ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1979

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 3, 1979 Механика

В. С. ТОНОЯН, А. Ф. МИНАСЯН

ОБ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОЙ СОСТАВНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Исследованию плоской смешанной и контактной задачи теории упругости для составных плоскостей, полуплоскостей и полос посвящено много работ [1—8]. В этих работах принималось, что линии раздела различных материалов параллельны граничной линии, а свойства упругого материала в направлениях, параллельных границе, не изменяются.

В работе [9] рассматривалась задача о давлении жесткого штампа, приложенного на части границы упругой составной полуплоскости, когда полуплоскость состоит из двух квадрантов одинакового материала и полуполосы между ними из другого материала, линии раздела которых перпендикулярны границе полуплоскости. Смешанные задачи для составной плоскости и полосы с трещиной и первая основная задача для составной полуплоскости рассмотрены в работах [10—13].

1. В настоящей работе получено решение задачи о давлении жесткого штампа с основанием произвольной формы, приложенного на части горизонтальной границы упругой составной полуплоскости.

Полуплоскость состоит из двух однородных и изотропных квадрантов с различными упругими свойствами, линии раздела которых перпендикулярны границе полуплоскости. На границе полуплоскости приложен жесткий штамп с гладким основанием так, что штамп находится одновременно на обоих материалах и расположен несимметрично относительно линии ($x = 0$) (фиг. 1). Предполагается, что трение между штампом и материалами отсутствует. Для простоты принимается также, что граница полуплоскости вне штампа свободна от внешних усилий. После решения задачи при принятых допущениях устраняются особенности напряжений и получаются уравнения, определяющие длины зон контакта. В частном случае, если материалы квадрантов одинаковы, то получается решение контактной задачи теории упругости для однородной полуплоскости, совпадающее с решением, полученным М. А. Садовским [14].

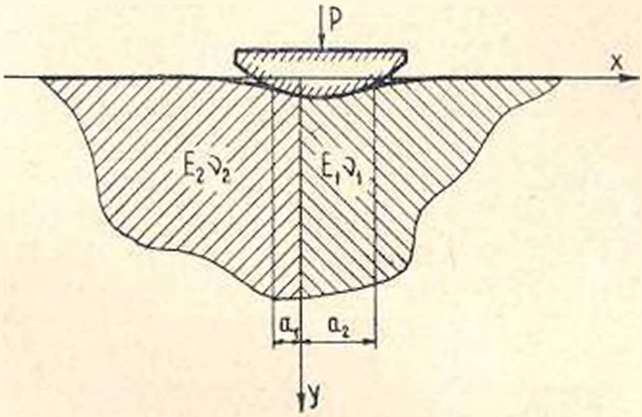
Поставленная задача сводится к определению бигармонической функции $\Phi_1(x, y)$ в области правого квадранта и $\Phi_2(x, y)$ — в области левого квадранта. Ищем функции $\Phi_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) в виде

$$\Phi_i(x, y) = \int_0^\infty [A_i(\alpha) + (-1)^{i+1} \alpha x B_i(\alpha)] \exp[(-1)^i \alpha x] \cos(\alpha y)\, dy +$$

$$+(-1)^{i+1}\int\limits_0^\infty [C_i(\beta)+\beta y D_i(\beta)]\exp[-\beta y]\sin(\beta x)\,d\beta \tag{1.1}$$

$(i=1,\ 2;\ 0\leqslant y<\infty,\ \ 0\leqslant x<\infty$ при $i=1,\ -\infty<x\leqslant 0$ при $i=2)$

Здесь $A_i(\alpha)$, $B_i(\alpha)$, $C_i(\beta)$, $D_i(\beta)$ $(i=1,\ 2)$ — неизвестные функции, подлежащие определению из граничных условий и условий контакта.



Фиг. 1.

Используя обычные формулы для определения напряжений и перемещений [15], будем иметь

$$\sigma_x^{(1)}=-\int\limits_0^\infty \alpha^2[A_1(\alpha)+\alpha x B_1(\alpha)]e^{-\alpha x}\cos(\alpha y)\,d\alpha+$$

$$+\int\limits_0^\infty \beta^2[C_1(\beta)-2D_1(\beta)+\beta y D_1(\beta)]e^{-\beta y}\sin(\beta x)\,d\beta$$

$$\sigma_y^{(1)}=\int\limits_0^\infty \alpha^2[A_1(\alpha)-2B_1(\alpha)+\alpha x B_1(\alpha)]e^{-\alpha x}\cos(\alpha y)\,d\alpha-$$

$$-\int\limits_0^\infty \beta^2[C_1(\beta)+\beta y D_1(\beta)]e^{-\beta y}\sin(\beta x)\,d\beta$$

$$\tau_{xy}^{(1)}=\int\limits_0^\infty \alpha^2[A_1(\alpha)-B_1(\alpha)+\alpha x B_1(\alpha)]e^{-\alpha x}\sin(\alpha y)\,d\alpha+$$

$$+\int\limits_0^\infty \beta^2[C_1(\beta)-D_1(\beta)+\beta y D_1(\beta)]e^{-\beta y}\cos(\beta x)\,d\beta$$

$$U_1 = \frac{1}{E_1}\left\{\int_0^\infty \alpha\left[A_1(\alpha)(1+\nu_1) + B_1(\alpha)(1-\nu_1) + \right.\right.$$

$$\left. + \alpha x B_1(\alpha)(1+\nu_1)\right] e^{-\alpha x}\cos(\alpha y)\, d\alpha -$$

$$\left. - \int_0^\infty \beta\left[C_1(\beta)(1+\nu_1) - 2D_1(\beta) + \beta y D_1(\beta)(1+\nu_1)\right] e^{-\beta y}\cos(\beta x)\, d\beta\right\}$$

$$V_1 = \frac{1}{E_1}\left\{\int_0^\infty \alpha\left[A_1(\alpha)(1+\nu_1) - 2B_1(\alpha) + \alpha x B_1(\alpha)(1+\nu_1)\right] e^{-\alpha x}\sin(\alpha y)\, d\alpha + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \beta\left[C_1(\beta)(1+\nu_1) + D_1(\beta)(1-\nu_1) + \beta y D_1(\beta)(1+\nu_1)\right] e^{-\beta y}\sin(\beta x)\, d\beta\right\}$$

$$\sigma_x^{(2)} = -\int_0^\infty \alpha^2\left[A_2(\alpha) - \alpha x B_2(\alpha)\right] e^{\alpha x}\cos(\alpha y)\, d\alpha -$$

$$- \int_0^\infty \beta^2\left[C_2(\beta) - 2D_2(\beta) + \beta y D_2(\beta)\right] e^{-\beta y}\sin(\beta x)\, d\beta$$

$$\sigma_y^{(2)} = \int_0^\infty \alpha^2\left[A_2(\alpha) - 2B_2(\alpha) - \alpha x B_2(\alpha)\right] e^{\alpha x}\cos(\alpha y)\, d\alpha +$$

$$+ \int_0^\infty \beta^2\left[C_2(\beta) + \beta y D_2(\beta)\right] e^{-\beta y}\sin(\beta x)\, d\beta \qquad (1.2)$$

$$\tau_{xy}^{(2)} = \int_0^\infty \alpha^2\left[A_2(\alpha) - B_2(\alpha) - \alpha x B_2(\alpha)\right] e^{\alpha x}\sin(\alpha y)\, d\alpha +$$

$$+ \int_0^\infty \beta^2\left[D_2(\beta) - C_2(\beta) - \beta y D_2(\beta)\right] e^{-\beta y}\cos(\beta x)\, d\beta$$

$$U_2 = \frac{1}{E_2}\left\{-\int_0^\infty \alpha\left[A_2(\alpha)(1+\nu_2) + B_2(\alpha)(1-\nu_2) - \right.\right.$$

$$- \alpha x B_2(\alpha)(1+\nu_2)\big] e^{\alpha x}\cos(\alpha y)\, d\alpha +$$

$$+ \int_0^\infty \beta\left[C_2(\beta)(1+\nu_2) - 2D_2(\beta) + \right.$$

$$\left.\left. + \beta y D_2(\beta)(1+\nu_2)\right] e^{-\beta y}\cos(\beta x)\, d\beta\right|$$

$$V_2 = \frac{1}{E_2} \Big\{ \int_0^\infty \alpha [A_2(\alpha)(1+\nu_2) - 2B_2(\alpha) -$$

$$- \alpha x B_2(\alpha)(1+\nu_2)] e^{\alpha x} \sin(\alpha y)\, d\alpha -$$

$$- \int_0^\infty \beta [C_2(\beta)(1+\nu_2) + D_2(\beta)(1-\nu_2) +$$

$$+ \beta y D_2(\beta)(1+\nu_2)] e^{-\beta y} \sin(\beta x)\, d\beta \Big\}$$

где E_i и ν_i $(i = 1, 2)$ — модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно, U_1, V_1, $\tau_{xy}^{(1)}$ и $\sigma_y^{(1)}$ — перемещения и напряжения точек правого квадранта, а U_2, V_2, $\tau_{xy}^{(2)}$ и $\sigma_y^{(2)}$ — перемещения и напряжения точек левого квадранта.

Граничные условия в рассматриваемой задаче имеют вид

$$\begin{aligned} &V_1(x, 0) = f_1(x) && (0 \leqslant x \leqslant a_1) \\ &\sigma_y^{(1)}(x, 0) = 0 && (a_1 < x < \infty) \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} &V_2(x, 0) = f_2(x) && (-a_2 \leqslant x \leqslant 0) \\ &\sigma_y^{(2)}(x, 0) = 0 && (-\infty < x < -a_2) \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = 0 \qquad (0 < x < \infty) \tag{1.5}$$

$$\tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = 0 \qquad (-\infty < x < 0) \tag{1.6}$$

а условия контакта или жесткого соединения квадрантов выразятся равенствами

$$\begin{aligned} &U_1(0, y) = U_2(0, y) && V_1(0, y) = V_2(0, y) \\ &\sigma_x^{(1)}(0, y) = \sigma_x^{(2)}(0, y) && \tau_{xy}^{(1)}(0, y) = \tau_{xy}^{(2)}(0, y) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Удовлетворяя условиям (1.5) и (1.6), получим

$$C_i(\beta) = D_i(\beta) \qquad (i = 1, 2) \tag{1.8}$$

Используя граничные условия (1.3) и (1.4), получаем следующую систему «парных» интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \beta D_1(\beta) \sin(\beta x)\, d\beta = \frac{E_1}{2} f_1(x) \qquad 0 \leqslant x \leqslant a_1 \\ &\int_0^\infty \beta^2 D_1(\beta) \sin(\beta x)\, d\beta = \int_0^\infty \alpha^2 [A_1(\alpha) - 2B_1(\alpha) + \alpha x B_1(\alpha)] e^{-\alpha x} d\alpha \\ &\qquad\qquad a_1 < x < \infty \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\int_0^\infty \beta D_2(\beta)\sin(\beta x)\,d\beta = -\frac{E_2}{2}f_2(x) \qquad -a_2 \leqslant x \leqslant 0$$

$$\int_0^\infty \beta^2 D_2(\beta)\sin(\beta x)\,d\beta = -\int_0^\infty \alpha^2[A_2(\alpha)-2B_2(\alpha)-\alpha x B_2(\alpha)]e^{\alpha x}d\alpha \tag{1.10}$$

$$-\infty < x < -a_2$$

Удовлетворяя условиям контакта двух материалов (1.7) и пользуясь при этом формулами обращения для преобразования Фурье, получим следующие соотношения:

$$A_1(\alpha) = A_2(\alpha)$$

$$\alpha B_2(\alpha) = 2\alpha A_1(\alpha) - \alpha B_1(\alpha) - \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\beta^3 D_1(\beta)\,d\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^2} - \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\beta^3 D_2(\beta)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\,d\beta$$

$$\alpha A_1(\alpha)\left(\frac{1+\nu_1}{E_1}-\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)-\frac{2}{E_1}\alpha B_1(\alpha)+\frac{2}{E_2}\alpha B_2(\alpha)=0 \tag{1.11}$$

$$\alpha A_1(\alpha)\left(\frac{1+\nu_1}{E_1}+\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)+\alpha B_1(\alpha)\frac{1-\nu_1}{E_1}+\alpha B_2(\alpha)\frac{1-\nu_2}{E_2}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \beta\left[\frac{\nu_1-1}{E_1}\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{1+\nu_1}{E_1}\frac{\beta(\beta^2-\alpha^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\right]D_1(\beta)\,d\beta+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \beta\left[\frac{\nu_2-1}{E_2}\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{1+\nu_2}{E_2}\frac{\beta(\beta^2-\alpha^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\right]D_2(\beta)\,d\beta$$

Из системы уравнений (1.11), выразив $\alpha A_1(\alpha)=\alpha A_2(\alpha)$, $\alpha B_1(\alpha)$ и $\alpha B_2(\alpha)$ через функции $D_1(\beta)$ и $D_2(\beta)$, получим:

$$\alpha A_1(\alpha)=\alpha A_2(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \beta\left[n_1\mu_1\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}+\mu_1\frac{\beta(\beta^2-\alpha^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}+\right.$$

$$\left.+\mu_2\frac{\beta^3}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\right]D_1(\beta)\,d\beta+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \beta\left[n_2\mu_2\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}+\mu_2\frac{\beta(\beta^2-\alpha^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}+\right.$$

$$\left.+\mu_2\frac{\beta^3}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\right]D_2(\beta)\,d\beta \tag{1.12}$$

$$\alpha B_1(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \beta \left[n_1\mu_4 \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} + \mu_1 \frac{\beta(\beta^2-\alpha^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2} - \mu_5 \frac{\beta^3}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \right] D_1(\beta)\, d\beta +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \beta \left[n_2 \frac{\mu_5}{2} \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{\mu_3}{2} \frac{\beta(\beta^2-\alpha^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2} - \mu_2 \frac{\beta^3}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \right] D_2(\beta)\, d\beta \quad (1.13)$$

$$\alpha B_2(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \beta \left[n_1\mu_6 \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} + \mu_6 \frac{\beta(\beta^2-\alpha^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2} - 2\mu_6 \frac{\beta^3}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \right] D_1(\beta)\, d\beta +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \beta \left[n_2\mu_7 \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} + \mu_7 \frac{\beta(\beta^2-\alpha^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2} - 2\mu_7 \frac{\beta^3}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \right] D_2(\beta)\, d\beta \quad (1.14)$$

где введены обозначения:

$$\mu_1 = 2\frac{(\nu_1+1)(m+1)}{\nu_1+1+(3-\nu_2)m}\,\frac{1}{3-\nu_1+(1+\nu_2)m}$$

$$\mu_2 = 4\frac{(2-\nu_1-\nu_2)}{1+\nu_1+(3-\nu_2)m}\,\frac{m}{3-\nu_1+(1+\nu_2)m}$$

$$\mu_3 = 2\frac{(\nu_2+1)(m+1)}{1+\nu_1+(3-\nu_2)m}\,\frac{m}{3-\nu_1+(1+\nu_2)m}$$

$$\mu_4 = \frac{1+\nu_1}{3-\nu_1+(1+\nu_2)m}; \qquad \mu_5 = 2\frac{(1+\nu_2)m}{(3-\nu_1)+(1+\nu_2)m}$$

$$\mu_6 = \frac{1+\nu_1}{(3-\nu_2)m+1+\nu_1}; \qquad \mu_7 = \frac{(\nu_2+1)m}{(3-\nu_2)m+1+\nu_1}$$

$$m = \frac{E_1}{E_2}; \qquad n_1 = \frac{\nu_1-1}{\nu_1+1}; \qquad n_2 = \frac{\nu_2-1}{\nu_2+1} \quad (1.15)$$

Используя результаты работы [9], выразим функции $\beta D_1(\beta)$ и $\beta D_2(\beta)$ из парных интегральных уравнений (1.9) и (1.10) через функции $A_1(\alpha)$, $B_1(\alpha)$ и $B_2(\alpha)$

$$\beta D_1(\beta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{a_1} \Psi_1(t) J_0(\beta t)\, dt + \frac{2}{\pi}\int_{a_1}^\infty F_1(t) J_0(\beta t)\, dt \quad (1.16)$$

$$\beta D_2(\beta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{a_2} \Psi_2(t) J_0(\beta t)\, dt + \frac{2}{\pi}\int_{a_2}^\infty F_2(t) J_0(\beta t)\, dt \quad (1.17)$$

$$\Psi_1(t) = \frac{d}{dt}\,\frac{E_1}{2}\int_0^t \frac{x f_1(x)\, dx}{\sqrt{t^2-x^2}} \quad (1.18)$$

$$F_1(t) = t\int_0^\infty \alpha^2 A_1(\alpha) K_0(\alpha t)\, d\alpha - 2t\int_0^\infty \alpha^2 B_1(\alpha) K_0(\alpha t)\, d\alpha +$$

$$+ t^2\int_0^\infty \alpha^3 B_1(\alpha) K_1(\alpha t)\, d\alpha \tag{1.19}$$

$$\Psi_2(\tau) = \frac{d}{d\tau}\frac{E_2}{2}\int_0^\tau \frac{x f_2(x)\, dx}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} \tag{1.20}$$

$$F_2(\tau) = \tau\int_0^\infty \alpha^2 A_1(\alpha) K_0(\alpha\tau)\, d\alpha - 2\tau\int_0^\infty \alpha^2 B_2(\alpha) K_0(\alpha\tau)\, d\alpha +$$

$$+ \tau^2\int_0^\infty \alpha^3 B_2(\alpha) K_1(\alpha\tau)\, d\alpha \tag{1.21}$$

$J_\nu(x)$ — функции Бесселя первого рода с действительным аргументом, а $K_\nu(x)$ — функции Макдональда. После подстановки значений функций $\beta D_1(\beta)$ и $\beta D_2(\beta)$ из (1.16) и (1.17) в соотношения (1.12), (1.13) и (1.14) выразим $\alpha A_1(\alpha)$; $\alpha B_1(\alpha)$ и $\alpha B_2(\alpha)$ через $F_1(t)$ и $F_2(\tau)$

$$\alpha A_1(\alpha) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{a_1} \Psi_1(t)\Big\{[(n_1+1)\mu_1 + \mu_2] K_0(\alpha t) -$$

$$-\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{2}\right)\alpha t K_1(\alpha t)\Big\}\, dt + \frac{4}{\pi^2}\int_{a_1}^\infty F_1(t)\Big\{[(n_1+1)\mu_1 + \mu_2] K_0(\alpha t) -$$

$$-\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{2}\right)\alpha t K_1(\alpha t)\Big\}\, dt + \frac{4}{\pi^2}\int_0^{a_1} \Psi_2(\tau)\Big\{[(n_2+1)\mu_3 + \mu_2] K_0(\alpha\tau) -$$

$$-\left(\mu_3 + \frac{\mu_2}{2}\right)\alpha\tau K_1(\alpha\tau)\Big\}\, d\tau + \frac{4}{\pi^2}\int_{a_1}^\infty F_2(\tau)\Big\{[(n_2+1)\mu_3 + \mu_2] K_0(\alpha\tau) -$$

$$-\left(\mu_3 + \frac{\mu_2}{2}\right)\alpha\tau K_1(\alpha\tau)\Big\}\, d\tau \tag{1.22}$$

$$\alpha B_1(\alpha) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{a_1} \Psi_1(t)\Big\{[(n_1+1)\mu_4 - \mu_5] K_0(\alpha t) -$$

$$-\left(\mu_4-\frac{\mu_5}{2}\right)\alpha t K_1(\alpha t)\Big\}\,dt+\frac{4}{\pi^2}\int\limits_{a_1}^{\infty}F_1(t)\Big\{[(n_1+1)\mu_4-\mu_5]\,K_0(\alpha t)-$$

$$-\left(\mu_4-\frac{\mu_5}{2}\right)\alpha t K_1(\alpha t)\Big\}\,dt+\frac{2}{\pi^2}(n_2-1)\,\mu_5\int\limits_0^{a_2}\Psi_2(\tau)\,K_0(\alpha\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{2}{\pi^2}(n_2-1)\,\mu_5\int\limits_{a_2}^{\infty}F_2(\tau)\,K_0(\alpha\tau)\,d\tau \qquad (1.23)$$

$$\alpha B_2(\alpha)=\frac{4}{\pi^2}(n_1-1)\,\mu_6\int\limits_0^{a_1}\Psi_1(t)\,K_0(\alpha t)\,dt+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}(n_1-1)\,\mu_6\int\limits_{a_1}^{\infty}F_1(t)\,K_0(\alpha t)\,dt+\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{a_2}\Psi_2(\tau)\Big\{[(n_2+1)\,\mu_7-2\mu_6]\,K_0(\alpha\tau)-$$

$$-(\mu_7-\mu_6)\,\alpha\tau K_1(\alpha\tau)\Big\}\,d\tau+\frac{4}{\pi^2}\int\limits_{a_2}^{\infty}F_2(\tau)\Big\{[(n_2+1)\,\mu_7-2\mu_6]\,K_0(\alpha\tau)-$$

$$-(\mu_7-\mu_6)\,\alpha\tau K_1(\alpha\tau)\Big\}\,d\tau \qquad (1.24)$$

При получении формул (1.22), (1.23) и (1.24) были использованы значения интегралов, приведенные в работе [9].

Подставляя значения функций $\alpha A_1(\alpha)$, $\alpha B_1(\alpha)$ и $\alpha B_2(\alpha)$ из (1.22), (1.23) и (1.24) в (1.19) и (1.21), для определения $F_1(t)$ и $F_2(\tau)$ получаем систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода, которая после некоторых преобразований [9] примет вид:

$$\begin{aligned} F_1(z)&=\Omega_1(z)+\int\limits_{a_1}^{\infty}F_1(t)\,K_1(z,\,t)\,dt+\int\limits_{a_2}^{\infty}F_2(\tau)\,K_2(z,\,\tau)\,d\tau \\ F_2(z)&=\Omega_2(z)+\int\limits_{a_1}^{\infty}F_1(t)\,K_3(z,\,t)\,dt+\int\limits_{a_2}^{\infty}F_2(\tau)\,K_4(z,\,\tau)\,d\tau \end{aligned} \qquad (1.25)$$

где

$$\Omega_1(z)=\frac{4}{\pi^2}z\int\limits_0^{a_1}\Psi_1(t)\left[(\omega_1-2\omega_2)\frac{\ln t/z}{t^2-z^2}+\omega_3\frac{z^4-t^4+4t^2z^2\ln t/z}{(t^2-z^2)^3}\right]dt+$$

$$
+\frac{4}{\pi^2} z \int_0^{a_2} \Psi_2(\tau) \left[m(\omega_4+2\omega_5) \frac{\ln \tau/z}{\tau^2-z^2} - \right.
$$

$$
\left. - m(\omega_6-\omega_5) \frac{\tau^2-z^2-2\tau^2 \ln \tau/z}{(\tau^2-z^2)^2} \right] d\tau \tag{1.26}
$$

$$
\Omega_2(z) = \frac{4}{\pi^2} z \int_0^{a_1} \Psi_1(t) \left[(\omega_4+2\omega_6) \frac{\ln t/z}{t^2-z^2} + \right.
$$

$$
\left. + (\omega_6-\omega_5) \frac{t^2-z^2-2t^2 \ln t/z}{(t^2-z^2)^2} \right] dt +
$$

$$
+\frac{4}{\pi^2} z \int_0^{a_2} \Psi_2(\tau) \left[(\omega_7+2\omega_8) \frac{\ln \tau/z}{\tau^2-z^2} + \omega_9 \frac{z^4-\tau^4+4\tau^2 z^2 \ln \tau/z}{(\tau^2-z^2)^3} \right] d\tau
$$

$$
K_1(z,t) = \frac{4}{\pi^2} z \left[(\omega_1-2\omega_2) \frac{\ln t/z}{t^2-z^2} + \omega_3 \frac{z^4-t^4+4t^2 z^2 \ln t/z}{(t^2-z^2)^3} \right]
$$

$$
K_2(z,\tau) = \frac{4}{\pi^2} z \left[m(\omega_4+2\omega_5) \frac{\ln \tau/z}{\tau^2-z^2} - m(\omega_6-\omega_5) \frac{\tau^2-z^2-2\tau^2 \ln \tau/z}{(\tau^2-z^2)^2} \right]
$$

$$
K_3(z,t) = \frac{4}{\pi^2} z \left[(\omega_4+2\omega_6) \frac{\ln t/z}{t^2-z^2} + (\omega_6-\omega_5) \frac{t^2-z^2-2t^2 \ln t/z}{(t^2-z^2)^2} \right] \tag{1.27}
$$

$$
K_4(z,\tau) = \frac{4}{\pi^2} z \left[(\omega_7+2\omega_8) \frac{\ln \tau/z}{\tau^2-z^2} + \omega_9 \frac{z^4-\tau^4+4\tau^2 z^2 \ln \tau/z}{(\tau^2-z^2)^3} \right]
$$

$$
\omega_1 = (n_1+1)\mu_1 + \mu_2 - 2(n_1+1)\mu_4 + 2\mu_5; \quad \omega_2 = \mu_1 + \frac{\mu_2}{2} - 2\mu_4 + \mu_5
$$

$$
\omega_3 = \mu_5 - 2\mu_4; \quad \omega_4 = (n_1+1)\mu_1 + \mu_2 - 2(n_1-1)\mu_6; \quad \omega_5 = -\mu_1 - \frac{\mu_2}{2} \tag{1.28}
$$

$$
\omega_6 = (n_1-1)\mu_6; \quad \omega_7 = \mu_2 + (n_2+1)\mu_3 - 2(n_2+1)\mu_7 + 4\mu_8
$$

$$
\omega_8 = (n_2+1)\mu_7 - 2\mu_8; \quad \omega_9 = 2(\mu_8-\mu_7)
$$

Для решения системы уравнений (1.25) сперва покажем, что

$$
\int_{a_1}^{\infty} |K_1(z,t)|\, dt + \int_{a_2}^{\infty} |K_2(z,\tau)|\, d\tau < 1
$$

$$
\int_{a_1}^{\infty} |K_3(z,t)|\, dt + \int_{a_2}^{\infty} |K_4(z,\tau)|\, d\tau < 1 \tag{1.29}
$$

Действительно, каждое ядро $K_i(z, t)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ имеет вид, аналогичный, приведенному в работе [9]. Используя результаты оценок, приведенных в работе [9], доказывается, что

$$\int_{a_1}^{\infty} |K_1(z, t)|\,dt + \int_{a_2}^{\infty} |K_2(z, \tau)|\,d\tau <$$

$$< \frac{4[\nu_1 + (2-\nu_2)m + m(m+1)] + [1+\nu_1 - (1+\nu_2)m][1+\nu_1+(3-\nu_2)m]}{[1+\nu_1+(3-\nu_2)m][3-\nu_1+(1+\nu_2)m]}$$

$$\tag{1.30}$$

$$\int_{a_1}^{\infty} |K_3(z, t)|\,dt + \int_{a_2}^{\infty} |K_4(z, \tau)|\,d\tau <$$

$$< \frac{4[m+1+m(\nu_2 m+2-\nu_1)] + [(1+\nu_2)m - (1+\nu_1)][3-\nu_1+(1+\nu_2)m]}{[1+\nu_1+(3-\nu_2)m][3-\nu_1+(1+\nu_2)m]}$$

Когда $0 \leqslant \nu_1, \nu_2 \leqslant 1/2$, при любом $m \geqslant 0$ правые части (1.30) меньше единицы, тем самым доказывается справедливость утверждения (1.29). Очевидно, что функции $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ ограничены сверху и стремятся к нулю, когда $t \to \infty$.

Решая систему интегральных уравнений (1.26) методом последовательных приближений, получим выражения функций $F_1(t)$ и $F_2(\tau)$. Далее, по формулам (1.16), (1.17), (1.22), (1.23), (1.24) последовательно можно определить все искомые функции, а следовательно, и напряжения, и перемещения в любой точке составной полуплоскости.

Нормальные напряжения под штампом и перемещения вне штампа на линии $y = 0$, выраженные через функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$, имеют вид

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) = \frac{2}{\pi}\frac{x}{a_1}\frac{F_1(a_1) - \Psi_1(a_1)}{\sqrt{a_1^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi}x\int_x^{a_1}\frac{t\Psi_1'(t) - \Psi_1(t)}{t^2\sqrt{t^2 - x^2}}\,dt +$$

$$+ \frac{2}{\pi}x\int_{a_1}^{\infty}\frac{tF_1'(t) - F_1(t)}{t^2\sqrt{t^2 - x^2}}\,dt + W_1(x) \qquad 0 \leqslant x < a_1$$

$$\sigma_y^{(2)}(-x, 0) = \frac{2}{\pi}\frac{x}{a_2}\frac{\Psi_2(a_2) - F_2(a_2)}{\sqrt{a_2^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi}x\int_x^{a_2}\frac{\tau\Psi_2'(\tau) - \Psi_2(\tau)}{\tau^2\sqrt{\tau^2 - x^2}}\,d\tau +$$

$$+ \frac{2}{\pi}x\int_{a_2}^{\infty}\frac{\tau F_2'(\tau) - F_2(\tau)}{\tau^2\sqrt{\tau^2 - x^2}}\,d\tau + W_2(x) \qquad 0 < x \leqslant a_2 \tag{1.31}$$

$$V_1(x,\,0) = \frac{4}{\pi}\frac{1}{E_1}\int\limits_0^{a_1}\frac{\Psi_1(t)\,dt}{\sqrt{x^2-t^2}} + \frac{4}{\pi}\frac{1}{E_1}\int\limits_{a_1}^{x}\frac{F_1(t)\,dt}{\sqrt{x^2-t^2}} \qquad a_1 \leqslant x < \infty$$

$$V_2(-x,\,0) = \frac{4}{\pi}\frac{1}{E_2}\int\limits_0^{a_2}\frac{\Psi_2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{x^2-\tau^2}} + \frac{4}{\pi}\frac{1}{E_2}\int\limits_{a_1}^{x}\frac{F_2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{x^2-\tau^2}} \qquad a_2 \leqslant x < \infty \tag{1.32}$$

где

$$W_1(x) = \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^x \Psi_1(z)\left\{\left[\omega_1\frac{2x}{(x^2-t^2)^2} - \omega_2\frac{10xt^2+6x^3}{(x^2-t^2)^3} -\right.\right.$$

$$\left. - \omega_2\frac{8xt^2(5x^2+t^2)}{(x^2-t^2)^4}\right]\ln\left(\frac{x}{t}+\sqrt{\frac{x^2}{t^2}-1}\right) +$$

$$+ \omega_2\frac{7x^2+3t^2}{(x^2-t^2)^2\sqrt{x^2-t^2}} - \omega_1\frac{1}{(x^2-t^2)\sqrt{x^2-t^2}} +$$

$$\left. + \omega_3\frac{6x^4+27x^2t^2}{(x^2-t^2)^{7/2}}\right\}dt + \frac{4}{\pi^2}\int\limits_x^{a_1}\Psi_1(t)\left\{(\omega_1-2\omega_2)\frac{1}{(t^2-x^2)} -\right.$$

$$- \omega_3\frac{13x^2t^2-2x^4}{(t^2-x^2)^3} + \left[-(\omega_1-2\omega_2)\frac{x}{(t^2-x^2)^{3/2}} +\right.$$

$$\left.\left. + \omega_3\frac{3xt^4+12x^3t^2}{(t^2-x^2)^{7/2}}\right]\arccos\frac{x}{t}\right\}dt +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2}\int\limits_{a_1}^{\infty}F_1(t)\left\{(\omega_1-2\omega_2)\frac{1}{t^2-x^2} - \omega_3\frac{13x^2t^2-2x^4}{(t^2-x^2)^3} +\right.$$

$$\left. + \left[-(\omega_1-2\omega_2)\frac{x}{(t^2-x^2)^{3/2}} + \omega_3\frac{3xt^4+12x^3t^2}{(t^2-x^2)^{7/2}}\right]\arccos\frac{x}{t}\right\}dt +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^x\Psi_2(\tau)\left\{\left[m\omega_4\frac{2x}{x^2-\tau^2} + m\omega_6\frac{8x\tau^2}{(x^2-\tau^2)^3} -\right.\right.$$

$$\left. - 2m\omega_5 x\frac{\tau^2+3x^2}{(x^2-\tau^2)^3}\right]\ln\left(\frac{x}{\tau}+\sqrt{\frac{x^2}{\tau^2}-1}\right) +$$

$$\left. + \left[-m\omega_4\frac{1}{(x^2-\tau^2)^{3/2}} - m\omega_6\frac{2x^2+3\tau^2}{(x^2-\tau^2)^{5/2}} + m\omega_5\frac{5x^2}{(x^2-\tau^2)^{5/2}}\right]\right\}d\tau +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2}\int\limits_x^{a_2}\Psi_2(\tau)\left\{m\omega_4\frac{1}{\tau^2-x^2} - m\omega_6\frac{2\tau^2+x^2}{(\tau^2-x^2)^2} - m\omega_5\frac{3x^2}{(\tau^2-x^2)^2} +\right.$$

$$+\left[-m\omega_4\frac{x}{(\tau^2-x^2)^{3/2}}+m\omega_6\frac{3x\tau^2}{(\tau^2-x^2)^{5/2}}+\right.$$

$$\left.+m\omega_5\frac{2x^3+x\tau^2}{(\tau^2-x^2)^{5/2}}\right]\arccos\frac{x}{\tau}\Bigg\}d\tau+\frac{4}{\pi^2}\int\limits_{a_2}^{\infty}F_2(\tau)\left\{\left[m\omega_4\frac{1}{\tau^2-x^2}-\right.\right.$$

$$\left.-m\omega_6\frac{2\tau^2+x^2}{(\tau^2-x^2)^2}-m\omega_5\frac{3x^2}{(\tau^2-x^2)^2}\right]+\left[-m\omega_4\frac{x}{(\tau^2-x^2)^{3/2}}+\right.$$

$$\left.\left.+m\omega_6\frac{3x\tau^2}{(\tau^2-x^2)^{5/2}}+m\omega_5\frac{2x^3+x\tau^2}{(\tau^2-x^2)^{5/2}}\right]\arccos\frac{x}{\tau}\right\}d\tau$$

$$W_2(x)=\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^x\Psi_1(t)\left\{\left[\frac{2x}{(x^2-t^2)}\ln\left(\frac{x}{t}+\sqrt{\frac{x^2}{t^2}-1}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(x^2-t^2)^{3/2}}\right]\omega_4+\left[\frac{2x^2+3t^2}{(x^2-t^2)^{5/2}}-\frac{8xt^2}{(x^2-t^2)^3}\times\right.$$

$$\left.\times\ln\left(\frac{x}{t}+\sqrt{\frac{x^2}{t^2}-1}\right)\right]\omega_5+\omega_6\left[\frac{5x^2}{(x^2-t^2)^{5/2}}-2x\frac{t^2+3x^2}{(x^2-t^2)^3}\times\right.$$

$$\left.\left.\times\ln\left(\frac{x}{t}+\sqrt{\frac{x^2}{t^2}-1}\right)\right]\right\}dt+\frac{4}{\pi^2}\int\limits_x^{a_1}\Psi_1(t)\left\{\omega_4\left[\frac{1}{t^2-x^2}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{x}{(t^2-x^2)^{3/2}}\arccos\frac{x}{t}\right]+\omega_5\left[\frac{2t^2+x^2}{(t^2-x^2)^2}-\frac{3xt^2}{(t^2-x^2)^{5/2}}\arccos\frac{x}{t}\right]+$$

$$\left.+\omega_6\left[\frac{2x^3+xt^2}{(t^2-x^2)^{5/2}}\arccos\frac{x}{t}-\frac{3x^2}{(t^2-x^2)^2}\right]\right\}dt+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^x\Psi_2(\tau)\left\{\omega_4\left[\frac{2x}{(x^2-\tau^2)^2}\ln\left(\frac{x}{\tau}+\sqrt{\frac{x^2}{\tau^2}-1}\right)-\frac{1}{(x^2-\tau^2)^{3/2}}\right]+\right.$$

$$+\omega_5\left[\frac{7x^2+3\tau^2}{(x^2-\tau^2)^{5/2}}-\frac{10x\tau^2+6x^3}{(x^2-\tau^2)^3}\ln\left(\frac{x}{\tau}+\sqrt{\frac{x^2}{\tau^2}-1}\right)\right]+$$

$$\left.+\omega_6\left[\frac{6x^4+27x^2\tau^2}{(x^2-\tau^2)^{7/2}}-\frac{40x^3\tau^2+8x\tau^4}{(x^2-\tau^2)^4}\ln\left(\frac{x}{\tau}+\sqrt{\frac{x^2}{\tau^2}-1}\right)\right]\right\}d\tau+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\int\limits_{a_1}^{\infty}F_1(t)\left\{\omega_4\left[\frac{1}{t^2-x^2}-\frac{x}{(t^2-x^2)^{3/2}}\arccos\frac{x}{t}\right]+\right.$$

$$+\omega_5\left[\frac{2t^2+x^2}{(t^2-x^2)^2}-\frac{3xt^2}{(t^2-x^2)^{5/2}}\arccos\frac{x}{t}\right]+$$

$$+\omega_8\left[\frac{2x^3+xt^2}{(t^2-x^2)^{5/2}}\arccos\frac{x}{t}-\frac{3x^2}{(t^2-x^2)^2}\right]\Bigg\}dt+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\int_x^{a_2}\Psi_2(\tau)\left\{\frac{(\omega_7+2\omega_8)}{(\tau^2-x^2)}-\omega_7\frac{x}{(\tau^2-x^2)^{3/2}}\arccos\frac{x}{\tau}+\right.$$

$$+2\omega_8\frac{x}{(\tau^2-x^2)\sqrt{\tau^2-x^2}}+\omega_9\left[\frac{3x\tau^4+12x^3t^2}{(\tau^2-x^2)^{7/2}}\arccos\frac{x}{\tau}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{13x^2\tau^2-2x^4}{(\tau^2-x^2)^3}\right]\right\}d\tau+\frac{4}{\pi^2}\int_{a_2}^{\infty}F_2(\tau)\left\{\frac{\omega_7+2\omega_8}{\tau^2-x^2}-\right.$$

$$-\omega_7\frac{x}{(\tau^2-x^2)^{3/2}}\arccos\frac{x}{\tau}+2\omega_8\frac{x}{(\tau^2-x^2)^{3/2}}+$$

$$\left.+\omega_9\left[\frac{3x\tau^4+12x^3\tau^2}{(\tau^2-x^2)^{7/2}}\arccos\frac{x}{\tau}-\frac{13x^2\tau^2-2x^4}{(\tau^2-x^2)^3}\right]\right\}d\tau$$

Формулы (1.31) и (1.32) определяют напряжения и перемещения для заданных величин контакта a_1, a_2.

Если эти величины не заданы, то их можно определить из условия непрерывности нормальных напряжений, что выражается трансцендентными уравнениями

$$\Psi_1(a_1)-F_1(a_1)=0,\quad \Psi_2(a_2)-F_2(a_2)=0 \tag{1.33}$$

В частном случае, когда $E_1=E_2$, $\nu_1=\nu_2$, $a_1=a_2$, получим решение задачи о вдавливании жесткого штампа симметричного очертания на упругую однородную полуплоскость, совпадающее с решением, полученным М. А. Садовским [14].

2. В качестве примера рассмотрим задачу определения зоны контакта, когда основание штампа имеет форму

$$f_1(x)=\delta(1-x)\quad 0\leqslant x\leqslant a_1;\quad f_2(x)=\delta(1-x)\quad -a_2\leqslant x\leqslant 0$$

Тогда из (1.18) и (1.20) имеем

$$\Psi_1(t)=\frac{E_1\delta}{2}\left(1-\frac{\pi t}{2}\right);\quad \Psi_2(t)=\frac{E_2\delta}{2}\left(1-\frac{\pi t}{2}\right) \tag{2.1}$$

Решая систему уравнений (1.25) совместно с первым уравнением соотношений (1.33) с учетом (2.1) при $\nu_1=\nu_2=\frac{1}{3}$ в зависимости от отношения $m=E_1/E_2=1,\ 2,\ 3,\ 5$ получим соответственно следующие размеры зоны контакта: a_1, $0.96a_1$, $0.82a_1$, $0.80a_1$.

Институт механики АН АрмССР
Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Поступила 24 X 1978

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ, Հ. Ֆ. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է կամայական տեսքի հիմք ունեցող կոշտ դրոշմի ճնշման խնդիրը՝ կիրառված առաձգական բաղադրյալ կիսահարթության հորիզոնական եզրի մի մասի վրա։ Երկու քառորդ հարթությունները, որոնք պատրաստված են իզոտրոպ, բայց տարբեր նյութերից իրար միացված են այնպես, որ կազմում են մի կիսահարթություն։ Կիսահարթության հորիզոնական եզրի վրա կիրառված է ողորկ հիմքով կոշտ դրոշմ այնպես, որ դրոշմը գտնվում է երկու նյութերի վրա միաժամանակ և նրա դիրքը նյութերի կոնտակտի գծի նկատմամբ սիմետրիկ չէ։ Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի մեթոդով։

Ինտեգրման գործակիցների որոշումը հանգել է երկու զույգ ինտեգրալ հավասարումներից բաղկացած սիստեմի լուծմանը, ընդ որում զույգ ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի լուծումը բերվել է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի լուծմանը։ Ստացված են կոնտակտի չափը որոշող երկու տրանսցենդենտ հավասարումներ։ Մասնավոր դեպքում, երբ դրոշմը սիմետրիկ է կոնտակտի գծի նկատմամբ և $E_1=E_2$, $\nu_1=\nu_2$, $a_1=a_2$, ստացվում է համասեռ կիսահարթության եզրի վրա կոշտ դրոշմի ճնշման հայտնի խնդիրը։

Կոնտակտի չափի որոշման համար բերված է թվային օրինակ։

A CONTACT PROBLEM FOR AN ELASTIC COMPOUND SEMI-PLANE

V. S. TONOYAN, H. F. MINASIAN

Summary

The present paper considers the problem of pressing a rigid punch into a part of the boundary of an elastic compound semi-plane. The semi-plane consists of two quadrants made of different materials. On the horizontal edge of the semi-plane the rigid punch with a smooth base is pressed in such a wayth at the punch is located asymmetrically on the two materials simultaneously. The problem is solved by the Fourier method.

The determination of integration coefficients is reduced to the solution of a system of two dual integral equations. The solution of the latter is reduced to the system of Fredholm's integral equations of the second kind. Two transcendent equations are derived to define the dimensions of the contact zones.

A numerical example is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черепанов Г. П.* О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. Изв. АН СССР, ОТН, механика и машиностроение, 1962, № 1.
2. *Попов Г. Я.* Плоская контактная задача для линейно-деформируемого основания при наличии сил сцепления. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
3. *Валков Н. М.* Плоская контактная задача для двухслойного основания при действии симметричной нагрузки на жесткий штамп. Изв. АН СССР, механика и машиностроение, 1963, № 4.
4. *Приварников А. К., Шевляков Ю. А.* Контактная задача для многослойного основания. Прик. мех., 1962, т. 8, вып. 5.
5. *Ильман В. М., Приварников А. К.* Действие системы штампов на упругое многослойное основание. Прикл. мех., 1971, т. 7, вып. 6.
6. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* Задачи теории упругости для многослойных сред. М., Изд-во «Наука», 1973.
7. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* О контактных задачах для упругих многослойных сред. Труды симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа, том 1, Тбилиси, изд-во «Мецниереба», 1973.
8. *Knauss W. G.* Fracture mechanics and the time dependent strength of Adhesive Joints. J. Composite materials, 1971, Vol. 5, April, p.p. 176–192.
9. *Тоноян В. С.* О решении симметричной контактной задачи для полуплоскости с включением. Изв. АН АрмССР, механика, 1968, т. 21, № 3.
10. *Ашбаух Н. Е.* Развитие конечной трещины, перпендикулярной поверхности раздела двух материалов. Прикл. мех., 1973, т. 40, № 2, изд-во «Мир».
11. *Ашбаух Н. Е.* Напряжение в слоистых композитах, содержащих разорванный слой. Прикл. мех., 1973, т. 40, № 2, изд-во «Мир».
12. *Bogy D. B.* The plane elastostatic solution for a symmetrically loaded crack in a strip composite. Int. J. Engng. sci., 1973, Vol. 11, No. 9.
13. *Богжи Д. Б.* Действие касательных и нормальных нагрузок на прямоугольные упругие клинья, выполненные из разных материалов и соединенные по граням. Прикл. мех., 1973, т. 40, № 2, изд-во «Мир».
14. *Sadowski M. A.* Zweidimensinale probleme der elastitatstheorie. Ztschr. für angew. Math. und Mech., 1928, Bd8.
15. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., изд. «Наука», 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, №3, 1979 Механика

В. М. АЛЕКСАНДРОВ, В. Б. ЗЕЛЕНЦОВ

МЕТОД ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ В СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ ДЕФОРМАЦИИ ЧИСТОГО СДВИГА

В работе [1] предложен метод решения контактных задач теории упругости для тел конечных размеров, основанный на построении и использовании системы однородных решений. В настоящей работе этим методом решены две двумерные контактные задачи о чистом сдвиге штампом цилиндрического упругого тела, поперечное сечение которого представляет собой прямоугольник. Проведено исследование бесконечной алгебраической системы, к которой сводятся задачи. Доказана высокая эффективность метода. На основании полученного численного материала в довольно широком диапазоне изменения параметров $\lambda = ab^{-1}$, $\beta = hb^{-1}$ предложены аналитические решения задач. Полученные численные результаты сравниваются с результатами работы [2].

1. Рассматриваются две задачи о сдвиге штампом цилиндрического упругого тела, поперечное сечение которого представляет собой прямоугольник $|x| \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant h$, $|z| < \infty$. В предположении, что $u = v = 0$ во всей призме, а w не зависит от z, задача сводится к решению уравнения Лапласа

$$\Delta w(x, y) = 0 \tag{1.1}$$

со следующими граничными условиями:

$$y = 0 \quad w = 0 \quad (|x| \leqslant b)$$

$$y = h \qquad G\frac{\partial w}{\partial y} = \tau_{yz} = 0, \quad a < |x| < b$$

$$w = \varepsilon, \qquad |x| \leqslant a$$

$$а) \qquad x = \pm b \quad w = 0, \qquad 0 \leqslant y \leqslant h \tag{1.2}$$

$$б) \qquad x = \pm b \quad G\frac{\partial w}{\partial x} = \tau_{xz} = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant h \tag{1.3}$$

Отсюда видно, что задачи а и б различаются лишь условиями на боковых гранях.

Следуя схеме метода решения [1], необходимо знать решение задачи о чистом сдвиге упругого слоя $0 \leqslant y \leqslant h$. Для этого необходимо решить краевую задачу для уравнения Лапласа (1.1). Граничные условия задачи имеют вид

$$y=0 \quad w=0 \qquad |x|<\infty$$

$$y=h \quad \tau_{yz}=G\frac{\partial w}{\partial y}=\tau(x) \qquad |x|\leqslant a \tag{1.4}$$

$$\tau_{yz}=0 \qquad |x|>a$$

Решение такой задачи, полученное с помощью интегрального преобразования Фурье, известно и имеет вид

$$w_1(x,\,y)=\frac{1}{\pi G}\int\limits_{-a}^{a}\tau(\xi)\,d\xi\int\limits_0^\infty\frac{\operatorname{th}\alpha y}{\alpha}\cos\alpha(x-\xi)\,d\alpha\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi G}\int\limits_{-a}^{a}\tau(\xi)\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}(\xi-x)+\sin\frac{\pi y}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}(\xi-x)-\sin\frac{\pi y}{2}}\,d\xi \tag{1.5}$$

Также необходимо построить решение краевой задачи (1.4) с однородными граничными условиями. Решение такой задачи можно записать в виде ряда по однородным решениям

$$w_2(x,\,y)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\operatorname{ch}\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{x}{h}\sin\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{y}{h} \tag{1.6}$$

где A_k — произвольные постоянные.

Далее, для выполнения граничных условий на боковых гранях используем суперпозицию полученных решений w_1 и $-w_2$ и условие ортогональности функций $\sin\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{y}{h}$ на отрезке $0\leqslant y\leqslant h$. В результате этого получим выражение вида

$$A_np_n=\frac{4}{\pi G(2n-1)}e^{-\gamma_n}\int\limits_0^a\tau(\xi)\operatorname{ch}\left(\gamma_n\frac{\xi}{b}\right)d\xi \tag{1.7}$$

где для задачи а) $p_n=(-1)^{n-1}\operatorname{ch}\gamma_n$, б) $p_n=(-1)^n\operatorname{sh}\gamma_n$, $\gamma_n=\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)bn^{-1}$.

Теперь получим интегральные уравнения для рассматриваемых задач, используя суперпозицию решений $w_1(x,\,y)$ и $-w_2(x,\,y)$ при $y=h$ и граничные условия (1.2), (1.3). Имеем

$$w_1(x,\,h)-w_2(x,\,h)=\varepsilon \qquad |x|\leqslant a \tag{1.8}$$

Тогда интегральные уравнения запишутся в следующем виде:

$$-\int\limits_{-a}^{a}\tau(\xi)\ln\left|\operatorname{th}\frac{\pi(\xi-x)}{4}\right|d\xi=\pi G\varepsilon+\pi G\sum_{n=1}^{\infty}A_n\omega_n\operatorname{ch}\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{x}{h} \tag{1.9}$$

где для задачи а) $\omega_n=(-1)^{n-1}$, б) $\omega_n=(-1)^n$.

Решение интегральных уравнений (1.9) можно представить в форме

$$\tau(x) = G\tau_0(x) + G\sum_{n=1}^{\infty} A_n\omega_n\tau_n(x) \tag{1.10}$$

где ω_n то же, что в (1.9).

Подставляя решения в интегральные уравнения и приравнивая коэффициенты при неизвестных A_n в левых и правых частях, получим интегральные уравнения для определения $\tau_n(x)$

$$-\int_{-a}^{a} \tau_n(\xi) \ln\left| \operatorname{th}\frac{\pi(\xi - x)}{4} \right| d\xi = \begin{cases} \pi & (n = 0) \\ \pi \operatorname{ch}\pi\left(n - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{x}{h} & (n \geqslant 1) \end{cases} \tag{1.11}$$

Решение интегральных уравнений представим в виде [3]:

$$a\tau_0(x) = \frac{\pi \operatorname{ch}\pi(2\gamma)^{-1}}{\gamma K\left(\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\pi(2\gamma)^{-1}}\right)\sqrt{2(\operatorname{ch}\pi\gamma^{-1} - \operatorname{ch}\pi x\gamma^{-1})}} \tag{1.12}$$

$$a\tau_n(x) = \frac{S(n)}{\gamma\sqrt{2(\operatorname{ch}\pi\gamma^{-1} - \operatorname{ch}\pi x\gamma^{-1})}} -$$

$$-\frac{\pi(2n-1)^2}{4\sqrt{2}\gamma}\int_x^1 \frac{P_{n-1}(\operatorname{ch}\pi\gamma^{-1}x)\operatorname{sh}(\pi\gamma^{-1}\xi)\pi\gamma^{-1}d\xi}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\pi\gamma^{-1}\xi - \operatorname{ch}\pi\gamma^{-1}x)}} \tag{1.13}$$

Здесь

$$S(n) = \frac{\pi \operatorname{ch}\pi(2\gamma)^{-1}}{K\left(\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\pi(2\gamma)^{-1}}\right)P_{-1/2}(\gamma_0)} P_{n-1}(\gamma_0) +$$

$$+\frac{\pi \operatorname{sh}\pi\gamma^{-1}}{P_{-1/2}(\gamma_0)}\left[P_{-1/2}(\gamma_0)P^1_{n-1}(\gamma_0) - P_{n-1}(\gamma_0)P^1_{-1/2}(\gamma_0)\right] \tag{1.14}$$

а $K(x)$ — полный эллиптический интеграл I рода, $P_n(x)$, $P^m_n(x)$ — полиномы и присоединенные функции Лежандра, $\gamma = h\beta^{-1}$, $\gamma_0 = \operatorname{ch}\gamma$.

Используя рекуррентные формулы для полиномов Лежандра [4], для $\tau_n(x)$ ($n = 1, 2, 3$) можно получить следующие формулы:

$$a\tau_1(x) = \frac{S(1)}{\gamma\sqrt{2}}r^{-1}(x) - \frac{\pi(2n-1)^2}{2\sqrt{2}\gamma}r(x)$$

$$a\tau_2(x) = \frac{S(2)}{\gamma\sqrt{2}}r^{-1}(x) - \frac{\pi(2n-1)^2}{2\sqrt{2}\gamma}r(x)\left[\frac{r^2(x)}{3} + \operatorname{ch}\pi x\gamma^{-1}\right]$$

$$a\tau_3(x) = \frac{S(3)}{\gamma\sqrt{2}}r^{-1}(x) - \frac{\pi(2n-1)^2}{2\sqrt{2}\gamma}r(x)\left[\frac{3}{5}r^4(x) + \right.$$

$$\left. + 2\operatorname{ch}\pi x\gamma^{-1}r^2(x) + 3\operatorname{ch}^2\pi x\gamma^{-1} - 1\right]$$

где

$$r(x) = \sqrt{\operatorname{ch} \pi\gamma^{-1} - \operatorname{ch} \pi x \gamma^{-1}}$$

Здесь также использовалось интегральное представление вида [5]:

$$P_\nu^\mu(\operatorname{ch} z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\operatorname{sh} z)^\mu}{\Gamma(1/2-\mu)} \int_0^z \frac{\operatorname{ch}\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)v\right]}{(\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} v)^{\mu+1/2}} dv, \quad \left(\operatorname{Re}\mu < \frac{1}{2}\right)$$

Далее, подставив (1.10) в (1.7), получим бесконечные алгебраические системы для определения постоянных A_n соответственно для задач *а* и *б*:

$$p_n A_n = \frac{4}{\pi(2n-1)} e^{-\gamma_n} \left[\int_0^1 \tau_0(\xi) \operatorname{ch} \gamma_n \frac{\xi}{b} d\xi + \right.$$

$$\left. + G \sum_{k=1}^{\infty} A_k (-1)^{k-1} \int_0^1 \tau_k(\xi) \operatorname{ch} \frac{\pi}{h}\left(n-\frac{1}{2}\right) \xi d\xi \right] \tag{1.15}$$

p_n и γ_n означают то же, что в (1.7).

Введем следующие обозначения: $x_n = A_n \varepsilon^{-1} \omega_n p_n$

$$f_n = \frac{4}{\pi(2n-1)} e^{-\gamma_n} \int_0^1 \tau_0(\xi) \operatorname{ch} \gamma_n b^{-1} \xi d\xi$$

$$a_{kn} = \frac{4}{\pi(2n-1) p_k} e^{-\gamma_n} \int_0^1 \tau_k(\xi) \operatorname{ch} \gamma_n b^{-1} \xi d\xi \tag{1.16}$$

Тогда бесконечная система (1.15) приобретает вид

$$x_n = f_n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} x_k \qquad (n = 1, 2 \ldots) \tag{1.17}$$

Подставив (1.13), (1.14) в (1.16), получим формулы для всех элементов бесконечной системы (1.17)

$$f_n = \frac{2}{2n-1} \frac{e^{-\gamma_n}}{K\left(\sqrt{1-\operatorname{th}^2 \pi(2\gamma)^{-1}}\right)} \operatorname{ch} \pi(2\gamma)^{-1} P_{n-1}(\gamma_0) \tag{1.18}$$

$$a_{kn} = \left[\frac{1}{2} S(k) P_{n-1} - \frac{\pi}{2}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 \operatorname{sh}(\pi\gamma^{-1}) P_{n-1} P_{k-1}^1 - \right.$$

$$\left. - P_{k-1}^1 P_{n-1}^1) (k-n)^{-1} (k+n-1)^{-1} \right] p_k^{-1} \tag{1.19}$$

$$a_{kk}=\left|\frac{1}{2}S(k)P_{k-1}-\frac{\pi}{8}\,\mathrm{sh}(\pi\gamma^{-1})(2k-1)\left(P_{k-1}\frac{\partial P^1_{k-1}}{\partial k}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-P^1_{k-1}\frac{\partial P_{k-1}}{\partial k}\right)\right|p_k^{-1}$$

где для задачи *а*) $\omega_n=(-1)^{n-1}$, $p_n=\mathrm{ch}\,\gamma_n$; для задачи *б*) $\omega_n=(-1)^n$; $p_n=\mathrm{sh}\,\gamma_n$, $P_k^n=P_k^n(\gamma_0)$.

Решив бесконечную систему, найдем затем решение поставленных задач по формуле (1.11). С учетом принятых обозначений, имеем

$$a(G\varepsilon)^{-1}\tau(x)=\tau_0(x)\pm\sum_{n=1}^{\infty}x_np_n^{-1}\tau_n(x) \qquad (1.20)$$

где p_n обозначает то же, что и в (1.19).

Сдвигающая сила находится интегрированием (1.20) и имеет вид

$$(G\varepsilon)^{-1}T=\alpha\left[P_{-1/2}(\gamma_0)\pm\sum_{n=1}^{\infty}x_np_n^{-1}P_{n-1}(\gamma_0)\right] \qquad (1.21)$$

где

$$\alpha=\pi\,\mathrm{ch}\,\pi(2\gamma)^{-1}K^{-1}\left(\sqrt{1-\mathrm{th}^2\pi(2\gamma)^{-1}}\right)2^{-1}$$

p_n — то же, что и в (1.19).
Знак «+» — для задачи *а*, знак «—» — для задачи *б*.

2. Теперь легко перейти к исследованию полученной бесконечной системы (1.17). Установим поведение f_n, a_{kn} при больших номерах k, n. Для этого необходимо установить асимптотики по индексу P_n и P^1_{n-1}. Пользуясь [4], [6], выпишем нулевые члены асимптотик P_n и P^1_{n-1}

$$P_n(\mathrm{ch}\,\pi\gamma^{-1})\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi n\,\mathrm{sh}\,\pi\gamma^{-1}}}e^{\pi\gamma^{-1}n} \quad (z\ll n) \qquad (2.1)$$

$$P^1_{n-1}(\mathrm{ch}\,\pi\gamma^{-1})\sim\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{sh}\,\pi\gamma^{-1}}}e^{\pi\gamma^{-1}n} \quad (z\ll n) \qquad (2.2)$$

Тогда легко получаем

$$f_n\sim\left[2\sqrt{\pi}K\left(\sqrt{1-\mathrm{th}^2\pi\gamma^{-1}}\right)\mathrm{th}\,\pi(2\gamma)^{-1}n\sqrt{\pi}\right]^{-1}\times$$

$$\times\exp\left(-\pi(b-a)h^{-1}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right) \qquad (2.3)$$

$$a_{kn}\sim\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{n}\,(k+n)}\exp\left(-\pi(b-a)h^{-1}(k+n-1)\right)$$

Из предыдущего видно, что элементы матрицы и свободные члены бесконечной системы экспоненциально убывают. Значит, полученная бесконечная система (1.17) принадлежит к типу нормальных систем Пуанкаре-Коха [7].

3. По изложенной схеме решения задач *а* и *б* был составлен алгоритм для реализации на ЭВМ. Бесконечная система (1.17) решалась методом редукции. Необходимо заметить, что сферические функции и их производные по индексу считались с использованием удобного интегрального представления [5]

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{2^\mu (z^2-1)^{-\mu/2}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}\int_0^\pi \left(z+\sqrt{z^2-1}\cos t\right)^{\nu+\mu}(\sin t)^{-2\mu}\,dt \qquad (3.1)$$

$$\operatorname{Re}\mu<1/2$$

$$P_\nu^m(z)=\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\pi\Gamma(\nu+1)}\int_0^\pi \left(z+\sqrt{z^2-1}\cos t\right)^\nu \cos mt\,dt \qquad (3.2)$$

$$m=0,\ 1,\ 2,\dots$$

Так как выражение $z+\sqrt{z^2-1}\cos t>0$ при $0\leqslant t\leqslant\pi$, $z>0$, то интеграл является функцией непрерывной при всех действительных значениях ν. Следовательно, выражения (3.1) и (3.2) можно дифференцировать по ν любое количество раз .Тогда имеем

$$\frac{d^n P_\nu^m(z)}{d\nu^n}=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{d^n}{d\nu^n}\left[\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu+1)}\right]\int_0^\pi \left(z+\sqrt{z^2-1}\cos t\right)^\nu \cos mt\,dt+\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu+1)}\int_0^\pi \left(z+\sqrt{z^2-1}\cos t\right)^\nu \ln^n\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos t\right)\cos mt\,dt\right\}$$

$$(3.3)$$

Такое вычисление имеет большие преимущества перед известными авторами, так как все интегралы считаются очень быстро любой из известных стандартных процедур. В процессе счета было установлено, что для достижения необходимой точности решения, а именно 4 верных цифр, требуется решение всего 3-х уравнений для реального диапазона изменения параметров $0<\lambda<0.95$, $0<\beta<2$. Метод хорошо работает при $\frac{b-a}{h}>1$. Это видно из формул (2.3). В табл. 1, 2 (соответственно, для задач *а*, *б*) приведены для сравнения числовые результаты по методу работы [2], любезно предоставленные ее автором, и числовые данные, полученные авторами статьи. Анализ показывает, что с помощью изложенного метода можно получить более точные результаты в гораздо более широком диапазоне параметров λ, β, чем методом работы [2].

В табл. 1, 2 введены обозначения $a(G\varepsilon)^{-1}\tau(x)=\tau^0(x)$, $T(G\varepsilon)^{-1}=T^0$.

Таблица 1

β	.7931		1		1.7692	
λ	.3448		.4348		.7692	
$\tau^0(x)$ / x		[2]		[2]		[2]
.0	.5930	.5923	.6208	.6168	.8082	.7723
.3	.6197	.6188	.6514	.6470	.8719	.8296
.6	.7320	.7310	.7800	.7734	1.1390	1.0701
.9	1.3242	1.3236	1.4467	1.4305	2.4748	2.2846
T^0	1.8371	1.7095	1.9686	1.8180	3.0554	2.6255

Таблица 2

β	.3846		.5		1.5385	
λ	.7692		.5		.7692	
$\tau^0(x)$ / x		[2]		[2]		[2]
.0	2.0027	2.0027	1.0409	1.0411	.5208	.5232
.3	2.0091	2.0093	1.0634	1.0637	.5255	.5292
.6	2.0626	2.0636	1.1711	1.1719	.5519	.5583
.9	2.7077	2.7177	1.8679	1.8718	.7531	.7721
T^0	4.6651	4.6246	2.8285	2.7356	1.2651	1.2349

Расчеты показывают, что при $\beta \leqslant 2(1-\lambda)$ можно ограничиться нулевым приближением даже одного уравнения бесконечной системы (1.17). Тогда решение в этом диапазоне параметров можно записать в аналитическом виде

$$a(G\varepsilon)^{-1}\tau(x)=\frac{\pi\sqrt{2}}{\gamma}\left\{\left[1+\frac{2S(1)}{\pi p_1}\right]r^{-1}(x)-\frac{\sqrt{2}}{p_1}r(x)\right\} \tag{3.4}$$

$$(G\varepsilon)^{-1}T=\pi\left[P_{-1/2}(\gamma_0)+\frac{4}{\pi}\exp\left(-\frac{\pi}{2}\beta^{-1}\right)p_1^{-1}\right] \tag{3.5}$$

В (3.4) и (3.5) обозначения те же, что и в (1.19), а α — то же, что в (1.21).

НИИ механики и прикладной математики РГУ

Поступила 20 III 1978

Վ. Մ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎ, Վ. Բ. ԶԵԼԵՆՑՈՎ

ՄԱՔՈՒՐ ՍԱՀՔԻ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ԽԱՌԸ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ՀԱՄԱՍԵՌ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրվել են ուղղանկյունաձև ձողի մաքուր սահքի վերաբերյալ երկու խառը խնդիրներ համասեռ լուծումների եղանակով։ Եղանակի բարձր արդյունավետությունը կայանում է նրանում, որ նրա օգնությամբ լուծվող խնդիրների ինտեգրալ հավասարումները բերվում են Պուանկարե—Կոխի անվերջ հանրահաշվական սիստեմի լուծման։

Դրա շնորհիվ այստեղ ուսումնասիրվող խնդիրների համար առաջարկվում են անալիտիկ լուծումներ։

THE METHOD OF HOMOGENEOUS SOLUTIONS IN MIXED PROBLEMS FOR A PURE SHEAR STRAIN

V. M. ALEXANDROV, V. B. ZELENTSOV

S u m m a r y

Two mixed problems for a pure shear of a rectangular beam are investigated by the method of homogeneous solutions. The superior efficiency of this method resides in the fact that it provides the reduction of the integral equations of the problems to the solution of the infinite algebraic system of Poincare-Koch. Accordingly, the analytical solutions of the problems in question are suggested.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М.* Метод однородных решений в контактных задачах теории упругости для тел конечных размеров. Изв. АН СССР, СКНЦ ВШ, сер. естеств. наук, 1974, вып. 4.
2. *Чебаков М. И.* Сдвиг штампом бруса прямоугольного сечения. Тезисы докладов Всесоюзной научно-технической конференции «Жесткость машиностроительных конструкций». М., 1976.
3. *Александров В. М.* Об одной контактной задаче для упругого клина. Изв. АН АрмССР, Механика, 1967, т. 20, № 1.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. I, М., «Наука», 1973.
6. *Копсон Э. Т.* Асимптотические разложения. М., «Мир», 1966.
7. *Нуллер Б. М.* Контактная задача для упругого полубесконечного цилиндра. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 3, 1979 Механика

Ш. М. ХАЧАТРЯН

О НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЯХ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ИХ УРАВНЕНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ОБЩЕЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки, изготовленной из материала, обладающего свойством общей анизотропии. На основе асимптотического метода [1—3] построены итерационные процессы, описывающие возможные напряженные состояния в цилиндрической оболочке с показателем изменяемости меньше единицы. Предлагаются двумерные уравнения, позволяющие сравнительно просто найти напряженно-деформированное состояние в цилиндрической оболочке с общей анизотропией.

Обсуждается применимость прикладных и асимптотического методов и показано, что она существенно зависит от отношений упругих коэффициентов.

1. Вопросу определения напряженно-деформированного состояния изотропной цилиндрической оболочки, исходя из уравнений трехмерной задачи теории упругости, посвящено много работ.

Развивая метод однородных решений, А. Н. Базаренко и И. И. Ворович изучили напряженное состояние изотропной цилиндрической оболочки конечных размеров, подверженных действию нагрузок, приложенных по всей поверхности. Они показали, что возможны четыре типа напряженных состояний в цилиндрической оболочке и предложили уточненную прикладную теорию круговой цилиндрической оболочки [4].

Л. Рейсс [5—6] методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости получил двумерные уравнения изотропной цилиндрической оболочки, представляя напряжения и перемещения в виде конечных рядов по степеням малого параметра. Был построен также погранслой.

Асимптотический метод определения напряженно-деформированного состояния произвольных изотропных оболочек с исчерпывающей полнотой разработан А. Л. Гольденвейзером [1—3]. Понятовский использовал этот метод для определения напряженного состояния в сплошном цилиндре [7]. Л. А. Агаловян распространил асимптотический метод на ортотропные оболочки, выявив характерные особенности, связанные с анизотропией [8].

Вайдер и Чанг [9] методом асимптотического интегрирования построили исходное приближение внутренней задачи анизотропной цилиндрической оболочки, соответствующее показателю изменяемости $^1/_2$. Они не рассматривали напряженно-деформированные состояния, соответствующие другим показателям изменяемости, а также погранслой.

Вариационный метод изучения напряженного состояния сплошного цилиндра использовал В. Л. Бердичевский [10].

Пусть имеем цилиндрическую оболочку радиуса R, длиной L и толщиной $2h$. Материал оболочки обладает цилиндрической анизотропией общего вида, а ось анизотропии совпадает с осью цилиндра. Цилиндр загружен по внешней и внутренней поверхностям

$$\sigma_{rx} = \pm \varepsilon^{-a} X^{\pm}(x, \theta), \quad \sigma_{r\theta} = \pm \varepsilon^{-a} Y^{\pm}(x, \theta), \quad \sigma_r = \pm Z^{\pm}(x, \theta) \tag{1.1}$$

на торцах $X = 0, L$ могут быть заданы произвольные пока краевые условия.

Для нахождения решения уравнений теории упругости анизотропного тела, удовлетворяющего условиям (1.1) и торцевым условиям, вводится безразмерная цилиндрическая координатная система по формулам

$$\xi = \frac{x}{R\varepsilon^a} = \frac{x}{R(h_*)^{a/b}}, \qquad \zeta = \frac{r-R}{R\varepsilon^b} = \frac{r-R}{h}, \qquad \varphi = \frac{\theta}{\varepsilon^a} \tag{1.2}$$

где $\varepsilon = (h_*)^{1/b}$ — малый параметр, $h_* = h/R$ — относительная полутолщина, a, b — целые положительные числа, $b > a$. После этих преобразований соответствующие уравнения теории упругости будут содержать малый параметр ε.

Решение подобного рода сингулярно возмущенных уравнений складывается из двух типов решений — внутреннего, т. е. незатухающего при удалении от границы в глубь области, и типа погранслоя [1—3, 11].

Решение внутренней задачи будем искать в виде [1—3]

$$Q = \varepsilon^{-q} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s Q^{(s)} \tag{1.3}$$

Q — любое из напряжений и безразмерных перемещений, $U_x = u_x/R$, $U_\theta = u_\theta/R$, $U_r = u_r/R$, $Q^{(s)} = 0$ при $s < 0$, q — целое число, подбирается так, чтобы после подстановки в уравнения теории упругости получить рекуррентную систему относительно $Q^{(s)}$. При разыскивании таких непротиворечивых значений q надо раздельно рассматривать случаи [1—3]

$$\text{а)}\quad t = \frac{a}{b} < \frac{1}{2}, \qquad \text{б)}\quad t = \frac{1}{2}, \qquad \text{в)}\quad t > \frac{1}{2} \tag{1.4}$$

которым соответствуют

$$\begin{gathered} (\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_{\theta x}) \to q = b, \quad (\sigma_{rx}, \sigma_{r\theta}) \to q = a, \quad \sigma_r \to q = c \\ (U_x, U_\theta) \to q = b - a, \quad U_r \to q = b - c \end{gathered} \tag{1.5}$$

где

$$c = 0 \text{ при } t \leq \frac{1}{2}, \qquad c = 2a - b \text{ при } t \geq \frac{1}{2} \tag{1.6}$$

При $l < 1/2$ есть вторая непротиворечивая комбинация значений q, отличающаяся от (1.5) значениями для перемещений

$$(U_x,\ U_\theta) \to q = 2b - 3a, \quad U_r \to q = 2b - 2a \tag{1.7}$$

Подставляя (1.3) в уравнения теории упругости, с учетом (1.5) получим систему (здесь и в последующем, для удобства записи, запятыми выделены частные производные)

$$\sigma_{r,\zeta}^{(s)} + \sigma_{rx,x}^{(s-b+2a-c)} + \sigma_{r\theta,\theta}^{(s-b+2a-c)} - \sigma_\theta^{(s-c)} + \zeta\sigma_{r,\zeta}^{(s-b)} + \zeta\sigma_{rx,x}^{(s-2b+2a)} + \sigma_r^{(s-b)} = 0$$

$$\sigma_{r\theta,\zeta}^{(s)} + \sigma_{\theta x,x}^{(s)} + \sigma_{\theta,\theta}^{(s)} + \zeta\sigma_{r\theta,\zeta}^{(s-b)} + \zeta\sigma_{\theta x,x}^{(s-b)} + 2\sigma_{r\theta}^{(s-b)} = 0$$

$$\sigma_{rx,\zeta}^{(s)} + \sigma_{x,x}^{(s)} + \sigma_{\theta x,\theta}^{(s)} + \zeta\sigma_{rx,\zeta}^{(s-b)} + \zeta\sigma_{x,x}^{(s-b)} + \sigma_{rx}^{(s-b)} = 0$$

$$U_{x,x}^{(s)} = a_{11}\sigma_x^{(s)} + a_{12}\sigma_\theta^{(s)} + a_{13}\sigma_r^{(s-b+c)} + a_{14}\sigma_{r\theta}^{(s-b+a)} + a_{15}\sigma_{rx}^{(s-b+a)} + a_{16}\sigma_{\theta x}^{(s)}$$

$$U_{\theta,\theta}^{(s)} + U_r^{(s-c)} = a_{12}\sigma_x^{(s)} + a_{22}\sigma_\theta^{(s)} + a_{23}\sigma_r^{(s-b+c)} + a_{24}\sigma_{r\theta}^{(s-b+a)} +$$

$$+ a_{25}\sigma_{rx}^{(s-b+a)} + a_{26}\sigma_{\theta x}^{(s)} + \zeta(a_{12}\sigma_x^{(s-b)} + a_{22}\sigma_\theta^{(s-b)} +$$

$$+ a_{23}\sigma_r^{(s-2b+c)} + a_{24}\sigma_{r\theta}^{(s-2b+a)} + a_{25}\sigma_{rx}^{(s-2b+a)} + a_{26}\sigma_{\theta x}^{(s-b)})$$

$$U_{r,\zeta}^{(s)} = a_{13}\sigma_x^{(s-b+c)} + a_{23}\sigma_\theta^{(s-b+c)} + a_{33}\sigma_r^{(s-2b+2c)} +$$

$$+ a_{34}\sigma_{r\theta}^{(s-2b+a+c)} + a_{35}\sigma_{rx}^{(s-2b+a+c)} + a_{36}\sigma_{\theta x}^{(s-b+c)}$$

$$U_{\theta,\zeta}^{(s)} + U_{r,\theta}^{(s-b+2a-c)} + \zeta U_{\theta,\zeta}^{(s-b)} - U_\theta^{(s-b)} =$$

$$= a_{14}\sigma_x^{(s-b+a)} + a_{24}\sigma_\theta^{(s-b+a)} + a_{34}\sigma_r^{(s-2b+a+c)} +$$

$$+ a_{44}\sigma_{r\theta}^{(s-2b+2a)} + a_{45}\sigma_{rx}^{(s-2b+2a)} + a_{46}\sigma_{\theta x}^{(s-b+a)} +$$

$$+ \zeta(a_{14}\sigma_x^{(s-2b+a)} + a_{24}\sigma_\theta^{(s-2b+a)} + a_{34}\sigma_r^{(s-3b+a+c)} +$$

$$+ a_{44}\sigma_{r\theta}^{(s-3b+2a)} + a_{45}\sigma_{rx}^{(s-3b+2a)} + a_{46}\sigma_{\theta x}^{(s-2b+a)})$$

$$U_{r,x}^{(s-b+2a-c)} + U_{x,\zeta}^{(s)} = a_{15}\sigma_x^{(s-b+a)} + a_{25}\sigma_\theta^{(s-b+a)} +$$

$$+ a_{35}\sigma_r^{(s-2b+a+c)} + a_{45}\sigma_{r\theta}^{(s-2b+2a)} + a_{55}\sigma_{rx}^{(s-2b+2a)} + a_{56}\sigma_{\theta x}^{(s-b+a)}$$

$$U_{x,\theta}^{(s)} + U_{\theta,x}^{(s)} + \zeta U_{\theta,x}^{(s-b)} = a_{16}\sigma_x^{(s)} + a_{26}\sigma_\theta^{(s)} + a_{36}\sigma_r^{(s-b+c)} +$$

$$+ a_{46}\sigma_{r\theta}^{(s-b+a)} + a_{56}\sigma_{rx}^{(s-b+a)} + a_{66}\sigma_{\theta x}^{(s)} + \zeta(a_{16}\sigma_x^{(s-b)} +$$

$$+ a_{26}\sigma_\theta^{(s-b)} + a_{36}\sigma_r^{(s-2b+c)} + a_{46}\sigma_{r\theta}^{(s-2b+a)} + a_{56}\sigma_{rx}^{(s-2b+a)} + a_{66}\sigma_{\theta x}^{(s-b)})$$

Система уравнений (1.8) интегрируется относительно ζ в каждом из трех случаев (1.4).

2. Рассмотрим случай $l < 1/2$, то есть $2a < b$. После интегрирования уравнений (1.8) по ζ получим

$$U_x^{(s)} = U^{(s)} + U^{*(s)}, \quad U_\theta^{(s)} = V^{(s)} + V^{*(s)}$$
$$U_r^{(s)} = W^{(s)} + W^{*(s)} \tag{2.1}$$

$$\sigma_x^{(s)} = \sigma_{x0}^{(s)} + \sigma_x^{*(s)} \quad (x\theta), \qquad \tau_{\theta x}^{(s)} = \tau_{\theta x0}^{(s)} + \tau_{\theta x}^{*(s)} \tag{2.2}$$

$$\sigma_{rx}^{(s)} = \zeta\sigma_{rx1}^{(s)} + \sigma_{rx0}^{(s)} + \sigma_{rx}^{*(s)} \quad (x\theta), \qquad \sigma_r^{(s)} = \zeta\sigma_{r1}^{(s)} + \sigma_{r0}^{(s)} + \sigma_r^{*(s)} \tag{2.3}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{x0}^{(s)} &= B_{11}\varepsilon_1^{(s)} + B_{12}\varepsilon_2^{(s)} + B_{16}\omega^{(s)} \quad (x\theta;\ 12) \\ \tau_{x\theta 0}^{(s)} &= B_{16}\varepsilon_1^{(s)} + B_{26}\varepsilon_2^{(s)} + B_{66}\omega^{(s)} \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\sigma_{r1}^{(s)} = \sigma_{\theta 0}^{(s)}, \qquad \sigma_{rx1}^{(s)} = -\left(\sigma_{x0,\xi}^{(s)} + \tau_{x\theta 0,\eta}^{(s)}\right) \quad (x\theta) \tag{2.5}$$

$$\varepsilon_1^{(s)} = U_{,\xi}^{(s)}, \qquad \varepsilon_2^{(s)} = V_{,\eta}^{(s)} + W^{(s)}, \qquad \omega^{(s)} = U_{,\eta}^{(s)} + V_{,\xi}^{(s)} \tag{2.6}$$

Величины со звездочкой известны и определяются по формулам

$$W^{*(s)} = \int_0^\zeta \left(a_{13}\sigma_x^{(s-b)} + a_{23}\sigma_\theta^{(s-b)} + a_{33}\sigma_r^{(s-2b)} + \right.$$

$$\left. + a_{34}\sigma_{r\theta}^{(s-2b+a)} + a_{35}\sigma_{rx}^{(s-2b+a)} + a_{36}\tau_{\theta x}^{(s-b)}\right) d\zeta$$

$$V^{*(s)} = -\int_0^\zeta \left(U_{r,\eta}^{(s-b-2a)} + \zeta U_{\theta,\zeta}^{(s-b)} - U_\theta^{(s-b)}\right) d\zeta +$$

$$+ \int_0^\zeta \left(a_{14}\sigma_x^{(s-b+a)} + a_{24}\sigma_\theta^{(s-b+a)} + \ldots + a_{46}\tau_{\theta x}^{(s-b+a)}\right) d\zeta +$$

$$+ \int_0^\zeta \zeta\left(a_{14}\sigma_x^{(s-2b+a)} + a_{24}\sigma_\theta^{(s-2b+a)} + \ldots + a_{46}\tau_{\theta x}^{(s-2b+a)}\right) d\zeta$$

$$U^{*(s)} = \int_0^\zeta \left(a_{15}\sigma_x^{(s-b+a)} + a_{25}\sigma_\theta^{(s-b+a)} + a_{35}\sigma_r^{(s-2b+a)} + \right.$$

$$\left. + a_{45}\sigma_{r\theta}^{(s-2b+2a)} + a_{55}\sigma_{rx}^{(s-2b+2a)} + a_{56}\tau_{\theta x}^{(s-b+a)} - U_{r,\xi}^{(s-b-2a)}\right) d\zeta$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^{*(s)} &= B_{11}\varepsilon_1^{*(s)} + B_{12}\varepsilon_2^{*(s)} + B_{16}\omega^{*(s)} + \zeta B_{16}\tau_0^{(s-b)} + \\ &+ a_3\sigma_r^{(s-b)} + a_4\sigma_{r\theta}^{(s-b+a)} + a_5\sigma_{rx}^{(s-b+a)} + \\ &+ \zeta\left(a_1'\sigma_x^{(s-b)} + a_2'\sigma_\theta^{(s-b)} + a_3'\sigma_r^{(s-2b)} + a_4'\sigma_{r\theta}^{(s-2b+a)} + \right. \\ &\left. + a_5'\sigma_{rx}^{(s-2b+a)} + a_6'\tau_{\theta x}^{(s-b)}\right), \quad (x\theta;\ 12;\ a_i b_i;\ a_i' b_i') \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta x}^{*(s)} &= B_{16}\varepsilon_1^{*(s)} + B_{26}\varepsilon_2^{*(s)} + B_{66}\omega^{*(s)} + \zeta B_{66}\tau_0^{(s-b)} + \\ &+ c_3\sigma_r^{(s-b)} + c_4\sigma_{r\theta}^{(s-b+a)} + c_5\sigma_{rx}^{(s-b+a)} + \\ &+ \zeta\left(c_1'\sigma_x^{(s-b)} + c_2'\sigma_\theta^{(s-b)} + \ldots + c_6'\tau_{\theta x}^{(s-b)}\right) \end{aligned}$$

$$\sigma_r^{*(s)} = -\int_0^{\zeta} \sigma_\theta^{*(s)}\, d\zeta - \int_0^{\zeta} \left(\zeta\sigma_{\theta,\eta}^{(s-b)} + \sigma_{r\theta,\eta}^{(s-b+2a)} + \right.$$

$$\left. + \zeta\sigma_{rx}^{(s-2b+2a)} + \sigma_{r\theta,\eta}^{(s-b+2a)} + \sigma_r^{(s-b)}\right) d\zeta$$

$$\sigma_{r\theta}^{*(s)} = -\int_0^{\zeta} \left(\sigma_{\theta x,\xi}^{*(s)} + \sigma_{\theta,\eta}^{*(s)}\right) d\zeta - \int_0^{\zeta} \left(\zeta\sigma_{r\theta,\eta}^{(s-b)} + \zeta\sigma_{\theta x,\xi}^{(s-b)} + 2\sigma_{r\theta}^{(s-b)}\right) d\zeta$$

$$\sigma_{rx}^{*(s)} = -\int_0^{\zeta} \left(\sigma_{x,\xi}^{*(s)} + \sigma_{\theta x,\eta}^{*(s)}\right) d\zeta - \int_0^{\zeta} \left(\sigma_{rx}^{(s-b)} + \zeta\sigma_{rx,\eta}^{(s-b)} + \zeta\sigma_{x,\xi}^{(s-b)}\right) d\zeta$$

$$\varepsilon_\xi^{*(s)} = U_{,\xi}^{*(s)}, \quad \varepsilon_\eta^{*(s)} = V_{,\eta}^{*(s)} + W^{*(s)}$$
$$\omega^{*(s)} = U_{,\eta}^{*(s)} + V_{,\xi}^{*(s)}, \quad \varepsilon_0^{(s)} = U_{0,\xi}^{(s)} \tag{2.8}$$

$$a_i = -(a_{1i}B_{11} + a_{2i}B_{12} + a_{i6}B_{16}), \quad a_i' = -(a_{2i}B_{12} + a_{i6}B_{16})$$
$$b_i = -(a_{1i}B_{12} + a_{2i}B_{22} + a_{i6}B_{26}), \quad b_i' = -(a_{2i}B_{22} + a_{i6}B_{26}) \tag{2.9}$$
$$c_i = -(a_{1i}B_{16} + a_{2i}B_{26} + a_{i6}B_{66}), \quad c_i' = -(a_{2i}B_{26} + a_{i6}B_{66})$$
$$(i = 1,\ 2, \ldots, 6)$$

B_{ij} — упругие коэффициенты, приводимые в [12].

Удовлетворяя граничным условиям (1.1), получим систему

$$L_{11}U^{(s)} + L_{12}V^{(s)} + L_{13}W^{(s)} = p_1^{(s)}$$
$$L_{12}U^{(s)} + L_{22}V^{(s)} + L_{23}W^{(s)} = p_2^{(s)} \tag{2.10}$$
$$L_{13}U^{(s)} + L_{23}V^{(s)} + L_{33}W^{(s)} = q^{(s)}$$

где

$$L_{11} = B_{11}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2B_{16}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + B_{66}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \quad (12;\ \xi\eta)$$

$$L_{12} = B_{16}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + (B_{12} + B_{66})\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + B_{26}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \tag{2.11}$$

$$L_{13} = B_{12}\frac{\partial}{\partial\xi} + B_{26}\frac{\partial}{\partial\eta}, \qquad L_{23} = B_{22}\frac{\partial}{\partial\eta} + B_{26}\frac{\partial}{\partial\xi}, \qquad L_{33} = B_{22}$$

$$p_1^{(s)} = -X_1^{(s)} + \frac{1}{2}\left[\sigma_{rx}^{*(s)}(\zeta = 1) - \sigma_{rx}^{*(s)}(\zeta = -1)\right]$$

$$p_2^{(s)} = -Y_1^{(s)} + \frac{1}{2}\left[\sigma_{r\theta}^{*(s)}(\zeta = 1) - \sigma_{r\theta}^{*(s)}(\zeta = -1)\right] \tag{2.12}$$

$$q^{(s)} = Z_2^{(s)} - \frac{1}{2}\left[\sigma_r^{*(s)}(\zeta = 1) - \sigma_r^{*(s)}(\zeta = -1)\right]$$

$$X_{1,2}^{(s)} = 1/2\left(X^{+(s)} \pm X^{-(s)}\right) \quad (XY), \qquad Z_{1,2}^{(s)} = 1/2\left(Z^{+(s)} \mp Z^{-(s)}\right)$$

$$X^{\pm(0)} = X^{\pm}, \quad Y^{\pm(0)} = Y^{\pm}, \quad Z^{\pm(0)} = Z^{\pm} \tag{2.13}$$

$$X^{\pm(s)} = Y^{\pm(s)} = Z^{\pm(s)} \equiv 0 \text{ при } s \neq 0$$

$$\sigma_{r0}^{(s)} = Z_1^{(s)} - 1/2\left[\sigma_r^{*(s)}(\zeta = 1) + \sigma_r^{*(s)}(\zeta = -1)\right]$$

$$\tau_{rx0}^{(s)} = X_2^{(s)} - 1/2\left[\tau_{rx}^{*(s)}(\zeta = 1) + \tau_{rx}^{*(s)}(\zeta = -1)\right] \tag{2.14}$$

$$\tau_{r\theta 0}^{(s)} = Y_2^{(s)} - 1/2\left[\tau_{r\theta}^{*(s)}(\zeta = 1) + \tau_{r\theta}^{*(s)}(\zeta = -1)\right]$$

Вводя вместо напряжений статически эквивалентные им внутренние силы и моменты, можно показать, что уравнения (2.10) и все остальные расчетные формулы этого пункта в исходном приближении совпадают с уравнениями [12] безмоментной теории цилиндрической оболочки, материал которой обладает плоскостью упругой симметрии, параллельной срединной плоскости.

3. В случае $l = 1/2$, интегрируя систему (1.8) относительно ζ, получим

$$U_r^{(s)} = W^{(s)} + W^{*(s)}$$

$$U_x^{(s)} = -\zeta W_{,\xi}^{(s)} + U^{(s)} + U^{*(s)} \tag{3.1}$$

$$U_\theta^{(s)} = -\zeta W_{,\eta}^{(s)} + V^{(s)} + V^{*(s)}$$

$$\sigma_x^{(s)} = \zeta\sigma_{x1}^{(s)} + \sigma_{x0}^{(s)} + \sigma_x^{*(s)} \ (x\theta), \qquad \tau_{\theta x}^{(s)} = \zeta\tau_{\theta x1}^{(s)} + \tau_{\theta x0}^{(s)} + \tau_{x\theta}^{*(s)}$$

$$\tau_{xr}^{(s)} = 1/2\zeta^2\tau_{xr2}^{(s)} + \zeta\tau_{xr1}^{(s)} + \tau_{xr0}^{(s)} + \tau_{rx}^{*(s)} \quad (x\theta) \tag{3.2}$$

$$\sigma_r^{(s)} = 1/6\zeta^3\sigma_{r3}^{(s)} + 1/2\zeta^2\sigma_{r2}^{(s)} + \zeta\sigma_{r1}^{(s)} + \sigma_{r0}^{(s)} + \sigma_r^{*(s)}$$

где $\sigma_{r0}^{(s)}$, $\tau_{rx0}^{(s)}$, $\tau_{r\theta 0}^{(s)}$ определяются по формулам (2.4), (2.6), а для остальных величин имеем

$$\sigma_{x1}^{(s)} = B_{11}\varkappa_1^{(s)} + B_{12}\varkappa_2^{(s)} + B_{16}\tau^{(s)} \quad (x\theta,\ 12) \tag{3.3}$$

$$\tau_{\theta x1}^{(s)} = B_{16}\varkappa_1^{(s)} + B_{26}\varkappa_2^{(s)} + B_{66}\tau^{(s)}$$

$$\varkappa_1^{(s)} = -W_{,\xi\xi}^{(s)}, \quad \varkappa_2^{(s)} = -W_{,\eta\eta}^{(s)}, \quad \tau^{(s)} = -2W_{,\xi\eta}^{(s)} \tag{3.4}$$

$$\tau_{xr(k+1)}^{(s)} = -\left(\sigma_{xk,\xi}^{(s)} + \tau_{x\theta k,\eta}^{(s)}\right) \quad (x\theta) \quad (k = 0, 1)$$

$$\sigma_{r(k+1)}^{(s)} = -\left(\tau_{rxk,\xi}^{(s)} + \tau_{r\theta k,\eta}^{(s)} - \sigma_{\theta k}^{(s)}\right) \quad (k = 0, 1) \tag{3.5}$$

$$\sigma_{r3}^{(s)} = -\left(\tau_{rx2,\xi}^{(s)} + \tau_{r\theta 2,\eta}^{(s)}\right)$$

$$V^{*(s)} = \int_0^{\zeta}\left(a_{14}\sigma_x^{(s-u)} + a_{16}\sigma_\theta^{(s-u)} + \ldots + a_{46}\tau_{x\theta}^{(s-u)}\right) d\zeta +$$

$$+\int_0^{\zeta}\zeta\left(a_{14}\sigma_{x}^{(s-3a)}+a_{24}\sigma_{\theta}^{(s-3a)}+\ldots+a_{46}\sigma_{x\theta}^{(s-3a)}\right)d\zeta-$$

$$-\int_0^{\zeta}\left(\zeta U_{\theta,\zeta}^{(s-2a)}-U_{\theta}^{(s-2a)}+W_{,\varphi}^{*(s)}\right)d\zeta \tag{3.6}$$

$$U^{*(s)}=\int_0^{\zeta}\left(a_{15}\sigma_{x}^{(s-a)}+a_{25}\sigma_{\theta}^{(s-a)}+\ldots+a_{56}\sigma_{x\theta}^{(s-a)}-W_{,\xi}^{*(s)}\right)d\zeta$$

$$\sigma_{r}^{*(s)}=-\int_0^{\zeta}\left(\sigma_{rx,\xi}^{*(s)}+\sigma_{r\theta,\varphi}^{*(s)}+\sigma_{\theta}^{*(s)}\right)d\zeta-$$

$$-\int_0^{\zeta}\left(\zeta\sigma_{r,\zeta}^{(s-2a)}+\zeta\sigma_{rx,\xi}^{(s-2a)}+\sigma_{r}^{(s-2a)}\right)d\zeta$$

Не написанные здесь величины со звездочками определяются по формулам (2.7)—(2.8), только в них надо положить $b=2a$.

Перемещения определяются из уравнений, имеющих структуру (2.10), но оператор L_{33} и нагрузки $p_i^{(s)}$, $q^{(s)}$ уже имеют вид

$$L_{33}=B_{22}+\frac{1}{3}\left|B_{11}\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}+4B_{16}\frac{\partial^4}{\partial\xi^3\partial\varphi}+\right.$$

$$\left.+2\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\varphi^2}+4B_{26}\frac{\partial^4}{\partial\xi\partial\varphi^3}+B_{22}\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}\right| \tag{3.7}$$

$$p_1^{(s)}=-X_1^{(s)}+\frac{1}{2}\left[\sigma_{rx}^{*(s)}(\zeta=1)-\sigma_{rx}^{*(s)}(\zeta=-1)\right]\quad(12;\ x\theta;\ XY) \tag{3.8}$$

$$q^{(s)}=Z_2^{(s)}+X_{3,\xi}^{(s)}+Y_{3,\varphi}^{(s)}-1/2\left[\sigma_r^{*(s)}(\zeta=1)-\sigma_r^{*(s)}(\zeta=-1)+\right.$$

$$\left.+\sigma_{rx,\xi}^{*(s)}(\zeta=1)+\sigma_{rx,\xi}^{*(s)}(\zeta=-1)+\sigma_{r\theta,\varphi}^{*(s)}(\zeta=1)+\sigma_{r\theta,\varphi}^{*(s)}(\zeta=-1)\right]$$

$$\tau_{rx0}^{(s)}=X_2^{(s)}-\frac{1}{2}\left[\sigma_{rx}^{*(s)}(\zeta=1)+\sigma_{rx}^{*(s)}(\zeta=-1)\right]-\frac{1}{2}\tau_{rx2}^{(s)}\quad(x\theta;\ XY)$$

$$\tau_{r0}^{(s)}=Z_1^{(s)}-\frac{1}{2}\left[\sigma_r^{*(s)}(\zeta=1)+\sigma_r^{*(s)}(\zeta=-1)\right]-\frac{1}{2}\tau_{r2}^{(s)} \tag{3.9}$$

Уравнения и расчетные формулы, построенные в этом пункте, в исходном приближении совпадают с уравнениями теории напряженных состояний с большой изменяемостью (теория пологих оболочек) [12].

Проинтегрировав относительно ζ сначала первых три уравнения (1.8) и соотношения (3.2), потом те же уравнения и соотношения, умноженные на ζ, в пределах $(-1,1)$, получим такие уравнения, которые можно получить, если применять известную гипотезу о недеформируемых нормалях, а в уравнениях закона Гука пренебрегать вместе с напряжением σ_γ и напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$, затем принимать предположения теории пологих оболочек.

Система уравнений (2.10) с помощью операторного метода может быть приведена к одному дифференциальному уравнению с частными производными восьмого порядка относительно некоторой потенциальной функции $\Phi^{(s)}(\xi, \varphi)$, через которую могут быть представлены все расчетные величины задачи. Однако, в отличие от изотропного и ортотропного случаев, напряженное и деформированное состояние оболочки здесь не расчленяется на симметричное и обратно симметричное относительно начальной образующей $\varphi = 0$.

Из (3.8), (3.6) и (2.7) видно, что $p_i^{(s)} = 0$, $q^{(s)} = 0$ при $s = 1, 2, \ldots, a-1$. Это значит, что поправки к внутреннему напряженному состоянию будут сказываться, начиная с приближения $s = a$. В изотропном и ортотропном случаях, а также в случае материала, обладающего плоскостью упругой симметрии, $p_i^{(s)} = q^{(s)} = 0$ при $s = 1, 2, \ldots, 2a-1$, то есть поправки сказываются с приближения $s = 2a$. Это значит, что погрешность гипотез Кирхгоффа в случае оболочки с общей анизотропией порядка $O(\varepsilon^{a})$, а в случае ортотропных и изотропных оболочек, а также оболочек, имеющих плоскость упругой симметрии, — $O(\varepsilon^{2a})$, то есть гипотезы Кирхгоффа приводят к большой погрешности в случае оболочки с общей анизотропией. Из (2.7) видно, что неучет касательных напряжений $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ приводит к формальной погрешности порядка $O(\varepsilon^{4})$, а неучет нормального напряжения σ_γ — к погрешности порядка $O(\varepsilon^{2})$. Однако, как убедимся ниже, из выражений $p_i^{(a)}$, $q^{(a)}$ вытекает, что эти погрешности могут быть и больше в зависимости от степени анизотропии.

Операторы L_{ij} совпадают с соответствующими операторами пологих оболочек [12]. Если же сравнить L_{ij} с соответствующими операторами классической теории, то заметим, что в нашем случае в операторах L_{22} и L_{23} отсутствуют соответственно следующие члены (по обозначениям монографии [12]):

$$\frac{4}{R^2}\left(D_{66}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + D_{26}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{4}D_{22}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right) \tag{3.10}$$

$$-\frac{1}{R}\left(\frac{2D_{16}}{A^3}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3} + \frac{D_{12}+4D_{66}}{A^2B}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial\beta} + \frac{4D_{26}}{AB^2}\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2} + \frac{D_{22}}{B^3}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}\right)$$

Из (2.7), (3.6) видно, что эти члены в результате асимптотического интегрирования уравнений трехмерной задачи появляются, начиная с приближения $s = 2a$. Однако имеются того же порядка другие члены тоже. Следовательно, эти члены не являются главными, и если, все же, мы хотим их удержать, то необходимо удержать все члены такого же порядка. Неучет этих членов может привести к погрешности порядка $O(\varepsilon^{m})$. Начиная с приближения $s = a$, появляются новые члены, связанные с общей анизотропией и исчезающие, когда имеется плоскость упругой симметрии, неучет которых приводит к формальной погрешности порядка $O(\varepsilon^{a})$. При асимптотическом подходе их учет связан с новыми нагрузочными членами $p_i^{(a)}$ и $q^{(a)}$, которые имеют вид

$$
\begin{gathered}
p_1^{(a)} = \overset{*}{L}_{13} W^{(0)}, \quad p_2^{(a)} = \overset{*}{L}_{23} W^{(0)} \\
q^{(a)} = \overset{*}{L}_{31} U^{(0)} + \overset{*}{L}_{32} V^{(0)} + \overset{*}{L}_{33} W^{(0)}
\end{gathered} \tag{3.11}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\overset{*}{L}_{13} = \overset{*}{L}_{31} = \frac{1}{6} \Big[a_5 \frac{\partial^2 L_{11}}{\partial \xi^2} + b_5 \frac{\partial^2 L_{11}}{\partial \varphi^2} + 2c_5 \frac{\partial^2 L_{11}}{\partial \xi \partial \varphi} + \\
+ a_4 \frac{\partial^2 L_{12}}{\partial \xi^2} + b_4 \frac{\partial^2 L_{12}}{\partial \varphi^2} + 2c_4 \frac{\partial^2 L_{12}}{\partial \xi \partial \varphi} \Big] + \\
+ \frac{1}{3} \Big[a_4 \left(\frac{\partial^2 L_{12}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 L_{22}}{\partial \xi \partial \varphi} \right) + a_5 \left(\frac{\partial^2 L_{11}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 L_{12}}{\partial \xi \partial \varphi} \right) + \\
+ c_4 \left(\frac{\partial^2 L_{12}}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial^2 L_{22}}{\partial \varphi^2} \right) + c_5 \left(\frac{\partial^2 L_{11}}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial^2 L_{12}}{\partial \varphi^2} \right) \Big]
\end{gathered} \tag{3.12}
$$

$$(12;\ \xi\varphi;\ a_5 b_4;\ a_4 b_5;\ c_4 c_5)$$

$$
\begin{gathered}
\overset{*}{L}_{33} = \frac{2}{3} \Big[b_4 \left(\frac{\partial L_{12}}{\partial \xi} + \frac{\partial L_{22}}{\partial \varphi} \right) + b_5 \left(\frac{\partial L_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial L_{12}}{\partial \varphi} \right) \Big] + \\
+ \frac{1}{3} \Big[a_5 \frac{\partial^2 L_{13}}{\partial \xi^2} + b_5 \frac{\partial^2 L_{13}}{\partial \varphi^2} + 2c_5 \frac{\partial^2 L_{13}}{\partial \xi \partial \varphi} + \\
+ a_4 \frac{\partial^2 L_{23}}{\partial \xi^2} + b_4 \frac{\partial^2 L_{23}}{\partial \varphi^2} + 2c_4 \frac{\partial^2 L_{23}}{\partial \xi \partial \varphi} \Big] - \\
- \frac{1}{3} \Big[a_4 \left(\frac{\partial^3 L_{12}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^3 L_{22}}{\partial \xi^2 \partial \varphi} \right) + b_4 \left(\frac{\partial^3 L_{12}}{\partial \xi \partial \varphi^2} + \frac{\partial^3 L_{22}}{\partial \varphi^3} \right) + \\
+ a_5 \left(\frac{\partial^3 L_{11}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^3 L_{12}}{\partial \xi^2 \partial \varphi} \right) + b_5 \left(\frac{\partial^3 L_{11}}{\partial \xi \partial \varphi^2} + \frac{\partial^3 L_{12}}{\partial \varphi^3} \right) + \\
+ 2c_4 \left(\frac{\partial^2 L_{12}}{\partial \xi^2 \partial \varphi} + \frac{\partial^3 L_{22}}{\partial \xi \partial \varphi^2} \right) + 2c_5 \left(\frac{\partial^3 L_{11}}{\partial \xi^2 \partial \varphi} + \frac{\partial^3 L_{12}}{\partial \xi \partial \varphi^2} \right) \Big]
\end{gathered}
$$

Из (3.11) — (3.12) видно, что если имеет место соотношение

$$a_i,\ b_i,\ c_i \sim O(\varepsilon^{-a}) \quad (i = 4,\ 5) \tag{3.13}$$

то поправки от приближения $s = a$ будут порядка первого члена (нулевого приближения) в разложении (1.3), и асимптотика (1.5) не будет верна. Поправки от приближения $s = 2a$, то есть от членов типа (3.10), будут важны, если имеет место

$$a_i,\ b_i,\ c_i \sim O(\varepsilon^{-2a}) \quad (i = 3,\ 4,\ 5) \tag{3.14}$$

в чем можно убедиться, если вычислить нагрузочные члены для приближения $s = 2a$.

Если упругие коэффициенты материала таковы, что имеет место соотношение (3.13) (вычисления показывают, что для реальных материалов этот случай может встретиться редко), то напряженно-деформированное состояние уже нельзя описать уравнением восьмого порядка. Используя прием вывода уравнений, используемый в [2, 3], можно прийти к системе

$$
\begin{aligned}
L_{11}U^{(s)} + L_{12}V^{(s)} + (L_{13} - \bar{L}_{13})W^{(s)} &= p_1^{(s)} \\
L_{12}U^{(s)} + L_{22}V^{(s)} + (L_{23} - \bar{L}_{23})W^{(s)} &= p_2^{(s)} \qquad (3.15) \\
(L_{13} - \bar{L}_{13})U^{(s)} + (L_{23} - \bar{L}_{23})V^{(s)} + (L_{33} - \bar{L}_{33})W^{(s)} &= q^{(s)}
\end{aligned}
$$

которая эквивалентна одному дифференциальному уравнению с частными производными десятого порядка.

4. В случае $t > 1/2$, полагая в уравнениях (1.8) $c = 2a - b$, после интегрирования получим формулы (3.1)—(3.5), (2.4), (2.6). Меняются лишь выражения для $\tau_{r1}^{(s)}$, $\tau_{r2}^{(s)}$, $\sigma_r^{(s)}$ и $\sigma_r^{*(s)}$.

Эти величины определяются по формулам

$$\tau_{r1}^{(s)} = -(\tau_{r10,1}^{(s)} + \tau_{r00,\varphi}^{(s)}), \qquad \tau_{r2}^{(s)} = -(\tau_{r21,1}^{(s)} + \tau_{r11,\varphi}^{(s)}) \qquad (4.1)$$

$$\sigma_r^{(s)} = W^{*(s)}_{,\zeta}, \qquad \sigma_r^{*(s)} = V^{*(s)}_{,\zeta} \qquad (4.2)$$

Величины со звездочкой в этом случае имеют вид

$$W^{*(s)} = \int_0^\zeta (a_{13}\sigma_1^{(s-2b+2a)} + a_{23}\sigma_2^{(s-2b+2a)} + \ldots + a_{36}\tau_{12}^{(s-2b+2a)})\,d\zeta$$

$$V^{*(s)} = \int_0^\zeta (a_{14}\sigma_1^{(s-b+a)} + a_{24}\sigma_2^{(s-b+a)} + \ldots + a_{46}\tau_{12}^{(s-b+a)})\,d\zeta -$$

$$- \int_0^\zeta \zeta(a_{14}\sigma_1^{(s-2b+a)} + a_{24}\sigma_2^{(s-2b+a)} + \ldots + a_{46}\tau_{12}^{(s-2b+a)})\,d\zeta -$$

$$- \int_0^\zeta (\zeta U_{0,\zeta}^{(s-b)} - U_0^{(s-b)} + W^{*(s)}_{,\zeta})\,d\zeta$$

$$U^{*(s)} = \int_0^\zeta (a_{15}\sigma_1^{(s-b+a)} + a_{25}\sigma_2^{(s-b+a)} + \ldots + a_{56}\tau_{12}^{(s-b+a)} - W^{*(s)}_{,\xi})\,d\zeta$$

$$\sigma_r^{*(s)} = B_{11}\sigma_1^{*(s)} + B_{12}\sigma_2^{*(s)} + B_{16}w^{*(s)} + B_{13}U_r^{(s-2a+b)} +$$

$$+ B_{14}\tau_{r0}^{(s-b)} + a_3\sigma_r^{(s-2b+2a)} + a_4\tau_{r1}^{(s-b+a)} + a_5\tau_{r2}^{(s-b+a)} +$$

$$+ \zeta\left(a_1' \sigma_x^{(s-b)} + a_2' \sigma_\theta^{(s-b)} + a_3' \sigma_r^{(s-2b+2a)} + \right.$$

$$\left. + a_4' \sigma_{r\theta}^{(s-2b+a)} + a_5' \sigma_{rx}^{(s-2b-a)} + a_6' \sigma_{\theta x}^{(s-b)}\right) \quad (x\theta;\ 12;\ a_i b_i;\ a_i' b_i') \tag{4.3}$$

$$\sigma_{\theta x}^{*(s)} = B_{16} e_1^{*(s)} + B_{26} \varepsilon_2^{*(s)} + B_{66} \omega^{*(s)} + B_{66} U_r^{(s-2a+b)} +$$

$$+ B_{66} \zeta \varepsilon_0^{(s-b)} + c_3 \sigma_r^{(s-2b+2a)} + c_4 \sigma_{r\theta}^{(s-b+a)} + c_5 \sigma_{rx}^{(s-b+a)} +$$

$$+ \zeta\left(c_1' \sigma_x^{(s-b)} + c_2' \sigma_\theta^{(s-b)} + \ldots + c_6' \sigma_{\theta x}^{(s-b)}\right)$$

$$\sigma_r^{*(s)} = -\int_0^{\zeta} \left(\sigma_{rx,\xi}^{*(s)} + \sigma_{r\theta,\varphi}^{*(s)}\right) d\zeta -$$

$$-\int_0^{\zeta} \left(\zeta \sigma_{rx,\xi}^{(s-b)} + \zeta \sigma_{r\theta,\varphi}^{(s-b)} + \sigma_r^{(s-b)} - \sigma_\theta^{(s-2a-2b)}\right) d\zeta$$

$\sigma_{r\theta}^{*(s)}$, $\sigma_{rx}^{*(s)}$ опять определяются по формулам (2.7).

Удовлетворив граничным условиям (1.1), получим

$$L_{11} U^{(s)} + L_{12} V^{(s)} = p_1^{(s)}$$

$$L_{12} U^{(s)} + L_{22} V^{(s)} = p_2^{(s)} \tag{4.4}$$

$$L_{33} W^{(s)} = q^{(s)}$$

Операторы L_{ij}, нагрузки $p_i^{(s)}$, $q^{(s)}$ и неизвестные функции интегрирования $\sigma_{rx0}^{(s)}$, $\sigma_{r\theta 0}^{(s)}$ и $\sigma_{r0}^{(s)}$ определяются соответственно по формулам (2.11), (3.7), (3.8) и (3.9), только в (3.7) и выражении L_{33} отсутствует слагаемое B_{22}.

Уравнения (4.4) при $s = 0$ совпадают с уравнениями анизотропной пластинки, когда имеется плоскость упругой симметрии [13], то есть в случае $l > 1/2$ в исходном приближении оболочка «работает» как пластинка.

Если в (1.5) для перемещений принять асимптотику (1.7) (особая асимптотика [3]), то, проделав аналогичные действия, придем к уравнениям, в исходном приближении совпадающим с уравнениями чисто моментного напряженного состояния.

5. Описанные выше напряженные состояния являются вообще проникающими, между тем в оболочке могут возникнуть и быстро затухающие напряженные состояния (погранслой).

Для построения погранслоя вблизи края $x = 0$ ($\xi = 0$) в уравнениях теории упругости, преобразованных по формулам (1.2), вводится новая замена переменной по формуле

$$t = \xi/\varepsilon^{b-a} = x/h \tag{5.1}$$

Решение вновь полученных уравнений отыскивается в виде функций типа погранслоя

$$R_p = \varepsilon^{\varkappa_r} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s R_p^{(s)} (\xi, \zeta) \exp(-\lambda t) \tag{5.2}$$

где R_p — любое из напряжений и перемещений, $\varkappa_i$ — показатели интенсивности, $\varkappa_{\sigma_i} = \varkappa$, $\varkappa_{u_i} = \varkappa + b$, $\lambda = \mathrm{const}$ характеризует показатель изменяемости и по свойству погранслоя, $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$.

После подстановки (5.2) в вышеуказанные уравнения и интегрирования вытекающих оттуда уравнений относительно ζ получим

$$\sigma_{xp}^{(s)} = \sigma_{xp}^{(s)} + \sigma_{xp}^{*(s)}, \ldots, \sigma_{\theta xp}^{(s)} = \sigma_{\theta xp}^{(s)} + \sigma_{x\theta p}^{*(s)}$$

$$U_{xp}^{(s)} = U_p^{(s)} + U_p^{*(s)}, \quad U_{\theta p}^{(s)} = V_p^{(s)} + V_p^{*(s)}, \quad U_{rp}^{(s)} = W_p^{(s)} + W_p^{*(s)} \tag{5.3}$$

$$\sigma_{xp}^{(s)} = \lambda^{-2} \sigma_{rp,\zeta\zeta}^{(s)}, \quad \sigma_{\theta xp}^{(s)} = \lambda^{-1} \sigma_{r\theta p,\zeta}^{(s)}, \quad \sigma_{rxp}^{(s)} = \lambda^{-1} \sigma_{rp,\zeta}^{(s)}$$

$$\sigma_{\theta p}^{(s)} = -a_{22}^{-1} \lambda^{-2} (a_{12} \sigma_{rp,\zeta\zeta}^{(s)} + a_{2\ldots} \lambda \sigma_{rp,\zeta}^{(s)} + a_{2\ldots} \lambda \sigma_{r\theta p,\zeta}^{(s)} + a_{23} \lambda^2 \sigma_{rp}^{(s)} + a_{2\ldots} \lambda^2 \sigma_{r\theta p}^{(s)})$$

$$U_p^{(s)} = -\lambda^{-3} (A_1 \sigma_{rp,\zeta\zeta}^{(s)} + A_4 \lambda \sigma_{rp,\zeta}^{(s)} + A_5 \lambda \sigma_{r\theta p,\zeta}^{(s)} + A_{\ldots} \lambda^2 \sigma_{rp}^{(s)} + A_3 \lambda^2 \sigma_{r\theta p}^{(s)}) \tag{5.4}$$

$$V_p^{(s)} = -\lambda^{-3} (A_3 \sigma_{r\theta p,\zeta\zeta}^{(s)} + A_6 \lambda \sigma_{rp,\zeta}^{(s)} + A_7 \lambda \sigma_{r\theta p,\zeta}^{(s)} + A_8 \lambda^2 \sigma_{rp}^{(s)} + A_9 \lambda^2 \sigma_{r\theta p}^{(s)})$$

$$W_p^{(s)} = -\lambda^{-4} [A_1 \sigma_{rp,\zeta\zeta\zeta}^{(s)} + 2A_4 \lambda \sigma_{rp,\zeta\zeta}^{(s)} + A_5 \lambda \sigma_{r\theta p,\zeta\zeta}^{(s)} +$$
$$+ (A_2 + A_{10}) \lambda^2 \sigma_{rp,\zeta}^{(s)} + (A_3 + A_6) \lambda^2 \sigma_{r\theta p,\zeta}^{(s)} + A_{11} \lambda^3 \sigma_{rp}^{(s)} + A_{12} \lambda^3 \sigma_{r\theta p}^{(s)}]$$

$\sigma_{xp}^{*(s)}$, $\sigma_{x\theta p}^{*(s)}$, $\sigma_{rxp}^{*(s)}$, $\sigma_{\theta p}^{*(s)}$, $U_p^{*(s)}$, $V_p^{*(s)}$ и $W_p^{*(s)}$ определятся по формулам (5.4), если там $\sigma_{rp}^{(s)}$, $\sigma_{r\theta p}^{(s)}$ формально заменить соответственно через $\sigma_{rp}^{*(s)}$, $\sigma_{r\theta p}^{*(s)}$, а затем к полученным выражениям прибавить соответственно $R_x^{(s)}$, $R_{\theta x}^{(s)}$, $R_{rx}^{(s)}$, $R_\theta^{(s)}$, $R_U^{(s)}$, $R_V^{(s)}$, $R_W^{(s)}$, которые в свою очередь определяются по формулам

$$R_{xr}^{(s)} = \lambda^{-1} [\zeta (\sigma_{rp,\zeta}^{(s-b)} - \lambda \sigma_{rxp}^{(s-b)}) + \sigma_{r\theta p,\zeta}^{(s-b+a)} + \sigma_{rp}^{(s-b)} - \sigma_{\theta p}^{(s-b)}]$$

$$R_{\theta x}^{(s)} = \lambda^{-1} [\zeta (\sigma_{r\theta p,\zeta}^{(s-b)} - \lambda \sigma_{\theta xp}^{(s-b)}) + \sigma_{\theta p,\theta}^{(s-b+a)} + 2\sigma_{r\theta p}^{(s-b)}]$$

$$R_x^{(s)} = \lambda^{-1} [\zeta (\sigma_{rxp,\zeta}^{(s-b)} - \lambda \sigma_{xp}^{(s-b)}) + \sigma_{\theta xp,\theta}^{(s-b-a)} + \sigma_{rxp}^{(s-b)}]$$

$$R_\theta^{(s)} = a_{22}^{-1} \{U_{rp}^{(s-b)} + U_{\theta p,\theta}^{(s-b+a)} - \zeta (a_{12} \sigma_{xp}^{(s-b)} + a_{22} \sigma_{\theta p}^{(s-b)} + \ldots +$$
$$+ a_{26} \sigma_{\theta xp}^{(s-b)}) - (a_{12} R_x^{(s)} + a_{\ldots} R_{rx}^{(s)} + a_{26} R_{\theta x}^{(s)})\} \tag{5.5}$$

$$R_U^{(s)} = -\lambda^{-1} (a_{11} R_x^{(s)} + a_{12} R_\theta^{(s)} + a_{1\ldots} R_{rx}^{(s)} + a_{16} R_{\theta x}^{(s)})$$

$$R_V^{(s)} = -\lambda^{-1} (a_{16} R_x^{(s)} + a_{26} R_\theta^{(s)} + a_{56} R_{rx}^{(s)} + a_{66} R_{\theta x}^{(s)})$$

$$R_W^{(s)} = -\lambda^{-1} (a_{15} R_x^{(s)} + a_{25} R_\theta^{(s)} + a_{55} R_{rx}^{(s)} + a_{56} R_{\theta x} - R_{U,\zeta}^{(s)})$$

$\sigma_{rp}^{(s)}$ и $\sigma_{r\theta p}^{(s)}$ — решения однородной системы уравнений, соответствующей системе уравнений (5.6), а $\sigma_{rp}^{*(s)}$ и $\sigma_{r\theta p}^{*(s)}$ — частные решения этой же системы

$$L_1\sigma_{\xi p}^{(s)} + L_2\sigma_{\eta p}^{(s)} = R_1^{(s)}$$
$$L_2\sigma_{\xi p}^{(s)} + L_3\sigma_{\eta p}^{(s)} = R_2^{(s)} \tag{5.6}$$

где

$$L_1 = A_1\frac{\partial^4}{\partial\zeta^4} + 2A_4\lambda\frac{\partial^3}{\partial\zeta^3} + (2A_2 + A_{10})\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + 2A_{11}\lambda^3\frac{\partial}{\partial\zeta} + A_{14}\lambda^4$$

$$L_2 = A_3\lambda\frac{\partial^3}{\partial\zeta^3} + (A_5 + A_6)\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + (A_8 + A_{12})\lambda^3\frac{\partial}{\partial\zeta} + A_{13}\lambda^4$$

$$L_3 = A_7\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + 2A_9\lambda^3\frac{\partial}{\partial\zeta} + A_{15}\lambda^4 \tag{5.7}$$

$$R_1^{(s)} = \lambda^4[R_{W,\zeta}^{(s)} - (a_{13}R_x^{(s)} + a_{23}R_y^{(s)} + a_{35}R_{zx}^{(s)} + a_{36}R_{yx}^{(s)})]$$

$$R_2^{(s)} = \lambda^4[U_{\xi p,\eta}^{(s-b+a)} - U_{\eta p}^{(s-b)} + \zeta U_{\eta,\zeta}^{(s-b)} + R_{V,\zeta}^{(s)} -$$
$$- \zeta(a_{14}\sigma_x^{(s-b)} + a_{24}\sigma_y^{(s-b)} + \dots + a_{46}\sigma_{yx}^{(s-b)}) -$$
$$-(a_{14}R_x^{(s)} + a_{24}R_y^{(s)} + a_{45}R_{zx}^{(s)} + a_{46}R_{yx}^{(s)})]$$

$$A_1 = a_{22}^{-1}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2), \quad A_2 = a_{22}^{-1}(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23})$$
$$A_3 = a_{22}^{-1}(a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24}), \quad A_4 = a_{22}^{-1}(a_{15}a_{22} - a_{12}a_{25})$$
$$A_5 = a_{22}^{-1}(a_{16}a_{22} - a_{12}a_{26}), \quad A_6 = a_{22}^{-1}(a_{56}a_{22} - a_{25}a_{26})$$
$$A_7 = a_{22}^{-1}(a_{66}a_{22} - a_{26}^2), \quad A_8 = a_{22}^{-1}(a_{36}a_{22} - a_{23}a_{26})$$
$$A_9 = a_{22}^{-1}(a_{46}a_{22} - a_{24}a_{26}), \quad A_{10} = a_{22}^{-1}(a_{55}a_{22} - a_{25}^2)$$
$$A_{11} = a_{22}^{-1}(a_{35}a_{22} - a_{23}a_{25}), \quad A_{12} = a_{22}^{-1}(a_{45}a_{22} - a_{24}a_{25})$$
$$A_{13} = a_{22}^{-1}(a_{34}a_{22} - a_{23}a_{24}), \quad A_{14} = a_{22}^{-1}(a_{33}a_{22} - a_{23}^2)$$
$$A_{15} = a_{22}^{-1}(a_{44}a_{22} - a_{24}^2)$$

Полагая

$$\sigma_{\eta p}^{(s)} = L_3\Psi^{(s)}, \quad \sigma_{\xi p}^{(s)} = -L_2\Psi^{(s)} \tag{5.8}$$

решение однородной системы (5.6) сводится к определению $\Psi^{(s)}$ из уравнения

$$(L_1L_3 - L_2^2)\,\Psi^{(s)} = 0 \tag{5.9}$$

Уравнение (5.9) в раскрытом виде имеет вид

$$B_0\frac{\partial^6\Psi^{(s)}}{\partial\zeta^6} + B_1\lambda\frac{\partial^5\Psi^{(s)}}{\partial\zeta^5} + B_2\lambda^2\frac{\partial^4\Psi^{(s)}}{\partial\zeta^4} + B_3\lambda^3\frac{\partial^3\Psi^{(s)}}{\partial\zeta^3} +$$
$$+ B_4\lambda^4\frac{\partial^2\Psi^{(s)}}{\partial\zeta^2} + B_5\lambda^5\frac{\partial\Psi^{(s)}}{\partial\zeta} + B_6\lambda^6\Psi^{(s)} = 0 \tag{5.10}$$

Коэффициенты B_i легко выражаются через A_i. Отметим, что (5.10) совпадает с уравнением погранслоя для пластинки с общей анизотропией [13].

В случае ортотропных и изотропных материалов отличны от нуля только A_1, A_4, A_7, A_{11}, A_{12}, поэтому $L_2 = 0$, и система уравнений (5.6) распадается на два уравнения, которые определяют решения типа плоского и антиплоского погранслоев, соответственно.

Так как $\sigma_{\zeta p}$, $\tau_{\xi\zeta p}$, $\tau_{\tau\zeta p}$ должны удовлетворять условиям отсутствия напряжений на внешней и внутренней поверхностях, то

$$L_1\Psi^{(s)}|_{\zeta=\pm1} = L_2\Psi^{(s)}|_{\zeta=\pm1} = L_3\Psi^{(s)}|_{\zeta=\pm1} = 0 \tag{5.11}$$

$$(s = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ b - a - 1)$$

Отметим также, что если взять такое частное решение системы (5.6), которое удовлетворяет условиям

$$\sigma_{\zeta p}^{(s)}(\zeta = \pm 1) = \tau_{\xi\zeta p}^{(s)}(\zeta = \pm 1) = \tau_{\tau\zeta p}^{(s)}(\zeta = \pm 1) = 0 \tag{5.12}$$

то общее решение однородной системы при $s \geq b - a$ снова будет удовлетворять условиям (5.11). $\sigma_{\zeta p}^{(s)}$, $\tau_{\xi\zeta p}^{(s)}$ и $\tau_{\tau\zeta p}^{(s)}$ выражаются через функции $\Psi^{(s)}$ по формулам

$$\sigma_{\zeta p}^{(s)} = -\lambda^{-2}L_1\Psi^{(s)}, \quad \tau_{\xi\zeta p}^{(s)} = \lambda^{-1}L_3\Psi^{(s)}, \quad \tau_{\tau\zeta p}^{(s)} = -\lambda^{-1}L_2\Psi^{(s)} \tag{5.13}$$

и удовлетворяют условиям самоуравновешенности

$$\int_{-1}^{1} \sigma_{xp}^{(s)}d\zeta = \int_{-1}^{1} \zeta\sigma_{xp}^{(s)}d\zeta = \int_{-1}^{1} \tau_{\xi xp}^{(s)}d\zeta = \int_{-1}^{1} \tau_{\tau xp}^{(s)}d\zeta = 0 \tag{5.14}$$

Эти условия легко проверяются непосредственным вычислением этих интегралов с учетом (5.13) и (5.11).

Условия (5.11) приводят к системе из шести однородных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных функций интегрирования. Чтобы эта система имела нетривиальное решение, определитель должен равняться нулю. Это приводит к трансцендентному уравнению, откуда определяется λ. Вещественная часть первого собственного значения этого трансцендентного уравнения с $\mathrm{Re}\lambda > 0$ будет характеризовать быстроту затухания погранслоя. Отметим, что если для изотропного и ортотропного случаев собственные значения определяются сравнительно легко — они определяются из трансцендентных уравнений, выведенных Л. А. Агаловяном [15], то в общем случае их определение связано с преодолением значительных математических трудностей.

Краевая задача (5.10), (5.11) есть обобщенная задача на собственные значения для операторного пучка. Задачи подобного рода исследовались в работах Я. Д. Тамаркина, В. М. Келдыша, М. Г. Крейна, А. С. Маркуса, А. Г. Костюченко, М. Б. Оразова и др. [16, 17]. В частности, в работе [17] доказана двукратная полнота корневых векторов квадратичных пучков, связанных с задачами теории упругости изотропного тела. По аналогии [17], для задачи (5.10), (5.11) можно утверждать, что совокупность собственных значений, соответствующая $\mathrm{Re}\lambda > 0$, трехкратно полна и три скалярные функции могут быть разложены по соответствующим собственным функциям. Последнее означает, что, используя решения внутренней задачи и погранслоя в каждом краю, можно удовлетворить трем граничным условиям пространственной задачи. Процедура удовлетворения торцевым условиям—предмет отдельного исследования.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 26 VII 1978

Շ. Մ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊԻԱՅՈՎ ՕԺՏՎԱԾ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿՆԵՐԻ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՈՐՈՇԻՉ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է ընդհանուր գլանային անիզոտրոպիայի հատկությամբ օժտված գլանային թաղանթի լարված-դեֆորմացված վիճակի որոշման խնդիրը։ Ասիմպտոտիկ մեթոդի հիման վրա կառուցվում են գլանային թաղանթի հնարավոր լարվածային վիճակները, որոնց փոփոխելիության գործակիցը փոքր է մեկից։ Ներքին լարվածային վիճակների որոշումը բերվում է այնպիսի հավասարումների հաջորդականության լուծման, որում հավասարումների ձախ մասերը համընկնում են թաղանթների դասական տեսության հավասարումների հետ, երբ թաղանթի նյութը ունի սիմետրիայի մեկ հարթություն, իսկ սահմանային շերտի տիպի լարվածային վիճակը նկարագրվում է վեցերորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումով և այն չի տրոհվում հարթ և հակահարթ (ոլորում) սահմանային շերտերի։

Առաջարկվում են երկչափ հավասարումներ, որոնք հնարավորություն են տալիս համեմատաբար պարզ ձևով որոշելու ընդհանուր անիզոտրոպիայով օժտված գլանային թաղանթի լարված-դեֆորմացված վիճակը։

Քննարկվում են կիրառական տեսությունների կիրառելիության հարցը և ցույց է տրված, որ վերջինս էապես կախված է առաձգական գործակիցների հարաբերություններից։

ON STRESS STATES AND THE EQUATIONS TO DESCRIBE THEM FOR CYLINDRICAL SHELLS OF GENERAL ANISOTROPY

SH. M. KHACHATRIAN

Summary

The determination of stress-strain state of cylindrical shells made from material of general anisotropy is examined. On the basis of the asymptotic method the iterative processes are constructed describing the possible stress state in the cylindrical shell. It is shown that the determination of interrior stress state may be reduced to the solution of a sequence of equations where the left sides coincide with the classical equations for shells having a surface of elastic symmetry, and the boundary stressed layer state is described by an ordinary differential equation of the sixth order and it does not fall into the plane and anti-plane boundary layers.

Two-dimensional equations are suggested providing a comparatively simple finding of stress-strain states for the above cylindrical shells.

The applicability of applied theories is discussed and it is shown to depend strictly on the ratio of elastic coefficients.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
2. *Гольденвейзер А. Л.* О двумерных уравнениях общей линейной теории тонких упругих оболочек. В кн.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М., «Наука», 1968.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М., «Наука», 1976.
4. *Базаренко Н. А., Ворович И. И.* Асимптотическое поведение решения задач теории упругости для полого цилиндра конечной длины при малой толщине. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
5. *Reiss E. L.* A theory for small rotationally simmetric deformation of cylindrical shells. Comm. Pure and Appl. Math., 1960, v. 13, No. 3.
6. *Reiss E. L.* On the theory of cylindrical shells. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1962, v. 15, No. 3.
7. *Понятовский В. В.* Применение асимптотического метода интегрирования к задаче равновесия тонкого бруса, произвольно нагруженного по боковой поверхности. МТТ, 1968, № 5.
8. *Агаловян Л. А.* О некоторых соотношениях линейной теории анизотропных оболочек и возможностях их уточнения. МТТ, 1972, № 1.
9. *Widera O. E., Chung C. B.* A theory for non-homogeneous, anisotropic cylindrical shells. J. Compos. Mater., 1972, v. 6, Jan.
10. *Бердичевский В. Л.* Об уравнениях теории анизотропных неоднородных стержней. ДАН СССР, 1976, т. 228, № 3.
11. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. М., «Мир», 1976.
12. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М., «Наука», 1974.
13. *Агаловян Л. А., Хачатрян Ш. М.* К вопросу определения напряженно-деформированного состояния пластинок с общей анизотропией. В сб. «XI Всесоюзная конференция по теории оболочек и пластин». Тезисы докладов, М., 1977.
14. *Агаловян Л. А.* О погранслое ортотропных пластинок. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1973, т. 26, № 2.
15. *Агаловян Л. А.* О погранслое пластинок. Докл. АН Арм. ССР, 1972, т. 55, № 3.
16. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. ДАН СССР, 1951, т. 77, № 1.
17. *Костюченко А. Г., Оразов М. Б.* О полноте корневых векторов некоторых самосопряженных квадратичных пучков. Функц. анализ., 1977, т. 11, вып. 4.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 3, 1979 Механика

Р. Н. ОВАКИМЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОАКСИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ ОБОЛОЧЕК

В связи с разработкой конструкции нового вида кабелей для сверхпроводящих линий электропередач [1] практический интерес представляет исследование их механической устойчивости под действием возникающих электромагнитных нагрузок.

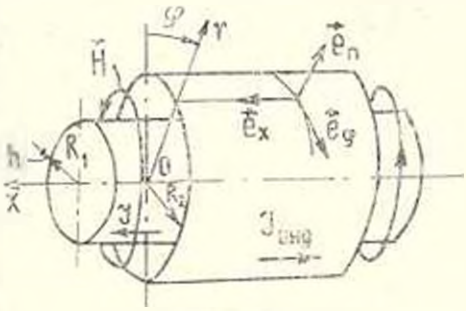
В принципе сверхпроводящий кабель представляет собой коаксиальную систему из двух круговых цилиндрических оболочек; тончайший слой сверхпроводящего сплава толщиной 20—40 μk покрывает внутреннюю оболочку только снаружи, а внешнюю оболочку — лишь изнутри. Низкая температура, необходимая для сохранения сверхпроводящих свойств стенок коаксиала, обеспечивается потоком криогенной жидкости, протекающей через кольцевой зазор коаксиала. В сверхпроводящем кабеле токопроводом, как правило, служит внутренняя оболочка (точнее — ее наружная поверхность), а внешняя оболочка является своего рода «магнитным экраном», препятствующим проникканию магнитного поля за пределы коаксиала, одновременно выполняя роль защитного кожуха, предохраняющего кабель от механических повреждений.

Основными внешними нагрузками в коаксиале являются: 1) гидродинамическое давление потока криогенной жидкости, обладающей всеми свойствами идеальной жидкости, и 2) электромагнитное давление, возникающее при взаимодействии протекаемого тока с собственным магнитным полем.

До настоящего времени системы сверхпроводящих коаксиалов, в основном, исследовались на устойчивость физического состояния сверхпроводимости материала оболочек (например, [1, 2]); механическая же устойчивость подобных систем почти не рассматривалась (в частности, такая попытка была сделана в [3], где исследовался одномерный случай).

Необходимость исследования механической прочности и устойчивости сверхпроводящих коаксиалов особенно возрастает в случае транспортирования токов в десятки и сотни тысяч ампер. Уже сегодня сверхпроводники III рода, например, Nb_3Sn [6], благодаря высокому значению критического магнитного поля $H_{c2} \approx 2\cdot 10^7$ а/м позволяют пропускать огромные токи в несколько тысяч килоампер (технически это трудно осуществить, так как возникающие пондеромоторные усилия $q \approx 5 \cdot 10^{[illegible]}$ н/м², например, более, чем в полтора раза превышают предел прочности меди $\sigma_{[illegible]} = 3.1 \cdot 10^{[illegible]}$ н/м²). Во всех случаях установление верхней границы допускаемой силы тока, при которой сохраняется начальная форма токопровода, является одним из основных требований при проектировании сверхпроводящих кабелей большой мощности. В предлагаемой работе исследуется устойчивость сверхпроводящего коаксиала под действием возникающих электромагнитных нагрузок: влияние криогенной жидкости не учитывается.

В обозначениях [4] в цилиндрической системе координат x, φ, r (фиг. 1) рассмотрим внутреннюю оболочку радиуса срединной поверхности R_1 и толщины h, изготовленную из упругого изотропного материала с модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ. Наружная оболочка радиуса R_2 условно принимается абсолютно жесткой и недеформируемой, что не влияет на сущность рассматриваемого явления, но значительно облегчает вычисления.



Фиг. 1.

Пусть по сверхпроводящей поверхности оболочки R_1 вдоль оси x транспортируется постоянный электрический ток силы J. В установившемся состоянии вектор линейной плотности тока

$$i_0 = \frac{J}{2\pi R_1} e_x = i_0 e_x \tag{1.1}$$

где $i_0 = \mathrm{const}$ (согласно принятой в теории оболочек погрешности величиной $\frac{h}{2R_1}$ по сравнению с единицей пренебрегаем).

Магнитное поле, возникающее в окружающем пространстве от осевого тока (1.1), вследствие сверхпроводимости оболочек R_1 и R_2 существует лишь в коаксиальном зазоре $R_2 \geqslant r \geqslant R_1$ и равно

$$H_0 = -i_0 \frac{R_1}{r} e_\varphi \tag{1.2}$$

причем на поверхностях оболочек R_1 и R_2

$$H_0^{(1)} = -i_0 e_\varphi \qquad H_0^{(2)} = -i_0 \frac{R_1}{R_2} e_\varphi \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем все физические величины с нижним индексом «0» характеризуют невозмущенное состояние оболочки; верхние индексы $(^1)$ и $(^2)$ относятся к оболочкам R_1 и R_2 соответственно.

Определим электромагнитные явления, возникающие в системе при наличии сверхпроводящей оболочки R_2.

Как известно [5], в стационарном состоянии дифференциальные уравнения Максвелла в коаксиальном зазоре будут

$$\mathrm{rot}\, H_0 = 0, \qquad \mathrm{div}\, B_0 = 0 \tag{1.4}$$

где $B_0 = \mu\mu_0 H_0$ — магнитная индукция в системе $СИ$, μ — относительная магнитная проницаемость среды кольцевого зазора (напомним, что в сверхпроводниках $\mu = 0$). $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ $гн/м$ — магнитная проницаемость вакуума, H_0 — напряженность магнитного поля, определяемая по выражению (1.2).

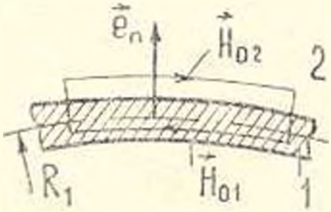
В общем случае граничные условия на поверхности раздела сред при наличии поверхностных токов типа (1.1) имеют следующий вид [5]:

$$e_n \times (H_{02} - H_{01}) = i \qquad e_n \cdot (B_{02} - B_{01}) = 0 \tag{1.5}$$

Здесь H_{01}, H_{02} и B_{01}, B_{02} — напряженности индукции магнитного поля по обе стороны от поверхности раздела сред 1 и 2 (фиг. 2), e_n — нормаль к поверхности в положительном направлении r, i — линейная плотность тока.

Так как в области $r < R_1$, то есть внутри оболочки R_1, магнитное поле отсутствует, то в (1.5) следует принять $H_{01}^{(1)} = 0$, а следовательно, и $B_{01}^{(1)} = 0$, и потому

$$e_n \times H_{02}^{(1)} = i_0, \qquad e_n \cdot \mu\mu_0 H_{02}^{(1)} = 0 \tag{1.6}$$



Фиг. 2.

Подстановкой значений $H_0^{(1)}$ (1.3) и i_0 (1.1) в граничные условия (1.6) убеждаемся в их тождественном выполнении, причем из второго условия (1.6) следует касательность магнитных силовых линий к сверхпроводящей поверхности оболочки R_1.

Перейдем к граничным условиям на поверхности сверхпроводящей оболочки R_2, памятуя, что по ней первоначально токи не транспортировались. Как показано в различных исследованиях явлений сверхпроводимости материала (укажем, например, [6]), согласно эффекту Мейснера на поверхности сверхпроводников I-го рода, а также сверхпроводников III-го рода (до достижения первой критической величины напряженности внешнего магнитного поля $H_{кр.1}$), помещенных во внешнее магнитное поле, индуцируются поверхностные токи, которые создают магнитные поля, препятствующие прониканию внешних магнитных полей в толщу сверхпроводника (глубина проникновения не превышает 10^{-5} $см$).

Считая, что поверхности оболочек обладают свойствами сверхпроводников указанного рода, в граничных условиях (1.5) для оболочки R_2 следует принять $H_{02}^{(2)} = 0$ и $B_{02}^{(2)} = 0$, так что

$$e_n \times (-H_{01}^{(2)}) = i_{инд}, \qquad e_n \cdot (-\mu\mu_0 H_{01}^{(2)}) = 0 \tag{1.7}$$

Используя значение $H_{01}^{(2)}$ (1.3) при $r = R_2$, из первого уравнения условий (1.7) получим плотность индуцируемого поверхностного тока экранировки

$$i_{инд} = - i_0 \frac{R_1}{R_2} e, \tag{1.8}$$

равного по величине, но противоположного по направлению току силы I в оболочке R_1.

Таким образом, при транспортировании электрического тока вдоль оси x по поверхности оболочки R_1 на внутренней сверхпроводящей поверхности оболочки R_2 индуцируется такой же силы электрический ток, но противоположного направления, вследствие чего магнитное поле оказывается заключенным в сверхпроводящем коаксиале оболочек R_1 и R_2.

Электромагнитные силы, возникающие при взаимодействии протекающего поверхностного тока с собственным магнитным полем, определяются векторным произведением

$$q = I \times B, \tag{1.9}$$

где q — поверхностная нагрузка, $[н/м^2]$, B — магнитная индукция на токонесущей поверхности тела.

Так для оболочки R_1 после подстановки в (1.9) выражений (1.1) и (1.3) имеем

$$q_0^{(1)} = -\mu_0 i_0^2 e_n = -q_0 e_n \tag{1.10}$$

Как следует из (1.10), возникающая электромагнитная нагрузка сжимает оболочку в радиальном направлении с силой, прямо пропорциональной квадрату линейной плотности тока i_0^2.

На наружную оболочку R_2 действует, наоборот, распирающая нагрузка, которая согласно (1.3) и (1.8) будет равна

$$q_0^{(2)} = q_0 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 e_n \tag{1.11}$$

Эта сила повышает устойчивость оболочки R_1 и в дальнейшем не будет учитываться, тем более, что оболочка R_2 была принята абсолютно недеформируемой.

Исследуем устойчивость оболочки R_1, находящейся под действием равномерного давления $q_0^{(1)}$ (1.10), и определим критическую величину этой нагрузки, а, следовательно, и плотности тока $i_{кр}$, при которой оболочка теряет свою начальную круговую форму.

Используем метод малых возмущений, налагаемых на оболочку R_1 по всем трем направлениям e_x, e_φ, e_n в зависимости от координат x, φ и времени t. В частности, радиальные возмущения (вдоль e_n) будут

$$\zeta = \zeta_0 \exp i(kx + n\varphi - \omega t) \tag{1.12}$$

где ζ_0 — амплитуда возмущения, $k = \dfrac{2\pi}{l}$ — волновое число, l — длина волны в продольном направлении, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ — целое число волн, укладываемых в окружном направлении φ, $\omega = \omega_R + i\omega_I$ — круговая частота колебаний, в общем случае комплексная величина (ω_R — вещественная, ω_I — мнимая части).

Возмущение поверхности влечет за собой изменение поверхностной плотности тока как по величине, так и по направлению, что в свою очередь изменяет напряженность магнитного поля в коаксиале. Препятствуя прониканию возмущений магнитного поля в сверхпроводник, на поверхностях оболочек R_1 и R_2 индуцируются новые токи, так называемые экранирующие токи, которые создают магнитные поля, равные по величине, но противоположные по направлению возмущениям магнитных полей. Практически в сверхпроводниках рассматриваемого рода отсутствуют явления отражения и преломления электромагнитных волн, обычно наблюдаемые в материалах конечной проводимости. Для определения указанных взаимосвязанных изменений электромагнитного поля необходимо решение дифференциальных уравнений Максвелла в нестационарном виде. Но, как показано в [5], в случае ограниченной частоты колебаний $\lesssim 10^{7}$ гц при отсутствии посторонних источников тока и в непосредственной близости от токопроводящих тел с большой точностью можно использовать квазистационарные уравнения Максвелла.

В нашем случае при большой силе тока, обычно пропускаемого по сверхпроводящему кабелю, частота колебаний не превышает 10^{3} гц, а характерный размер оболочки намного меньше длины электромагнитной волны $\frac{\omega}{k} \ll c$ (c — скорость света), что позволяет использовать квазистационарные уравнения Максвелла. По внешнему виду эти уравнения совпадают со стационарными уравнениями (1.4), где теперь вместо H_0 следует писать $H_0 + h$ (h — возмущение магнитного поля).

Согласно принципу суперпозиции полей из (1.4) имеем

$$\operatorname{rot} h = 0, \quad \operatorname{div} h = 0 \tag{1.13}$$

где во втором уравнении отброшена постоянная $\mu\mu_0$.

Векторным уравнениям (1.13) удовлетворяет потенциальная функция

$$h = -\operatorname{grad} \varphi \tag{1.14}$$

которая совместно со вторым уравнением (1.13) сводится к уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

Функцию φ ищем соответственно ξ (1.12) в виде

$$\varphi = f(r) \exp i(kx - n\varphi - \omega t) \tag{1.15}$$

Подставляя (1.15) в уравнение Лапласа, после соответствующего дифференцирования по координатам x, φ, r получим уравнение Бесселя

$$r^2 f''(r) + r f'(r) - (n^2 + k^2 r^2) f(r) = 0 \tag{1.16}$$

Решение уравнения (1.16) выражается через функции Бесселя чисто мнимого аргумента

$$f(r) = C_1 I_n(kr) + C_2 K_n(kr) \tag{1.17}$$

где произвольные постоянные C_1, C_2 определяются из граничных условий электромагнитного поля в возмущенном состоянии. Выпишем эти условия.

На возмущенной поверхности внутренней оболочки $r = R_1 + \zeta$

$$e_n^* \times (H_{02}^{*(1)} + h^{(1)}) = i^{(1)}, \quad e_n^* (H_{02}^{*(1)} + h^{(1)}) = 0 \tag{1.18}$$

и на недеформируемой поверхности оболочки R_2

$$e_n \times (-H_{01}^{(2)} - h^{(2)}) = i_{нар}^{(2)}, \quad e_n (-H_{01}^{(2)} - h^{(2)}) = 0 \tag{1.19}$$

Заметим, что в новом положении токонесущей поверхности $r = R_1 + \zeta$ напряженность магнитного поля в невозмущенном состоянии согласно формуле (1.2) будет равна

$$H_{02}^{*(1)} = -i_0 \left(1 - \frac{\zeta}{R_1}\right) e_\varphi \tag{1.20}$$

Нормаль к возмущенной поверхности оболочки R_1 определяется соотношением [4]

$$e_n^* = -\frac{\partial \zeta}{\partial x} e_x - \frac{\partial \zeta}{R_1 \partial \varphi} e_\varphi + e_n \tag{1.21}$$

Рассмотрев совместно выражения (1.14), (1.15) и (1.17), а также соотношения (1.20) и (1.21), после дифференцирования и отбрасывания одинакового для всех экспоненциального множителя $\exp i(\ \ )$ из вторых уравнений граничных условий (1.18), (1.19) получим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} C_1 I_n'(kR_1) + C_2 K_n'(kR_1) &= i i_0 \frac{n}{R_1} \zeta_0 \\ C_1 I_n'(kR_2) + C_2 K_n'(kR_2) &= 0 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Здесь обозначены выражения $I_n'(kR_1) = \frac{\partial}{\partial r} I_n(kr)\big|_{R_1}$ и т. д. Решая систему уравнений (1.22) относительно C_1 и C_2, получим

$$C_1 = i i_0 \frac{n}{R_1} \frac{K_n'(kR_2)}{\Delta} \zeta_0, \quad C_2 = -i i_0 \frac{n}{R_1} \frac{I_n'(kR_2)}{\Delta} \zeta_0$$

где для сокращения записи через Δ обозначена положительная величина

$$\Delta = I_n'(kR_1) K_n'(kR_2) - I_n'(kR_2) K_n'(kR_1) \tag{1.23}$$

После подстановки значений C_1, C_2 в (1.17), а затем в (1.15), с учетом выражения (1.12) получим

$$\psi = i_0 \frac{K_n'(kR_2) I_n(kr) - I_n'(kR_2) K_n(kr)}{\Delta} \frac{\partial \zeta}{R_1 \partial \varphi} \tag{1.24}$$

Из вида функции ψ (1.24) следует, что возмущение магнитного поля $h = -\operatorname{grad} \psi$ (1.14) возникает только при наличии деформации оболочки в окружном направлении $\frac{\partial \zeta}{R_1 \partial \varphi}$.

Используя (1.24), выпишем значения h (1.14) на поверхностях оболочек R_1 и R_2:

$$h^{(1)} = i_0 \left| \frac{\Delta_1}{\Delta} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{R_1 \partial x \partial \varphi} e_x + \frac{\partial^2 \zeta}{R_1^2 \partial \varphi^2} e_z \right) - \frac{\partial \zeta}{R_1 \partial \varphi} e_n \right| \tag{1.25}$$

$$h^{(2)} = i_0 \frac{1}{R_1 \cdot \Delta} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{R_1 \partial x \partial \varphi} e_x + \frac{\partial^2 \zeta}{R_2^2 \partial \varphi^2} e_\varphi \right) \tag{1.26}$$

где через Δ_1 обозначена положительная величина

$$\Delta_1 = I_n (kR_2) K_n (kR_1) - K_n (kR_2) I_n (kR_1) \tag{1.27}$$

и используется известное соотношение $I_n'(x) K_n(x) - K_n'(x) I_n(x) = \frac{1}{x}$.

Определив возмущения магнитного поля (1.25), (1.26), из первых уравнений граничных условий (1.18), (1.19) получим выражения линейных плотностей токов на поверхностях оболочек R_1 и R_2:

$$i^{(1)} = i_0 \left[\left(1 - \frac{\zeta}{R_1} - \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial^2 \zeta}{R_1^2 \partial \varphi^2} \right) e_x + \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial^2 \zeta}{R_1 \partial x \partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial \zeta}{\partial x} e_n \right] \tag{1.28}$$

$$i^{(2)} = -i_0 \frac{R_1}{R_2} \left[\left(1 - \frac{1}{R_2 \Delta} \frac{\partial^2 \zeta}{R_1^2 \partial \varphi^2} \right) e_x + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial^2 \zeta}{R_1^2 \partial x \partial \varphi} e_\varphi \right] \tag{1.29}$$

Токи $i^{(1)}$ (1.28) и $i^{(2)}$ (1.29) можно представить в виде суммы двух токов — транспортного и вихревого.

Для оболочки R_1 выражение транспортного тока будет

$$i_{\text{тр}}^{(1)} = i_0 \left(1 - \frac{\zeta}{R_1} \right) e_{x1} \tag{1.30}$$

где $i_0 \left(1 - \frac{\zeta}{R_1} \right)$ — величина линейной плотности тока, протекающего через поперечное сечение оболочки в осевом направлении

$$e_{x1} = e_x + \frac{\partial \zeta}{\partial x} e_n \tag{1.31}$$

Заметим, что направление тока e_{x1} (1.31) в общем случае деформации не совпадает с направлением деформируемого продольного волокна оболочки [4]

$$e_x^* = e_x + \frac{\partial v}{\partial x} e_\varphi + \frac{\partial \zeta}{\partial x} e_n \tag{1.32}$$

где v — перемещение элемента оболочки в тангенциальном направлении φ. Это объясняется природой электрического тока, состоящего из потока свободных электронов, когда на их начальное направление вдоль x не может влиять деформация кристаллической (ионной) решетки по φ.

Вторая составляющая тока $i^{(1)}$ (1.28) — индуцируемый вихревой ток экранировки

$$i_n^{(1)} = -i_0 \frac{\Delta_1}{\Delta}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{R_1^2 \partial \varphi^2} e_x - \frac{\partial^2 \zeta}{R_1 \partial x \partial \varphi} e_\varphi\right) \tag{1.33}$$

представляет замкнутую линию и не влияет на силу тока J, протекающего через поперечное сечение оболочки в направлении оси x. Этот ток так же, как и возмущение магнитного поля h, возникает лишь при наличии окружной деформации $\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}$.

Для оболочки R_2 ток $i^{(2)}$ (1.29) является по своей природе индуцируемым током экранировки, но также может быть условно разделен на транспортный (1.8) и вихревой

$$i_n^{(2)} = i_0 \frac{1}{R_1 \Delta}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{R_2^2 \partial \varphi^2} e_x - \frac{\partial^2 \zeta}{R_2 \partial x \partial \varphi} e_\varphi\right) \tag{1.34}$$

который противоположен направлению тока $i_n^{(1)}$ (1.33) в оболочке R_1. Вихревой характер токов (1.33) и (1.34) следует из равенства нулю расхождения этих векторов ($\operatorname{div} i_n = 0$).

Перейдем к определению поверхностной нагрузки, действующей на токонесущую оболочку R_1 в возмущенном состоянии.

Согласно формуле (1.9), с учетом выражений напряженности магнитного поля в возмущенном состоянии (1.20) и (1.25) и линейной плотности тока (1.28) имеем

$$q^{(1)} = -2\pi\mu_0 (i^{(1)})^2 e_n^* \tag{1.35}$$

Из соотношения (1.35) следует, что поверхностная нагрузка $q^{(1)}$ электромагнитного происхождения всегда направлена по нормали e_n^* (1.21) к деформируемой поверхности оболочки R_1, то есть носит следящий характер.

В работе [3], где рассматривался одномерный случай ($\partial/\partial\varphi = 0$), вихревые токи экранировки не возникали и выражение нагрузки имело более простой вид

$$q^{(1)} = -q_0\left(1 - 2\frac{\zeta}{R_1}\right) e_n^* \tag{1.35a}$$

где в данном случае

$$e_n^* = -\frac{\partial \zeta}{\partial x} e_x + e_n$$

Для оболочки R_2, используя уравнения (1.19), получим

$$q^{(2)} = q_0\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\left(1 - \frac{2}{R_2 \cdot \Delta}\,\frac{\partial^2 \zeta}{R_1^2 \partial \varphi^2}\right) e_n \tag{1.36}$$

из которого следует, что нагрузка $q^{(2)}$ в отличие от $q^{(1)}$ (1.35), играет стабилизирующую роль, то есть повышает устойчивость оболочки R_2.

Возмущение электромагнитной нагрузки, необходимое при расчете устойчивости оболочки R_1, определяется из разности векторов сил в возмущенном (1.35) и исходном (1.10) состояниях. В линейном приближении

$$\delta q = q^{(1)} - q_0^{(1)} = q_0 \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} e_x + \frac{\partial \xi}{R_1 \partial \varphi} e_\varphi + 2\left(\frac{\xi}{R_1} + \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial^2 \xi}{R_1^2 \partial \varphi^2} \right) e_n \right] \quad (1.37)$$

Перейдем к составлению уравнений устойчивости оболочки.

В предварительно-напряженном состоянии оболочка R_1 находится под действием нагрузки $q_0^{(1)}$ (1.10) и сохраняет начальную круговую форму, так что основным внутренним усилием является окружное усилие $T_\varphi^0 = -q_0 R_1$. (Начальное состояние оболочки в подобных задачах устойчивости обычно считается безмоментным).

Выпишем уточненные уравнения устойчивости оболочки, являющиеся разностью уравнений равновесия в возмущенном и предварительно-напряженном состояниях в проекциях на e_x, e_φ, e_n

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{\varphi x}}{R_1 \partial \varphi} + T_\varphi^0 \left(\frac{\partial^2 u}{R_1^2 \partial \varphi^2} - \frac{\partial w}{R_1 \partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial T_\varphi}{R_1 \partial \varphi} + \frac{\partial T_{x\varphi}}{\partial x} + T_\varphi^0 \frac{\partial^2 u}{R_1 \partial x \partial \varphi} + \frac{N_\varphi}{R_1} = 0 \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_\varphi}{R_1 \partial \varphi} - \frac{T_\varphi}{R_1} + T_\varphi^0 \left(\frac{w}{R_1^2} + \frac{\partial^2 w}{R_1^2 \partial \varphi^2} \right) + \delta q_n - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Здесь u, v, w — возмущения элемента оболочки соответственно в направлениях e_x, e_φ, e_n, δq_n — нормальная составляющая возмущения усилия δq (1.37), $-\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ — инерционный член, а выражения усилий, моментов и перерезывающих сил N_x, N_φ с сохранением малых членов порядка $\alpha = \frac{h^2}{12 R_1^2}$, имеют следующий вид:

$$T_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left(\frac{w}{R_1} + \frac{\partial v}{R_1 \partial \varphi} \right) - \alpha R_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

$$T_\varphi = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{w}{R_1} + \frac{\partial v}{R_1 \partial \varphi} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \left(\frac{\partial^2 w}{R_1 \partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{R_1 \partial \varphi} \right) \right]$$

$$T_{x\varphi} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial u}{R_1 \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} - \alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]$$

$$T_{\varphi x} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial u}{R_1 \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} + \alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial u}{R_1 \partial \varphi} \right) \right]$$

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{R_1^2 \partial \varphi^2} - \frac{\partial u}{R_1 \partial x} - \nu \frac{\partial v}{R_1^2 \partial \varphi} \right)$$

$$M_\varphi = -D \left(\frac{\partial^2 w}{R_1^2 \partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} \right) \quad (1.39)$$

$$M_{x\varphi} = -D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{R_1\partial x\partial\varphi} - \frac{\partial v}{R_1\partial x}\right)$$

$$M_{\varphi x} = -D(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{R_1\partial x\partial\varphi} - \frac{1}{2R_1}\left(\frac{\partial u}{R_1\partial\varphi} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$

$$N_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\varphi x}}{R_1\partial\varphi} \qquad N_\varphi = \frac{\partial M_\varphi}{R_1\partial\varphi} + \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x}$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость оболочки.

Рассматривая оболочку с шарнирным закреплением краев, представим u, v, w в виде гармонических колебаний типа (1.12) с соответствующими малыми амплитудами ξ_0, η_0 и ζ_0. Подставив эти выражения в соотношения (1.39), уравнения устойчивости (1.38) сведем к системе алгебраических уравнений относительно амплитуд ξ_0, η_0, ζ_0

$$-\left[N^2 + \frac{1-\nu}{2}n^2 + \left(\alpha\frac{1-\nu}{2} - p_0\right)n^2\right]\xi_0 - \frac{1+\nu}{2}nN\eta_0 +$$
$$+ i\left[\nu + \alpha\left(N^2 - \frac{1-\nu}{2}n^2\right) + p_0\right]N\zeta_0 = 0$$
$$-\left(\frac{1+\nu}{2} - p_0\right)nN\xi_0 - \left[n^2 + \frac{1-\nu}{2}N^2 + \alpha\left(3\frac{1-\nu}{2}N^2 - n^2\right)\right]\eta_0 +$$
$$+ i\left[1 + \alpha\left(\frac{3-\nu}{2}N^2 - 1\right)\right]n\zeta_0 = 0 \qquad (1.40)$$
$$-i\left[\nu + \alpha\left(N^2 - \frac{1-\nu}{2}n^2\right)\right]N\xi_0 - i\left[1 + \alpha\left(\frac{3-\nu}{2}N^2 - 1\right)\right]n\eta_0 -$$
$$-\left[1 + \alpha(n^2 + N^2)^2 - 2\alpha n^2 - p_0(n^2 - 1 + \beta) - \frac{R_1^2}{c_1^2}\omega^2\right]\zeta_0 = 0$$

где для сокращения записи обозначены $p_0 = q_0 R_1\frac{1-\nu^2}{Eh}$, $c_1^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$ — квадрат продольной скорости звука в тонких телах, $N = kR_1$ и $\beta = 2\left(1 - \frac{\Delta_1}{\Delta}\frac{n^2}{R_1}\right)$ — коэффициент возмущения следящей нагрузки по (1.37).

Приравнивая определитель системы уравнений (1.40) нулю, в пренебрежении величинами высшего порядка малости, пропорциональными α^2, αp_0, p_0^2, получим характеристическое уравнение относительно частоты ω

$$\frac{R_1^2}{c_1^2}\omega^2 - \frac{1-\nu^2}{(n^2+N^2)^2}N^4 + \alpha\left[(n^2+N^2-1)^2 - \right.$$
$$\left. -2(1-\nu)N^2\frac{n^2(n^2-1)-N^4}{(n^2+N^2)^2}\right] - p_0\left[(n^2-1+\beta) - N^2\frac{n^2-\nu N^2}{(n^2+N^2)^2}\right] \qquad (1.41)$$

Как показали расчеты на ЭВМ, в широком диапазоне значений $\frac{h}{R_1}$ и $\frac{R_1}{l}$ [7] с большой точностью $\sim(10^{-3}-10^{-2})\,\%$ можно пренебречь вторыми слагаемыми в квадратных скобках (1.41) и представить искомое соотношение в виде

$$\omega^2 = \Omega_1^2 - m\frac{q_0}{\rho R_1 h} \tag{1.42}$$

В правой части (1.42) первое слагаемое есть квадрат частоты собственных колебаний оболочки, которое с учетом значений N и c_1 сводится к следующему виду:

$$\Omega_1^2 = \frac{1}{\rho h R_1}\left[Eh\frac{k^4R_1^4}{(n^2+k^2R_1^2)^2} + \frac{D}{R_1^2}(n^2+k^2R_1^2-1)^2\right] \tag{1.43}$$

Полученный коэффициент $(n^2+k^2R_1^2-1)^2$ полностью соответствует физике колебаний оболочки, хотя и несколько отличается от общепринятого $(n^2+k^2R_1^2)^2$. Покажем это на примере свободно подвешенной оболочки: при $k=0$ и $n=1$, что соответствует смещению оболочки в сторону как жесткого тела, колебания отсутствуют, что также следует из формулы (1.43) ($\Omega_1=0$). Следует отметить, что с принятой в теории оболочек погрешностью при $n\geq 4$ единицей можно пренебречь и принять $(n^2+k^2R_1^2)^2$.

Второе слагаемое в правой части соотношения (1.42) характеризует внешнюю нагрузку, причем коэффициент

$$m = n^2 - 1 + \beta \tag{1.44}$$

определяет вид радиальной нагрузки. Для консервативной нагрузки, вследствие отсутствия возмущений нагрузки ($\delta q=0$), $\beta=0$ и $m=n^2-1$.

Таким образом, для рассматриваемого случая нагружения

$$\omega^2 = \Omega_1^2 - \left(n^2+1-2\frac{\Delta_1}{\Delta}\frac{n^2}{R_1}\right)\frac{q_0}{\rho R_1 h} \tag{1.45}$$

Оболочка R_1 будет устойчива при положительном значении правой части уравнения (1.42), что будет соответствовать отсутствию мнимой части ω_i в выражении частоты ω; критический момент наступит при $\omega=0$, когда

$$q_{кр} = \rho R_1 h\frac{\Omega_1^2}{n^2+1-2\frac{\Delta_1}{\Delta}\frac{n^2}{R_1}} \tag{1.46}$$

Согласно выражению q_0 (1.10) можно получить также критическую величину линейной плотности тока

$$i_{кр} = \Omega_1\sqrt{\frac{\rho R_1 h}{\mu\mu_0\left(n^2+1-2\frac{n^2}{R_1}\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)}} \tag{1.47}$$

и, следовательно, и критическую силу тока $J_{кр}$ (1.1). Значение $q_{кр}$ (1.46) вычисляется в каждом конкретном случае при заданных величинах $\frac{h}{R_1}$, $\frac{R_1}{l}$, $\frac{R_1}{R_2}$, а также E, ν, в зависимости от волновых чисел n, k.

В качестве примера рассмотрена коаксиальная система сверхпроводящих оболочек длины l с отношением радиусов $\frac{R_1}{R_2} = 0.8$. Материалом оболочек выбрана медь с $\nu = 0.34$. Вследствие шарнирного закрепления краев оболочек в продольном направлении происходит прогиб оболочки R_1 по одной полуволне, так что $kR_1 = \frac{\pi R_1}{l}$. На ЭВМ „Наири-2" в широком диапазоне значений $\frac{h}{R_1}$ и $\frac{\pi R_1}{l}$ получены безразмерные величины критической нагрузки $q^* = q_{кр} \cdot \frac{10^6}{E}$ (строка 1 в табл. 1); в скобках даны числа волн n, по которым минимизируются значения $q_{кр}$. Для сравнения в строке 2 приведены значения q^*, вычисленные ранее в [7] для отдельно взятой оболочки.

Таблица 1

kR_1 \ h/R_1		$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{300}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{150}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{50}$
0.048	1	0.288 (4)	1.333 (4)	4.50 (4)	10.66 (4)	35.99 (4)	287.9 (4)
	2	0.0747 (2)	0.326 (2)	1.08 (2)	2.542 (2)	8.539 (2)	68.12 (2)
0.24	1	0.334 (4)	1.418 (4)	4.649 (4)	10.9 (4)	36.53 (4)	291.0 (4)
	2	0.219 (4)	0.898 (3)	2.403 (3)	5.176 (3)	16.21 (3)	106.2 (2)
0.48	1	0.438 (6)	1.704 (5)	5.37 (5)	12.41 (5)	40.23 (4)	301.5 (4)
	2	0.38 (5)	1.451 (5)	4.128 (4)	8.63 (4)	26.35 (4)	155.05 (3)
1.2	1	0.849 (8)	3.213 (7)	9.392 (7)	19.86 (6)	59.21 (6)	336.3 (5)
	2	0.834 (8)	3.107 (7)	9.081 (7)	18.59 (6)	55.43 (6)	335.6 (5)
2.4	1	1.602 (11)	5.938 (10)	16.96 (9)	36.22 (8)	104.9 (8)	660.6 (6)
	2	1.598 (11)	5.911 (10)	16.82 (9)	35.71 (8)	103.4 (8)	629.9 (6)

Сравнивая значения q^*, полученные в обоих случаях, можно заметить, что в коаксиальной системе оболочка оказывается в более устойчивом состоянии, чем в свободном положении. С укорочением длины оболочки различие в значениях $q_{кр}$ уменьшается и при $\frac{\pi R_1}{l} = 2.4$ сводится почти к нулю; потеря устойчивости оболочки в коаксиале происходит как минимум при $n = 4$ против $n = 2$ в свободном состоянии.

Для сверхпроводящего кабеля, предназначенного для работы в условиях сверхнизкой температуры, основным материалом толщи оболочки наиболее часто выбираются медь и ее сплавы, вследствие значительного улучшения всех механических свойств с понижением температуры. В частности, при слабом изменении ударной вязкости и пластичности существенно возрастают предел прочности и твердость [8]; для модуля упругости меди принимается новое значение $E = 1.2 \cdot 10^{11}$ *н/м*^{2} против $E = 1.1 \cdot 10^{11}$ *н/м*^{2} при 15°С.

В качестве числового примера рассмотрим конструкцию сверхпроводящего коаксиального кабеля [6] при диаметре внутренней оболочки 67 *мм*, толщине стенки 0.32 *мм* $\left(\frac{h}{R_1} = \frac{1}{100}\right)$ и диаметре наружной оболочки 84 *мм* $\left(\frac{R_1}{R_2} = 0.8\right)$. Для отдельного узла длиной $l = 2.2$ *м* $(kR_1 = 0.048)$ из табл. 1 получим $q^* = q_{кр} \cdot 10^6/E \approx 36$, откуда следует $q_{кр} = 4.3 \cdot 10^6$ *н/м*^{2}, что почти на два порядка меньше предела пропорциональности меди $\sigma_п \approx 2 \cdot 10^8$ *н/м*^{2}. По формуле (1.10) $q_0 = \mu\mu_0 i_0^2$, приняв $\mu = 1$, вычислим критическую величину линейной плотности тока $i_{кр} = 1.85 \cdot 10^6$ *а/м*. Таким образом, допускаемая сила тока, транспортируемая по оболочке диаметром 67 *мм*, будет $J_{кр} = 390$ *ка* (по проекту предусматривается $J = 67$ *ка*). Следует заметить, что в наших расчетах не учитывалось влияние криогенной жидкости, что, по-видимому, привело к высокому значению критического тока. Совместное рассмотрение истока жидкого гелия и электромагнитных усилий является темой другой работы.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 27 II 1973

Ռ. Ն. ՀՈՎԱԿԻՄՅԱՆ

ԳԵՐՀԱՂՈՐԴԻՉ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԱՄԱՌԱՆՑՔ ՍԻՍՏԵՄԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Փոքր գրգռումների մեթոդով քվազիստացիոնար վիճակի համար Մաքսվելի հավասարումների լուծմամբ ստացված են հոսանքի գծային խտության և մագնիսական դաշտի լարվածության արտահայտությունները։

Արտածված է հոսանքատար թաղանթների սիստեմի լայնական էլեկտրամագնիսական ուժով բեռնավորվելու դեպքի համար դիֆերենցիալ հավասարումը։

ԷՀՄ օգնությամբ հաշվված են էլեկտրամագնիսական բեռի կրիտիկական արժեքները՝ ներքին թաղանթի տարբեր չափերի դեպքում։ Ցույց է տրված, որ հոսանքատար թաղանթը համառանցք սիստեմում ավելի կայուն է, քան ազատ վիճակում։

ON STABILITY OF A SYSTEM OF COAXIAL SUPERCONDUCTING SHELLS

R. N. OVAKIMIAN

S u m m a r y

The electromagnetic load arising in a system of current-carrying shells is investigated. A proper dispersion equation is derived. The critical load values are computerised for different shells. In the coaxial state the current-carrying shell is shown to be more stable than in the free one.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сверхпроводящие линии электропередач. Сб. трудов, вып. 39, М., ЭНИН, 1975.
2. *Киселев М. И.* О волнах конечной амплитуды в токонесущей сверхпроводящей коаксиальной линии. ЖТФ, 1975, т. XLV, вып. 2(382)
3. *Овакимян Р. Н.* Об устойчивости коаксиальных токонесущих оболочек. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1970, т. XXIII, № 2.
4. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л., Судпромиздат, 1962.
5. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М., изд. «Наука», 1976.
6. *Бухкель В.* Сверхпроводимость. М., изд. «Мир», 1975.
7. *Овакимян Р. Н.* Об устойчивости цилиндрической оболочки при следящей электромагнитной нагрузке. Тезисы докладов XI Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Харьков. М., 1977.
8. *Фастовский В. Г., Петровский Ю. В., Ровинский А. Е.* Криогенная техника. М., изд. «Энергия», 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 3, 1979 Механика

М. В. БЕЛУБЕКЯН

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН

Динамическое поведение упругих систем под действием сил диссипативного характера представляет интерес, в частности, потому, что такие силы могут быть причиной дестабилизации системы, хотя в большинстве случаев они приводят к демпфированию колебаний [1, 2].

В настоящей работе рассматривается простой пример такой нагрузки, обусловленной взаимодействием магнитного поля и упругими колебаниями электропроводящей пластинки. Другая модель, учитывающая демпфирование, изучалась в [3].

1. Уравнение, описывающее магнитоупругие колебания пластинки, находящейся в постоянном поперечном магнитном поле $\mathbf{H}_0$, при справедливости гипотезы магнитоупругости тонких тел имеет следующий вид [4]:

$$D\Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{2\sigma h^3}{3c^2} H_0^2 \frac{\partial \Delta w}{\partial t} \tag{1.1}$$

Здесь w — поперечные перемещения частиц пластинки, $2h$ — толщина, D — жесткость пластинки, ρ — плотность, σ — электропроводность материала пластинки, c — постоянная, равная скорости света в пустоте.

Аналогичное уравнение в случае, когда пластинка служит проводником равномерно распределенного продольного электрического тока плотности $\mathbf{J}_0$, приводится к виду [4, 5]

$$D\Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{(4\pi)^2 \sigma}{c^4} j_0^2 \frac{2h^5}{15} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \tag{1.2}$$

Здесь координатная плоскость (x, y), совпадающая со срединной плоскостью пластинки, выбрана так, что направление электрического тока совпадает с направлением оси Ox.

В частном случае, когда колебания зависят только от координаты x, уравнения (1.1) и (1.2) записываются в одинаковой форме

$$a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \gamma \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{1.3}$$

где $a^2 = D/(2\rho h)$, $\gamma = \sigma h^2 H_0^2/(3\rho c^2)$ в случае поперечного магнитного поля и $\gamma = (4\pi)^2 \sigma h^4 j_0^2/(15\rho c^4)$ в случае токонесущей пластинки.

В дальнейшем изучаются решения частных задач для уравнения (1.3).

2. Рассмотрим задачу магнитоупругих колебаний бесконечной пластинки ($-\infty < x < \infty$) при следующих начальных условиях:

$$w(x, 0) = \varphi(x), \quad \partial w(x, 0)/\partial t = \psi(x) \tag{2.1}$$

Решение уравнения (1.3), удовлетворяющее начальным условиям (2.1), приводится в [5]. В случае $\delta < 2a$ решение представляет периодические колебания с экспоненциальным затуханием возмущений, обусловленным параметром δ (наличием магнитного поля).

В случае же $\delta = 2a$ решение указанной задачи имеет вид [5]

$$w = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{3}{2} - \frac{(\xi - x)^2}{2\delta t} \right] \varphi(\xi) + t\psi(\xi) \right\} \exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{2\delta t} \right] d\xi \tag{2.2}$$

Из (2.2) видно, что возмущения, обусловленные начальным возмущением $\psi(x)$, стремятся к бесконечности при $t \to \infty$. Таким образом, магнитное поле приводит к неустойчивости пластинки при условии, что $\delta = 2a$ и $\psi(x) \neq 0$.

Следует отметить, что условие $\delta = 2a$ требует наличия сильного магнитного поля напряженностью порядка 10^5 гаусс.

Решение (2.2), полученное в [5] при помощи интегральных преобразований Фурье и Лапласа, можно получить и другим способом.

Уравнение (1.3) имеет автомодельное решение следующего вида:

$$w = t^{\alpha} \Phi(\eta), \quad \eta = (x - x_0)/\sqrt{t}, \quad \tau = t \tag{2.3}$$

где α и x_0 — произвольные параметры.

Подставляя (2.3) в уравнение (1.3), для определения функции $\Phi(\eta)$ получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами:

$$a^2\Phi^{IV} - \frac{\delta}{2}\eta\Phi^{III} - \left[\delta(\alpha - 1) - \frac{\eta^2}{4}\right]\Phi^{II} - \left(\alpha - \frac{3}{4}\right)\eta\Phi^{I} +$$

$$+ \alpha(\alpha - 1)\Phi = 0 \tag{2.4}$$

Представляя решение уравнения (2.4) в виде

$$\Phi(\eta) = \exp(-\beta\eta^2) \tag{2.5}$$

и определяя произвольные параметры α и β так, чтобы уравнение (2.4) удовлетворялось тождественно, что оказывается возможным только при условии $\delta = 2a$, получим следующее решение уравнения (1.3):

$$w = \sqrt{\frac{t}{2\pi\delta}} \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{2\delta t} \right] \tag{2.6}$$

Выражение (2.6) будет решением задачи магнитоупругих колебаний пластинки, удовлетворяющим условию $\delta = 2a$ и начальным условиям вида

$$w(x,\ 0) = 0, \quad \partial w(x,\ 0)/\partial t = \delta(x - x_0)$$

где $\delta(x - x_0)$ — дельта-функция Дирака.

Решение (2.6), которое является частным случаем решения (2.2), показывает возрастание возмущений с течением времени.

Уравнение (2.4) имеет также частные решения в виде полиномов по η. Здесь они не приводятся, так как для рассматриваемых вопросов не представляют интереса. Более содержательные решения получаются при комбинировании полиномов по η и функции вида (2.5). В частности, таким способом получается решение вида

$$w = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta t}}\left[\frac{3}{2} - \frac{(x - x_0)^2}{2\delta t}\right]\exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{2\delta t}\right] \qquad (2.7)$$

При получении (2.7) существенно используется условие $\delta = 2a$.

Решение (2.7) удовлетворяет начальным условиям

$$w(x,\ 0) = \delta(x - x_0), \quad \partial w(x,\ 0)/\partial t = 0$$

Решения (2.6) и (2.7) являются фундаментальными решениями задачи магнитоупругих колебаний бесконечной пластинки и, следовательно, решение при произвольных начальных условиях (2.1) имеет вид (2.2).

Таким образом, наличие добавочного члена, зависящего от скорости перемещения, в уравнении колебаний пластинки может привести к неустойчивости бесконечной пластинки.

Возникает вопрос — возможна ли неустойчивость для пластин конечных размеров?

3. Рассмотрим решение уравнения (1.3), удовлетворяющее начальным условиям (2.1) и следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} w(0,\ t) &= 0, \quad \partial^2 w(0,\ t)/\partial x^2 = 0 \\ w(l,\ t) &= 0, \quad \partial^2 w(l,\ t)/\partial x^2 = 0 \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Соответствующие задачи колебаний шарнирно-опертой пластины-полосы в поперечном магнитном поле или при наличии стороннего тока исследовались в [4—6].

Граничные условия (3.1) позволяют решать задачу методом разделения переменных. Представляя решение в виде

$$w = X(x)\,T(t) \qquad (3.2)$$

получим для определения $X(x)$ самосопряженную задачу. При этом, в зависимости от параметра δ, необходимо рассматривать три случая.

В случае $\delta < 2a$ решение уравнения (1.3), удовлетворяющее начальным условиям (2.1) и граничным условиям (3.1), имеет вид

$$w = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{A_k \cos\left[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\sqrt{a^2 - \delta^2/4}\,t\right] + B_k^{(1)} \sin\left[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\sqrt{a^2 - \delta^2/4}\,t\right]\right\} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{\delta}{2}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t\right]\sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (3.3)$$

где

$$A_k = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi$$

$$B_k^{(1)} = \frac{l}{(k\pi)^2}(a^2 - \delta^2/4)^{-\frac{1}{2}}\int_0^l\left[\frac{\delta}{2}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\varphi(\xi) + \psi(\xi)\right]\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi$$

Из (3.3) видно, что в этом случае колебания имеют затухающий характер с экспоненциальным затуханием в зависимости от времени. Частоты колебаний, по сравнению с частотой собственных колебаний пластинки при $\delta = 0$, уменьшаются, причем уменьшение одинаково для всех гармоник. Следует отметить, что коэффициенты $B_k^{(1)}$, в отличие от A_k, более сложным образом зависят от начальных условий и, кроме того, зависят также от коэффициента δ. С возрастанием δ (напряженности магнитного поля) коэффициенты $B_k^{(1)}$, характеризующие амплитуду колебаний, возрастают.

Если $\delta = 2a$, решение представляется в виде

$$w = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k + B_k^{(2)}t)\exp\left[-\frac{\delta}{2}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t\right]\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{3.4}$$

где

$$B_k^{(2)} = \frac{1}{l}\int_0^l\left[\frac{\delta}{2}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\varphi(\xi) + \psi(\xi)\right]\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi$$

В этом случае колебания апериодические, так как начальные возмущения затухают со временем, не переходя положения равновесия. Здесь, в отличие от (3.3), характер затухания слагаемых, содержащих коэффициенты A_k или $B_k^{(1)}$, в зависимости от времени, различный.

В случае $\delta > 2a$ решение имеет вид

$$w = \sum\left\{A_k^{(3)}\exp\left[-\frac{1}{2}(\delta^2 - 4a^2)^{1/2}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t\right] + \right.$$

$$\left. + B_k^{(3)}\exp\left[\frac{1}{2}(\delta^2 - 4a^2)^{1/2}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t\right]\right\}\exp\left[-\frac{\delta}{2}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t\right]\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{3.5}$$

где

$$A_k^{(3)} = \frac{1}{2}A_k - \left(\frac{l}{k\pi}\right)^2(\delta^2 - 4a^2)^{-1/2}B_k^{(2)}$$

$$B_k^{(3)} = \frac{1}{2}A_k + \left(\frac{l}{k\pi}\right)^2(\delta^2 - 4a^2)^{-1/2}B_k^{(2)}$$

Характер колебаний здесь такой же, как и в случае $\delta = 2a$. При этом чем больше δ (напряженность магнитного поля), тем быстрее затухание слагаемых с коэффициентами $A_k^{(3)}$ и тем медленнее затухание слагаемых с коэффициентами $B_k^{(3)}$.

Таким образом, для ограниченной пластинки с граничными условиями (3.1) второй член уравнения (1.3) приводит к затуханию колебаний. Если для бесконечной пластинки условие $\delta = 2a$ есть условие перехода от затухающих колебаний к возрастающим во времени колебаниям, то при граничных условиях (3.1) условие $\delta = 2a$ означает переход от периодических колебаний с затуханием к апериодическим колебаниям.

4. Рассмотрим приближенные решения задачи для других граничных условий, не допускающих разделения переменных.

Пусть граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} &w(0, t) = 0, \quad \partial w(0, t)/\partial x = 0 \\ &w(l, t) = 0, \quad \partial w(l, t)/\partial x = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

что соответствует условиям для пластинки, заделанной по краям $x = 0$ и $x = l$.

Представляя решение уравнения (1.3) в форме

$$w = X(x)\, e^{i\omega t} \tag{4.2}$$

и имея в виду граничные условия (4.1), для определения $X(x)$ получим самосопряженную задачу. Это обстоятельство позволяет надеяться, что метод Галеркина применим для задачи с граничными условиями (4.1). В качестве системы функций, используемых в методе Галеркина, берутся собственные функции соответствующей задачи колебаний пластинки в отсутствии магнитного поля ($\delta = 0$). Первые два приближения показывают, что характер колебаний аналогичен колебаниям с граничными условиями (3.1). Условие перехода от периодических колебаний к апериодическим определяется равенством $\delta \approx 1.72 \cdot 2a$. Точное решение этой же задачи [6] дает для условия перехода значение $\delta \approx 1.7 \cdot 2a$.

В случае граничных условий

$$\begin{aligned} &w(0, t) = 0, \quad \partial w(0, t)/\partial x = 0 \\ &w(l, t) = 0, \quad \partial^2 w(l, t)/\partial x^2 = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

подстановка (4.2) в уравнение (1.3) и условия (4.3) приводит к самосопряженной задаче относительно функции $X(x)$. Характер решения, полученного методом Галеркина, такой же, как и в случае граничных условий (3.1) и (4.2). Условие перехода от периодических колебаний к апериодическим дается равенством $\delta \approx 1.33 \cdot 2a$.

Рассмотрим уравнение (1.3) со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} &w(0, t) = 0, \qquad \partial w(0, t)/\partial x = 0 \\ &\partial^2 w(l, t)/\partial x^2 = 0, \qquad \partial^3 w(l, t)/\partial x^3 = 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

которые соответствуют граничным условиям для полосы-пластины с заделанным краем при $x = 0$ и свободным краем при $x = l$.

Решение уравнения (1.3) представляется в виде

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\, u_k(x) \tag{4.5}$$

где

$$u_k = \sin \lambda_k x - \operatorname{sh} \lambda_k x - a_k (\cos \lambda_k x - \operatorname{ch} \lambda_k x)$$

$$a_k = (\cos \lambda_k l + \operatorname{ch} \lambda_k l)^{-1} (\sin \lambda_k l + \operatorname{sh} \lambda_k l)$$

Здесь $u_k(x)$ — известные собственные функции задачи колебаний консольной балки [7] (каждое слагаемое из (4.5) удовлетворяет граничным условиям (4.4)), λ_k — соответствующие собственные значения, являющиеся корнями следующего уравнения:

$$\cos \lambda_k l \operatorname{ch} \lambda_k l = -1$$

Для определения функций $f_k(t)$ применяется метод Галеркина. В первом приближении функция $f_1(t)$ определяется из следующего уравнения:

$$b_1^2 \ddot{f}_1(t) + \omega_1^2 l \left(1 - \frac{2a_1}{\lambda_1 l}\right) \dot{f}_1(t) + b_2^2 a^2 f_1(t) = 0 \tag{4.6}$$

Так как $\lambda_1 l \approx 1{,}875$ [7], то легко показать, что $2a_1 > \lambda_1 l$, и, следовательно, решение уравнения (4.6) экспоненциально возрастает по времени t для произвольного значения параметра δ. Это свойство решения уравнения (4.6) сохраняется и при учете последующих приближений по методу Галеркина, а также если вместо функций $u_k(x)$ используются полиномы, удовлетворяющие граничным условиям (4.4).

Физически такое решение не будет верным, так как пластинка не может терять устойчивость при произвольно малом δ (произвольно малой напряженности магнитного поля).

Отметим, что если решение задачи с граничными условиями (4.4) представить в виде (4.2), то для определения функции $X(x)$ получается несамосопряженная задача. Поэтому задача решалась также при помощи модифицированного метода Галеркина для несамосопряженных задач, предложенного в [8]. После представления решения в виде (4.2) приближенное решение задачи строится при помощи функций, удовлетворяющих граничным условиям как несамосопряженной задачи относительно $X(x)$, так и соответствующей сопряженной задачи. Исследование характеристического уравнения относительно ω, которое получается вследствие применения модифицированного метода Галеркина, показывает, что корни уравнения имеют отрицательную мнимую часть при произвольно малом δ, то есть получается экспоненциально возрастающее по времени решение (неустойчивое решение).

Приведенные приближенные исследования задачи в случае граничных условий (4.4), хотя и дают физически неверный результат, однако указывают на возможность существования неустойчивости.

5. Другое приближенное решение уравнения (1.3) с граничными условиями (4.4) можно получить с использованием автомодельного решения (2.3).

Рассмотрим решение задачи для больших моментов времени. Учитывая, что большим значениям t соответствуют малые значения η, уравнение (2.4) заменим следующим уравнением:

$$a^2\Phi^{IV} - \lambda(\alpha - 1)\Phi^{II} + \alpha(\alpha - 1)\Phi = 0 \tag{5.1}$$

Корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (5.1), определяются по формуле

$$r^{\pm} = (2a^2)^{-1}\left[\lambda(\alpha - 1) \pm \sqrt{\lambda^2(\alpha - 1)^2 - 4a^2\alpha(\alpha - 1)}\right] \tag{5.2}$$

Исследование решений уравнения (5.1) на основе (5.2) показывает, что наибольший интерес представляет случай

$$\lambda = 2a\alpha^{1/2}(\alpha - 1)^{-1/2}, \quad \alpha > 1 \tag{5.3}$$

С учетом (2.3), (5.3) и при $x_* = 0$ приближенное решение уравнения (1.3) для больших t представляется в виде

$$w = t^{\alpha}\left[C_1\exp\left(\frac{\mu x}{\sqrt{t}}\right) + C_2\frac{x}{\sqrt{t}}\exp\left(\frac{\mu x}{\sqrt{t}}\right) + C_3\exp\left(-\frac{\mu x}{\sqrt{t}}\right) + \right.$$
$$\left. + C_4\frac{x}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{\mu x}{\sqrt{t}}\right)\right] \tag{5.4}$$

где

$$\mu = (2\alpha)^{1/2}\lambda^{-1/2} \tag{5.5}$$

Точное удовлетворение граничным условиям (4.4) при помощи функции (5.4) оказывается невозможным. Если же удовлетворить точно условиям на конце $x = 0$, приближенно условию $\partial^2 w(l, t)/\partial x^2 = 0$ с учетом, что $t \gg (\mu l)^2$, и требовать вместо $\partial^3 w(l, t)/\partial x^3 = 0$ выполнения условия

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\partial^3 w(l, t)}{\partial x^3} = 0 \tag{5.6}$$

то из (5.4) получается приближенное решение в виде

$$w = Ct^{\alpha}\left(\operatorname{sh}\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda t}}\,x - \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda t}}\,x\operatorname{ch}\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda t}}\,x\right) \tag{5.7}$$

Выполнение условия (5.6) требует, чтобы α было меньше 3/2. Поэтому, согласно (5.3), в решении (5.7) α должно удовлетворять следующему неравенству:

$$1 < \alpha < 3/2 \tag{5.8}$$

Если принять (5.7) как приближенное решение задачи, то оно показывает, что пластинка неустойчивая при условии (5.3), где α удовлетворяет неравенству (5.8). Из (5.3) и (5.8) получается минимальное критическое значение параметра δ, следовательно, и напряженности магнитного поля в виде

$$\delta_* = 2\sqrt{3}\,a$$

Заметим, что для бесконечной пластинки критическое значение получается в виде $\delta = 2a$.

Таким образом, показано, что второй член в уравнении (1.3) (магнитное демпфирование) при определенных условиях и для бесконечной области $(-\infty < x < \infty)$ приводит к дестабилизации. Рассмотренные задачи для ограниченной области $(0 \leqslant x \leqslant l)$ показывают, что указанный член имеет в основном демпфирующий характер. Исключение составляет задача с граничными условиями (4.4). В этом случае приближенные решения показывают на возможное наличие дестабилизирующего эффекта.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 29 V 1978

Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

ՍԱԼԵՐԻ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ՀԱՐՑԵՐ

Ամփոփում

Էլեկտրամագնիսական դաշտի և սալի առաձգական տեղափոխությունների փոխազդեցությունը հաշվի առնող պարզ նմանօրինակի (մոդելի) հիման վրա ուսումնասիրված է դիսսիպատիվ ուժերի ազդեցությունը սալի տատանումների բնույթի վրա։

Ցույց է տրված, որ այդ ուժերը, որոնք հիմնականում ունեն մարող ազդեցություն, որոշակի պայմանների դեպքում կարող են առաջ բերել համակարգի անկայունություն։

ON MAGNETOELASTIC VIBRATION IN PLATES

M. V. BELUBEKIAN

Summary

The effect of dissipation loads on the mode of vibration in plates is discussed, using a simple model. This model takes into account the interaction of electromagnetic field with the plate's elastic displacements. It is shown that these loads, producing a damping effect generally, under certain conditions produce a destabilizing effect as well.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физгиз, 1961.
2. *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. М., «Мир», 1971.
3. *Smith T. E., Herrmann G.* Stability of circulatory elastic systems in the pres… of magnetic damping. Acta Mechanica, 1971, No. 12.
4. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М., «Наука», 1977.
5. *Белубекян М. В.* О некоторых особенностях задач магнитоупругости токонесу… пластин. Докл. АН Арм. ССР, 1975, т. XI, № 2.
6. *Багдасарян Г. Е., Мкртчян П. А.* О колебаниях проводящих пластин в попереч… магнитном поле. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. XXVIII, № 1.
7. *Рэлей Д. В.* Теория звука, т. 1. М., Гос. изд. техн.-теор. лит., 1955.
8. *Prasad S. N., Herrmann G.* Adjoint variational methods in nonconservative stability problems. Int. J. Solids Structures, 1972, vol. 8.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, №3, 1979 Механика

Р. Н. КИРАКОСЯН

О РАЦИОНАЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ ЗАЩЕМЛЕННОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ МАТЕРИАЛА

Задачам проектирования равнопрочных упругих пластинок посвящены работы [1, 2] и др. Наиболее полное представление о современном состоянии вопроса рационального проектирования конструкций можно составить с помощью работ [3, 4].

Известно [5], что если спроектировать тонкостенную конструкцию такой переменной толщины, при которой во всей конструкции 1) удовлетворяется условие текучести в смысле обобщенных напряжений, 2) удельная диссипация энергии деформирования принимает постоянное значение, 3) существует кинематически возможное поле перемещений, то такая конструкция будет иметь наименьший объем. В работе [6] в рамках деформационной теории пластичности произвольного упрочняющегося материала показано, что равнопрочная пластинка отвечает этим требованиям и решена задача проектирования шарнирно опертой круглой пластинки наименьшего объема.

Задача с помощью введения неизвестной постоянной [7] сводилась к задаче Коши относительно двух дифференциальных уравнений первого порядка.

При численном интегрировании этой системы выяснилось, что граничное условие шарнирного опирания удовлетворяется за счет превращения в нуль толщины, вследствие чего кривизна пластинки в радиальном направлении вблизи опорной кромки принимает неограниченно большое значение, и машина не может продолжать процесс интегрирования до удовлетворения условия заделки. В настоящей заметке показывается, что при подходящем вмешательстве машина может проинтегрировать дифференциальные уравнения задачи до удовлетворения граничного условия заделки.

1. Как было показано в [6], равнопрочная пластинка обладает свойством постоянства удельной диссипации энергии деформаций и имеет наименьший объем. Путем введения неизвестной постоянной и специальных обозначений [7], задача проектирования пластинки наименьшего объема при произвольном упрочнении материала сводится к задаче Коши относительно системы

$$\frac{dx}{d\rho} = v, \quad \frac{dv}{d\rho} = -v\,\frac{30x^2 - 39xv + 10v^2 + (\overline{P}_1)^{5/2}\,\dfrac{\overline{q}}{v}\,e^{-2\rho}}{15x^2 - 24xv + 8v^2} \qquad (1.1)$$

Здесь

$$r = ce^{-\rho}, \quad \varkappa = -\frac{h_0}{2\varepsilon_s}\varkappa_1, \quad \overline{P}_s = 3\varkappa^2 - 3\varkappa v + v^2, \quad \overline{q} = \frac{c^4}{3\sqrt{3}Fh_0^2\varepsilon_s\varkappa_0^2}q$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\overline{P}_s}}\varkappa_0 h_0, \quad F = \frac{1}{3\varepsilon_s^2}\int\limits_0^{\varepsilon_s}\varepsilon_i\sigma_i\,d\varepsilon_i, \quad h_0 = h|_{r=0} = \frac{c}{\varkappa_0}\sqrt{\frac{2q}{3\sqrt{3}F\varepsilon_s\overline{q}}}$$

$$\varkappa_0 = \varkappa|_{r=0}, \quad \varepsilon_s = \varepsilon_i|_{\sigma_i=\sigma_s} \tag{1.2}$$

h — толщина, r — расстояние от центра, ε_s — предел упругих деформаций материала, $\varkappa_2$ — кривизна в кольцевом направлении пластинки, q — интенсивность изгибающей нагрузки, c — неизвестная постоянная, ε_i и σ_i — интенсивности деформаций сдвигов и касательных напряжений.

Интегрирование уравнений (1.1) производится от некоторого достаточно большого ρ, при начальных значениях $\varkappa_1$, v_1, определяемых из асимптотических разложений

$$\begin{aligned} \varkappa &= \varkappa_0 + \frac{3\sqrt{3}}{40}\varkappa_0\overline{q}e^{-2\rho} + \dots \\ v &= -\frac{3\sqrt{3}}{20}\varkappa_0\overline{q}e^{-2\rho} + \dots \end{aligned} \tag{1.3}$$

и кончается там ($\rho = \rho_a$), где удовлетворяется граничное условие задачи. В случае шарнирного опирания это условие имеет вид

$$\frac{3\varkappa - 2v}{(\overline{P}_s)^{3/2}}\Bigg|_{\rho_a=\rho_m} = \overline{M}_1\Big|_{\rho_a=\rho_m} = 0, \quad \left(M_1|_{r=a} = \frac{q}{\overline{q}}c^2\overline{M}_1|_{r=a} = 0\right) \tag{1.4}$$

в случае же заделки —

$$\varkappa\Big|_{\rho_a=\rho_3} = -\frac{h_0}{2\varepsilon_s}\frac{1}{a}\frac{dw}{dr}\Bigg|_{r=a} = 0 \tag{1.5}$$

(здесь a — радиус пластинки).

Значение неизвестной постоянной определяется по формуле

$$c = ae^{\rho_a} \tag{1.6}$$

Исследования показывают, что сначала удовлетворяется условие шарнирного опирания (1.4). При этом, когда $\rho \to \rho_m + 0$, значение $v = -\frac{h_0}{2\varepsilon_s}\left(\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)$ при умеренных $\varkappa$ стремится к минус бесконечности, и машина не может переходить за точку $\rho = \rho_m$. С целью продолжения процесса вычислений за значение ρ_m необходимо предварительно определить значения $\varkappa$ и v для некоторой точки $\rho_2 = \rho_m - \varepsilon$, находящейся в другой стороне точки $\rho = \rho_m$ на достаточно малом расстоянии

$\rho_{ш}$ и принимать эти значения в качестве начальных условий для дальнейшего интегрирования уравнения (1.1). При переходе через линию $\rho=\rho_{ш}$ изгибающие моменты меняют свои знаки, в силу чего соответствующим образом меняется и картина деформирования пластинки. Если при $\rho\to\rho_{ш}+0$ значение $v\to-\infty$, то при $\rho\to\rho_{ш}-0$, наоборот, $v\to+\infty$. Фактически пластинка шарнирами, распределенными вдоль кольцевой окружности $\rho=\rho_{ш}$ $(r=r_{ш})$, разделяется на две — среднюю $[1>\rho>\rho_{ш}\ (0\leqslant r<r_{ш})]$ и наружную $[\rho_{ш}>\rho\geqslant\rho_1\ (r_{ш}<r\leqslant a)]$ части. Причем, на линии раздела толщина пластинки равна нулю, а кривизна в радиальном направлении d^2w/dr^2 не определена. На этой линии нет материала и для нее не имеет смысла говорить о соблюдении достаточных условий наименьшего объема, в частности, о виртуальности перемещений. Остается вопрос о характере сопряжения двух частей, обеспечивающем наименьший объем всей пластинки. При $\rho\to\rho_{ш}+0$ значение v убывает очень быстро (от умеренных значений стремится к минус бесконечности в промежутке, не превышающем 1% радиуса пластинки). Естественно, значение v будет так быстро убывать и при удалении от линии раздела $\rho=\rho_{ш}$ в другую сторону. Действительно, расчеты показывают, что в точках наружней части пластинки, близких к линии раздела $\rho_{ш}$, для значения v можно взять любое достаточно большое положительное число и это почти не отражается на результатах решения. В силу этого можно полагать

$$v\Big|_{\rho_{ш}-\varepsilon}=-v\Big|_{\rho_{ш}+\varepsilon} \tag{1.7}$$

Так как при удалении от центра прогибы пластинки монотонно должны убывать, то $\varkappa=-\dfrac{h_0}{2\varepsilon_s}\dfrac{1}{a}\dfrac{dw}{dr}$ будет положительной и для кольцевой части пластинки. При $\rho\to\rho_{ш}+0$ значение $\varkappa$ стремится к конечной величине. С точки зрения формального соблюдения виртуальности деформаций необходимо $\varkappa$ продолжать в кольцевую область пластинки непрерывно. Однако, как уже отмечалось, соблюдение виртуальности деформаций на шарнирной окружности раздела $\rho=\rho_{ш}$ из-за отсутствия материала не обязательно, следовательно, не обязательна и непрерывность $\varkappa$ на этой линии. Поэтому для $\varkappa$ нужно полагать

$$\varkappa\Big|_{\rho_{ш}+\varepsilon}=\varkappa_1 \tag{1.8}$$

где $\varkappa_1$ следует выбирать так, чтобы объем пластинки оказался наименьшим.

В табл. 1 приводятся безразмерные значения толщины в середине и объема пластинки, вычисленные при разных $\varkappa_1$, когда $\varkappa_0=1$.

Как видно из табл. 1, значения толщины в середине $\dfrac{h_0}{a}\sqrt{\dfrac{\sigma_s}{(1-\nu^2)q}}$ с возрастанием $\varkappa_1$ монотонно убывают, а объем $\dfrac{V}{\pi a^3}\sqrt{\dfrac{\sigma_s}{(1-\nu^2)q}}$ свое

Таблица 1

$\varkappa_1$	1.5	1.75	$1.987 = \varkappa\big\|_{b_m+0}$	2.25	2.5
$\frac{h_0}{a}\sqrt{\frac{\sigma_s}{q(1-\nu^2)}}$	0.9308	0.8636	0.8004	0.7337	0.6739
$\frac{V}{\pi a^3}\sqrt{\frac{\sigma_s}{q(1-\nu^2)}}$	0.5448	0.5341	0.5317	0.5344	0.5422

наименьшее значение принимает при $\varkappa_1 = \varkappa\big|_{b_m+0}$, то есть при непрерывном продолжении $\varkappa$ в кольцевую область пластинки.

Имея в виду вышесказанное, можо полагать

$$\varkappa\big|_{b_m-0} = \varkappa\big|_{b_m+0}, \qquad v\big|_{b_m-0} = -v\big|_{b_m+0} \tag{1.9}$$

Используя этот прием, можно получить решение задачи не только при защемлении, но и при шарнирном опирании, когда, кроме поверхностной нагрузки, к опорной кромке пластинки приложены изгибающие моменты обратного направления. Таким образом, один раз интегрируя уравнения (1.1) до удовлетворения условия заделки (1.5), попутно получаются решения задачи при любых граничных условиях. Причем, эти решения не зависят от физико-механических характеристик материала и носят общий характер.

В табл. 2 представлены некоторые результаты решения задачи защемленной равнопрочной пластинки под действием равномерно-распределенной нагрузки (столбцы 1—8). С целью сравнения приводится также решение задачи упруго-пластического изгиба защемленной пластинки постоянной толщины [7] (столбцы 9—14). В рассмотренном случае ($\varkappa_1 = 1$, $\lambda = 0.95$) экономия в объеме доходит до 26%.

Для наглядности на фиг. 1 и 2 представлены графики изменения безразмерных прогибов

$$w^* = \frac{w}{a\varepsilon_s}\sqrt{\frac{q(1-\nu^2)}{\sigma_s}} \quad \text{и толщины} \quad h^* = \frac{h}{a}\sqrt{\frac{\sigma_s}{q(1-\nu^2)}}$$

равнопрочной пластинки и пластинки постоянной толщины.

Любопытно отметить, что у упругих и упруго-пластических защемленных пластинок постоянной толщины d^2w/dr^2, M_r, M_θ превращаются в нуль в разных сечениях, а у рациональной пластинки M_r и M_θ превращаются в нуль одновременно в сечениях перегиба деформированной поверхности пластинки, где d^2w/dr^2 скачкообразно меняет свой знак.

При несжимаемости материала для всех пластинок в сечениях заделки $M_r = 2M_\theta$.

Рациональная пластинка в середине и в сечениях заделки имеет одинаковую толщину.

Таблица 3

Равнопрочная пластина:

$$\varkappa_0 = 1,\ \rho_m = 0.761,\ \rho_s = 0.334,\ c/a = 1.396,\ \bar{q} = 10,\ \lambda = 0.95$$

$$\frac{h_0}{a}\sqrt{\frac{\sigma_s}{q(1-\nu^2)}} = 0.803, \quad \frac{V}{\pi a^3}\sqrt{\frac{\sigma_s}{q(1-\nu^2)}} = 0.531,$$

$$w^* = \frac{w}{a\sigma_s}\sqrt{\frac{q(1-\nu^2)}{\sigma_s}}, \quad h^* = \frac{h}{a}\sqrt{\frac{\sigma_s}{q(1-\nu^2)}}$$

Пластинка постоянной толщины:

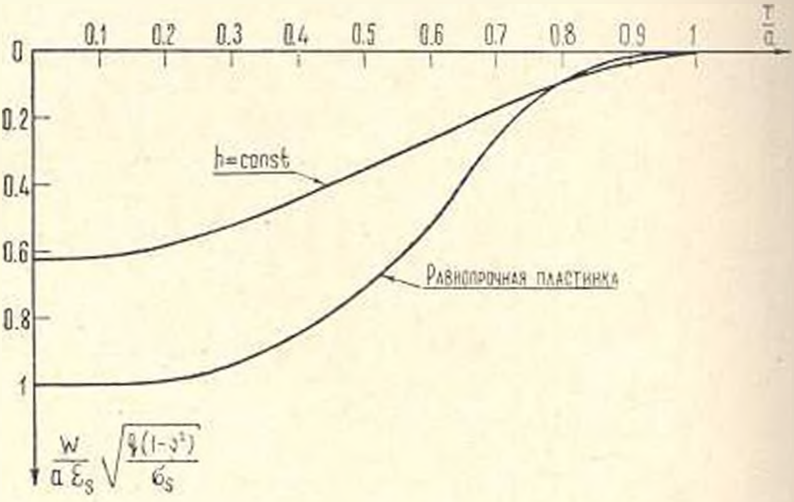
$$\varkappa_0 = 1,\ \rho_m = 2.325,\ \rho_s = -0.0764,\ c/a = 0.926,$$

$$\bar{q} = 10, \quad h^* = 0.717,$$

$$\frac{V}{\pi a^3}\sqrt{\frac{\sigma_s}{q(1-\nu^2)}} = 0.717, \quad \lambda = 0.95$$

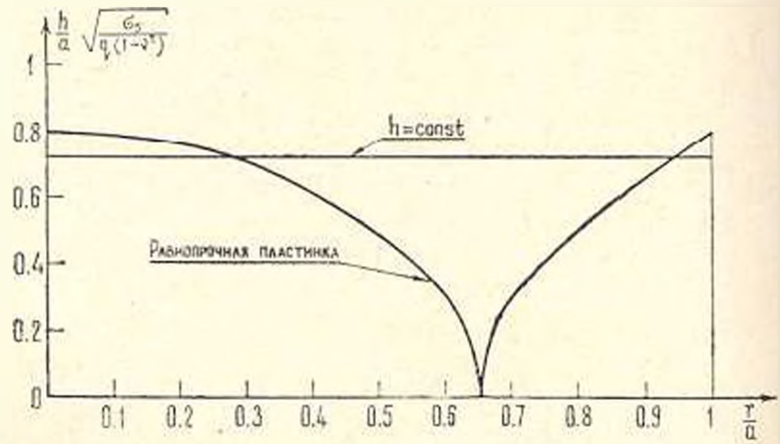
ρ	r/a	$\varkappa$	v	h^*	$\bar{M}_1$	$\bar{M}_2$	w^*	ρ	r/a	$\varkappa$	v	$3\varkappa-2v$	w^*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	0.070	1.003	−0.006	0.794	0.570	0.569	1.037	3	0.046	1.000	0.002	3	0.627
2.6	0.104	1.007	−0.015	0.789	0.562	0.559	1.028	2.6	0.069	0.997	0.018	2.954	0.622
2.0	0.189	1.025	−0.052	0.761	0.527	0.519	0.999	2.2	0.103	0.984	0.047	2.859	0.615
1.6	0.282	1.058	−0.129	0.712	0.466	0.448	0.940	1.8	0.153	0.956	0.101	2.667	0.598
1.4	0.344	1.092	−0.215	0.667	0.412	0.388	0.886	1.4	0.228	0.898	0.196	2.303	0.560
1.3	0.380	1.116	−0.285	0.635	0.375	0.348	0.852	1.2	0.279	0.853	0.261	2.037	0.528
1.1	0.465	1.196	−0.552	0.541	0.278	0.245	0.750	1.0	0.341	0.794	0.331	1.718	0.485
0.9	0.568	1.375	−1.482	0.370	0.135	0.107	0.580	0.8	0.416	0.720	0.400	1.361	0.423
0.78	0.640	1.725	−6.995	0.143	0.021	0.013	0.414	0.55	0.535	0.609	0.508	0.810	0.320
0.761	0.652	1.987	−55.707	0.024	0.001	0	0.375	0.40	0.621	0.524	0.630	0.313	0.242
0.72	0.680	1.421	8.574	0.211	−0.046	−0.015	0.307	0.35	0.653	0.491	0.682	0.109	0.213
0.59	0.774	0.689	4.028	0.453	−0.210	−0.069	0.122	0.325	0.669	0.473	0.711	0	0.198
0.50	0.847	0.379	2.940	0.579	−0.346	−0.131	0.044	0.20	0.759	0.375	0.884	−0.643	0.124
0.40	0.936	0.128	2.140	0.710	−0.524	−0.236	0.010	0.10	0.838	0.278	1.061	−1.288	0.065
0.34	0.993	0.011	1.772	0.790	−0.649	−0.326	0	0	0.926	0.160	1.357	−2.235	0.019
0.334	1	0	1.738	0.797	−0.662	−0.331	0	−0.0764	1.0	0	3.773	−7.545	0

В задачах оптимального проектирования плит от нулевых толщин можно «освободиться» двумя способами:



Фиг. 1.

а) решить задачу по уточненной теории, то есть с учетом влияний деформаций поперечных сдвигов, совсем не имея дело с нулевыми толщинами;



Фиг. 2.

б) решить задачу по классической теории, получить «теоретическую» толщину, которая в сечениях, где отсутствуют изгибающие моменты, превращается в нуль. Далее, толщину этих «нулевых» сечений определить из условия касательных напряжений при одинаковом коэффициенте запаса. Первый способ является более точным, но существенно сложным, чем второй. Однако, результаты, полученные этими двумя способами практически не будут отличаться друг от друга, так как для тонких изотропных плит, особенно на участках малых толщин, поправки уточненных теорий ничтожны.

Поэтому применение уточненной теории только с целью освобождения от «нулевых» толщин не оправдывается. С другой стороны, если толщину плиты в «нулевом» сечении определить из условия касательных напряжений (неважно каким способом), то все равно реальная конструкция не получится, так как вместо нулевой толщины теперь получится опять нереальная толщина в десятки раз меньшая, чем в центре пластинки.

В рассмотренном примере «нулевым» является сечение $r_0 = 0.65a$ (фиг. 2), перерезывающее усилие в котором будет

$$Q = \frac{qr_0}{2} = 0.325\, qa \tag{2.1}$$

Если считать, что касательные напряжения по толщине пластинки распределяются по параболическому закону, то для толщины этого сечения получим

$$h_{\min} = \frac{3qr_0}{4\tau_{\max}} \tag{2.2}$$

где $\tau_{\max}$ — максимальное значение касательных напряжений по толщине.

Интенсивность касательных напряжений имеет вид

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2 + 3\tau_{rz}^2} \tag{2.3}$$

Так как при $r = r_0$ $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$, то

$$\sigma_i\big|_{r=r_0} = \sqrt{3}\,\tau_{rz} \tag{2.4}$$

Имея в виду, что в рассмотренном случае

$$\sigma_i = E\varepsilon_i\left[1 - \lambda\left(1 - \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_i}\right)\right], \quad \varkappa_0 = 1, \quad \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_s}\bigg|_{z=\pm h/2} = 2 \tag{2.5}$$

то

$$\sigma_i\big|_{z=\pm h/2} = 2\sigma_s\,(1 - 0.5\lambda) \tag{2.6}$$

где σ_s — предел упругости.

В сечении $r = r_0$ это условие примет вид

$$\sqrt{3}\,\tau_{\max} = 2\sigma_s\,(1 - 0.5\lambda) \tag{2.7}$$

С учетом (2.2) и (2.7) находим

$$h_{\min} = \frac{3\sqrt{3}\,r_0}{8(1 - 0.5\lambda)}\,\frac{q}{\sigma_s} \tag{2.8}$$

Для максимальной толщины при $\lambda = 0.95$ имеем (фиг. 2, табл. 2)

$$h_{max} = 0.803a\sqrt{\frac{q(1-\nu^2)}{\sigma_s}} \tag{2.9}$$

Тогда

$$h_{min} = 0.803\, a\, \frac{q}{\sigma_s} \tag{2.10}$$

Отношение этих толщин будет

$$\frac{h_{max}}{h_{min}} = \sqrt{\frac{\sigma_s(1-\nu^2)}{q}} \tag{2.11}$$

Для реальных конструкций $\frac{\sigma_s}{q} = 100 \div 500$ и $\frac{h_{max}}{h_{min}} = 10 \div 20$.

Таким образом, если исходить из условия касательных напряжений, то в сечении $r = r_0$ толщину следует брать в десятки раз меньше, чем в центре пластинки. Такая пластинка не реальна. Обычно, толщину «нулевых» сечений выбирают из других соображений. Практическую толщину в сечении $r = r_0$ можно принять, например,

$$h_{min} = 0.3\, h_{max} \tag{2.12}$$

Как видно из графика фиг. 2, длина участка утолщения будет примерно 0.1a. При этом объем пластинки увеличится на 2%. Это имеет смысл, так как окончательная экономия вместо 26% составит теперь 24%, но зато пластинка будет уже реальной.

В задачах пластинок, работающих за пределами упругости материала, вопрос учета геометрической нелинейности приобретает особо важное значение. Однако, это не означает, что геометрически линейная постановка задач вообще не приемлема. Например, в случае, рассмотренном в пункте I,

$$\frac{w}{h} = \frac{m}{n}\,\frac{\sigma_s \varepsilon_s}{q(1-\nu^2)} \tag{2.13}$$

где

$$m = \frac{w}{a\varepsilon_s}\sqrt{\frac{q(1-\nu^2)}{\sigma_s}}, \qquad n = \frac{h}{a}\sqrt{\frac{\sigma_s}{q(1-\nu^2)}} \tag{2.14}$$

Полагая $\sigma_s/q = 100$, $\nu = 0.5$, $\varepsilon_s = 10^{-3}$, получим

$$\frac{w}{h} = 0.133\,\frac{m}{n} \tag{2.15}$$

При $r_0 = 0.65\,a$, $m = 0.4$ (фиг. 1), в силу чего, чтобы $\left.\frac{w}{h}\right|_{r=r_0} < \frac{1}{5}$, нужно выполнение неравенства

$$n|_{r=r_0} \geqslant 0.267 \tag{2.16}$$

Имея в виду, что для центра пластинки $n = 0.803$, находим

$$\frac{h_{r=r_0}}{h_{max}} \geqslant \frac{0.267}{0.803} = 0.33 \tag{2.17}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что условие применения геометрически линейной постановки $\left(\frac{w}{h} < \frac{1}{5}\right)$ [8] в остальных сечениях пластинки удовлетворяется с большим запасом.

Таким образом, в рассмотренном случае при $h|_{r=r_0} = \frac{h_{max}}{3}$ задачу можно решать в геометрически линейной постановке.

Следует отметить, что это заключение верно с запасом, так как утолщая пластинку вблизи сечения $r = r_0$, прогибы считали прежними.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 5 XII 1977

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ՆՅՈՒԹԻ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻՑ ԴՈՒՐՍ ԱՄՐԱՆՑՎԱԾ ԿԼՈՐ ՍԱԼԻ ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՆԱԽԱԳԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Կամայական ամրապնդվող նյութի փոքր առաձգա-պլաստիկական տեսության շրջանակներում դիտարկվում է ամենափոքր ծավալի միաշերտ ամրակցված կլոր սալի նախագծման խնդիրը։ Նվազագույն ծավալի բավարար պայմանների օգտագործումով խնդիրը բերվում է դեֆորմացված սալի կորության նկատմամբ եզրային խնդրին։ Անհայտ հաստատունի ներմուծմամբ եզրային խնդիրը հանգեցվում է Կոշու խնդրին։ Բերվում է կոնկրետ օրինակ։

ON RATIONAL DESIGN OF A ROUND FASTENED PLATE BEYOND MATERIAL ELASTICITY BOUNDARY

R. M. KIRAKOSIAN

S u m m a r y

Using the Drucker-Shield conditions the problem is solved to design a round fastened one-layer plate of the smallest volume for an arbitrary hardened material. The rational joining of the middle and circular parts of the plate is discussed.

A particular example is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ширко И. В.* О форме равнопрочной пластинки. Инж. журнал, 1965, т. 5, вып. 2.
2. *Лукин В. А.* Осесимметричный изгиб равнопрочных пластинок. Изв. ВУЗов, сер. «Машиностроение», 1971, № 1.
3. *Чирас А. А., Баркаускас Э., Каркаускас Р. П.* Теория и методы оптимизации упруго-пластических систем. Л., Стройиздат, 1974.
4. *Фейгин М. И., Шапиро Г. С.* Методы оптимального проектирования деформируемых тел. М., «Наука», 1976.
5. *Шилд Р.* Методы оптимального проектирования конструкций. Сб. Механика, 1962, 2 (72).
6. *Киракосян Р. М.* Об одной задаче круглой пластинки наименьшего объема за пределами упругости материала. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1977, т. XXX, № 1.
7. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
8. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. М., Гостехиздат, 1956.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 3, 1979 Механика

Ф. КРУМА, Р. А. КОТИКЯН, К. С. КАРАПЕТЯН

О СООТНОШЕНИИ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Соотношение ползучести бетона при растяжении и сжатии до сих пор мало изучено, между тем исследование этого вопроса имеет весьма важное как научное, так и практическое значение. Дело в том, что в существующих теориях ползучести бетона, в том числе и в теории упруго-ползучего тела Н. Х. Арутюняна [1], которая является наиболее общей и строгой линейной теорией, принято, что меры ползучести при растяжении и сжатии равны. Однако, по мере накопления экспериментальных данных выяснилось, что в большинстве случаев отношение меры ползучести бетона при растяжении (C) к мере ползучести при сжатии (C) больше единицы и изменяется в довольно широких пределах.

Увеличение растяжимости бетона за счет ползучести вообще является положительным фактором, так как это может привести к существенной релаксации внутренних напряжений, вызванных набуханием и усадкой, а также температурой. Поэтому учет фактической ползучести бетона при растяжении имеет весьма важное значение при оценке долговременного напряженного состояния конструкции и ее трещиностойкости.

В работе приводятся полученные авторами новые данные о соотношении ползучести бетона при растяжении и сжатии в зависимости от различных факторов. Проведенные исследования позволяют объяснить некоторые расходящиеся мнения, имеющие место в современной литературе, и привлечь внимание к проблемам, которыми желательно заниматься еще в дальнейшем.

Настоящая работа выполнена по договору о творческом содружестве между Институтом строительства и архитектуры Словацкой Академии Наук (ЧССР) и Институтом механики АН АрмССР.

Среди первых, кто занимался изучением и сравнением ползучести бетона при растяжении и сжатии, нужно упомянуть Глэнвиля В. Г. [12], который в 1930 г. на основании 6-месячных опытов установил очень близкие абсолютные значения деформаций ползучести при одинаковых растягивающих и сжимающих напряжениях. В опытах 1937 г. Дависа Р. Е., Дависа Г. Е. и Брауна Е. Г. [11] при влажности среды 50 и 100% ползучесть бетона под растягивающей нагрузкой в начальное время развивалась более интенсивно, чем под сжимающей нагрузкой. Однако, экстрополяция опытных данных на более длительное время показала, что в итоге ползучесть при растяжении меньше, чем при сжатии. В 1939 г. аналогичные результаты получили Глэнвиль В. Г. и Томас Ф. Г. [13]. В опытах Троксела Г. Е., Рафаела И. М. и Дависа Р. Е. [17] также в начальных стадиях приращение деформаций ползучести при растяжении оказалось больше, чем при сжатии, а в дальнейшем наблюдалась обратная картина. Мамилан М. [14] в опытах над цементным камнем в среде с относительной влажностью 50% установил почти в 5 раз большую ползучесть при растяжении, чем при сжатии. То же самое известно и из опытов Саталкина А. В. [8].

Карапетян К. С. в 1964 г. опубликовал работу [6], посвященную исследованию влияния анизотропии на прочность, деформативность и ползучесть бетона на литоидной пемзе при растяжении и сжатии в зависимости от масштабного фактора. Исследования показали, что масштабный фактор оказывает существенное влияние на соотношение мер ползучести бетона при растяжении и сжатии. По данным этих опытов для призм сечением 10×10, 15×15 и 20×20 *см*, испытанных перпендикулярно слоям, отношение C^+/C^- соответственно составляет 1.28, 1.80 и 2.14, а для образцов сечением 7×7, 10×10, 15×15 и 20×20 *см*, испытанных параллельно слоям,— 0.92, 1.06, 1.39 и 1.73.

Таким образом, опытами Карапетяна К. С. впервые было показано, что C^+/C^- в большой мере зависит от размеров поперечного сечения бетонного элемента и направления растягивающей и сжимающей нагрузок по отношению к слоям бетонирования.

Следует также отметить об опытах С. В. Александровского и В. Я. Багрия [2], П. И. Васильева [4] и Б. В. Блинкова [3], где отношение C^+/C^- составляло 1.5, а в опытах Н. И. Воронкова [5] — 3. В опытах А. Е. Шейкина и В. А. Николаева [10], которые были поставлены на изолированных образцах, ползучесть при растяжении и сжатии оказалась практически одинаковой.

Как показывает приводимый неполный обзор опытных данных, C^+/C^- изменяется в довольно широких пределах. Эти данные никак нельзя считать противоречащими, потому что, как уже было показано выше, для одного и того же бетона C^+/C^- зависит от различных факторов. В опытах К. С. Карапетяна и Р. А. Котикяна [7] над тяжелым бетоном также было показано, что это отношение зависит от масштабного фактора и направления растягивающей и сжимающей нагрузок по отношению к слоям бетонирования. Кроме этого, впервые была установлена закономерная связь между C^+/C^- и возрастом бетона к моменту загружения, а также влажностью образца. При изолированных образцах отношение C^+/C^- гораздо больше, чем при неизолированных образцах, а с увеличением возраста бетона C^+/C^- уменьшается.

Та часть опытов, которая была поставлена в Институте строительства и архитектуры Словацкой Академии, была выполнена на конструкционных тяжелых и легких бетонах. Опыты были поставлены над двумя составами тяжелого и над двумя составами легкого бетона. Мелкий заполнитель для всех составов и крупный заполнитель для двух составов тяжелого бетона были приготовлены из естественного каменного материала. В качестве крупного заполнителя для легкого бетона был применен карамзит. Кроме бетонов, соотношение мер ползучести изучалось также для двух составов цементного камня. Прочность исследованных составов в 28-суточном возрасте была в пределах от 18 до 60 МПа.

Составы примененных видов смесей одно- и двухфазовых моделей приведены в табл. 1.

Соотношение ползучестей при растяжении и сжатии изучалось при хранении опытных образцов в следующих трех различных средах:

Среда А — хранение образцов после изготовления в течение 48 часов в среде при температуре (T) 20°C и относительной влажности (P) 100%, а затем при $T = 20°C$ и $P = 60\%$.

Среда В — хранение образцов с момента изготовления в среде при $T = 20°C$ и $P = 100\%$.

Среда С — хранение образцов в среде В, а до испытания высушивание их в течение 5 *сут* при $T = 105°C$.

Кроме вариации технологических факторов среды хранения, соотношение ползучести при растяжении и сжатии изучалось также в зависимости от возраста ($\tau = 7$, 28 и 60 *сут*) и уровня напряжения в диапазоне $0.3 \leqslant \sigma/R \leqslant 0.6$.

Прочность на сжатие определялась на кубиках с ребром 10 *см*, а ползучесть: при сжатии — на призмах размерами $10 \times 10 \times 40$ *см*, при растяжении — на больших восьмерках размерами $10 \times 10 \times 60$ *см*. Измерение длительных деформаций опытных образцов производилось переносным деформометром на базе 300 *мм*. В процессе длительных опытов температура среды колебалась на $\pm 0.5°C$, а относительная влажность — на $\pm 2\%$

Мгновенные деформации при растяжении и сжатии были замерены при относительном напряжении 0.3. На основании этих данных определялись деформации, вызванные единичной нагрузкой 1 *МПа*, а затем модули упруго-мгновенных деформаций.

Вторая часть исследований данной работы была выполнена в лаборатории ползучести и прочности Института механики АН АрмССР. Соотношение мер ползучести изучалось в зависимости от трех различных факторов: влажности среды, крупности заполнителя и возраста бетона к моменту загружения. При этом во всех случаях испытанию подвергались призмы и восьмерки как перпендикулярно слоям бетонирования (образцы, изготовленные в горизонтальных формах), так и параллельно слоям бетонирования (образцы, изготовленные в горизонтальных формах), то есть соотношение мер ползучести изучалось с учетом анизотропии бетона.

Опыты были поставлены над четырьмя составами бетонов, приготовленными на песке и щебне из вулканического шлака. Составы бетонов приведены в табл. 2. Для состава № 1 был применен пуццолановый портландцемент активностью 47,1 *МПа*, а для составов № 2—4 — портландцемент активностью 56 *МПа*.

В этом случае также испытанию подвергались призматические образцы и большие восьмерки сечением 10×10 *см*. Высота призм для кратковременных испытаний составляла 40 *см*, а для длительных испытаний — 60 *см*. Высота восьмерок также составляла 60 *см*. Образцы подвергались кратковременным и длительным испытаниям в возрасте $\tau = 28$ *сут*. Во всех слу-

Таблица 1

Состав смесей, объемный вес в свежем состоянии и прочность на сжатие

Вид конгломерата	№ состава	Состав в $кг/м^3$										γ в $кг/м^3$	R_{28} МПа
		Ц	В	В/Ц	естественный каменный заполнитель грануляции					керамзит грануляции			
					0/1	1/2	2/4	4/7	7/15	15/30	15/30		
Бетон на базе естественного каменного материала	I	500	160	0.32	143	125	269	179	412	662	—	2450	59.2
	II	300	135	0.45	161	141	302	202	463	764	—	2450	43.2
Бетон на базе керамзита	III	625	250	0.40	—	375	—	—	—	—	600	1850	30.5
	IV	250	212	0.85	—	812	—	—	—	—	620	1894	18.6
Цементный камень	V	1750	438	0.25	—	—	—	—	—	—	—	2188	57.9
	VI	1750	700	0.40	—	—	—	—	—	—	—	2450	35.9

чаях из каждого состава бетона одна половина образцов бетонировалась в вертикальных формах, а другая половина — в горизонтальных формах.

Таблица 2

Составы шлакобетонов

№№ составов бетона	Наибольшая крупность заполнителя в *мм*	Расход материалов на 1 $м^3$ бетона				$\frac{В}{Ц}$	Подвижность бетонной смеси	γ в $кг/м^3$
		цемент	песок	щебень	вода			
1	30	275	692	730	323	1.17	8 *сек*	2020
2	5	317	1261	—	396	1.25	—	1974
3	15	268	635	760	323	1.20	12 *сек*	1986
4	30	261	621	820	309	1.18	10 *сек*	2011

Опыты для изучения влияния влажности среды на соотношение мер ползучести бетона при растяжении и сжатии были поставлены над шлакобетоном состава № 1 (табл. 2). Испытывались как неизолированные, так и изолированные (с момента освобождения от форм) от влагопотери образцы. Одна половина неизолированных и все изолированные образцы хранились в обычных лабораторных условиях, где в процессе длительных опытов температура $T = 18 \pm 5^\circ C$, а относительная влажность $P = 60 \pm 11\%$. Вторая половина неизолированных образцов хранилась во влажных условиях, где $T = 20 \pm 4^\circ C$, а $P = 90 \pm 8\%$.

Исследование влияния крупности заполнителя на соотношение мер ползучести при растяжении и сжатии были проведены над шлакобетоном трех составов № 2; 3 и 4 (табл. 2). В процессе длительных опытов в помещении, где проводились опыты, $T = 18 \pm 4^\circ C$, а $P = 68 \pm 10\%$. Одновременно с этими опытами в тех же условиях над шлакобетоном состава № 4 были поставлены опыты для изучения соотношений мер ползучести при растяжении и сжатии в зависимости от возраста бетона к моменту загружения. С этой целью образцы были загружены на длительное растяжение и сжатие в возрастах 7, 14, 28 и 92 *сут*.

Во всех опытах над шлакобетонами напряжение в призмах составляло 3 *МПа*, а в восьмерках — 0.4 *МПа*. Деформации загруженных и усадочных образцов измерялись с помощью приборов, которые устанавливались на опытных образцах на весь период длительных опытов. Каждый прибор был снабжен двумя микронными индикаторами. Деформации измерялись на базе 100 *мм*.

Результаты опытов первой части исследований приведены в табл. 3. Следует отметить, что многие восьмерки в процессе длительного растяжения разрушались и поэтому приводятся только их упруго-мгновенные деформации и модули этих деформаций. В табл. 3 цифры, которые помечены одной звездочкой, по достоверности являются маловероятными, а цифры, помеченные двумя звездочками, относятся к тем образцам, которые находились под сильным влиянием процесса усадки.

Как видно из табл. 3, как в случае тяжелого бетона, так и в случае керамзитобетона независимо от состава бетона, среды хранения и возраста в большинстве случаев упруго-мгновенные деформации при растяжении и сжатии отличаются незначительно. Для цементного камня в условиях постоянного хранения при 100% относительной влажности эти деформации при растяжении и сжатии тождественны. Что касается среды с относительной влажностью 60% и при высушке при $T = 105°C$, то в этом случае структура цементного камня ослабляется в связи с образованием микротрещин под действием интенсивного процесса усадки. В результате этого мгновенные деформации при растяжении увеличились в 1.6—3.4 раза по сравнению с мгновенными деформациями при сжатии.

Таблица 3

Отношение единичных мгновенных и длительных деформаций, а также модулей упругости при растяжении и сжатии

Вид конгломерата	№ состава	Условия хранения	τ в сут	Упруго-мгновенные деформации $\cdot 10^5$ ε_0^+	ε_0^-	$\frac{\varepsilon_0^+}{\varepsilon_0^-}$	Модуль упруго-мгновенных деформаций в m/cm^2 E^+	E^-	$\frac{E^+}{E^-}$	Мера ползучести $\times 10^5$ при $t-\tau = 360$ сут C^+	C^-	$\frac{C^+}{C^-}$
Бетон на базе естественного заполнителя	I	A	7	2.5	2.6	0.96	400	385	1.04	7.1	5.8	1.22
			28	2.3	2.5	0.92	435	400	1.09	5.5	4.8	1.15
			60	2.0	2.1	0.95	500	476	1.05	4.1	3.0	1.37
		B	7	2.6	2.8	0.93	385	357	1.08	2.9	2.7	1.07
			60	2.0	2.2	0.91	500	455	1.10	—	1.0	—
		C	7	2.6	2.8	0.93	385	357	1.08	—	0.7	—
			60	1.8*	2.2	0.82*	556*	455	1.22	—	0.5	—
	II	A	7	2.5*	3.1	0.81*	400*	323	1.24	8.5	6.3	1.35
			60	2.2	2.6	0.85	455	385	1.18	—	4.1	—
Бетон на базе керамзита	III	A	7	5.3*	7.1	0.75*	189*	141	1.34	—	9.7	—
			28	5.8	5.8	1.00	172	172	1.00	10.4	6.5	1.60
			60	5.5	6.6	0.83	182	152	1.20	9.9	6.4	1.55
		B	7	7.5	6.7	1.12	133	149	0.89	9.3	6.6	1.41
			60	7.1	6.2	1.15	141	161	0.88	—	3.8	—
		C	7	10.0	10.0	1.00	100	100	1.00	9.5	4.2	2.26
			60	9.4	9.4	1.00	106	106	1.00	5.4	3.6	1.50
	IV	A	7	10.2	10.1	1.01	98	92	0.99	19.6	20.9	0.94
			60	6.2	5.7	1.09	161	175	0.92	12.9	9.2	1.40
Цементный камень	V	A	7	4.8	4.7	1.02	208	213	0.98	18.4	12.0	1.53
			28	14.8**	4.5	3.24**	68**	222	0.31**	31.1	9.7	5.27**
			60	14.7**	4.3	3.42**	68**	233	0.29**	25.5	6.7	3.81**
		B	7	4.7	4.6	1.02	213	217	0.98	8.2	7.3	1.12
			60	4.3	4.3	1.00	233	233	1.00	5.8	5.0	1.16
		C	7	11.2**	5.8	1.93**	89**	172	0.52**	—	2.1	—
			60	11.0**	7.0	1.57**	91**	143	0.64**	—	2.6	—
	VI	A	7	8.5	8.5	1.00	118	118	1.00	—	32.0	—
			60	18.9**	8.1	2.33**	53**	123	0.43	53.0**	12.8**	4.11**

Следует отметить, что среднее арифметическое значение всех $\varepsilon_0^+/\varepsilon_0^-$ составляет 0.98 при низком разбросе результатов (вариационный коэффициент 8.3%). При определении этой величины были исключены данные, обозначенные в табл. 3 одной и двумя звездочками. Определенное таким образом среднее арифметическое всех отношений E^+/E^- составляет 1.02.

В наших опытах в случае бетонов, предварительно высушенных при $T = 105^\circ C$ до постоянного веса, ползучесть при растяжении оказалась наименьшей. Эти результаты находятся в согласии с теорией Поуерса Т. С. [15, 16], но можно их объяснить также как результат повышения трения в коагуляционных стыках продуктов гидратации, о чем говорил З. Н. Цилосани [9] при истолковании механизма ползучести бетона как деформации в коагуляционных стыках продуктов гидратации или как скольжение гелеобразных частиц в цементном камне.

Рассматривая данные табл. 3 с точки зрения соотношений мер ползучести при растяжении и сжатии, следует обратить внимание на то, что в большинстве случаев мера ползучести как бетонов, так и цементного камня при растяжении больше, чем при сжатии.

В общем можно констатировать, что причиной большой меры ползучести при растяжении является отрицательное влияние возникающих и развивающихся микродеструкций в процессе длительного растяжения, которые при растяжении более чувствительны, чем при сжатии.

Как и мгновенные деформации, деформации ползучести также при определенных условиях находятся под сильным влиянием микротрещин, образованных усадочным процессом. Об этом ярко свидетельствуют опыты над цементным камнем, где для среды с относительной влажностью 60% мера ползучести при растяжении оказалась в 3.8—5.3 раза больше, чем при сжатии.

По данным табл. 3 трудно судить о влиянии возраста к моменту загружения на отношение C^+/C^-, так как часть восьмерок преждевременно разрушалась. С другой стороны, очевидно, что для установления закономерности влияния возраста на C^+/C^- необходимо поставить опыты при более широком изменении возраста к моменту загружения. Ниже будут приведены результаты таких опытов, поставленных над шлакобетоном, которые дают возможность более полно судить об этом.

Сравнение отношений C^+/C^- тяжелого бетона состава I и керамзитобетона состава III, которые хранились в одинаковой среде (А), позволяет отметить, что это отношение в случае керамзитобетона больше, чем в случае тяжелого бетона. Причем то же самое наблюдается и при хранении этих бетонов в среде В.

Рассмотрим теперь результаты опытов по исследованию влияния влажности среды, крупности заполнителя и возраста к моменту загружения на отношение C^+/C^-, поставленных на различных составах бетонов, приготовленных на песке и щебне из вулканического шлака.

Результаты опытов по исследованию влияния условий хранения на отношение C^+/C^- приведены в табл. 4.

Как видно из табл. 4, влажность среды, а следовательно, и влажность образца, оказывает существенное влияние на отношение C^+/C^-. С увеличением влажности среды мера ползучести бетона при растяжении и сжатии уменьшается, а отношение C^+/C^- увеличивается. Отношение C^+/C^- в большой мере зависит и от направления растягивающей и сжимающей нагрузок по отношению к слоям бетонирования. При испытании образцов перпендикулярно слоям K_1, гораздо больше, чем при испытании образцов параллельно слоям K_2. При этом коэффициент анизотропии бетона по отношению соотношений мер ползучести при растяжении и сжатии ($K=K_1/K_2$) с увеличением влажности среды увеличивается.

Таблица 4

Влияние условий хранения бетона на отношение C^+/C^-

Условия хранения образцов	$C^+\times10^5$, когда растягивающая нагрузка по отношению к слоям бетона направлена (при $t-\tau=300$ *сут*)		$C^-\times10^5$, когда сжимающая нагрузка по отношению к слоям бетона направлена (при $t-\tau=300$ *сут*)		C^+/C^-, когда нагрузка по отношению к слоям бетона направлена		$K=\frac{K_1}{K_2}$
	перпен.	паралл.	перпен.	паралл.	перпен. K_1	паралл. K_2	
Обычное без изоляции	9.15	5.25	6.80	4.57	1.35	1.15	1.17
Влажное без изоляции	4.15	3.00	1.73	1.77	2.40	1.70	1.41
Обычное с изоляцией	1.5	2.25	0.57	1.22	2.63	1.84	1.43

Как уже указывалось, исследования влияния крупности заполнителя на отношение C^+/C^- были проведены над тремя составами шлакобетона (составы №№ 2, 3 и 4) с наибольшей крупностью заполнителя соответственно до 5, 15 и 30 *мм* (табл. 2). Результаты этих опытов приведены в табл. 5.

Таблица 5

Влияние наибольшей крупности заполнителя на отношение C^+/C^-

№ состава	Наибольшая крупность заполнителя в *мм*	$C^+\times10^5$, когда растягивающая нагрузка по отношению к слоям бетона направлена (при $t-\tau=180$ *сут*)		$C^-\times10^5$, когда сжимающая нагрузка по отношению к слоям бетона направлена (при $t-\tau=180$ *сут*)		C^+/C^-, когда нагрузка по отношению к слоям бетона направлена		$K=\frac{K_1}{K_2}$
		перпен.	паралл.	перпен.	паралл.	перпен. K_1	паралл. K_2	
2	5	4.48	3.95	5.37	4.40	0.83	0.89	0.93
3	15	2.72	2.05	2.90	2.00	0.94	1.02	0.92
4	30	2.48	1.62	2.83	2.33	0.88	0.70	1.26

По данным табл. 5, независимо от направления растягивающей и сжимающей нагрузок по отношению к слоям бетонирования, с увеличением крупности заполнителя мера ползучести бетона как при сжатии, так и при растяжении уменьшается. Что касается отношения C^+/C^-, то оно почти во всех случаях меньше единицы, то есть при сжатии мера ползучести больше, чем при растяжении.

Как видно из табл. 5, с увеличением крупности заполнителя до 15 *мм* отношение C^+/C^- несколько увеличивается, а с дальнейшим увеличением крупности заполнителя до 30 *мм* — уменьшается. Причем эти изменения в случае испытания образцов параллельно слоям более чувствительны, чем в случае испытания образцов перпендикулярно слоям. Коэффициент K, который характеризует степень анизотропии бетона по C^+/C^- при крупности заполнителя 30 *мм* уже больше единицы.

В табл. 6 приведены результаты опытов по исследованию влияния возраста бетона к моменту загружения на отношение C^+/C^-, поставленных над бетоном состава 4.

Таблица 6

Влияние возраста бетона к моменту загружения на отношение C^+/C^-

Возраст бетона к моменту загружения в сутках	$C^+ \times 10^5$, когда растягивающая нагрузка по отношению к слоям бетона направлена (при $t-\tau=140$ *сут*)		$C^- \times 10^5$, когда сжимающая нагрузка по отношению к слоям бетона направлена (при $t-\tau=140$ *сут*)		C^+/C^-, когда нагрузка по отношению к слоям бетона направлена		$K=\frac{K_1}{K_2}$
	перпен.	паралл.	перпен.	паралл.	перпен. K_1	паралл. K_2	
7	3.05	2.55	3.67	3.60	0.83	0.71	1.17
14	2.80	1.78	3.40	3.10	0.82	0.57	1.44
28	2.42	1.60	2.80	2.27	0.86	0.70	1.23
92	0.82	0.55	1.00	0.73	0.82	0.75	1.09

По данным табл. 6, независимо от возраста к моменту загружения и направления растягивающей и сжимающей нагрузок по отношению к слоям бетонирования, отношение C^+/C^- всегда меньше единицы, причем при испытании образцов перпендикулярно слоям это отношение (K_1) практически не зависит от возраста, а при испытании образцов параллельно слоям K_2 сперва с увеличением возраста (до 14 *сут*) уменьшается, а затем возрастает. Коэффициент K также в большой мере зависит от возраста бетона к моменту длительного загружения τ. С увеличением τ до 14 *сут* K увеличивается, а с дальнейшим увеличением τ — уменьшается. При $\tau = 92$ *сут* K_1 всего на 9% больше K_2.

Таким образом, проведенные исследования над шлакобетоном показывают, что отношение меры ползучести бетона при растяжении к мере ползучести при сжатии существенно зависит от влажности среды, крупности заполнителя, возраста бетона и направления сжимающей и растягивающей нагрузок по отношению к слоям бетонирования.

Заключение

Соотношение ползучести бетона при растяжении и сжатии зависит от многих факторов: возраста бетона к моменту загружения, температуры и влажности среды хранения, крупности и рода заполнителя, состава бетона, направления растягивающей и сжимающей нагрузок по отношению к слоям бетонирования и др. По своей величине отношение меры ползучести при растяжении к мере ползучести при сжатии может быть меньше, равно и намного больше единицы. Большей ползучести при растяжении способствуют те микродеструкции, которые образуются в структуре бетона длительной растягивающей нагрузкой и процессом усадки.

Повышение растяжимости бетона за счет ползучести является положительным фактором, так как это может привести к существенной релаксации внутренних напряжений в бетонных и железобетонных конструкциях, вызванных набуханием и усадкой, а также изменением температуры. Поэтому учет фактической ползучести бетона при растяжении имеет весьма важное значение при оценке действительного длительного напряженного состояния конструкции и ее трещиностойкости.

Равенство мер ползучести при растяжении и сжатии, положенное в основу современных теорий ползучести бетона, экспериментально не подтверждается. В большинстве случаев $C^+/C^- \neq 1$.

Институт строительства и архитектуры
Словацкой АН (ЧССР)
Институт механики АН АрмССР

Поступила 28 IX 1978

Ֆ. ԿՐՈՒՄԼ, Ռ. Ա. ԿՈՏԻԿՅԱՆ, Կ. Ս. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂՔԻ ՀԱՐԱԲԵՐԱԿՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ ՁԳՄԱՆ ԵՎ ՍԵՂՄՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ

Ամփոփում

Աշխատանքը նվիրված է ձգման և սեղմման ժամանակ բետոնի սողքի չափերի հարաբերության հետազոտությանը, կախված մի շարք գործոններից։ Հետազոտությունները ցույց են տվել, որ C^+/C^--ը կարող է լինել փոքր, հավասար և մի քանի անգամ մեծ մեկից։ Մի շարք գործոններից կախված C^+/C^--ի համար ստացված են որոշակի օրինաչափություններ։ Ձգման մեծ սողքը արդյունք է այն միկրոդեստրուկցիաների, որոնք առաջանում են բետոնի ստրուկտուրայում երկարատև բեռի ազդեցությունից և կծկումից։ Վերջինս դրական երևույթ է, քանի որ կարող է բերել երկաթբետոնյա կոնստրուկցիաների շահագործման ժամանակ բետոնի կծկումից կամ ուռչումից և ջերմային փոփոխություններից առաջացող ներքին լարումների էական ռելաքսացիայի։ Այդ պատճառով բետոնի ձգման սողքի փաստացի հաշվարկը շատ կարևոր է կոնստրուկցիաների և նրանցում ճաքակայունության ժամանակ իրական լարվածային վիճակի գնահատման համար։

Հետազոտությունները ցույց են տվել, որ ձգման և սեղմման սողքի չափերի հավասարության հիպոթեզան, որն ընկած է սողքի բոլոր տեսությունների հիմքերում, փորձով չի հաստատվում: Մեծ մասամբ $C^+/C^- \neq 1$:

ON THE RELATION OF CREEP IN CONCRETE UNDER TENSION AND COMPRESSION

F. KRUML, R. A. KOTIKIAN, K. S. KARAPETIAN

Summary

The relation of creep under tension and compression depending on certain factors is considered. The results obtained show that the relation C^+/C^- may be less, equal and well over unity. Depending on certain factors some actual regularities are found for the C^+/C^- relation. It is found that the hypothesis on the equality of the dimension of creep under tension and compression, forming the basis of the present theories on creep of concrete, cannot be supported experimentally. In most cases C^+/C^- is not equal to unity.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1952.
2. *Александровский С. В., Багрий В. Я.* Ползучесть бетона при периодических воздействиях. Стройиздат, 1970.
3. *Бликов В. В.* Исследование ползучести бетона при повторных длительно действующих нагрузках. Изв. ВНИИГ, 1958, т. 60.
4. *Васильев П. И.* Некоторые вопросы пластических деформаций бетона. Изв. ВНИИГ, 1953, т. 49.
5. *Воронков Н. Н.* Научно-техническая конференция по бетону и железобетону. Тезисы докладов и сообщений. Госстройиздат УССР, 1956.
6. *Карапетян К. С.* Влияние анизотропии на ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от масштабного фактора. Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, 1964, т. 17, № 4.
7. *Карапетян К. С., Котикян Р. А.* Исследование отношения мер ползучести бетона при растяжении, сжатии и кручении. Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 5.
8. *Саталкин А. В.* Деформативная способность бетона. Сб. ЛИИЖТ, вып. 46, Трансжелдориздат, 1956.
9. *Цилосани З. Н.* Усадка и ползучесть бетона. Изд. АН ГССР, Тбилиси, 1963.
10. *Шейкин А. Е., Николаев В. Л.* Об упруго-пластических свойствах бетона при растяжении. «Бетон и железобетон», 1959, № 9.

11. *Davis R. E., Davis H. E., Brown E. H.* Plastic Flow of Concrete under Sustained Stress. Proc. ASTM, 1934, vol. 34.
12. *Glanville W. H.* The Creep and Flow of Concrete under Load. Building Res. Studied in Reinforced Concrete, part III, Technic Paper, 1930, n. 12
13. *Glanville W. H., Thomas F. G.* Further Investigations on the Creep of Flow of Concrete under Load. Studied in Reinforced Concrete, Part IV, Building Research Technical Paper, No. 21, London, 1939.
14. *Mamillan M.* A Study of the Creep of Concrete. Bulletin RILEM Nouvelle serie, 1959, No. 3.
15. *Powers T. C.* Mechanismus of Shrinkage und reversible creep of hardened cement paste. Proc. of international Conference. The structure of concrete. London, 1963.
16. *Powers T. C.* Some observations on the interpretation of creep data. Rilem bull. 33 1966.
17. *Troxel G. E., Raphael J. M. and Davis R. E.* Long time creep and shrinkage tests of plain and reinforced concrete. ASTM. Proc., 1958.