ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1979

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 4, 1979 Механика

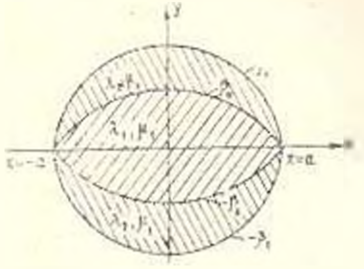
А. А. АРУТЮНЯН

ОБ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СОСТАВНОЙ УПРУГОЙ ЛУНОЧКИ

В работах [1—4] методом Фурье в биполярной координатной системе получено решение первой основной задачи теории упругости однородного и составного тела для луночной области.

В настоящей работе с помощью биполярных координат и аппарата интеграла Фурье рассмотрена плоская задача теории упругости для нагруженного тела, составленного из трех соединенных между собой по боковым поверхностям призматических тел, сечения которых ограничены дугами пересекающихся окружностей.

В биполярной координатной системе первый материал с коэффициентами Ляме λ_1 и μ_1 занимает область $(-\beta_0<\beta<\beta_0)$, второй с коэффициентами Ляме λ_2 и μ_2 — области $(\beta_0<\beta<\beta_1)$ и $(-\beta_1<\beta<-\beta_0)$, причем координата α внутри рассматриваемой области изменяется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ (фиг. 1).



Фиг. 1.

Между материалами вдоль линии $\beta=\pm\beta_0$ осуществляется полное сцепление. Составное тело нагружается по краям $\beta=\pm\beta_1$. Предполагаем, что эти нагружения одинаковые. При этом в силу симметрии можно рассматривать половину рассматриваемой области.

Задача решается при помощи функции напряжений $\Phi_k(\alpha, \beta)$ $(k=1, 2)$, каждая из которых удовлетворяет бигармоническому уравнению [1]

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}-2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)(g\Phi_k) \quad (k=1, 2) \qquad (1.1)$$

где $g=(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)/a$ характеризует масштаб преобразования, a — параметр биполярных координат.

Удобно представить бигармоническую функцию $\Phi_k(\alpha, \beta)$ $(k=1, 2)$ интегралом Фурье такого вида:

$$g\Phi_k(\alpha, \beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_k(t, \beta)\, e^{-i\alpha t}\, dt \quad (k=1, 2) \qquad (1.2)$$

где

$$f_1(t, \beta) = A_1(t)\operatorname{ch} t(\beta_0 - \beta)\cos\beta + B_1(t)\operatorname{ch} t\beta\cos(\beta_0 - \beta) +$$
$$+ C_1(t)\operatorname{sh} t(\beta_0 - \beta)\sin\beta + D_1(t)\operatorname{sh} t\beta\sin(\beta_0 - \beta) \tag{1.3}$$
$$f_2(t, \beta) = A_2(t)\operatorname{ch} t(\beta_1 - \beta)\cos(\beta - \beta_0) + B_2(t)\operatorname{ch} t(\beta - \beta_0)\cos(\beta_1 - \beta) +$$
$$+ C_2(t)\operatorname{sh} t(\beta_1 - \beta)\sin(\beta - \beta_0) + D_2(t)\operatorname{sh} t(\beta - \beta_0)\sin(\beta_1 - \beta)$$

Неизвестные функции интегрирования $A_k(t)$, $B_k(t)$, $C_k(t)$ и $D_k(t)$ определяются из следующих граничных условий:

$$v_1(\alpha, \beta)\big|_{\beta=0} = 0; \qquad \tau^{(1)}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta)\big|_{\beta=0} = 0$$
$$g\Phi_2(\alpha, \beta)\big|_{\beta=\beta_1} = \varphi_1(\alpha), \qquad \frac{\partial(g\Phi_2(\alpha, \beta))}{\partial\beta}\bigg|_{\beta=\beta_1} = \varphi_2(\alpha) \tag{1.4}$$
$$g\Phi_1(\alpha, \beta)\big|_{\beta=\beta_0} = g\Phi_2(\alpha, \beta)\big|_{\beta=\beta_0}; \qquad \frac{\partial(g\Phi_1(\alpha, \beta))}{\partial\beta}\bigg|_{\beta=\beta_0} = \frac{\partial(g\Phi_2(\alpha, \beta))}{\partial\beta}\bigg|_{\beta=\beta_0}$$
$$u_1(\alpha, \beta)\big|_{\beta=\beta_0} = u_2(\alpha, \beta)\big|_{\beta=\beta_0}; \qquad v_1(\alpha, \beta)\big|_{\beta=\beta_0} = v_2(\alpha, \beta)\big|_{\beta=\beta_0}$$

где функции $\varphi_k(\alpha)$ $(k = 1, 2)$ легко выражаются через заданные граничные значения $\Phi_k(\alpha, \beta)$ и $\partial\Phi_k(\alpha, \beta)/\partial\beta$. Предполагается, что $\varphi_k(\alpha)$ $(k = 1, 2)$ удовлетворяют условиям разложимости в интеграл Фурье.

Перемещения $u_k(\alpha, \beta)$ и $v_k(\alpha, \beta)$ $(k = 1, 2)$ выражаются через $\Phi_k(\alpha, \beta)$ $(k = 1, 2)$

$$u_k(\alpha, \beta) = \frac{g}{2\mu_k}\left(\frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k}\frac{\partial\Phi_k(\alpha, \beta)}{\partial\alpha} - \frac{\partial\Psi_k(\alpha, \beta)}{\partial\beta}\right) \tag{1.5}$$
$$v_k(\alpha, \beta) = \frac{g}{2\mu_k}\left(\frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k}\frac{\partial\Phi_k(\alpha, \beta)}{\partial\beta} + \frac{\partial\Psi_k(\alpha, \beta)}{\partial\alpha}\right) \quad (k = 1, 2)$$

где $\Psi_k(\alpha, \beta)$ $(k = 1, 2)$ — бигармоническая функция, связанная с $\Phi_k(\alpha, \beta)$ $(k = 1, 2)$ формулой

$$g\Psi_k(\alpha, \beta) = \frac{\lambda_k + 2\mu_k}{2(\lambda_k + \mu_k)}\iint\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - 1\right)(g\Phi_k)\,d\alpha\,d\beta \quad (k = 1, 2) \tag{1.6}$$

Подставляя (1.2) в (1.6) и учитывая (1.3), для бигармонической функции $g\Psi_k(\alpha, \beta)$ получаем следующие выражения:

$$g\Psi_k(\alpha, \beta) = \frac{i(\lambda_k + 2\mu_k)}{\sqrt{2\pi}(\lambda_k + \mu_k)}\int_{-\infty}^{\infty} G_k(t, \beta)e^{-it\alpha}\,dt \quad (k = 1, 2) \tag{1.7}$$

где

$$G_1(t, \beta) = A_1(t)\operatorname{sh} t(\beta_0 - \beta)\cos\beta - B_1(t)\operatorname{sh} t\beta\cos(\beta_0 - \beta) +$$
$$+ C_1(t)\operatorname{ch} t(\beta_0 - \beta)\sin\beta - D_1(t)\operatorname{ch} t\beta\sin(\beta_0 - \beta) \tag{1.8}$$

$$G_2(t,\beta) = A_2(t)\,\mathrm{sh}\,t(\beta_1-\beta)\cos(\beta-\beta_0) - B_2(t)\,\mathrm{sh}\,t(\beta-\beta_0)\cos(\beta_1-\beta) +$$
$$+ C_2(t)\,\mathrm{ch}\,t(\beta_1-\beta)\sin(\beta-\beta_0) - D_2(t)\,\mathrm{ch}\,t(\beta-\beta_0)\sin(\beta_1-\beta)$$

Из первых шести граничных условий (1.4) для неизвестных функций интегрирования $A_k(t)$, $B_k(t)$, $C_k(t)$ и $D_k(t)$ $(k=1,2)$ получаем следующие выражения через неизвестные функции $P_k(t)$ $(k=1,2)$:

$$A_1(t) = P_1(t)\frac{2t\sin\gamma_1}{\Delta_1(t)} - P_2(t)\frac{\mathrm{sh}\,2t\gamma_1\sin\gamma_1}{\Delta_1(t)\Delta_3(t)}$$

$$B_1(t) = P_1(t)\frac{2\,\mathrm{sh}\,t\gamma_1}{\Delta_1(t)} + P_2(t)\frac{\mathrm{sh}\,t\gamma_1\sin 2\gamma_1}{\Delta_1(t)\Delta_3(t)}$$

$$C_1(t) = -P_1(t)\frac{2\sin\gamma_1}{\Delta_1(t)} - P_2(t)\frac{\sin 2\gamma_1\sin\gamma_1}{\Delta_1(t)\Delta_3(t)}$$

$$D_1(t) = P_1(t)\frac{2t\,\mathrm{sh}\,t\gamma_1}{\Delta_1(t)} - P_2(t)\frac{\mathrm{sh}\,2t\gamma_1\,\mathrm{sh}\,t\gamma_1}{\Delta_1(t)\Delta_3(t)}$$

$$A_2(t) = P_1(t)\frac{\mathrm{ch}\,t\gamma_2}{\Delta_4(t)} - \bar{\varphi}_1(t)\frac{\cos\gamma_2}{\Delta_4(t)} \tag{1.9}$$

$$B_2(t) = -P_1(t)\frac{\cos\gamma_2}{\Delta_4(t)} + \bar{\varphi}_1(t)\frac{\mathrm{ch}\,t\gamma_2}{\Delta_4(t)}$$

$$C_2(t) = P_1(t)\left(\frac{t\,\mathrm{ch}\,t\gamma_2}{\Delta_2(t)} + \frac{(t^2+1)\,\mathrm{sh}\,t\gamma_2\sin 2\gamma_2}{2\Delta_2(t)\Delta_4(t)}\right) +$$
$$+ P_2(t)\frac{\mathrm{sh}\,t\gamma_2}{\Delta_2(t)} - \bar{\varphi}_1(t)\left(\frac{t\cos\gamma_2}{\Delta_2(t)} + \frac{(t^2+1)\,\mathrm{sh}\,2t\gamma_2\sin\gamma_2}{2\Delta_2(t)\Delta_4(t)}\right) +$$
$$+ \bar{\varphi}_2(t)\frac{t\sin\gamma_2}{\Delta_2(t)}$$

$$D_2(t) = -P_1(t)\left(\frac{t\cos\gamma_2}{\Delta_2(t)} + \frac{(t^2+1)\,\mathrm{sh}\,2t\gamma_2\sin 2\gamma_2}{2\Delta_2(t)\Delta_4(t)}\right) -$$
$$- P_2(t)\frac{t\sin\gamma_2}{\Delta_2(t)} + \bar{\varphi}_1(t)\left(\frac{t\,\mathrm{ch}\,t\gamma_2}{\Delta_2(t)} + \frac{(t^2+1)\,\mathrm{sh}\,t\gamma_2\sin 2\gamma_2}{2\Delta_2(t)\Delta_4(t)}\right) -$$
$$- \bar{\varphi}_2(t)\frac{\mathrm{sh}\,t\gamma_2}{\Delta_2(t)}$$

$$\bar{\varphi}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_k(\alpha)\,e^{it\alpha}\,d\alpha \qquad (k=1,\ 2)$$

$$\Delta_1(t) = \mathrm{sh}\,2t\gamma_1 + t\sin 2\gamma_1; \qquad \Delta_2(t) = \mathrm{sh}^2\,t\gamma_2 - t^2\sin^2\gamma_2$$
$$\Delta_3(t) = \mathrm{sh}^2\,t\gamma_1 + \sin^2\gamma_1; \qquad \Delta_4(t) = \mathrm{sh}^2\,t\gamma_2 + \sin^2\gamma_2 \tag{1.10}$$

$$\gamma_1 = \beta_0; \qquad \gamma_2 = \beta_1 - \beta_0$$

При удовлетворении последних двух условий (1.4) — условий равенства перемещений — получаем следующую характеристическую систему сингулярных интегральных уравнений для определения неизвестных функций:

$$M_1(t)\,X_1(t)+M_2(t)\,X_2(t)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta'(\tau)\,X_1(\tau)}{\theta(\tau)-\theta(t)}\,d\tau-N_1(t)$$

$$M_2(-t)\,X_1(t)+M_1(-t)\,X_2(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta'(\tau)\,X_2(\tau)}{\theta(\tau)-\theta(t)}\,d\tau-N_2(t) \tag{1.11}$$

где

$$e^{-t(\beta_0-\pi)}X_1=\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1+a_{21}\right)P_1+a_{22}P_2+a_{23}\bar{\varphi}_1+a_{24}\bar{\varphi}_2$$

$$e^{t(\beta_0+\pi)}X_2=\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1-a_{21}\right)P_1-a_{22}P_2-a_{23}\bar{\varphi}_1+a_{24}\bar{\varphi}_2$$

$$M_1(t)=\frac{1}{(h_1+2h_2-2)a_{22}}\Bigg(a_{11}a_{22}+$$

$$+\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1+a_{12}\right)\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1-a_{21}\right)\Bigg)$$

$$e^{-2t\beta_0}M_2(t)=\frac{1}{(h_1+2h_2-2)a_{22}}\Bigg(a_{11}a_{22}-$$

$$-\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1+a_{12}\right)\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1+a_{21}\right)\Bigg) \tag{1.12}$$

$$e^{-t(\beta_0-\pi)}N_1(t)=M_3(t)\,\bar{\varphi}_1+M_4(t)\,\bar{\varphi}_2$$

$$e^{t(\beta_0+\pi)}N_2(t)=M_3(-t)\,\bar{\varphi}_1+M_4(-t)\,\bar{\varphi}_2$$

$$M_3(t)=a_{13}-\frac{a_{23}}{a_{22}}\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1+a_{12}\right)$$

$$M_4(t)=a_{14}-\frac{a_{24}}{a_{22}}\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1+a_{12}\right)$$

$$a_{11}=\frac{h_2}{\Delta_1}(t^2+1)\sin 2\gamma_1+\frac{1}{\Delta_2}(t^2+1)\,t\sin^2\gamma_2$$

$$a_{12}=\frac{h_2}{\Delta_1}(\operatorname{ch}2t\gamma_1+\cos 2\gamma_1)+\frac{1}{2\Delta_2}(\operatorname{sh}2t\gamma_2-t\sin 2\gamma_2)$$

$$a_{13}=-\frac{1}{\Delta_2}(t^2+1)\operatorname{sh}t\gamma_2\sin\gamma_2$$

$$a_{14} = \frac{1}{\Delta_2} (t \operatorname{ch} t\gamma_2 \sin \gamma_2 - \operatorname{sh} t\gamma_2 \cos \gamma_2) \tag{1.13}$$

$$a_{21} = \frac{h_2}{\Delta_1} (\operatorname{ch} 2t\gamma_1 - \cos 2\gamma_1) + \frac{1}{2\Delta_2} (\operatorname{sh} 2t\gamma_2 + t \sin 2\gamma_2)$$

$$a_{22} = \frac{h_2}{\Delta_1} \sin 2\gamma_1 + \frac{t}{\Delta_2} \sin^2 \gamma_2$$

$$a_{23} = -\frac{1}{\Delta_2} (t \operatorname{ch} t\gamma_2 \sin \gamma_2 + \operatorname{sh} t\gamma_2 \cos \gamma_2)$$

$$a_{24} = \frac{1}{\Delta_2} \operatorname{sh} t\gamma_2 \sin \gamma_2$$

$$\theta(t) = e^{2t\pi}$$

$$h_1 = \frac{1-\mu}{1-\nu_2}; \qquad h_2 = \frac{\mu(1-\nu_1)}{1-\nu_2} \tag{1.14}$$

$\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}$, ν_1 и ν_2 — коэффициенты Пуассона.

Решение системы сингулярных интегральных уравнений (1.11) в общем случае производится путем регуляризации, то есть приведением к интегральному уравнению Фредгольма второго рода [4—8]. Этот процесс более подробно приведен в работе [4].

После преобразований и упрощений получаем следующую регулярную систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно $P_k(t)$ $(k = 1, 2)$:

$$P_1(t) = \frac{\Delta_1(t)\Delta_2(t)}{(t^2+1)\Delta(t)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (H_{11}(t,\tau) P_1(\tau) + H_{12}(t,\tau) P_2(\tau))\, d\tau + W_1(t) \right)$$

$$P_2(t) = \frac{\Delta_1(t)\Delta_2(t)}{(t^2+1)\Delta(t)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (H_{21}(t,\tau) P_1(\tau) + H_{22}(t,\tau) P_2(\tau))\, d\tau + W_2(t) \right) \tag{1.15}$$

где

$$H_{11}(t,\tau) = \frac{\operatorname{sh}(t-\tau)\beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau)\pi} \left(\left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 \right) (t-\tau)(a_{21}(\tau) - a_{12}(t)) - \right.$$

$$\left. - a_{12}(t)\, a_{11}(\tau) - (t^2+1)\, a_{22}(t)\, a_{21}(\tau) \right) +$$

$$+ \frac{\operatorname{ch}(t-\tau)\beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau)\pi} \left(\left(\frac{h_1}{2} + h_2 - 1 \right) ((t^2+1)\, a_{22}(t) - a_{11}(\tau)) + \right.$$

$$+(t-\tau)\left(a_{12}(t)\,a_{21}(\tau)-\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1\right)^2\right)$$

$$H_{12}(t,\tau)=\frac{\operatorname{sh}(t-\tau)\beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau)\pi}\Bigg(\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1\right)^2+$$

$$+\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1\right)(t-\tau)\,a_{22}(\tau)-a_{12}(t)\,a_{12}(\tau)-(t^2+1)\,a_{22}(t)\,a_{22}(\tau)\Bigg)+$$

$$+\frac{\operatorname{ch}(t-\tau)\beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau)\pi}\left(\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1\right)(a_{12}(t)-a_{12}(\tau))+(t-\tau)\,a_{12}(t)\,a_{22}(\tau)\right)$$

$$H_{21}(t,\tau)=\frac{\operatorname{sh}(t-\tau)\beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau)\pi}\Bigg(a_{11}(t)\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1+a_{11}(\tau)\right)-$$

$$-(t^2+1)\left(\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1\right)^2-a_{21}(\tau)\right)\Bigg)+$$

$$+\frac{\operatorname{ch}(t-\tau)\beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau)\pi}\Bigg(\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1\right)(t^2+1)\,(a_{21}(\tau)-a_{21}(t))-$$

$$-(t-\tau)\,a_{11}(t)\,a_{21}(\tau)\Bigg)$$

$$H_{22}(t,\tau)=\frac{\operatorname{sh}(t-\tau)\beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau)\pi}(a_{11}(t)\,a_{12}(\tau)-(t^2+1)\,a_{21}(t)\,a_{22}(\tau))+$$

$$+\frac{\operatorname{ch}(t-\tau)\beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau)\pi}\Bigg(\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1\right)((t^2+1)\,a_{22}(\tau)-a_{11}(t))-$$

$$-(t-\tau)\,a_{11}(t)\,a_{22}(\tau)\Bigg) \tag{1.16}$$

$$W_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\Bigg(\frac{\operatorname{sh}(t-\tau)\beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau)\pi}\Bigg(\left(\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1\right)(t-\tau)-\right.$$

$$\left.-(t^2+1)\,a_{22}(t)\right)(a_{23}(\tau)\,\bar\varphi_1(\tau)+a_{24}(\tau)\,\bar\varphi_2(\tau))-$$

$$-a_{12}(t)\,(a_{13}(\tau)\,\bar\varphi_1(\tau)+a_{14}(\tau)\,\bar\varphi_2(\tau))\Bigg)+$$

$$+\frac{\operatorname{ch}(t-\tau)\beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau)\pi}\Bigg((t-\tau)\,a_{12}(t)\left(a_{23}(\tau)\bar\varphi_1(\tau)-a_{24}(\tau)\,\bar\varphi_2(\tau)\right)-$$

$$-\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1\right)(a_{13}(\tau)\,\bar\varphi_1(\tau)+a_{14}(\tau)\,\bar\varphi_2(\tau))\Bigg)\Bigg)d\tau+$$

$$+\left(\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1\right)(t^2+1)-ta_{11}(t)\right)\left(a_{23}(t)\bar{\varphi}_1(t)+a_{24}(t)\bar{\varphi}_2(t)\right)+$$

$$+ta_{21}(t)\left(a_{13}(t)\bar{\varphi}_1(t)+a_{14}(t)\bar{\varphi}_2(t)\right)$$

$$W_2(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sh}(t-\tau)\beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau)\pi}\left(-(t^2+1)\,a_{12}(t)\left(a_{23}(\tau)\bar{\varphi}_1(\tau)+a_{24}(\tau)\bar{\varphi}_2(\tau)\right)+\right.\right.$$

$$\left.+a_{11}(t)\left(a_{13}(\tau)\bar{\varphi}_1(\tau)+a_{14}(\tau)\bar{\varphi}_2(\tau)\right)\right)+$$

$$+\frac{\operatorname{ch}(t-\tau)\beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau)\pi}\left(\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1\right)(t^2+1)-\right.$$

$$\left.-(t-\tau)\,a_{11}(t)\left(a_{23}(\tau)\bar{\varphi}_1(\tau)+a_{24}(\tau)\bar{\varphi}_2(\tau)\right)\right)d\tau+$$

$$+\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1\right)(t^2+1)\left(a_{13}(t)\bar{\varphi}_1(t)+a_{14}(t)\bar{\varphi}_2(t)\right)+$$

$$+(t^2+1)\left((ta_{21}(t)-a_{11}(t)+\right.$$

$$\left.+2t\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1\right)\right)\left(a_{23}(t)\bar{\varphi}_1(t)+a_{24}(t)\bar{\varphi}_2(t)\right)$$

$$\Delta(t)=h_2\left(\operatorname{sh}2t(\gamma_1+\gamma_2)+t\sin 2(\gamma_1+\gamma_2)\right)-h_1h_2\left(\operatorname{sh}^2 t\gamma_2-t^2\sin^2\gamma_2\right)\operatorname{sh}2t\gamma_1-$$

$$-\left(\operatorname{sh}2t\gamma_1+t\sin 2\gamma_1\right)\left(\frac{h_1^2}{4}\left(\operatorname{sh}^2 t\gamma_2-t^2\sin^2\gamma_2\right)-h_1\operatorname{sh}^2 t\gamma_2+h_2-1\right)\qquad(1.17)$$

2. Рассмотрим поведение напряжений в окрестности края поверхности контакта.

Приведем формулы для напряжений, выраженных через функцию напряжений [2]

$$a\sigma_\alpha^{(k)}=\left((\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\operatorname{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\operatorname{ch}\alpha\right)(g\Phi_k)$$

$$a\sigma_\beta^{(k)}=\left((\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\operatorname{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}-\cos\beta\right)(g\Phi_k)\qquad(2.1)$$

$$a\tau_{\alpha\beta}^{(k)}=-(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2(g\Phi_k)}{\partial\alpha\,\partial\beta}\quad(k=1,2)$$

Учитывая найденные значения для контактных напряжений, из (2.1) имеем

$$a\tau_{\alpha\beta}\big|_{\beta=\beta_0}=(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta_0)\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{t\Delta_1(t)\,\Delta_2(t)}{(t^2+1)\,\Delta(t)}P_2^*(t)\,e^{-it\alpha}dt\qquad(2.2)$$

$$\sigma_y^{(1)}\Big|_{\beta=\beta_0}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta_1(t)\,\Delta_2(t)}{(t^2-1)\,\Delta(t)}\,((-t^2(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta_0)+it\operatorname{sh}\alpha-$$

$$-\cos\beta_0)\,P_1^{*}(t)-\sin\beta_0\,P_2^{*}(t))\,e^{-it\alpha}\,dt$$

где

$$P_1^{*}(t)=\frac{(t^2+1)\,\Delta(t)}{\Delta_1(t)\,\Delta_2(t)}\,P_1(t);\qquad P_2^{*}(t)=\frac{(t^2+1)\,\Delta(t)}{\Delta_1(t)\,\Delta_2(t)}\,P_2(t) \qquad (2.3)$$

В общем случае любое из трех напряжений (3.1) выражается несобственными интегралами вида

$$\tau(y,x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar\tau(y,x,t)}{\Delta(t)}\,\frac{(a+x)^{-1-it}}{(a-x)^{(1-it)}}\,dt \qquad (2.4)$$

которые можно находить приближенно с помощью различных численных методов после определения $\bar\tau(y,x,t)$.

Для исследования поведения напряжений в окрестности края поверхности контакта $x=\pm a$ (то есть $\alpha=\pm\infty$) интеграл (2.4) по вещественной оси дополняется интегралом по верхней (при $x<0$ или $\alpha<0$) или нижней (при $x>0$ или $\alpha>0$) полуокружности радиуса $R=\infty$ с центром в начале координат.

Фиг. 2.

При увеличении радиуса полуокружности (фиг. 2) последовательность может быть подобрана так, чтобы интеграл (2.4) по полуокружности L_m стремился к нулю при $m\to\infty$.

Применяя теорему о вычетах, представим (2.4) в виде бесконечного ряда

$$\tau(y,x)=2\pi i\left(\frac{\bar\tau(y,x,t_1)}{\Delta'(t_1)}\,\frac{(a+x)^{-(1+it_1)}}{(a-x)^{1-it_1}}+\sum_{k=1,2,\ldots}\text{выч}\,(f(y,x,t_k),\,t_k)\right) \qquad (2.5)$$

Здесь $f(x,t)$ — подынтегральная функция (2.4), а $t_k=\xi_k-i\eta_k$ — корни уравнения

$$\Delta(t)=0 \qquad (2.6)$$

которые расположены в порядке возрастания положительных значений η_k.

Трансцендентное уравнение (2.6) зависит от четырех параметров — γ_1, γ_2 и комбинации характеристик упругих материалов h_1 и h_2.

Очевидно, характер напряженного состояния около края $x=a$ ($\alpha=\infty$) определяется величиной мнимой части первого простого корня $t_1=\xi_1-i\eta_1$ уравнения (2.6): если $\eta_1>1$, имеем нулевое напряженное состояние, если

$\eta_1 < 1$, имеет место явление сильной концентрации напряжений. В случае же $\eta_1 = 1$ напряжения на краях поверхности контакта конечны и в общем случае отличны от нуля. В табл. 1 приведены значения η_1 при $\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\pi}{2}$, $\nu_1 = 0.2$ и $\nu_2 = 0.3$.

Таблица 1

μ \ γ_1	7.5°	15°	22.5°	30°	37.5°	45°	52.5°
0.0625	0.8062	0.8264	0.8784	0.9542	1.0580	1.2010	1.4047
0.125	0.8433	0.8453	0.8860	0.9527	1.0469	1.1771	1.3596
0.25	0.8905	0.8751	0.8992	0.9498	1.0257	1.1307	1.2700
0.5	0.9391	0.9155	0.9194	0.9444	0.9879	1.0475	1.1178
1	0.9798	0.9615	0.9462	0.9343	0.9264	0.9230	0.9243
2	1.0105	1.0097	0.9779	0.9139	0.8414	0.7796	0.7363
4	1.0391	4.5033	2.9770	0.8621	0.8691	0.6461	0.5823
8	8.3498	4.2264	2.8333	0.7316	0.7062	0.5307	0.4653
16	8.0267	4.0727	2.7568	0.5561	0.5619	0.4269	0.3746
32	7.8559	3.9914	2.4561	0.4048	0.4277	0.3311	0.2981
64	7.7685	3.3799	2.3237	0.2900	0.3149	0.2476	0.2303

Из уравнения (2.6) можно найти границу раздела областей конечных и бесконечных напряжений на краю поверхности контакта. Подобными вопросами занимались в работах [9, 10].

Упомянутую выше границу можно представить зависимостью

$$h_2 \sin 2(\gamma_1 + \gamma_2) - (h_2^2 \sin^2 \gamma_2 + h_2 - 1) \sin 2\gamma_1 = 0 \tag{2.7}$$

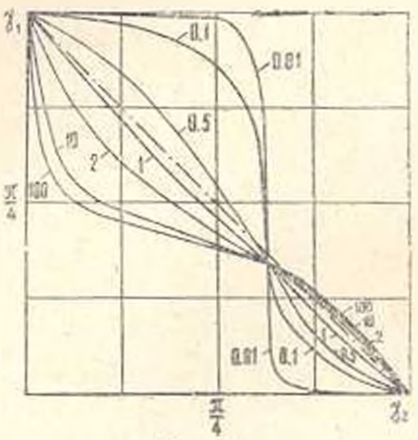
На плоскости геометрических параметров приведены границы раздела областей конечных и бесконечных напряжений на краю поверхности контакта при 1) $\nu_1 = 0.2$, $\nu_2 = 0.3$ (фиг. 3), 2) $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.3$ (фиг. 4) и 3) $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.2$ (фиг. 5). Цифрами указаны значения μ.

Область конечных напряжений на краю поверхности контакта лежит по одну сторону с началом координат от ближайшей к нему кривой, определяемой уравнением (2.7). При $\nu_1 = \nu_2$, $\mu = 1$ она обращается в прямую $\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\pi}{2}$, что совпадает с результатами для однородного материала, для которого концентрация напряжений отсутствует, если угол не больше развернутого.

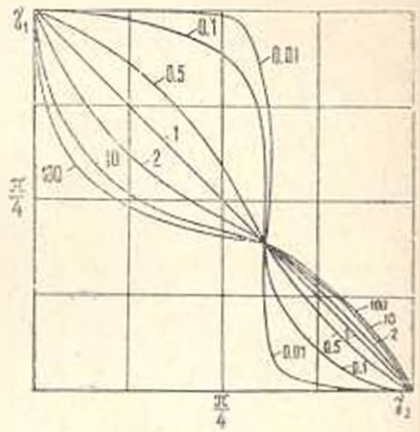
Анализ уравнения (2.7) показывает, что кривые, соответствующие различным значениям μ, пересекаются в одной точке с координатами

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{2} \operatorname{arc\,ctg} (0.5 - \nu_1) \sqrt{\frac{1 - \nu_2}{\nu_2}} \\ \gamma_2 &= \frac{1}{2} \arccos (2\nu_2 - 1) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Кривые, соответствующие различным значениям ν_1 и ν_2, не пересекаются в одной точке.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Найдем координаты точек пересечения кривых с прямой $\gamma_1+\gamma_2=\frac{\pi}{2}$. Эти точки пересечения определяются координатами

$$\gamma_2=0, \quad \gamma_1=\frac{\pi}{2}, \quad \gamma_2=\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2(\nu_2-\mu\nu_1)}{1-\mu}-1\right) \tag{2.9}$$

Следовательно, для рассматриваемого соединения различных материалов можно подобрать такие растворы углов γ_1 и γ_2, что напряжения на краю поверхности контакта $x=\pm a$ $(\alpha=\pm\infty)$ будут конечными, хотя $\gamma_1+\gamma_2>\frac{\pi}{2}$, в то время как для однородного материала угол при вершине должен быть не больше $\frac{\pi}{2}$.

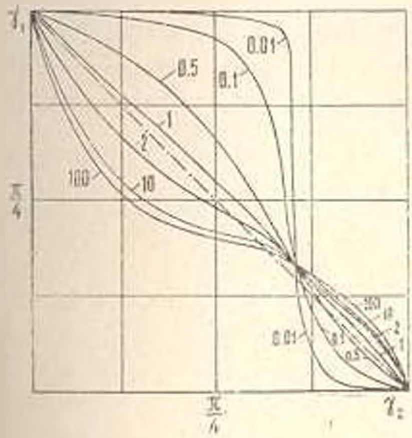
Концентрации напряжений не будет, когда угол более жесткого материала заключен в пределах

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2(\nu_2-\mu\nu_1)}{1-\mu}-1\right)<\gamma_2<\frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad \mu>1\\
&0<\gamma_2<\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2(\nu_2-\mu\nu_1)}{1-\mu}-1\right) \quad \text{при} \quad \mu<1
\end{aligned} \tag{2.10}$$

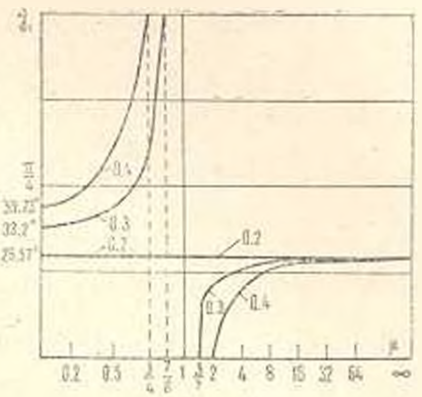
углы γ_1 и γ_2 не должны при этом выходить за граничную кривую.

Следует отметить, что при $\mu\to\infty$ граничные кривые стремятся к отрезку прямой $\gamma_2=0$, при $\mu\to 0$ стремятся к ломаной $\gamma_1=0$, $\gamma_1=\frac{\pi}{2}$ и $\gamma_2=\frac{1}{2}\arccos(2\nu_2-1)$.

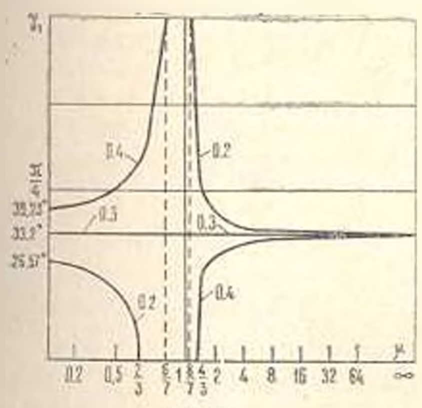
Представляет интерес рассмотреть случаи $\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\pi}{2}$. На плоскости γ_1 и μ приведена граница раздела областей конечных и бесконечных напряжений при 1) $\nu_1 = 0.2$ (фиг. 6), 2) $\nu_1 = 0.3$ (фиг. 7) и 3) $\nu_1 = 0.4$ (фиг. 8) при различных значениях μ. Цифрами указаны значения ν_2.



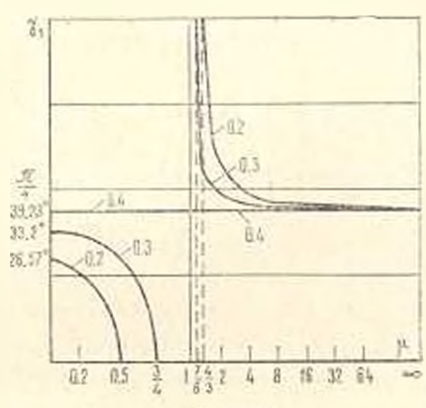
Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Разграничивающий угол γ_1 при

$$
\begin{aligned}
&(1-\nu_2)/(1-\nu_1) \leqslant \mu \leqslant \nu_2/\nu_1 \quad \text{при} \quad \nu_2 \geqslant \nu_1 \\
&\nu_2/\nu_1 \leqslant \mu \leqslant (1-\nu_2)/(1-\nu_1) \quad \text{при} \quad \nu_2 \leqslant \nu_1
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

равен 0 или $\frac{\pi}{2}$, то есть составное тело работает как однородное.

Но при увеличении μ ($\mu \to \infty$) γ_1 стремится к пределу $\frac{1}{2}\arccos(2\nu_1 - 1)$, при уменьшении μ ($\mu \to 0$) γ_1 стремится к пределу

$\frac{1}{2}\arccos(2\nu_2 - 1)$. В интервале $\frac{1}{2}\arccos(2\nu_2 - 1) < \gamma_1 < \frac{1}{2}\arccos(2\nu_1 - 1)$ при $\nu_2 > \nu_1$ и $\frac{1}{2}\arccos(2\nu_1 - 1) < \gamma_1 < \arccos(2\nu_2 - 1)$ при $\nu_2 < \nu_1$ уравнение (2.7), кроме тривиального $\gamma_1 = 0$, $\gamma_1 = \frac{\pi}{2}$, никаких корней не имеет при любых значениях μ.

Если $\nu_1 < \nu_2$ в интервалах $0 < \mu < (1-2\nu_2)/(1-2\nu_1)$ и $\nu_2/\nu_1 < \mu < \infty$, угол γ_1 меньше угла γ_2. Если $\nu_1 > \nu_2$ в интервалах $0 < \mu < \nu_2/\nu_1$ и $(1-2\nu_2)/(1-2\nu_1) < \mu < \infty$, угол γ_1 больше γ_2. Для значения $\mu = (1-2\nu_2)/(1-2\nu_1)$ разграничивающие углы одинаковые $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{\pi}{4}$.

Автор весьма признателен Б. Л. Абрамяну за обсуждение и ценные советы.

ВЦ АН Армянской ССР и
Ереванского государственного
университета

Поступила 10 I 1979

Լ. Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԼՈՒՍՆՅԱԿԻ ՀԱՄԱՐ ՄԻ ՀԱՐԹ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Երկբևեռ կոորդինատային սիստեմում դիտարկվում է շրջանային չորս աղեղներով սահմանափակված բաղադրյալ մարմնի առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը։ Ենթադրվում է, որ միջանկյալ նյութը սահմանափակող նյութերը ունեն միևնույն առաձգական հատկությունները և չափերը։

Խնդիրը լուծվում է լարումների ֆունկցիայի օգնությամբ։

Եզրային պայմանները բավարարելուց հետո անհայտ գործակիցների որոշման համար ստացված է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների սիստեմ։ Ավտոմորֆ ֆունկցիաների օգնությամբ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների սիստեմը բերվում է Հիլբերտ-Ռիմանի եզրային խնդրին։ Այնուհետև այդ եզրային խնդիրը բերված է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի։

Նյութերի միացման անկյուններից և առաձգական հատկություններից կախված ուսումնասիրված են անկյունային կետերում լարումների եզակիությունները։

THE PLANE PROBLEM IN THE THEORY OF ELASTICITY FOR A COMPOSITE BODY IN THE REGION CONSISTING OF THREE LUNES

L. A. HARUTIUNIAN

Summary

The problem in the theory of elasticity for a composite body restricted by arcs of crossing circles is considered in a bipolar coordinate system.

A full cohesion between the materials is effected along the contact line.

The problem is solved by the function of stresses and reduced to the solution of a characteristic system of singular integral equations. By theory of automorphic functions of SIE it is reduced to the Hilbert-Riemann boundary problem. The solution of the boundary problem for the general case is obtained by regularization i. e. by reduction to a solvable system of the Fredholm integral equations of the second kind.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уфлянд Я. С.* Биполярные координаты в теории упругости. М., ГТТИ. 1950.

2. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., изд-во «Наука». 1968.

3. *Еганян В. В.* К плоской задаче теории упругости для круговой «луночки». Сб. науч. трудов ЕрПИ, 1959, № 20. Машиностроение, вып. 4.

4. *Арутюнян Л. А.* Плоская задача теории упругости для составной области, образованной из двух луночек. Изв. АН АрмССР, «Механика», 1976, т. XXIX, № 1.

5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., изд-во «Наука». 1968.

5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., изд-во «Наука», 1970.

7. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз. 1963.

8. *Чибрикова Л. И.* О краевой задаче Римана для автоморфных функций. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1956, т. 116, кн. 4.

9. *Карамян К. О., Алексанян Р. К., Елоян В. А.* Влияние угла наклона боковых граней облицовочных плит на прочность совместной их работы с бетоном при температурных воздействиях. Труды АрмНИИСА, 1976, «Строительная физика», вып. 26.

10. *Аксентян О. К., Лущик О. Н.* Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного клина. МТТ, № 5, 1978.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 4, 1979 Механика

А. А. ЕНГИБАРЯН, А. М. МКРТЧЯН

НЕКОТОРЫЕ ПЛОСКИЕ СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ С ТРЕЩИНАМИ И СО ШТАМПАМИ

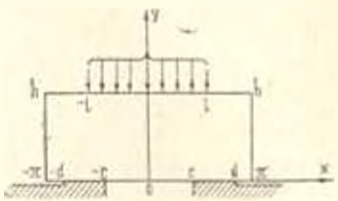
В настоящей работе рассматривается равновесие упругого прямоугольника, лежащего на двух жестких опорах, когда между материалом прямоугольника и опорами имеет место: а) кулоновское трение, б) жесткое сцепление, в) гладкий контакт. Последний случай трактуется как первая основная задача для прямоугольника, ослабленного тремя разрезами, расположенными вдоль линии симметрии. Вне зоны контакта по всему контуру прямоугольника заданы напряжения. В случаях а) и в) выявляются возможности отрыва от опор.

Задача решается при помощи бигармонической функции Эри [1] и решения сингулярных интегральных уравнений [2].

Контактные задачи для прямоугольной области рассматривались многими авторами [1—5]. В работах [6—11], [15—16] исследован вопрос зоны контакта. Задачам прямоугольника с разрезами посвящены статьи [12—13] и др.

1. Пусть упругий прямоугольник, занимающий область $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant h$, лежит на двух жестких опорах вдоль линии $y = 0$ по участкам $c \leqslant |x| \leqslant d$ (фиг. 1). В силу симметрии рассматриваем правую половину области при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} &\sigma_y(x, h) = f(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos kx \qquad (0 < x < \pi) \\ &\tau_{xy}(x, h) = 0 \\ &\sigma_x(\pi, y) = \tau_{xy}(\pi, y) = 0 \qquad (0 \leqslant y \leqslant h) \\ &u(0, y) = \tau_{xy}(0, y) = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$



Фиг. 1.

$$\begin{aligned} &\tau_{xy}(x, 0) = \sigma_y(x, 0) = 0 \qquad x \notin [c, d] \\ &v(x, 0) = g(x) \qquad x \in [c, d] \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} &\text{а)}\quad \tau_{xy}(x, 0) = \rho\sigma_y(x, 0) \\ &\text{б)}\quad u(x, 0) = t(x) \qquad x \in [c, d] \\ &\text{в)}\quad \tau_{xy}(x, 0) = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Условие (1.3а) является одним из возможных вариантов учета сложного физического процесса трения. Необходимо иметь в виду, что из-за симметрии деформаций при $c=0$ (опоры сливаются) $\tau_{xy}(0, 0)=0$, однако тогда $\sigma_y(0, 0)\neq 0$. Следовательно, при учете трения из условия (1.3а) необходимо исключить случай $c=0$.

Представим решение первой основной задачи для прямоугольника в виде [1]

$$\Phi(x, y)=d_1x^2+d_2y^2+\sum_{k=1}^{\infty}[A_k^{(1)}\operatorname{ch}ky+B_k^{(1)}\operatorname{sh}ky+ky(C_k^{(1)}\operatorname{ch}ky+$$

$$+D_k^{(1)}\operatorname{sh}ky)]\cos kx+\sum_{k=1}^{\infty}[A_k^{(2)}\operatorname{ch}\beta_kx+D_k^{(2)}\beta_kx\operatorname{sh}\beta_kx]\cos\beta_ky \qquad (1.4)$$

$$\beta_k=\frac{k\pi}{h}$$

Введя неизвестные функции

$$\tau_{xy}(x, 0)=\sum_{k=1}^{\infty}Q_k\sin kx=\begin{cases}0 & x\overline{\in}[c, d]\\ Q(x) & x\in[c, d]\end{cases}$$

$$\sigma_y(x, 0)=\frac{F_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}F_k\cos kx=\begin{cases}0 & x\overline{\in}[c, d]\\ F(x) & x\in[c, d]\end{cases} \qquad (1.5)$$

и удовлетворяя граничным условиям (1.1), (1.2), с учетом (1.5) для коэффициентов разложения (1.4) получаем:

$$4d_1=f_0-F_0, \qquad d_2=\frac{1}{2h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^kQ_k}{k}, \quad k^2C_k^{(1)}=Y_k$$

$$k^2A_k^{(1)}=Y_k(1+M_k^{(1)})-X_kN_k-Q_k\operatorname{cth}kh$$

$$k^2B_k^{(1)}=Q_k-Y_k, \qquad k^2\operatorname{sh}kh\,D_k^{(1)}=X_k-Y_k\operatorname{ch}kh \qquad (1.6)$$

$$k^2A_k^{(2)}=-Z_kM_k^{(2)}, \qquad \beta_k^2\operatorname{sh}\beta_k\pi\,D_k^{(2)}=Z_k$$

где X_k, Y_k, Z_k определяются из бесконечных систем

$$X_k(1+M_k^{(1)})-Y_kN_k=\frac{4k^2(-1)^k}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p\beta_pZ_p}{(k^2+\beta_p^2)^2}+f_k-\frac{Q_k}{\operatorname{sh}kh}$$

$$Y_k(1+M_k^{(1)})+X_kN_k=-\frac{4k^2(-1)^k}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_pZ_p}{(k^2+\beta_p^2)^2}-F_k+Q_k\operatorname{cth}kh \qquad (1.7)$$

$$Z_k(1+M_k^{(2)})=\frac{4\beta_k^2}{h}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^pp}{(p^2+\beta_k^2)^2}[(-1)^kX_p-Y_p]-\frac{2}{h}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^ppQ_p}{p^2+\beta_k^2}$$

где

$$M_k^{(1)}\operatorname{sh}^2kh=e^{-kh}\operatorname{sh}kh+kh, \quad M_k^{(2)}\operatorname{sh}^2\beta_k\pi=e^{-\beta_k\pi}\operatorname{sh}\beta_k\pi+\beta_k\pi$$

$$N_k\operatorname{sh}kh=1+kh\operatorname{cth}kh \qquad (1.8)$$

Удовлетворяя условию $v(x, 0) = g(x)$, после некоторых преобразований с учетом (1.6) получаем

$$E v_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \left[2F_k - (1-\nu) Q_k - 2R_k\right] \frac{\cos kx}{k} = Eg(x), \quad (c < x < d) \qquad (1.9)$$

где

$$R_k = X_k N_k - Y_k M_k^{(1)} + \frac{Q_k e^{-kh}}{\operatorname{sh} kh} - \frac{4k^2(-1)^k}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p Z_p}{(\beta_p^2 + k^2)^2} \qquad (1.10)$$

В случае наличия кулоновского трения (1.3а) из (1.9) с учетом (1.5) получаем сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

$$-\rho(1-\nu)\varphi(u) + \frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi(v)\,dv}{v-u} = C(u), \qquad (\alpha < u < \beta) \qquad (1.11)$$

Здесь введены обозначения

$$u = \cos x, \quad v = \cos y, \quad \alpha = \cos d, \quad \beta = \cos c, \quad \varphi(u) = \frac{F(\arccos u)}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$C(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\left[Eg'(\arccos u) + 2\sum_{k=1}^{\infty} R_k \sin(k \arccos u)\right] \qquad (1.12)$$

Следуя [2], уравнение (1.11) представим в виде

$$\varphi(u) = -\rho(1-\nu)C(u) - \frac{2Y(u)}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{C(v)\,dv}{Y(v)(v-u)} + PY(u) \qquad (1.13)$$

то есть приведем к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно неизвестной $\varphi(u)$.

Здесь

$$Y(u) = (\beta - u)^{\theta-1}(u-\alpha)^{-\theta}, \quad \theta = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2}{\rho(1-\nu)}$$

$$P = \frac{\sin\pi\theta}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(u)\,du = \frac{F_0}{2}\sin\pi\theta \qquad (1.14)$$

Из условия статического равновесия прямоугольника находим, что

$$P = \frac{f_0}{2}\sin\pi\theta \qquad (1.15)$$

Решение уравнения (1.11), представленное в виде (1.13), сводится к бесконечной системе относительно F_k

$$F_k = \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty} R_p a_{pk} + \frac{f_0 \sin\pi\theta}{\pi}\psi_k + g_k \qquad (1.16)$$

где

$$a_{pk}=\sum_{i=1}^{p-2i+1>0}(-1)^{i+1}\binom{p-i}{i-1}2^{p-2i+1}\Big[\,2^{k-1}\int_{0}^{\beta}\overline{N}_{p-2i+1}(u)\,u^{k}\,du+$$

$$+k\sum_{l=1}^{E\left(\frac{k}{2}\right)}\frac{(-1)^{l}}{l}\binom{k-l-1}{l-1}2^{k-2l-1}\int_{\alpha}^{\beta}\overline{N}_{p-2i+1}(u)\,u^{k-2l}\,du\Big]$$

$$\overline{N}_k(u)=\frac{2Y(u)}{\sin\pi\theta}\Big[\,u^{k-1}+Du^{k}-\sum_{n=1}^{k}u^{n-1}d_{k-n}\Big] \qquad (1.17)$$

$$d_m=0.5\,\theta(1-\theta)\,\alpha^{m}(\beta-\alpha)^{2}F\Big(-m,\ 2-\theta,\ 3,\ -\frac{\beta-\alpha}{\alpha}\Big),\quad m>0$$

$$D=-\beta+\theta(\beta-\alpha);\quad \binom{p}{n}=\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1\cdot 2\cdots n};\quad \binom{p}{0}=1$$

$$\Psi_k=2^{k-1}M_k+k\sum_{i=1}^{E\left(\frac{k}{2}\right)}\frac{(-1)^{i}}{i}\binom{k-i-1}{k-1}2^{k-2i-1}M_{k-2i}$$

$$M_k\sin\pi\theta=\pi\alpha^{k}F\Big(-k,\ 1-\theta,\ 1,\ -\frac{\beta-\alpha}{\alpha}\Big)$$

$$g_k=\frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}G(u)\cos(k\arccos u)\,du$$

$$G(u)=\rho(1-\nu)\frac{Eg'(\arccos u)}{\sqrt{1-u^{2}}}-\frac{2Y(u)}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{Eg'(\arccos v)\,dv}{Y(v)(v-u)\sqrt{1-v^{2}}}$$

При получении (1.17) использованы значения интегралов [14]

$$\int_{a}^{b}\frac{(x-a)^{\nu-1}(b-x)^{\mu-1}}{x-c}\,dx=\pi(c-a)^{\nu-1}(b-c)^{\mu-1}\operatorname{ctg}\mu\pi-$$

$$-(b-a)^{\mu+\nu-2}B(\mu-1,\ \nu)F\Big(2-\nu-\mu,\ 1,\ 2-\mu,\ \frac{b-c}{b-a}\Big),\quad (a<c<b)$$

$$\int_{0}^{u}x^{\nu-1}(x+\alpha)^{\lambda}(u-x)^{\mu-1}dx=\alpha^{\lambda}u^{\mu+\nu-1}B(\mu,\ \nu)F\Big(-\lambda,\ \nu,\ \mu+\nu,\ -\frac{u}{\alpha}\Big)$$

Присоединяя к бесконечным системам (1.7), (1.16) уравнения

$$\frac{Q_k}{\gamma}=\frac{F_0}{\pi k}[1-(-1)^{k}]+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}F_p\frac{p[1-(-1)^{p+k}]}{p^{2}-k^{2}}$$

получаем полную, замкнутую систему для определения неизвестных

$$X_k,\ Y_k,\ Z_k,\ F_k,\ Q_k$$

Формулу для напряжений можно привести к виду с явно выделенной особенностью

$$\tau(u) = \frac{\tau_1(u)}{(\beta - u)^{1-\theta}(u-\alpha)^{\theta}} \tag{1.18}$$

где

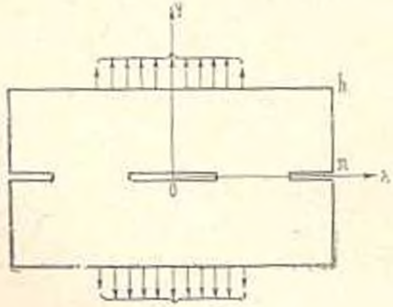
$$\tau_1(u) = P - \frac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta \frac{C(v) - C(u)}{Y(v)(v-u)}\,dv - \frac{2C(u)}{\sin \pi\theta}\left[\beta - u - \theta(\beta - \alpha)\right] \tag{1.19}$$

Случай контакта без трения получается из вышеприведенного решения подстановкой $\rho = 0$. Одновременно, если подставить $g(x) = 0$, то получим решение задачи о растяжении прямоугольника с размерами $(2\pi,\ 2h)$, ослабленного одним внутренним и двумя наружными разрезами, расположенными симметрично на одной из осей прямоугольника (фиг. 2).

2. В случае, когда между опорами и прямоугольником имеет место полное сцепление, то есть выполняется условие (1.36), задача сводится к определению комплексного контактного напряжения $P(u) = q(u) + i\psi(u)$ из сингулярного интегрального уравнения, которое имеет вид

$$(1-\nu)P(u) + \frac{2}{\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{P(v)\,dv}{v-u} = T(u) - iC(u), \quad (\alpha < u < \beta) \tag{2.1}$$

где



Фиг. 2.

$$\psi(u) = \frac{Q(\arccos u)}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$T(u) = \frac{T_1(\arccos u)}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$T_1(x) = Z'(x) - \frac{(1-\nu)F_0}{2} - Et'(x)$$

$$Z'(x) = 2(d_2 - \nu d_1) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[X_k\left(\frac{1}{\operatorname{sh} kh} - 2N_k\right) + 2Y_k\left(M_k^{(1)} - \frac{e^{-kh}}{\operatorname{sh} kh}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\nu Q_k e^{-kh}}{\operatorname{sh} kh} + \frac{4(1-\nu)k^2(-1)^k}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_p Z_p}{(\beta_p^2 + k^2)^2}\right]\cos kx - \tag{2.2}$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty}\frac{Z_k}{\operatorname{sh}\beta_k\pi}\left[\beta_k(1+\nu)(x \operatorname{sh}\beta_k x - \pi \operatorname{cth}\beta_k\pi \operatorname{ch}\beta_k x) - (1-\nu)\operatorname{ch}\beta_k x\right]$$

Решение уравнения (2.1), подобно п. 1, представляется в виде [2]

$$P(u) = (1-\nu)\left[T(u) - iC(u)\right] -$$

$$-\frac{2Z(u)}{\pi i}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\left[T(v) - iC(v)\right]dv}{Z(v)(v-u)} + 2AZ(u) \tag{2.3}$$

где

$$Z(v) = (\beta - v)^{-1/2-\gamma i}(v-\alpha)^{-1/2+\gamma i}, \qquad \gamma = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1+\nu}{3-\nu}$$

$$A = \frac{\operatorname{ch}\pi\gamma}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta} P(u)\,du \tag{2.4}$$

Решение (2.3), аналогично п. 1, сводится к бесконечным системам относительно F_k и Q_k. Из (2.2) видно, что при $c<x<d<\pi$ коэффициенты бесконечных систем имеют экспоненциальный порядок убывания, следовательно, системы будут квазивполне регулярны [5].

Отметим, что регулярность систем нарушается при $d=\pi$, так как меняется характер особенностей напряжений.

В случае $c=0$, $p=0$, $g(x)=0$ получается решение задачи контакта двух одинаковых прямоугольников, ранее рассмотренной в работе [10].

В случае $d=\pi$, $p=0$ получается решение задачи растяжения прямоугольника с внутренним симметричным разрезом, приведенное в работе [13].

В табл. 1—3 приведены результаты вычислений: значения коэффициентов особенностей напряжения η, в зависимости от длины зоны контакта при некоторых соотношениях геометрических и физических параметров прямоугольника, причем зависимость коэффициента особенности от высоты прямоугольника при постоянном коэффициенте трения и площадки приложения распределенной нагрузки приведено в табл. 1.

Таблица 1

$\nu = 0.3$, $\rho = 0.5$, $c = 0.5\pi$, $l = \pi$

h	η \ d	0.5π	0.53125π	0.5625π	0.59375π	0.6250π
0.5π	$\eta(\alpha)$	0.98298	0.97176	0.94199	0.8[illegible]32	0.8621
	$\eta(\beta)$	0.97027	0.98632	1.07931	1.15343	1.17431
π	$\eta(\alpha)$	0.98249	0.96783	0.92942	0.86712	0.84619
	$\eta(\beta)$	0.96761	0.99282	1.11739	1.25193	1.40824

В табл. 2 показана зависимость коэффициента особенности от коэффициента трения, а в табл. 3 — от площадки приложения внешней нагрузки при отсутствии трения.

Таблица 2

$\nu = 0.3,\ h = \pi,\ c = 0.5\pi,\ l = \pi/16$

ξ	η \ d	0.5π	0.53125π	0.5625π	0.59375π	0.6250π
0	$\tau_1(\alpha)$ $\eta(\beta)$	0.05986 0.42049	0.04242 0.55662	−0.00293 0.67913	−0.077316 0.76174	−0.16787 0.84471
0.1	$\tau_1(\alpha)$ $\eta(\beta)$	0.05858 0.41913	0.04131 0.54840	−0.00364 0.66591	−0.07703 0.74262	−0.15912 0.83163
0.2	$\tau_1(\alpha)$ $\eta(\beta)$	0.058497 0.41661	0.041392 0.54792	−0.003177 0.64726	−0.075657 0.73974	−0.14297 0.82893

Таблица 3

$\nu = 0.3,\ \xi = 0,\ h = 0.5\pi,\ c = 0.5\pi$

l	τ \ d	0.5π	0.53125π	0.5625π	0.59375π	0.6250π
$\pi/4$	$\tau_1(\alpha)$ $\tau_1(\beta)$	0.24791 0.25692	0.23402 0.28918	0.19748 0.40638	0.13727 0.53617	−0.0785 0.81946
π	$\tau_1(\alpha)$ $\tau_1(\beta)$	0.97279 0.98279	0.95989 0.99318	0.93730 1.079155	0.88727 1.178278	0.82398 1.428629

Институт механики
АН Армянской ССР
Ереванский зооветеринарный
институт

Поступила 25 X 1978

Ս. Ա. ԵՆԳԻԲԱՐՅԱՆ, Ա. Մ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԾԵՂՔԵՐՈՎ ԵՎ ԴՐՈՇՄՆԵՐՈՎ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՐԹ ԽԱՌԸ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է երկու կոշտ հիմքերի վրա դրված առաձգական ուղղանկյան հավասարակշռության խնդիրը: Դիտարկված է ուղղանկյան և հենարանների կոնտակտի երեք դեպքեր՝ 1) Հենարանների վրա ուղղանկյունը կարող է սահել և շփման համար ընդունվում է Կուլոնի օրենքը: 2) Ուղղանկյունը ամրակցված է հենարաններին այնպես, որ կոնտակտի մակերևույթի վրա բացակայում են տեղափոխությունները: 3) Ողորկ կոնտակտ: Վերջին դեպքը համապատասխանում է սիմետրիայի գծի վրա դասավորված երկու կտրվածքներով թուլացված ուղղանկյան համար առաջին եզրային խնդրին:

Խնդիրը լուծված է բիհարմոնիկ ֆունկցիայի միջոցով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների լուծումների օգնությամբ:

Դիտարկված է թվային օրինակ:

THE PLANE PROBLEM OF A RECTANGLE WITH CUTS RESTING ON TWO RIGID SUPPORTS

A. A. ENGIBARIAN, A. M. MKRTCHIAN

Summary

The plane problem on equilibrium of a rectangle, resting on two rigid supports, is considered. Three cases of contact between the rectangle and the support are discussed: 1) Coulombian friction, 2) rigid contact, 3) frictionless contact. The latter case is interpreted as a major problem for the rectangle with three cuts along the line of symmetry. The problem is solved dy biharmonic function and through solutions of singular integral equations.

A numerical example is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
2. *Гахов Ф. Ф.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
3. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Об одном методе решения задач теории упругости для полосы, полуплоскости и плоскости, ослабленных периодической системой щелей. Изв. ВНИИГ, 1975, т. 107, 14—23.
4. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Об одном методе решения контактных периодических задач для упругой полосы и кольца. Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 3.
5. *Баблоян А. А., Енгибарян А. А.* Контактная задача для прямоугольника при наличии сцепления. Изв. АН АрмССР, Механика, 1977, т. XXX, № 3.
6. *Вейцман У. А.* О контакте без сцепления между пластинкой и упругим полупространством. ПМ, 1969, № 2, Изд. «Мир».
7. *Пу С. Л., Хуссейн М. А.* К вопросу о контакте без сцепления между пластинкой и упругим полупространством. ПМ, 1970, № 3, Изд. «Мир».
8. *Абрамян Б. Л., Макарян В. С.* Осесимметричная задача о контакте между двумя слоями с учетом трения между слоями. Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. 29, № 5.
9. *Баблоян А. А., Мелконян М. Г.* О контакте двух прямоугольников без сцепления с определением области контакта. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. 27, № 5.
10. *Мелконян М. Г., Мкртчян А. М.* Об одной контактной задаче для двух прямоугольников. Изв АН АрмССР, Механика, 1975, т. 28, № 3.
11. *Дробязко В. В., Никитенко В. И., Улитко А. Ф.* Периодическая контактная задача с трением на упругой полосе. Изв. АН АрмССР, Механика, 1978, т. 31, № 1.
12. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев, «Наукова Думка», 1978.
13. *Баблоян А. А., Мкртчян А. М.* Решение плоской смешанной задачи для прямоугольника. Изв. АН АрмССР, Механика, 1972, т. 25, № 2
14. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Изд. физ.-мат. литературы, 1962.
15. *Erdogan F., Ratwani M.* The contact problem for an elastic layer supported by two elastic quarter planes. J. Appl. mech., 1974, vol. 41, ser. E, No. 3, 673—678.
16. *Ratwani M., Erdogan F.* On the plane contact problem for a Frictionless elastic layer. Intern. Journal J. Solids and Structures, 1973, vol. 9, 921—936.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 4, 1979 Механика

Г. Б. ШАХАЗИЗЯН

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ УДЛИНЕННОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПАНЕЛИ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассматривается вопрос несущей способности прямоугольной удлиненной шарнирно опертой по длинным краям гибкой панели с двухсторонними симметричными тонкими усиливающими покрытиями и с начальной погибью, направленной против равномерно распределенной нагрузки $q^*(t)$. Материал покрытий считается упругим, а для среднего слоя имеют место соотношения наследственной теории ползучести Маслова—Арутюняна [1].

Вопросы несущей способности и устойчивости при ползучести исследованы в работах [2—17] и др. Подробная библиография и анализ работ в этой области даны в монографиях [2, 3, 4] и в обзорной статье [8]. Устойчивости бесконечно длинной цилиндрической панели посвящена работа [10]. Поведение металлической арки (балки) с учетом ползучести рассмотрено в статье [5]. В работе [7] исследуется влияние начальных неправильностей в форме оси арки на развитие процесса во времени, учитывается возможность несимметричного деформирования оси.

Исследованию влияния ползучести на устойчивость пологих оболочек посвящена статья [12]. В работе [14] рассмотрена несущая способность круглой трехслойной плиты при ползучести.

§ 1. *Общие зависимости.* Рассмотрим слой панели единичной ширины (балочная плита), принимая гипотезу плоских сечений

$$\varepsilon_x = e_x + \varkappa_x z \tag{1.1}$$

где e_x — деформация, а $\varkappa_x$ — кривизна срединной поверхности панели. Напряжения в крайних слоях определяются формулой

$$\sigma_{x1,2} = \frac{E_1}{1-\nu_1^2}(e_x \pm \varkappa_x h) \tag{1.2}$$

В среднем слое, согласно соотношениям [1], имеем

$$\sigma_x(t) = \frac{E_2(t)}{1-\nu^2}[e_x(t) + \varkappa_x(t) z] - \int_{\tau_1}^{t} \frac{E_2(\tau)}{1-\nu^2}[e_x(\tau) + \varkappa_x(\tau) z] R(t, \tau)\, d\tau \tag{1.3}$$

где

$$R(t, \tau) = \gamma_1(\tau) - \gamma + \frac{E_2'(\tau)}{E_2(\tau)} - \frac{D(\tau)}{E_2(\tau)} \int_\tau^t E_2(y)\, e^{-\int_\tau^y \gamma_1(s)\, ds}\, dy \tag{1.4}$$

Резольвента ядра ползучести —

$$K(t, \tau) = -E_2(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{1}{E_2(\tau)} + \varphi(\tau) \left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right] \right\} \tag{1.5}$$

Здесь

$$\begin{gathered} \gamma_1(\tau) = \gamma \left[1 + \varphi(\tau) E_2(\tau) \right], \quad D(\tau) = \gamma_1'(\tau) + \gamma_1(\tau) \left[\gamma_1(\tau) - \gamma \right] \\ \varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau}, \qquad E_2(\tau) = E_0 \left(1 - \beta e^{-\alpha\tau} \right) \end{gathered} \tag{1.6}$$

Для старого материала $\varphi(\tau) = C_0$, $E_2(\tau) = E_0$. Будем иметь

$$R(t, \tau) = \lambda e^{-\gamma_1(t-\tau)}, \quad \lambda = \gamma E_0 C_0, \quad \gamma_1 = \gamma (1 + E_0 C_0) \tag{1.7}$$

Из статических условий имеем

$$\begin{gathered} N_x = (\sigma_{x_1} + \sigma_{x_2}) \Delta + \int_{-h}^{h} \sigma_x dz \\ M_x = (\sigma_{x_1} - \sigma_{x_2}) \Delta h + \int_{-h}^{h} \sigma_x z dz \end{gathered} \tag{1.8}$$

Используя выражения напряжений в слоях (1.2), (1.3), из (1.8) получаем

$$\begin{gathered} N_x(t) = H \left\{ \left[E_2^*(t) + \mu E_1^* \right] e_x(t) - \int_{\tau_1}^t E_2^*(\tau) e_x(\tau) R(t, \tau) d\tau \right\} \\ M_x(t) = J \left\{ \left[E_2^*(t) + 3\mu E_1^* \right] \varkappa_x(t) - \int_{\tau_1}^t E_2^*(\tau) \varkappa_x(\tau) R(t, \tau) d\tau \right\} \end{gathered} \tag{1.9}$$

где

$$E_2^*(t) = \frac{E_2(t)}{1 - \nu^2}, \quad E_1^* = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2}, \quad \mu = \frac{\Delta}{h}, \quad H = 2h, \quad J = \frac{2h^3}{3} \tag{1.10}$$

Между компонентами перемещения и деформациями срединной поверхности панели имеются зависимости

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w_*}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right], \quad \varkappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1.11}$$

Здесь $w_0(x)$ — начальная заданная погибь,

$w(x, t)$ — прогиб от воздействия внешних сил, а

$$w_п(x, t) = w_0(x) + w(x, t)$$

§ 2. *Вариационное уравнение задачи.* Согласно принципу возможных перемещений имеем

$$\int_0^l [N_x(t)\,\delta e_x(t) + M_x(t)\,\delta \varkappa_x(t)]\,dx - \int_0^l q^*(t)\,\delta w(t)\,dx = 0 \tag{2.1}$$

Подставляя соотношения (1.11) в (2.1), интегрируя по частям и учитывая граничные условия

$$M_x = 0;\ \delta u = 0;\ \delta w = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l \tag{2.2}$$

получаем вариационное уравнение

$$\int_0^l \left[\frac{\partial^2 M_x(t)}{\partial x^2} + N_x(t)\,\frac{\partial^2 w_п(t)}{\partial x^2} - q^*(t) \right] \delta w(t)\,dx = 0 \tag{2.3}$$

Положим

$$w_0(x) = -f_0 \sin\frac{\pi x}{l}, \qquad w(x, t) = f(t) \sin\frac{\pi x}{l} \tag{2.4}$$

где f_0 — заданная начальная стрела прогиба, а $f(t)$ — неизвестный, изменяющийся во времени прогиб в середине панели.

Внося (1.9) и (2.4) в (2.3), интегрируя и вводя обозначения

$$\xi_0 = \frac{f_0}{H}, \qquad \xi(t) = \frac{f(t)}{H}, \quad E(t) = \frac{E_2^*(t)}{E_1^*}, \quad q(t) = \frac{q^*(t)}{E_1^*}\,\frac{48}{\pi^4}\left(\frac{l}{H}\right)^4 \tag{2.5}$$

получим нелинейное интегральное соотношение относительно $\xi(t)$

$$[E(t) + 3\mu]\,\xi(t) + 3\,[E(t) + \mu]\,[\xi^3(t) - 3\xi_0\xi^2(t) + 2\xi_0^2\xi(t)] - q(t) =$$

$$= \int_{t_1}^{t} E(\tau)\,\xi(\tau)\,R(t, \tau)\,d\tau + 3\,[\xi(t) - \xi_0] \int_{t_1}^{t} E(\tau)\,[\xi^2(\tau) - 2\xi_0\xi(\tau)]\,R(t, \tau)\,d\tau \tag{2.6}$$

Уравнение (2.6) сводится к системе из двух нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра относительно функций $\xi(t)$ и $\psi(t)$

$$\begin{gathered} [E(t) + 3\mu]\,\xi(t) + 3\,[\xi(t) - \xi_0]\,\psi(t) - \int_{t_1}^{t} E(\tau)\,\xi(\tau)\,R(t, \tau)\,d\tau = q(t) \\ [E(t) + \mu]\,[\xi^2(t) - 2\xi_0\xi(t)] - \int_{t_1}^{t} E(\tau)\,[\xi^2(\tau) - 2\xi_0\xi(\tau)]\,R(t, \tau)\,d\tau = \psi(t) \end{gathered} \tag{2.7}$$

Подставляя выражение $R(t, \tau)$ из (1.4) в (2.7), после некоторых преобразований получим

$$[E(t)+3\mu]\xi(t)+3[\xi(t)-\xi_0]\psi(t)-\int_{t_1}^{t}E(\tau)\xi(\tau)\left[\eta(\tau)-\gamma+\frac{E'(\tau)}{E(\tau)}\right]d\tau+$$

$$+\int_{t_1}^{t}D(\tau)\xi(\tau)e^{\int_{t_1}^{\tau}\eta(x)\,dx}\,d\tau\int_{\tau}^{t}E(y)e^{-\int_{t_1}^{y}\eta(x)\,dx}\,dy=q(t) \qquad (2.8)$$

$$[E(t)+\mu][\xi^2(t)-2\xi_0\xi(t)]-\int_{t_1}^{t}E(\tau)[\xi^2(\tau)-2\xi_0\xi(\tau)]\left[\eta(\tau)-\gamma+\right.$$

$$\left.+\frac{E'(\tau)}{E(\tau)}\right]d\tau+\int_{t_1}^{t}D(\tau)[\xi^2(\tau)-2\xi_0\xi(\tau)]e^{\int_{t_1}^{\tau}\eta(x)\,dx}\,d\tau\int_{\tau}^{t}E(y)e^{-\int_{t_1}^{y}\eta(x)\,dx}\,dy=\psi(t)$$

Применяя к (2.8) формулу Дирихле о преобразовании двукратного интеграла, дифференцируя по t и обозначая $\dot{\xi}=v$, $\dot{\psi}=\omega$, получим

$$[E+3(\mu+\psi)]v+3(\xi-\xi_0)\omega-E(\eta-\gamma)\xi+Ee^{-\int_{t_1}^{t}\eta\,dx}\int_{t_1}^{t}D\xi e^{\int_{t_1}^{\tau}\eta\,dx}\,d\tau=\dot{q}$$

$$2(E+\mu)(\xi-\xi_0)v+E(\eta-\gamma)(\xi^2-2\xi_0\xi)+ \qquad (2.9)$$

$$+Ee^{-\int_{t_1}^{t}\eta\,dx}\int_{t_1}^{t}D(\xi^2-2\xi_0\xi)e^{\int_{t_1}^{\tau}\eta\,dx}\,d\tau=\omega$$

Умножая обе части уравнений (2.9) на $e^{\int_{t_1}^{t}\eta\,dx}$, дифференцируя по t и производя необходимые выкладки, приходим к системе из четырех дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\begin{cases}\dot{\xi}=v, & \dot{v}=\dfrac{a(\xi,t)v^2+b(\xi,\psi,\omega,t)v+c(t)}{d(\xi,\psi,t)}\\[2ex] \dot{\psi}=\omega, & \dot{\omega}=\dfrac{a_1(\psi,t)v^2+b_1(\xi,\psi,\omega,t)v+c_1(\xi,t)}{d(\xi,\psi,t)}-m(t)\omega\end{cases} \qquad (2.10)$$

Здесь введены обозначения

$$a(\xi, t) = 6(E+\mu)(\xi_0-\xi); \qquad c(t) = \bar{q} + m(t)\,q; \qquad m(t) = \eta - \frac{E'}{E}$$

$$b(\xi, \psi, \omega, t) = -[\gamma E + 6(\gamma E + \mu m)(\xi_0-\xi)^2 + 3m(\mu+\psi) + 6\omega] \tag{2.11}$$

$$d(\xi, \psi, t) = E + 3(\mu+\psi) + 6(E+\mu)(\xi_0-\xi)^2$$

$$a_1(\psi, t) = 2(E+\mu)[E + 3(\mu+\psi)]; \qquad c_1(\xi, t) = -2(E+\mu)(\xi_0-\xi)\,c(t)$$

$$b_1(\xi, \psi, \omega, t) = 2[E(2\mu+3\psi)(m-\gamma) + 6(E+\mu)\omega](\xi_0-\xi)$$

Принимая $t = \tau_1$, из (2.7) и (2.9) получим начальные условия системы дифференциальных уравнений (2.10)

$$[E(\tau_1) + 3\mu]\,\xi_1 + 3[E(\tau_1)+\mu](\xi_1^3 - 3\xi_0\xi_1^2 + 2\xi_0^2\xi_1) = q(\tau_1)$$

$$\psi(\tau_1) = [E(\tau_1)+\mu](\xi_1^2 - 2\xi_0\xi_1) \tag{2.12}$$

$$v(\tau_1) = \frac{\bar{q}(\tau_1) + E(\tau_1)[\eta(\tau_1)-\gamma][\xi_1 + 3(\xi_1^3 - 3\xi_0\xi_1^2 + 2\xi_0^2\xi_1)]}{E(\tau_1) + 3\mu + 3[E(\tau_1)+\mu](3\xi_1^2 - 6\xi_0\xi_1 - 2\xi_0^2)}$$

$$\omega(\tau_1) = 2[E(\tau_1)+\mu](\xi_1-\xi_0)\,v(\tau_1) - E(\tau_1)[\eta(\tau_1)-\gamma](\xi_1^2 - 2\xi_0\xi_1)$$

где $\xi_1 = \xi(\tau_1)$ — действительный наименьший корень первого уравнения начальных условий (2.12).

§ 3. *Критическое время панели.* За критерий исчерпания несущей способности панели принимаем условие безграничного возрастания скорости прогиба ($v \to \infty$) [6, 8, 14]. Соответствующий момент времени $t = T$ при данной нагрузке q называется критическим временем панели.

Определим значение $q = q_0$, при котором потеря несущей способности (хлопок) происходит в начальный момент $T = \tau_1$. Приравнивая нулю знаменатель $v(\tau_1)$ из (2.12), получим соответствующее значение относительного прогиба:

$$\xi_{10} = \xi_0 - \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\xi_0^2 - \theta_0^2} \tag{3.1}$$

где

$$\theta_0 = \sqrt{\frac{E(\tau_1) + 3\mu}{3[E(\tau_1)+\mu]}} \tag{3.2}$$

Из формулы (3.1) следует, что для явления «хлопка» необходимо условие $\xi_0 > \theta_0$, в противном случае прогиб будет меняться монотонно со временем. Подставляя значение ξ_{10} из (3.1) в первое уравнение (2.12), находим значение критической нагрузки мгновенной несущей способности, при котором хлопок происходит в начальный момент $T = \tau_1$

$$q_0 = [E(\tau_1) + 3\mu]\,\xi_{10} + 3[E(\tau_1)+\mu](\xi_{10}^3 - 3\xi_0\xi_{10}^2 + 2\xi_0^2\xi_{10}) \tag{3.3}$$

В дальнейшем индексом * обозначим значения величин, соответствующих времени $t \to \infty$. Предельным переходом при $t \to \infty$ из (2.7) и (2.9), учитывая (1.7), получим

$$\left(E_* + 3\mu - \frac{\lambda E_*}{\gamma_{1*}}\right)\xi_* + 3\left(E_* + \mu - \frac{\lambda E_*}{\gamma_{1*}}\right)(\xi_*^3 - 3\xi_0\xi_*^2 + 2\xi_0^2\xi_*) = q_* \quad (3.4)$$

$$v_* = \frac{q_*}{E_* + 3\mu + 3(E_* + \mu)(3\xi_*^2 - 6\xi_0\xi_* + 2\xi_0^2) - 3\frac{\lambda E_*}{\gamma_{1*}}(\xi_*^2 - 2\xi_0\xi_*)} \quad (3.5)$$

Приравнивая нулю знаменатель v_*, находим значение ξ_{*0}, при котором возможен хлопок

$$\xi_{*0} = \xi_0 - \theta\sqrt{\xi_0^2 - \theta_1^2} \quad (3.6)$$

где

$$\theta = \sqrt{\frac{E_* + \mu - \frac{\lambda E_*}{\gamma_{1*}}}{3(E_* + \mu) - \frac{\lambda E_*}{\gamma_{1*}}}}, \qquad \theta_1 = \sqrt{\frac{E_* + 3\mu}{3\left(E_* + \mu - \frac{\lambda E_*}{\gamma_{1*}}\right)}} \quad (3.7)$$

Очевидно, для возможности хлопка при $t \to \infty$ необходимо условие $\xi_0 > \theta_1$. Подставляя значение ξ_{*0} из (3.6) в (3.4), находим значение критической нагрузки длительной несущей способности q_{*0}, при котором хлопок может «происходить» в бесконечности ($t \to \infty$)

$$q_{*0} = \left(E_* + 3\mu - \frac{\lambda E_*}{\gamma_{1*}}\right)\xi_{*0} + 3\left(E_* + \mu - \frac{\lambda E_*}{\gamma_{1*}}\right)(\xi_{*0}^3 - 3\xi_0\xi_{*0}^2 + 2\xi_0^2\xi_{*0}) \quad (3.8)$$

При $q < q_{*0}$, как следует из формул (3.4), (3.5), скорость прогиба панели в течение времени затухает (на фиг. 2 кривая — 0.7 q_0). Значение q_{*0}, определяемое по формуле (3.8), будет верхним значением «безопасной» нагрузки, которое и определяет длительную несущую способность панели. Для каждого значения q, находящегося между q_0 и q_{*0}, существует критическое время T, при котором происходит «хлопок».

§ 4. *Задача релаксации.* Можно поставить обратную задачу. Определить закон изменения $q(t)$, при котором прогиб панели остается постоянным во времени $w(x, t) = w(x, \tau_1) = \text{const}$.

Принимая в (2.7) $\xi(t) = \xi(\tau_1) = \xi_1 = \text{const}$, значение которого для приложенной нагрузки $q(\tau_1)$ определяется из первого уравнения начальных условий (2.12), получим

$$q(t) = [E(t) + 3\mu]\xi_1 + 3[E(t) + \mu](\xi_1^3 - 3\xi_0\xi_1^2 + 2\xi_0^2\xi_1) - \\ - [\xi_1 + 3(\xi_1^3 - 3\xi_0\xi_1^2 + 2\xi_0^2\xi_1)]\int_{\tau_1}^{t} E(\tau)R(t, \tau)\,d\tau \quad (4.1)$$

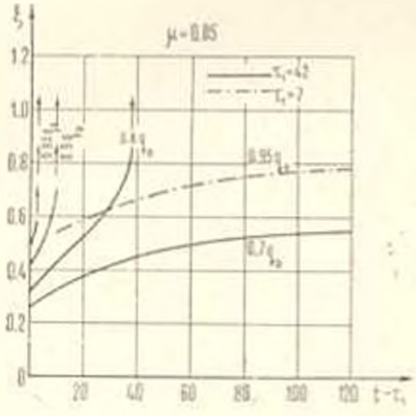
Отсюда

$$\frac{q(t)}{q(\tau_1)} = 1 - F(t) \int_{\tau_1}^{t} E(\tau) R(t, \tau) d\tau \tag{4.2}$$

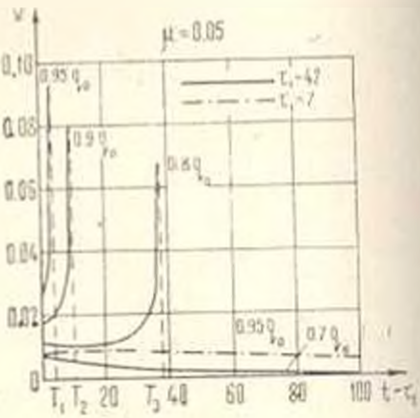
где обозначено

$$F(t) = \frac{\xi_1 + 3(\xi_1^3 - 3\xi_0\xi_1^2 + 2\xi_0^3 + 2\xi_0^2\xi_1)}{[E(t) - 3\mu]\xi_1 + 3[E(t) - \mu](\xi_1^3 - 3\xi_0\xi_1^2 + 2\xi_0^2\xi_1)} \tag{4.3}$$

Из выражения (4.2) следует, что $q(t)$ —монотонно убывающая функция.



Фиг. 1.



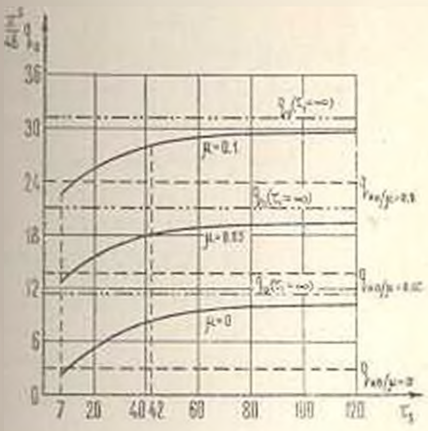
Фиг. 2.

§ 5. *Численный пример и основные выводы.* В качестве примера возьмем железобетонную панель под действием равномерно распределенной постоянной нагрузки $q(t) = q = \text{const}$ при значениях параметров $E_1 = 2 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}, $E_2 = 2 \cdot 10^5$ *кг/см*^{2}, $C_0 = 0.9 \cdot 10^{-5}$ *см*^{2}/*кг*, $\alpha = 0.03 \frac{1}{\text{день}}$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.026 \frac{1}{\text{день}}$, $\nu_1 = \nu = 0.3$; $\xi_0 = 1$.

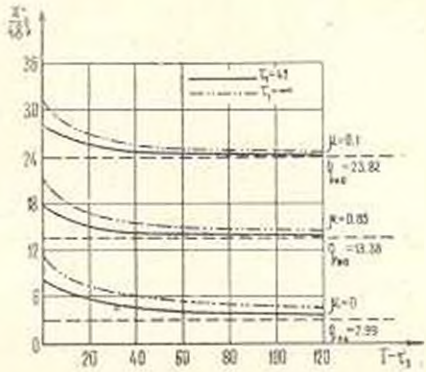
На основании численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (2.10) с начальными условиями (2.12), а также уравнения (4.2), произведенного на ЭВМ «ЕС-1020» построены графики $\xi(t)$ и $v(t)$ от момента τ_1 до T (фиг. 1, 2). Для разных значений μ на фиг. 3, 4 изображены зависимости $q_*(\tau_1)$ и q от T для случаев $\tau_1 = 42$, $\tau_1 = \infty$. На фиг. 5 представлены кривые релаксации (4.2) для различных μ и τ_1, когда $q(\tau_1) = 0.9\, q_0$.

Из фиг. 4 заключаем, что с увеличением относительной толщины усиливающих слоев μ увеличиваются q_*, q_{*0} и $\frac{q_{*0}}{q_0}$.

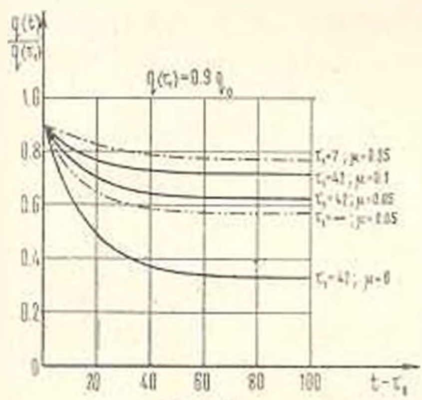
С увеличением возраста бетона τ_1 увеличивается q_0 (фиг. 3).



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

При постоянном прогибе (задача релаксации) отношение $\frac{q(t)}{q(\tau_1)}$ (фиг. 5) уменьшается с увеличением τ_1 и уменьшением μ.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 1 XII 1978

Հ. Բ. ՇԱՀԱՑՅԱՆ

ԵՐԿԱՐԱՑՎԱԾ ԽՈՌՇԵՐՏ ՊԱՆԵԼԻ ԿՐՈՂՈՒՆԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ ՍՈՂՔԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում բերվում է հավասարաչափ բաշխված բեռին հակառակ ուղղված սկզբնական ճկվածքով երկարացված խոռշերտ պանելի կրողունակության խնդիրը։

Արտաքին շերտերի նյութը ընդունվում է առաձգական, իսկ միջին շերտի համար հաշվի է առնվում սողքը ըստ Մասլով-Հարությունյանի ժառանգական տեսության։

Հնարավոր տեղափոխությունների սկզբունքի հիման վրա կազմված է խնդրի վարիացիոն հավասարումը, որը բերվում է Վոլտերի տիպի ոչ-գծային ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի, որից ստացվում է առաջին կարգի փոփոխական գործակիցներով չորս դիֆերենցիալ հավասարումներից կազմված սիստեմը։

Երկաթբետոնե պանելի օրինակի վրա ուժեղացնող շերտերի հարաբերական հաստության և բետոնի տարիքի տարբեր արժեքների դեպքում դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի թվային ինտեգրման արդյունքները ներկայացված են գրաֆիկների միջոցով։

Պանելի ակնթարթային և երկարատև կրողունակության դեպքերում, հավասարաչափ բաշխված բեռի ինտենսիվության որոշման համար ստացված են անալիտիկ արտահայտություններ։

CARRYING CAPACITY OF A LENGTHENED THREE-SHEET PANEL UNDER CREEP

H. B. SHAHAZIZIAN

Summary

The problem on carrying capacity of a rectangular lengthened three-sheet panel with an initial deflection directed against a uniformly distributed load is considered. The material of the external sheets is elastic while for the medim sheet, creep is taken into account in terms of the hereditary Maslov-Arutiunian theory.

On the basis of the possible displacement principle a variational equation of the problem is derived, which is reduced to a system of non-linear integral equations of the Volterra type, whereof a system of four differential equations with variable coefficients of the first order is obtained.

The results of numerical integration of the system of differential equations for the case of a ferro-concrete panel at various values of relative thickness of strengthening sheets and age of the concrete are shown in diagrams. Some analytical expressions are obtained to determine the critical load of the instantaneous and continuous carrying capacity of the panel.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. ГИТТЛ. М., 1952.
2. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкции. «Наука», М., 1966.
3. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. «Наука», М., 1977.
4. *Хофф Н.* Продольный изгиб и устойчивость. ИЛ. М., 1955.

5. *Pian T. H. H.* Creep buckling of curved beam under lateral loading. Proc. 3rd. U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. N. Y., 1958.
6. *Работнов Ю. Н.* и *Шестериков С. А.* Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
7. *Шестериков С. А., Кашелкин В. В., Сергеев М. В.* Устойчивость пологих арок. «Деформирование и разрушение твердых тел». Изд-во МГУ, 1977.
8. *Куршин Л. М.* Устойчивость цилиндрических оболочек при ползучести. «Строительная механика и расчет сооружений», 1970, № 3.
9. *Крошников В. Д.* О зависимости критических нагрузок от истории нагружения упругопластических пластин. «Механика деформируемых тел и конструкций». Сб. статей АН СССР. М., «Машиностроение», 1975.
10. *Шелеленко В. Н.* Устойчивость бесконечно длинной цилиндрической панели, защемленной по краю. Изв. АН СССР, Механика», 1965, № 6.
11. *Кашелкин В. В.* Устойчивость арки при ползучести. «Научные труды Института механики», изд-во МГУ, 1973, № 23.
12. *Малахова Н. А., Михеева Н. Р., Прокопович И. Е.* О влиянии ползучести на устойчивость гибких оболочек, применяемых в качестве элементов строительных конструкций. Тр. VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. М., «Наука», 1970.
13. *Задоян М. А.* Смешанное вариационное уравнение нелинейного ползучего тела и задача выпучивания призматического стержня. Изв. АН Арм. ССР, «Механика», 1968, т. 21, № 2.
14. *Задоян М. А., Шахазизян Г. Б.* О несущей способности круглой трехслойной плиты при ползучести. Изв. АН Арм. ССР, «Механика», 1978, т. 31, № 6.
15. *Терегулов И. Г.* Изгиб и устойчивость тонких пластин и оболочек при ползучести. М., «Наука», 1969.
16. *Потапов В. Д.* О критерии устойчивости при ползучести. «Прикл. механика», 1973, т. 9, вып. 9.
17. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.
18. *Задоян М. А.* Применение вариационных методов теории ползучести при расчете железобетонных элементов. Изв. АН Арм. ССР, сер. техн. наук, 1975, т. 28, № 3.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 4, 1979 Механика

В. Н. НИКОЛАЕВСКИЙ

ОСРЕДНЕНИЕ ПО ОБЪЕМУ КАК МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СРЕД С ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ

Излагается метод осреднения дифференциальных уравнений поля путем интегрирования их по объему и представления интегралов в конечно-разностной форме. Сопутствующее изменение масштаба описания позволяет интерпретировать конечно-разностные уравнения как континуальные и требует введения новых реологических замыканий. Метод иллюстрируется на примере теории упругости микронеоднородных сред. Указаны также иные приложения.

1. *Постановка проблемы.* При составлении уравнений механики сплошных сред рассматриваются элементарные (дифференциальные) объемы ΔV, линейный масштаб которых l должен быть много меньше внешнего масштаба L задачи, но много больше λ — характерного масштаба микродвижения частиц, слагающих изучаемую сплошную среду: $L \gg l \gg \lambda$. Если масштаб λ имеет молекулярные размеры (λ — «почти нуль»), как это предполагается, например, в теории вязкой жидкости или же в классической теории упругости, то балансовые уравнения для объема ΔV можно упрощать за счет предельного перехода $l \to 0$. Если же масштаб связан с надмолекулярным строением (движением) частиц, то он возрастает на много порядков, и предельный переход $l \to 0$ следует понимать как условие $l/L \to 0$, или точнее $l/L \ll 1$. Соответственно, предельный переход производится фактически за счет выбора достаточно большого внешнего масштаба L. Условие $l/L \ll 1$ есть условие «дифференциальности» объема ΔV. Второе ограничение $l \gg \lambda$ размеров объема ΔV по сути дела есть условие «представительности» тех интервалов осреднения (самого объема ΔV или же его сечений), к которым приводит правило составления балансовых соотношений. В тех случаях, когда не выполняется условие $L \gg l$, балансовые уравнения для ΔV не могут быть интерпретированы как точные континуальные уравнения. При использовании в них средних значений балансовые уравнения понимаются как соответствующие, например, «гидравлическому» приближению. Если же не выполнено условие $l \gg \lambda$, то осреднение по пространственным интервалам не может приводить к «регулярным средним» значениям.

Итак, если выполнены условия $L \gg l \gg \lambda$, $l^3 \sim \Delta V$, уравнения баланса для ΔV могут считаться дифференциальными. Для них характерно наличие внутреннего движения или состояния масштаба λ (размер «моля» в турбулентности, макромолекулы в полимерном растворе или в жидком кристалле, порового канала или взвешенной частицы). Определение среднего движения частиц в элементарном объеме ΔV как поступательного, оказывается недостаточным — все характерные особенности континуума с микроструктурой связаны с относительным движением частиц: «молей» относительно среднего потока или взвешенных частиц — относительно несущей среды. Относительное движение может быть не только поступательным, но и вращательным. В этом случае среднее движение в ΔV нужно задавать в виде профиля, тем более, что и замыкающие реологические связи (вязкой жидкости или же более сложных моделей) входят градиенты поля скорости или смещений. При нестационарных микродвижениях также допустимо осреднение по достаточно большому (представительному) интервалу времени. Получаемые балансовые уравнения следует понимать как уравнения корреляционных связей между параметрами течения во времени для пространственного интервала масштаба λ. Иными словами, в этом случае получаются уравнения, определяющие индивидуальный элемент микроструктуры «в среднем». Естественно, что уравнения корреляционных связей, вообще говоря, отличаются от континуальных макроуравнений движения среды с микроструктурой.

2. *Уравнения равновесия микронеоднородной упругости*[1]. Введем два масштаба исследования напряженно-деформированного состояния среды: микро- (с координатами x_i) и макромасштаб (с координатами X_i). Допустим, что в микромасштабе (то есть для дифференциального элемента $dv = dx_1 dx_2 dx_3$) выполняются уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \qquad (2.1)$$

где $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x)$ — симметричный тензор микронапряжений,

$f_i = f_i(x)$ — вектор объемных сил.

Если умножить уравнение (2.1) на координату x_k, то получим

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij} x_k) + f_i x_k \qquad (2.2)$$

Доумножение этого уравнения на альтернирующий тензор E_{lik} приводит к уравнению баланса момента количества движения

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(E_{lki}\sigma_{ij} x_k) + E_{lki} f_i x_k = 0, \quad E_{lki}\sigma_{ik} = 0 \qquad (2.3)$$

Проинтегрируем теперь уравнение (2.1) по элементарному макрообъему $\Delta V = \Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3$. Тогда в силу непрерывности поля σ_{ij} получим

[1] См. аннотацию доклада В. И. Левина и В. Н. Николаевского от 09.01.76. Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 4

$$\int_S \sigma_{ij} dS_j + \int_V f_i dV = 0, \qquad dV = dx_1 dx_2 dx_3 \tag{2.4}$$

где S — поверхность объема ΔV, $dS_j = n_j dS$ — ее элемент с нормалью n_j. Разделим (2.4) на ΔV и определим среднее по объему и по площадке $\Delta S_j = \Delta X_k \Delta X_m$ следующим образом:

$$\langle \cdots \rangle = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V}(\cdots)\,dV, \quad \langle \cdots \rangle_j = \frac{1}{\Delta X_k \Delta X_m}\int_{\Delta S_j}(\cdots)\, n_j\, dS, \tag{2.5}$$

$$k \neq m \neq j$$

получим результирующее маркоуравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial X_j}\langle \sigma_{ij} \rangle_j + \langle f_i \rangle = 0 \tag{2.6}$$

Здесь макродивергенция есть сумма следующих разностей:

$$\frac{1}{\Delta V}\Delta\int_{\Delta S_1}\sigma_{i1} dS_1 = \frac{1}{\Delta X_1}\left(\langle \sigma_{i1} \rangle_1\Big|_{X_1+\frac{\Delta X_1}{2}} - \langle \sigma_{i1} \rangle_1\Big|_{X_1-\frac{\Delta X_1}{2}}\right) \tag{2.7}$$

при переходе к дифференциальной записи, справедливой в асимптотическом смысле (при $\Delta X_i / L \to 0$, где L — внешний масштаб задачи). Величина средней объемной силы $\langle f_i \rangle$ есть регулярная функция макрокоординаты $X_i = x_i - \xi_i$ центра масс объема ΔV. Здесь ξ_i — вектор, соединяющий центр масс с произвольной точкой внутри ΔV. Из конечно-разностного представления (2.7) видно, что средние усилия $\langle \sigma_{ij} \rangle_j$ на ориентированных площадках (гранях объема ΔV) можно считать регулярными функциями координат центра масс объема, смещенного на расстояние $\pm(1/2)\Delta X_i$.

Осреднение уравнения (2.2) по объему приводит к следующему результату:

$$\langle \sigma_{ik} \rangle = \langle \sigma_{ik} \rangle_k + \frac{\partial}{\partial X_j}\langle \sigma_{ij}\xi_k \rangle_j - \langle f_i \xi_k \rangle \tag{2.8}$$

где $\langle \sigma_{ik} \rangle$ — тензор напряжений, осредненный по объему. Согласно (2.8) макронапряжение $\langle \sigma_{ik} \rangle_k$ выражается [1] через среднее объемное напряжение и тензор более высокого ранга. В терминологии Миндлина [2] величины $\mu_{ijk} = \langle \sigma_{ij}\xi_k \rangle_j$ — двойные напряжения, $\langle f_i \xi_k \rangle$ — двойная массовая сила. Из дифференциального уравнения (2.8) видно, что двойные напряжения считаются функциями центра масс, то есть вычисляются как средние по ориентированной площадке, проведенной через центр масс ΔV.

Двойные напряжения являются моментом распределения усилий на ориентированной площадке ΔS_j более высокого порядка, чем макротензор $\langle \sigma_{ij} \rangle_j$; они в свою очередь могут быть выражены через свое средне-объемное значение $\langle \sigma_{ij}\xi_k \rangle$ и моменты еще более высокого ранга — тройные напряжения. Для получения нужного соотношения следует домножить уравнение (2.1) на диаду $x_k x_m$ и осреднить. Если продолжить эту процедуру, то в результате получится цепочка макроуравнений, включающих в себя макротензора n-ого ранга, вообще говоря, несимметричные из-за правила введения их как средних по ориентированным площадкам.

Уравнение момента количества движения получается путем умножения уравнения (2.8) на альтернирующий тензор E_{ilk}. Результат

$$E_{ilk}\langle \sigma_{lk} \rangle_k + \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial X_j} + C_i = 0 \qquad (2.9)$$

показывает, что антисимметричная часть макронапряжения отлична от нуля, если существуют моментные напряжения $\mu_{ij} = \langle E_{ilk}\sigma_{lj}\xi_k \rangle_j$ и распределение по объему моментов сил $C_i = \langle E_{ilk} f_l \xi_k \rangle$.

Если в макрообъеме ΔV рассматриваемый материал — однородный континуум, то элементарный объем можно свести к точке ($\xi_i \to 0$, $\mu_{ijk} \to 0$, $\langle \sigma_{ij} \rangle_j \to \sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle$) и достаточно только обычное уравнение равновесия (2.6), совпадающее с исходным (2.1).

3. *Кинематика среды.* Вектор макросмещения $U_i(X)$ вводится как среднее по объему смещение

$$U_i = \langle \rho u_i \rangle / \langle \rho \rangle = \langle u_i \rangle, \quad \rho = \mathrm{const} \qquad (3.1)$$

Поле микросмещений $u_i(x)$ определим как сумму регулярной и нерегулярной u_i^* составляющих:

$$u_i(\xi) = U_i + \frac{\partial U_i}{\partial X_j}\xi_j + u_i^*, \qquad \langle u_i^* \rangle = 0 \qquad (3.2)$$

Соответственно деформация ε_{ij} определится следующим образом:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right) \qquad (3.3)$$

Осреднение по объему дает

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \langle u_i^* \rangle_j}{\partial X_j} + \frac{\partial \langle u_j^* \rangle_i}{\partial X_i}\right) \qquad (3.4)$$

Определение средней по объему деформации (3.4) упрощается, если

$$\langle u_j^* \rangle_j = \langle u_i^* \rangle = 0 \qquad (3.5)$$

В пользу гипотезы (3.5) можно выдвинуть следующий аргумент. Учет различия результатов осреднения по площадкам различной ориентации может ставить в соответствие микроскаляру φ макровектор $\langle \varphi \rangle_i$, а микровектору φ_i — макротензор $\langle \varphi_i \rangle_j$. Подобную ситуацию будем исключать по физическим соображениям. Различие средних по объему и поверхностям следует сохранять только для тензоров ранга выше второго, включающих в свое полиадное представление вектор ориентации площадки (нормаль, расход): введение вектора-ориентира площадки осреднения может менять для них количественное соотношение компонент, нарушать симметрию тензора, но ранг их будет сохраняться.

Если (3.5) справедливо, то второе слагаемое из (3.4) выпадает, то есть средняя по объему деформация есть симметричная часть градиента поля средних смещений. Если же считать, что условие (3.5) справедливо лишь при $i = j$, то второе слагаемое (3.4) будет отлично от нуля и его учет приводит к появлению некоторой дополнительной кинематической степени свободы.

Число сохраняемых дополнительных кинематических средних параметров должно соответствовать числу уравнений равновесия. Если число степеней свободы меньше числа уравнений из цепочки, то в результате получаются градиентальные модели среды. В. М. Левин проанализировал случай, когда в законе Гука

$$\sigma_{ij} = L_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

тензор упругих модулей $L_{ijkl}(x, \chi)$ является случайной функцией микрокоординат (χ — параметр случайности в допущении, что осреднение по объему эквивалентно статистическому).

Если же дополнительной кинематической переменной будет поворот φ_i микрочастицы, отличный в общем случае от среднего поворота $\Omega_i = 1/2\,(\mathrm{rot}\,U)_i$, то помимо уравнения количества движения (2.6) нужно вводить в анализ баланс момента количества движения (2.9).

Вообще говоря, кинематика локальных полей для микронеоднородных сред типа упругих смесей более сложна — она должна включать в себя средние деформации микрочастиц, а также градиенты от них. При этом следует пользоваться уравнением (2.8), несколько более общим, нежели (2.9).

Итак, интегрирование микроуравнений по дифференциальному макрообъему ΔV как метод осреднения приводит к континуальным обобщенным моделям известным как среды Коссера или иначе к моделям асимметричной механики. Проблема дальнейшего развития метода связана с построением реологических замыканий, что требует либо использования конкретных представлений о микроструктуре, либо постановки специальных реологических опытов, приводящих к измерениям необходимых реологических модулей.

4. *Многофазные смеси.* Следует подчеркнуть, что метод осреднения по объему при введении различных скоростей движения фаз был подробно развит применительно к механике пористых сред [3]. При этом построение выполнялось в рамках симметричной механики — вводилась гипотеза, что действующий на гранях объема макротензор напряжений симметричен. Эта гипотеза для рассмотренных в [3] движений была вполне оправдана.

Важным элементом построения было составление уравнений движения для каждой из фаз в отдельности с использованием осреднений по объему.

но плоским сечением, а также средних по поверхностям раздела фаз внутри ΔV. Такими средними являются силы и работы взаимодействия между фазами. Эти величины должны постулироваться дополнительно — в согласии с физическими требованиями. Сила взаимодействия вводилась так, что уравнения движения фаз оказались недивергентными, поскольку в них включалась движущая сила $m\partial p/\partial X_i$, где m — пористость, p — поровое давление, (но не сила: $-\partial(mp)/\partial X_i$, как в случае диффузионных моделей смесей, где величина mp играет роль «парциального» давления). Работа межфазового взаимодействия постулировалась таким образом, чтобы термодинамические соотношения Гиббса для внутренней энергии каждой из фаз были полными дифференциалами. При этом оказалось, что внутренняя энергия несущей фазы (матрицы среды) была функцией не только истинной плотности и энтропии, но и объемной концентрации; соответствующей термодинамической силой оказались эффективные напряжения Терцаги [3].

Учет асимметричных составляющих тензоров макронапряжений оказался существенным в другом предельном случае по объемному содержанию фаз, когда несущей фазой была жидкость, а взвешенные твердые частички могли обладать собственной угловой скоростью, отличной от скорости вращения жидкости [4].

Были предприняты попытки развить метод осреднения по объему и для гидродинамики суспензии. При этом Г. Бреннер [5] отмечал, что в макроуравнения движения входят среднеповерхностные напряжения, неравные среднеобъемным, хотя и не проводил процедуры преобразования поверхностных интегралов к балансовым дифференциальным соотношениям в макромасштабе. Существенно, что Г. Бреннер учитывал собственное вращение взвешенных частиц, связывая его с асимметричной частью макронапряжений. Напротив, Ю. А. Буевич с соавторами, например, см. [6], предполагал вслед за Дж. Бэтчелором [7], что макронапряжение есть среднее по объему от микронапряжений и пришел к выводу об обязательной симметрии тензора макронапряжений (см. по этому поводу [1]). Хотя при этом проводилась идея о вычислении макронапряжений через средние усилия на поверхности взвешенной частицы, эффект ее собственного вращения в отсутствие внешних немеханических полей был пропущен.

Прием введения объемной силы F_i вместо тензора напряжений σ_{ij}:

$$F_i = \partial\sigma_{ij}/\partial X_j \tag{4.1}$$

известен в литературе, см. например, монографию [8], стр. 634. Отметим попутно, что в этой книге был получен неверный результат об обязательной симметрии тензора напряжений (стр. 636). Ошибка состояла в утверждении, что выражение

$$M_{ik} = \oint (\sigma_{ij} x_k - \sigma_{kj} x_i)\, dS_j + \int (\sigma_{ki} - \sigma_{ik})\, dV \tag{4.2}$$

сводится к поверхностному интегралу только в случае $\sigma_{ki} = \sigma_{ik}$. На самом деле может быть: $(\sigma_{ki} - \sigma_{ik}) = \partial\mu_{ikj}/\partial X_j$, см. формулу (2.8), то есть асимметричная составляющая тензора напряжений может выражаться через дивергенцию тензора более высокого ранга (двойного напряжения Миндлина).

Р. И. Нигматулин в статье обзорного типа [9] также развивает метод интегрирования микроуравнений по элементарному макрообъему, использует понятия микро- и макрокоординат, трех типов осреднения и т. п., то есть по существу повторяет методологию книги [3], хотя и не ссылается на нее. Отличие состоит лишь в том, что вслед за Ю. А. Буевичем [6], в работе [9] принимается утверждение об эквивалентности осреднения по объему к плоским поверхностям. Более того, Р. И. Нигматулин претендует на доказательство этого, вообще говоря, неверного положения.

В самом деле, можно сформулировать ([3], стр. 13) условие, когда средние по объему и по плоским сечениям, независимо от ориентации последних, равны между собой. Действительно, из равенства

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Delta V} \sigma_{ij}\, dV = \frac{1}{\Delta X_j}\int\limits_{\Delta X_j} \langle \sigma_{ij} \rangle_j\, dX_j \tag{4.3}$$

следует, что

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle_j \tag{4.4}$$

при $\langle \sigma_{ij} \rangle_j = \mathrm{const}$. Если же $\langle \sigma_{ij} \rangle_j = f(X_j)$, то условие (4.4) справедливо лишь приближенно. В самом деле, подставим разложение

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_j (X_k + \xi_k) = \langle \sigma_{ij} \rangle_j (X_k) + \frac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle_j}{\partial X_k}\xi_k + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \langle \sigma_{ij} \rangle_j}{\partial X_k^2}\xi_k^2 + \cdots$$

в интеграл (4.3). Тогда получим оценку нарушения равенства (4.4)

$$\langle \sigma_{ij} \rangle - \langle \sigma_{ij} \rangle_j = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \langle \sigma_{ij} \rangle_j}{\partial X_k^2}\frac{\Delta X^2}{12} \tag{4.5}$$

Если бы можно было устремить $\Delta X_k \to 0$, то получился бы результат (4.4), однако правая часть (2.11) оказалась бы тождественно совпадающей с локальным значением σ_{ij} (при $\Delta X_j \to 0$ стремится к нулю и площадь осреднения ΔS_j).

Итак, по оценке (4.5) возможное нарушение равенства (4.4) имеет порядок ΔX^2, то есть по крайней мере порядка квадрата масштаба микроструктуры λ^2. Если же учесть, что средне-объемный тензор напряжения $\langle \sigma_{ij} \rangle$ симметричен, поскольку симметричен локальный тензор σ_{ij} напряжений, то именно правая часть оценки (4.5) будет главным членом антисимметричной компоненты тензора макронапряжений, которая и входит в уравнение моментов количества движения. С другой стороны, в уравнении баланса моментов количества движения инерционные члены будут пропорциональны произведению $\lambda^2 d\omega/dt$, где ω — угловая скорость в объеме ΔV, поскольку момент инерции имеет порядок $\rho\lambda^2\Delta V$. Как и следовало ожидать, нарушение (или выполнение) правила парности касательных напряжений (симметричности) тензора макронапряжений связано с балансом момента количества движения, а не с формализмом процедуры осреднения.

Р. И. Нигматулин [9] считает, что правой частью (4.5) можно пренебречь, хотя и записывает равенство (4.4) приближенно $\langle \sigma_{ij} \rangle \approx \langle \sigma_{ji} \rangle$, и вводит, вслед за Ю. А. Буевичем, силу типа (4.1), учитывающую, однако, (в отличие от [6, 7]) эффект собственного вращения взвешенной частицы. В результате рекомендуется [9] во изменение более ранних формулировок [10] учитывать эффект асимметрии практически так же, как и в [3]. Введение объемной силы (4.1) носит характер переобозначения.

В. А. Бердичевский [11] анализирует движение суспензии взвешенных частиц, используя модельное представление об их периодическом распределении в несущей жидкости. Использование вариационного метода и частных предположений о характере течения в индивидуальной ячейке позволяет В. А. Бердичевскому избежать явного введения средних интегрально-поверхностных представлений параметров движения. В его работе обсуждаются лишь средние по объему величины: с этой целью проводится осреднение по объему не уравнений, а их решений. Существенно, однако, что и при таком подходе тензор макронапряжений, определяемый как производная от диссипативной функции по кинематическим переменным, оказывается несимметричным, как и в работе [4].

Наконец, Ю. А. Буевич в недавней работе [12] представил момент взаимодействия между фазами через разность угловых скоростей движения жидкости, как и в [4], но не учитывает, что этот момент уравновешен в несущей жидкости антисимметричными составляющими макронапряжений.

5. *Некоторые замечания*. Подводя итог многолетней дискуссии по учету асимметричных эффектов для суспензий твердых частиц в вязкой жидкости, можно отметить, что к настоящему времени ее участники фактически пришли к выводам, аналогичным работе [4]. Что же касается метода осреднения по объему уравнений микродвижения, который непосредственно приводит к асимметрии тензора макронапряжений, то некоторые авторы стараются его избежать, а другие так видоизменить, чтобы все приемы введения средних величин оказались эквивалентными. Это обстоятельство объясняется тем, что метод осреднения по объему, если признать его справедливым, требует существенной переоценки известных теорий турбулентных потоков и статистической теории микронеоднородных твердых тел.

Обратимся в этой связи к известным постулатам осреднения [13]. Среди них центральное место занимает свойство коммутативности операций осреднения и дифференцируемости:

$$\langle \partial f/\partial x \rangle = (\partial/\partial x) \langle f \rangle \tag{5.1}$$

где символ $<\cdots>$ означает избранную процедуру осреднения. Рассмотрим с этой точки зрения операцию осреднения («сглаживания») по объему. Тогда левая часть (5.1) представима в виде

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}\right\rangle = \frac{1}{\Delta X_j}\int\limits_{X_j-(\Delta X_j/2)}^{X_j+(\Delta X_j/2)} \frac{\partial}{\partial x_j}\langle f\rangle_j\, dx_j =$$

$$= \frac{\langle f\rangle_j(X_j+\Delta X_j/2;\ \chi) - \langle f\rangle_j(X_j-\Delta X_j/2;\ \chi)}{\Delta X_j} = \frac{\Delta\langle f\rangle_j}{\Delta X_j}$$

где $\langle f\rangle_j = \langle f\rangle_j(X_j)$. Отсюда видна перестановочность осреднения и дифференцирования, если помнить, что при осреднении происходит изменение масштаба описания, а потому $\Delta\langle f\rangle_j/\Delta X_j \approx \partial\langle f\rangle_j/\partial X_j$ — дифференциальная операция в *новом масштабе*, и что:

$$\langle f\rangle_j(X_j \pm \Delta X_j/2;\ \chi) = f(X_j \pm \Delta X_j/2)$$

не зависит уже от параметра случайности χ. Последнее выполняется для «представительной» (включающего в себя весь ансамбль реализаций) площадки ΔS_j. Кроме того, произошел естественный переход от осреднения по объему ΔV к осреднению по ориентированной площадке. Полная аналогия с правилом (5.1) достигается, если принять гипотезу:

$$\langle f\rangle = \langle f\rangle_j$$

Укажем в заключение, что асимметричная механика турбулентности, построенная [14] методом осреднения по объему при сохранении условия $R_{ij} = -\langle \rho v_i v_j\rangle_j \neq R_{ji} = -\langle \rho v_j v_i\rangle_i$, объяснила эксперименты по ближнему следу за телом [15], позволила учесть в краевых условиях эффект шероховатости [16] и обобщена на случай магнитной гидродинамики [17].

Վ. Ն. ՆԻԿՈԼԱԵՎՍԿԻ

ԸՍՏ ԾԱՎԱԼԻ ՄԻՋԻՆԱՑՈՒՄԸ ՈՐՊԵՍ ՆԵՐՔԻՆ ԿԱԶՄՈՒԹՅԱՄԲ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Մեթոդի էությունը կայանում է դաշտի դիֆերենցիալ հավասարումների միջինացումը ըստ ծավալի և ինտեգրալների ներկայացումը վերջավոր-տարբերական ձևով։

Մեթոդը ցուցադրվում է միկրոանհամասեռ միջավայրերի առաձգականության օրինակի վրա։ Նշվում են նաև ուրիշ կիրառություններ։

VOLUME AVERAGING AS A METHOD OF DEVELOPEMENT OF MATHEMATICAL MODELS OF MEDIA WITH INTERNAL STRUCTURE

V. N. NIKOLAEVSKII

S u m m a r y

The method consists of volume averaging of differential field equations and of representing integrals in a finite-difference form. The associated change in the scale of description leads to the interpretation of these finite-difference equations as continuous ones. However, new rheological laws are needed. The method is illustrated by the example of elasticity of microheterogeneous media. Some other applications are also noted.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Николаевский В. Н.* Тензор напряжения и осреднение в механике сплошных сред. ПММ, 1975, вып. 2.
2. *Миндлин Р. Д.* Микроструктура в линейной упругости. Сб. пер. «Механика», 1964, № 4 (86).
3. *Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А.* Механика насыщенных пористых сред. М., Изд-во «Недра», 1970.
4. *Афанасьев Е. Ф., Николаевский В. Н.* К построению асимметричной гидромеханики суспензии с вращающимися твердыми частицами. В сб.: «Проблемы гидромеханики и механики сплошной среды». (К 60-летию академика Л. И. Седова). М., «Наука», 1969.
5. *Brenner H.* Rheology of two-phase systems. Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 2, Ann. Rev. Inc., Palo Alto, 1970. (русс. пер. в сб. „Реология суспензий", М., „Мир", 1975).
6. *Буевич Ю. А., Марков В. Г.* Континуальная механика монодисперсных суспензий. ПММ, 1973, т. 37, № 5 (часть 1), № 6 (часть 2).
7. *Batchelor G. K.* The stress system in a suspension of force-free particles. J. Fluid Mech., 1970, vol. 41, pt. 3.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред, изд. 2. М., Гостехиздат, 1953.
9. *Нигматулин Р. И.* Осреднение при математическом моделировании многофазных и, в частности, дисперсных смесей. В сб. «Аэрогазодинамика и физическая кинетика». Ин-т теоретич. и прикл. механики СО АН СССР, Новосибирск, 1970.
10. *Нигматулин Р. И.* Методы механики сплошной среды для описания многофазных смесей. ПММ, 1970, т. 34, № 6.
11. *Бердичевский В. Л.* Об осреднении периодических структур. ПММ, 1977, т. 41, № 6.
12. *Буевич Ю. А., Щелчкова И. Н.* Реологические свойства однородных мелкодисперсных суспензий. Стационарные течения. Инж. физ. журнал., 1977, т. 33, № 5.
13. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч. II, М.—Л., ГТТИ, 1948.

14. *Николаевский В. Н.* Асимметричная механика турбулентных потоков. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
15. *Iskenderov D. Sh., Nikolaevskii V. N.* Turbulent wake of a body and asymmetric hydrodynamics. Letters in Appl. Engng. Sci., 1977, vol. 5, No. 3.
16. *Николаевский В. Н., Искендеров Д. Ш., Коржов Е. Н.* Турбулентная жидкость как сплошная среда с внутренней структурой. Труды III Всесоюзн. семинара по моделям сплошн. среды. Новосибирск, 1976.
17. *Artemov M. A., Nikolaevskii V. N.* On equation of asymmetric turbulence in magnetohydrodynamics. Letters in Appl. Engng. Sci., 1976, vol. 4, No. 3.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 4, 1979 Механика

М. А. ЗАДОЯН

ОБ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ ПЛИТЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

1. *Исходные соотношения.* Предлагается вариационный способ исследования плоской и осесимметричной задач о прижатии сосредоточенной силой $P(t)$ бесконечной невесомой плиты, лежащей на упругом основании. Считается, что между плитой и основанием касательные напряжения отсутствуют, а область контакта должна быть определена. Плита является трехслойной с симметричными тонкими усиливающими покрытиями. Толщина покрытия Δ принимается малой по сравнению с толщиной плиты h, а материал покрытия считается линейно-упругим с модулем упругости E_1 и коэффициентом Пуассона ν_1. Средний слой плиты считается изготовленным из нелинейного наследственно-стареющего материала, подчиняющегося соотношениям Н. Х. Арутюняна [1]. Модуль упругости и коэффициент Пуассона материала среднего слоя обозначим через E, ν, а упругого основания — E_0, ν_0.

Вопросам контактных напряжений при ползучести посвящены исследования [2—13] и др. В книгах [3, 9, 10] содержится подробная библиография и анализ работ в этой области.

Соотношения между кривизнами $\varkappa_{ij}$ и моментами M_{ij} нелинейно наследственно ползучей трехслойной плиты при изгибе принимаем согласно зависимостям [14]

$$\varkappa_{ij} = A[(1+\nu)M_{ij}^* - 2\nu\delta_{ij}M^*] +$$

$$+ \int_{\tau_1}^{t} F(R_0)[(1+\nu)M_{ij}^* - 2\nu\delta_{ij}M^*]K(t, \tau)\,d\tau \tag{1.1}$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, $A = 12/Eh^3$, $2M^* = M_{11}^* + M_{22}^*$

$$M_{ij}^* = M_{ij} - D[(1-\nu_1)\varkappa_{ij} + 2\nu_1\delta_{ij}\varkappa], \qquad D = \frac{E_1\Delta h^2}{2(1-\nu_1^2)} \tag{1.2}$$

$$2\varkappa = \varkappa_{11} + \varkappa_{22}, \qquad F(R_0) = \frac{12}{h^3}\beta_1 + \frac{6^{m+1}\beta_m R_0^{m-1}}{(m+2)h^{2m+1}} \tag{1.3}$$

$$R_0 = \sqrt{M_{11}^{*2} - 2\nu M_{11}^* M_{22}^* + M_{22}^{*2} + 2(1+\nu)M_{12}^{*2}} \tag{1.4}$$

а ядро ползучести [1]

$$K(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau}\varphi(\tau)\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right] \tag{1.5}$$

При этом $\varphi(\tau)$ учитывает старение материала при постоянном модуле упруго-мгновенной деформации. Согласно экспериментальным данным К. С. Карапетяна [15], относящимся к тяжелому бетону,

$$\beta_1 = 0.999995, \quad \beta_2 = 0.000005\,\frac{см^6}{кг^3}, \quad m = 4$$

$$\varphi(\tau) = \frac{A_1}{b + \tau} + C; \quad C = 0.28 \cdot 10^{-5}\,\frac{см^2}{кг}, \quad A_1 = 4450 \cdot 10^{-5}\,\frac{см^2}{кг}\,дн$$

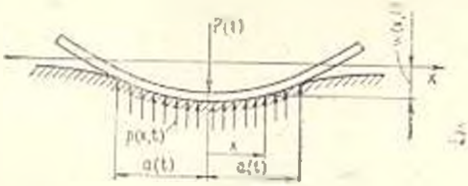
$$b = 3030\,дн, \ \gamma = 0.03; \quad E = 2 \cdot 10^5\,\frac{кг}{см^2} \tag{1.6}$$

Аналитическим представлением ядра (1.5) хорошо описывается также ползучесть полимерных материалов.

2. *Плоская задача.* Рассмотрим цилиндрический изгиб сосредоточенной силой $P(t)$ прямоугольной плиты (балочная плита) на упругом основании (фиг. 1). Длину неизвестной переменной во времени контактной области обозначим $2a(t)$, а прогиб плиты (осадка основания) — $w(x, t)$. Тогда реактивное давление основания в случае плоской деформации будет [16]

$$p(x, t) = -\frac{E_0}{2\pi(1-\nu_0^2)}\sqrt{a^2(t) - x^2}\int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{\frac{\partial w(\xi, t)}{\partial \xi}}{\sqrt{a^2(t) - \xi^2}}\,\frac{d\xi}{\xi - x} \tag{2.1}$$

Для цилиндрического изгиба плиты (фиг. 1), принимая прямоугольную систему координат (x, y), будем иметь



Фиг. 1.

$$\varkappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varkappa_{xy} = \varkappa_y = 0 \tag{2.2}$$

Из (1.1), (1.2) и (1.4) получаем

$$M_y^* = \nu M_x^*, \quad M_x^* = M_x - D\varkappa_x,$$

$$P_0 = \sqrt{1-\nu^2}\,|M_x^*| \tag{2.3}$$

Тогда соотношение между кривизной и моментом примет вид

$$\varkappa_x = (1-\nu^2)\left[AM_x^* + \int_{\tau_0}^{t} F(R)\,M_x^* K(t, \tau)\,d\tau\right] \tag{2.4}$$

Введем обозначение $-w_*(x, t) = w(0, t) - w(x, t)$,

$$W = \varkappa_x M_x^* + \frac{D}{2}\varkappa_x^2 - (1-\nu^2)\left[\frac{A}{2}M_x^{*2} + \int_{\tau_0}^{t} F(R)\,M_x^* M_x^*(t)\,K(t, \tau)\,d\tau\right] \tag{2.5}$$

В момент t величинам $\varkappa_x$ и M_x сообщим вариации $\delta\varkappa_x$ и δM_x, которые считаем независимыми, причем $\delta M_x^* = \delta M_x - D\delta\varkappa_x$. Принимаем $\varkappa_x$, M_x, w и p зависящими от x, t и от длины контактной поверхности $a(t)$. Тогда смешанное вариационное уравнение нашей задачи с учетом изменения неизвестной границы области контакта будет

$$\delta \int_0^{a(t)} \left[W(x, a, t) - W(x, x, t) - \int_x^{a(t)} p(x, a, t) \frac{\partial w_*(x, a, t)}{\partial a} da \right] dx = 0 \quad (2.6)$$

Здесь кривизна и момент варьируются независимо.

Вариационное уравнение (2.6) с переменной границей области контакта, где кривизна и момент варьируются независимо, эквивалентно совокупности зависимостей, состоящей из уравнений равновесия, граничных условий и соотношений между кривизной и моментом.

Действительно, производя операцию варьирования в (2.6), приходим к уравнению

$$\int_0^{a(t)} \delta W(x, a, t)\, dx - \int_0^{a(t)} p(x, a, t) [\delta w(0, t) - \delta w(x, t)]\, dx = 0$$

где

$$\delta W = \left\{ \varkappa_x - (1 - \nu^2) \left[AM_x^* + \int_{\tau_1}^{t} F(R_0) M_x^*(\tau) K(t, \tau)\, d\tau \right] \right\} \delta M_x^*(t) +$$

$$+ (M_x + D\varkappa_x) \delta\varkappa_x$$

Далее, учитывая (2.3) и условие статики

$$2 \int_0^{a(t)} p(x, t)\, dx = P(t)$$

после преобразований, принимая во внимание независимость вариаций δw и δM^*, приходим к вышеуказанному заключению.

Прогиб плиты ищем в виде разложения степенного ряда по четным степеням x

$$w(x, t) = \psi_0(t) + \psi_2(t) x^2 + \psi_4(t) x^4 + \cdots \quad (2.7)$$

где $\psi_i(t)$ — неизвестные функции времени. Ограничиваясь первыми двумя членами и обозначая $\psi_2(t) = -\psi(t)$, из (2.1) будем иметь

$$p(x, t) = \frac{E_0 \psi(t)}{1 - \nu_0^2} \sqrt{a^2(t) - x^2} \quad (2.8)$$

Из условия ограниченности напряжений на концах контакта [16]

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{\partial w(\xi, t)}{\partial \xi} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{a^2(t)-\xi^2}} = -\frac{\pi^2 E_0}{2(1-\nu_0^2)} P(t) \tag{2.9}$$

находим

$$\psi(t) = \frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} P(t)\, a^{-2}(t) \tag{2.10}$$

Подставляя в (2.5)—(2.6) $w = \psi(t)x^2$, значение $p(x, t)$ из (2.7) и $x_* = 2\psi(t)$, приходим к вариационному уравнению

$$\left[\psi - \frac{1-\nu^2}{2}\left[AM_x^* + \int_{\tau_1}^{t} F(R)\, M_\tau^* K(t, \tau)\, d\tau \right]\right]\delta M_x +$$

$$+ \left[M_x - \frac{\pi E_0 a^3 \psi}{32(1-\nu_0^2)}\right]\delta\psi = 0 \tag{2.11}$$

Приравнивая нулю множители при вариациях, исключая ψ и вводя обозначения $K_1(t, \tau) = EK(t, \tau)$, $X(t) = a(t)/a_0$, где $a_0 = a(\tau_1)$,

$$a_0 = h\sqrt[3]{\frac{16}{3\pi}\frac{1-\nu_0^2}{1-\nu^2}\frac{E}{E_0}(1+\mu)}, \qquad \mu = 6\frac{1-\nu^2}{1-\nu_1^2}\frac{E_1\Delta}{Eh} \tag{2.12}$$

при $P(t) = P_0 = \text{const}$, приходим к нелинейному интегральному уравнению

$$X^{-2} = X + \int_{\tau_1}^{t} H(X)\, K_1(t, \tau)\, d\tau \tag{2.13}$$

причем

$$H(X) = \beta_1(X - \mu_1 X^{-2}) + B_m(X - \mu_1 X^{-2})^m \tag{2.14}$$

$$B_m = \frac{3\beta_m}{m+2}\left(\sqrt{1-\nu^2}\,\frac{3P_0 a_0}{8h^2}\right)^{m-1}, \qquad \mu_1 = \frac{\mu}{1+\mu} \tag{2.15}$$

Для случая старого материала имеем $K_1(t, \tau) = EC\gamma e^{-\gamma(t-\tau)}$, и уравнение приводится к нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка с разделяющимися переменными, решение которого приводится в квадратурах

$$t - \tau_1 = \frac{1}{\gamma}\int_{X}^{1} \frac{(2+x^3)\, dx}{x[ECx^2H(x) + x^3 - 1]} \tag{2.16}$$

Переходя к пределу при $t \to \infty$, для случая старого материала из (2.13) для значения $X_\infty = X(\infty)$ получаем алгебраическое уравнение

$$X_*^3 + ECX_*^2 H(X_*) = 1 \tag{2.17}$$

При $m = 4$ и отсутствии усиливающих покрытий $\mu_1 = 0$ находим

$$X_* = \sqrt[3]{-\frac{1+EC\beta_1}{2ECB_1} + \sqrt{\left(\frac{1+EC\beta_1}{2ECB_4}\right)^2 + \frac{1}{ECB_1}}} \tag{2.18}$$

где B_1 определяется из (2.15), где положено $m = 4$

$$B_1 = \frac{\beta_4}{2}\left(\sqrt{1-\nu^2}\,\frac{3P_0 a_0}{8h^2}\right)^3 \tag{2.19}$$

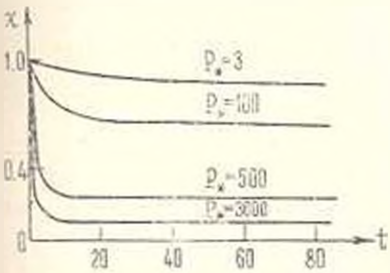
При учете старения материала интегральное уравнение (2.13), вводя обозначение $\gamma t = t_*$, а затем опуская знак (*), можно привести к системе из двух дифференциальных уравнений

$$\dot X = V$$

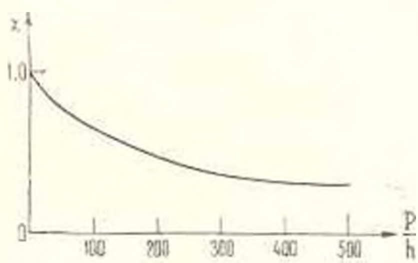
$$X(X^3+2)\dot V = 6V^2 -$$

$$-\left[X^3 + 2 + E\varphi(t)(X^3+2\mu_1)[\beta_1 + mB_m(X-\mu_1X^{-2})^{m-1}]\right]V$$

с начальными условиями $X(\tau_1) = 1$, $V(\tau_1) = -\frac{1}{3}\varphi(\tau_1)EH(1)$, решение которой реализуется на ЭВМ.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Интегральное уравнение (2.13) можно решить также непосредственно итерационным способом на ЭВМ.

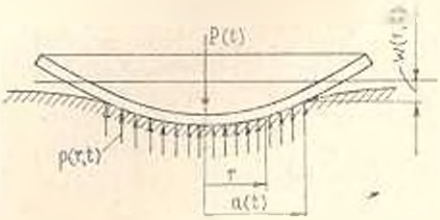
На фиг. 2 и 3 изображены графики изменения X_* (2.18) и X (2.16) соответственно для числовых значений параметров (1.6) и $E_0 = 2 \cdot 10^4$ $кг/см^2$.

§ 3. *Осесимметричная задача.* В случае осесимметричного изгиба плиты на упругом основании сосредоточенной силой $P(t)$ (фиг. 4) радиус неизвестной переменной во времени контактной области обозначим $a(t)$, а прогиб плиты (осадка основания) — $w(r, t)$. Тогда реактивное давление основания определится формулой [16]

$$p(r, t) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{r}^{a(t)} \frac{\dfrac{\partial F_1(\xi, t)}{\partial \xi}}{\sqrt{\xi^2 - r^2}}\, d\xi \tag{3.1}$$

$$F_1(r, t) = \frac{2E_0}{1-\nu_0^2}\left[w(0, t) + r\int\limits_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} \frac{\partial w(\xi, t)}{\partial \xi}\, d\xi \right] \tag{3.2}$$

В случае осевой симметрии имеем



Фиг. 4.

$$\varkappa_r = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \qquad \varkappa_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}$$

$$\varkappa_{r\theta} = 0 \tag{3.3}$$

Введем обозначения $w_*(r, t) = w(0, t) - w(r, t)$

$$W(r, t) = \varkappa_r M_r^* + \varkappa_\theta M_\theta^* +$$

$$+ \frac{D}{2}\varkappa_0^2 - \frac{A}{2}R_0^2 - \int\limits_{\tau_1}^{t} F(R_0)\left[(M_r^* - \nu M_\theta^*) M_r^*(\tau) + \right.$$

$$\left. + (M_\theta^* - \nu M_r^*) M_\theta^*(\tau)\right] K(t, \tau)\, d\tau \tag{3.4}$$

где

$$\varkappa_0^2 = \varkappa_r^2 + 2\nu_1 \varkappa_r \varkappa_\theta + \varkappa_\theta^2$$

$$R_0^2 = M_r^{*2} - 2\nu M_r^* M_\theta^* + M_\theta^{*2} \tag{3.5}$$

Принимаем, что кривизны, моменты, прогиб и реактивное давление зависят от радиуса контактной области. Вариационное уравнение рассматриваемой задачи представим в виде

$$\delta \int\limits_0^{a(t)} \left\{ W(r, a, t) - W(r, r, t) - \int\limits_0^{a(t)} p(r, a, t) \frac{\partial w_*(r, a, t)}{\partial a}\, da \right\} r\,dr = 0 \tag{3.6}$$

Это смешанное вариационное уравнение с переменными границами эквивалентно совокупности соотношений, состоящей из уравнений равновесия плиты, граничных условий и зависимостей между кривизнами и моментами. Действительно, производя варьирование в (3.6), получим

$$\int\limits_0^{a(t)} \delta W(r, a, t)\, r\,dr - \int\limits_0^{a(t)} p(r, a, t)\left[\delta w(0, t) - \delta w(r, t)\right] r\,dr = 0$$

где

$$\delta W = \{M_r^* + D(\varkappa_r + \nu_1\varkappa_\theta)\}\delta\varkappa_r + \{\ \}\delta\varkappa_\theta + \{\varkappa_r - A(M_r^* - \nu_1 M_\theta^*) -$$

$$- \int_{\tau_1}^{t} F(R_0)(M_r^* - \nu M_\theta^*)K(t,\tau)\,d\tau\}\delta M_r^*(t) + \{\ \}\delta M_\theta^*(t)$$

Далее, учитывая условие статики

$$2\pi\int_0^{a(t)} p(r,t)\,r\,dr = P(t)$$

после определенных преобразований, принимая во внимание независимость вариаций δw и δM_r^*, δM_θ^*, приходим к вышеуказанному заключению.

Разложим прогиб плиты в степенной ряд по четным степеням r

$$w(r,t) = \varphi_0(t) + \varphi_2(t)r^2 + \varphi_4(t)r^4 + \cdots \tag{3.7}$$

и ограничимся первыми двумя членами, причем обозначим $\varphi_2(t) = -\psi(t)$. Тогда

$$\varkappa_r = \varkappa_\theta = 2\psi(t), \quad M_r = M_\theta \tag{3.8}$$

$$M_r^* = M_r - 2(1+\nu_1)D\psi, \quad \varkappa_0 = \sqrt{2(1+\nu_1)}\,|\varkappa_r|, \quad R_0 = \sqrt{2(1-\nu)}\,|M_r^*| \tag{3.9}$$

Соотношение между кривизнами и моментами в этом случае будет

$$\varkappa_r = (1-\nu)\left[AM_r^* + \int_{\tau_1}^{t} F(R_0)M_r^*K(t,\tau)\,d\tau\right] \tag{3.10}$$

Подставляя выражение (3.7) в (3.1)—(3.2) и интегрируя, получим

$$p(r,t) = \frac{4E_0\psi(t)}{\pi(1-\nu_0^2)}\sqrt{a^2(t) - r^2} \tag{3.11}$$

Условие ограниченности напряжений на границе контактной области $F_1(a,t) = 0$ и статическое условие [16]

$$\int_0^{a(t)} F_1(r,t)\,dr = P(t) \tag{3.12}$$

дают

$$\varphi_0(t) = \frac{3}{4}\frac{1-\nu_0^2}{E_0}P(t)a^{-2}(t), \qquad \psi(t) = \frac{3}{8}\frac{1-\nu_0^2}{E_0}P(t)a^{-3}(t) \tag{3.13}$$

Выражение (3.4) примет вид

$$W(r,t) = 2\varkappa_r M_r^{*} + D(1+\nu_1)\varkappa_r^{2} -$$

$$-2(1-\nu)\left[\frac{A}{2}M_r^{*2} + \int_{\tau_1}^{t} F(R_0)M_r^{*}M_r^{*}(t)K(t,\tau)\,d\tau\right] \qquad (3.14)$$

Тогда вариационное уравнение (3.6) принимает вид

$$\left\{\psi - \frac{1-\nu}{2}\left[AM_r^{*} + \int_{\tau_1}^{t} F(R_0)M_r^{*}K(t,\tau)\,d\tau\right]\right\}\delta M_r^{*} +$$

$$+\left[M_r^{*} + 2(1+\nu_1)D\psi - \frac{4}{15}\,\frac{E_0\psi a^{3}}{\pi(1-\nu_0^{2})}\right]\delta\psi = 0 \qquad (3.15)$$

Приравнивая нулю множители при вариациях, исключая ψ, вводя обозначение $X(t) = a(t)/a_0$, где $a_0 = a(\tau_1)$,

$$a_0 = h\sqrt[3]{\frac{3\pi}{8}\,\frac{1-\nu_0^{2}}{1-\nu}\,\frac{E}{E_0}(1+\mu)}\,, \qquad \mu = 6\,\frac{1-\nu}{1-\nu_1}\,\frac{E_1\Delta}{Eh} \qquad (3.16)$$

и принимая $P(t) = P_* = \text{const}$, приходим к нелинейному интегральному уравнению

$$X^{-3} = 1 + \int_{\tau_1}^{t} H(X)\,K_1(t,\tau)\,d\tau \qquad (3.17)$$

Здесь

$$H(X) = \beta_1(1-\mu_1 X^{-3}) + B_m(1-\mu_1 X^{-3})^{m} \qquad (3.18)$$

$$B_m = \frac{3\beta_m}{m+2}\left[\frac{3}{1}\sqrt{\frac{2(1-\nu)}{5\pi}}\,\frac{P_*}{h^{2}}\right]^{m-1}, \qquad \mu_1 = \frac{\mu}{1+\mu} \qquad (3.19)$$

Интегральное уравнение (3.17) для случая старого материала приводится к нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка с разделяющимися переменными, решение которого приводится в квадратурах

$$t - \tau_1 = \frac{1}{\gamma}\int_{1}^{X^{-3}} \frac{d\xi}{1-\xi+ECH(\xi)} \qquad (3.20)$$

Для однородной плиты $\mu_1 = 0$ из (3.17) получим

$$X = \left[1 + (\beta_1 + B_m)E\varphi(\tau_1)\left[1-e^{-\gamma(t-\tau_1)}\right]\right]^{-1/3} \qquad (3.21)$$

Переходя к пределу при $t\to\infty$, из (3.21) получаем значение $X_* = X(\infty)$ для однородной плиты

$$X_* = \left[1 + (\beta_1 + B_m)E\varphi(\tau_1)\right]^{-1/3} \qquad (3.22)$$

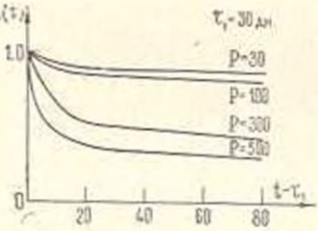
Для составной плиты при учете старения материала интегральное уравнение (3.17), введя обозначения $y' = t_m$, а затем опуская индекс *, можно привести к системе из двух дифференциальных уравнений

$$-3X^{-4}\dot{X} = V$$

$$\dot{V} = -\{1 + E\varphi(t)\varphi_1[\beta_1 + mB_m(1-\mu_1 X^{-3})^{m-1}]\}V \qquad (3.23)$$

с начальными условиями $X(\tau_1) = 1$, $V(\tau_1) = E\varphi(\tau_1)H(1)$, решение которой можно реализовать на ЭВМ.

Нелинейное интегральное уравнение (3.17) можно решить применением итерационного процесса на ЭВМ.



Фиг. 5.

На фиг. 5 изображен график изменения X (3.21) для значений параметров (1.6) и $E_0 = 2\cdot 10^5$ кг/см^2.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 4 I 1979

Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ԳՏՆՎՈՂ ՍԱԼԻ ՀԱՄԱՐ ՍՈՂՔԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Վարիացիոն եղանակով ուսումնասիրվում է ոչ գծային սողքով օժտված սալի ծռումը առաձգական հիմքի վրա կենտրոնացված ուժի ազդեցության տակ։ Սալը ընդունվում է եռաշերտ սիմետրիկ ուժեղացնող ծածկույթներով, իսկ հպումը հիմքի հետ ենթադրվում է առանց կպչակցող ուժերի։ Օգտվելով սալի միջին մակերևույթի կորությունների և մոմենտների միջև Հենկիի նախորդ աշխատանքում առաջարկված անբացահայտ առնչությունից, Ելնե-ների ընդհանրացված վարիացիոն հավասարումից, ինչպես նաև սալի ճկվածքի պարաբոլական ձևի ենթադրությունից կոնտակտի, ժամանակից կախված, անհայտ չափի համար ստացվում է ոչ գծային ինտեգրալ հավասարում։ Այդ հավասարումը ծերացած նյութի և հաստատուն ուժի դեպքում բերվում է առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման, որի լուծումը տրվում է քառակուսացման միջոցով։ Ուսումնասիրվում են հարթ և առանցքասիմետրիկ խնդ-

գիրները։ Տեսական և թվային օրինակների հիման վրա ստացված արդյունքները ցույց են տալիս, որ ժամանակի ընթացքում սողքի հետևանքով կոնտակտի չափը նվազում է։ Ստացվում է նաև կոնտակտի չափի կախումը կենտրոնացված ուժի մեծությունից։ Ուժի մեծանալուց փոքրանում է կոնտակտի չափը։

ON A CONTACT PROBLEM IN THE NON-LINEAR THEORY OF CREEP FOR A PLATE ON ELASTIC FOUNDATION

M. A. ZADOYAN

S u m m a r y

Non-linear creep in the problem on the bending of a plate on elastic foundation under concentrated force is investigated by the variational method. The plate is assumed to be three-layered with a symmetric strengthening covering, and the contact with fountation is taken to be without cohesion. Using the implicit relations between curvatures and moments, proposed earlier by the author, and the generalized variational equation of Reisner, as well as the assumption of a parabolic shape of flexure, for the size of contact a non-linear integral equation is obtained, which in the case of constant force and aged material is solved in quadratures.

A plane and axisymmetric problem is discussed as well. The conclusions, drawn on the basis of theoretical investigations and numerical calculations, show in particular that in the case of constant force due to creep the size of contact decreases. The relation between the contact length and the value of concentrated force is also obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., ГИТТЛ, 1952.
2. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* О температурных напряжениях в прямоугольных блоках. Изв. АН Арм. ССР, серия ФМЕТ наук, 1955, т. 8, № 4.
3. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкции. М., «Наука», 1966.
4. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 1959, т. 23, в. 5.
5. *Задоян М. А.* Термонапряженное состояние бетонных блоков с учетом ползучести материала. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, 1957, т. 10, № 5.
6. *Задоян М. А.* Об одной вариационной задаче о прижатии слоя к основанию при учете реологических свойств материалов. Изв. АН Арм. ССР, сер. техн. наук, 1977, т. 30, № 5.
7. *Прокопович И. Е.* О решении плоской контактной задачи с учетом ползучести. ПММ, 1956, т. 20, в. 6.
8. *Lee H. H., Radok J. R. M.* The contact problem for viscoelastic bodies. J. Appl. Mech., 1960, v. 27, No. 3.
9. *Ширинкулов Т. Ш.* Методы расчета конструкции на сплошном основании с учетом ползучести. Ташкент, Изд-во «ФАН», Узб. ССР, 1969.

10. Развитие теории контактных задач в СССР. АН СССР. Ин-т пробл. механики. М., «Наука», 1976.
11. *Розовский М. И.* О влиянии реологических свойств основания и лежащих на нем полосы и круглой плиты на показатели их гибкости. Сб. «Реологические вопросы механики горных пород», Алма-Ата, изд-во АН Каз. ССР, 1964.
12. *Шекян Л. А.* Осесимметричная контактная задача нелинейной теории неустановившейся ползучести. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1978, т. 31, № 6.
13. *Гайтова Л. М.* Расчет на изгиб упруго-ползучей железобетонной плиты на упруго-ползучем основании. Изв. АН Арм. ССР, сер. техн. наук, 1976, т. 29, № 4.
14. *Задоян М. А.* Смешанное вариационное уравнение для пластин и оболочек из нелинейного наследственно-стареющего материала. Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6.
15. *Карапетян К. С.* Влияние старения бетона на зависимость между напряжениями и деформациями ползучести. Изв. АН Арм. ССР, сер. ФМЕТ наук, 1959, т. 12, № 4.
16. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М., Гостехиздат, 1949.

А. С. МКРТЧЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ФОРМЫ ШВА И ДЕФОРМАТИВНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ СВАРНЫХ СТЫКОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ НА МЕХАНИЧЕСКУЮ ДОЛГОВЕЧНОСТЬ

На долговечность сварных соединений влияет ряд факторов, в том числе и механические характеристики основного и присадочного материалов. Результаты исследований некоторых авторов не позволяют сделать утвердительного заключения об отрицательном влиянии увеличения предела прочности наплавленного металла на усталостную прочность сварного образца. Авторы работы [1] трудность исследования объясняют многочисленностью факторов, влияющих на усталостную прочность сварных соединений. Отмечается, что продольная деформация шва и околошовной зоны значительно меньше, чем вдали от шва. Большие экспериментальные работы по проверке долговечности механически обрабатываемых сварных соединений были выполнены автором [2]. Как объясняет автор, предел ограниченной усталости удается повысить за счет плавного перехода от наплавленного металла к основному металлу и за счет подбора механических характеристик материала. При одинаковых механических характеристиках наплавленного и основного металлов важным фактором, определяющим механическую долговечность соединения, является распределение местных напряжений в окрестности стыка растягиваемого сварного образца.

Теоретическими исследованиями характера напряженного состояния в окрестности края поверхности соединения произвольно нагруженного составного тела установлено, что незначительные изменения геометрии соединения в зависимости от разности упруго-деформативных свойств соединенных материалов могут концентрационное напряженное состояние окрестности края привести к малонапряженному и наоборот [3]. Следовательно, для соединяемых материалов с данными упругими постоянными можно определить рациональную форму соединения и получить для зоны стыка большую механическую выносливость, чем для однородных частей элемента конструкций, работающих при переменном нагружении.

В настоящей статье определяется теоретическое значение предельного угла и влияние формы разделки стыкового сварного соединения на механическую долговечность в зависимости от деформативной неоднородности зоны шва. В общем случае нагружения составного тела предельное для малонапряженности края поверхности контакта сочетание значения углов между плоскими элементами поверхности контакта в окрестности ее края и внешней поверхности соединения определяются соотношением:

$$[(1+\mu)\sin(\alpha+\beta)-(1-\mu)\sin(\alpha-\beta)]\,[\mu m_2 m_1[(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)-$$
$$-\sin(\alpha+\beta)]\sin(\alpha+\beta)+\mu m_2[\mu m_2-m_1-(\mu-1)\sin^2\beta](\alpha\cos\alpha-$$
$$-\sin\alpha)\sin\alpha-m_1[\mu m_2-m_1-(\mu-1)\sin^2\alpha](\beta\cos\beta-\sin\beta)\sin\beta]=0 \quad (1.1)$$

где $\mu=\dfrac{G_1}{G_2}$ — отношение модулей сдвигов, ν_1 и ν_2 — коэффициенты Пуассона, а m_1 и m_2 — коэффициенты поперечных деформаций соединенных материалов. Угол α относится к материалу с модулем сдвига G_1 и коэффициентом Пуассона ν_1, а β — ко второму. Задаваясь значением одного угла или соотношением между двумя углами α и β, определяем предельное значение второго угла или обоих углов, когда задано одно соотношение между ними.

Только сочетание наименьших значений (отличных от нуля) углов имеет непосредственный смысл для предельного состояния края поверхности контакта.

Для механически обработанного (гладкого) края поверхности контакта, когда $\alpha+\beta=\pi$, соотношение (1.1) упрощается, что позволяет определение предельного значения угла для двух материалов с заданными упругими постоянными произвести с помощью небольшого объема вычислений. Соотношение (1.1) для гладкого края принимает следующий вид

$$[\mu m_2-m_1-(\mu-1)\sin^2\alpha]\,[(\mu m_2-m_1)(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)+$$
$$+m_1\pi\cos\alpha]\sin 2\alpha=0 \quad (1.2)$$

Примем, что $\mu=\dfrac{G_1}{G_2}<1$, то есть модуль сдвига G_1 материала, к которому относится угол α, меньше, чем модуль сдвига G_2 второго материала. Тогда, наименьшее значение угла α^*, удовлетворяющее уравнению (1.2), является предельным, то есть край поверхности контакта будет малонапряженным, если α будет $<\alpha^*$.

Отыскание наименьшего положительного значения корня уравнения (1.2) можно провести, приравнивая к нулю каждый из сомножителей (1.2)

1. $$\sin^2\alpha=\frac{m_1-\mu m_2}{1-\mu} \qquad \alpha^*=\arcsin\sqrt{\frac{m_1-\mu m_2}{1-\mu}} \quad (1.3)$$

если

$$\mu<\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2} \quad \text{и} \quad \mu<\frac{\nu_1}{\nu_2}$$

2. $$\operatorname{tg}\alpha^*-\alpha^*=\frac{\pi(1-\nu_1)}{\mu m_2-m_1} \quad \text{если} \quad \mu>\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2} \quad (1.4)$$

В случае $\dfrac{\nu_1}{\nu_2}<\dfrac{1-\nu_1}{1-\nu_2}$ и $\dfrac{\nu_1}{\nu_2}<\mu<\dfrac{1-\nu_1}{1-\nu_2}$, используя уравнение $\sin 2\alpha=0$, находим, что значение предельного угла не зависит от упругих постоянных материалов и равно $\dfrac{\pi}{2}$.

Таким образом, для всего интервала изменения μ и произвольных коэффициентов Пуассона ν_1 и ν_2, которые исчерпывают все возможные сочетания материалов, для гладкого края при помощи элементарных вычислений может быть установлено предельное (верхнее) значение угла α, относящегося к материалу с меньшим модулем упругости.

Как правило, материал шва в сварном соединении имеет выраженную неоднородность как по химическому составу, так и по механическим свойствам, включая и деформативные. Механическая неоднородность шва обусловлена как химической, так и структурной неоднородностью.

Поверхность сплавления является контактной поверхностью между материалом шва и основным свариваемым материалом. Тепловые воздействия во время сварки могут существенно изменить прочностные свойства и почти не влияют на деформативные свойства материала околошовной зоны. Зная деформативные свойства материала шва и основного материала, углы разделки стыкового сварного шва могут быть рассчитаны так, чтобы по всему краю поверхности сплавления выполнялись условия малонапряженности. В этом случае обеспечивается высокая вибропрочность сварного стыкового соединения с механической обработкой шва.

Для испытаний заданной марки стали выбрана «Сталь-20» одной плавки (контроль—химическим анализом). Сваривание образцов осуществлялось универсальным электродом марки «АНО-6», тип Э42-т с ильменитовым покрытием.

Для определения упругих постоянных сплавленного металла из трех неиспытанных сварных стыковых образцов в зоне шва вырезано по 6 прямоугольных микрообразцов размером $3\times5\times40$ *мм*. Среднее значение модуля упругости сплавленного металла $E_1 = 1{,}8\times10^6$ *кг/см²*, коэффициент Пуассона $\nu_1 = 0{,}29$.

Для определения упругих постоянных основного металла от листов вырезаны вдоль проката 3 образца (для испытаний на растяжение). Среднее значение модуля упругости $E_2 = 2{,}12\times10^6$ *кг/см²*, коэффициент Пуассона $\nu_2 = 0{,}32$.

Модуль сдвига наплавленного металла

$$G_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)} = 0{,}717\times10^6\ \textit{кг/см}^2$$

модуль сдвига основного металла

$$G_2 = \frac{E_2}{2(1+\nu_2)} = 0{,}803\times10^6\ \textit{кг/см}^2$$

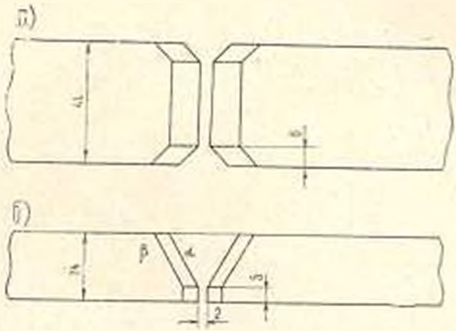
Отношение модулей сдвига $\mu = \dfrac{G_1}{G_2} = 0{,}893$, то есть модуль сдвига G_1 наплавленного металла, к которому относится угол α, меньше, чем модуль сдвига G_2 основного металла, а отношение коэффициентов Пуассона $\dfrac{\nu_1}{\nu_2} = 0{,}906$.

Тогда $$\mu < \frac{\nu_1}{\nu_2} \quad \text{и} \quad \mu < \frac{1-\nu_1}{1-\nu_2} = 1.04$$

Подставляя значения $m_1 = 0.775$, $m_2 = 0.757$ и μ в формулы (1.3), получаем:

$$\sin^2 \alpha = 0.74 \quad \alpha = 59°30' \quad \alpha^* < 59°30'$$

то есть край поверхности контакта в этом случае будет малонапряженным. Сварные образцы изготовлялись из частей (24×110×250) *мм*, отрезанных от одного прокатного листа марки «Сталь-20». Технология изготовления и сварка образцов описаны автором [4].



Фиг. 1. *а* — вид сверху, *б* — вид сбоку.

На фиг. 1 показана схема разделки кромок. После сварки обработка образцов производилась так, чтобы получалось два типа соединения: V-образный шов со снятой подваркой и V-образный шов с подваркой 2 *мм*.

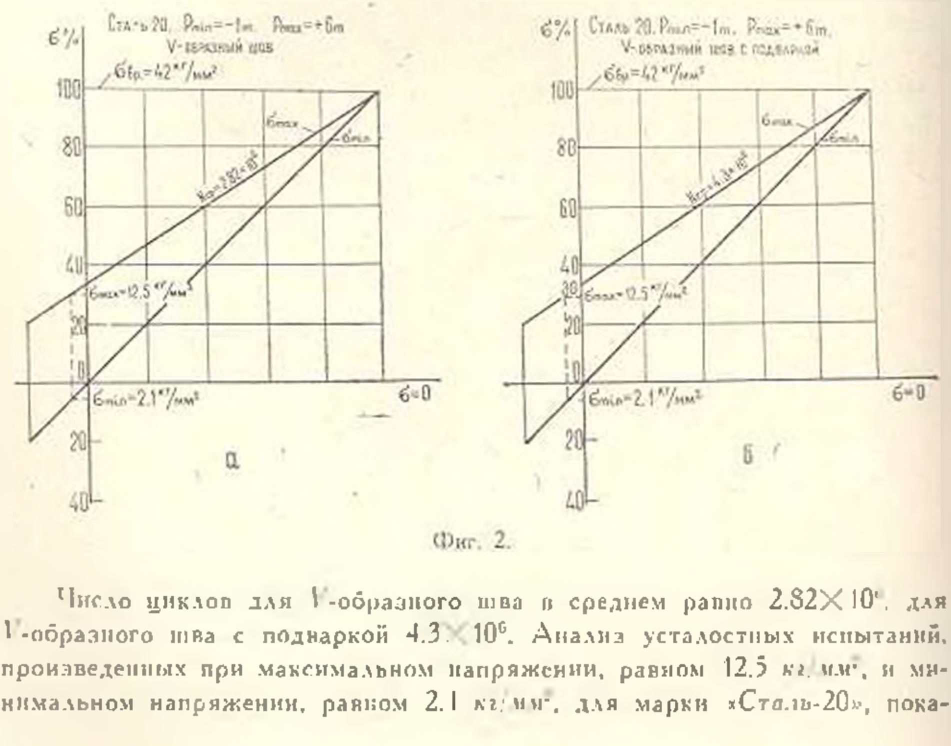
Испытание всех образцов осуществлялось с частотой 1000 *цикл/мин* на пульсаторе марки ЦДМ ПУ-10. Удлинение, происходящее во время пульсации в стыковом соединении, а также контроль нагружения в течение всего опыта производились измерительным устройством UM-III. Образцы подвергались переменному растяжению и сжатию. Минимальная нагрузка, приложенная на образец,—1 т, максимальная нагрузка — +6 т. Амплитуда напряжений, приложенных к образцу, равна 14.6 *кг/мм*². Результаты испытаний двух типов образцов без подварки и с подваркой представлены в табл. 1 и 2 (соответственно). Определенные значения дан-

Таблица 1

№№ п п	Поперечное сечение образца в *мм*²	Минимальная нагрузка в *т*	Максимальная нагрузка в *т*	Число циклов
1	485	—1	+6.2	4.3×10^6
2	485	—1	+6.2	1.65×10^6
3	485	—1	+6.2	2.0×10^6
4	482	—1	+6.0	2.2×10^6
5	482	—1	+6.0	1.62×10^6
6	482	—1	+6.0	3.3×10^6
7	482	—1	+6.0	1.41×10^6
8	480	—1	+6.0	8.0×10^6
9	480	—1	+6.0	1.8×10^6
10	480	—1	+6.0	3.4×10^6
11	480	—1	+6.0	1.4×10^6

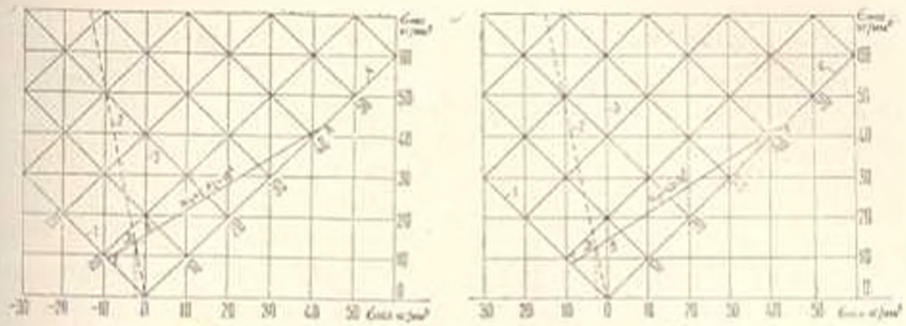
№№ п/п	Поперечное сечение образца в $мм^2$	Минимальная нагрузка в $т$	Максимальная нагрузка в $т$	Число циклов
1	482	−1	+6.0	1.4×10^6
2	490	−0.8	+6.2	2.3×10^6
3	482	−1	+6.0	2.6×10^6
4	482	−1	+6.0	10×10^6
5	482	−1	+6.0	3.56×10^6
6	482	−1	+6.0	1.6×10^6
7	480	−1	+6.0	6.3×10^6
8	482	−1	+6.0	5.0×10^6
9	486	−0.9	+6.2	1.4×10^6
10	480	−1	+6.0	5.2×10^6
11	480	−1	+6.0	5.1×10^6
12	480	−1	+6.0	2.0×10^6

ных табл. 1 и 2 использованы для построения диаграмм предельных напряжений или диаграмм Гудмана [5] (фиг. 2). Чтобы получить простые формулы для расчета конструкций, диаграмму предельных напряжений представляем в видоизмененной форме, где одна кривая дает полное представление о сопротивлении усталости соединения при данном числе циклов до разрушения при изменяющейся в широких пределах форме цикла (фиг. 3).



Фиг. 2.

Число циклов для V-образного шва в среднем равно 2.82×10^6, для V-образного шва с подваркой 4.3×10^6. Анализ усталостных испытаний, произведенных при максимальном напряжении, равном 12.5 $кг/мм^2$, и минимальном напряжении, равном 2.1 $кг/мм^2$, для марки «Сталь-20», показывает, что в этих условиях долговечность V-образного шва снижается в 1.5 раза по сравнению с V-образным швом с подваркой. Такое поведение соединения может быть обусловлено тем, что изменение угла в верхней части соединяемых материалов влечет за собой изменение угла в нижней



а) б)

Фиг. 3. Диаграмма предельных напряжений для поперечных стыковых соединений с V-образной разделкой кромок.

Сталь 20; $R = \frac{-1}{0}$; 1 — симметричный цикл; 2 — асимметричный цикл $R = \frac{-1}{0}$, статич. растяжение; 3 — пульсирующий цикл растяжения; 4 — статическое нагружение.

части, что является причиной концентрации напряжений. С применением V-образного шва с подваркой углы в верхней и нижней частях становятся равными, что снимает концентрацию напряжений в указанных зонах.

Ереванский государственный
университет

Поступила 17 I 1979

Լ. Ս. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԿԱՐԻ ՁԵՎԻ ԵՎ ՄԱՍԵՐԻ ՄԻԱՑՄԱՆ ԵՌԱԿՑՄԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ԱՆՀԱՄԱՍՆՈՒԹՅԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ԵՐԿԱՐԱՏԵՎՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված են սահմանային անկյան տեսական նշանակությունը և եռակցված միացումների մեխանիկական երկարակեցությունը փոխված կարվածքի ձևից և սահմանային կարի դեֆորմացիայի տարասեռությունից: Որոշված է տարբեր մասերի միացման սահմանային կարի անկյան մեծությունը տեսականորեն, երբ սահմանային գոտում առաջանում են փոքր լարումներ:

Փորձերի միջոցով, ձգման և սեղմման միատամանակյա ասիմետրիկ ցիկլի դեպքում ստացվել են տվյալներ, որոնք հնարավորություն են տալիս կառուցել դիագրամներ, եռակցման ենթակա միացություններում երկարակեցության որոշելու համար։

THE STUDY ON EFFECT OF THE LAY-OUT FORM AND DEFORMATIVE HETEROGENITY OF WELDING JOINTS ON MECHANICAL DURABILITY

L. S. MKRTCHIAN

Summary

The problem of determining the limiting angle and the mechanical durability limit for welding jounts, depending on the lay-out form and deformative heterogenity of joint's zone, is discussed. The theoretical value of limiting angle is determined for heterogeneous materials, when in the joint's zone the stress concentration is minimal.

In experiments dealing with asymmetric cycle of compression — tension some data are obtained, allowing to construct diagrams to evaluate mechanical durability of welding joints.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rabbe P., Bastenaire F., Pomey G.* Soudage et Techniques connexes. 1968, vol. 22, No. 5/6.
2. *Большаков К. П.* Снижение напряжений в узлах сварных пролетных строений. Сб. «Исследования прочности и долговечности сварных мостовых конструкций». Тр. ЦНИИС, вып. 20. М., Трансжелдориздат, 1956.
3. *Чобанян К. С.* Авторское свидетельство № 307869. Бюллетень «Открытия и изобретения», 1971, № 21.
4. *Мкртчян Л. С.* Зависимость долговечности сварных соединений от геометрии стыков. Промышленность Армении, 1978, № 3.
5. *Мюнзе В. Х.* Усталостная прочность сварных стальных конструкций. М., Изд. «Машиностроение», 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 4, 1979 Механика

Н. Е. САРКИСЯН

АНИЗОТРОПИЯ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ И РАЗОГРЕВА СТЕКЛОТЕКСТОЛИТА ПРИ НАЛИЧИИ КОНЦЕНТРАТОРА

Как известно, уже в простейшем случае растяжения полосы с круглым отверстием закон равномерного распределения напряжений вблизи отверстия нарушается. При этом напряженное состояние становится двуосным и у края отверстия возникает пик напряжения (эффект концентрации напряжений). Для гетерогенных материалов, в частности, стеклопластиков, разрушение отдельного звена (например, волокна) приводит к перераспределению напряжений по всему сечению и, в конечном счете, к тенденции непрерывного сглаживания пика напряжений.

Исследованию эффекта концентрации напряжений в стеклопластиках при кратковременном статическом нагружении посвящен ряд работ, из которых следует отметить исследования авторов [1, 2]. В меньшей степени изучено влияние концентратора напряжений на изменение усталостной прочности композитов. Имеющиеся в литературе данные недостаточны и, главным образом, соответствуют симметричному растяжению-сжатию материала вдоль волокон в области многоцикловой усталости. Основными исследованиями в этом направлении являются работы [3]. Анизотропия механических свойств материала учитывалась лишь в работе [4].

В настоящей работе исследуется влияние концентратора напряжений в виде отверстия на анизотропию прочности стеклотекстолита при растяжении в области мало- и многоцикловой усталости. Рассмотрено также влияние концентратора на изменение циклического разогрева материала.

Объектом для испытаний служил стеклотекстолит, изготовленный методом прессования на основе ткани ТСУ 8/3 и связующего ЭДТ-10Т.

Опыты проводили на плоских образцах, вырезанных из листов стеклотекстолита толщиной 3.8—4.2 *мм*. Образцы имели форму двусторонней лопатки с радиусом закругления к галтелям 75 *мм*. Ширина и длина рабочего участка образца составляла 15 и 50 *мм*. В качестве концентратора напряжений служило центральное отверстие диаметром 4 *мм*, просверленное перпендикулярно к плоскости стеклоткани. Отношение диаметра отверстия к ширине образца в неослабленном сечении, как и в [3], составило примерно 1/4*.

Испытание образцов производилось в течение промежутка времени 0.5—1.5 года после изготовления материала. Температура и относительная

* Влияние изменения этого отношения применительно к пределу прочности стеклопластика для различных условий подробно изучено в [1, 2] и др.

влажность окружающей среды за весь период были в пределах 22 ± 3 С и $67 \pm 5\%$.

Для учета анизотропии механических свойств материала испытывали образцы, вырезанные вдоль основы и утка ткани ($\varphi = 0°$ и $90°$) и в диагональном направлении ($\varphi = 45°$).

Испытания на мало- и многоцикловое растяжение проводили в режиме нагружения, характеризующемся постоянной нагрузкой опыта при частоте 1 и 1200 *цикл/мин*. Циклическое растяжение с малой частотой осуществляли на разрывной машине статического деформирования ЦДМ-10, для этой цели дополнительно оборудованной автоматическими переключателями. Испытания на многоцикловую усталость проводили на гидропульсаторе ЦДМПу-10. Усталостные испытания вели на базе соответственно 10^4 и $2 \cdot 10^6$ *циклов* нагружения.

В качестве основного показателя концентрации напряжений вблизи отверстия ниже рассматривается эффективный коэффициент концентрации K, который для общего случая равен

$$K_r = \frac{\sigma}{\sigma^*}$$

где σ — прочность гладкого образца (без концентратора);

σ^* — номинальная (условная) прочность образца, имеющего концентратор напряжения;

r — коэффициент асимметрии нагружения, определяемый отношением напряжений цикла σ_{min} и σ_{max}.

Для предела прочности эффективный коэффициент концентрации напряжений равен

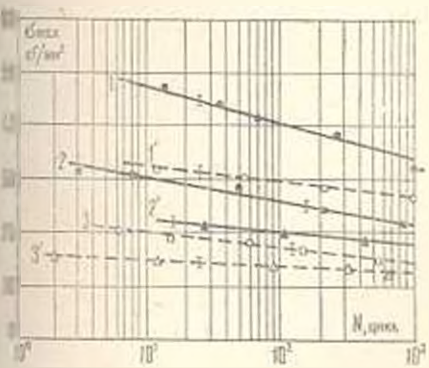
$$K_{+1} = \frac{\sigma_в}{\sigma_в^*}$$

Применительно к усталостной прочности на отнулевое растяжение величину коэффициента K вычисляли для определенной долговечности

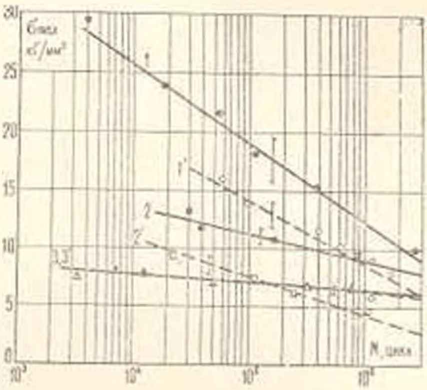
$$K_0 = \frac{\sigma_{max}(N)}{\sigma_{max}^*(N)}$$

В табл. 1 приведены экспериментальные данные, показывающие влияние рассмотренного здесь концентратора на изменение кратковременной и усталостной прочности стеклотекстолита в зависимости от ориентации нагрузки. В каждом направлении для определения предела прочности было испытано 5—18 образцов, а для построения усталостной кривой Велера (фиг. 1 и 2) по 14—20 образцов (всего испытано более 270 образцов).

При кратковременном статическом растяжении отверстие диаметром 4 *мм* вызывает сравнительно меньшее изменение прочности при $\varphi = 45°$ и большее изменение, когда нагрузка действует в направлении утка ткани. Это можно объяснить тем, что при $\varphi = 45°$ ярко проявляется нелинейно вязко-упругое свойство связующего, приводящего к перераспределению напряжений в образцах, имеющих концентратор. У плоских образцов, вырезанных вдоль утка ткани, волокна поперечного направления (по основе их в несколько раз больше, чем по утку) на себя нагрузку не воспринимают. Более того, они вызывают добавочные местные концентрации напряжений [5]. Этим, на наш взгляд, следует объяснить более высокое значение эффективного коэффициента K по направлению $\varphi = 90°$.



Фиг. 1. Анизотропия малоцикловой прочности по растяжению 1, 2, 3 — $\varphi = 0°$, 90° и 45°.



Фиг. 2. Анизотропия многоцикловой прочности на растяжение 1, 2, 3 — $\varphi = 0°$, 90° и 45°.

На фиг. 1 и 2 показаны усталостные диаграммы Велера*, построенные по линейным корреляционным уравнениям общего вида

$$\sigma_{max} = a - d \lg N$$

Параметры этого уравнения для каждой серии испытаний приведены в табл. 1.

При малоцикловом растяжении эффективный коэффициент $K_в$ так же, как и коэффициент усталостной прочности $\frac{\sigma_{max}}{\sigma_в}$, в целом, слабо зависит от наличия концентратора (5—20%). Можно отметить, что на принятой базе испытания, в указанных выше пределах, наблюдается тенденция уменьшения влияния концентратора напряжений в образцах, ориентированных по основе и утку ткани (в последнем случае — в большей мере), а под углом 45° значение $K_в$ почти не меняется.

Циклическое деформирование образцов без отверстия (ориентация $\varphi = 45°$) сопровождается развитием поврежденности по всему объему (при $\varphi = 0°$ и 90° — визуально не наблюдается). Если в этом случае трудно

* Расчет уравнений проведен по неосредненным данным. Точками обозначены среднеарифметические значения усталостной прочности и долговечности. Указаны также доверительные границы колебания среднего значения при вероятности 0.95, рассчитанные на основе распределения Стьюдента. Как на фиг. 1, 2, так и на последующих фигурах светлые точки соответствуют образцам с отверстием.

№№ п/п	Ориента-ция φ, град	Наличие концен-тратора	Предел прочно-сти σ_b, $кГ/мм^2$	Коэффици. вариации ε_σ, %
1	0	—	52.80	4.20
2	0	+	36.45	2.10
3	45	—	20.85	18.50
4	45	+	15.40	3.05
5	90	—	37.40	2.20
6	90	+	20.80	3.65
7	0	—	52.80	4.20
8	0	+	36.45	2.10
9	45	—	20.85	18.50
10	45	+	15.40	3.05
11	90	—	37.40	2.20
12	90	+	20.80	3.65

Таблица 1

Эф. коэфф. конц. напр. $K_{[1]}$	a	d	Коэфф. корреляции $\sigma_{max} = a - d \lg N$	Коэфф. уст. прочности на базе	Эф. коэфф. конц. напр. K_n на базе
I. Малоцикловое растяжение					
—	54.2359	6.7204	−0.8931	0.65	—
1.45	35.4019	2.7801	−0.8468	0.74	1.26
—	24.3773	2.0773	−0.8743	0.87	—
1.36	16.0335	1.2104	−0.9599	0.81	1.38
—	34.7541	4.3516	−0.9359	0.58	—
1.80	22.2141	2.8345	−0.9497	0.69	1.52
II. Многоцикловое растяжение					
—	52.4818	6.7385	−0.8947	0.19	—
1.45	40.9224	5.3879	−0.8868	0.19	1.44
—	10.6056	0.7301	−0.9014	0.29	—
1.36	11.3412	0.8795	−0.9280	0.38	1.04
—	22.9152	2.3234	−0.8419	0.22	—
1.80	23.7704	3.2669	−0.8787	0.16	2.55

определить начальный очаг возникновения трещин, то при испытании образцов с отверстием первые трещины всегда возникают у границ концентратора. Основную роль в зарождении этих трещин, видимо, играют сдвиговые напряжения, в отношении которых, как известно, стеклопластики сопротивляются слабее.

Направление дальнейшего распространения трещины и макрохарактер трещинообразования зависят от ориентации образца. При $\varphi = 0°$ и $45°$ визуально наблюдаются магистральные трещины, которые возникают параллельно волокнам. Когда сила действует по основе ткани, четко видны две такие трещины, развивающиеся по границе волокон основы по разные стороны отверстия в противоположных направлениях. При испытании образцов, вырезанных в диагональном направлении, выделяются четыре магистральные трещины, идущие симметрично направлению нагрузки.

Когда растяжение происходит в направлении утка ткани, характер процесса разрушения несколько меняется. В этом случае трещины, развиваясь от границ отверстия, в процессе усталости не вливаются в магистральные трещины, а образуют две ярко выраженные зоны повреждения, имеющие веерообразную форму. Вершины этих зон располагаются у края отверстия в точках, где концентрация напряжений по сечению достигает максимума.

В области многоцикловой усталости (частота 1200 *цикл/мин*) рассмотренный концентратор при нагружении вдоль волокон основы ткани не вызывает изменения коэффициента усталостной прочности и эффективного коэффициента концентрации, равно как и не отражается на характере хрупкого разрушения материала. В случае циклического растяжения в диагональном направлении ($\varphi = 45°$) коэффициент $K_в \approx 1.0$, что свидетельствует о практически полном отсутствии влияния концентратора (табл. 1 и 2). Это, в частности, можно объяснить работой вязко-упругой матрицы в композиции волокно-связующее, когда по мере разрушения

Таблица 2

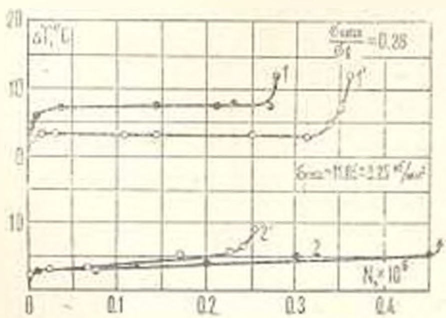
Ориентация φ град.	Наличие концентратора	Диапазон уровня относ. напряжения $\frac{\sigma_{max}}{\sigma_в}$	Диапазон долговечности N, 10^6 цикл	Критическая температура разогрева T_k, °C	Температура разогрева при разрушении $T_р$, °C
0	—	0.23—0.56	0.004—4.165	31.0±3.0	34.5±3.5
	+	0.24—0.41	0.040—1.783	27.5±1.0	34.0±4.0
45	—	0.31—0.41	0.050—0.925	37.5±4.5	46.0±5.0
	+	0.39—0.49	0.007—1.410	28.0±2.5	35.0±4.0
90	—	0.26—0.36	0.010—1.945	41.5±5.0	45.5±6.5
	+	0.22—0.48	0.015—0.370	31.0±2.5	31.0±2.5

матрицы от напряжений сдвига уменьшается эффективная глубина зоны распространения влияния отверстия. Поэтому происходит снижение концентрации напряжений у границ отверстия [2]. В этом случае разрушение имеет объемный характер с сильно прогрессирующей по времени повреждаемостью. Последнее обстоятельство, характерное также и при деформировании образцов, вырезанных по утку, в эксперименте требует периодического доведения максимальной нагрузки и асимметрии цикла до первоначально заданных значений.

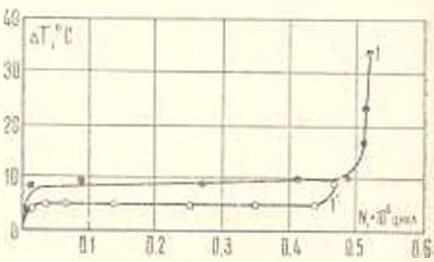
С точки зрения анизотропии влияние концентратора особенно проявляется при усталостном испытании образцов, ориентированных по утку ($\varphi = 90^\circ$). Прежде всего, в отличие от пяти других здесь рассмотренных и ранее наблюдавшихся случаев [3], имеет место резкая зависимость эффективного коэффициента K_σ от долговечности (изменение K_σ почти в два раза на принятой базе испытания). Как показывают подсчеты, при меньших долговечностях, то есть при высоких уровнях напряжения, концентрация напряжений сильно уменьшается (также и по сравнению с пределом прочности), а при низких напряжениях значение K_σ резко возрастает. Это можно объяснить тем, что с ростом нагрузки касательные напряжения раньше достигают предела сдвиговой прочности связующего, чем растягивающие напряжения достигнут предела прочности стеклопластика [2].

Боллером [6] подробно изучено влияние концентратора в виде круглого отверстия на усталостную прочность ряда стеклопластиков при симметричном растяжении-сжатии в условиях повышенных температур. Установлено, что в диапазоне 23—260°C температура практически не влияет на чувствительность к концентрации напряжений, а в некоторых случаях значение коэффициента K_{-1} получается ниже на 15—20% (в одном случае даже $K_{-1} = 0.83$).

В настоящей работе изучался циклический разогрев стеклотекстолита при многоцикловом растяжении в зависимости от анизотропии и наличия концентратора. Температура измерялась на поверхности образца в зоне разрушения (возможное отклонение не более 1—2 мм) [7].



Фиг. 3. Влияние концентратора на разогрев, $\varphi = 0$

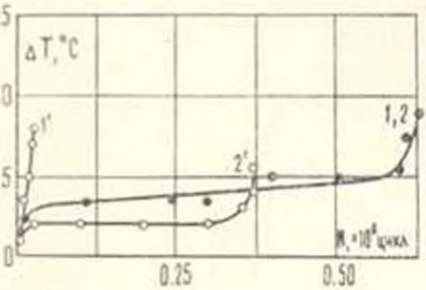


Фиг. 4. Влияние концентратора на разогрев $\varphi = 45^\circ$, $\sigma_{max} = 6.60 \pm 0.10$ $кГ/мм^2$

На фиг. 3—5 приведены характерные кривые разогрева $\Delta T - N$. Графики показывают влияние концентратора на кинетику разогрева при одинаковом значении номинального напряжения σ_{max} и относительном уровне напряжения $\frac{\sigma_{max}}{\sigma_в}$.

Экспериментальные данные указывают на то, что при одинаковом относительном уровне напряжения на линейном участке зависимости $\Delta T - N$, которым в основном определяется долговечность, у образцов с отверстием разогрев ΔT меньше, чем у гладких образцов, и независимо от угла φ составляет всего лишь около 5°C. При условии $\sigma_{max} = const$ на отмеченном участке циклический разогрев, как правило, выше на образцах с концентратором напряжения.

При низких значениях напряжения рост температуры на основном участке долговечности практически отсутствует (примеры иллюстрируются на фиг. 3—5). Однако, и в этих случаях излому образца предшествует характерный подъем температуры разогрева. В табл. 2 приведены среднеарифметические значения критической температуры разогрева T_k и температуры разрушения T_p, определенные с учетом температуры среды испытания [7]. Здесь показано также колебание температуры разогрева, соответствующее вероятности ошибки измерения 0,67. Как видно из табличных данных, величина температур T_k и T_p мало зависит от напряжения или долговечности.



Фиг. 5. Влияние концентратора на разогрев, $\varphi = 90°$; 1,1' — $\sigma_{max} = 9.70 \pm 0.10$ $кГ/мм^2$; 2,2' — $\frac{\sigma_{max}}{\sigma_в} = 0.250$.

При изменении напряжения почти в 1.5—2.5 раза (долговечности на 2—3 порядка) температура меняется на 20—30%. При этом несущественно также и влияние анизотропии.

На основании экспериментальных данных (табл. 2) можно заключить, что концентратор напряжения снижает характерные величины температуры разогрева (напр., для ΔT_k в 2—3 раза). Одной из причин ослабления разогрева может быть улучшение условий теплоотвода с поверхности образца при наличии концентратора.

Выводы. 1. Рассмотренный концентратор в виде центрального круглого отверстия в зависимости от ориентации растягивающей нагрузки и частоты нагружения по-разному влияет на концентрацию напряжений в стеклотекстолите:

а) при циклическом деформировании в направлении основы ткани ($\varphi = 0°$) и под углом $\varphi = 45°$ независимо от частоты концентрация напряжений ниже, чем для предела прочности; при $\varphi = 45°$ в области многоцикловой усталости концентрация напряжений практически отсутствует;

б) при малоцикловом растяжении стеклотекстолита вдоль утка ткани концентрация напряжений заметно ниже, чем для предела прочности, а в многоцикловой области резко зависит от долговечности; при высоких уровнях напряжений она существенно ниже, а при низких напряжениях — выше, чем для предела прочности в этом направлении.

2. При одинаковом относительном уровне циклического напряжения образцы с концентратором имеют меньший разогрев, чем гладкие образцы; независимо от анизотропии материала на основном участке выносливости образцов разогрев в этих случаях практически отсутствует.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 11 X 1978

Ն. Ե. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ԱՊԱԿԵՏԵՔՍՏՈԼԻՏԻ ՑԻԿԼԱՅԻՆ ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՏԱՔԱՑՄԱՆ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊԻԱՆ ԿՈՆՑԵՆՏՐԱՏՈՐԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Կատարված է կլոր անցքի ձևով կոնցենտրատորի ազդեցության փորձնական ուսումնասիրությունը ապակետեքստոլիտի հոգնածային ամրության անիզոտրոպիայի վրա փոքրաթիվ ցիկլային (հաճախականությունը 1 ցիկլ/րոպե) և բազմացիկլային (1200 ցիկլ/րոպե) ձգման դեպքում: Դիտարկված է նաև կոնցենտրատորի ազդեցությունը նյութի ինքնատաքացման և մակրոքայքայման բնույթի վրա՝ բեռի կողմնորոշումից կախված, որը կիրառվել է գործվածքի հենքի և թեզանի երկայնությամբ և անկյունագծային ուղղությամբ:

ANISOTROPY OF CYCLE STRENGTH AND HEATING OF GLASS REINFORCED PLASTIC WITH A CONCENTRATOR

N. E. SARKISIAN

Summary

An experimental study of the effect of a tension concentrator in the form of round aperture on anisotropy of glass reinforced plastic's strength under strain in the region of low-cycle (loading frequency of one cycle per minute) and multy-cycle (1200 cycles per minute) fatigue is discussed.

The effect of the concentrator on the heating change and on the mode of macrodistruction of the material, depending on the orientation of loading, applied at the angles of 0°, 45° and 90°, is considered as well.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Серенсен С. В., Стрелясв В. С., Болотников Б. Н.* Определение расчетных характеристик прочности стеклопластиков в зонах концентрации напряжений. Проблемы прочности, 1972, № 10, 3—9.
2. *Полилов А. Н., Степанычев Е. И.* Влияние концентрации напряжений на прочность ортогонально армированных полимеров. Машиноведение, 1975, № 1, 70—74.
3. *Boller K. H.* Resume of fatique Characteristics of Reinforced Plastic Laminates Subjected to Axial Loading. Jn. Fatique an interdisciplinary approach Proceedings of the 10-th Sagamore Army Materials Research Conference, 1964, 325—341.
4. *Owen M. J., Bishop P. T.* Fatique properties of glassreinforced plastics containing a stress concentrator. J. Phys. D., Appl. Phys. 1973, 6, No. 17, 2057—2069.
5. *Корten X. T.* Разрушение армированных пластиков. М., Химия, 1967, 165 с.
6. *Хайдл Р. Б.* Проектирование с учетом устойчивости. М., Машиностроение, 1969, 504 с.
7. *Саркисян Н. Е.* Влияние анизотропии на циклическую деформативность и разогрев стеклопластиков типа СВАМ. Механика полимеров, 1971, № 5, 898—903.