полосу: $0 \leq x_1 \leq 2h_1$, $|x_2| < \infty$, $|x_3| \leq h$, $h \ll h_1$ (фиг. 1). Будем считать, что плоские грани полосы неэлектродированы и свободны от внешних физических воздействий, то есть

$$\text{при} \quad x_3 = \pm h \quad t_{j3} = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad D_3 = 0 \tag{1.1}$$



Фиг. 1.

Действующие на полосу механические усилия, уравновешенные силами, приложенными на бесконечности, и распределение поверхностных электрических зарядов, как и в работе [5], заданы на ее боковых поверхностях

$$\text{при} \quad x_1 = 0,\ 2h_1 \quad t_{1j} = T_j(x_2, x_3), \quad D_1 = 4\pi\sigma(x_2, x_3) \tag{1.2}$$

Следуя А. Л. Гольденвейзеру [1], электроупругое состояние полосы представим как сумму медленно затухающего вдали от краев электроупругого состояния, которое строится при помощи основного итерационного процесса [6], и быстро затухающих электроупругих состояний, которые строятся при помощи вспомогательных итерационных процессов.

§ 2. Для построения вспомогательных итерационных процессов воспользуемся термодинамическими соотношениями, связывающими механические напряжения и компоненты электростатического смещения с механическими деформациями и компонентами электростатического поля. Они имеют вид [7]

$$T = c^E R - eE, \quad D = 4\pi e R + \varepsilon^R E \tag{2.1}$$

Уравнения электроупругого равновесия при отсутствии массовых сил и объемных электрических зарядов можно записать так [8]:

$$t_{ij,j} = 0, \quad D_{i,i} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$

Введем безразмерные величины

$$\bar{\xi}_1 = \frac{x_1}{h}, \qquad \xi_2 = \frac{x_2}{a}, \qquad \xi_3 = \frac{x_3}{h}, \qquad \lambda = \frac{h}{a} \tag{2.3}$$

где a — некоторый линейный параметр, и дифференциальные операторы

$$\bar{\partial}_1 = \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1}, \qquad \partial_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \quad (j = 2, 3) \tag{2.4}$$

Будем считать, что $\lambda \ll 1$. Предположим, что электроупругие характеристики полосы можно представить в следующем виде:

$$\left(\frac{1}{a} u_m, \ \frac{1}{a} v\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{l+n+1} (u_m^{(n)}, \ v^{(n)})$$

$$(t_{ij}, D_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{l+n} (t_{ij}^{(n)}, D_m^{(n)}) \tag{2.5}$$

Здесь u_m $(m = 1, 2, 3)$ — механические перемещения, v — потенциал электростатического поля, l — некоторые целые числа [6].

Учитывая соотношения (2.1), из (2.2) получим систему дифференциальных уравнений

$$(c_{11}^E \bar{\partial}_1^2 + c_{55}^E \partial_3^2 - 2c_{15}^E \bar{\partial}_1 \partial_3) u_1^{(n)} + [c_{16}^E \bar{\partial}_1^2 + c_{45}^E \partial_3^2 + (c_{14}^E + c_{56}^E) \bar{\partial}_1 \partial_3] u_2^{(n)} +$$

$$+ [c_{15}^E \bar{\partial}_1^2 + c_{35}^E \partial_3^2 + (c_{13}^E + c_{55}^E) \bar{\partial}_1 \partial_3] u_3^{(n)} - e_{11} \bar{\partial}_1^2 + e_{33} \partial_3^2 + (e_{31} + e_{15}) \bar{\partial}_1 \partial_3] v^{(n)} =$$

$$= -2 (c_{56}^E \partial_2 \partial_3 + c_{16}^E \bar{\partial}_1 \partial_2) u_1^{(n-1)} - [(c_{25}^E + c_{46}^E) \partial_2 \partial_3 + (c_{12}^E + c_{66}^E) \bar{\partial}_1 \partial_2] u_2^{(n-1)} -$$

$$- [(c_{36}^E + c_{45}^E) \partial_2 \partial_3 + (c_{14}^E + c_{56}^E) \bar{\partial}_1 \partial_2] u_3^{(n-1)} + [(e_{36} + e_{25}) \partial_2 \partial_3 +$$

$$+ (e_{21} + e_{16}) \bar{\partial}_1 \partial_2] v^{(n-1)} - c_{66}^E \partial_2^2 u_1^{(n-2)} - c_{26}^E \partial_2^2 u_2^{(n-2)} - c_{46}^E \partial_2^2 u_3^{(n-2)} + e_{26} \partial_2^2 v^{(n-2)} +$$

$$[c_{56}^E\bar{\partial}_1^2 + c_{45}^E\partial_3^2 + (c_{14}^E + c_{56}^E)\bar{\partial}_1\partial_3]u_1^{(n)} + (c_{66}^E\bar{\partial}_1^2 + c_{44}^E\partial_3^2 + 2c_{46}^E\bar{\partial}_1\partial_3)u_2^{(n)} +$$

$$+ [c_{56}^E\bar{\partial}_1^2 + c_{34}^E\partial_3^2 + (c_{36}^E + c_{45}^E)\bar{\partial}_1\partial_3]u_3^{(n)} - [e_{16}\bar{\partial}_1^2 + e_{34}\partial_3^2 + (e_{14} + e_{36})\bar{\partial}_1\partial_3]v^{(n)} =$$

$$= -[(c_{25}^E + c_{46}^E)\partial_2\partial_3 + (c_{12}^E + c_{66}^E)\bar{\partial}_1\partial_2]u_1^{(n-1)} - 2(c_{24}^E\partial_2\partial_3 + c_{26}^E\bar{\partial}_1\partial_2)u_2^{(n-1)} -$$

$$-[(c_{23}^E + c_{44}^E)\partial_2\partial_3 + (c_{25}^E + c_{46}^E)\bar{\partial}_1\partial_2]u_3^{(n-1)} + [(e_{34} + e_{24})\partial_2\partial_3 +$$

$$+ (e_{12} + e_{26})\bar{\partial}_1\partial_2]v^{(n-1)} - c_{26}^E\partial_2^2u_1^{(n-2)} - c_{22}^E\partial_2^2u_2^{(n-2)} - c_{24}^E\partial_2^2u_3^{(n-2)} + e_{22}\partial_2^2v^{(n-2)}$$

(2.6)

$$[c_{15}^E\bar{\partial}_1^2 + c_{35}^E\partial_3^2 + (c_{13}^E + c_{55}^E)\bar{\partial}_1\partial_3]u_1^{(n)} + [c_{56}^E\bar{\partial}_1^2 + c_{34}^E\partial_3^2 + (c_{45}^E + c_{36}^E)\bar{\partial}_1\partial_3]u_2^{(n)} +$$

$$+ (c_{55}^E\bar{\partial}_1^2 + c_{33}^E\partial_3^2 + 2c_{35}^E\bar{\partial}_1\partial_3)u_3^{(n)} - [e_{15}\bar{\partial}_1^2 + e_{33}\partial_3^2 + (e_{13} + e_{35})\bar{\partial}_1\partial_3]v^{(n)} =$$

$$= -[(c_{45}^E + c_{35}^E)\partial_2\partial_3 + (c_{14}^E + c_{56}^E)\bar{\partial}_1\partial_2]u_1^{(n-1)} - [(c_{23}^E + c_{44}^E)\partial_2\partial_3 +$$

$$+ (c_{25}^E + c_{46}^E)\bar{\partial}_1\partial_2)u_2^{(n-1)} - 2(c_{34}^E\partial_2\partial_3 + c_{45}^E\bar{\partial}_1\partial_2)u_3^{(n-1)} +$$

$$-[(e_{23} + e_{34})\partial_2\partial_3 + (e_{14} + e_{25})\bar{\partial}_1\partial_2]v^{(n-1)} - c_{46}^E\partial_2^2u_1^{(n-2)} -$$

$$- c_{24}^E\partial_2^2u_2^{(n-2)} - c_{44}^E\partial_2^2u_3^{(n-2)} + e_{24}\partial_2^2v^{(n-2)}$$

$$4\pi[e_{11}\bar{\partial}_1^2 + e_{35}\partial_3^2 + (e_{31} + e_{15})\bar{\partial}_1\partial_3]u_1^{(n)} + 4\pi[e_{16}\bar{\partial}_1^2 + e_{34}\partial_3^2 +$$

$$+ (e_{14} + e_{36})\bar{\partial}_1\partial_3]u_2^{(n)} + 4\pi[e_{15}\bar{\partial}_1^2 + e_{33}\partial_3^2 + (e_{13} + e_{35})\bar{\partial}_1\partial_3]u_3^{(n)} +$$

$$+ (\varepsilon_{11}^s\bar{\partial}_1^2 + \varepsilon_{33}^s\partial_3^2 + 2\varepsilon_{13}^s\bar{\partial}_1\partial_3)v^{(n)} = -4\pi[(e_{25} + e_{36})\partial_2\partial_3 +$$

$$+ (e_{21} + e_{16})\bar{\partial}_1\partial_2]u_1^{(n-1)} - 4\pi[(e_{32} + e_{24})\partial_2\partial_3 + (e_{12} + e_{26})\bar{\partial}_1\partial_2]u_2^{(n-1)} -$$

$$-4\pi[(e_{23} + e_{34})\partial_2\partial_3 + (e_{14} + e_{25})\bar{\partial}_1\partial_2]u_3^{(n-1)} - 2(\varepsilon_{23}^s\partial_2\partial_3 + \varepsilon_{12}^s\bar{\partial}_1\partial_2)v^{(n-1)} -$$

$$-4\pi e_{26}\partial_2^2u_1^{(n-2)} - 4\pi e_{22}\partial_2^2u_2^{(n-2)} - 4\pi e_{24}\partial_2^2u_3^{(n-2)} - \varepsilon_{22}^s\partial_2^2v^{(n-2)}$$

Из условий (1.1) найдем условия на плоских гранях полосы:

при $\qquad \xi_3 = \pm 1 \quad t_{j3}^{(n)} = 0, \quad D_3^{(n)} = 0 \qquad$ (2.7)

Граничные условия на боковых поверхностях полосы будут сформулированы ниже.

В уравнениях (2.6) и в дальнейшем будем считать, что величины с индексами n равны нулю при $n < 0$.

§ 3. Для кристаллов моноклинной системы [7] уравнения (2.6)—(2.7) распадаются на две группы, которые можно решать независимо друг от друга.

Первый вспомогательный итерационный процесс описывается соотношениями

$$(c_{66}^E\bar{\partial}_1^2 + c_{44}^E\partial_3^2 + 2c_{46}^E\bar{\partial}_1\partial_3)u_2^{(n)} - [e_{16}\bar{\partial}_1^2 + e_{34}\partial_3^2 + (e_{36} + e_{14})\bar{\partial}_1\partial_3]v^{(n)} =$$

$$= -[(c_{25}^E + c_{46}^E)\partial_2\partial_3 + (c_{12}^E + c_{66}^E)\bar{\partial}_1\partial_2]u_1^{(n-1)} - [(c_{23}^E + c_{44}^E)\partial_2\partial_3 +$$

$$+ (c_{25}^E + c_{46}^E)\bar{\partial}_1\partial_2]u_3^{(n-1)} - c_{22}^E\partial_2^2u_2^{(n-2)} + e_{22}\partial_2^2v^{(n-2)} \qquad (3.1)$$

$$4\pi[e_{16}\bar\partial_1^2 + e_{34}\partial_3^2 + (e_{14}+e_{36})\bar\partial_1\partial_3]u_2^{(n)} + (\varepsilon_{11}\bar\partial_1^2 + \varepsilon_{33}\partial_3^2 + 2\varepsilon_{13}\bar\partial_1\partial_3)v^{(n)} =$$

$$= -4\pi[(e_{25}+e_{36})\partial_2\partial_3 + (e_{21}+e_{16})\bar\partial_1\partial_2]u_1^{(n-1)} - 4\pi[(e_{23}+e_{34})\partial_2\partial_3 +$$

$$+(e_{14}+e_{25})\bar\partial_1\partial_2]u_3^{(n-1)} - 4\pi e_{22}\partial_2^2 u_2^{(n-2)} - \varepsilon_{22}\partial_2^2 v^{(n-2)}$$

при $$\xi_3 = \pm 1 \quad t_{23}^{(n)} = D_3^{(n)} = 0 \tag{3.2}$$

Для второго вспомогательного итерационного процесса будем иметь

$$(c_{11}^E\bar\partial_1^2 + c_{55}^E\partial_3^2 + 2c_{15}^E\bar\partial_1\partial_3)u_1^{(n)} + [c_{15}^E\bar\partial_1^2 + c_{35}^E\partial_3^2 + (c_{13}^E + c_{55}^E)\bar\partial_1\partial_3]u_3^{(n)} =$$

$$= -[(c_{25}^E + c_{16}^E)\partial_2\partial_3 + (c_{12}^E + c_{66}^E)\bar\partial_1\partial_2]u_2^{(n-1)} + [(e_{25}+e_{36})\partial_2\partial_3 +$$

$$+(e_{21}+e_{16})\bar\partial_1\partial_2]v^{(n-1)} - c_{66}^E\partial_2^2 u_1^{(n-2)} - c_{46}^E\partial_2^2 u_3^{(n-2)} \tag{3.3}$$

$$[c_{15}^E\bar\partial_1^2 + c_{35}^E\partial_3^2 + (c_{13}^E + c_{55}^E)\bar\partial_1\partial_3]u_1^{(n)} + (c_{55}^E\bar\partial_1^2 + c_{33}^E\partial_3^2 + 2c_{35}^E\bar\partial_1\partial_3)u_3^{(n)} =$$

$$= -[(c_{23}^E + c_{44}^E)\partial_2\partial_3 + (c_{25}^E + c_{46}^E)\bar\partial_1\partial_2]u_2^{(n-1)} + [(e_{23}+e_{34})\partial_2\partial_3 +$$

$$+(e_{14}+e_{25})\bar\partial_1\partial_2]v^{(n-1)} - c_{46}^E\partial_2^2 u_1^{(n-2)} - c_{44}^E\partial_2^2 u_3^{(n-2)}$$

при $$\xi_3 = \pm 1 \quad t_{13}^{(n)} = t_{33}^{(n)} = 0 \tag{3.4}$$

Общее решение однородной системы (3.1) представим в виде

$$\bar u_2^{(n)} = [e_{16}\bar\partial_1^2 + e_{34}\partial_3^2 + (e_{36}+e_{14})\bar\partial_1\partial_3]\exp(\eta\xi_3\bar\partial_1)\bar W_1^{(n)}(\xi_1, \xi_2)$$

$$\bar v^{(n)} = (c_{66}^E\bar\partial_1^2 + c_{44}^E\partial_3^2 + 2c_{46}^E\bar\partial_1\partial_3)\exp(\eta\xi_3\bar\partial_1)\bar W_1^{(n)}(\xi_1, \xi_2) \tag{3.5}$$

где η — корни уравнения

$$4\pi[e_{16} + (e_{14}+e_{36})\eta + e_{34}\eta^2]^2 + (c_{66}^E + 2c_{46}^E\eta + c_{44}^E\eta^2)(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{13}\eta + \varepsilon_{33}\eta^2) = 0 \tag{3.6}$$

Из термодинамических неравенств [8]

$$c_{mn}^{E2} < c_{mm}^E c_{nn}^E \qquad \varepsilon_{mn}^2 < \varepsilon_{mm}\varepsilon_{nn} \tag{3.7}$$

следует, что уравнение (3.6) не может иметь вещественных корней.

Для электроупругих характеристик первого процесса получаем следующие представления:

$$\bar u_2^{(n)} = \sum_{j=1}^{4} \alpha_{j1}\bar\partial_1^2 \exp(\eta_j\xi_3\bar\partial_1)\bar W_{j1}^{(n)}(\xi_1, \xi_2), \quad \bar v^{(n)} = \sum_{j=1}^{4} \beta_{j1}\bar\partial_1^2 \exp(\eta_j\xi_3\bar\partial_1)\bar W_{j1}^{(n)}(\xi_1, \xi_2)$$

$$\bar t_{23}^{(n)} = \sum_{j=1}^{4} a_{j1}\bar\partial_1^3 \exp(\eta_j\xi_3\bar\partial_1)\bar W_{j1}^{(n)}(\xi_1, \xi_2), \quad \bar t_{12}^{(n)} = \sum_{j=1}^{4} b_{j1}\bar\partial_1^3 \exp(\eta_j\xi_3\bar\partial_1)\bar W_{j1}^{(n)}(\xi_1, \xi_2)$$

$$\bar D_1^{(n)} = \sum_{j=1}^{4} c_{j1}\bar\partial_1^3 \exp(\eta_j\xi_3\bar\partial_1)\bar W_{j1}^{(n)}(\xi_1, \xi_2), \quad \bar D_3^{(n)} = \sum_{j=1}^{4} d_{j1}\bar\partial_1^3 \exp(\eta_j\xi_3\bar\partial_1)\bar W_{j1}^{(n)}(\xi_1, \xi_2) \tag{3.8}$$

Здесь α_{j1}, β_{j1}, a_{j1}, b_{j1}, c_{j1}, d_{j1} — комплексные коэффициенты, зависящие от γ_j и электромеханических постоянных полосы.

Возьмем функции $\overline{W}_{j1}^{(n)}(\bar{\xi}_1, \xi_2)$ в виде

$$\overline{W}_{j1}^{(n)}(\bar{\xi}_1, \xi_2) = \exp\left(-i\frac{\gamma}{\gamma_j}\bar{\xi}_1\right)W_{j1}^{(n)}(\xi_2) \tag{3.9}$$

Тогда из граничных условий (3.2) получим дисперсионное уравнение относительно γ

$$\cos 4\gamma = 1 \tag{3.10}$$

Выберем γ_j и γ так, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{Re}\left(i\frac{\gamma}{\gamma_j}\right) > 0 \tag{3.11}$$

Тогда функции (3.9) будут убывать с увеличением $\bar{\xi}_1$, характеризуя электроупругое состояние пограничного слоя.

Первое выражение (3.8) принимает вид

$$\bar{u}_2^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[A_{1k}^1\exp\left(-i\frac{k\pi}{2}\xi_3\right) + B_{1k}^1\exp\left(i\frac{k\pi}{2}\xi_3\right)\right]\times\right.$$
$$\times\exp\left(-i\frac{k\pi}{2\gamma_2}\bar{\xi}_1\right)W_{21k}^{(n)}(\xi_2) + \left[C_{1k}^1\exp\left(-i\frac{k\pi}{2}\xi_3\right)+\right.$$
$$\left.\left.+D_{1k}^1\exp\left(i\frac{k\pi}{2}\xi_3\right)\right]\exp\left(i\frac{k\pi}{2\gamma_4}\bar{\xi}_1\right)W_{41k}^{(n)}(\xi_2)\right\} \tag{3.12}$$

где A_{1k}^1, B_{1k}^1, C_{1k}^1, D_{1k}^1 — некоторые комплексные постоянные. Формулы для остальных выражений (3.8) имеют ту же структуру.

Общее решение однородной системы (3.3) строится аналогично. Для него характеристическое уравнение получается таким:

$$[c_{15}^E + (c_{55}^E + c_{13}^E)\zeta + c_{35}^E\zeta^2]^2 - (c_{11}^E + 2c_{15}^E\zeta + c_{55}^E\zeta^2)(c_{55}^E + 2c_{35}^E\zeta + c_{33}^E\zeta^2) = 0 \tag{3.13}$$

дисперсионное же уравнение совпадает с уравнением (3.10) первого процесса. Как и в работе [9], можно показать, что корни уравнения (3.13) не могут быть вещественными.

Выражения для характеристик второго процесса имеют структуру (3.12). Например,

$$\bar{u}_1^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[A_{1k}^2\exp\left(-i\frac{k\pi}{2}\xi_3\right) + B_{1k}^2\exp\left(i\frac{k\pi}{2}\xi_3\right)\right]\times\right.$$
$$\times\exp\left(-i\frac{k\pi}{2\zeta_2}\bar{\xi}_1\right)W_{22k}^{(n)}(\xi_2) + \left[C_{1k}^2\exp\left(-i\frac{k\pi}{2}\xi_3\right)+\right.$$
$$\left.\left.+D_{1k}^2\exp\left(i\frac{k\pi}{2}\xi_3\right)\right]\exp\left(i\frac{k\pi}{2\zeta_4}\bar{\xi}_1\right)W_{42k}^{(n)}(\xi_2)\right\} \tag{3.14}$$

Частное решение неоднородных систем (3.1) и (3.3) зависит от предыдущих шагов обоих вспомогательных процессов. Его построение не представляет принципиальных трудностей.

Для удовлетворения граничным условиям (1.2) воспользуемся вариационным принципом Лагранжа [2], обобщенным на случай пьезоэлектрической среды [3]:

$$\iint\limits_S \left(t_{11}\delta u_1 + t_{12}\delta u_2 + t_{13}\delta u_3 - \frac{1}{4\pi} D_1 \delta\varphi \right) dS =$$

$$= \iint\limits_S (T_1\delta u_1 + T_2\delta u_2 + T_3\delta u_3 - \sigma\delta\varphi)\, dS \tag{3.15}$$

где S — боковая поверхность полосы.

Варьируя в уравнении (3.15) поочередно граничные значения первого и второго процессов и приравнивая коэффициенты при одинаковых вариациях $\delta w_{21k}^{(n)}$, $\delta w_{41k}^{(n)}$, $\delta w_{22k}^{(n)}$, $\delta w_{42k}^{(n)}$, получим бесконечную систему линейных уравнений относительно функций $w_{21k}^{(n)}(\xi_2)$, $w_{41k}^{(n)}(\xi_2)$, $w_{22k}^{(n)}(\xi_4)$, $w_{42k}^{(n)}(\xi_4)$. Матрица этой системы одна и та же для всех приближений и зависит только от электромеханических постоянных полосы.

§ 4. При проведении численных расчетов была рассмотрена полоса шириной $2h_1 \gg 2h$, изготовленная из кристалла сульфата лития, когда кристаллографические оси Y, Z направлены по осям координат x_2, x_3, а ось X под углом 17°18′ к x. [10].

Граничные условия на боковых поверхностях ($\xi_1 = 0$, $2h_1/h$) принимались в виде

$$t_{11} = q\xi_3^{2m}, \quad t_{12} = t_{13} = 0, \qquad D_1 = 4\pi\sigma\xi_3^{2m} \tag{4.1}$$

Используя выражения для электроупругих характеристик основного итерационного процесса [6], в случае, когда $q \neq 0$, $\sigma = 0$, с точностью до q будем иметь

$$\text{при } m = 1 \quad t_{11} = 0.33 \qquad\qquad \text{при } m = 2 \quad t_{11} = 0.20 \tag{4.2}$$

Если же $q = 0$, $\sigma \neq 0$, то с точностью до σ получим

$$\text{при } m = 1 \quad D_1 = 4.19; \qquad\qquad \text{при } m = 2 \quad D_1 = 2.51 \tag{4.3}$$

В табл. 1 приведены в случае 1, 2 с точностью до $q(\sigma = 0)$ суммарные значения механических напряжений $t_{11}(m = 1, 2)$, а в случае 3, 4 — с точностью до $\sigma(q = 0)$ суммарные значения электростатических смещений $D_1(m = 1, 2)$.

Сравнивая основное решение (4.2) и (4.3) с результатами, приведенными в табл. 1, приходим к выводу, что для рассматриваемой задачи электроупругое состояние типа пограничного слоя проникает в глубь полосы на расстояние до $2h$.

Таблица 1

	ξ_1	$\xi_3=0.3$, $\lambda=0.125$	$\lambda=0.25$	$\lambda=0.5$	$\xi_3=0.6$, $\lambda=0.125$	$\lambda=0.25$	$\lambda=0.5$	$\xi_3=0.9$, $\lambda=0.125$	$\lambda=0.25$	$\lambda=0.5$
1	0.0	0.06	0.06	0.06	0.34	0.34	0.34	0.83	0.83	0.83
	0.1	0.23	0.12	0.07	0.23	0.21	[illegible]	[illegible]	0.35	0.51
	0.2	0.30	0.23	0.12	0.29	0.23	0.21	0.29	0.26	0.35
	0.3	0.33	0.28	0.18	0.32	0.26	0.22	0.32	0.27	0.28
	0.4	0.33	0.30	0.23	0.33	0.29	0.23	0.33	0.29	0.26
	0.5	0.33	0.32	0.26	0.33	0.31	0.25	0.33	0.31	0.27
2	0.0	0.01	0.01	0.01	0.11	0.11	0.11	0.68	0.68	0.68
	0.2	0.18	0.13	0.05	0.17	0.11	0.09	0.17	0.13	0.18
	0.4	0.20	0.18	0.12	0.20	0.17	0.11	0.20	0.17	0.13
	0.6	0.20	0.19	0.16	0.20	0.19	0.11	0.20	0.19	0.15
	0.8	0.20	0.20	0.18	0.20	0.20	0.17	0.20	0.20	0.17
	1.0	0.20	0.20	0.19	0.20	0.20	0.18	0.20	0.20	0.18
3	0.0	1.09	1.09	[illegible]	4.59	4.59	4.59	10.52	10.52	10.52
	0.1	4.08	3.61	2.84	4.24	4.44	4.65	4.35	5.13	6.51
	0.2	4.18	4.05	3.61	4.19	4.24	4.44	4.19	4.35	5.13
	0.3	4.19	4.17	[illegible]	4.19	4.19	4.30	4.19	4.21	4.58
	0.4	4.19	4.18	4.08	4.19	4.19	4.24	4.19	4.19	4.35
	0.5	4.19	4.19	4.14	4.19	4.19	4.21	4.19	4.19	4.25
4	0.0	0.10	0.10	0.10	1.74	1.74	1.74	8.89	8.89	8.89
	0.1	2.42	2.05	1.43	2.55	2.67	2.66	2.64	3.28	1.51
	0.2	2.51	2.42	2.05	2.51	2.55	2.67	2.51	2.64	3.28
	0.3	2.51	2.50	2.31	2.51	2.52	2.60	2.51	2.53	2.82
	0.4	2.51	2.51	2.42	2.51	2.51	2.55	2.51	2.51	2.64
	0.5	2.51	2.51	2.47	2.51	2.51	2.53	2.51	2.51	2.55

Автор благодарит А. С. Космодамианского и В. Н. Ложкина за постановку задачи и полезные советы.

Институт прикладной математики
и механики АН УССР

Поступила 10 X 1978

Լ. Ն. ՕԼԵՆԻԿ

ԲԱՐԱԿ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՊՅԵԶՈԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՇԵՐՏԻ ԷԼԵԿՏՐԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԱԿԱՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրվել է բարակ անիզոտրոպ պյեզոէլեկտրական շերտի էլեկտրառաձգական վիճակը նրա կողմնային մակերևույթների վրա տրված ֆիզիկական ազդեցությունների դեպքում։

Խնդիրը լուծվել է էլեկտրաառաձգականության հավասարումների ասիմպտոտական ինտեգրման մեթոդով։ Կողմնային մակերևույթների վրա եզրային պայմանները բավարարվել են Լագրանժի վարիացիոն սկզբունքի օգնությամբ, որն ընդհանրացվել է պյեզոէլեկտրական միջավայրի դեպքի համար։

Սահմանային շերտի տիպի էլեկտրաառաձգական վիճակի որոշումը բերվել է գծային հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծմանը։

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF ELECTRO-FLEXIBLE STATE OF THIN ANISOTROPIC PIEZOELECTRIC BAND

L. N. OLEYNICK

S u m m a r y

The electro-flexible state of thin anisotropic piezoelectric band is investigated with physical effects given on side surfaces.

The problem is solved by method of asymptotic integrating of three-dimensional equations of electric flexibility. The boundary conditions on side surfaces are satisfied by the Lagrange variation principle, generalized for the case of piezoelectric medium.

The definition of electro-flexible state of a border-layer type is reduced to calculation of an infinite system of linear equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, в. 4.
2. *Аксентян О. К., Ворович И. И.* Напряженное состояние плит малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, в. 6.
3. *Веховищева И. А.* Вариационные принципы в теории электроупругости. Прикл. механ., 1971, т. 7, в. 9.
4. *Жиров В. Е.* Электроупругое равновесие пьезокерамической плиты. ПММ, 1977, т. 41, в. 6.
5. *Улитко А. Ф.* К теории колебаний пьезокерамических тел. Республ. межвед. сб. «Тепловые напряжения в элементах конструкций», в. 15. Киев, «Наукова думка», 1975, стр. 176.
6. *Космодамианский А. С., Ложкин В. Н.* Электроупругое равновесие тонкого анизотропного слоя с учетом пьезоэлектрического эффекта. ПММ, 1978, т. 42, в. 4.
7. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях. Физическая акустика, т. 1. Методы и приборы ультразвуковых исследований, ч. А. М., «Мир», 1966, стр. 592.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959, стр. 532.
9. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М., «Наука», 1977, стр. 416.
10. *Желудев И. С.* Физика кристаллических диэлектриков. М., «Наука», 1968, стр. 464.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 5, 1979 Механика

Ф. Н. ГРИГОРЯН

СИНТЕЗ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С НАПЕРЕД ЗАДАННЫМ СПЕКТРОМ

1. В ряде работ [1—4] рассмотрена задача: для вполне управляемой системы

$$\frac{dx}{dt}=Ax+Hu$$

построить скалярное управление

$$u=Bx$$

(A, H, B — постоянные матрицы с размерами соответственно $n\times n$, $n\times 1$, $1\times n$) так, чтобы замкнутая система имела наперед заданный спектр $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_n^0$ ($\lambda_j^0=\mathrm{const}$, $j=1, 2, \ldots, n$), иными словами, построить матрицу B так, чтобы матрица $(A+HB)$ была подобна диагональной матрице с заданными диагональными элементами.

Аналогичная по смыслу задача для нестационарной системы

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+H(t)u, \quad u=B(t)x \tag{1.1}$$

($A(t)$, $H(t)$, $B(t)$ — матрицы с размерами соответственно $n\times n$, $n\times m$, $m\times n$) в [5] сформулирована следующим образом: построить матрицу $B(t)$ так, чтобы матрица $[A(t)+H(t)B(t)]$ была кинематически подобна диагональной матрице, диагональными элементами которой служат заданные числовые функции $\lambda_1^0(t), \lambda_2^0(t), \ldots, \lambda_n^0(t)$, то есть чтобы

$$K^{-1}(A+HB)K-K^{-1}\frac{dK}{dt}=\Lambda(t)=\mathrm{diag}\,(\lambda_1^0(t), \ldots, \lambda_n^0(t)) \tag{1.2}$$

где K — некоторая невырожденная дифференцируемая матрица.

Последняя задача рассмотрена в случае, когда на рассматриваемом интервале J изменения t функции $\lambda_j^0(t)$ удовлетворяют условию

$$|\lambda_j^0(t)-\lambda_i^0(t)|\geqslant a>0, \quad i\neq j; \quad i, j=1, 2, \ldots, n \quad \forall t\in J$$

В работе [6] рассматривается система со скалярным управлением в случае $\lambda_j^0(t)\equiv 0$, $j=1, 2, \ldots, n$.

В настоящей статье решается задача в наиболее общем случае.

Задача. Пусть для нестационарной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + H(t)u, \quad u = B(t)x \tag{1.3}$$

где x и u — соответственно $(n \times 1)$ и $(m \times 1)$ — матрицы фазовых координат и управляющих функций; $A(t)$, $H(t)$, $B(t)$ — матрицы с размерами соответственно $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ и элементами, дифференцируемыми по t на рассматриваемом промежутке $[t_0, T)$ любое нужное число раз, матрица управляемости [7]

$$Q(t) = [H_1, L_A H_1, \ldots, L_A^{n_1-1} H_1; H_2, L_A H_2, \ldots, L_A^{n_2-1} H_2; \ldots;$$
$$H_m, L_A H_m, \ldots, L_A^{n_m-1} H_m]$$

где $H_i = H_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — столбцы матрицы $H(t) = (H_1(t), \ldots, H_m(t))$, n_i — порядок i-ой подсистемы, $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$,

$$L_A^k H_i = A L_A^{k-1} H_i - \frac{d(L_A^{k-1} H_i)}{dt}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$L_A^0 H_i = H_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

имеет ранг «n» при $t \in [t_0, T)$, требуется построить матрицу $B(t)$ так, чтобы матрица $[A(t) + H(t)B(t)]$ была кинематически подобна диагональной матрице, диагональными элементами которой служат заданные числовые функции

$$\mu_0(t), \mu_0(t), \ldots, \mu_0(t); \quad 0, 0, \ldots, 0; \quad \mu_1(t), \mu_2(t), \ldots, \mu_{m_3}(t),$$

$$m_1 + m_2 + m_3 = n$$

при

$$|\mu_\sigma(t) - \mu_s(t)| \geq a > 0 \quad (\sigma \neq s; \ \sigma, s = 1, 2, \ldots, m_3)$$
$$\mu_0(t) \neq 0, \quad \mu_0(t) \neq \mu_s(t) \tag{1.4}$$

то есть, чтобы

$$(A + HB)K = K\Lambda(t) + \frac{dK}{dt} \tag{1.5}$$

где

$$\Lambda(t) = \operatorname{diag}(\mu_0(t), \ldots, \mu_0(t); 0, 0, \ldots, 0; \mu_1(t), \ldots, \mu_{m_3}(t))$$

K — некоторая невырожденная дифференцируемая матрица.

2. Введем в рассмотрение систему

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau)x + H(\tau)B(\tau, \varepsilon)x, \quad \tau = \varepsilon t \tag{2.1}$$

содержащую параметр ε.

Все построения, проводимые ниже, имеют относительно ε тождественный характер, и потому они сохранят силу и при $\varepsilon = 1$, когда системы (2.1) и (1.3) совпадают.

Предполагается, что собственные значения матрицы A различны и отличны от нуля.

Матрицу K представляем в виде

$$\bar{K} = \bar{K}(\tau, \varepsilon) Z(t) \tag{2.2}$$

где

$$Z(t) = \operatorname{diag}(Z_1(t), Z_2(t), E_{m_3})$$

— матрица преобразования к диагональному виду системы

$$\frac{dz}{dt} = J(\lambda) z$$

матрица $J(\lambda)$ представляет собой матрицу Жордана

$$J(\lambda) = \operatorname{diag}(\Gamma_{m_1}, \Gamma_{m_2}, \Lambda_1)$$

где Γ_{m_1}, Γ_{m_2} — матрицы сдвига порядка m_1 и m_2 соответственно, $\Lambda_1 = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_{m_3})$.

Как показано в [8] (стр. 169—170),

$$Z_1(t) = \exp(\Gamma_{m_1} t), \quad Z_2(t) = \exp(\Gamma_{m_2} t)$$

Матрицу K представим в следующем виде:

$$K = (K_1, \dots, K_{m_1}; K_{m_1+1}, \dots, K_{m_1+m_2}; K_{m_1+m_2+1}, \dots, K_n)$$

и обозначим

$$K_{(m_1)} = (K_1, \dots, K_{m_1}); \; K_{(m_1+m_2)} = (K_{m_1+1}, \dots, K_{m_1+m_2}); \; K_{(n)} = (K_{\alpha+1}, \dots, K_n)$$
$$(\alpha = m_1 + m_2)$$

Матрицы $K_{(m_1)}$, $K_{(m_1+m_2)}$, $K_{(n)}$ представим в виде

$$K_{(m_1)} = (\bar{K}_1(\tau, \varepsilon), \dots, \bar{K}_{m_1}(\tau, \varepsilon)) Z_1(t) = \bar{K}_{(m_1)}(\tau, \varepsilon) Z_1(t) \tag{2.3}$$

$$K_{(\alpha)} = (\bar{K}_{m_1+1}(\tau, \varepsilon), \dots, \bar{K}_{m_1+m_2}(\tau, \varepsilon)) Z_2(t) = \bar{K}_{(\alpha)}(\tau, \varepsilon) Z_2(t) \tag{2.4}$$

$$K_{(n)} = (\bar{K}_{\alpha+1}(\tau, \varepsilon), \dots, \bar{K}_n(\tau, \varepsilon)) E_{m_3} = \bar{K}_{(n)}(\tau, \varepsilon)$$

$\bar{K}(\tau, \varepsilon)$ и $B(\tau, \varepsilon)$ строим в форме рядов

$$\bar{K} = K + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k K^{[k]}, \qquad B = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k B_k \tag{2.5}$$

где

$$K = (K_{(m_1)},\ K_{(s)},\ K_{(n)}),\quad K^{[k]} = (K^{[k]}_{(m_1)},\ K^{[k]}_{(s)},\ K^{[k]}_{(n)})$$

Тогда система уравнений (1.5) распадается на следующие подсистемы:

$$(A + HB - \mu_0 E)\,\tilde{K}_{(m_1)}\chi_1(t) = \varepsilon\frac{d\tilde{K}_{(m_1)}}{d\tau}\chi_1 + \tilde{K}_{(m_1)}\frac{d\chi_1}{dt}$$

$$(A + HB)\,\tilde{K}_{(s)}\chi_2(t) = \varepsilon\frac{d\tilde{K}_{(s)}}{d\tau}\chi_2 + \tilde{K}_{(s)}\frac{d\chi_2}{dt}$$

$$(A + HB)\,\tilde{K}_{(n)} = \tilde{K}_{(n)}\Lambda_1 + \varepsilon\frac{d\tilde{K}_{(n)}}{d\tau}$$

или соответственно [8] (стр. 169):

$$(A + HB - \mu_0 E)\,\tilde{K}_{(m_1)} = \tilde{K}_{(m_1)}\Gamma_{m_1} + \varepsilon\frac{d\tilde{K}_{(m_1)}}{d\tau} \tag{2.6}$$

$$(A + HB)\,\tilde{K}_{(s)} = \tilde{K}_{(s)}\Gamma_{m_1} + \varepsilon\frac{d\tilde{K}_{(s)}}{d\tau} \tag{2.7}$$

$$(A + HB)\,\tilde{K}_{(n)} = \tilde{K}_{(n)}\Lambda_1 + \varepsilon\frac{d\tilde{K}_{(n)}}{d\tau} \tag{2.8}$$

Приравнивая в (2.6), (2.7), (2.8) члены, содержащие ε в одинаковых степенях, получим:

$$(A - \mu_0 E + HB_0)\,K_{(m_1)} = K_{(m_1)}\Gamma_{m_1} \tag{2.9}$$

$$(A - \mu_0 E + HB_0)\,K^{[k]}_{(m_1)} + HB_k K_{(m_1)} = K^{[k]}_{(m_1)}\Gamma_{m_1} + D^{[k-1]}_{(m_1)} \tag{2.9'}$$

$$(A + HB_0)\,K_{(s)} = K_{(s)}\Gamma_{m_1} \tag{2.10}$$

$$(A + HB_0)\,K^{[k]}_{(s)} + HB_k K_{(s)} = K^{[k]}_{(s)}\Gamma_{m_1} + D^{[k-1]}_{(s)} \tag{2.10'}$$

$$(A + HB_0)\,K_{(n)} = K_{(n)}\Lambda_1 \tag{2.11}$$

$$(A + HB_0)\,K^{[k]}_{(n)} + HB_k K_{(n)} = K^{[k]}_{(n)}\Lambda_1 + D^{[k-1]}_{(n)} \tag{2.11'}$$

$$D^{[k-1]}_{(m_1)} = -H\sum_{i=1}^{k-1} B_i K^{[k-i]}_{(m_1)} + \frac{dK^{[k-1]}_{(m_1)}}{d\tau} \tag{2.9''}$$

$$D^{[k-1]}_{(s)} = -H\sum_{i=1}^{k-1} B_i K^{[k-i]}_{(s)} + \frac{dK^{[k-1]}_{(s)}}{d\tau} \tag{2.10''}$$

$$D^{[k-1]}_{(n)} = -H\sum_{i=1}^{k-1} B_i K^{[k-i]}_{(n)} + \frac{dK^{[k-1]}_{(n)}}{d\tau} \tag{2.11''}$$

Из (2.9), (2.10), (2.11) следует

$$(A + HB_0) = K\,\mathrm{diag}\,(J(\mu_0),\ \Gamma_{m_2},\ \Lambda_1)\,M = K_{(m_1)}\,J(\mu_0)\,M_{(m_1)} +$$
$$+ K_{(s)}\Gamma_{m_2}M_{(s)} + K_{(n)}\Lambda_1 M_{(n)} \qquad (2.12)$$

Пользуясь соотношениями, приведенными в [8] (стр. 115, 224), последнее равенство можно представить в виде

$$(A + HB_0 - \mu_0 E) = K_{(m_1)}\Gamma_{m_1}M_{(m_1)} + K_{(s)}J_{m_2}(-\mu_0)\,M_{(s)} +$$
$$+ K_{(n)}(\Lambda_1 - \mu_0 E_{m_3})\,M_{(n)} \qquad (2.13)$$

где

$$M = K^{-1} = \begin{pmatrix} M_{(m_1)} \\ M_{(s)} \\ M_{(n)} \end{pmatrix}$$

Соотношение (2.12) показывает, что K есть матрица преобразования матрицы $(A + HB_0)$ к нормальной форме Жордана $J(\lambda)$ в случае, когда все собственные значения матрицы $(A + HB_0)$ суть

$$\mu_0, \ldots, \mu_0;\quad 0, \ldots, 0;\quad \mu_1, \ldots, \mu_{m_3}$$

Построение матрицы B_0 из условия равенства собственных значений матрицы $(A + HB_0)$ заданным числам в случае многомерного управления может быть проведено по соотношениям, указанным в работе [9].

При этом в соответствии с (2.9), (2.10), (2.11) или с (2.12) столбцы матрицы K определяются равенствами

$$\begin{array}{lll}
(A + HB_0 - \mu_0 E)\,K_1 = 0, & (A + HB_0)\,K_{m_1+1} = 0, & (A + HB_0)\,K_{s+1} = \mu_1 K_{s+1} \\
(A + HB_0 - \mu_0 E)\,K_2 = K_1, & (A + HB_0)\,K_{m_1+2} = K_{m_1+1}, & (A + HB_0)K_{s+2} = \mu_2 K_{s+2} \\
\vdots & \vdots & \vdots \qquad (2.14) \\
(A + HB_0 - \mu_0 E)\,K_{m_1} = K_{m_1-1}; & (A + HB_0)\,K_s = K_{s-1}; & (A + HB_0)\,K_n = \mu_{m_3} K_n
\end{array}$$

Перейдем теперь к построению $K^{[k]}$ и B_k, $k = 1, 2, \ldots$. k-е равенство (2.9) эквивалентно системе уравнений

$$(A - \mu_0 E + HB_0)\,K_1^{[k]} + HB_k K_1 = D_1^{[k-1]}$$
$$(A - \mu_0 E + HB_0)\,K_2^{[k]} + HB_k K_2 = K_1^{[k-1]} + D_2^{[k-1]}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$(A - \mu_0 E + HB_0)\,K_{m_1}^{[k]} + HB_k K_{m_1} = K_{m_1-1}^{[k]} + D_{m_1}^{[k-1]}$$

Умножим полученные равенства слева соответственно на E_n, $(A - \mu_0 E + HB_0), \ldots, (A - \mu_0 E + HB_0)^{m_1-1}$ и после сложения, преобразуя с учетом (2.13), получим

$$W = \begin{pmatrix} B_k K_1 \\ B_k K_2 \\ \vdots \\ B_k K_{m_1} \end{pmatrix} = M_{(m_1)} d_1^{[k-1]} \tag{2.15}$$

где

$$d_1^{[k-1]} = D_1^{[k-1]} + (A + HB_0 - \mu_0 E) D_2^{[k-1]} +$$
$$+ \cdots + (A + HB_0 - \mu_0 E)^{m_1 - 1} D_{m_1}^{[k-1]} \tag{2.15'}$$

$$W = \begin{vmatrix} M_1 H & M_2 H & M_3 H & \cdots & M_{m_1} H \\ M_2 H & M_3 H & M_4 H & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\,\vdots\,\vdots & \vdots \\ M_{m_1-2} H & M_{m_1-1} H & M_{m_1} H & \cdots & 0 \\ M_{m_1-1} H & M_{m_1} H & 0 & \cdots & 0 \\ M_{m_1} H & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \tag{2.15''}$$

Из условия управляемости следует, что [5]

$$\sum_{i=1}^{n} | M_{m_1} H_i | \neq 0 \tag{2.16}$$

В общем случае система (2.15) может быть и несовместной, но всегда имеет одно и только одно наилучшее приближенное решение (по методу наименьших квадратов) [10].

В силу условия (2.16) решение системы (2.15), представленное псевдообратной матрицей W^+, имеет вид

$$\begin{pmatrix} B_k K_1 \\ B_k K_2 \\ \vdots \\ B_k K_{m_1} \end{pmatrix} = W^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]} \tag{2.17}$$

Здесь $W^+ = W^* (W W^*)^{-1}$, W^* — сопряженная W матрица.
Если обозначим

$$W^+ = \begin{pmatrix} W_1^+ \\ W_2^+ \\ \vdots \\ W_{m_1 m}^+ \end{pmatrix}, \qquad B_k = \begin{pmatrix} b_1^{[k]} \\ b_2^{[k]} \\ \vdots \\ b_m^{[k]} \end{pmatrix}$$

то (2.17) можно записать в следующем виде:

$$
\left\| \begin{matrix} \begin{pmatrix} b_1^{[k]} \\ b_2^{[k]} \\ \vdots \\ b_m^{[k]} \end{pmatrix} K_1 \\ \begin{pmatrix} b_1^{[k]} \\ b_2^{[k]} \\ \vdots \\ b_m^{[k]} \end{pmatrix} K_2 \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} b_1^{[k]} \\ b_2^{[k]} \\ \vdots \\ b_m^{[k]} \end{pmatrix} K_{m_1} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} W_1^+ \\ W_2^+ \\ \vdots \\ W_m^+ \\ W_{m+1}^+ \\ W_{m+2}^+ \\ \vdots \\ W_{m+m}^+ \\ \vdots \\ W_{(m_1-1)m+1}^+ \\ W_{(m_1-1)m+2}^+ \\ \vdots \\ W_{(m_1-1)m+m}^+ \end{matrix} \right\| M_{(m_1)} d_1^{[k-1]} \qquad (2.18)
$$

Из (2.18) следует вид для «растянутой» матрицы

$$
B_k = (b_1^{[k]}, b_2^{[k]}, \ldots, b_m^{[k]})
$$

в следующем виде:

$$
(b_1^{[k]}, b_2^{[k]}, \ldots, b_m^{[k]}) \begin{pmatrix} (K_1, K_2, \ldots, K_{m_1}) & & 0 \\ & (K_1, K_2, \ldots, K_{m_1}) & \\ 0 & & (K_1, K_2, \ldots, K_{m_1}) \end{pmatrix} =
$$

$$
= (W_1^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]}, W_{m+1}^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]}, \ldots, W_{(m_1-1)m+1}^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]}; \qquad (2.19)
$$

$$
W_2^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]}, W_{m+2}^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]}, \ldots, W_{(m_1-1)m+2}^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]}; \ldots;
$$

$$
W_m^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]}, W_{m+2}^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]}, \ldots, W_{(m_1-1)m+m}^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]})
$$

Преобразуя (2.10'), как (2.9'), получим

$$
\Omega \begin{pmatrix} B_k K_{m_1+1} \\ B_k K_{m_1+2} \\ \vdots \\ B_k K_{m_1+m_2} \end{pmatrix} = M_{(m_1+m_2)} d_2^{[k-1]} \qquad (2.20)
$$

где

$$
d_2^{[k-1]} = D_{m_1+1}^{[k-1]} + (A + HB_0) D_{m_1+2}^{[k-1]} + \cdots + (A + HB_0)^{m_2-1} D_{m_1+m_2}^{[k-1]} \qquad (2.20')
$$

Ω — матрица порядка $m_2 \times m_2 m$, имеющая вид

$$
\Omega = \left\| \begin{matrix} M_{m_1+1}H & M_{m_1+2}H & M_{m_1+3}H & \cdots & M_{m_1+m_2}H \\ M_{m_1+2}H & M_{m_1+3}H & M_{m_1+4}H & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\;\vdots\;\vdots & \vdots \\ M_{m_1+m_2-2}H & M_{m_1+m_2-1}H & M_{m_1+m_2}H & \cdots & 0 \\ M_{m_1+m_2-1}H & M_{m_1+m_2}H & 0 & \cdots & 0 \\ M_{m_1+m_2}H & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \right\| \qquad (2.20')
$$

$$\sum_{i=1}^{m} |M_{m_1+m_2} H_i| \neq 0 \text{ (из условия управляемости).} \tag{2.21}$$

В силу условия (2.21) равенство (2.20) решаем посредством псевдообратной матрицы Ω^+.

$$\begin{pmatrix} B_k K_{m_1+1} \\ B_k K_{m_1+2} \\ \vdots \\ B_k K_{m_1+m_2} \end{pmatrix} = \Omega^+ M_{(m_1+m_2)} d_2^{[k-1]} \tag{2.22}$$

здесь $\Omega^+ = \Omega(\Omega\Omega^*)^{-1}$, Ω^* — сопряженная Ω матрица,

$$\Omega^+ = \begin{pmatrix} \Omega_1^+ \\ \vdots \\ \Omega_{m_2 m}^+ \end{pmatrix}$$

Из (2.22) получается аналогия (2.19)

$$(b_1^{[k]}, b_2^{[k]}, \dots, b_m^{[k]}) \begin{pmatrix} (K_{m_1+1}, K_{m_1+2}, \dots, K_{m_1+m_2}) & & 0 \\ & (K_{m_1+1}, K_{m_1+2}, \dots, K_{m_1+m_2}) & \\ & & \ddots \\ 0 & & (K_{m_1+1}, K_{m_1+2}, \dots, K_{m_1+m_2}) \end{pmatrix} =$$

$$= (\Omega_1^+ M_{(\alpha)} d_2^{[k-1]},\ \Omega_{m+1}^+ M_{(\alpha)} d_2^{[k-1]}, \dots, \Omega_{(m_2-1)m+1}^+;$$

$$\Omega_2^+ M_{(\alpha)} d_2^{[k-1]},\ \Omega_{m+2}^+ M_{(\alpha)} d_2^{[k-1]}, \dots, \Omega_{(m_2-1)m+2}^+ M_{(\alpha)} d_2^{[k-1]}; \dots;$$

$$\Omega_m^+ M_{(\alpha)} d_2^{[k-1]}, \Omega_{m+m}^+ d_2^{[k-1]}, \dots \Omega_{(m_2-1)m+m}^+ M_{(\alpha)} d_2^{[k-1]}) \tag{2.23}$$

Преобразуя равенство (2.11′), получим

$$\operatorname{diag}(J(\mu_0), \Gamma_{m_2}, \Lambda_1) Q_{(n)}^{[k]} + MHB_k K_{(n)} = Q_{(n)}^{[k]} \Lambda_1 + MD_{(n)}^{[k-1]} \tag{2.24}$$

где

$$Q_{(n)}^{[k]} = MK_{(n)}^{[k]} = (Q_{\alpha+1}^{[k]}, \dots, Q_n^{[k]}),\ Q_\sigma^{[k]} = \begin{pmatrix} q_{1\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{n\sigma}^{[k]} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \alpha = m_1 + m_2 \\ \sigma = \alpha + 1, \dots, n \end{matrix}$$

Система (2.24) распадается на следующие подсистемы:

$$\operatorname{diag}(J(\mu_\sigma), \Gamma_{m_2}, \Lambda_1) Q_\sigma^{[k]} + MHB_k K_\sigma = \mu_\sigma Q_\sigma^{[k]} + MD_\sigma^{[k-1]} \tag{2.25}$$

$$\sigma = \alpha + i,\ i = 1, 2, \dots, m_3,\ \mu_\sigma = \mu_{\alpha+i} = \mu_i$$

Представим матрицу $Q_\sigma^{[k]}$ в блочном виде

$$Q_\sigma^{[k]} = (q_{1\sigma}^{[k]}, \dots, q_{m_1\sigma}^{[k]};\ q_{m_1+1,\sigma}^{[k]}, \dots, q_{\alpha\sigma}^{[k]};\ q_{\alpha+1,\sigma}^{[k]}, \dots, q_{n\sigma}^{[k]})'$$

(штрих означает транспонирование), тогда (2.25) распадается на следующие подсистемы:

$$J_{m_1}(\lambda_0)\begin{pmatrix} q_{1\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{m_1\sigma}^{[k]} \end{pmatrix} + M_{(m_1)}HB_kK_\sigma = \mu_\sigma\begin{pmatrix} q_{1\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{m_1\sigma}^{[k]} \end{pmatrix} + M_{(m_1)}D_\sigma^{[k-1]} \qquad (2.25')$$

$$\Gamma_{m_2}\begin{pmatrix} q_{m_1+1,\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{m_1+m_2,\sigma}^{[k]} \end{pmatrix} + M_{(m_1+m_2)}HB_kK_\sigma = \mu_\sigma\begin{pmatrix} q_{m_1+1,\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{m_1+m_2,\sigma}^{[k]} \end{pmatrix} + M_{(m_1+m_2)}D_\sigma^{[k-1]} \qquad (2.25'')$$

$$\Lambda_\alpha\begin{pmatrix} q_{\alpha+1,\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{n\sigma}^{[k]} \end{pmatrix} + M_{(n)}HB_kK_\sigma = \mu_\sigma\begin{pmatrix} q_{\alpha+1,\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{n\sigma}^{[k]} \end{pmatrix} + M_{(n)}D_\sigma^{[k-1]} \qquad (2.25''')$$

Решение системы (2.25''') приведено в [5], где показано, что равенство (2.25''') распадается на m_3^2 алгебраических уравнений

$$\mu_s q_{s\sigma}^{[k]} + M_s HB_kK_\sigma = \mu_\sigma q_{s\sigma}^{[k]} + M_s D_\sigma^{[k-1]} \qquad (2.26)$$

$$\mu_\sigma = \mu_{\alpha+i} = \mu_i; \quad \sigma = \alpha+1,\dots, n; \quad s = \alpha+1,\dots, n; \quad i = 1, 2,\dots, m_3$$

При $s = \sigma$ имеем

$$M_s HB_kK_\sigma = M_s D_\sigma^{[k-1]} \qquad (2.27)$$

Из условия управляемости следует, что

$$\sum_{i=1}^{m} |M_s H_i| \neq 0, \quad s = \alpha+1,\dots, n \qquad (2.28)$$

В силу (2.28) из (2.27) следует [5]

$$(b_1^{[k]}, b_2^{[k]},\dots, b_m^{[k]})\begin{pmatrix} (K_{\alpha+1}, K_{\alpha+2},\dots, K_n) & & 0 \\ & (K_{\alpha+1}, K_{\alpha+2},\dots, K_n) & \\ & & \vdots \\ 0 & & (K_{\alpha+1}, K_{\alpha+2},\dots, K_n) \end{pmatrix} =$$

$$= (M_{\alpha+1}D_{\alpha+1}^{[k-1]}, M_{\alpha+2}D_{\alpha+2}^{[k-1]},\dots, M_nD_n^{[k-1]})F^+ \qquad (2.29)$$

Здесь [5]

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}, \quad F_\nu = \mathrm{diag}(M_{\alpha+1}H_\nu,\dots, M_nH_\nu), \quad \nu = 1, 2,\dots, m$$

$F^+ = (F^*F)^{-1}F^*$, F^* — сопряженная F-матрица.

Объединяя выражения (2.19), (2.23), (2.29) в одно матричное соотношение и разрешая относительно $(b_1^{[k]}, b_2^{[k]},\dots, b_m^{[k]})$, получим

$$(b_1^{[k]}, b_2^{[k]},\dots, b_m^{[k]}) = [W_1^+M_{(m_1)}d_1^{[k-1]}, W_{m+1}^+M_{(m_1)}d_1^{[k-1]},\dots, W_{(m_1-1)m+1}^+M_{(m_1)}d_1^{[k-1]}$$

$$W_2^+M_{(m_1)}d_1^{[k-1]}, W_{m+2}^+M_{(m_1)}d_1^{[k-1]},\dots, W_{(m_1-1)m+2}^+M_{(m_1)}d_1^{[k-1]};\dots;$$

$$W_m^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]},\ W_{m+m}^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]}, \ldots,\ W_{(m_1-1)m+m}^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]};$$

$$\Omega_1^+ M_{(\sigma)} d_2^{[k-1]},\ \Omega_{m+1}^+ M_{(\sigma)} d_2^{[k-1]}, \ldots,\ \Omega_{(m_2-1)m+1}^+ M_{(\sigma)} d_2^{[k-1]};$$

$$\Omega_2^+ M_{(\sigma)} d_2^{[k-1]},\ \Omega_{m+2}^+ M_{(\sigma)} d_2^{[k-1]}, \ldots,\ \Omega_{(m_2-1)m+2}^+ M_{(\sigma)} d_2^{[k-1]}; \ldots; \tag{2.30}$$

$$\Omega_m^+ M_{(\sigma)} d_2^{[k-1]},\ \Omega_{m+m}^+ M_{(\sigma)} d_2^{[k-1]}, \ldots,\ \Omega_{(m_2-1)m+m}^+ M_{(\sigma)} d_2^{[k-1]};$$

$$(M_{\sigma+1} D_{\sigma+1}^{[k-1]},\ M_{\sigma+2} D_{\sigma+2}^{[k-1]}, \ldots,\ M_n D_n^{[k-1]}) F^*] \operatorname{diag}(M, M, \ldots, M)$$

Подставим выражения $(A + HB_0 - \mu_0 E)$ и $B_k(K_1, \ldots, K_{m_1})$ из (2.13) и (2.18) в (2.9′), затем умножая полученное равенство слева на матрицу M, имеем:

$$\operatorname{diag}(\Gamma_{m_1}, J(-\mu_0), \Lambda_1 - \mu_0 E_{m_2})\, Q_{(m_1)}^{[k]} +$$

$$+ MH \left[\begin{pmatrix} W_1^+ \\ W_2^+ \\ \vdots \\ W_m^+ \end{pmatrix} M_{(m_1)} d_1^{[k-1]},\ \begin{pmatrix} W_{m+1}^+ \\ W_{m+2}^+ \\ \vdots \\ W_{m+m}^+ \end{pmatrix} M_{(m_1)} d_1^{[k-1]}, \ldots,\right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} W_{(m_1-1)m+1}^+ \\ W_{(m_1-1)m+2}^+ \\ \vdots \\ W_{(m_1-1)m+m}^+ \end{pmatrix} M_{(m_1)} d_1^{[k-1]} \right] = Q_{(m_1)}^{[k]} \Gamma_{m_1} + MD_{(m_1)}^{[k-1]}$$

здесь

$$Q_{(m_1)}^{[k]} = MK_{(m_1)}^{[k]} = (Q_1^{[k]}, \ldots,\ Q_{m_1}^{[k]}),\quad Q_\sigma^{[k]} = \begin{pmatrix} q_{1\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{n\sigma}^{[k]} \end{pmatrix},\quad \sigma = 1, 2, \ldots, m_1$$

Из полученного равенства нетрудно получить соотношения, последовательно определяющие столбцы матрицы $Q_{(m_1)}^{[k]}$

$$\operatorname{diag}(\Gamma_{m_1}, J(-\mu_0), \Lambda_1 - \mu_0 E_{m_2})\, Q_1^{[k]} = M \left[D_1^{[k-1]} - H \begin{pmatrix} W_1^+ \\ W_2^+ \\ \vdots \\ W_m^+ \end{pmatrix} M_{(m_1)} d_1^{[k-1]} \right] \tag{2.31}$$

$$\operatorname{diag}\Gamma_{m_1}, J(-\mu_0), \Lambda_1 - \mu_0 E_{m_2})\, Q_\sigma^{[k]} = Q_{\sigma-1}^{[k]} +$$

$$+ M \left[D_\sigma^{[k-1]} - H \begin{pmatrix} W_{(\sigma-1)m+1}^+ \\ W_{(\sigma-1)m+2}^+ \\ \vdots \\ W_{(\sigma-1)m+m}^+ \end{pmatrix} M_{(m_1)} d_1^{[k-1]} \right] \tag{2.32}$$

$$\sigma = 2, 3, \ldots, m_1$$

Равенство (2.31) однозначно определяет все элементы первого столбца матрицы $Q_{(m_1)}^{[k]}$, кроме первого элемента $q_{11}^{[k]}$. В выборе этого элемента также, как и в выборе остальных элементов первой строки матрицы $Q_{(m_1)}^{[k]}$, сохраняется известный произвол. От функций $q_{1i}^{[k]}$ $(i = 1, 2, \dots, m_1)$ требуется лишь дифференцируемость любое нужное число раз. Остальные столбцы матрицы $Q_{(m_1)}^{[k]}$ определяются равенствами (2.32).

С матрицей $Q_{(m_1)}^{[k]}$ матрица $K_{(m_1)}^{[k]}$ связана соотношением

$$K_{(m_1)}^{[k]} = KQ_{(m_1)}^{[k]} \tag{2.33}$$

Теперь подставляя выражения $(A + HB_0)$ и $B_k(k_{m_1+1}, \dots, k_{m_1+m_2})$ из (2.12) и (2.22) в (2.10'), преобразуя как (2.9'), находим

$$\operatorname{diag}(J_{m_1}(\mu_0), \Gamma_{m_2}, \Lambda_1)\, Q_{m_1+1}^{[k]} = M\left[D_{m_1+1}^{[k-1]} - H\begin{pmatrix}\Omega_1^+ \\ \Omega_2^+ \\ \vdots \\ \Omega_m^+\end{pmatrix} M_{(\sigma)} d_2^{[k-1]}\right] \tag{2.34}$$

$$\operatorname{diag}(J_{m_1}(\mu_0), \Gamma_{m_2}, \Lambda_1)\, Q_\sigma^{[k]} = Q_{\sigma-1}^{[k]} + M\left[D_\sigma^{[k-1]} - H\begin{pmatrix}\Omega_{(\sigma-1)m+1}^+ \\ \Omega_{(\sigma-1)m+2}^+ \\ \vdots \\ \Omega_{(\sigma-1)m+m}^+\end{pmatrix} M_{(\sigma)} d_\sigma^{[k-1]}\right] \tag{2.35}$$

Здесь

$$Q_{(\sigma)}^{[k]} = MK_{(\sigma)}^{[k]} = (Q_{m_1+1}^{[k]}, \dots, Q_{m_1+m_2}^{[k]}), \qquad Q_\sigma^{[k]} = \begin{pmatrix} q_{1\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{n\sigma}^{[k]} \end{pmatrix}$$

$$\sigma = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2$$

Равенство (2.34) однозначно определяет все элементы первого столбца матрицы $Q_{(m_1+m_2)}^{[k]}$, кроме $(m_1 + 1)$-го элемента. В выборе этого элемента также, как и в выборе остальных элементов $(m_1 + 1)$-ой строки матрицы $Q_{(m_1+m_2)}^{[k]}$, сохраняется известный произвол. От функций $q_{m_1+1,\sigma}^{[k]}$ $(\sigma = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2)$ требуется лишь дифференцируемость любое нужное число раз. Остальные столбцы матрицы $Q_{(m_1+m_2)}^{[k]}$ представляются равенствами (2.35).

С $Q_{(m_1+m_2)}^{[k]}$ матрица $K_{(m_1+m_2)}^{[k]}$ связана соотношением

$$K_{(m_1+m_2)}^{[k]} = KQ_{(m_1+m_2)}^{[k]} \tag{2.36}$$

Из статьи [5] имеем, что

$$B_\sigma K_\sigma = \begin{pmatrix}(M_\sigma H_1)^* \\ (M_\sigma H_2)^* \\ \vdots \\ (M_\sigma H_m)^*\end{pmatrix} \frac{M_\sigma D_\sigma^{[k-1]}}{\sum\limits_{i=1}^{m} |M_\sigma H_i|^2}, \qquad (\sigma = \alpha + 1, \dots, n) \tag{2.37}$$

При $\sigma \neq s$ из (2.26) с учетом (2.37) имеем

$$q_{\sigma s}^{[k]} = \frac{M_\sigma}{\mu_s - \mu_\sigma} P_{\sigma s} \quad (\sigma \neq s;\ \sigma,\ s = \alpha + 1, \ldots, n) \tag{2.38}$$

где

$$P_s = \left[E_n - H \begin{pmatrix} (M_s H_1)^* \\ (M_s H_2)^* \\ \vdots \\ (M_s H_m)^* \end{pmatrix} \frac{M_s}{\sum\limits_{i=1}^{m} |M_s H_i|^2} \right] D_s^{[k-1]}$$

Подставим (2.37) в (2.25′) и (2.25″). Учитывая, что $[J_{m_1}(\mu_0) - \mu_s E_{m_1}]$ и $J_{m_2}(-\mu_s)$ — невырожденные матрицы (см. усл. (1.4)), имеем

$$\begin{pmatrix} q_{1s}^{[k]} \\ q_{2s}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{m_1 s}^{[k]} \end{pmatrix} = [J_{m_1}(\mu_0) - \mu_s E_{m_1}]^{-1} M_{(m_1)} P_s, \quad (s = \alpha + 1, \ldots, n) \tag{2.39}$$

$$\begin{pmatrix} q_{m_1+1,\, s}^{[k]} \\ q_{m_1+2,\, s}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{\alpha,\, s}^{[k]} \end{pmatrix} = [J_{m_2}(-\mu_s)]^{-1} M_{(m_1+m_2)} P_s, \quad (s = \alpha + 1, \ldots, n) \tag{2.40}$$

Следовательно, столбцы матрицы $Q_{(n)}^{[k]} = MK_{(n)}^{[k]}$ определяются равенствами (2.38), (2.39), (2.40), кроме элементов $q_{ss}^{[k]}$ $(s = \alpha + 1, \ldots, n)$.

От функций $q_{ss}^{[k]}$ требуется дифференцируемость любое нужное число раз. С матрицей $Q_{(n)}^{[k]}$ матрица $K_{(n)}^{[k]}$ связана соотношением

$$K_{(n)}^{[k]} = KQ_{(n)}^{[k]} \tag{2.41}$$

Из равенств (2.33), (2.36), (2.41) следует

$$K^{[k]} = KQ^{[k]} \tag{2.42}$$

где

$$Q^{[k]} = (Q_{(m_1)}^{[k]},\ Q_{(m_1+m_2)}^{[k]},\ Q_{(n)}^{[k]})$$

Таким образом, соотношения (2.14), (2.30), (2.42) позволяют определить формальные разложения $\bar{K}$ и B. Сохраняя в этих формальных разложениях конечное число первых членов, можно получить приближенные выражения для матрицы $\bar{K}$ и B.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 19 III 1979

Ֆ. Պ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ՈՉ-ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ՍԻՆԹԵԶԸ ՆԱԽԱՊԵՍ ՏՐՎԱԾ ՍՊԵԿՏՐՈՎ

Ամփոփում

Դիտարկված է Բազմաչափ կառավարումով սիստեմների սինթեզի խնդիր նախապես տրված սպեկտրով այն դեպքում, երբ նախապես տրված ֆունկցիաներից մի քանիսը նույնաբար հավասար են զրոյի, մի քանիսը համընկնում են միմյանց հետ և տարբեր են զրոյից, իսկ մնացածները տարբեր են նշված ֆունկցիաներից և նրանց տարբերությունների մոդուլները փոքր չեն, քան որևէ դրական հաստատուն մեծություն։

SYNTHESIS OF NON-STATIONARY SYSTEMS WITH A PRE-SPECIFIED SPECTRUM

F. P. GRIGORIAN

Summary

The problem of a controleable polydimensional synthesis of systems with a pre-specified spectrum in the case, where some of the given functions are identically equal to zero, some coinside with each other and are different from zero, the rest differ from the above two cases, and the moduli of their differences are not less than any given positive constant value.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зубов В. И.* Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. Л., «Судостроение», 1966.
2. *Wonham W. M.* On Pole Assignment in Multi Input Controllable Linear Systems. IEEE, Trans. Automatic Control, December, 1967, vol. AC—12, p.p. 660—665.
3. *Гальперин Е. А.* Синтез линейных управлений и стационарной линейной системы. Изв. АН СССР, «Техническая кибернетика», 1968, № 4.
4. *Davison E. Y.* On Pole Assigoment in Multivariable Linear Systems. IEEE, Trans. Automatic Control, December, 1968, vol. AC—13, p.p. 747.
5. *Абгарян К. А.* Один подход к решению задач анализа и синтеза линейных систем. Докл. АН СССР, 1977, т. 232, № 5.
6. *Абгарян К. А., Григорян Ф. П.* К синтезу линейных нестационарных систем. Методы теории дифференциальных уравнений и их приложения. М., Тр. МАИ, 1977, вып. 419.
7. *Анжело Г. Д.* Линейные системы с переменными параметрами. Анализ и синтез. М., «Машиностроение», 1974.
8. *Абгарян К. А.* Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. М., «Наука», 1973.
9. *Кириченко Н. Ф.* Некоторые задачи устойчивости и управляемости движения. Изд-во Киевского университета, 1972.
10. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., «Наука», 1967.