ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1979

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 1, 1979 Механика

Ф. С. ТОРОСЯН

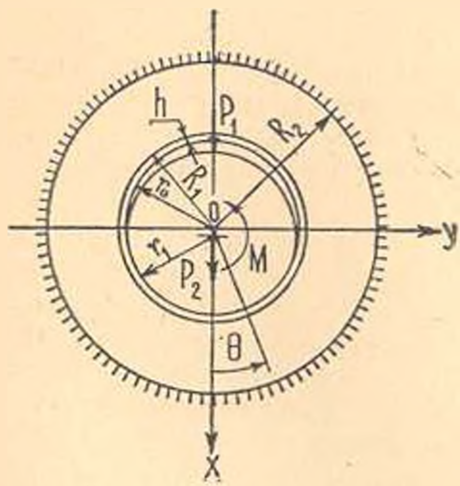
О ВНУТРЕННЕМ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ КРУГОВОГО ДИСКА И КРУГОВОГО КОЛЬЦА, ПОДКРЕПЛЕННОГО НА ОБВОДЕ ОТВЕРСТИЯ ТОНКИМ КОЛЬЦЕВЫМ ПОКРЫТИЕМ

Контактные задачи о взаимодействии кругового диска и бесконечной пластины с круговым отверстием близких радиусов рассматривались в работах [1—9]. В ряде практически важных случаев представляет значительный интерес также получение решений этих же задач, когда вместо бесконечной пластины с круговым отверстием рассматривается круговое кольцо. В настоящей работе исследуется контактная задача о вдавливании кругового упругого диска на внутренний контур кругового упругого кольца, когда этот контур усилен приваренным или приклеенным к нему тонким упругим кольцевым покрытием. Предполагается, что внешний контур кругового кольца жестко закреплен. В качестве физической модели усиливающего упругого покрытия принимается модель напряженного состояния тонких цилиндрических оболочек, основанной на известных гипотезах Кирхгофа-Лява [10]. Решение исследуемой задачи сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода. На основе известного аппарата ортогональных многочленов Якоби получено эффективное решение разрешающего уравнения. Рассмотрены частные случаи. Получены числовые результаты.

§ 1. *Постановка задачи и вывод разрешающего уравнения.* Пусть упругое круговое кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями радиусов R_1 и R_2 $(R_1 < R_2)$, жестко закреплено вдоль своей внешней границы, а вдоль внутренней границы усилено приваренным к нему упругим кольцевым покрытием малой толщины h $(h/R_1 \leqslant 1/20)$. Пусть далее внутрь этого кольца вставлен упругий диск радиуса r_1, который прижимается к обводу кольца силами P_1, P_2 и скручивается моментом M (фиг. 1). Будем учитывать также силу тяжести диска. При этом разность $\varepsilon = r_0 - r_1$ $(r_0 = R_1 - h)$ предполагается величины порядка упругих перемещений. Кроме того, считается, что эти тела находятся в условиях плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния. Задача заключается в определении законов распределения контактных напряжений под диском и размеров области контакта.

Введем следующие обозначения. Обозначим через $q_j(\vartheta)$, $\tau_j(\vartheta)$ $(j = 1, 2)$ соответственно нормальные и тангенциальные контактные напряжения, действующие под диском $(j = 1)$ и на линии соединения усиливающего покрытия с основанием $(j = 2)$. Далее, через $v_r^{(j)}$, $v_\vartheta^{(j)}$

($j = 1, 2$) обозначим радиальные и тангенциальные компоненты упругих перемещений граничных точек диска ($j = 1$) и отверстия радиуса R_1 кольца ($j = 2$). Участком контакта пусть будет $[-\theta_1, \theta_2]$.



Фиг. 1.

Приняв те же физические предположения [10] относительно усиливающего покрытия, что и в [9], и предполагая, что во всей зоне контакта действуют только силы сцепления, придем к тем же условиям, имеющим место в области контакта, что и в [9]

$$\begin{aligned} v_r^{(1)} + v_r^{(2)} &= \delta \cos\theta - r_1 \psi \sin\theta - \varepsilon(1 - \cos\theta) \\ v_\theta^{(1)} - v_\theta^{(2)} &= \delta \sin\theta - 2 r_1 \psi \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \qquad (-\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) \qquad (1.1)$$

где δ — жесткое смещение диска в направлении оси ox, ψ — угол поворота диска относительно первоначальной точки касания.

Далее, пользуясь известным комплексным представлением решения плоской задачи теории упругости [11], легко получить, что компоненты перемещений $v_r^{(j)}$, $v_\theta^{(j)}$ ($j = 1, 2$) выражаются формулами

$$v_r^{(1)} = \frac{(\varkappa_1 + 1) r_1}{4\pi\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} q_1(\xi) \ln 2 \left| \sin \frac{\theta - \xi}{2} \right| d\xi +$$

$$+ \frac{(\varkappa_1 - 1) r_1}{8\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \tau_1(\xi)\, \text{sign}(\theta - \xi)\, d\xi - \int_{-\theta_1}^{\theta_2} q_1(\xi) K^{(1)}(\theta - \xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \tau_1(\xi) K^{(2)}(\theta - \xi)\, d\xi + \frac{r_1}{2\pi\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} q_1(\xi) \cos(\theta - \xi)\, d\xi + f_1(\theta)$$

$$(-\pi < \theta < \pi)$$

$$v_\theta^{(1)} = \frac{(\varkappa_1+1)\, r_1}{4\pi\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \tau_1(\xi) \ln 2\left|\sin\frac{\theta-\xi}{2}\right| d\xi -$$

$$- \frac{(\varkappa_1-1)\, r_1}{8\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} q_1(\xi)\, \mathrm{sign}\,(\theta-\xi)\, d\xi - \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \tau_1(\xi)\, K^{(1)}(\theta-\xi)\, d\xi -$$

$$- \int_{-\theta_1}^{\theta_1} q_1(\xi)\, K^{(2)}(\theta-\xi)\, d\xi - \frac{r_1}{2\pi\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \tau_1(\xi) \cos(\theta-\xi)\, d\xi + f_2(\theta)$$

$$2\mu_2 (v_r^{(2)} + i v_\theta^{(2)}) = a_1 R_1 B_0 + a_2 R_1 \overline{B}_1 e^{-i\theta} + a_4 R_1 (B_{-1} e^{-i\theta} + B_1 e^{i\theta}) -$$

$$- (1 - a_2) R_1 \overline{B}_0 - (1 - 2a_5) R_1 \frac{\overline{B}_{-1}}{2} e^{i\theta} + R_1 \sum_{k=2}^{\infty} C_k^{(2)} (B_{-k} e^{-ik\theta} + B_k e^{ik\theta}) -$$

$$- \varkappa_2 R_1 \sum_{k=2}^{\infty} (1 - C_k^{(1)}) \frac{\overline{B}_k}{k-1} e^{-ik\theta} - R_1 \sum_{k=2}^{\infty} (1 - C_k^{(3)}) \frac{\overline{B}_{-k}}{k+1} e^{ik\theta}$$

где

$$B_k = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [q_2(\xi) - i\tau_2(\xi)]\, e^{-ik\xi}\, d\xi, \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$$

При этом имеют место условия равновесия диска

$$r_1 \int_{-\theta_1}^{\theta_1} [q_1(\xi) - i\tau_1(\xi)]\, e^{-i\xi}\, d\xi = P_1 + P_2 + G_1, \qquad r_1^2 \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \tau_1(\xi)\, d\xi = M \tag{1.2}$$

Здесь $\varkappa_j = 3 - 4\nu_j$ $(j = 1, 2)$ — при плоской деформации и $\varkappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$ — при обобщенном плоском напряженном состоянии, $\mu_j = E_j/2(1 + \nu_j)$, а E_j и ν_j — соответственно модули упругости и коэффициенты Пуассона для материалов диска $(j = 1)$ и кольца $(j = 2)$. Кроме того, введены обозначения

$$K^{(1)}(\theta - \xi) = \frac{(\varkappa_1 + 1)\, r_1}{4\pi\mu_1} R_{11}(\theta - \xi) + \frac{(\varkappa_1 - 1)\, r_1}{8\pi\mu_1} R_{12}(\theta - \xi)$$

$$K^{(2)}(\theta - \xi) = \frac{(\varkappa_1 + 1)\, r_1}{4\pi\mu_1} R_{21}(\theta - \xi) +$$

$$+ \frac{(\varkappa_1 - 1)\, r_1}{8\pi\mu_1} R_{22}(\theta - \xi) - \frac{(\varkappa_1 - 1)\, r_1}{8\pi\mu_1} (\theta - \xi)$$

где

$$R_{11}(\theta-\xi)=2\sin^2\frac{\theta-\xi}{2}\ln 2\left|\sin\frac{\theta-\xi}{2}\right|$$

$$R_{12}(\theta-\xi)=\sin(\theta-\xi)(\pi-|\theta-\xi|)\operatorname{sign}(\theta-\xi)$$

$$R_{21}(\theta-\xi)=\sin(\theta-\xi)\ln 2\left|\sin\frac{\theta-\xi}{2}\right|$$

$$R_{22}(\theta-\xi)=-2\sin^2\frac{\theta-\xi}{2}(\pi-|\theta-\xi|)\operatorname{sign}(\theta-\xi)$$

Далее,

$$f_1(\theta)=\frac{(\varkappa_1+1)r_1}{8\pi\mu_1}\int\limits_{-\theta_1}^{\theta_1}q_1(\xi)\,d\xi+\frac{(\varkappa_1+1)P_1}{8\pi\mu_1}-\frac{P_1}{2\pi\mu_1}\cos\theta-$$

$$-\frac{\varkappa_1+1}{4\pi\mu_1}P_1\cos\theta\ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)-\frac{(\varkappa_1-1)P_1}{8\pi\mu_1}\theta\sin\theta-$$

$$-\frac{P_2}{2\pi\mu_1(1+\varkappa_1)}\cos\theta+\frac{G_1}{16\pi\mu_1}(\varkappa_1+\varkappa_1')\cos\theta-\frac{3G_1}{4\pi\mu_1}\cos\theta$$

$$f_2(\theta)=\frac{\varkappa_1+1}{4\pi\mu_1 r_1}M+\frac{\varkappa_1+1}{4\pi\mu_1}P_1\sin\theta\ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)-\frac{(\varkappa_1-1)P_1}{8\pi\mu_1}\theta\cos\theta+$$

$$+\frac{P_2}{2\pi\mu_1(1+\varkappa_1)}\sin\theta+\frac{G_1}{16\pi\mu_1}(\varkappa_1+\varkappa_1')\sin\theta-\frac{G_1}{4\pi\mu_1}\sin\theta$$

$$(-\pi<\theta\leqslant\pi)$$

$$G_1=\pi r_1^2 g\rho_1,\qquad a_1=\frac{(\varkappa_2+1)(r-1)}{(\varkappa_2 r+1)^2-(r-1)^2},\qquad a_2=\frac{(1+\varkappa_2)(\varkappa_2 r+1)}{(\varkappa_2 r+1)^2-(r-1)^2}$$

$$a_3=\frac{2(r-1)^2}{(1+\varkappa_2)(\varkappa_2 r^2+1)}-\frac{\varkappa_2}{1+\varkappa_2}\ln r,\quad a_4=\frac{r-1}{\varkappa_2 r^2+1},\quad a_5=\frac{1+\varkappa_2}{2(\varkappa_2 r^2+1)}$$

$$C_k^{(1)}=\frac{1+\varkappa_2}{\varkappa_2}\frac{D_k^*}{D_k},\qquad C_k^{(2)}=(1+\varkappa_2)(r-1)/D_k,\qquad C_k^{(3)}=(1+\varkappa_2)\frac{D_k'}{D_k}$$

где

$$r=(R_2/R_1)^2,\quad D_k^*=(k^2-1)(r-1)^2+\varkappa_2 r^{-k-1}+\varkappa_2^2 r^2$$
$$D_k'=1+\varkappa_2 r^{-k+1}$$

$$D_k=(k^2-1)(r-1)^2+\varkappa_2 r^{k+1}+\varkappa_2 r^{-k+1}+\varkappa_2^2 r^2+1,\quad (k=2,3,\ldots)$$

g — ускорение силы тяжести, ρ_1 — плотность материала диска, $\varkappa_1=4\nu_1-1$ — при плоской деформации и $\varkappa_1'=(3\nu_1-1)/(\nu_1+1)$ — при обобщенном плоском напряженном состоянии.

Функции $K^{(j)}(\theta - \xi)\,(j = 1, 2)$ — непрерывные в области $-\theta_1 \leqslant \theta$, $\xi \leqslant \theta_2$ и имеют квадратично суммируемые частные производные первого порядка.

Далее, для исключения $q_2(\theta)$ и $\tau_2(\theta)$ из системы (1.1), содержащей неявно $q_2(\theta)$ и $\tau_2(\theta)$, используем уравнения равновесия усиливающего покрытия (оболочки) в перемещениях, приведенные в [9]. Выполняя те же операции, что и в [9], получим соотношения

$$\operatorname{Re} B_0 = \operatorname{Re} A_0 [1 + D' (1 - a_1 - a_2)], \quad \operatorname{Im} B_0 = \operatorname{Im} A_0$$

$$B_1 = A_1, \quad B_{-1} = [A_{-1} + 2 (D + D') a_4 \overline{A}_1] / [1 + (D + D')(1 - 2a_3)]$$

$$B_k = \frac{d_k^{(1)}}{d_k} A_k + \frac{d_k^{(2)}}{d_k} \overline{A}_{-k}, \qquad B_{-k} = \frac{d_k^{(3)}}{d_k} \overline{A}_k + \frac{d_k^{(4)}}{d_k} A_{-k}, \quad (k = 2, 3, \ldots)$$

где

$$A_k = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} [q_1(\xi) - i\tau_1(\xi)] e^{-ik\xi} d\xi, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$D = E_0 h^3 / 24 R_1^3 \mu_2$, $D' = (2\mu_0 + \lambda_0) h / 2 R_1 \mu_2$, $2\mu_0 + \lambda_0 = E_0 (1 - \nu_0) / (1 + \nu_0)(1 - 2\nu_0)$ — при плоской деформации и $2\mu_0 + \lambda_0 = E_0 / (1 - \nu_0^2)$ — при обобщенном плоском напряженном состоянии, E_0, ν_0 — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона для материала усиливающего покрытия,

$$d_k^{(1)} = -DC_k^{(2)} k^2 (k^2 - 1) + D (1 - C_k^{(3)}) k^2 (k + 1) +$$
$$+ D' C_k^{(2)} (k^2 - 1) + D' (1 - C_k^{(3)}) (k + 1) + 2$$

$$d_k^{(2)} = DC_k^{(2)} k^2 (k - 1)^2 - D (1 - C_k^{(3)}) k^2 (k - 1) +$$
$$+ D' C_k^{(2)} (k - 1)^2 + D' (1 - C_k^{(3)}) (k - 1)$$

$$d_k^{(3)} = DC_k^{(2)} k^2 (k + 1)^2 - \varkappa_2 D (1 - C_k^{(1)}) k^2 (k + 1) +$$
$$+ D' C_k^{(2)} (k + 1)^2 + \varkappa_2 D' (1 - C_k^{(1)}) (k + 1)$$

$$d_k^{(4)} = -DC_k^{(2)} k^2 (k^2 - 1) + \varkappa_2 D (1 - C_k^{(1)}) k^2 (k - 1) +$$
$$+ D' C_k^{(2)} (k^2 - 1) + \varkappa_2 D' (1 - C_k^{(1)}) (k - 1) + 2$$

$$d_k = 2\varkappa_2 DD' (1 - C_k^{(1)}) (1 - C_k^{(3)}) k^2 (k^2 - 1) -$$
$$- 2DD' (C_k^{(2)})^2 k^2 (k^2 - 1)^2 + \varkappa_2 D (1 - C_k^{(1)}) k^2 (k - 1) +$$
$$+ D (1 - C_k^{(3)}) k^2 (k + 1) - 2DC_k^{(2)} k^2 (k^2 - 1) +$$
$$+ \varkappa_2 D' (1 - C_k^{(1)}) (k - 1) + D' (1 - C_k^{(3)}) (k + 1) +$$
$$+ 2D' C_k^{(2)} (k^2 - 1) + 2 \neq 0$$

В конечном итоге придем к интегральному уравнению [9] (при $\mu_1 < \infty$)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[\ln\frac{1}{2\left|\sin\frac{t-s}{2}\right|}-i\frac{\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu^{(j)}\,\mathrm{sign}\,(t-s)\right]Z_0(s)\,ds+$$

$$+2q^{(j)}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\frac{1}{2\left|\sin\frac{t-s}{2}\right|}\,\mathrm{Re}\,[Z_0(s)]\,ds+$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}K_1^{(j)}(t-s)\,Z_0(s)\,ds+\int_{-\pi}^{\pi}K_2^{(j)}(t-s)\,\overline{Z_0(s)}\,ds=f_0^{(j)}(t) \qquad (1.3)$$

$$(j=1,\ 2,\ 3),\quad (-\pi\leqslant t,\ s\leqslant\pi)$$

где индекс $j=1$ относится к общему случаю ($D\neq 0$, $h\neq 0$), $j=2$ относится к случаю, когда усиливающее покрытие настолько гибкое, что пренебрегается его изгибной жесткостью ($D=0$, $h\neq 0$) а $j=3$, когда на обводе отверстия кольца отсутствует усиливающее покрытие ($D=0$, $h=0$).

Новые переменные t, s, входящие в (1.3), связаны со старыми соотношениями

$$t=\alpha+\beta,\quad s=\alpha-\beta,\quad \alpha=(\theta_1+\theta_2)/2,\quad \beta=(\theta_1-\theta_2)/2$$

В (1.3) введены также обозначения

$$q^{(1)}=q^{(3)}=0,\ q^{(2)}=2g_0\varkappa_2/(\varkappa_2+1),\quad \mathrm{th}\,\pi\mu^{(1)}=\mathrm{th}\,\pi\mu^{(2)}=-(\varkappa_1-1)/(\varkappa_1+1)$$

$$\mathrm{th}\,\pi\mu^{(3)}=(\varkappa_2-1)[(\varkappa_1-1)R_1\mu_2/(\varkappa_1-1)r_1\mu_1-1]/[1+(\varkappa_2+1)g_0](\varkappa_1+1)=\lambda$$

$$Z_0(t)=p_0(t)+i\tau_0(t)-R_1[q_1(t-\beta)+i\tau_1(t-\beta)]/4\pi\mu_2\varepsilon$$

$$K_1^{(j)}(t-s)=4\pi\mu_1K^{(1)}(t-s)/(\varkappa_1+1)\,r_1+g_0\sum_{k=2}^{\infty}a_k^{(1j)}\cos k(t-s)+$$

$$+2a_{13}^{(j)}g_0\cos(t-s)+q^{(j)}R_{11}(t-s)-\frac{1}{2}q^{(j)}\cos(t-s)+$$

$$+i\left[4\pi\mu_1K^{(2)}(t-s)/(\varkappa_1+1)\,r_1+g_0\sum_{k=2}^{\infty}a_k^{(2j)}\sin k(t-s)+q^{(j)}R_{21}(t-s)\right]$$

$$(j=1,\ 2)$$

$$K_2^{(j)}(t-s)=g_0\sum_{k=2}^{\infty}a_k^{(3j)}\cos k(t-s)-[2(\varkappa_1+1)+2a_{14}^{(j)}g_0]\cos(t-s)+$$

$$+q^{(j)}R_{11}(t-s)+i\left[g_0\sum_{k=2}^{\infty}a_k^{(4j)}\sin k(t-s)+q^{(j)}R_{12}(t-s)\right]\cdot\quad (j=1,\ 2)$$

$$K_1^{(3)}(t-s) = R_{11}(t-s) - \frac{\lambda}{2} R_{12}(t-s) -$$

$$- g_1 \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\varkappa_2 C_k^{(1)}}{k-1} + \frac{C_k^{(3)}}{k+1} \right) \cos k(t-s) - 2a_5 g_1 \cos(t-s) +$$

$$+ i \left[R_{21}(t-s) - \frac{\lambda}{2} R_{22}(t-s) + \frac{\lambda}{2}(t-s) + \right.$$

$$\left. + g_1 \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\varkappa_2 C_k^{(1)}}{k-1} - \frac{C_k^{(3)}}{k+1} \right) \sin k(t-s) \right]$$

$$K_2^{(3)}(t-s) = -2g_1 \sum_{k=2}^{\infty} C_k^{(2)} \cos k(t-s) -$$

$$- [2(\varkappa_1 + 1) g_0 + 2a_4] g_1 \cos(t-s)$$

Здесь

$$a_{13}^{(1)} = (1/2 - a_5)/[1 + (D + D')(1 - 2a_5)]$$

$$a_{14}^{(1)} = a_4/[1 + (D + D')(1 - 2a_5)], \quad a_{13}^{(2)} = a_{13}^{(1)}\big|_{D=0}, \quad a_{14}^{(2)} = a_{14}^{(1)}\big|_{D=0}$$

$$g_0 = R_1 \nu_2 / r_1 \nu_1 (1 + \varkappa_1), \quad g_1 = g_0/[1 + (1 + \varkappa_2) g_0]$$

$$a_k^{(11)} = -C_k^{(2)} \frac{d_k^{(2)} + d_k^{(3)}}{d_k} + (1 - C_k^{(1)}) \frac{\varkappa_2 d_k^{(1)}}{(k-1) d_k} + (1 - C_k^{(3)}) \frac{d_k^{(4)}}{(k+1) d_k}$$

$$a_k^{(21)} = -C_k^{(2)} \frac{d_k^{(2)} - d_k^{(3)}}{d_k} - (1 - C_k^{(1)}) \frac{\varkappa_2 d_k^{(1)}}{(k-1) d_k} + (1 - C_k^{(3)}) \frac{d_k^{(4)}}{(k+1) d_k}$$

$$a_k^{(31)} = -C_k^{(2)} \frac{d_k^{(1)} + d_k^{(4)}}{d_k} + (1 - C_k^{(1)}) \frac{\varkappa_2 d_k^{(2)}}{(k-1) d_k} + (1 - C_k^{(3)}) \frac{d_k^{(3)}}{(k+1) d_k}$$

$$a_k^{(41)} = -C_k^{(2)} \frac{d_k^{(1)} - d_k^{(4)}}{d_k} - (1 - C_k^{(1)}) \frac{\varkappa_2 d_k^{(2)}}{(k-1) d_k} + (1 - C_k^{(3)}) \frac{d_k^{(3)}}{(k+1) d_k}$$

$$a_k^{(12)} = a_k^{(11)}\big|_{D=0} + \left[\frac{d_k^{(4)*} - d_k^{(4)}}{(k+1) d_k} + \frac{\varkappa_2 (d_k^{(1)*} - d_k^{(1)})}{(k-1) d_k} \right]\Bigg|_{D=0}$$

$$a_k^{(22)} = a_k^{(21)}\big|_{D=0} + \left[\frac{d_k^{(4)*} - d_k^{(4)}}{(k+1) d_k} - \frac{\varkappa_2 (d_k^{(1)*} - d_k^{(1)})}{(k-1) d_k} \right]\Bigg|_{D=0}$$

$$a_k^{(32)} = a_k^{(31)}\big|_{D=0} + \left[\frac{d_k^{(3)*} - d_k^{(3)}}{(k+1) d_k} - \frac{\varkappa_2 (d_k^{(2)*} + d_k^{(2)})}{(k-1) d_k} \right]\Bigg|_{D=0}$$

$$a_k^{(42)} = a_k^{(41)}\big|_{D=0} + \left[\frac{d_k^{(3)*} - d_k^{(3)}}{(k+1) d_k} + \frac{\varkappa_2 (d_k^{(2)*} + d_k^{(2)})}{(k-1) d_k} \right]\Bigg|_{D=0}$$

где

$$d_k^{(1)*} = [2\varkappa_2 (D' + 1) + \varkappa_2 D' C_k^{(1)} (k-1) + (\varkappa_2 - 1) D' C_k^{(2)} (k^2 - 1) -$$
$$- \varkappa_2 D' C_k^{(3)} (k+1)]/(\varkappa_2 + 1)$$
$$d_k^{(2)*} = [2 (D' + 1) - \varkappa_2 D' C_k^{(1)} (k-1) - (\varkappa_2 + 1) D' C_k^{(2)} (k-1)^2 +$$
$$+ \varkappa_2 D' C_k^{(3)} (k-1) - 2D' C_k^{(3)}]/(\varkappa_2 + 1)$$
$$d_k^{(3)*} = [2\varkappa_2 (\varkappa_2 D' - 1) - \varkappa_2 D' C_k^{(1)} (k+1) - 2\varkappa_2^2 D' C_k^{(1)} +$$
$$+ (\varkappa_2 + 1) D' C_k^{(2)} (k+1)^2 - 2\varkappa_2 D' C_k^{(2)} (k^2 - 1) + \varkappa_2 D' C_k^{(3)} (k+1)]/(\varkappa_2 + 1)$$
$$d_k^{(4)*} = [-\varkappa_2 D' + 2 - \varkappa_2 D' C_k^{(1)} (k-1) - (\varkappa_2 - 1) D' C_k^{(2)} (k^2 - 1) +$$
$$+ \varkappa_2 D' C_k^{(3)} (k-1)]/(\varkappa_2 + 1)$$

Функции $f_0^{(j)}(t)$ $(j = 1, 2, 3)$ имеют вид

$$f_0^{(j)}(t) = f_0^{(1j)}(t) + i f_0^{(2j)}(t) \tag{1.4}$$

При этом

$$f_0^{(1j)}(t) = P_{10} \left\{ 1/2 \left[a_{12}^{(j)} g_0 - 2/(1 + \varkappa_1) - \ln\left(2\cos\frac{t-\beta}{2}\right) \right] \cos(t-\beta) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\frac{\varkappa_1 - 1}{\varkappa_1 + 1}(t-\beta)\sin(t-\beta) \right\} + P_{20}[a_{12}^{(j)} g_0 - 2/(1+\varkappa_1)^2]\cos(t-\beta) +$$
$$+ G_{10}[(\varkappa_1 + \varkappa_1')/4(1+\varkappa_1) - 3/(1+\varkappa_1) + a_{12}^{(j)} g_0]\cos(t-\beta) +$$
$$+ (\delta_0 + 1) g_0 \cos(t-\beta) - \gamma_0 g_0 \sin(t-\beta) +$$
$$+ (1/2 - a_{11}^{(j)} g_0) \int_{-\pi}^{\tau} p_0(s)\, ds + q^{(j)} \int_{-\pi}^{\beta} p_0(s)\, ds - g_0, \quad (j = 1, 2)$$

$$f_0^{(2j)}(t) = M_0 (1 - a_{21}^{(j)} g_0) - P_{10} \left\{ \left[a_{12}^{(j)} g_0 - \ln\left(2\cos\frac{t-\beta}{2}\right) \right] \sin(t-\beta) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\varkappa_1 - 1}{\varkappa_1 + 1}(t-\beta)\cos(t-\beta) \right\} - P_{20}[a_{12}^{(j)} g_0 - 2/(1+\varkappa_1)^2]\sin(t-\beta) +$$
$$+ G_{10}[(\varkappa_1 + \varkappa_1')/4(1+\varkappa_1) - 1/(1+\varkappa_1) - a_{12}^{(j)} g_0]\sin(t-\beta) +$$
$$+ \frac{1}{2} q^{(j)} (P_{10} + P_{20} + G_{10}) \sin(t-\beta) - \delta_0 g_0 \sin(t-\beta) +$$
$$+ \gamma_0 g_0 [1 - \cos(t-\beta)], \quad (j = 1, 2)$$

$$[1 + (1 + \varkappa_2) g_0] f_0^{(3)}(t) = [f_0^{(11)}(t) + i f_0^{(21)}(t)] \Big|_{\substack{D=0 \\ D'=0}} + g_0 \int_{-\pi}^{\tau} p_0(s)\, ds -$$

$$-\frac{1}{2} g_0 (P_{10} + P_{20} + G_{10}) \cos (t - \beta) +$$

$$+ i \left[g_0 M_0 + \frac{1}{2} g_0 (P_{10} - P_{20} + G_{10}) \sin (t - \beta) \right]$$

В последних формулах положено

$$P_{10} = R_1 P_1 / 4\pi\mu_2 r_1 \varepsilon, \quad P_{20} = R_1 P_2 / 4\pi\mu_2 r_1 \varepsilon, \quad G_{10} = R_1 G_1 / 4\pi\mu_2 r_1 \varepsilon$$

$$M_0 = R_1 M / 4\pi\mu_2 r_1^2 \varepsilon, \quad \delta_0 = \delta/\varepsilon, \quad \psi_0 = r_1 \psi / \varepsilon$$

$$a_{11}^{(1)} = (1 - a_1 - a_2)/[1 + D' (1 - a_1 - a_2)], \quad a_{11}^{(2)} = a_{11}^{(1)}$$

$$a_{12}^{(1)} = a_3 + [2 (D + D') (a_4)^2 - a_5 + 1/2]/[1 + (D + D') (1 - 2a_5)]$$

$$a_{21}^{(1)} = 1 + a_1 - a_2, \quad a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)}, \quad a_{12}^{(2)} = a_{12}^{(1)} \big|_{D=0}$$

В ядре уравнения (1.3) выделены его особая часть в виде функций

$$\ln \left(1/2 \left| \sin \frac{t - s}{2} \right| \right) - i \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \pi\mu^{(j)} \operatorname{sign} (t - s)$$

$$q^{(j)} \ln \left(1/2 \left| \sin \frac{t - s}{2} \right| \right)$$

и регулярная часть в виде функций $K_1^{(j)} (t - s)$, $K_2^{(j)} (t - s)$ ($j = 1, 2, 3$), непрерывных в области $-\alpha \leqslant t, s \leqslant \alpha$ и имеющих квадратично суммируемые первые частные производные.

Отметим, что когда в области контакта действуют силы кулоновского трения, то, как в [9], получим уравнение, аналогичное (1.3).

Таким образом, решение рассмотренной контактной задачи приводится к решению интегрального уравнения (1.3), определяющего неизвестные контактные напряжения $p_n(t)$ и $\tau_n(t)$. Кроме того, в данной задаче следует определить также размеры области контакта (α, β), жесткое смещение δ и угол относительного поворота ψ диска. Поэтому, к уравнению (1.3) должны быть присоединены условия равновесия диска (1.2) и условия ограниченности контактных напряжений на концах зоны контакта [1, 11, 12]

$$Z_0 (\pm \alpha) = 0 \tag{1.5}$$

§ 2. *Сведение интегрального уравнения (1.3) к бесконечной системе линейных уравнений.* Решение уравнения (1.3) представим в виде ряда [9]

$$Z_0 (t) = w (t) \sum_{m=0}^{\infty} Z_m P_m^{(\rho, \sigma)} \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} / \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \tag{2.1}$$

с неизвестными коэффициентами $\{Z_m\}_{m=0}^{\infty}$. При этом ввиду (1.5) должны иметь место условия

$$\sum_{m=0}^{\infty} Z_m P_m^{(\rho, \sigma)} (\pm 1) = 0$$

Здесь

$$w(t)=\frac{1}{2}\left(\sec\frac{t}{2}\right)^{2+\alpha+\beta}\left(\sin\frac{\alpha-t}{2}\right)^{\alpha}\left(\sin\frac{\alpha+t}{2}\right)^{\beta}$$

$$\alpha=-\frac{1}{2}-i\mu^{(j)},\qquad \beta=-\frac{1}{2}+i\mu^{(j)}$$

$\{P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{m=0}^{\infty}\,(\mathrm{Re}(\alpha,\beta)>-1)$ — многочлены Якоби, ортогональные на отрезке $[-1,1]$ с весом $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$.

Подставляя (2.1) в (1.3), а затем используя известные интегральные соотношения, аналогичные приведенному [13], уравнение (1.3) известным способом относительно неизвестных коэффициентов сведем к квазивполне регулярной бесконечной системе

$$z_n(1+q^{(j)})+\frac{H_n}{n}n^{\varepsilon_1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z_m}{m^{\varepsilon_1}}\left(K_{n,m}^{(1j)}+q^{(j)}K_{n,m}^{(1*)}\right)+$$

$$+\frac{H_n}{n}n^{\varepsilon_1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\bar z_m}{m^{\varepsilon_1}}\left(K_{n,m}^{(2j)}+q^{(j)}K_{n,m}^{(2*)}\right)=\frac{H_n}{n^2}n^{\varepsilon_1}b_n,\quad (n=1,2,\ldots)\quad (2.2)$$

где

$$z_n=Z_n/n^{1+\varepsilon_1},\quad (n=1,2,\ldots)$$

а ε_1 — сколь угодно малое, но фиксированное положительное число. Кроме того, для определения коэффициента Z_0 получим соотношение

$$Z_0\left[1-\gamma_0^{-1}h_0\ln\left(2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)-\gamma_0^{-1}J_0^{(\alpha,\beta)}\right]-\gamma_0^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}Z_mJ_m^{(\alpha,\beta)}+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}Z_mK_{0,m}^{(1j)}+\sum_{m=0}^{\infty}\bar Z_mK_{0,m}^{(2j)}+q^{(j)}\Big[(Z_0\gamma_0^{(1)}+\bar Z_0\gamma_0^{(1)})\gamma_0^{-1}-$$

$$-(Z_0+\bar Z_0)\gamma_0^{-1}h_0\ln\left(2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)-(Z_0+\bar Z_0)\gamma_0^{-1}J_0^{(\alpha,\beta)}-$$

$$-\gamma_0^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}(Z_mJ_m^{(\alpha,\beta)}+\bar Z_mJ_m^{(\beta,\alpha)})+q_m\left(\sum_{m=1}^{\infty}Z_mK_{0,m}^{(1*)}+\sum_{m=1}^{\infty}\bar Z_mK_{0,m}^{(2*)}\right)\Big]=b_0\quad (2.3)$$

Здесь введены обозначения

$$K_{n,m}^{(1j)}=-i\frac{\pi}{4}\operatorname{th}\pi\mu^{(2)}\int_{-\alpha}^{\alpha}\sec^2\frac{t}{2}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,P_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)}(x)\,dt$$

$$K_{n,m}^{(1*)}=\sin\frac{\alpha}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\Big[h_0P_m^{(\alpha,\beta)}(x)+$$

$$+ i\frac{\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu^{(2)}\overline{w_1(t)}P_{n-1}^{(-\tau, -\rho)}(x)\,\Big|\,\overline{w(t)}P_n^{(\tau, \rho)}(x)\,dt$$

$$(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ m = 1,\ 2,\ \ldots)$$

$$h_0 = \pi\,\mathrm{sech}\,\pi\mu^{(j)},\quad \gamma_0^{(1)} = -\pi\,\mathrm{sech}\,\pi\mu^{(j)}[\ln 2 + \psi(0.5 - i\mu^{(j)}) - \psi(1)]$$

$$q_m = m^{-1}\pi\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}(\gamma_0 h_0)^{-1},\quad (m = 1,\ 2, \ldots)$$

$$H_n = n\pi^{-1}\,\mathrm{ch}\,\pi\mu^{(j)}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}(h_n)^{-1},\quad (n = 1,\ 2, \ldots)$$

где

$$x = \mathrm{tg}\,\frac{t}{2}/\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2},\qquad w_1(t) = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{-1}\sec^2\frac{t}{2}\,[\overline{w(t)}]^{-1}$$

$$h_n = \Gamma(n - \tau)\,\Gamma(n - \rho)/2\,[\Gamma(n + 1)]^2$$

$\psi(x)$ — пси-функция Эйлера, $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Бесконечная система (2.2) и соотношение (2.3) при $j = 1$ и $j = 3$ ($q^{(1)} = q^{(3)} = 0$) совпадают с аналогичной бесконечной системой и аналогичным соотношением, рассмотренными в [9]. Поэтому остальная часть обозначений, содержащаяся в (2.2) и (2.3), здесь не приводится.

Отметим также, что квазивполне регулярность системы (2.2) при $j = 1$ и $j = 3$ доказана в [9]. Аналогичным образом, как и в [9, 14], можно показать, что при $j = 2$ ($q^{(2)} \neq 0$), то есть при добавлении к ядрам $K_{n,m}^{(11)}$ и $K_{n,m}^{(22)}$ соответственно ядер $q^{(2)}K_{n,m}^{(11')}$ и $q^{(2)}K_{n,m}^{(22')}$, квазивполне регулярность системы (2.2) не нарушается.

§ 3. *Числовой пример.* Рассмотрим уравнение (1.3) при отсутствии тангенциальных контактных напряжений, то есть $\tau_0(t) = 0$, и положим $P_{10} = M_0 = 0$. Тогда оно принимает вид [7]

$$(1 + 2q^{(j)})\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln\frac{1}{2\left|\sin\frac{t-s}{2}\right|}\,p_0(s)\,ds + \int_{-\alpha}^{\alpha}K_j(t-s)\,p_0(s)\,ds = f_{0j}(t)$$

$$K_j(t-s) = \mathrm{Re}\,[K_1^{(j)}(t-s) + K_2^{(j)}(t-s)]$$

$$f_{0j}(t) = \mathrm{Re}\,[f_0^{(j)}(t)],\quad (j = 1,\ 2,\ 3)$$

В указанном частном случае в зоне контакта будет действовать только нормальное давление $p_0(t)$, область контакта становится симметричной относительно оси ox ($\beta = 0$, $\psi = 0$) и будем иметь $p_0(-t) = p_0(t)$.

Условие равновесия диска примет вид

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} p_0(s) \cos s \, ds = P_{20} + G_{10}$$

Числовые расчеты здесь будут выполнены по схеме, приведенной в [7].

Рассмотрим два случая:

1) пренебрегается изгибная жесткость усиливающего покрытия ($D = 0$).

2) отсутствует усиливающее покрытие на обводе отверстия кольца ($h = 0$).

Числовые расчеты проведены для случая $\varkappa_j = 3 - 4\nu_j$ при следующих значениях физических и геометрических параметров:

$$\mu_1 = \mu_2 \ (E_1 = E_2), \quad \mu_0/\mu_2 = 1/2 \ (E_0/E_2 = 1/2), \quad \nu_0 = \nu_1 = \nu_2 = 0.3$$

$$h/R_1 = 0.05, \quad R_2/R_1 = 2, \quad R_3/R_1 = 4 \ (r = 4, \ r = 16)$$

Кроме того, положено $r_0 \approx r_1$, в то время как принимается $\varepsilon \neq 0$ ($\varepsilon = r_0 - r_1$).

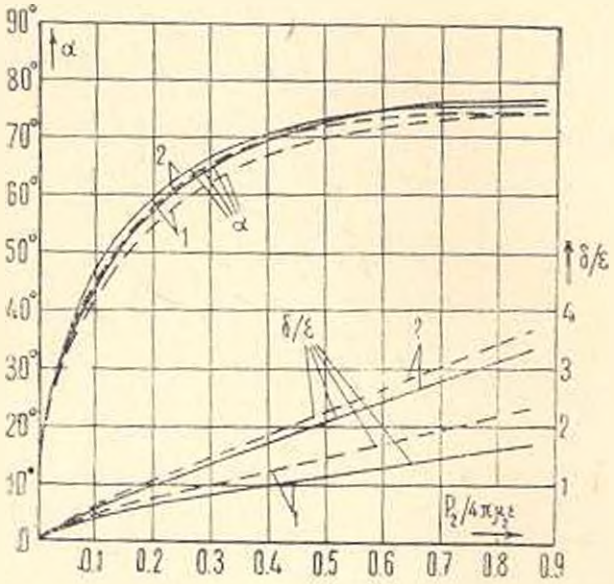
Вычисления проводились на ЭВМ «Наири-2». Бесконечные системы решались методом редукции, причем для получения максимальных нормальных давлений с тремя верными знаками, достаточно было брать три уравнения из бесконечных систем.

Числовые результаты приведены в таблице.

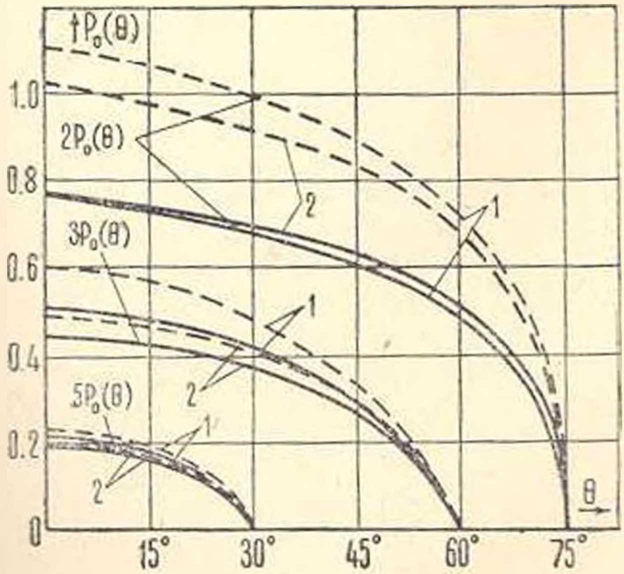
		$h/R_1 = 0.05$			$h = 0$		
		$\alpha = 30°$	$\alpha = 60°$	$\alpha = 75°$	$\alpha = 30°$	$\alpha = 60°$	$\alpha = 75°$
$R_2/R_1 = 2$	P_{20}, G_{10}	0.0331	0.2317	0.5941	0.0361	0.2701	0.8712
	ϑ_0	0.1915 0.2500	0.6667 1.0790	1.3262 2.3846	0.2111 0.2754	0.8890 1.3694	2.3670 3.8980
	X_0	0.0109	0.0842	0.2313	0.0120	0.0980	0.3393
	X_1	−0.0109	−0.0851	−0.2342	−0.0121	−0.1001	−0.3430
	X_2	0	0.0010	0.0030	0.0001	0.0020	0.0018
	X_3	0	−0.0001	−0.0001	0	0.0001	0.0019
	$p_0(\vartheta)_{max}$	0.0421	0.1704	0.3849	0.0467	0.2001	0.5603
$R_3/R_1 = 4$	P_{20}, G_{10}	0.0302	0.2063	0.6087	0.0304	0.2264	0.8138
	ϑ_0	0.2411 0.2950	0.9609 1.3280	2.4100 3.4870	0.2670 0.3080	1.1548 1.5590	3.5510 5.0040
	X_0	0.0100	0.0752	0.2384	0.0100	0.0825	0.3186
	X_1	−0.0099	−0.0740	−0.2350	−0.0100	−0.0814	−0.3143
	X_2	−0.0001	−0.0010	−0.0028	0	−0.0010	−0.0035
	X_3	0	−0.0002	−0.0006	0	−0.0001	−0.0008
	$p_0(\vartheta)_{max}$	0.0382	0.1484	0.3870	0.0386	0.1630	0.5177

Отметим, что вычисления проводились при следующей схеме нагружения диска: либо считалось, что на диск действует только сила P_2 ($G_1 = 0$).

либо наоборот, на диск действуют только силы тяжести диска $G_1 (P_2 = 0)$. Полученные результаты показывают, что в обоих случаях при $P_2 = G_1$ распределение контактных давлений и размеры области контакта получаются



Фиг. 2.



Фиг. 3.

одинаковыми, однако во втором случае ($P_2 = 0$) несколько увеличивается жесткое смещение диска δ (в таблице значения δ_* приведены в двух рядах, причем верхний ряд соответствует случаю $G_1=0$, а нижний — $P_2=0$).

Для наглядного представления полученных эффектов, обусловленных наличием на обводе отверстия кольца подкрепляющего покрытия и изменением отношения R_2/R_1, приведены графики зависимости длины участка контакта (2α) и величины жесткого смещения диска (δ_0) от прижимающей силы P_0 (фиг. 2). Приведены также графики распределения контактных давлений при $\alpha = 30°$, $60°$ и $75°$ (фиг. 3). В этих графиках сплошные линии соответствуют случаю 1), а пунктирные — случаю 2). Кроме того, через 1 и 2 обозначены кривые, соответствующие отношениям $R_2/R_1 = 2$ и $R_2/R_1 = 4$.

Автор признателен С. М. Мхитаряну за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ленинаканский филиал Ереванского
политехнического ин-та им. К. Маркса

Поступила 24 IV 1978

Ֆ. Ս. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՍԿԱՎԱՌԱԿԻ ԵՎ ԱՆՑՔԻ ՇՐՋԱԳԻԾԸ ԲԱՐԱԿ ՕՂԱԿԱՁԵՎ ԾԱԾԿՈՒՅԹՈՎ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՕՂԱԿԻ ՆԵՐՔԻՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է շրջանային առաձգական սկավառակի և արտաքին եզրագծով կոշտ ամրացված շրջանային օղակի ներքին կոնտակտային փոխազդեցության խնդիրը, երբ օղակի անցքի շրջագիծը ուժեղացված է օղակաձև բարակ առաձգական ծածկույթով։ Խնդրի որոշիչ հավասարումը հանգում է Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարման։ Վերջինիս լուծումը Յակոբիի օրթոգոնալ բազմանդամների մաթեմատիկական ապարատի հիման վրա բերված է համարժեք քվազիլիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծմանը։ Մի քանի մասնավոր դեպքերի համար ստացված են թվային արդյունքները։

ON THE INTERNAL CONTACT INTERACTION OF A ROUND DISK AND A CIRCULAR RING SUPPORTED ON THE CONTOUR OF THE HOLE WITH A THIN CIRCULAR COATING

F. S. TOROSSIAN

Summary

The contact problem on the external interaction of an elastic round disk with a circular ring rigidly fastened along its external boundary, when the outline of the hole is supported with a thin circular elastic coating stuck to it, is considered.

The solution of the above problem is reduced to that of the first kind Fredholm integral equation. It's effective solution is presented. For some particular cases the numerical results are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
2. *Коровчинский М. В.* О некоторых вопросах эластореологии, имеющих приложение в теории трения. Трение и износ в машинах. Сб. XV. М., ин-т машиноведения, 1962
3. *Кочанов Ф. П.* Решение обобщенной задачи И. Я. Штаермана. Докл. АН СССР, 1967, т. 173, № 5.
4. *Мазинг Р. И.* Контактная задача для тяжелого полого цилиндра. Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 2.
5. *Панасюк В. В., Теплый М. И.* Об одной контактной задаче с учетом сил трения. Прикл. механика, 1972, т. 8, вып. 7.
6. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К теории контактных задач для цилиндрических тел с учетом сил трения. Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 2.
7. *Торосян Ф. С.* Об одной контактной задаче для цилиндрических тел. Уч. записки ЕрГУ, 1977, № 1.
8. *Мазинг Р. И.* Цилиндрический штамп с симметричной трещиной. Изв. АН СССР МТТ, 1978, № 1.
9. *Мхитарян С. М., Торосян Ф. С.* О контактном взаимодействии кругового диска и бесконечной пластины с круговым отверстием, подкрепленным тонким кольцевым покрытием. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1978, т. 31, № 5.
10. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1951.
11. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
12. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
13. *Попов Г. Я.* Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
14. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Контактная задача о вдавливании штампа в упругую полуплоскость с тонким усиливающим покрытием. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 1, 1979 Механика

П. А. МКРТЧЯН

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В работе [1] на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел [2, 3] получены двумерные уравнения магнитоупругости сферической оболочки, находящейся в произвольном неоднородном магнитном поле. В данной работе с помощью указанных уравнений рассматривается задача о параметрических колебаниях электропроводящей сферической оболочки в радиальном магнитном поле. Получено уравнение для определения критических частот главного параметрического резонанса. Исследуется влияние напряженности заданного магнитного поля на критические частоты и области динамической неустойчивости.

Аналогичные задачи динамической устойчивости электропроводящих пластин в магнитном поле рассмотрены в работах [4, 5].

1. Рассмотрим задачу динамической устойчивости замкнутой сферической оболочки постоянной толщины $2h$ и радиуса R под действием равномерно распределенной по поверхности радиальной нагрузки $p(t) = p_0 + p_t \cos\omega_0 t$. Ортогональная система координат выбрана так, что срединная поверхность сферической оболочки отнесена к географическим координатам α, β (α представляет угол долготы, β — угол широты), а γ направлена по нормали к срединной поверхности. Тогда для коэффициентов первой квадратичной формы и для кривизны срединной поверхности будем иметь $A = R$, $B = R\sin\alpha$, $k_1 = k_2 = R^{-1}$. В последующем, ради сохранения симметричной структуры получаемых выражений, приведенные выше значения A и B в расшифрованном виде не будем подставлять, однако все время будем понимать, что A — величина постоянная, а B не зависит от β [6, 7].

Пусть оболочка, изготовленная из материала с конечной постоянной электропроводностью σ, помещена в стационарном неоднородном магнитном поле $\vec{H}_0(\gamma)$, вектор напряженности которого перпендикулярен к недеформированной срединной поверхности [10]. Начальное невозмущенное состояние характеризуется вектором упругих перемещений $\vec{U}_0$, электрического поля $\vec{E}_0$ и магнитного поля $\vec{H}_0$. Их определяем из уравнений магнитоупругости и электродинамики невозмущенного состояния. Предполагая, что напряженное состояние оболочки до потери устойчивости является безмоментным и пренебрегая силами инерции [8], из указанных уравнений найдем следующие выражения для характеристик невозмущенного состояния:

$$\vec{E}_0 = 0, \quad \vec{H}_0 = \frac{H_0}{(1+\gamma/R)^2} \cdot \vec{n}_\gamma$$
$$\vec{U}_0 = -\frac{(1-\nu)R^2}{4Eh} p(t) \cdot \vec{n}_\gamma, \qquad N_1^0 = N_2^0 = -\frac{1}{2} Rp(t) \tag{1.1}$$

где H_0 — величина вектора напряженности магнитного поля на срединной поверхности ($\gamma = 0$), $\vec{n}_\gamma$ — единичный вектор в направлении координатной линии γ, N_1^0 и N_2^0 — внутренние силы начального невозмущенного состояния.

Как видно из (1.1), до возникновения возмущений внешнее магнитное поле $\vec{H}_0$ не вызывает дополнительного электромагнитного поля, так как тангенциальные перемещения невозмущенного состояния оболочки равны нулю.

В основу последующих рассуждений ставятся следующие предположения:

а) гипотеза магнитоупругости тонких тел, определяющая закон изменения упругих перемещений и компонент индуцированного электромагнитного поля по толщине оболочки [3];

б) для внешней области (для среды, окружающей оболочку) считаются справедливыми уравнения Максвелла для вакуума;

в) влияние токов смещения на характеристики динамической устойчивости пренебрегается.

На основе принятых предположений основная линеаризованная система сингулярных интегро-дифференциальных уравнений устойчивости сферической оболочки имеет вид [1, 8]

$$\Delta\Psi - \frac{4\pi\sigma R^2}{c^2}\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{R}{h}\Delta F + \frac{4\pi\sigma H_0 R^2}{c^3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\theta - \frac{2w}{R}\right) = 0$$

$$(\Delta + 1 - \nu)\theta - \frac{1}{R}\left(\frac{h^2}{3R^2}\Delta + 1 - \nu\right)(\Delta + 2)w +$$
$$+ \frac{\sigma H_0 R^2}{\rho c c_0^2}\left[\Psi + \frac{H_0}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2w}{R} - \theta + \frac{h^2}{3R^3}\Delta w\right)\right] = 0 \tag{1.2}$$

$$\left(\frac{h^2}{3R^3}\Delta - \frac{1+\nu}{R}\right)\theta - \frac{h^2}{3R^4}(\Delta + 1 - \nu)(\Delta + 2)w - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} +$$
$$+ \frac{\sigma H_0^2 h^2}{3\rho c^2 c_0^2 R^2}\frac{\partial}{\partial t}\Delta w - \frac{p(t)}{4\rho h R c_0^2}(\Delta + 2)w = 0$$

Здесь приняты обозначения:

$$\theta = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(Bu) + \frac{\partial}{\partial\beta}(Av)\right] + \frac{2w}{R}$$

$$\Delta = \frac{R^2}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right]$$

$$\Psi = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\psi) - \frac{\partial}{\partial\beta}(A\varphi)\right] \tag{1.3}$$

$$F = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{r}{2}\right)\right]\Psi(\xi, \eta, t)\sin\xi\, d\xi\, d\eta$$

$$r^2 = 2(1 - \cos\theta_0), \qquad c_0^2 = \frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}$$

$$\cos\theta_0 = \cos\xi\cos\alpha + \sin\xi\sin\alpha\cos(\eta - \beta)$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала оболочки, c — скорость света, c_0 — скорость звука в материале оболочки, $\varphi(\alpha, \beta, t)$, $\psi(\alpha, \beta, t)$ — искомые тангенциальные компоненты индуцированного в оболочке электрического поля, $u(\alpha, \beta, t)$, $v(\alpha, \beta, t)$, $w(\alpha, \beta, t)$ — искомые перемещения срединной поверхности оболочки.

Решения приведенных уравнений должны удовлетворять условиям непрерывности и однозначности на сфере.

2. Решения уравнений (1.2) представим в виде разложения

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)\, Y_n(\alpha, \beta), \qquad \theta = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(t)\, Y_n(\alpha, \beta)$$

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(t)\, Y_n(\alpha, \beta) \tag{2.1}$$

$$Y_n(\alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{n} (A_{nk}\cos k\beta + B_{nk}\sin k\beta)\, P_n^k(\cos\alpha)$$

где A_{nk} и B_{nk} — коэффициенты Фурье, определяемые формулами

$$A_{nk} = \frac{1}{\|Y_n^k\|^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_n(\alpha, \beta)\, P_n^k(\cos\alpha)\cos k\beta\sin\alpha\, d\alpha\, d\beta$$

$$B_{nk} = \frac{1}{\|Y_n^k\|^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_n(\alpha, \beta)\, P_n^k(\cos\alpha)\sin k\beta\sin\alpha\, d\alpha\, d\beta$$

$$\|Y_n^k\|^2 = \frac{2\pi\varepsilon_k}{2n+1}\,\frac{(n+k)!}{(n-k)!}, \qquad \varepsilon_k = \begin{cases} 2 \text{ при } k = 0, \\ 1 \text{ при } k > 0, \end{cases}$$

$$P_n^k(x) = (1 - x^2)^{k/2}\frac{d^k P_n(x)}{dx^k}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2 - 1)^n\right]$$ — полиномы Лежандра.

Подставляя (2.1) в уравнения (1.2), получим систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\left[\lambda_n + (2n+1)\frac{R}{2h}\right]\Psi_n + \frac{4\pi\sigma R^2}{c^2}\frac{d}{dt}\left[\Psi_n - \frac{H_0}{c}\frac{d}{dt}\left(\theta_n - \frac{2w_n}{R}\right)\right] = 0$$

$$(\lambda_n - 1 + \nu)\,\theta_n + \frac{1}{R}\left(\frac{\lambda_n h^2}{3R^2} - 1 + \nu\right)(\lambda_n - 2)\,w_n +$$

$$+ \frac{\sigma H_0^2 h^2 \lambda_n}{3\rho R c^2 c_0^2}\frac{dw_n}{dt} - \frac{\sigma H_0 R^2}{\rho c c_0^2}\left[\Psi_n - \frac{H_0}{c}\frac{d}{dt}\left(\theta_n - \frac{2w_n}{R}\right)\right] = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{R}\left(1 + \nu + \frac{\lambda_n h^2}{3R^2}\right)\theta_n + \frac{h^2}{3R^4}(\lambda_n - 1 + \nu)(\lambda_n - 2)\,w_n +$$

$$+ \frac{1}{c_0^2}\frac{d^2 w_n}{dt^2} + \frac{\sigma h^2 H_0^2 \lambda_n}{3\rho c^2 c_0^2 R^2}\frac{dw_n}{dt} - \frac{p(t)}{4\rho h R c_0^2}(\lambda_n - 2)\,w_n = 0$$

Здесь $\lambda_n = n(n+1)$.

Система уравнений (2.2) после некоторых преобразований приводится к одному дифференциальному уравнению относительно $w_n(t)$

$$a_1\frac{d^3 w_n}{d\tau^3} + a_2\frac{d^2 w_n}{d\tau^2} + \alpha_0(1 - 2\gamma_0\cos\omega\tau)\frac{dw_n}{d\tau} +$$

$$+ [1 - 2\mu_0(\cos\omega\tau - a_1\omega\sin\omega\tau)]\,w_n = 0 \tag{2.3}$$

где введены обозначения

$$a_1 = \frac{\sigma_0 R^2\Omega}{chd_n}\left(1 + \frac{d_n\beta_0^2}{\lambda_n - 1 + \nu}\right), \qquad a_2 = 1 + \frac{\lambda_n c_0^2\sigma_0^2\beta_0^2(d_n\beta_0^2 + \lambda_n - 2)}{3d_n c^2(\lambda_n - 1 + \nu)}$$

$$\alpha_0 = a_3 - \frac{a_1 p_0}{p_* - p_0}, \qquad p_* = \frac{4Eh}{R}\,\frac{1 + \delta^2(\lambda_n - 1)^2}{\lambda_n - 1 + \nu}, \qquad \mu_0 = \frac{p_t}{2(p_* - p_0)}$$

$$a_3 = \frac{\sigma_0 R^2\Omega p_*}{chd_n(p_* - p_0)} + \frac{\sigma_0 h c_0^2\beta_0^2}{3c\Omega R^2(\lambda_n - 1 + \nu)}\left|\,\lambda_n^2 + (\lambda_n - 2)(\lambda_n - 1 + \nu) +\right.$$

$$\left. + \frac{6R^2(1+\nu)}{h^2}\right|, \qquad \gamma_0 = \frac{a_1\mu_0}{\alpha_0}, \qquad \Omega_0^2 = \frac{gE}{\gamma_1 R^2}(\lambda_n - 2)\,\frac{1 + \delta^2(\lambda_n - 1)^2}{\lambda_n - 1 + \nu} \tag{2.4}$$

$$\frac{\gamma_1}{g} = \rho, \qquad \delta^2 = \frac{h^2}{3R^2(1 - \nu^2)}, \qquad \sigma_0 = \frac{4\pi\sigma h}{c}, \qquad \beta_0 = \frac{V_A}{c_0}, \qquad V_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

$$d_n = \lambda_n + \frac{R}{2h}(2n+1), \qquad \omega = \frac{\omega_0}{\Omega}, \qquad \Omega^2 = \Omega_0^2\left(1 - \frac{p_0}{p_*}\right), \qquad \tau = \Omega t$$

В (2.4) Ω_0 — частота собственных колебаний сферической оболочки в вакууме при отсутствии магнитного поля, γ_0 и μ_0 — коэффициенты возбуждения, p_* — значения критической силы при статической устойчивости оболочки, параметры σ_0 и β_0 характеризуют электропроводность материала оболочки и напряженность внешнего магнитного поля соответственно, V_A — скорость распространения волн Альфвена.

Уравнение (2.3) имеет периодические коэффициенты и, как известно [8, 9], при некоторых соотношениях между коэффициентами имеет неограниченно возрастающие решения. Границы области главного параметрического резонанса определим, используя метод гармонического баланса [8].

Согласно сказанному, решение уравнения (2.3) будем искать в виде

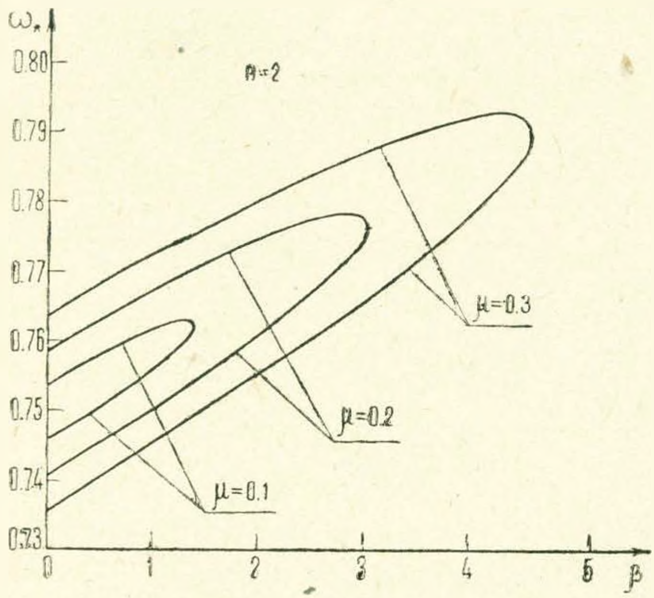
$$w_n(\tau) = A_0 \sin\frac{\omega\tau}{2} + B_0 \cos\frac{\omega\tau}{2} \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в (2.3) и приравнивая определитель нулю, для определения критических частот главного параметрического резонанса получим уравнение

$$a_1^2 z^3 + (a_2^2 - 2a_1\alpha_0)z^2 + (\alpha_0^2 - \mu_0^2 a_1^2 - 2a_2)\, z + 1 - \mu_0^2 = 0 \tag{2.6}$$

где $z = \omega^2/4$.

На основании (2.6) проведем численный анализ для алюминиевой оболочки при $h/R = 0.01$, $p_0 = 5$ *атм.*



Фиг. 1.

На фиг. 1 представлены графики зависимости критических частот главного параметрического резонанса ω_* от напряженности заданного магнитного поля $\beta(\beta = 10^4 \beta_0^2)$ при различных значениях коэффициента возбуждения μ, где

$$\omega_* = \frac{\omega_0^2}{4\omega_1^2}, \qquad \omega_1^2 = \frac{gE}{\gamma_1 R^2}, \qquad \mu = \frac{p_0 + p_t/2}{p_{**}}, \qquad p_{**} = \frac{8Eh^2}{R^2\sqrt{3(1-\nu^2)}}$$

Здесь p_{**} — минимальное значение по n критической силы при статической устойчивости оболочки.

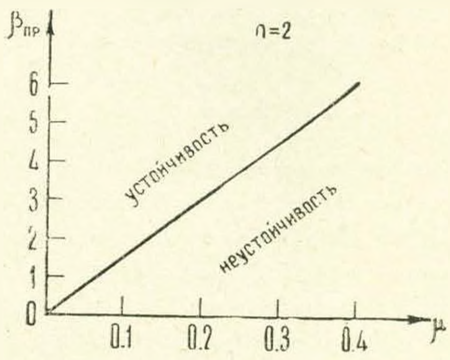
Рассматривая фиг. 1, замечаем, что при наложении магнитного поля и дальнейшем увеличении его напряженности область главного параметрического резонанса уменьшается и стремится к нулю при определенном значении напряженности магнитного поля $\beta_{пр}$. Это значит, что существует минимальное значение ($\beta_{пр}$) напряженности заданного магнитного поля, превышение которого исключает возможность появления параметрического резонанса.

В табл. 1 приведены значения $H_{пр}$ при некоторых значениях коэффициента возбуждения μ для алюминиевой оболочки.

Таблица 1

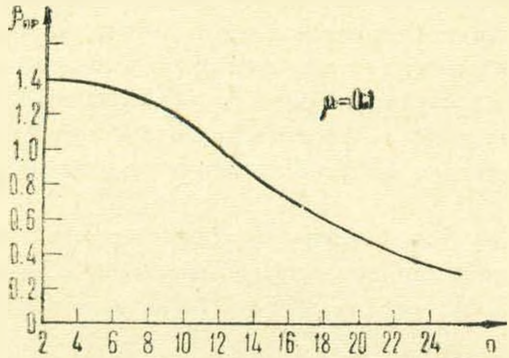
$H_{пр}$, 10^4 *эрстед*	1.0862	3.4348	5.0698	6.1991	7.1698
μ	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4

Расчеты показывают, что ω_* является монотонно возрастающей функцией от числа волн n, поэтому фиг. 1 построена для $n = 2$, соответствующему наименьшему значению ω_* в зависимости от n.



Фиг. 2.

Зависимость $\beta_{пр}$ от коэффициента возбуждения μ приведена на фиг. 2, которая показывает, что чем больше интенсивность магнитного поля, тем большая амплитуда параметрической силы требуется, чтобы вызвать динамическую неустойчивость оболочки. Приведенная кривая отделяет область устойчивости ($H_0 > H_{пр}$) от области неустойчивости ($H_0 < H_{пр}$) и построена при $n = 2$.



Фиг. 3.

Из фиг. 3 видно, что зависимость $\beta_{пр}$ от числа волн n является монотонно убывающей функцией.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 6 IX 1977

Պ. Հ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԷԼԵԿՏՐԱՀԱՂՈՐԴԻՉ ԳՆԴԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում ելնելով բարակապատ մարմինների մագնիսաառաձգականության վարկածներից, դիտարկվում է գնդային թաղանթի դինամիկ կայունության խնդիրը ստացիոնար մագնիսական դաշտում, երբ մագնիսական դաշտի լարվածության վեկտորը ուղղված է թաղանթի միջին մակերևույթի նորմալով։ Ստացված է բնութագրիչ հավասարում գլխավոր պարամետրական ռեզոնանսի կրիտիկական հաճախականության նկատմամբ։

Ուսումնասիրվում է տված մագնիսական դաշտի լարվածության ազդեցությունը դինամիկ կայունության տիրույթների վրա։ Որոշված է արտաքին մագնիսական դաշտի սահմանային արժեքը, որի դեպքում բացառվում է պարամետրական ռեզոնանսի հնարավորությունը։

DYNAMIC STABILITY OF AN ELECTROCONDUCTIVE SPHERICAL SHELL IN THE MAGNETIC FIELD

P. A. MKRTCHIAN

S u m m a r y

In terms of the hypothesis of a thin body magnetoelasticity the problem of parametric vibration of an electroconductive spherical shell in the radial magnetic field is considered. An equation is obtained to determine the critical frequencies of the main parametric resonance. The influence of the specified magnetic field strength upon the critical frequencies and the dynamic instability region is studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдасарян Г. Е., Мкртчян П. А.* Об уравнениях магнитоупругости тонких сферических оболочек. Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. XXIX, № 5.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
3. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
4. *Багдасарян Г. Е.* О динамической устойчивости проводящих пластин в поперечном магнитном поле. Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. XXVIII, № 2.
5. *Багдасарян Г. Е.* О параметрических колебаниях проводящих пластин в продольном магнитном поле. Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. XXVIII, № 5.
6. *Власов В. З.* Общая теория оболочек. М.—Л., Гостехиздат, 1949, с. 265—275.
7. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М., «Наука», 1974 с. 128—132.
8. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1956 с. 586—593.
9. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., Изд. «Наука», 1961, с. 183—208.
10. *Зенкевич В. Б., Сычев В. В.* Магнитные системы на сверхпроводниках. М., Изд. «Наука», 1972, с. 228—231.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 1, 1979 Механика

К. Б. КАЗАРЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТОКОНЕСУЩЕЙ ОБОЛОЧКИ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В последнее время в технике получили применение токонесущие упругие тела. В связи с этим ряд работ был посвящен исследованию поведения токонесущих упругих тел в магнитном поле [1—7]. В [2] показана возможность потери устойчивости гибкого токонесущего провода в магнитном поле. Вопросу устойчивости и колебания упругих токонесущих стержней посвящены работы [3—5]. В [4] рассмотрена задача устойчивости упругого токонесущего стержня круглого и эллиптического сечений в случае, когда электрический ток течет по направлению оси стержня и является поверхностным током. Для стержня круглого сечения в [5] теоретическим и экспериментальным путем рассмотрена аналогичная задача в случае, когда электрический ток равномерно распределен по сечению стержня.

В работе [6] показано, что цилиндрическая оболочка может потерять устойчивость в магнитном поле электрического тока, протекающего по направлению образующей оболочки.

Для пластин и оболочек с электрическим током исследование некоторых задач колебаний и устойчивости приводится в [7].

В настоящей работе рассматривается задача устойчивости токонесущей оболочки конечной длины, по направлению образующей которой течет объемный электрический ток. Оболочка находится под действием внешнего продольного магнитного поля, параллельного электрическому току. Определены критические значения плотностей электрического тока и напряженностей внешнего магнитного поля, при которых оболочка теряет устойчивость.

§ 1. Круговая тонкая цилиндрическая оболочка длины L, толщины $2h$, радиуса срединной поверхности R отнесена к триортогональной системе координат (α, β, γ) так, что координатные линии α и β совпадают с линиями кривизны срединной поверхности. Под α и β подразумеваются размерные координаты точки срединной поверхности, откладываемые соответственно вдоль образующей и по дуге.

Материал оболочки изотропен, не обладает магнитными свойствами, является проводником электрического тока.

По оболочке по направлению оси α течет стационарный, равномерно распределенный по толщине электрический ток плотностью j_0. Токонесущая оболочка помещена во внешнее стационарное однородное магнитное поле, вектор напряженности которого $\bar{H}_1$ параллелен образующей оболочки. Как известно, токонесущая оболочка обладает собственным магнитным полем, которое для тонкой бесконечной оболочки равно [6]

$$\overline{H}_0 = H_0 \cdot \overline{i}_2; \quad H_0 = -\frac{4\pi j_0}{c}(\gamma + h) \qquad |\gamma| < h$$

$$H_0 = 0 \qquad \gamma \leqslant -h \tag{1.1}$$

$$H_0 = -\frac{8\pi j_0 h}{c} \qquad \gamma > h$$

Рассматривается устойчивость конечной токонесущей оболочки во внешнем магнитном поле $\overline{H}_1$.

Для собственного магнитного поля конечной оболочки принимается значение магнитного поля бесконечной оболочки.

В отношении упругой оболочки принимается гипотеза Кирхгофа-Лява.

В невозмущенном состоянии на оболочку, вследствие протекания электрического тока, действует объемная пондеромоторная сила Ампера

$$\overline{F}_0 = \frac{1}{c}[\overline{j}_0 \times (\overline{H}_0 + \overline{H}_1)]; \quad \overline{F}_0 = F_0 \cdot \overline{i}_\gamma; \quad F_0 = -\frac{4\pi j_0^2(\gamma + h)}{c^2} \tag{1.2}$$

Внешнее продольное магнитное поле $\overline{H}_1 = H_1 \cdot \overline{i}_1$, будучи параллельным направлению тока, для невозмущенной оболочки не вносит вклада в объемную силу $\overline{F}_0$.

Принимается, что под действием силы $\overline{F}_0$ в оболочке устанавливается безмоментное напряженное состояние, определяемое кольцевым усилием [6]

$$N_0 = -\frac{8\pi j_0^2 h^2 R}{c^2} \tag{1.3}$$

В [6] показано, что учет индуцированных электромагнитных полей, возникших вследствие колебаний, не влияет на критическое значение плотности электрического тока, при котором оболочка теряет устойчивость. Здесь, в силу этого, задача устойчивости оболочки рассматривается на основе статического подхода [8].

В возмущенном состоянии оболочки, вследствие изгиба, возникает поперечный компонент вектора плотности электрического тока, определяемый из условия непротекаемости электрического тока [7]

$$(\overline{j} \cdot \overline{n}) = 0 \tag{1.4}$$

В (1.3) $\overline{n}$ — нормаль к поверхности возмущенной оболочки, $\overline{j}$ — вектор плотности электрического тока возмущенной оболочки.

Так как $\overline{n} = \text{grad}\,(w - \gamma)$, то из условия (1.4), учитывая, что оболочка является тонкой, для нормального компонента вектора плотности начального электрического тока возмущенной оболочки получим

$$j_\gamma = j_0 \frac{\partial w}{\partial x}$$

где w — нормальное перемещение срединной поверхности оболочки.

Взаимодействие электрического тока плотности j_1 с внешним продольным магнитным полем H_1 приводит к возникновению объемной пондеромоторной силы

$$\bar{f} = f_0 \cdot \bar{i}_2; \qquad f_0 = \frac{j_0 H_1}{c} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \tag{1.5}$$

Вопрос устойчивости токонесущей оболочки во внешнем магнитном поле рассматривается на основе уравнений технической теории тонких оболочек.

В силу допущения безмоментности исходного напряженного состояния, определяемого кольцевым усилием (1.3), и с учетом тангенциальной возмущенной пондеромоторной силы (1.5) эти уравнения в перемещениях срединной поверхности имеют вид [8]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{(1-\nu^2) H_1 H_2}{8\pi E h}\frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0$$

$$D\Delta^2 w + \frac{2Eh}{R(1-\nu^2)}\left(\frac{w}{R} + \nu\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta}\right) - \frac{H_2^2 R}{8\pi}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} = 0 \tag{1.6}$$

В (1.6) E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона материала оболочки, u, v — тангенциальные перемещения срединной поверхности оболочки, $H_2 = 8\pi j_0 h c^{-1}$ — абсолютное значение собственного магнитного поля на внешней поверхности оболочки, обусловленного электрическим током, $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$, $\Delta = \partial^2/\partial\alpha^2 + \partial^2/\partial\beta^2$.

§ 2. Как известно, для определения условий потери устойчивости оболочки в статической постановке необходимо для токонесущей оболочки определить те значения магнитных полей H_1, H_2, при которых система уравнений (1.6) имеет нетривиальные решения.

Задача решается при условиях шарнирного, свободного в тангенциальном направлении опирания на торцах оболочки $\alpha = 0$, $\alpha = L$.

Можно показать, что рассматриваемая здесь задача устойчивости принадлежит к классу несамосопряженных краевых задач. Для решения используем вариационный метод Бубнова—Галеркина, применяемый в неконсервативных задачах [9]. Согласно этому методу представим решения уравнений (1.6) в виде следующих рядов функций, удовлетворяющих условиям опирания и замкнутости оболочки:

$$u = e^{ip\beta}\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cos k_n \alpha; \qquad v = e^{ip\beta}\sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin k_n \alpha$$

$$w = e^{ip\beta}\sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin k_n \alpha \tag{2.1}$$

$$\left(p = \frac{m}{R}, \qquad k_n = \frac{\pi n}{L}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots\right)$$

Подставляя (2.1) в (1.6) и используя обычный процесс ортогонализации метода Бубнова—Галеркина, после некоторых преобразований приходим к следующей бесконечной алгебраической системе относительно w_n:

$$A w_q + i \sum_{n=1}^{\infty} B_{nq} w_n = 0 \quad (q = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.2}$$

где

$$A_q = D(p^2 + k_q^2)^4 + 2Ehk_q^4 R^{-2} - (8\pi)^{-1} R (k_q^2 + p^2) p^2 H_1^2$$

$$B_{nq} = \bar{B}_{nq} H_1 H_2$$

$$\bar{B}_{nq} = \begin{cases} 0 & (n + q - \text{четное число}) \\ 0 & (n = q) \\ (R\pi^2)^{-1}[(2 - \nu) p k_n^2 + p^3 k_n] & (n + q - \text{нечетное число}) \end{cases}$$

Представляя в (2.2) комплексный прогиб w_n в виде $w_{1n} + i w_{2n}$ и разделяя действительные и мнимые части системы (2.2), получим следующую бесконечную систему относительно w_{1q}, w_{2q}:

$$\begin{aligned} A_q w_{1q} - \sum_{n=1}^{\infty} w_{2q} B_{nq} &= 0 \\ A_q w_{2q} + \sum_{n=1}^{\infty} w_{1q} B_{nq} &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Приравняв нулю определитель Q системы (2.3), найдем критические значения напряженностей магнитных полей H_1 и H_2, при которых оболочка теряет устойчивость.

Определитель Q приводится к произведению определителей двух транспонированных матриц

$$Q = \det |C_{qn}| \cdot \det |C_{nq}| = [\det |C_{qn}|]^2$$

Общий член определителя $\det |C_{qn}|$ имеет вид

$$\begin{aligned} C_{qn} &= A_n \delta_{nq} + (-1)^q B_{nq} & (n \pm q - \text{нечетное число}) \\ C_{qn} &= A_n \delta_{nq} & (n \pm q - \text{четное число}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

(δ_{nq} — символ Кронекера).

Как известно [9], для использования метода Бубнова—Галеркина в несамосопряженных краевых задачах необходимо, чтобы этот метод приводил к бесконечным определителям, принадлежащим к классу нормальных определителей.

Для доказательства принадлежности определителя $\det |C_{qn}|$ к классу нормальных определителей разделим q-ю строчку определителя на $\sqrt{D(k_q^2 + p^2)^4}$, а n-й столбец на $\sqrt{D(k_n^2 + p^2)^4}$.

Тогда определитель $\det|C_{qn}|$ можно представить в виде

$$\widetilde{\Delta} = |\delta_{qn} + C^*_{qn}|$$

где C^*_{qn} равно

$$C^*_{qn} = \frac{2\,Ehk_n^4R^{-2} - (8\pi)^{-1}\,RH_2^2\,(k_n^2 + p^2)^2\,p^2}{D\,(k_n^2 + p^2)^2\,(k_q^2 + p^2)^2}\,\delta_{nq} +$$

$$+ \frac{(-1)^q H_1H_n[(2 + \nu)\,pk_n^3 + k_np^3]\,q}{\pi^2RD\,(k_n^2 + p^2)^2\,(k_q^2 + p^2)^2\,(q^2 - n^2)} \quad (n \pm q \text{ — нечетное число})$$

$$C^*_{qn} = \frac{2EhR^{-2}k_n^4 - (8\pi)^{-1}H_2^2Rp^2\,(k_n^2 + p^2)^2}{D(k_n^2 + p^2)^2\,(k_q^2 + p^2)^2}\,\delta_{nq} \quad (n \pm q \text{ — четное число})$$

Используя некоторые простые неравенства, можно легко показать, что

$$\prod_{q=1}^{\infty} |C^*_{qq}| < \infty, \quad \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |C^*_{qn}| < \infty$$

Определитель, общий член которого удовлетворяет этим условиям, является нормальным.

§ 3. Для качественного анализа вопроса устойчивости оболочки ограничимся приближениями бесконечного нормального определителя $\det|C_{qn}|$ при $n = 2$; $n = 3$; $n = 4$.

При $n = 2$ условие $\det|C_{qn}| = 0$ имеет вид

$$\widetilde{\Delta}_2 = A_1A_2 - B_{12}\,|B_{21}| \tag{3.1}$$

При $n = 3$ и $n = 4$ имеем соответственно

$$\widetilde{\Delta}_3 = A_3\widetilde{\Delta}_2 - A_1B_{23}\,|B_{32}| \tag{3.2}$$

$$\widetilde{\Delta}_4 = A_4\widetilde{\Delta}_3 - A_3[A_2B_{34}\,|B_{43}| + A_2B_{14}\,|B_{41}|] - \widetilde{B}H_1^4H_2^4 \tag{3.3}$$

В (3.3) $\widetilde{B} = [\,|\widetilde{B}_{43}|\,\widetilde{B}_{12} - |\widetilde{B}_{32}|\,\widetilde{B}_{14}][\,|\widetilde{B}_{41}|\,\widetilde{B}_{23} - |\widetilde{B}_{21}|\,\widetilde{B}_{34}]$ и $\widetilde{B} > 0$, так как

$$|\widetilde{B}_{43}| > |\widetilde{B}_{32}|, \quad \widetilde{B}_{12} > \widetilde{B}_{14}, \quad |\widetilde{B}_{41}| > B_{34}, \quad \widetilde{B}_{23} > |\widetilde{B}_{21}|$$

Обозначив $H_1^2 = \xi^2$, $H_2^2 = \eta^2$, из (3.1), (3.2), (3.3) получим следующие функции $\xi^2 = \xi^2(\eta)$, определяющие критические значения напряженностей магнитных полей, при которых оболочка теряет устойчивость

$$\xi_1^2 = \frac{(a_1 - \eta^2)\,(a_2 - \eta^2)}{b_{12}\eta^2}, \quad \eta \in (0,\ a_1] \tag{3.4}$$

$$\xi_2^2 = \frac{(a_1 - \eta^2)(a_2 - \eta^2)(a_3 - \eta^2)}{\eta^2[\varepsilon_{12}(a_1 - \eta^2) + \varepsilon_{23}(a_3 - \eta^2)]}, \qquad \eta \in (0,\ a_1] \tag{3.5}$$

$$\xi_3^2 = \frac{-f(\eta) + \sqrt{f^2(\eta) + 4\varepsilon(a_1 - \eta^2)(a_2 - \eta^2)(a_3 - \eta^2)(a_4 - \eta^2)}}{2\varepsilon\eta^2} \tag{3.6}$$

$$\eta \in (0,\ a_1]$$

В (3.4) — (3.6) приняты следующие обозначения:

$$a_j = 8\pi[D(p^2 + k_j^2)^4 + 2Ehk_j^4R^{-2}][Rp^2(k_j^2 + p^2)^2]^{-1} \quad (a_j > a_{j-1})$$

$$\varepsilon_{js} = \frac{64[(2 + \nu)k_j^2 + p^2][(2 + \nu)k_s^2 + p^2]k_jk_sjs}{\pi^2R^3p^2(k_j^2 + p^2)^2(k_s^2 + p^2)^2(j^2 - s^2)^2}$$

$$\varepsilon = \bar{B}(64\pi^2)^2[p^8R^4(k_1^2 + p^2)^2(k_2^2 + p^2)^2(k_3^2 + p^2)^2(k_4^2 + p^2)^2]^{-1} \tag{3.7}$$

$$f(\eta) = \varepsilon_{34}(a_1 - \eta^2)(a_2 - \eta^2) + \varepsilon_{12}(a_3 - \eta^2)(a_4 - \eta^2) +$$
$$+ \varepsilon_{14}(a_2 - \eta^2)(a_3 - \eta^2) + \varepsilon_{23}(a_1 - \eta^2)(a_2 - \eta^2)$$
$$(j = 1, 2, 3, 4;\ s = 1, 2, 3, 4)$$

Функции ξ_1^2, ξ_2^2, ξ_3^2 являются монотонно возрастающими функциями от η^2 при $\eta \to 0$, причем

$$\xi_j^2(a_1) = 0, \quad \lim_{\eta \to 0} \xi_j^2(\eta) = \infty \quad (j = 1, 2, 3)$$
$$\xi_1^2 > \xi_2^2 > \xi_3^2 \quad \forall \eta \in (0,\ a_1] \tag{3.8}$$

Таким образом, как первое, так и два последующих приближения определителя $\det \|C_{mn}\|$ приводят к функциям $\xi_j^2(\eta)$, из анализа которых видно, что внешнее магнитное поле, параллельное току оболочки, уменьшает область ее устойчивости.

На фиг. 1 в плоскости $H_1 = \xi$, $H_2 = \eta$ заштрихованная область является областью устойчивости оболочки, для всех остальных значений H_1 и H_2 оболочка неустойчива.

§ 4. Для количественного анализа устойчивости (неустойчивости) оболочки воспользуемся в качестве примера первым приближением.

Из (3.1) условием, определяющим критические значения H_1 и H_2, будет

$$(a_1 - H_2^2)(a_2 - H_2^2) - \varepsilon_{12}H_1^2H_2^2 = 0 \tag{4.1}$$

где

$$a_1 = \frac{8\pi D(k^2 + p^2)^2}{Rp^2} + \frac{16Eh\pi k^4}{R^3(k^2 + p^2)^2p^2}$$

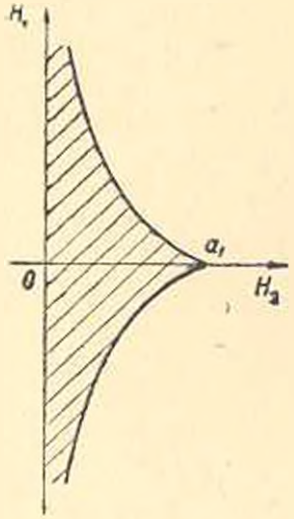
$$a_2 = \frac{8\pi D(4k^2 + p^2)^2}{Rp^2} + \frac{256Eh\pi k^4}{R^3(4k^2 + p^2)^2p^2}$$

$$a_{12}=\frac{256\left[(2+\nu)k^2+p^2\right]\left[(2+\nu)4k^2+p^2\right]}{9R^4L^2p^2(k^2-p^2)^2(4k^2+p^2)^2} \tag{4.2}$$

$$k=\frac{\pi}{L}, \qquad p=\frac{m}{R}$$

Для определения минимальных значений H_1 и H_2 необходимо сначала определить минимальное значение функции a_1 от m.

Формула, определяющая a_1, значительно упрощается, если принять известное в теории устойчивости цилиндрических оболочек допущение [8]



Фиг. 1

$$\left(\frac{2\pi R}{mL}\right)^2 \ll 1 \tag{4.3}$$

Используя (4.3) и минимизируя a_1 по m, получаем

$$m_* \simeq 2.3\sqrt[4]{\frac{R}{h}}\sqrt{\frac{R}{L}} \quad (\nu=0.3)$$

Формулы (4.2) в силу (4.3) примут вид

$$a_{1m}=\frac{16\pi Eh^3m^2}{3R^3}+\frac{16\pi^5EhR^3}{L^4m^4}$$

$$a_{2m}=\frac{16\pi Eh^3m^2}{3R^3}+\frac{256\pi^5EhR^3}{L^4m^4}$$

$$a_{12m}=\frac{256R^2}{9L^2m^4} \tag{4.4}$$

Для определения наименьшего значения функции $a(m)$ необходимо определить $a(\overline{m})=\min\{a(E(m_*)),\ \ a(E(m_*)+1),\ \ a(1)\}$. Функция $E(m_*)$ есть наибольшее натуральное число, не превышающее m_*.

Кривые зависимости H_{1m}^2 от H_{2m}^2 при различных значениях m являются, вообще говоря, взаимно пересекающимися кривыми.

Можно показать, что если $m\,[\in m_1,\ m_2]$, где $m_1 \approx 2.17\sqrt[4]{\frac{R}{h}}\sqrt{\frac{R}{L}}$ $(\nu=0.3)$, то кривые зависимости H_{1m}^2 от H_{2m}^2 являются взаимно пересекающимися; вне этого интервала пересечение кривых не имеет места.

Эти кривые будут различными, если

$$|m_1-m_2|>2 \tag{4.5}$$

Из (4.5) условием пересечения кривых является

$$\frac{R}{L}>237\sqrt{\frac{h}{R}} \tag{4.6}$$

При $m = m_*$ (4.3) имеет вид

$$\frac{R}{L} \ll 0.13 \sqrt{\frac{R}{h}} \tag{4.7}$$

Из сопоставления (4.6) и (4.7) видно, что пересечение кривых имеет место только для очень тонких оболочек, а именно, для оболочек, у которых $h/R < 10^{-5}$. Ограничиваясь оболочками с $h/R > 10^{-5}$, приведем основные формулы, определяющие критические значения H_1 и H_2

$$[a_1(\bar m) - H_2^2][a_2(\bar m) - H_2^2] - \varepsilon_{12}(\bar m) H_1^2 H_2^2 = 0$$
$$H_2 = \sqrt{a_1(\bar m)}; \quad H_1 = 0 \tag{4.8}$$

В (4.8) $\bar m$ есть то натуральное число, при котором функция $a_1(\bar m)$ принимает наименьшее значение.

Для проведения численных расчетов относительно критических комбинаций напряженностей H_2 и H_1, введем следующие безразмерные параметры:

$$\bar\eta = \frac{H_2}{\sqrt{a_1(\bar m)}}, \quad \bar\xi = \frac{H_1}{\sqrt{a_1(\bar m)}} \tag{4.9}$$

где $\sqrt{a_1(\bar m)}$ — критическое значение напряженности собственного магнитного поля токонесущей оболочки в отсутствии внешнего поля H_1.

Используя (4.2) и (4.3), запишем (4.8) в безразмерном виде

$$(1 - \bar\eta_i^2)(4.75 - \bar\eta_i^2) - \varepsilon_{12}(\bar m)\bar\eta_i^2\bar\xi^2 = 0 \tag{4.10}$$

На основе (4.10) в табл. 1 в некотором диапазоне отношений R/L, h/R для оболочек, изготовленных из алюминия, приведены критические значения параметра $\bar\xi$ при $\bar\eta_i = 0.9$, а также значения $\bar m$, отвечающие минимуму $\sqrt{a_1}$. Приведены и критические значения собственного магнитного поля $H_{2^*} = \sqrt{a_1}$ в случае отсутствия внешнего поля $(H_1 = 0)$.

Таблица 1

R/L	h/R	$\bar m$	$\bar\xi$	H_{2^*} (э)	$j_{кр}$ (а/см²)
0.1	1/1000	4	120	1700	676
0.1	1/500	4	70	1280	510
0.15	1/600	4	102	1240	490
0.2	1/200	4	53	5680	2260
0.3	1/300	6	90	4190	1670
0.4	1/500	6	140	2560	1010
0.4	1/250	5	86	6080	2420
0.5	1/500	7	160	2860	1130

В табл. 1 для оболочек с $h = 0.1$ *см* приведены также соответствующие H_{2}, критические плотности электрического тока оболочки.

Как видно из численных результатов табл. 1, внешнее продольное магнитное поле незначительно уменьшает область устойчивости оболочки. В действительности, при внешних магнитных полях, достигающих порядка нескольких десятков $\sqrt{a_1}$, критическая напряженность собственного магнитного поля уменьшается до $0.9\sqrt{a_1}$.

В заключение отметим, что при $H_1 = 0$ решение (4.8), полученное на основе метода Бубнова—Галеркина, совпадает с точным решением задачи устойчивости токонесущей оболочки.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 5 III 1978

Կ. Բ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

ԱՐՏԱՔԻՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ՀՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է արտաքին երկայնական մագնիսական դաշտում գտնվող հոսանքատար գլանային թաղանթի կայունության խնդիրը։

Բուբնով-Գալյորկինի մեթոդի հիման վրա որոշված են արտաքին մագնիսական դաշտի և թաղանթի սեփական մագնիսական դաշտի կրիտիկական լարումները։

Ցույց է տրված, որ արտաքին մագնիսական դաշտը փոքրացնում է հոսանքատար թաղանթի կայունության տիրույթը։

ON STABILITY OF A CURRENT-CARRYING SHELL IN AN EXTERNAL MAGNETIC FIELD

K. B. KAZARIAN

S u m m a r y

The stability problem of a current-carrying cylindrical shell in an external longitudinal magnetic field is considered.

The critical strengths of the shell's own magnetic field as well as of an external magnetic field are obtained by Bubnov-Galerkin's method.

The external magnetic field is shown to diminish the stability domain of the current-carrying shell.

ЛИТЕРАТУРА

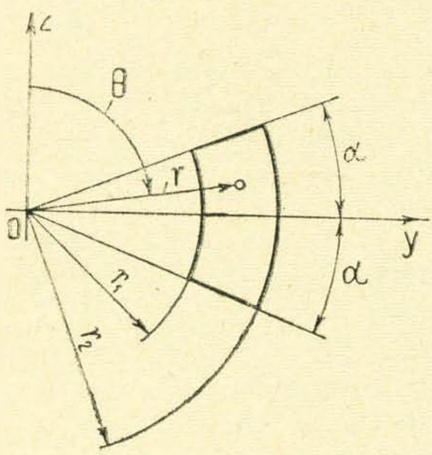
1. *Баранов Д. Г., Вашов В. М., Рлаев Р. А., Рыков В. Л., Шалашов Н. М.* Напряженно-деформированное состояние параболической оболочки вращения, находящейся под внешним магнитным давлением. ПМТФ, 1974, № 3.
2. *Леонтович М. А., Шафранов В. Д.* Об устойчивости гибкого провода в магнитном поле. Сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». т. I, Изд. АН СССР, 1958.
3. *Долбин Н. И.* Распространение упругих волн в токонесущем стержне. ПМТФ, 1962, № 2.
4. *Долбин Н. И., Морозов А. И.* Упругие изгибные колебания стержня с электрическим током. ПМТФ, 1966, № 3.
5. *Chattopadhyay S., Moon F. S.* Magnetoelastic buckling and vibration of a rod carrying electric current. Trans. ASME, E42, 1975, No. 4, 809—814 pp.
6. *Казарян К. Б.* Колебания и устойчивость токонесущей цилиндрической оболочки. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 2.
7. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М., Изд. «Наука», 1977, с. 150—204.
8. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. М., ГИФМЛ, 1963, с. 463—500.
9. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., ГИФМЛ, 1961, с. 272—280.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 1, 1979 Механика

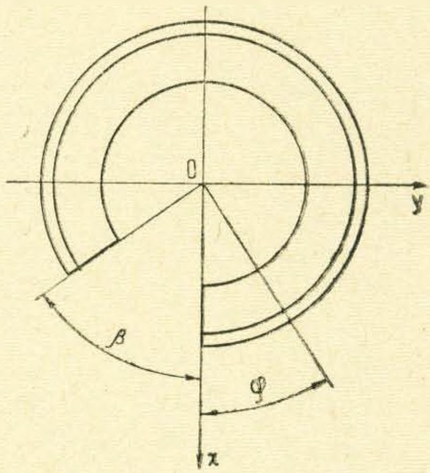
П. В. ГАЛПЧЯН, М. А. ЗАДОЯН

ПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ КРУГОВОГО СТЕРЖНЯ С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ КОЛЬЦЕВОГО СЕКТОРА

Рассматривается задача о пластическом кручении кривого стержня. Материал стержня подчиняется условию изотропного упрочнения. В сферической системе координат (r, θ, φ) боковые поверхности стержня являются координатными поверхностями $r = r_1$, $r = r_2$ ($r_1 < r_2$) и $\theta = \pi/2 \pm \alpha$, а торцевые поверхности — координатными поверхностями $\varphi = 0$ и $\varphi = \beta$ (фиг. 1, 2). Здесь r — расстояние от центра сферы, θ — полярное расстояние, а φ — угол долготы. Меридиональные поперечные сечения Ω такого стержня представляют собой кольцевые секторы (фиг. 1). Стержень скручивается противоположными силами P, (фиг. 3), действующими по оси z, соответственно в плоскостях $\varphi = 0$. $\varphi = \beta$.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

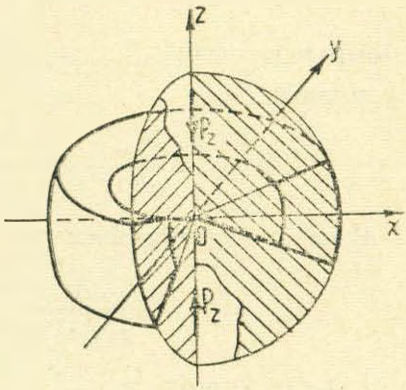
Впервые задача о кручении кривого стержня в постановке теории упругости рассматривалась в работе [1], а затем — в [2—6]. Аналогичная задача в идеальной жестко-пластической постановке для неупрочняющегося материала рассматривалась в работе [10]. В работах [11, 12] в тороидальных и цилиндрических координатах рассматривалась задача о пластическом кручении сектора кольца из упрочняющегося материала. При помощи некоторого полуобратного метода в указанных работах получено поле напряжений и деформаций, когда контур поперечных сечений совпадает с координатными линиями. В работе [12] обобщается теорема о циркуляции сдвига и исследуется случай тонкостенных стержней.

1. Принимается, что интенсивность деформаций сдвига Γ и интенсивность касательных напряжений T связаны соотношением $\Gamma = 2(1 + \lambda T^{\nu})T$, а зависимости между компонентами тензоров деформации и напряжений имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = f(T)(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad f(T) = 1 + \lambda T^{\nu} \tag{1.1}$$

Здесь σ_{ij} представляют отношения компонентов напряжения к $2G$ (G — модуль сдвига), σ — среднее давление в точке, δ_{ij} — символ Кронекера, а λ и ν — некоторые положительные физические параметры, причем для простоты принимаем ν целым. Нулевое значение параметра λ соответствует линейной упругости. Упругая часть составляющих полной деформации в (1.1) будет $\varepsilon^e_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$.

Дифференциальные соотношения между компонентами деформации и компонентами смещения в сферических координатах имеют вид



Фиг. 3.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta$$

$$2\gamma_{r\theta} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

$$2\gamma_{\theta\varphi} = \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u_\varphi}{\sin\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} \tag{1.2}$$

$$2\gamma_{\varphi r} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right)$$

Компоненты перемещения представим в виде

$$u_r = u_{r0}(r, \theta) + r\sin\theta\int\left[2\gamma_{\varphi r} - r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right)\right]d\varphi$$

$$u_\theta = u_{\theta 0}(r, \theta) + \sin\theta\int\left[2r\gamma_{\theta\varphi} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u_\varphi}{\sin\theta}\right)\right]d\varphi \tag{1.3}$$

$$u_\varphi = u_{\varphi 0}(r, \theta) + \int(\varepsilon_\varphi r\sin\theta - u_\theta\cos\theta - u_r\sin\theta)\,d\varphi$$

где u_{r0}, $u_{\theta 0}$, $u_{\varphi 0}$ — произвольные функции r и θ. Предполагая, что тензор напряжения, следовательно, и тензор деформации не зависят от φ, из (1.2) и (1.3) получаем выражения для компонентов деформации

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_{r0}}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \theta} + \frac{u_{r0}}{r}, \quad 2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_{r0}}{\partial \theta} - \frac{u_{\theta 0}}{r}$$
$$2\gamma_{\varphi r} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_{\varphi 0}}{r}\right) + \frac{B}{r}\operatorname{ctg}\theta, \quad 2\gamma_{\theta\varphi} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{u_{\varphi 0}}{r\sin\theta}\right) - \frac{B}{r} \tag{1.4}$$

где $B = \mathrm{const}$ — крутка. Полагая далее отличными от тождественного нуля только компоненты напряжения $\tau_{\theta\varphi}$, $\tau_{r\varphi}$ и компоненты деформации $\gamma_{\theta\varphi}$, $\gamma_{r\varphi}$, для перемещения можно получить

$$u_r = B\varphi\cos\theta, \quad u_\theta = -B\varphi\sin\theta, \quad u_\varphi = u_{\varphi 0}(r, \theta) + Er\sin\theta$$

$$E = \frac{1}{r^*}u_{\varphi 0}(r^*, \pi/2) - \frac{\partial u_{\varphi 0}(r^*, \pi/2)}{\partial r}, \quad r^* \in [r_1, r_2]$$

Из выражений для $\gamma_{\varphi r}$ и $\gamma_{\theta\varphi}$ (1.4) получаем уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial \gamma_{\theta\varphi}}{\partial r} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\gamma_{\varphi r}}{r\sin\theta}\right) = \frac{B}{r^2\sin^2\theta} \tag{1.5}$$

Вводя функцию напряжений

$$\tau_{\varphi r} = -\frac{B}{r^3\sin^2\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \qquad \tau_{\varphi\theta} = \frac{B}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial r} \tag{1.6}$$

из (1.1) и (1.5) получим

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{f(T)}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right] + \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{f(T)}{r^4\sin^3\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right] = \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \tag{1.7}$$

когда $(r, \theta) \in \Omega - \Gamma\Omega$

$$T = \frac{B}{r^2\sin^2\theta}\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)^2}$$

Рассматривая условия на боковой поверхности стержня, приходим к условию $\Phi = \mathrm{const}$ на контуре Γ границы области меридионального поперечного сечения $\Gamma\Omega$. В случае многосвязной области на каждом контуре Γ_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, m$) функция Φ принимает различные постоянные значения. Таким образом, задача сводится к определению функции Φ из уравнения (1.7) при условии $\Phi = \mathrm{const}$ на контуре Γ.

Выбирая начало координат за центр приведения на торцевой плоскости $\varphi = 0$, вычисляем главный момент M и проекции главного вектора P_z, P_x на оси x, z поверхностных сил

$$M = -B\iint_\Omega \frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\,d\Omega$$

Переходя к криволинейному интегралу, получаем

$$M = -B\oint_{\Gamma} \frac{\Phi}{\sin^2\theta}\,d\theta$$

В случае многосвязной области будем иметь

$$M = -B\Phi_0 \oint_{\Gamma_0} \frac{d\theta}{\sin^2\theta} + B\sum_{k=1}^{m} \Phi_k \oint_{\Gamma_k} \frac{d\theta}{\sin^2\theta} = 0$$

так как все интегралы в этом выражении равны нулю. Здесь Φ_0, Φ_k — значения Φ соответственно на внешнем и внутренних контурах Γ_0, Γ_k. Принимая $\Phi_0 = 0$ на внешнем контуре, находим

$$P_z = -B\sum_{k=1}^{m} \Phi_k \oint_{\Gamma_k} \frac{d\theta}{r\sin\theta} - \frac{\cos\theta dr}{r^2\sin^2\theta} + 2B\iint_{\Omega} \frac{\Phi}{r^3\sin^3\theta}\,d\Omega \tag{1.8}$$

В случае односвязной области будем иметь

$$P_z = 2B\iint_{\Omega} \frac{\Phi}{r^3\sin^3\theta}\,d\Omega \tag{1.9}$$

Аналогично находим

$$P_x = B\Phi_0 \oint_{\Gamma_0} \frac{\cos\theta d\theta}{r\sin^2\theta} + \frac{dr}{r^2\sin\theta} - B\sum_{k=1}^{m} \Phi_k \oint_{\Gamma_k} \frac{\cos\theta d\theta}{r\sin^2\theta} + \frac{dr}{r^2\sin\theta} = 0$$

так как

$$\oint_{\Gamma_k} \frac{\cos\theta d\theta}{r\sin^2\theta} + \frac{dr}{r^2\sin\theta} = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ m)$$

Таким образом, P_z будет равнодействующей данной системы поверхностных сил.

В области меридионального сечения возьмем произвольный замкнутый контур Γ_*. Область, ограниченную этим контуром, обозначим Ω_*. Интегрируя обе части уравнения (1.7) в области Ω_* и переходя к криволинейному интегралу, получим

$$\oint_{\Gamma_*} \frac{f(T)}{r^3\sin^3\theta}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial r}\,r d\theta - \frac{1}{r}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\,dr\right] = -\oint_{\Gamma_*} \frac{d\theta}{r\sin^3\theta}$$

Имея в виду, что $r d\theta = -ds\cos(t,\ r)$ и $dr = ds\cos(t,\ \theta)$, где t — направление внешней нормали к контуру Γ_*, а s — дуга этого контура, окончательно получим

$$\oint\limits_{\Gamma_*} \frac{1}{r^3 \sin^3\theta} f\left(\frac{B}{r^2\sin^2\theta} \,|\operatorname{grad}\Phi|\right) \frac{\partial\Phi}{\partial t} ds = \oint\limits_{\Gamma_*} \frac{d\theta}{r\sin^3\theta} \tag{1.10}$$

Полученное уравнение является обобщением известной теоремы о циркуляции касательного напряжения при кручении, которой можно пользоваться при рассмотрении многосвязных областей.

2. Рассмотрим случай, когда меридиональное сечение стержня есть кольцевой сектор. Решение уравнения (1.7) при условии $\Phi = 0$ на $\Gamma\Omega$ ищем в виде

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \Phi_k \tag{2.1}$$

Преобразуя (1.7), подставляя в него разложение (2.1) и вводя новую переменную $\theta = \frac{\pi}{2} + \omega$ $(-\alpha \leqslant \omega \leqslant \alpha)$, приходим к системе рекуррентных первых граничных задач

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial\Phi_n}{\partial r} + \frac{3}{r^2}\operatorname{tg}\omega\frac{\partial\Phi_n}{\partial\omega} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial\omega^2} = -Q_n, \quad \text{когда } (r,\ \omega)\in\Omega-\Gamma\Omega \\ \Phi_n = 0, \quad \text{когда } (r,\ \omega)\in\Gamma\Omega \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots)\end{gathered} \tag{2.2}$$

где $Q_0 = -1$, а при $n \geqslant 1$

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{grad} F_k \operatorname{grad}\Phi_{n-k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} Q_{n-k-1} F_k$$

При $\nu = 2$

$$F_n = \frac{B^2}{r^4\cos^4\omega}\sum_{k=0}^{n}\operatorname{grad}\Phi_k \operatorname{grad}\Phi_{n-k}$$

Здесь Φ_0 характеризует линейно-упругое состояние.

Можно показать, что задача (2.2) имеет единственное решение и тождественно удовлетворяется условие разрешимости, а соответствующая однородная задача имеет только нулевое решение.

3. Решение задачи (2.2) ищем в виде ряда

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_{nk}(\omega) R_k(r) \tag{3.1}$$

где

$$R_k(r) = \frac{\sqrt{2}}{\left(\ln\frac{r_2}{r_1}\right)^{1/2}} r^{3/2}\sin\left(s_k \ln\frac{r}{r_1}\right), \quad s_k = \frac{k\pi}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

собственные функции задачи (2.2).

Разложим $r^2 Q_n(r, \omega)$ в ряд по $R_k(r)$

$$r^2 Q_n(r, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_{nk}(\omega) R_k(r) \tag{3.2}$$

Имея в виду, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^4} R_k R_l \, dr = \begin{cases} 0 \text{ при } k \neq l \\ 1 \text{ при } k = l \end{cases}$$

получим для коэффициентов

$$Q_{nk}(\omega) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\xi^2} Q_n(\xi, \omega) R_k(\xi) \, d\xi$$

Подставив разложения (3.1) и (3.2) в первое уравнение (2.2), для коэффициентов Ω_{nk} получаем уравнения

$$\Omega''_{nk} + 3 \operatorname{tg} \omega \Omega'_{nk} - \mu_k \Omega_{nk} = -Q_{nk}, \qquad \mu_k = \frac{k^2 \pi^2}{\ln^2 \frac{r_2}{r_1}} + \frac{9}{4} \tag{3.3}$$

удовлетворяющие граничным условиям $\Omega_{nk}(\pm \alpha) = 0$.

Подстановка $\bar{\Omega}_{nk}(\omega) = (x^2 - 1)^2 u_{nk}(x)$, $x = \sin \omega$ переводит соответствующее (3.3) однородное уравнение в уравнение

$$(x^2 - 1) u''_{nk} + 6x u'_{nk} + (4 - \mu_k) u_{nk} = 0, \quad |x| < 1$$

общий интеграл которого будет

$$u_{nk} = C_1 P''_{\nu_k}(x) + C_2 Q''_{\nu_k}(x), \qquad \nu_k = -\frac{1}{2} + \frac{k\pi i}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

где $P_{\nu_k}(x)$ и $Q_{\nu_k}(x)$ — сферические функции Лежандра первого и второго родов с индексом ν_k.

Общий интеграл однородного уравнения (3.3) будет

$$\bar{\Omega}_{nk} = C_{1k} \cos^2 \omega P^2_{\nu_k}(\sin \omega) + C_{2k} \cos^2 \omega Q^2_{\nu_k}(\sin \omega)$$

где $P^2_{\nu_k}(x)$ и $Q^2_{\nu_k}(x)$ — присоединенные сферические функции.

Разыскивая частное решение Ω^*_{nk} по методу вариации произвольных постоянных C_{1k} и C_{2k}, получим общий интеграл уравнения (3.3)

$$\Omega_{nk}(\omega) = \tilde{\Omega}_{nk}(\omega) + \Omega^*_{nk}(\omega) = C_{1k}\cos^2\omega P^2_{\nu_k}(\sin\omega) + C_{2k}\cos^2\omega Q^2_{\nu_k}(\sin\omega) -$$

$$-\cos^2\omega Q^2_{\nu_k}(\sin\omega)\int\limits_{-\alpha}^{\omega}\frac{Q_{nk}(\psi)\,P^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,d\psi}{\cos^2\psi\,[P^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,Q^3_{\nu_k}(\sin\psi) - Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,P^3_{\nu_k}(\sin\psi)]} +$$

$$+\cos^2\omega P^2_{\nu_k}(\sin\omega)\int\limits_{-\alpha}^{\omega}\frac{Q_{nk}(\psi)\,Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,d\psi}{\cos^2\psi\,[P^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,Q^3_{\nu_k}(\sin\psi) - Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,P^3_{\nu_k}(\sin\psi)]}$$

Определив C_{1k} и C_{2k} из граничных условий (3.3), окончательно получим

$$\Omega^*_{nk}(\omega) = -\int\limits_{\omega}^{\alpha} Q_{nk}(\psi)\,\frac{M_{\nu_k}}{N_{\nu_k}}\,d\psi -$$

$$-\int\limits_{-\alpha}^{\omega} Q_{nk}(\psi)\,\frac{\cos^2\omega\,[Q^2_{\nu_k}(\sin\omega)\,P^2_{\nu_k}(\sin\psi) - P^2_{\nu_k}(\sin\omega)\,Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)]}{\cos^2\psi\,[P^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,Q^3_{\nu_k}(\sin\psi) - Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,P^3_{\nu_k}(\sin\psi)]}\,d\psi \qquad (3.4)$$

$$M_{\nu_k} = \cos^2\omega\,[P^2_{\nu_k}(\sin\omega)\,Q^2_{\nu_k}(-\sin\alpha) - Q^2_{\nu_k}(\sin\omega)\,P^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)]\times$$

$$\times[Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\,P^2_{\nu_k}(\sin\psi) - P^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\,Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)]$$

$$N_{\nu_k} = \cos^2\psi\,[Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\,P^2_{\nu_k}(-\sin\alpha) - P^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\,Q^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)]\times$$

$$\times[P^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,Q^3_{\nu_k}(\sin\psi) - Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,P^3_{\nu_k}(\sin\psi)]$$

Подставив (3.4) в (3.1), после некоторых преобразований получим решение задачи (2.2) в виде

$$\Phi_n(r,\omega) = \iint\limits_{\Omega} Q_n(\xi,\psi)\,G(\xi,\psi;r,\omega)\,d\Omega$$

где $G(\xi,\psi;r,\omega)$ — функция Грина задачи (2.2)

$$G(\xi,\psi;r,\omega) =$$

$$= \frac{\cos^2\omega}{\xi^3\cos^2\psi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,P^2_{\nu_k}(-\sin\alpha) - P^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,Q^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)]}{[Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\,P^2_{\nu_k}(-\sin\alpha) - P^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\,Q^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)]}\times$$

$$\times\frac{[P^2_{\nu_k}(\sin\omega)\,Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha) - P^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\,Q^2_{\nu_k}(\sin\omega)]}{[P^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,Q^3_{\nu_k}(\sin\psi) - Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,P^3_{\nu_k}(\sin\psi)]}\,R_k(\xi)\,R_k(r) \qquad \text{при} \quad \psi\leqslant\omega$$

$$G(\xi, \psi; r, \omega) =$$

$$= \frac{\cos^2 \omega}{\xi^3 \cos^2 \psi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[Q^2_{\nu_k}(\sin \omega) P^2_{\nu_k}(-\sin \alpha) - P^2_{\nu_k}(\sin \omega) Q^2_{\nu_k}(-\sin \alpha)]}{[Q^2_{\nu_k}(\sin \alpha) P^2_{\nu_k}(-\sin \alpha) - P^2_{\nu_k}(\sin \alpha) Q^2_{\nu_k}(-\sin \alpha)]} \times$$

$$\times \frac{[Q^2_{\nu_k}(\sin \alpha) P^2_{\nu_k}(\sin \psi) - P^2_{\nu_k}(\sin \alpha) Q^2_{\nu_k}(\sin \psi)]}{[P^2_{\nu_k}(\sin \psi) Q^3_{\nu_k}(\sin \psi) - Q^2_{\nu_k}(\sin \psi) P^3_{\nu_k}(\sin \psi)]} R_k(\xi) R_k(r) \quad \text{при } \psi \geqslant \omega$$

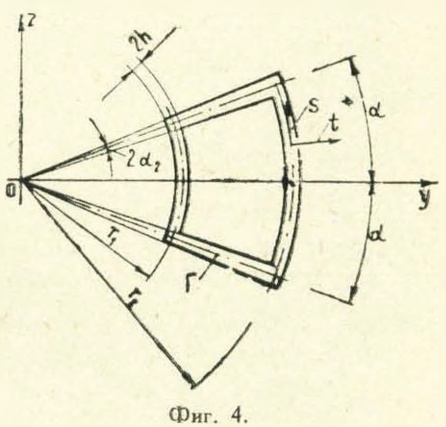
Переходя к доказательству сходимости ряда (2.1), отметим, что уравнение (2.2) в области Ω является равномерно эллиптическим с коэффициентами, принадлежащими пространству C_{α_1}, $\alpha_1 \in (0, 1)$. Следовательно, справедливы априорные оценки Шаудера [13]. Область Ω и граничные значения Φ_n гладкие. При этих условиях $\Phi_0 \in C_{2+\alpha_1}$, так как $Q_0 \in C_{\alpha_1}$, и вообще из выражения Q_n (2.2) следует, что $Q_n \in C_{\alpha_1}$, следовательно, $\Phi_n \in C_{2+\alpha_1}$.

Вводя норму в C_{α_1}

$$\| X \| = \max_{M \in \Omega} | X(M) | + \max_{M, N \in \Omega} \frac{| X(M) - X(N) |}{\overline{MN}^{\alpha_1}}$$

и применяя априорные оценки Шаудера $\| D^2\Phi_n \| \leqslant c^* \| Q_n \|$, где c^* — постоянная, зависящая от геометрии области, аналогично [12] показывается, что ряд (2.1) и ряды, составленные из производных $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^k D\Phi_k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^k D^2\Phi_k$, сходятся абсолютно и равномерно с некоторым радиусом сходимости.

4. Рассмотрим тонкостенный стержень с замкнутым профилем (фиг. 4) в виде двухсвязной области, толщиной стенки $2h$ ($2\alpha_2 r_2 = 2h$). Переходя



Фиг. 4.

к координатной системе (t, s), где t направлено по внешней нормали, а s — по касательной к срединной линии Γ меридионального сечения, из (1.6) получим

$$\tau_t = \frac{B}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \qquad \tau_s = -\frac{B}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Преобразуя уравнение (1.7) к координатной системе (t, s) и пренебрегая ввиду малости толщины стенки компонентом напряжения τ_t, приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[f(T) \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] = 1, \qquad T = \frac{B}{S(s)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{4.1}$$

где

$$S(s) = \begin{cases} (r_1 + s)^2 \cos^2 \alpha & \text{при } r_1 \leqslant r \leqslant r_2,\ \theta = \pi/2 + \alpha \\ r_2^2 \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha - \dfrac{s}{r_2}\right) & \text{при } r = r_2,\ \pi/2 - \alpha \leqslant \theta \leqslant \pi/2 + \alpha \\ (r_2 - s)^2 \cos^2 \alpha & \text{при } r_1 \leqslant r \leqslant r_2,\ \theta = \pi/2 - \alpha \\ r_1^2 \sin\left(\dfrac{s}{r_1} + \dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) & \text{при } r = r_1,\ \pi/2 - \alpha \leqslant \theta \leqslant \pi/2 + \alpha \end{cases}$$

Интегрируя уравнение (4.1) при $\nu = 1$, получаем

$$\Phi = -\frac{S(s)}{2\lambda B} t + \frac{2\lambda B}{3S(s)} \sqrt{\left(x + \frac{S(s)}{\lambda B} t\right)^3} + k_2(s) \tag{4.2}$$

где $K_1(s)$ и $K_2(s)$ — произвольные функции, определяющиеся из граничного условия,

$$x = \left[\frac{S(s)}{2\lambda B}\right]^2 + \frac{K_1(s)\, S(s)}{\lambda B}$$

Полагая на внешнем контуре $\Phi = 0$, а на внутреннем $\Phi = \Phi_1$, найдем

$$K_2(s) = \frac{hS(s)}{2\lambda B} - \frac{2\lambda B}{3S(s)} \sqrt{\left(x + \frac{hS(s)}{\lambda B}\right)^3}$$

где x определяется из уравнения

$$x^4 + b_1 x^3 + c_1 x^2 + d_1 x + e_1 = 0 \tag{4.3}$$

где

$$b_1 = -\frac{3\chi}{4h^2\nu}\left(\frac{\lambda B}{S(s)}\right)^3, \qquad c_1 = \frac{2h^2}{\nu}, \qquad d_1 = -\frac{9\chi}{4\nu}$$

$$e_1 = \frac{27\chi}{64h^2\nu} + \frac{h^4}{3\nu}\left(\frac{S(s)}{\lambda B}\right)^2$$

$$\chi = \Phi_1^2 - \frac{2hS(s)}{\lambda B}\Phi_1 + \left(\frac{hS(s)}{\lambda B}\right)^2, \qquad \nu = 2 + \left(\frac{\lambda B}{S(s)}\right)^2$$

Корни уравнения (4.3), как известно, совпадают с корнями двух уравнений

$$x^2 + \frac{1}{2}(b_1 + A)x + \left(y + \frac{b_1 y - d_1}{A}\right) = 0$$

где $A = \pm\sqrt{8y + b_1^2 - 4c_1}$, а y — какой-либо действительный корень кубического уравнения

$$8y^3 + by^2 + cy + d = 0$$

где

$$b = -4c_1, \; c = 2b_1d_1 - 8e_1, \; d = e_1(4c_1 - b_1^2) - d_1^2$$

Пренебрегая двойным интегралом, из (1.8) получим

$$\Phi_1 = \frac{r_1 r_2 P_z}{BH(r_1 - r_2)}, \qquad H = \frac{2\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \ln\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} \tag{4.4}$$

Подставив Φ_1 из (4.4) в выражение для x, а Φ — из (4.2) в (1.10), получим уравнение для определения B

$$\oint_\Gamma \frac{x\,ds}{[S(s)]^{5/2}} = \frac{1}{2k^2B^2}\left[\frac{1}{\cos\alpha}\ln\frac{r_2}{r_1} + \ln\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}\right] + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

В случае линейной упругости из (4.1) будем иметь

$$\Phi = \frac{1}{2}t^2 + K_3(s)t + K_4(s) \tag{4.5}$$

Полагая на внешнем контуре $\Phi = 0$, а на внутреннем $\Phi = \Phi_1$, найдем произвольные функции $K_3(s)$ и $K_4(s)$

$$K_3 = -\frac{\Phi_1}{2h} = \text{const}, \qquad K_4 = \frac{1}{2}(\Phi_1 - h^2) = \text{const}$$

Из (1.10) и (4.4) определим B, а затем напряжение τ_s

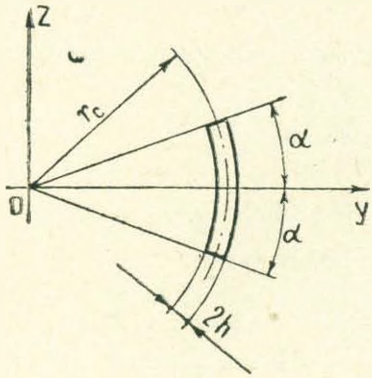
$$B = \frac{(r_1^2 + r_2^2)P_z}{2hH(r_1 - r_2)^2}, \qquad \tau_s = \frac{B}{S(s)}\left[\frac{(r_1 - r_2)r_1r_2}{r_1^2 + r_2^2} - t\right]$$

Для простоты вычисления в общем случае закона упрочнения (1.1), ввиду малости толщины стенки $2h$, функцию напряжения приближенно можно взять также в виде (4.5). Тогда имеем

$$B = \frac{(r_1^2 + r_2^2)P_z}{2hH(r_1 - r_2)^2} - \frac{2kr_1r_2}{H(r_1 - r_2)}\left(\frac{r_1r_2P_z}{2hH(r_2 - r_1)}\right)^{\nu - 1}\oint_\Gamma \frac{ds}{[S(s)]^{\nu + 3/2}}$$

$$\tau_s = \frac{B}{S(s)}\left[\frac{r_1r_2P_z}{2BhH(r_1 - r_2)} - t\right]$$

5. Положим $r = r_c + \zeta$, где $|\zeta| \leq h$, $r_c = (r_1 + r_2)/2$. Если $2h/r_c \ll 1$ и $h/\alpha r_c \ll 1$, тогда будем иметь тонкостенный стержень открытого профиля, вытянутый по направлению полярного расстояния (фиг. 5).



Фиг. 5.

Полагая $\gamma_{\varphi r} \approx 0$, $\tau_{\varphi r} \approx 0$, из (1.5) получаем

$$\frac{\partial \gamma_{\theta\varphi}}{\partial r} = \frac{B}{r^2 \sin^2 \theta} \tag{5.1}$$

Согласно (1.1) и (1.6), подставим $\gamma_{\theta\varphi}$ в (5.1) и проинтегрируем, принимая $\tau_{\theta\varphi} = 0$ при $r = r_c$. Тогда получим

$$f(T) \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{r^2}{r_c} - r$$

или в новых переменных ζ

$$f(T) \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = -\zeta \tag{5.2}$$

Интегрируя (5.1) в пределах от r_c до $r_c + \zeta$, получим

$$\gamma_{\theta\varphi} = \frac{B\zeta}{r_c^2 \sin^2 \theta} \tag{5.3}$$

Интегрируя (5.2), с учетом (5.3), получим

$$\Phi = -\int_{-h}^{\zeta} \zeta f^* \left(\frac{|B\zeta|}{r_c^2 \sin^2 \theta} \right) d\zeta \tag{5.4}$$

где $f^*(\Gamma) = 1/f(T)$. Параметр B определится из (1.9)

$$P_z = -\frac{2B}{r_c^2} \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \frac{d\theta}{\sin^3 \theta} \int_{-h}^{h} d\zeta \int_{-h}^{\zeta} \eta f^* \left(\frac{|B\eta|}{r_c^2 \sin^2 \theta} \right) d\eta =$$

$$= \frac{4B}{r_c^2} \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \frac{d\theta}{\sin^3 \theta} \int_{0}^{h} \eta^2 f^* \left(\frac{|B|\eta}{r_c^2 \sin^2 \theta} \right) d\eta \tag{5.5}$$

При $\nu = 1$ будем иметь

$$T^2 + \frac{1}{\lambda} T - \frac{\Gamma}{2\lambda} = 0$$

откуда

$$T = -\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{2|B\zeta|}{\lambda r_c^2 \sin^2\theta}}$$

Подставив это выражение для T в (5.5), окончательно получим

$$P_z = \frac{8Br_c^4(2+\cos^2\alpha)\sin\alpha}{45\lambda^3|B^3|} - \frac{8r_c^2h^2\sin\alpha}{\lambda^2 B} +$$

$$+\frac{4r_c^2h}{5\lambda^2 B}\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha}\sin\theta\sqrt{\left(1+\frac{2\lambda h|B|}{r_c^2\sin^2\theta}\right)^3}\,d\theta -$$

$$-\frac{4Br_c^4}{15\lambda^3|B^3|}\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha}\sin^3\theta\sqrt{\left(1+\frac{2\lambda h|B|}{r_c^2\sin^2\theta}\right)^3}\,d\theta$$

Подставив (5.4) в (1.6), будем иметь

$$\tau_{\varphi\theta} = -\frac{2B\zeta}{(r_c+\zeta)^2\left(1+\sqrt{1+\frac{2\lambda|B\zeta|}{r_c^2\sin^2\theta}}\right)\sin^2\theta} \approx$$

$$\approx -\frac{2B\zeta}{r_c^2\left(1+\sqrt{1+\frac{2\lambda|B\zeta|}{r_c^2\sin^2\theta}}\right)\sin^2\theta}$$

В случае линейной упругости $f^* \equiv 1$. Тогда из (5.5), (5.4) и (1.6) получаем

$$B = \frac{3r_c^2P_z}{2Hh^3}, \qquad \Phi = -\frac{1}{2}(\zeta^2 - h^2)$$

$$\tau_{\varphi\theta} = -\frac{3r_c^2P_z}{2Hh^3}\frac{\zeta}{(r_c+\zeta)^2\sin^2\theta} \approx -\frac{3P_z}{2Hh^3}\frac{\zeta}{\sin^2\theta}$$

Аналогично можно получить решение и для тонкостенного стержня с профилем, вытянутым по направлению r.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 23 I 1973

Պ. Վ. ԳԱԼՊՃՅԱՆ, Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

ՕՂԱԿԱՅԻՆ ՍԵԿՏՈՐԻ ՁԵՎ ՈՒՆԵՑՈՂ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՁՈՂԻ ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է շրջանային օղակի սեկտորի ձև ունեցող կոր ձողի ոլորումը, երբ միջօրեականային կտրվածքներն ունեն օղակային սեկտորի ձև։ Ձողը ոլորվում է ծայրային կտրվածքներում ազդող և օղակի առանցքով ուղղված հակադիր ուժերով։ Ձողի նյութը ենթարկվում է իզոտրոպ ամրապնդման։

Խնդիրը բերվում է լարումների ֆունկցիայի նկատմամբ առաջին եզրային խնդրին։ Այդ խնդրի լուծումը փնտրվում է աստիճանային շարքի տեսքով, ըստ մի որոշ ֆիզիկական պարամետրի և հանգեցվում է ռեկուրրենտ առաջին եզրային խնդիրների անվերջ համակարգի։ Կառուցվում են այդ խնդիրների լուծումները և ցույց է տրվում շարքի զուգամիտությունը։

Բերված են նաև փակ և բաց տրամատավորության բարակապատ ձողերի համար մոտավոր լուծումները։

THE PLASTIC TORSION OF A CIRCULAR BAR WITH A CIRCULAR SECTOR CROSS-SECTION

P. V. GALPCHIAN, M. A. ZADOYAN

Summary

The torsion of a curved bar in the form of a circular ring sector, whose meridional sections are of a circular sector shape, is considered. The bar is twisted by the opposite forces acting to the end sections along the axis of the ring. The material of the bar obeys the condition of isotropic strengthening.

The problem is reduced to a first boundary one relative to the function of strain. The solution of the latter is sought in the form of a power series by certain physical parameter and is reduced to an infinite system of recurrent first boundary problems. The solutions of these problems are given and the series convergence is shown.

The approximate solutions for thin bars with closed and open profiles are also presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Göhner O.* Spannugsverteilung in einem an den Endquerschnitten belasteten Ringstabsektor. Ingr-Arch., 1931, Bd2, p. 381—414.
2. *Freiberger W.* The uniform torsion of an incomplate tore. Austral. J. Scient. Res. Ser. A, 1949, vol. 2, No. 3, p. 354—375.

3. *Larghaar H. L.* Torsion of curved beams of rectangular cross section. J. Appl. Mech., 1952, vol. 19, No. 1.
4. *Рабинович А. Л.* Кручение элемента кругового кольца. Исследования по механике и прикладной математике. Тр. Моск. физ.-техн. ин-та, 1958, вып. 1.
5. *Stein I.* Stress analysis of a helical coil. Trans, ASME, ser. E. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, No. 1, p. 122—126. (Руск. перев.: Прикл. механ., Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. Е. 1963, т. 30, № 1).
6. *Reissner E.* Not on the problem of twisting of a circular ring sector. Quart. Appl. Math., 1949, vol. 7, No. 3, p. 342--347.
7. *Freiberger W.* The uniform torsion of a perfectly plastic circular ring. Commonwealth of Australia. Aeronautical Research Laboratories, Report ARLSM 2B, 1953.
8. *Freiberger W., Prager W.* Plastic twisting of thich-walled circular ring sectors. J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, No. 3, p. 461—463.
9. *Wang A. J., Prager W.* Plastic twisting of a circular ring sector. J. Mech. and Phys. Solids, 1955, vol. 3, p. 169—175.
10. *Freiberger W.* Elastic-plastic torsion of circular ring sectors. Quart. Appl. Math., 1956, vol. 14, No. 3, p. 259—269.
11. *Задоян М. А.* Пластическое кручение неполного тора. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 2.
12. *Задоян М. А.* Пластическое кручение сектора кольца. Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 1.
13. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 1, 1979 Механика

А. А. ЗЕВИН, И. Г. ПАДВА

ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА В ЗАДАЧАХ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Изображение по Лапласу решения квазистатической задачи наследственной теории упругости можно получить на основании принципа соответствия [1]. В простейших случаях оригинал может быть найден аналитически; в общем случае применяются численные методы обращения, использующие значения изображения при некоторых дискретных значениях параметра преобразования p_i.

Если свойства среды описываются экспоненциальными ядрами и изображение $\bar{\varphi}(p)$ известно в аналитической форме, то значения $\bar{\varphi}(p_i)$ могут быть вычислены с необходимой точностью и серьезных затруднений при переходе к оригиналам, вообще говоря, не возникает. Однако, во многих практически важных случаях зависимость решения задачи теории упругости от констант материала в явном виде не известна, но задача может быть решена численно. Тогда значения $\bar{\varphi}(p_i)$ могут быть получены с ограниченной точностью, так как определяются из численного решения задачи теории упругости с константами материала, зависящими от p_i.

Эффективность ряда методов численного обращения исследовал Кост [2]. Большинство методов оказались крайне чувствительны к точности, с которой известны значения $\bar{\varphi}(p_i)$. Наилучший результат получен при применении метода наименьших квадратов Шепери [1], который основан на приближении решения в оригиналах линейной комбинацией экспоненциальных функций.

Если свойства среды описываются слабо сингулярными ядрами, при численном обращении могут возникнуть существенные трудности. Метод Шепери становится очень чувствительным к точности, с которой задано изображение в узловых точках, что показано на примере в § 4. Более эффективен метод аппроксимаций А. А. Ильюшина [3, 4], однако он приспособлен к случаю, когда свойства среды описываются одним оператором.

В настоящей статье полученное ранее [5] интегральное представление функции дробно-экспоненциальных операторов распространяется на операторы более общего вида и на примерах иллюстрируется его эффективность. Развиты два метода численного обращения преобразования Лапласа, основанные на разложении решения по интегралам от дробно-экспоненциальных функций. Методы применимы к решению задач для анизотропных или кусочно-неоднородных тел, свойства которых описываются несколькими независимыми операторами.

§ 1. Пусть свойства в общем случае анизотропного или кусочно неоднородного тела описываются операторами

$$\bar{G}_k = G_{k0}[1 - \Gamma_k^*] \quad (k = 1, \dots, n) \tag{1.1}$$

где G_{k0} — константы, Γ_k^* - операторы типа свертки с ядрами вида

$$\Gamma_k(t) = \sum_{i=1}^{m} \chi_{ki} \mathrm{Э}_\alpha(-\vartheta_{ki}, t), \quad -1 < \alpha < 0, \ \vartheta_{ki} > 0 \tag{1.2}$$

$\mathrm{Э}_\alpha(-\vartheta_\alpha, t)$ — дробно-экспоненциальная функция, введенная Ю. Н. Работновым [6].

Выбор ядер специального вида по существу не является ограничением. Дробно-экспоненциальные функции хорошо отвечают опытным данным, и для описания экспериментальных кривых $\Gamma_k(t)$ достаточно в представлении (1.2) удержать от 1 до 3 слагаемых.

Изображение по Лапласу функции $\mathrm{Э}_\alpha(-\vartheta, t)$

$$L\{\mathrm{Э}_\alpha(-\vartheta, t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} \mathrm{Э}_\alpha(-\vartheta, t)\, dt = \omega(p) = \frac{1}{p^\nu + \vartheta}, \quad \nu = 1 + \alpha \tag{1.3}$$

Пусть $\varphi(t)$ — некоторая величина, характеризующая напряженно-деформированное состояние в фиксированной точке тела, причем решение квазистатической упругой задачи имеет вид

$$\varphi_0(t) = F_0[G_{10}, \dots, G_{n0}]\, y(t) \tag{1.4}$$

где $y(t)$ — известная функция, пропорционально которой изменяются внешние воздействия. Тогда на основании принципа соответствия [1] изображение $\varphi(t)$

$$\bar{\varphi}(p) = F_0\left[G_{10}\left(1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{\chi_{1i}}{p^\nu + \vartheta_{1i}}\right), \dots, G_{n0}\left(1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{\chi_{ni}}{p^\nu + \vartheta_{ni}}\right)\right] \bar{y}(p) \tag{1.5}$$

В работе [5] получено интегральное представление оригинала выражения (1.5), которое при $y(t) = 1$ (нагрузка постоянна) приводится к виду

$$\varphi(t) = F_0[G_{1\infty}, \dots, G_{n\infty}] - \frac{1}{\nu\pi}\left[\int_0^1 \exp\left(-u^{-\frac{1}{\nu}} t\right) \frac{R(u)\, du}{u} + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \exp\left(-u^{-\frac{1}{\nu}} t\right) \frac{W(u)\, du}{u}\right] \tag{1.6}$$

Здесь $G_{k\infty} = G_{k0}\left[1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{\chi_{ki}}{\vartheta_{ki}}\right]$; $R(u)$ и $W(u)$ — мнимые части функций, получаемые из решения задачи теории упругости с комплексными константами материала, зависящими от действительного параметра u:

$$R(u) = \operatorname{Im} F_0[B_1(u), \ldots, B_n(u)]; \quad W(u) = \operatorname{Im} F_0[D_1(u), \ldots, D_n(u)] \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} B_k(u) &= G_{k0}\left[1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{Z_{ki}}{u\exp(-i\nu\pi) + \theta_{ki}}\right] \\ D_k(u) &= G_{k0}\left[1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{Z_{ki}u}{\exp(-i\nu\pi) + u\theta_{ki}}\right] \end{aligned} \tag{1.8}$$

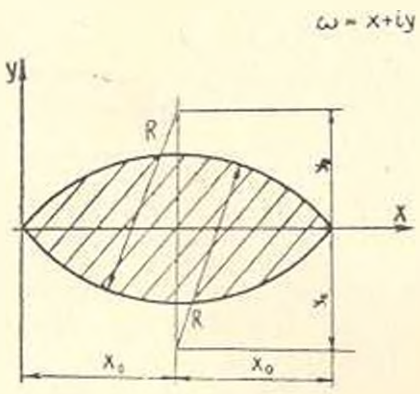
Условия, при которых справедлива формула (1.6), удобно определить следующим образом. Введем переменную $\omega(p) = 1/(p^{\nu} + \theta)$ ($\theta > 0$ произвольно). Тогда функция F_0 из (1.5) может быть представлена в виде

$$F_0\left[G_{10}\left(1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{Z_{1i}\omega}{1 - (\theta - \theta_{1i})\omega}\right), \ldots, G_{n0}\left(1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{Z_{ni}\omega}{1 - (\theta - \theta_{ni})\omega}\right)\right] = \\ = F(\omega) \tag{1.9}$$

Можно показать, что представление (1.6) справедливо, если функция $F(\omega)$ аналитична в заштрихованной области, показанной на фиг. 1.

В [5] интегральное представление (1.6) получено при несколько более жестких ограничениях.

Выражение (1.6) позволяет эффективно вычислять $\varphi(t)$, используя формулы численного интегрирования. Пусть u_j ($j = 1, \ldots, r$) — узлы выбранной квадратурной формулы, приведенные к интервалу $[0, 1]$. Значения функций $R(u)$ и $W(u)$ в узловых точках можно найти, заменяя в решении задачи теории упругости константы G_{k0} величинами $B_k(u_j)$ и $D_k(u_j)$ и выделяя мнимую часть полученных выражений.



Фиг. 1.

Можно показать, что подынтегральные функции в (1.6) непрерывны, поэтому вычисление квадратур не представляет затруднений. Сходимость численной квадратуры при увеличении числа узлов иллюстрируется на примерах в § 4.

Представление (1.6) можно обобщить на случай, когда свойства тела описываются ядрами вида

$$R_k(t) = e^{-\beta t} \sum_{i=1}^{m} Z_{ki} \text{Э}_{\alpha}(-\theta_{ki}, t), \quad -1 < \alpha < 0, \quad \theta_{ki} > 0 \tag{1.10}$$

Каждое слагаемое в (1.10) представляет собой резольвенту ядра $\exp(-\beta t)\, t^{\alpha}/\Gamma(\alpha + 1)$, предложенного А. Р. Ржаницыным [7]. Ядра вида (1.10) и интегралы от них протабулированы [4].

Повторяя выкладки работы [5] и используя теорему смещения изображения [8], получим

$$
\varphi(t) = F_0[G_{1\infty}, \ldots, G_{n\infty}] - \frac{1}{\pi}\left| \int_0^1 \exp[-(\rho + u^{\frac{1}{\gamma}})] \frac{R(u) u^{\frac{1}{\gamma}-1} du}{(u^{\frac{1}{\gamma}} + \rho)} + \right.
$$

$$
\left. + \int_0^1 \exp[-(\rho + u^{-\frac{1}{\gamma}})] \frac{W(u)\, du}{(1 + \rho u^{1/\gamma}) u} \right| \qquad (1.11)
$$

Здесь $G_{k\infty} = G_{k0}\left|1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{\gamma_{ki}}{\rho^{\gamma} + \theta_{ki}}\right|$, а функции $R(u)$ и $W(u)$ определяются выражениями (1.7).

§ 2. При численном решении задачи теории упругости для определения $R(u_j)$ и $W(u_j)$ необходимо решить $2r$ задач с комплексными константами материала, равными $B_k(u_j)$ и $D_k(u_j)$, $j = 1, \ldots, r$. Это может вызвать определенные трудности, так как в существующих программах для решения задач теории упругости обычно предусматривается, что константы материала — действительные числа.

Приведем два метода численного обращения преобразования Лапласа, использующие значения изображения в узлах на действительной положительной полуоси. Эти значения могут быть найдены из решения задачи теории упругости с действительными константами материала. Методы основаны на разложении оригинала по дробно-экспоненциальным функциям и оказываются эффективными, если свойства наследственно-упругого тела описываются слабо сингулярными ядрами.

Представим решение наследственной задачи в виде

$$
\varphi(t) = y(t) + \int_0^t \Theta(\tau)\, y(t - \tau)\, d\tau \qquad (2.1)
$$

где $y(t)$ — известная функция, а изображение $\overline{\Theta}(p)$ функции $\Theta(t)$ может быть найдено в некоторых узлах p_i. Для вычисления выражения (2.1) достаточно найти $\Theta(t)$.

Если ядра операторов, фигурирующих в исходных уравнениях состояния, имеют особенности порядка α, то функция $\Theta(t)$ имеет особенность того же порядка.

Рассмотрим сначала случай, когда $-0.5 < \alpha < 0$.

Будем разыскивать приближение $\Theta(t)$ в виде

$$
\Theta(t) \approx \Theta_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \Im_\alpha(-\theta_k, t) \qquad (2.2)
$$

где θ_k — заданные параметры, γ_k — неопределенные коэффициенты. Параметр α в выражении (2.2) положим равным порядку особенности функции $\Theta(t)$.

Коэффициенты γ_k определим из условия минимума квадратичной погрешности в пространстве оригиналов

$$\varepsilon^2 = \int_0^\infty \left| \Theta(t) - \sum_{k=1}^{N} \gamma_k Э_\nu(-\vartheta_k, t) \right|^2 dt \tag{2.3}$$

Приравнивая нулю производные по γ_k выражения (2.3), получим систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{N} \delta_{ik}\gamma_k = b_i \quad (i = 1,\dots, N) \tag{2.4}$$

Здесь

$$\delta_{ik} = \int_0^\infty Э_\nu(-\vartheta_i, t)\, Э_\nu(-\vartheta_k, t)\, dt \tag{2.5}$$

$$b_i = \int_0^\infty \Theta(t)\, Э_\nu(-\vartheta_i, t)\, dt \tag{2.6}$$

Подынтегральные функции в (2.5) и (2.6) при $t = 0$ имеют особенность порядка $2\alpha > -1$, поэтому интегралы в нуле сходятся.

Так как решение упруго-наследственной задачи стремится к конечному пределу при действии постоянной нагрузки, интеграл

$$I = \int_0^\infty \Theta(t)\, dt < \infty \tag{2.7}$$

Из последнего выражения и монотонного стремления функции $Э_\nu(-\vartheta, t)$ к нулю при $t \to \infty$ следует сходимость интегралов (2.5), (2.6) на бесконечности.

Для вычисления коэффициентов δ_{ik} воспользуемся интегральным представлением дробно-экспоненциальной функции, которое является частным случаем представления ядра аналитической функции дробно-экспоненциального оператора, полученного в [5]:

$$Э_\nu(-\vartheta, t) = \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^\nu \exp(-xt)\, dx}{x^{2\nu} + 2\vartheta x^\nu \cos \nu\pi + \vartheta^2} \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в (2.5) и учитывая, что внутренний интеграл после изменения порядка интегрирования равен изображению по Лапласу функции $Э_\nu(-\vartheta_k, t)$, получим

$$\delta_{ik} = \int_0^\infty u^\lambda f(u)\, du; \quad f(u) = \frac{\lambda \sin \nu\pi}{\pi (u + \vartheta_k)(u^2 + 2\vartheta_i u \cos \nu\pi + \vartheta_i^2)}, \quad \lambda = \frac{1}{\nu} \tag{2.9}$$

причем при $0.5 < \nu < 1$ функция $z^{\lambda+1} f(z)$ стремится к нулю, когда $|z|$ стремится к нулю и к бесконечности.

Интеграл (2.9) может быть взят с помощью вычетов. Следуя схеме интегрирования, приведенной в [9], найдем

$$b_{ik} = -\frac{\sin\nu\pi\,(\theta_i^\nu + \theta_k^\nu)}{\nu\sin\lambda\pi\,(\theta_i^2 + \theta_k^2 - 2\theta_i\theta_k\cos\nu\pi)} \tag{2.10}$$

Аналогично, подставляя (2.8) в (2.6), изменяя порядок интегрирования и учитывая, что внутренний интеграл есть преобразование по Лапласу функции $\Theta(t)$ с действительным параметром преобразования, будем иметь

$$b_i = \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{x^\nu\overline{\Theta}(x)\,dx}{x^{2\nu} - 2\theta_i x^\nu\cos\nu\pi + \theta_i^2} \tag{2.11}$$

Таким образом, параметры b_i выражаются через интегралы по действительной положительной полуоси от известного изображения функции $\Theta(t)$. При численном интегрировании удобно выражение (2.11) преобразовать к следующему:

$$b_i = \int\limits_0^1 y^{2\nu} f_1(y)\,dy + \int\limits_0^1 y^{1-\lambda} f_2(y)\,dy \tag{2.12}$$

$$f_1(y) = \frac{\sin\nu\pi\,\overline{\Theta}_0(y)}{\nu\pi\,(y^2 + 2\theta_i y\cos\nu\pi + \theta_i^2)}$$

$$f_2(y) = \frac{\sin\nu\pi\left[\frac{1}{y}\overline{\Theta}_0\left(\frac{1}{y}\right)\right]}{\nu\pi\,(1 + 2\theta_i y\cos\nu\pi + \theta_i^2 y^2)}, \qquad \overline{\Theta}_0(\xi) = \overline{\Theta}\left(\xi^{\frac{1}{\nu}}\right)$$

В случае, когда изображение $\overline{\Theta}(p)$ в явном виде не известно, для определения значений $\overline{\Theta}_0(y)$ и $\overline{\Theta}_0\left(\frac{1}{y}\right)$ в узлах необходимо решить $2r$ задач теории упругости с действительными константами материала (r — число узлов квадратурной формулы). Если, например, свойства тела описываются операторами вида (1.1), (1.2), то функция $\overline{\Theta}_0(y)$ в узлах $y_j^{(1)}$ определяется из решения r упругих задач для тела с константами материала, равными

$$G_{kj}^{(1)} = G_{k0}\left(1 - \sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_{ki}}{y_j^{(1)} + \theta_{ki}}\right) \quad (j = 1,\dots, r) \tag{2.13}$$

Аналогично, для определения $\overline{\Theta}_0\left(\frac{1}{y_j^{(2)}}\right)$ необходимо решить r упругих задач, в которых упругие константы принимают следующие значения:

$$G_{kj}^{(2)} = G_{k0}\left(1 - \sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_{ki}y_j^{(2)}}{1 + \theta_{ki}y_j^{(2)}}\right) \quad (j = 1,\dots, r) \tag{2.14}$$

В выражениях (2.13), (2.14) $y_j^{(1)}$ и $y_j^{(2)}$ — узлы (вообще, различные) квадратурных формул, которые используются для интегрирования выражений с весами y^{α} и $y^{1-\alpha}$.

§ 3. Изложенный метод неприменим, если порядок особенности функции $\Theta(t)$ $\alpha < -0.5$, так как интегралы (2.5), (2.6) расходятся.

Приведем метод численного обращения, применимый при любых $\alpha \in (-1, 0]$.

Будем разыскивать приближение функции $\Theta(t)$ в виде (2.2). Коэффициенты γ_k определим из условия минимума квадратичной погрешности в пространстве изображений.

Представим функцию $\overline{\Theta}_0(\xi) = \overline{\Theta}\left(\xi^{\frac{1}{\gamma}}\right)$ в виде

$$\overline{\Theta}_0(\xi) = \sum_{n=1}^{N} A_n \omega_n(\xi) \tag{3.1}$$

где

$$\omega_n(\xi) = \sum_{s=1}^{n} \frac{C_{ns}}{\xi + \vartheta_s}, \quad \vartheta_s = \exp(s-1) \tag{3.2}$$

— полная на интервале $[0, \infty]$ ортонормированная система функций. Значения параметров C_{ns} приведены в [11].

Коэффициенты A_n определяются из выражения

$$A_n = \int_0^{\infty} \overline{\Theta}_0(\xi)\,\omega_n(\xi)\,d\xi = \int_0^1 \left[\overline{\Theta}_0(y) \sum_{s=1}^{n} \frac{C_{ns}}{y + \vartheta_s} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{y}\,\overline{\Theta}_0\left(\frac{1}{y}\right) \sum_{s=1}^{n} \frac{C_{ns}}{1 + y\vartheta_s}\right] dy \tag{3.3}$$

Интеграл (3.3) можно взять численно. При этом для определения коэффициентов A_n используются значения изображения $\overline{\Theta}_0(\xi)$ в точках $\xi_s = y_s$ и $\xi_s = 1/y_s$ (y_s — узлы выбранной квадратурной формулы).

Возвращаясь к переменной p, получим

$$\overline{\Theta}(p) \approx \sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_k}{p^{\gamma} + \vartheta_k}, \qquad \gamma_k = \sum_{n=k}^{N} A_n C_{nk} \tag{3.4}$$

Функции $(p^{\gamma} + \vartheta_k)^{-1}$ представляют собой изображения дробно-экспоненциальных функций. Переходя к оригиналам, получим приближение (2.2).

§ 4. Для иллюстрации изложенных методов рассмотрим задачу об изгибе длинной равномерно нагруженной прямоугольной пластинки, лежащей на упругом основании и шарнирно опертой по длинным краям [12].

Изгибающий момент в середине короткой стороны упругой пластинки

$$M = \frac{1}{8} ql^2 u_1(\xi), \quad u_1(\xi) = \frac{2\,\mathrm{sh}\,\xi \sin \xi}{\xi^2 (\mathrm{ch}\, 2\xi + \cos 2\xi)}, \quad \xi = \frac{l}{2} \sqrt[4]{\frac{3k_0(1-\nu_0^2)}{E_0 h_0^3}} \qquad (4.1)$$

где l и h_0 — ширина и толщина пластинки, q — интенсивность нагрузки, k_0 — коэффициент постели.

Вычислялась функция $\varphi(t) = M(t)/M(0)$, представляющая собой отношение решения с учетом ползучести к решению упругой задачи. При расчетах приняты следующие числовые значения параметров, характеризующих размеры пластинки и упругие свойства материала: $l = 0.25$ *м*, $h_0 = 0.01$ *м*, $E_0 = 1910$ *МПа*, $\nu_0 = 0.25$, $k_0 = 29.4$ *МПа/м*. Реологические параметры пластинки и основания варьировались. Выполнено несколько вариантов расчета

1°. При решении задачи методом, изложенным в § 1, операторы, описывающие упруго-наследственные свойства пластинки и основания приняты в виде

$$\bar{E} = E_0(1 - \Gamma_1^*), \quad \bar{k} = k_0(1 - \Gamma_2^*)$$

$$\Gamma_k(t-\tau) = \lambda_k \exp[-\beta(t-\tau)]\, Э_\alpha(-\theta_k,\ t-\tau) \qquad (4.2)$$

Числовые значения реологических параметров:

$\lambda_1 = 1.16$, $\theta_1 = 1.54$, $\lambda_2 = 0.3$, $\theta_2 = 1$, $\alpha = -0.8$ (единица времени 10 *сут*).

Для вычисления $\varphi(t)$ на основе представления (1.11) находим

$$R(u) = \mathrm{Im}\, \frac{u_2[\xi(B_1(u),\ B_2(u))]}{u_2[\xi(E_0,\ k_0)]}, \qquad W(u) = \mathrm{Im}\, \frac{u_2[\xi(D_1(u),\ D_2(u))]}{u_2[\xi(E_0,\ k_0)]} \qquad (4.3)$$

где функции $B_i(u)$ и $D_i(u)$ определяются в соответствии с (1.8). При вычислении интегралов в выражении (1.11) использовалась квадратурная формула Гаусса. Число узлов r варьировалось от 4 до 14. Результаты расчетов приведены в табл. 1.

Таблица 1

r \ t	0.10	0.25	0.75	1.00	3.00	10.0	15.0
4	0.14383	0.07141	0.00574	−0.00817	−0.05672	−0.09137	−0.09759
8	0.13301	0.07049	0.00613	−0.00902	−0.05753	−0.09047	−0.09627
12	0.13200	0.07087	0.00608	−0.00899	−0.05753	−0.09048	−0.09627
14	0.13192	0.07089	0.00609	−0.00899	−0.05753	−0.09048	−0.09627

Как видно, расхождение при $r = 12$ и $r = 14$ не превосходит 0.00008, что дает основание считать верными 4 знака после запятой в последней и предпоследней строках таблицы. Максимальное расхождение при $r = 4$ и $r = 14$ составляет 0.019.

Отметим, что при численном интегрировании обычно используются квадратурные формулы с положительными коэффициентами, поэтому метод, основанный на представлениях (1.6), (1.11) мало чувствителен к точности, с которой заданы значения $R(u)$ и $W(u)$.

2°. Приведем результаты решения рассмотренной задачи методами численного обращения преобразования Лапласа, изложенными в § 2 и § 3.

При решении методом § 2 реологические операторы приняты в виде (4.2) при $\mu = 0$ и $\alpha = -0.375$, то есть свойства пластинки и основания описываются дробно-экспоненциальными функциями.

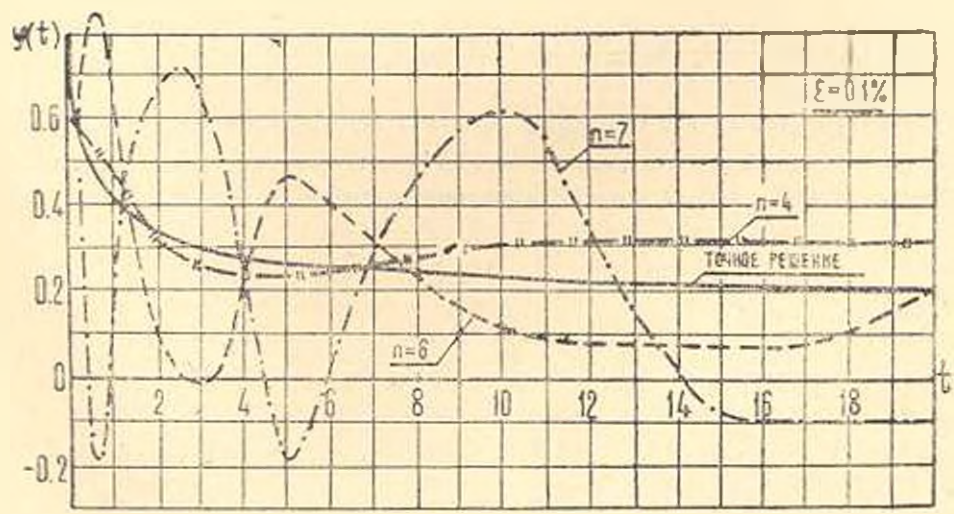
Изображение функции $\Theta(t)$

$$\bar{\Theta}(p) = \frac{u_1[\varepsilon(\bar{E}(p),\ \bar{k}(p))]}{u_2[\varepsilon(E_0,\ k_0)]} - 1$$

$$\bar{E}(p) = E_0[1 - \lambda_1/(p + \vartheta_1)],\quad \bar{k}(p) = k_0[1 - \lambda_2/(p + \vartheta_2)] \tag{4.4}$$

Приближение $\Theta_N(t)$ разыскивалось в виде разложения по четырем функциям $\mathrm{Э}_\alpha(-\vartheta_k, t)$ с параметрами ϑ_k, равными 0.5, 1, 1.5, 2. При вычислении каждого из интегралов (2.14) применялась квадратурная формула наивысшей алгебраической степени точности [10], использующая 6 узлов. Была исследована чувствительность метода к точности, с которой известно изображение. Для этого на значения функций $\Theta_0(y)$ и $\Theta_0\left(\frac{1}{y}\right)$, которые вычислялись на ЭВМ с точностью 6 значащих цифр, налагалась относительная погрешность $\pm\varepsilon$, различная по знаку для различных узлов. Величина ε варьировалась от 0 до 0.06.

Результаты расчетов приведены на фиг. 2.



Фиг. 2.

Сплошная линия соответствует решению, полученному с точностью 4—5 значащих цифр методом численного интегрирования, изложенным в § 1.

При $\varepsilon = 0$ максимальная погрешность метода численного обращения преобразования Лапласа составила 0.0075. Соответствующая кривая на графике сливается со сплошной линией.

Как видно из графика, даже при очень большой погрешности $\varepsilon = \pm 6\%$ приближение в оригиналах оказалось удовлетворительным, особенно при $t \leqslant 5$.

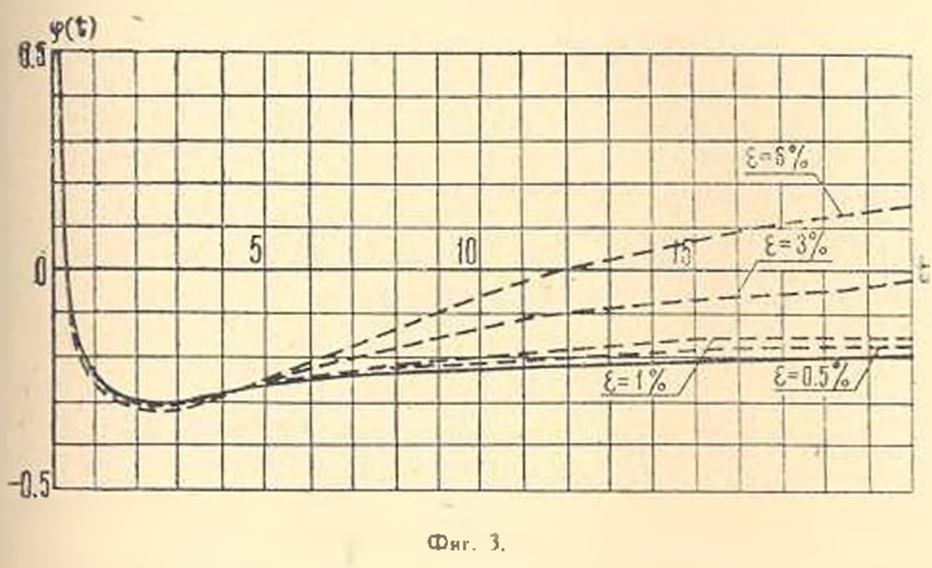
При решении задачи методом, изложенным в § 3, параметр α принят равным -0.7 и $\rho = 0$. Приближение функции $\Theta(t)$ также разыскивалось в виде разложения по четырем дробно-экспоненциальным функциям, но с параметрами $\theta_k = \exp(k-1)$. Интегралы (3.3) вычислялись по формуле Гаусса с девятью узлами. Погрешность ε, налагаемая на значения функций $\Theta_s(y)$ и $\Theta_s(1/y)$, варьировалась.

Метод оказался мало чувствительным к величине ε.

При $\varepsilon = 0$ максимальная и средняя абсолютные погрешности приближения функции $\varphi(t)$ равнялись соответственно 0.026 и 0.017. При $\varepsilon = \pm 6\%$ эти погрешности не увеличились.

Устойчивость метода объясняется тем, что процесс интегрирования при определении параметров A_k сглаживает случайные по знаку погрешности, с которыми было задано изображение.

3°. Задача об изгибе пластинки была решена также методом коллокации, предложенным Шепери. Метод Шепери основан на разложении оригинала $\varphi(t)$ по функциям $A_k \exp(-\theta_k t)$, причем параметры θ_k полагаются заданными, а коэффициенты A_k определяются из системы линейных уравнений, правые части которой представляют собой значения изображения $\bar{\varphi}(p)$ в узлах θ_k [1].



Фиг. 3.

При вычислениях основание пластинки было принято идеально упругим, параметры ρ и α первого из операторов (4.2) равными 0 и -0.5.

Число узлов N варьировалось от 4 до 14. При каждом N узлы θ_k распределялись в интервале $[\theta_{min}, \theta_{max}]$ по закону арифметической прогрессии, геометрической прогрессии или в узлах полинома Чебышева, приведенных к рассматриваемому интервалу. Параметр θ_{min} был принят равным 0.01, а θ_{max} варьировался от 1 до 20.

На значения изображения в узлах налагалась относительная погрешность $\pm \varepsilon$.

При $\varepsilon = 0$ и $N = 14$ минимальная погрешность, с которой удалось получить приближение $\varphi(t)$, равнялась 3%. При $\varepsilon \geqslant 0.001$ во всех рассмотренных случаях были получены неудовлетворительные результаты.

На фиг. 3 приведены графики $\varphi(t)$, полученные методом, изложенным в § 1, с точностью до четырех верных знаков (сплошная линия) и методом Шепери при различных N.

Как видно, наилучший результат получен при $N = 4$, однако точность его невелика. При увеличении N точность приближения ухудшается.

Таким образом, если для описания свойств материала используются ядра с особенностью, обращение методом Шепери не может быть рекомендовано.

Северо-Западное отделение ВГПИ
и НИИ «Энергосетьпроект»

Поступила 20 III 1978

Ա. Ա. ԶԵՎԻՆ, Ի. Գ. ՊԱԴՎԱ

ԺԱՌԱՆԳԱԿԱՆ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ԼԱՊԼԱՍԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ԴԱՐՁԱՑՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Կոտորակա-էքսպոնենցիալ օպերատորների ֆունկցիայի ինտեգրալ ներկայացումը տարածվել է ավելի ընդհանուր տեսքի օպերատորների վրա։

Զարգացվել են Լապլասի ձևափոխության թվային գործածման երկու եղանակներ, որոնք հիմնված են լուծման ըստ կոտորակա-էքսպոնենցիալ ֆունկցիաների [illegible] վերլուծման վրա։

Այդ եղանակները կիրառելի են անընդհատ, կամ կտոր առ կտոր անընդհատ մարմնի համար խնդիրների լուծման համար, երբ մարմնի հատկությունները նկարագրվում են մի քանի անկախ օպերատորներով։

Բերված են օրինակներ։

CONVERSION OF LAPLACE TRANSFORMATION IN THE PROBLEMS OF THE HEREDITARY ELASTICITY THEORY

A. A. ZEVIN, I. G. PADWA

Summary

Integral representation of a fraction-exponential operator function is applied to an operator of a more general type.

A method of numerical conversion of the Laplace transformation based on integral expansion of the solution from fraction — exponential functions is developed.

Both methods may be used to solve problems for an anisotropic or lump-heterogeneous body, whose properties are described by several independent operators. Examples are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М., «Мир», 1974.
2. *Кост Т.* Приближенное обращение преобразования Лапласа при анализе вязкоупругих напряжений. Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 12.
3. *Ильюшин А. А.* Метод аппроксимаций для расчета конструкций по линейной теории термовязкоупругости. Механика полимеров, 1968, № 2.
4. *Колтунов М. А.* Ползучесть и релаксация. М., «Высшая школа», 1976.
5. *Зевин А. А.* О функциях дробно-экспоненциальных операторов в теории наследственной упругости. Прикл. механ., 1969, т. 5, в. 11.
6. *Работнов Ю. Н.* Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. 12, в. 1.
7. *Ржаницын А. Р.* Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М.—Л., Гостеоретиздат, 1949.
8. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М., «Наука», 1971.
9. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. М., «Наука», 1965.
10. *Крылов В. И., Шульгина Л. Т.* Справочная книга по численному интегрированию. М., «Наука», 1966.
11. *Яковлев Ю. С.* Общий метод обращения интегральных преобразований Фурье, Лапласа, Ханкеля и Стилтьеса функций класса L_p. Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела, 1977, № 5.
12. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М., ГИФМЛ, 1963.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 1, 1979 Механика

А. Н. ГУЗЬ, А. В. НАВОЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСЖИМАЕМЫХ ПЛАСТИН ПРИ РАВНОМЕРНОМ БОКОВОМ ДАВЛЕНИИ

Введение. В работах [1, 2] исследована соответственно устойчивость полосы (плоская деформация) и стержня кругового поперечного сечения, которые помещены без трения между двумя абсолютно жесткими стенками и к боковым поверхностям которых приложено равномерное давление. Материал полосы и стержня считался упругим, несжимаемым с произвольной формой потенциала. В результате исследования в [1, 2] получен следующий вывод: состояние равновесия является устойчивым, если к боковой поверхности приложено давление в виде «следящей» нагрузки и неустойчивым, если к боковой поверхности приложено давление в виде «мертвой» нагрузки. В последнем случае критическая нагрузка для длинных полосы и стержня приблизительно в два раза меньше эйлеровой силы при осевом сжатии. Для проверки общности полученных результатов целесообразно исследовать другие задачи рассматриваемого класса (для тел с поперечным сечением другой формы).

В данной статье исследуем устойчивость пластин прямоугольной и круговой формы, которые помещены без трения в абсолютно жесткие цилиндры соответствующей формы (что определяет граничные условия на торцах пластин) и к боковым (нижней и верхней) поверхностям которых приложено равномерное давление в виде «следящей» или «мертвой» нагрузок. Для определения «следящих» нагрузок будем использовать соотношения [3], которые в рамках теории малых докритических деформаций являются более точными по сравнению с обычно принятыми. Материал пластин будем считать изотропным, несжимаемым с произвольной формой потенциала. Следуя работам [1—5], исследования выполним в общей форме для трехмерных линеаризированных теорий упругой устойчивости при конечных и малых докритических деформациях [6, 7]. При исследовании применим лагранжевы координаты, которые в недеформированном состоянии совпадают с декартовыми (x_1, x_2, x_3) или круговыми цилиндрическими (r, θ, x_3) координатами. Величины, относящиеся к докритическому состоянию, отметим индексом «ноль», возмущения отмечать индексом не будем.

Заметим, что в рассматриваемых задачах в силу условия несжимаемости для докритического состояния при его определении приходим к задаче о всестороннем равномерном сжатии. В связи с этим можно использовать основные соотношения [3—5]. Следуя [1, 2, 4, 5], будем полагать, что выполняется неравенство

$$\mu_0 > 0 \tag{0.1}$$

которое обеспечивает устойчивость состояния равновесия несжимаемого тела при всестороннем равномерном сжатии, когда ко всей боковой поверхности приложено давление в виде «следящей» нагрузки [4]. Величина μ_0 в (0.1) определяется через упругий потенциал соотношениями (1.8) или (1.9).

§ 1. *Основные соотношения*. Следуя [1—5], представим в следующем виде линеаризированные:
уравнения движения

$$\mu_0 \,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} - \mu_0\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{u} + \mathrm{grad}\,p - \rho\ddot{\vec{u}} = 0 \tag{1.1}$$

условие несжимаемости

$$\mathrm{div}\,\vec{u} = 0 \tag{1.2}$$

граничные условия в напряжениях на части S_1 поверхности тела

$$\vec{Q}|_{S_1} = \vec{P};\quad \vec{Q} = (2\mu_0 - \sigma_0)\vec{N}\cdot\nabla\vec{u} + (\mu_0 - \sigma_0)\vec{N}\times\mathrm{rot}\,\vec{u} + \vec{N}p \tag{1.3}$$

и выражения для определения правых частей граничных условий (1.3) при действии на S_1 «следящей» нагрузки

$$\vec{P} = -\sigma_0(\vec{N}\cdot\nabla\vec{u} + \vec{N}\times\mathrm{rot}\,\vec{u})|_{S_1} \tag{1.4}$$

Из (1.3) и (1.4) получаем граничные условия, когда действует «следящая» нагрузка, в следующем виде:

$$(2\mu_0\vec{N}\cdot\nabla\vec{u} + \mu_0\vec{N}\times\mathrm{rot}\,\vec{u} + \vec{N}p)|_{S_1} = 0 \tag{1.5}$$

Из (1.3) получаем граничные условия, когда действует «мертвая» нагрузка ($\vec{P} = 0$), в виде

$$[(2\mu_0 - \sigma_0)\vec{N}\cdot\nabla\vec{u} + (\mu_0 - \sigma_0)\vec{N}\times\mathrm{rot}\,\vec{u} + \vec{N}p]|_{S_1} = 0 \tag{1.6}$$

Примечание 1. Из сравнения выражений (1.5) и (1.6) следует, что граничные условия (1.5) при действии «следящей» нагрузки можно получить формально из граничных условий (1.6) при действии «мертвой» нагрузки, если в последнем выражении положить $\sigma_0 = 0$, которое входит явно.

Граничные условия (1.5) и (1.6) относятся к боковым поверхностям. На торцах, которые соприкасаются без трения со стенками абсолютно жестких цилиндров, будем считать, что выполняются следующие условия

$$u_n = 0;\qquad \vec{Q}_S = 0 \tag{1.7}$$

В (1.7) введены обозначения: u_n — составляющая вектора перемещений, направленная по нормали к торцу; $\vec{Q}_S$ — составляющая вектора напряжений на поверхности торца, лежащая в касательной плоскости.

В (1.1) — (1.6) и ниже введены следующие обозначения: $\vec{u}$ — возмущения вектора перемещений; ρ — плотность материала в естественном (недеформированном) состоянии; $\vec{N}$ — орт нормали к поверхности тела в естественном состоянии; $\vec{P}$ — возмущения внешних нагрузок, действующих на S_1; p — возмущение величины, связанной с гидростатическим давлением (заметим, что вышеизложенные соотношения сформулированы относительно вектора $\vec{u}$ и скаляра p); σ_0 — напряжение, соответствующее всестороннему равномерному сжатию (заметим, что напряжение σ_0 является истинным и для теории конечных докритических деформаций, поскольку в силу условий несжимаемости при всестороннем равномерном сжатии площадь поверхности тела не изменяется); μ_0 — величина, которая определяется через упругий потенциал из нижеприведенных выражений.

Следуя [4], приведем выражения для определения величины μ_0 через упругий потенциал, который является функцией A_i^0 — алгебраических инвариантов тензора деформаций Грина. В этом случае для теории конечных докритических деформаций получено следующее выражение:

$$\mu_0 = \left(\frac{\partial}{\partial A_1^0} + \frac{\partial}{\partial A_2^0}\right)\Phi^0 \Big|_{A_i^0 = 0}; \qquad \Phi^0 = \Phi^0(A_1^0,\ A_2^0) \tag{1.8}$$

а в случае первого и второго вариантов теории малых докритических деформаций — следующее выражение:

$$\mu_0 = \frac{\partial}{\partial A_2^0}\Phi^0 \Big|_{A_i^0 = 0} + \sigma_0; \qquad \Phi^0 = \Phi^0(A_2^0,\ A_3^0) \tag{1.9}$$

Исследуем вопрос о применимости метода Эйлера к рассматриваемым задачам. В случае действия «мертвых» нагрузок ($\vec{P} = 0$), как известно, можно применять метод Эйлера. В случае действия «следящих» нагрузок на боковые поверхности первое условие (1.7) обеспечивает выполнение достаточных условий [8] применимости метода Эйлера. Таким образом, в рассматриваемых задачах как при действии «мертвых» нагрузок, так и при действии «следящих» нагрузок можно применять метод Эйлера. В связи с этим в дальнейшем будем применять уравнение (1.1) без инерционных членов в виде

$$\mu_0 \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \mu_0 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + \operatorname{grad} p = 0 \tag{1.10}$$

Следуя [7], запишем представление общего решения уравнений (1.10) и (1.2). В данном случае оно имеет вид

$$\begin{gathered} u_n = \frac{\partial}{\partial S}\psi - \frac{\partial^2}{\partial n \partial x_3}\chi, \quad U_S = -\frac{\partial}{\partial n}\psi - \frac{\partial^2}{\partial S \partial x_3}\chi, \\ u_3 = \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\chi, \qquad p = \mu_0 \frac{\partial}{\partial x_3}\Delta\chi, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \end{gathered} \tag{1.11}$$

где ψ и χ — гармоническая и бигармоническая функции. В (1.11) через

n и S обозначены нормаль и касательная к контуру поперечного сечения при $x_1 = \text{const}$.

Таким образом, рассматриваемые задачи сводятся к однородным задачам: к уравнениям (1.10) и (1.2); граничным условиям на торцах (1.7); граничным условиям по боковым поверхностям (1.5) при действии «следящих» нагрузок или (1.6) при действии «мертвых» нагрузок.

Примечание 2. Уравнения (1.10) и (1.2), а также граничные условия при действии «следящих» нагрузок (1.5) переходят в соответствующие однородные соотношения линейной классической теории упругости, если величину μ_0 заменить на постоянную Ляме μ. Граничные же условия (1.6) при действии «мертвой» нагрузки и граничные условия на торцах (1.7) не переходят в соответствующие выражения классической линейной теории упругости при указанной замене.

Перейдем к исследованию устойчивости пластин конкретной формы.

§ 2. *Прямоугольные пластины.* Рассмотрим устойчивость прямоугольных пластин $(0 < x_1 < a;\ 0 < x_2 < b;\ -h < x_3 < +h)$, которые при $x_1 = 0, a$ и $x_2 = 0, b$ соприкасаются без трения со стенками абсолютно жесткого тела, а при $x_3 = \pm h$ загружены равномерным давлением в виде „следящей" или „мертвой" нагрузки.

Из (1.7) получаем граничные условия при $x_1 = 0$ и $x_1 = a$ в следующем виде:

$$u_1 = 0, \quad \mu_0 \frac{\partial u_s}{\partial n} = 0 \tag{2.1}$$

а также при $x_2 = 0$ и $x_2 = b$ в следующем виде:

$$u_2 = 0, \qquad \mu_0 \frac{\partial u_s}{\partial n} = 0 \tag{2.2}$$

Из (1.5) получаем граничные условия при $x_3 = \pm h$ в случае действия «следящей» нагрузки в форме

$$\mu_0\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) = 0, \quad \mu_0\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) = 0, \quad 2\mu_0 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + p = 0 \tag{2.3}$$

Из (1.6) получаем граничные условия при $x_3 = \pm h$ в случае действия «мертвой» нагрузки в форме

$$(2\mu_0 - \sigma_0)\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + (\mu_0 - \sigma_0)\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) = 0$$

$$(2\mu_0 - \sigma_0)\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + (\mu_0 - \sigma_0)\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) = 0 \tag{2.4}$$

$$(2\mu_0 - \sigma_0)\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + p = 0$$

Согласно (1.11) общее решение представим в следующем виде:

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}\psi - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}\chi; \quad u_2 = -\frac{\partial}{\partial x_1}\psi - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\chi$$
$$u_3 = \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\chi; \qquad p = \mu_0 \frac{\partial}{\partial x_3}\Delta\chi \tag{2.5}$$

Гармоническую и бигармоническую функции ψ и χ, удовлетворяющие условиям на торцах (2.1) и (2.2), представим в следующем виде:
для изгибной формы потери устойчивости

$$\psi = A \operatorname{sh}\gamma x_3 \sin\pi\frac{m}{a}x_1 \sin\pi\frac{n}{b}x_2, \qquad \gamma^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$$
$$\chi = (B \operatorname{ch}\gamma x_3 + C\gamma x_3 \operatorname{sh}\gamma x_3)\cos\pi\frac{m}{a}x_1 \cos\pi\frac{n}{b}x_2 \tag{2.6}$$

для потери устойчивости с образованием шейки

$$\psi = A \operatorname{ch}\gamma x_3 \sin\pi\frac{m}{a}x_1 \sin\pi\frac{n}{b}x_2$$
$$\chi = (B \operatorname{sh}\gamma x_3 + C\gamma x_3 \operatorname{ch}\gamma x_3)\cos\pi\frac{m}{a}x_1 \cos\pi\frac{n}{b}x_2 \tag{2.7}$$

Рассмотрим вначале случай действия «мертвых» нагрузок, так как при действии «следящих» нагрузок результаты можно получить из рассматриваемого случая, следуя примечанию 1, § 1. Подставляя выражения (2.6) в граничные условия (2.3), после ряда преобразований получаем характеристическое уравнение в виде

$$\delta = 0, \ \delta = \det\|\alpha_{ij}\|, \ i, j = 1, 2, 3 \tag{2.8}$$

В (2.8) введены следующие обозначения:

$$\alpha_{11} = -\mu_0\pi\frac{n}{b}\gamma \operatorname{ch}\gamma h, \ \alpha_{12} = -\mu_0\pi\frac{m}{a}\gamma^2(2\mu_0 - \sigma_0)\operatorname{ch}\gamma h$$
$$\alpha_{13} = -\pi\frac{m}{a}\gamma^2(2\mu_0 - \sigma_0)\gamma h \operatorname{sh}\gamma h - \pi\frac{m}{a}\gamma^2 2\mu_0 \operatorname{ch}\gamma h$$
$$\alpha_{21} = -\alpha_{11}\frac{m}{a}\frac{b}{n}, \quad \alpha_{22} = \alpha_{12}\frac{n}{b}\frac{a}{m}, \quad \alpha_{23} = \alpha_{13}\frac{n}{b}\frac{a}{m}, \quad \alpha_{31} = 0 \tag{2.9}$$
$$\alpha_{32} = -(2\mu_0 - \sigma_0)\gamma^3 \operatorname{sh}\gamma h, \ \alpha_{33} = -(2\mu_0 - \sigma_0)\gamma^3\gamma h \operatorname{ch}\gamma h + \sigma_0\gamma^3 \operatorname{sh}\gamma h$$

Подставляя выражения (2.7) для случая потери устойчивости с образованием шейки в граничные условия (2.3), также получаем характеристическое уравнение в виде (2.8) и (2.9). Таким образом, две различные формы потери устойчивости (изгибная и с образованием шейки) соответствуют одному и тому же характеристическому уравнению и, следовательно, имеют одну и ту же критическую нагрузку. После ряда преобразований характеристическому определителю (2.8) и (2.9) можно придать следующий вид:

$$\delta = -\gamma^6\mu_0(2\mu_0-\sigma_0)^2\gamma h\left(1-\frac{2\mu_0+\sigma_0}{2\mu_0-\sigma_0}\frac{\operatorname{sh}2\gamma h}{2\gamma h}\right) \tag{2.10}$$

Следуя примечанию 1. § 1 и положив в (2.10) $\sigma_0=0$, которое входит явно, получаем характеристический определитель для случая действия «следящей» нагрузки в следующей форме:

$$\delta = -4\gamma^6\mu_0^3\gamma h\left(1-\frac{\operatorname{sh}2\gamma h}{2\gamma h}\right) \tag{2.11}$$

Учитывая неравенство (0.1) и неравенство $\operatorname{sh}2\gamma h > 2\gamma h$, из (2.11) получаем, что $\delta > 0$, то есть $\delta \neq 0$. Таким образом, приходим к выводу, что состояние равновесия при действии давления при $x_3=\pm h$ в виде «следящей» нагрузки является устойчивым. Заметим, что этот результат получен для тела с потенциалом произвольной формы.

В случае действия «мертвой» нагрузки, учитывая неравенство (0.1), а также то обстоятельство, что при сжатии $\sigma_0<0$, из (2.10) получаем одно уравнение, корни которого имеют физический смысл, в следующем виде:

$$1-\frac{2\mu_0+\sigma_0}{2\mu_0-\sigma_0}\frac{\operatorname{sh}2\gamma h}{2\gamma h}=0 \tag{2.12}$$

Уравнение (2.12) по форме совпадает с соответствующими уравнениями [1, 4] для задачи об устойчивости полосы.

§ 3. *Круговые пластины.* Рассмотрим устойчивость круговой пластины ($0\leqslant r\leqslant R;\ -h\leqslant x_3\leqslant +h$), которая при $r=R$ соприкасается без трения со стенками абсолютно жесткого цилиндра, а при $x_3=\pm h$ загружена равномерным давлением в виде «мертвой» или «следящей» нагрузки. Исследование выполним для осесимметричной задачи. Из (1.7) и (1.3) в этом случае получаем при $r=R$ следующие граничные условия:

$$u_r=0,\quad \mu_0\frac{\partial u_r}{\partial r}=0 \tag{3.1}$$

$$\mu_0\left(\frac{\partial u_r}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial r}\right)=0,\qquad 2\mu_0\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+p=0 \tag{3.2}$$

Из (1.6) получаем граничные условия при $x_3=\pm h$ в случае действия «мертвой» нагрузки в следующем виде:

$$\begin{gathered}(2\mu_0-\sigma_0)\frac{\partial u_r}{\partial x_3}+(\mu_0-\sigma_0)\left(\frac{\partial u_3}{\partial r}-\frac{\partial u_r}{\partial x_3}\right)=0\\ (2\mu_0-\sigma_0)\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+p=0\end{gathered} \tag{3.3}$$

Согласно (1.11) общее решение для рассматриваемого случая можно представить в такой форме:

$$u_r = -\frac{\partial^2}{\partial r \partial x_3}\chi, \quad u_\theta = 0, \quad u_3 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\chi$$
$$p = \mu_0 \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\chi \tag{3.4}$$

где χ — осесимметричная бигармоническая функция.

Бигармоническую осесимметричную функцию χ, удовлетворяющую условиям (3.1) на торцах, представим в следующем виде: для изгибной формы потери устойчивости —

$$\chi = (A \operatorname{ch} \gamma x_3 + B\gamma x_3 \operatorname{sh} \gamma x_3)\, J_0(\gamma r); \qquad \gamma = \frac{\varkappa_k}{R} \tag{3.5}$$

и для потери устойчивости с образованием шейки —

$$\chi = (A \operatorname{sh} \gamma x_3 + B\gamma x_3 \operatorname{ch} \gamma x_3)\, J_0(\gamma r) \tag{3.6}$$

В (3.5) и (3.6) введены обозначения: $J_0(\alpha)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка; $\varkappa_k$ — k-ый корень уравнения $J_0'(\varkappa) = 0$.

Рассмотрим вначале случай действия «мертвых» нагрузок, так как при действии «следящих» нагрузок результаты можно получить из рассматриваемого случая, следуя примечанию 1, § 1. Подставляя выражение (3.5) в граничные условия (3.3), после ряда преобразований получаем характеристическое уравнение в следующем виде:

$$\delta = 0, \quad \delta = \det \| a_{ij} \|, \quad i, j = 1, 2 \tag{3.7}$$

В (3.7) введены следующие обозначения:

$$a_{11} = -\gamma^3 (2\mu_0 - \sigma_0) \operatorname{ch} \gamma h, \quad a_{12} = -\gamma^3 [(2\mu_0 - \sigma_0)\gamma h \operatorname{sh} \gamma h + 2\mu_0 \operatorname{ch} \gamma h]$$
$$a_{21} = -\gamma^3 (2\mu_0 - \sigma_0) \operatorname{sh} \gamma h, \quad a_{22} = -\gamma^3 [(2\mu_0 - \sigma_0)\gamma h \operatorname{ch} \gamma h - \sigma_0 \operatorname{sh} \gamma h] \tag{3.8}$$

После преобразований характеристический определитель можно представить в следующем виде:

$$\delta = \gamma^6 (2\mu_0 - \sigma_0)^2 \gamma h \left(1 - \frac{2\mu_0 + \sigma_0}{2\mu_0 - \sigma_0} \frac{\operatorname{sh} 2\gamma h}{2\gamma h}\right) \tag{3.9}$$

Подставляя выражения (3.6) для случая потери устойчивости с образованием шейки в граничные условия (3.3), также получаем характеристический определитель в виде (3.9). Таким образом, две различные формы потери устойчивости (изгибная и с образованием шейки) соответствуют одному и тому же характеристическому уравнению, следовательно, имеют одну и ту же критическую нагрузку.

Следуя примечанию 1, § 1 и положив в (3.9) $\sigma_0 = 0$, которое входит явно, получаем характеристический определитель для случая действия «следящей» нагрузки в следующем виде:

$$\delta = 4\gamma^6 \mu_0^2 \gamma h \left(1 - \frac{\operatorname{sh} 2\gamma h}{2\gamma h}\right) \tag{3.10}$$

В результате анализа выражения (3.10), как и в случае прямоугольной пластины, приходим к выводу об устойчивости состояния равновесия при $x_1 = \pm h$ «следящей» нагрузки для тела с потенциалом произвольной формы. В случае действия «мертвой» нагрузки снова приходим к уравнению (2.12), анализ которого выполним в следующем параграфе.

§ 4. *Примеры*. В настоящем параграфе рассмотрим примеры для случая действия «мертвой» нагрузки при $x_1 = \pm h$, то есть выполним анализ уравнения (2.12) для различных теорий.

Из (1.8) и (2.12) для теории конечных докритических деформаций получаем следующее выражение для определения критической нагрузки:

$$(\sigma_0)_{\text{кр}} = 2\left|\left(\frac{\partial}{\partial A_1^0} + \frac{\partial}{\partial A_2^0}\right)\Phi^0\Big|_{A_i^0=0}\right| \min\left\{\frac{2\gamma h - \operatorname{sh} 2\gamma h}{2\gamma h + \operatorname{sh} 2\gamma h}\right\} \tag{4.1}$$

Из выражений (1.9) и (2.12) для первого и второго вариантов теории малых докритических деформаций получаем следующее выражение для определения критической нагрузки:

$$(\sigma_0)_{\text{кр}} = 2\left|\frac{\partial}{\partial A_2^0}\Phi^0\Big|_{A_i^0=0}\right| \min\left\{\frac{2\gamma h - \operatorname{sh} 2\gamma h}{3\operatorname{sh} 2\gamma h - 2\gamma h}\right\} \tag{4.2}$$

Для тонкостенных пластин ($\gamma h < 1$) из (4.1) для теории конечных докритических деформаций с точностью до $(\gamma h)^4$ получаем

$$(\sigma_0)_{\text{кр}} \approx -\left[\left(\frac{\partial}{\partial A_1^0} + \frac{\partial}{\partial A_2^0}\right)\Phi^0\Big|_{A_i^0=0}\right]\frac{2}{3}(\gamma_1 h)^2\left[1 - \frac{2}{15}(\gamma_1 h)^2\right] \tag{4.3}$$

Для тонкостенных пластин ($\gamma h < 1$) из (4.2) для первого и второго вариантов теории малых докритических деформаций с точностью до $(\gamma h)^4$ получаем следующее выражение для определения критической нагрузки:

$$(\sigma_0)_{\text{кр}} \approx -\left[\frac{\partial}{\partial A_2^0}\Phi^0\Big|_{A_i^0=0}\right]\frac{2}{3}(\gamma_1 h)^2\left[1 - \frac{4}{5}(\gamma_1 h)^2\right] \tag{4.4}$$

В (4.3) и (4.4) введены следующие обозначения: $\gamma_1 = \pi\sqrt{a^{-2} + b^{-2}}$ — для прямоугольной пластины; $\gamma_1 = \varkappa_1 R^{-1}$ — для круглой пластины.

Представим упругие потенциалы в виде рядов; для теории конечных докритических деформаций

$$\Phi^0(A_1^0, A_2^0) = \sum_{i,j} C_{ij}(A_1^0)^i (A_2^0)^j \tag{4.5}$$

а также для первого и второго вариантов теории малых докритических деформаций

$$\Phi^0(A_2^0, A_3^0) = \sum_{i,j} \varkappa_{ij}(A_2^0)^i (A_3^0)^j \tag{4.6}$$

В результате из (4.3) и (4.5) получаем для теории конечных докритических деформаций

$$(\sigma_0)_{кр} \approx -\frac{1}{2} p_{эл} \left[1 - \frac{2}{15} (\gamma_1 h)^2 \right], \quad p_{эл} = \frac{4}{3} (C_{10} + C_{01}) (\gamma_1 h)^2 \quad (4.7)$$

а из (4.4) и (4.6) — для первого и второго вариантов теории малых докритических деформаций

$$(\sigma_0)_{кр} \approx -\frac{1}{2} p_{эл} \left[1 - \frac{4}{5} (\gamma_1 h)^2 \right], \quad p_{эл} = \frac{4}{3} \mu_{10} (\gamma_1 h)^2 \quad (4.8)$$

В (4.7) и (4.8) через $p_{эл}$ обозначена эйлерова сила при равномерном сжатии в плоскости пластины, вычисленная с привлечением гипотезы Кирхгофа—Лява.

Из (4.7) и (4.8) следует, что при действии «мертвой» нагрузки при $x_3 = \pm h$ состояние равновесия является неустойчивым.

Выводы. Вышеизложенные результаты для прямоугольной и круговой пластин, а также результаты [1, 2] для полосы и стержня дают возможность сделать следующие общие выводы, относящиеся к вопросу устойчивости упругих несжимаемых тел, которые помещены без трения между абсолютно жесткими стенками и к боковым поверхностям которых приложено равномерное давление в виде «следящей» или «мертвой» нагрузок.

1) Состояние равновесия является устойчивым, если к боковой поверхности давление приложено в виде «следящей» нагрузки.

2) Состояние равновесия является неустойчивым, если к боковой поверхности давление приложено в виде «мертвой» нагрузки.

3) В случае действия «мертвой» нагрузки величины критической нагрузки для тонких (длинных) тел приблизительно в два раза меньше эйлеровой силы при осевом сжатии.

4) Изгибная форма потери устойчивости и форма потери устойчивости с образованием шейки имеют одну и ту же критическую нагрузку.

Институт механики АН УССР
Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 10 I 1978

Ա. Ն. ԳՈՒԶ, Ա. Վ. ՆԱՎՈՅԱՆ

ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԿՈՂՄՆԱՅԻՆ ՃՆՇՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ ՉՍԵՂՄՎՈՂ ԹԻԹԵՂՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում հետազոտված է չսեղմվող ուղղանկյուն և շրջանային թիթեղների կայունությունը, որոնք առանց շփման տեղավորված են բացարձակ կոշտ պատերի միջև և որոնց կողմնային մակերևույթներին կիրառված է հավասարաչափ ճնշում «հետևող» կամ «մեռած» բեռնավորումների տեսքով: Արդյունքները ստացված են ընդհանուր տեսքով նախապես գծայնացված կայունության տեսությունների համար վերջավոր և փոքր նախակրիտիկական դեֆորմացիաների դեպքում։

Ապացուցված են հետևյալ դրույթները՝ 1) հավասարակշռության վիճակը կլինի կայուն, եթե կողմնային մակերևույթներին կիրառված լինի «հետևող» բեռնավորում, 2) հավասարակշռության վիճակը կլինի անկայուն, եթե կողմնային մակերևույթներին կիրառված լինի «մեռած» բեռնավորում, 3) «մեռած» բեռնավորման դեպքում կրիտիկական բեռնավորումը բարակ թիթեղների համար մոտավորապես երկու անգամ փոքր է լինում էյլերյան ուժից, 4) ճկման ձևով կայունության կորուստը և կայունության կորուստը վզիկի առաջացման ձևով ունեն նույն կրիտիկական բեռնավորումը։

ON STABILITY OF INCOMPRESSIBLE PLATES UNDER UNIFORM LATERAL PRESSURE

A. N. GOOZ, A. V. NAVOYAN

Summary

The investigation on the stability of incompressible rectangular and circular plates placed without friction between absolutely frigid walls, their lateral surfaces being subjected to uniform compressive forces of the "following" and "non-following" (dead) type, is described. The results have been obtained in general form for three-dimentional linearized theories of elastic stability for finite and small critical deformations.

The following statements have been proved:

1) The equilibrium is stable when compressive forces, applied to lateral surfaces, are of the "following" type;

2) The equilibrium is instable when compressive forces, applied to lateral surfaces, are the "non-following" (dead) type;

3) When compressive forces are of the dead type, the critical forces for thin plates are about twice less than Eyler's forces;

4) The flexion type of stability loss and that forming a neck are of the same critical force.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих несжимаемых тел при равномерном боковом давлении. Прикл. механика, 1977, т. 13, в. 11.
2. *Гузь А. Н., Навоян А. В.* Об устойчивости несжимаемого стержня при равномерном боковом давлении. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1978, т. 31, № 5.
3. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. Прикл. механика, 1976, т. 12, в. 6.
4. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих несжимаемых тел при всестороннем сжатии. Прикл. механика, 1976, т. 12, в. 11.

5. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии «мертвой» нагрузкой». Прикл. механика, 1976, т. 12, в. 12.

6. *Гузь А. Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. К., «Наукова думка», 1971, с. 276.

7. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. К., «Наукова думка», 1973, с. 270.

8. *Гузь А. Н.* Достаточные условия применимости метода Эйлера для случая «следящей» нагрузки, заданной на части поверхности тела. Докл. АН УССР, сер. А, 1977, 10.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 1, 1979 Механика

Г. П. ЧЕРЕПАНОВ, В. М. СМОЛЬСКИЙ

К РЕШЕНИЮ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ

Основными прочностными и пространственными характеристиками многослойной панели являются:

1. Изгибная жесткость панели, пропорциональная величине [1]

$$c_1(h) = c_1(h_1, h_2, \ldots, h_n) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} E_i (a_i^3 - a_{i-1}^3)$$

$$a_i = \sum_{j=0}^{i} h_j, \quad h_0 = 0$$

2. Предел пропорциональности, характеризующий условие работы панели в упругой области

$$c_2(h) = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n} E_i h_i \varepsilon, \qquad \varepsilon = \min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{\sigma_{\text{п}i}}{E_i}\right\}$$

3. Вязкость разрушения панели [2]

$$c_3(h) = K_C = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n} K_C^{(i)} h_i$$

4. Вес панели, пропорциональный величине

$$c_4(h) = P = \sum_{i=1}^{n} h_i \rho_i$$

5. Толщина панели (объем панели пропорционален толщине)

$$c_5(h) = h = \sum_{i=1}^{n} h_i$$

Здесь введены следующие обозначения: h_i — толщина i-ого слоя панели; E_i, $\sigma_{\text{п}i}$, $K_C^{(i)}$, ρ_i — соответственно, модуль упругости, предел пропорциональности, вязкость разрушения и плотность материала i-ого слоя. Для многослойной панели через n, K_C, P, h обозначены число слоев, вязкость разрушения, приведенный вес и толщина соответственно.

При выборе n и h_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ стараются добиться возможно больших значений характеристик $c_1(h)$, $c_2(h)$ и $c_3(h)$ и возможно меньших значений $c_4(h)$ и $c_5(h)$. Поэтому общую многокритериальную задачу оптимального проектирования многослойной панели можно сформулировать следующим образом (критерий Парето (3)]:

$$\max \sum_{j=1}^{5} \lambda_j c_j(h), \quad \lambda_j \begin{cases} > 0, & j = 1, 2, 3 \\ < 0, & j = 4, 5 \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{5} |\lambda_j| = 1 \tag{1.1}$$

Величины $|\lambda_j|$ характеризуют важность отдельного критерия в многокритериальной задаче и выбираются при постановке задачи, либо по уже известным решениям однокритериальных задач [3, 4], либо «волевым» решением группой экспертов.

Другим подходом сведения многокритериальной задачи к задаче с одним критерием является выбор одного критерия в качестве главного, причем на остальные характеристики панели накладываются ограничения в форме неравенств. Если при этом в задаче есть один параметр, по которому критерии меняются монотонно, удается дать наглядную интерпретацию множителям λ_j. В нашей задаче в качестве характерного параметра можно взять параметр t пропорционального изменения толщины панели $h_i = h_i^* t$. По этому параметру критерии можно разбить на две группы: одни улучшаются с увеличением t (увеличение изгибной жесткости панели), другие ухудшаются (увеличение вязкости разрушения, минимум веса и толщины панели); предел пропорциональности не меняется с изменением t.

Многокритериальные задачи возникают тогда, когда есть критерии из различных групп (противоречивые критерии), иначе решение оптимальной задачи тривиально. Например, решение задачи

$$\max_{n,\, h_i} [\lambda_3 K_C - \lambda_4 P], \quad \lambda_j > 0, \quad j = 3, 4$$

сводится к определению такого t, при котором достигается

$$\max_{1 \le t \le \infty} [\lambda_3 K_C^{(0)}(h_{i0}) - \lambda_4 h n \gamma_i]$$

После разбиения критериев на группы по характерному параметру удобно сначала оценить критерии по их сложности и наиболее сложный взять в качестве основного (в наших условиях это, по-видимому, первый критерий).

Рассмотрим следующую задачу:

$$\max_{h_i} c_1(h) \tag{1.2}$$

при ограничениях

$$c_3(h) \geqslant K_0 \tag{1.3}$$

$$c_j(h) \leqslant c_{j0}, \; j = 2, 4, 5 \tag{1.4}$$

Поскольку критерий (1.2) монотонно растет с увеличением толщины любого слоя, решение задачи (1.2)—(1.4) находится на границе ограничений (1.3)—(1.4). Поэтому решение этой задачи распадается на решение нескольких задач с ограничениями типа равенства и проверкой выполнения для этих решений оставшихся ограничений. Решение общей задачи получается выбором наилучшего решения из конечного числа решений этих задач. Полученные вспомогательные задачи методом множителей Лагранжа сводится к решению задачи с критерием (1.1); однако параметры λ_i определяются в ходе решения задачи; таким образом, устанавливается связь между множителями λ_i и константами K_0, c_{in} в ограничениях [5].

Следует заметить, что поставленная задача непрерывна по h_i и дискретна по n. Решение по дискретному параметру n производится полным перебором. В дальнейшем считаем n фиксированным и решаем задачу по непрерывным параметрам.

Из вспомогательных задач рассмотрим как наиболее сложную следующую задачу:

$$\max_{h_j} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} E_i (a_i^3 - a_{i-1}^3), \qquad a_i = \sum_{j=0}^{i} h_j, \qquad h_0 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} [K_C^{(i)}(h_i) - K_0]\, h_i = 0 \tag{1.5}$$

Остальные ограничения не выписываем: их учет производится в конце решения задачи.

Составим функцию Лагранжа

$$F(h_i, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{3} E_i (a_i^3 - a_{i-1}^3) + \lambda h_i (K_C^{(i)} - K_0) \right]$$

и необходимые условия для определения оптимальных значений h_i и λ

$$\frac{\partial F}{\partial h_i} = \sum_{k=i}^{n} E_k (a_k^2 - a_{k-1}^2) + \lambda f_i(h_i) = 0 \tag{1.6}$$

$$f_i(h_i) = K_C^{(i)}(h_i) - K_0 + h_i \frac{dK_C^{(i)}(h_i)}{dh_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Вместо системы уравнений (1.6) рассмотрим эквивалентную систему, полученную из последнего уравнения системы (1.6) и последовательных разностей i-ого и $(i+1)$-ого уравнений системы (1.6)

$$E_n h_n \left(h_n + 2 \sum_{j=0}^{n-1} h_j \right) + \lambda f_n(h_n) = 0 \tag{1.7}$$

$$E_i h_i \left(h_i + 2 \sum_{j=0}^{i-1} h_j \right) + \lambda [f_i(h_i) - f_{i+1}(h_{i+1})] = 0 \tag{1.8}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Соотношение (1.5) дополняет условия (1.7), (1.8) для определения λ, h_i.

Примечательно, что система уравнений (1.8) не содержит K_0, поэтому можно, задавая λ, рекуррентно по i выразить все h_i через λ и h_1. Подставив K_0 из (1.5) в (1.7), получаем еще одну связь h_n и h_1. Затем решаем полученное уравнение численно и получаем для данного λ оптимальные толщины всех слоев и величины $K_0(\lambda)$, $c_{j_*}(\lambda)$ ($j = 2, 4, 5$). По графикам этих монотонных функций от λ определяем то значение λ, при котором все ограничения выполнены (одно из них является равенством).

Таким образом, при решении задачи считается заданной не величина K_0, а значение λ, по которому потом определяется $K_0(\lambda)$; поэтому важно указать границы изменения величин λ и h_i. Для этого нужно провести конкретное исследование функций $f_i(h_i)$.

Удобна и реалистична следующая аппроксимация:

$$K_C^{(i)}(h_i) = \left[c_i + \frac{d_i}{1+2x_i^2} \right]^{1/2}$$

$$c_i = [K_{IC}^{(i)}]^2, \quad d_i = [K_C^{(i)}(h_0)]^2 - c_i, \quad x_i = \frac{h_i}{h_{i0}} - 1 \geqslant 0$$

В этом случае

$$f_i(h_i) = \frac{1}{K_C^{(i)}(h_i)} \left[c_i + d_i \frac{1-2x_i}{(1+2x_i^2)^2} \right] - K_0$$

Отсюда следует, что при $h_n > 1.5\, h_{n0}$ функция $f_n(h_n)$ отрицательна и для выполнения соотношения (1.7) необходимо неравенство $\lambda > 0$. Тогда во всех соотношениях (1.8) будет

$$f_i(h_i) - f_{i+1}(h_{i+1}) < 0$$

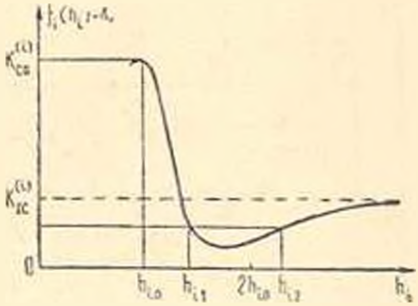
причем эта разность монотонно убывает с увеличением i (считается, что E_i растет с ростом i). Это соответствует постепенному приближению h_i к h_{i0} с уменьшением i.

Примерный график функции $f_i(h_i) - K_0$ показан на фиг. 1; при $K_0 > \max\limits_i K_{IC}^{(i)}$ существует отрицательный относительный минимум $f_i(h_i)$ и поэтому, вообще говоря, две точки h_{i1} и h_{i2} (фиг. 1), которые удовлетворяют необходимым условиям. Ясно, что точки $h_{i2} > h_{i1}$ надо брать для слоев с большим номером, однако они могут не удовлетворять ограничениям (1.4). Кроме того, в решении надо учитывать и граничную точку $h_i = h_{i0}$. Таким образом, непрерывная задача (1.2) — (1.4) сводится к проверке 3^n точек вида

$$\{h_{1j_1}, h_{2j_2}, \ldots, h_{nj_n}\}$$

$$(j_i = 0, 1, 2; \; i = 1, 2, \ldots, n)$$

Из проведенного исследования вытекает, что для многослойных панелей из материалов, у которых существенно различны модули упругости, оптимальными будут следующие величины толщин слоев: для всех слоев, кроме последнего, надо брать $h_i = h_{i0}$, а для последнего слоя — $h_n = h_{n2}$. Для материалов с близкими характеристиками надо проводить расчет по формулам (1.5), (1.7), (1.8).



Фиг. 1. Примерный график функции $f_i(h_i) + K_{ic}$.

Построенный принцип выбора оптимальной многослойной панели по пяти основным ее характеристикам следует рекомендовать как наиболее реалистический принцип оптимального проектирования авиационных слоистых конструкций. Заметим, что в настоящее время в инженерной практике обычно проектируют панели лишь по двум характеристикам (по жесткости и весу).

Примеры. В качестве первого примера проведем расчет шестислойной панели из следующих листовых материалов: алюминиевого сплава 7075-Т6 ($h_0 = 0.26$ *см*, $K_{IC} = 4200$ *кг/см*$^{3/2}$, $K_C(h_0) = 9165$ *кг/см*$^{3/2}$, $E = 0.71 \times 10^6$ *кг/см*^{2}), титанового сплава ВТ14 ($h_0 = 0.1$ *см*, $K_{IC} = 5500$ *кг/см*$^{3/2}$, $K_C(h_0) = 9420$ *кг/см*$^{3/2}$, $E = 1.15 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}), стали ВКС-1 ($h_0 = 0.1$ *см*, $K_{IC} = 6300$ *кг/см*$^{3/2}$, $K_C(h_0) = 9030$ *кг/см*$^{3/2}$, $E = 2.05 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}).

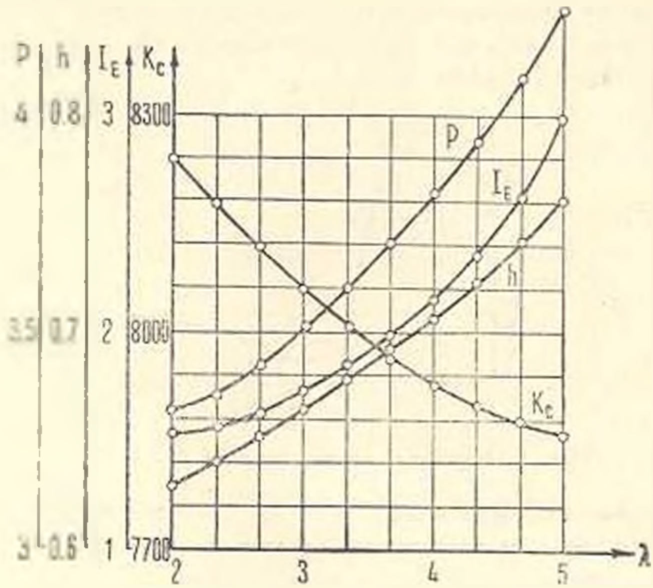
Графики зависимостей $c_{\text{ш}}(\lambda)$ приведены на фиг. 2. Расчетом подтверждается решение для материалов с различными модулями упругости, изложенное выше.

В качестве второго примера спроектируем шестислойную панель из следующих алюминиевых сплавов с близкими характеристиками: сплава 7075-Т6 (его характеристики даны в первом примере); сплава Д16 ($h_0 = 0.2$ *см*, $K_{IC} = 4000$ *кг/см*$^{3/2}$, $K_C(h_0) = 9000$ *кг/см*$^{3/2}$, $E = 0.72 \times 10^6$ *кг/см*^{2}) и сплава АК8 ($h_0 = 0.22$ *см*, $E = 0.73 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}, $K_{IC} = 4000$ *кг/см*$^{3/2}$, $K_C(h_0) = 8200$ *кг/см*$^{3/2}$).

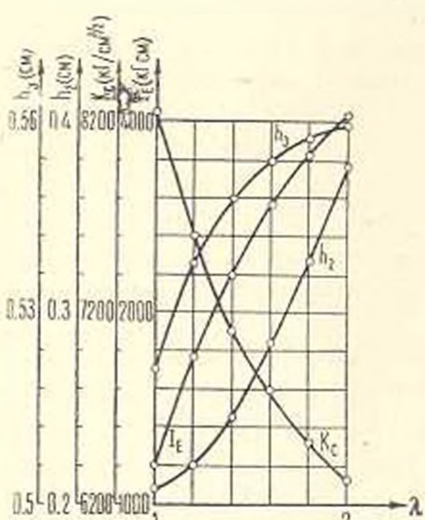
Графики зависимостей представлены на фиг. 3, 4.

Толщины отдельных слоев отличаются от величин h_{i0} при больших значениях вязкости разрушения и монотонно изменяются с увеличением λ.

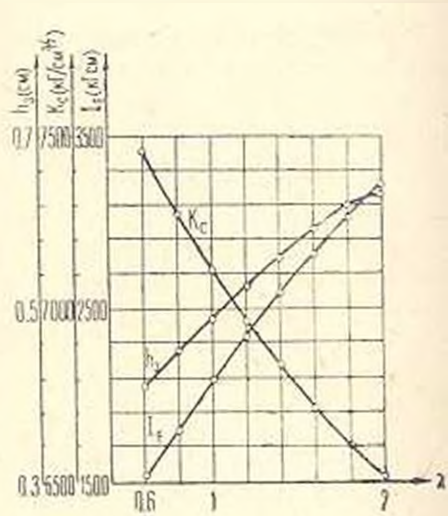
Замечание. Несмотря на то, что рассматриваемая задача решается методами оптимизации по параметрам, она является задачей оптимального проектирования в начальной постановке, поскольку, как показано в [2], ограничения в виде плоского напряженного состояния панели приводят к критерию (1.3). Разумеется, параметрическая оптимизация многослойной панели, предложенная в [2] и в настоящей статье, является определенным



Фиг. 2. Зависимость приведенного веса ($кг/см^2 \cdot 10^3$), толщины ($см$), изгибной жесткости ($кг\,см \cdot 10^{-4}$) и вязкости разрушения ($кг\,см^{3/2}$) от λ.



Фиг. 3. Результаты расчета для материалов с близкими характеристиками (меняется толщина 2-х слоев).



Фиг. 4. Результаты расчета для материалов с близкими характеристиками (меняется толщина третьего слоя)

упрощением общей задачи оптимального проектирования панели. Это упрощение основано на схематизации физического процесса деформации и разрушения панели (что отражено характеристиками c_1, c_2, c_3), а также на схематизации геометрической структуры панели (характеристики c_1, c_2). Оно не учитывает, например, динамических волновых эффектов, докритического роста трещин и многого другого, когда следует оптимизировать другие критерии. Общая задача оптимизации многослойной панели весьма неопределенна и ее решение невозможно без таких упрощений. Рассматриваемая постановка может считаться начальной при наличии аварийного и безаварийного режимов работы панели [2].

Заключение. Предложенный подход оптимального проектирования многослойных панелей с помощью множителя Лагранжа дает возможность установить связь между этим множителем в общем критерии многокритериальной задачи и правой частью ограничения типа равенства в однокритериальной задаче. Общая задача оптимального проектирования многослойной панели распадается на набор вспомогательных однокритериальных задач.

Московский авиационный
институт

Поступила 24 XI 1977

Գ. Պ. ՉԵՐԵՊԱՆՈՎ, Վ. Մ. ՍՄՈԼՍԿԻ

ԲԱԶՄԱՇԵՐՏ ՊԱՆԵԼՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՆԱԽԱԳԾՄԱՆ ԲԱԶՄԱՉԱՓԱՆԻՇԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Բազմաշերտ պանելի օպտիմալ նախագծման բազմաչափանիշային խնդիրը բերվել է օժանդակ միաչափանիշային խնդիրներին, որոնք առաջարկվում է լուծել Լագրանժի բազմապատկիչների մեթոդով։

Կառուցվել է բոլոր հինգ հիմնական բնութագրիչների օպտիմալ բազմաշերտ պանելների ընտրության սկզբունքը, որն առաջարկվում է որպես շերտավոր ավիացիոն պանելների օպտիմալ նախագծման ավելի գործնական սկզբունք։

Այդ սկզբունքի հիման վրա լուծվել է քայքայման ֆիքսված մածուցիկությամբ և ծռման ամենամեծ կոշտությամբ բազմաշերտ պանելի օպտիմալ նախագծման խնդիրը։

ON THE SOLUTION OF A MULTICRITERIA PROBLEM OF OPTIMAL DESIGN OF MULTILAYERED PANELS

G. P. CHEREPANOV, V. M. SMOLSKY

S u m m a r y

The multicriteria problem of optimal design of a multilayered panel is reduced to a set of auxiliary one-criterion problems. The auxiliary problem of design of the multilayered panel of maximum flexural rigidity and given fracture toughness is solved as an example.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
2. *Черепанов Г. П., Смольский В. М., Таги-Заде А. Г.* Об оптимальном проектировании некоторых инженерных материалов. «Изв. АН Арм. ССР, Механика», 1976, т. XXIX, № 3.
3. *Trojanowski St.* Wielokryteriowa optimalizacja w sensie Pareto niewspolimierych funkcji celu. Prz. statist., 1975, v. 22, No. 3, 427—433.
4. *Бартель Д. Л., Маркс Р. В.* Оптимальное проектирование механических систем при противоречивых критериях, конструирование и технология машиностроения. Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков, сер. Б, 1974, № 1, 72—80.
5. *Смольский В. М.* Апостериорная оценка промежуточного параметра в комбинированном методе поиска экстремума. Автоматизация управления нефтеперерабатывающей и нефтехимической промышленности, М., 1972, № 2, 77—81.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, №2, 1979 Механика

Г. Г. ОГАНЯН

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЛАБЫХ ВОЛН В РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

Рассматривается задача о нестационарном распространении трехмерных волн в смеси химически активных жидкостей, содержащей пузырьки газа одинакового размера, которые могут появиться, например, при прохождении достаточно сильной звуковой волны через смесь жидкостей Известно [1], что если частота волны меньше резонансной частоты пузырька, акустическая кавитация резко увеличивает сжимаемость смеси и уменьшает скорость звука. В работе методом коротких волн [2] выведены нелинейные уравнения, описывающие нестационарные течения в окрестностях фронтов слабых ударных волн в трехмерной постановке с учетом эффектов вязкости, дисперсии и релаксации (химической реакции), причем число последних равно единице. Имеют место квазизамороженный и квазиравновесный предельные процессы распространения возмущений. Исследуются специальные среды, в которых предельные скорости звука в смеси, соответствующие предельным процессам, близки по величине.

Для всех трех случаев в линейной двумерной постановке формулируются и решаются задачи о вхождении пучка монохроматических волн в рассматриваемые среды. В случае отсутствия эффектов диссипации и релаксации эволюция пучков исследовалась в [3—5].

1. *Исходные уравнения*. Предположим, что в потоке химически активной многокомпонентной смеси вязких жидкостей со стабильными газовыми пузырьками малых размеров происходит только одна химическая реакция, характеризуемая параметром q-полнотой (степенью развития) химической реакции. Допуская, что газ и жидкость движутся с одинаковой скоростью, статистическим распределением пузырьков можно пренебречь. Далее считая, что расстояние между пузырьками много больше радиуса R пузырька, можно пренебречь взаимодействием между ними, и пульсации одиночного пузырька описать уравнением Херринга-Флинна, учитывающим сжимаемость жидкой фазы [6]. Систему исходных уравнений, описывающую течение релаксирующей газожидкостной смеси в пространстве, возьмем в виде [7—9]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \tag{1.1}$$

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla P + \frac{1}{3}\lambda_1 \nabla (\operatorname{div} \vec{V}) + \lambda_1 \Delta \vec{V} \tag{1.2}$$

$$\rho\left(T\frac{ds}{dt}+Q\frac{dq}{dt}\right)=\sigma\nabla\vec{V} \tag{1.3}$$

$$P_2-P=L=\rho_1 R\left(1-\frac{2}{a_{10}}\frac{dR}{dt}\right)\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}\rho_1\left(1-\frac{4}{3}\frac{1}{a_{10}}\frac{dR}{dt}\right)\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+$$

$$+\frac{4\lambda_1}{R}\frac{dR}{dt}-\frac{R}{a_{10}}\left(1-\frac{1}{a_{10}}\frac{dR}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(P_2-\frac{4\lambda_1}{R}\frac{dR}{dt}\right) \tag{1.4}$$

$$\frac{P_2\beta}{\rho_1(1-\beta)}=\text{const},\quad \rho=\rho_1(1-\beta),\quad P_2R^3=\text{const} \tag{1.5}$$

$$Q=\sum_{k=1}^{n}\mu_k\Delta\nu_k,\quad \Delta\nu_k=\nu_k'-\nu_k$$

Здесь индексом «1» обозначены параметры течения жидкой фазы, индексом «2»—газовой фазы, без индекса—всей смеси, t—время, $V=\{u, v, w\}$—вектор скорости частиц смеси, P — давление, ρ — плотность, s — энтропия, T — температура, σ — тензор вязких напряжений, λ_1— динамический коэффициент вязкости, β — объем газа в единице объема смеси, a — скорость звука, Q — сродство химической реакции, μ — химический или термодинамический потенциал, ν_k, ν_k' — стехнометрические коэффициенты в уравнении реакции, ∇ и Δ — операторы Гамильтона и Лапласа.

В состоянии полного термодинамического равновесия (покоя) $Q=0$. Предположим [9], что вблизи этого состояния зависимость q от Q дается в виде

$$\frac{dq}{dt}=-\frac{1}{\tau_*}HQ+\ldots,\quad H>0 \tag{1.6}$$

где τ_* — время протекания химической реакции.

Система уравнений (1.1)—(1.6) не замкнута. Для ее замыкания следует обратиться к соотношению Гиббса [8]

$$de=Tds-PdV+Qdq$$

где e — удельная внутренняя энергия, $V=1/\rho$ — удельный объем.

Первые частные производные от e по s, q и V, представляющие собой уравнения состояния среды, являются тремя недостающими искомыми соотношениями между термодинамическими величинами.

Пусть трехмерная ударная волна слабой, но конечной интенсивности распространяется вдоль оси x. При распространении ударной волны, рассматривая окрестность фронта, отметим,что нелинейность, совместно с эффектами диссипации и релаксации, приведет к медленным изменениям формы волны не только вдоль направления, но и поперек его. Поскольку продольные изменения волны происходят сравнительно быстро, естественно предположить, что изменения параметров течения вдоль волны происходят гораздо быстрее, чем поперек нее. В качестве основного течения принимается ориентированный вдоль x невозмущенный поток. Рассматриваемая область течения считается областью коротких волн и поэтому за независимые переменные принимаются [2]

$$t = t', \quad x = a_0 t + \varepsilon r, \quad y = \varepsilon^{1/2} y_1, \quad z = \varepsilon^{1/2} z_1 \tag{1.7}$$

Здесь и далее ε — безразмерный малый параметр, a_0 — невозмущенная скорость звука в релаксирующей смеси, характеризуемая видом процесса распространения возмущений.

При неравноправной роли координат x, y, z составляющие возмущенного вектора скорости вдоль них также будут иметь различные порядки величин

$$u = \varepsilon u', \quad v = \varepsilon^{3/2} v', \quad w = \varepsilon^{3/2} w' \tag{1.8}$$

Предположим, что в любой момент времени и в каждой точке пространства параметры течения газожидкостной смеси мало отклоняются от соответствующих параметров в состоянии покоя

$$P_2 = P_0 + \varepsilon P', \quad \rho = \rho_0 + \varepsilon\rho', \quad \rho_1 = \rho_{10} + \varepsilon\rho_1', \quad \beta = \beta_0 + \varepsilon\beta', \quad s = s_0 + \varepsilon s' \tag{1.9}$$

$$T = T_0 + \varepsilon T', \quad Q = \varepsilon Q', \quad q = q_0 + \varepsilon q', \quad R = \varepsilon^{3/2}(R_0 + \varepsilon R'), \quad a = a_0 + \varepsilon a'$$

Здесь и далее нулевые индексы отнесены к невозмущенным характеристикам течения. При последующих упрощениях исходных уравнений в окрестности волн будут оставлены лишь главные члены до порядка ε включительно, и штрихи над возмущенными параметрами опускаются.

Упрощая посредством (1.9) уравнения (1.5) и комбинируя их друг с другом, в основном порядке получим

$$\beta = \frac{\beta_0}{\rho_0}\rho - \frac{\beta_0}{P_0}P, \quad \rho_1 = \frac{1}{(1-\beta_0)^2}\left(\rho - \frac{\beta_0\rho_0}{P_0}P\right), \quad R = -\frac{R_0}{3P_0}P \tag{1.10}$$

Легко также получить из тех же уравнений связь между скоростями звука в смеси и жидкой фазе [9]

$$\frac{1}{a_0^2} = \frac{\beta_0\rho_0}{P_0} + \frac{(1-\beta_0)^2}{a_{10}^2} \tag{1.11}$$

Уравнение неразрывности (1.1) с помощью первых двух соотношений (1.5) можно преобразовать к виду

$$\frac{dP_2}{dt} + \frac{P_2}{\beta}\operatorname{div}\vec{V} + \frac{P_2(1-\beta)^2}{\rho\beta}\frac{d\rho_1}{dt} = 0 \tag{1.12}$$

2. *Квазиравновесный процесс.* Примем за независимые термодинамические переменные давление P_1, плотность ρ_1, сродство Q. Относительная ко всей смеси масса газовой фазы мала, поэтому в принятом приближении можно отождествить давление и энтропию всей смеси с аналогичными параметрами жидкой фазы, то есть $P = P_1$, $s = s_1(P_1, \rho_1, Q)$. Тогда приращение удельной энтропии можно записать как

$$ds=\left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_{\rho_1 Q}\left[dP-a_{1e}^2\,d\rho_1-\left(\frac{dP}{\partial Q}\right)_{\rho_1 s}dQ\right],\quad a_{1e}^2=\left(\frac{\partial P}{\partial\rho_1}\right)_{Qs}$$

Здесь a_{1e} — равновесная скорость звука в жидкой фазе.

Комбинируя последнее соотношение с (1.12), (1.3) и (1.4), получим

$$\left[1+\frac{P_2(1-\beta)^2}{\beta\rho a_{1e}^2}\right]\frac{dP_2}{dt}+\frac{P_2}{\beta}\operatorname{div}\vec{V}-\frac{P_2(1-\beta)^2}{\beta\rho a_{1e}^2}\frac{dL}{dt}=$$

$$=\frac{P_2(1-\beta)^2}{\beta\rho}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial s}\right)_{PQ}\left(Q\frac{dq}{dt}-\frac{1}{\rho}\sigma\nabla\vec{V}\right)-\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial Q}\right)_{Ps}\frac{dQ}{dt}\right]\tag{2.1}$$

Подставляя (1.4) в уравнение движения (1.2), приведем его к виду

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt}+\nabla P_2=\nabla L+\frac{1}{3}\lambda_1\nabla(\operatorname{div}\vec{V})+\lambda_1\Delta\vec{V}\tag{2.2}$$

Итак, исходная система уравнений (1.1)—(1.6) привелась к системе (1.10) и (2.1)—(2.2).

Аналогично [2, 11] после упрощений уравнений (1.1), (1.3), (1.6) и (2.2) можно показать, что в принятом приближении сжатие газожидкостной смеси происходит обратимо и время протекания химической реакции τ_* намного меньше макроскопического времени, например, времени пробега частицей волновой зоны. При этом в принятом приближении имеют место следующие соотношения:

$$\rho=\rho_0 u/a_{e0},\quad P=\rho_0 a_{e0}u,\quad Q'\sim\varepsilon,\quad s'\sim\varepsilon,\quad \tau_*\sim\varepsilon^2\tag{2.3}$$

$$\frac{\partial q}{\partial r}=\varepsilon\frac{H_0}{\tau_* a_{e0}}Q,\qquad q=\left(\frac{\partial q}{\partial\rho_{10}}\right)_{Qs}\frac{\rho_0}{(1-\beta_0)^2 a_{e0}}\left(1-\frac{\beta_0\rho_0 a_{e0}^2}{P_0}\right)u$$

Разлагая $a_{1e}=a_{1e}(P,\ Q,\ s)$ вблизи положения термодинамического равновесия в ряд Тейлора, с учетом (2.3) получим

$$a_{1e}=\frac{(1-\beta_0)\,a_{e0}}{a_{1e0}}(\alpha_{1e}-1)\,u,\qquad \alpha_{1e}=\frac{1}{a_{1e0}}\left[\frac{\partial}{\partial\rho_{10}}(\rho_1 a_{1e})\right]\tag{2.4}$$

Применяя преобразования (1.7)—(1.9) к y и z—составляющим уравнения (2.2) и удерживая главные члены, получим условие потенциальности течения в окрестности волны

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial y_1},\qquad \frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial z_1}\tag{2.5}$$

Аналогичным образом упрощая x-составляющую (2.2) и уравнение (2.1), удержим главные члены, причем полученные уравнения будут содержать в себе члены как порядка ε, так и $\varepsilon^0=1$. С целью исключения членов нулевого порядка ($\varepsilon^0=1$), скомбинируем их друг с другом и, учитывая (1.10), (1.11), (2.3) и (2.4), запишем искомое уравнение в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha_e a_{e0}^2 u\frac{\partial u}{\partial r}-(\delta_{1e}+\varkappa_e+m_e)\frac{a_{e0}^3}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+$$

$$+\gamma_e\frac{a_{e0}^4}{\varepsilon^3}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}=-\frac{a_{e0}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y_1}+\frac{\partial w}{\partial z_1}\right) \tag{2.6}$$

где

$$\alpha_{1e}=\frac{\beta_0}{a_{e0}^2}\left(\frac{\rho_0 a_{e0}^2}{P_0}\right)^2+\alpha_{1e}\frac{(1-\beta_0)^3 a_{e0}^2}{a_{1e0}^4},\qquad \gamma_e=\frac{\beta_0 R_0^2\rho_0^2 a_{e0}}{6(1-\beta_0)P_0^2}$$

$$\varkappa_e=\frac{\beta_0 R_0\rho_0 a_{e0}}{2P_0 a_{1e0}},\qquad \delta_{1e}=\frac{2}{3}\lambda_1\frac{1}{\rho_0 a_{e0}^3}\left[1+\beta_0\frac{\rho_0^2 a_{e0}^4}{P_0^2}\right],\qquad a_{1f0}^2=\left(\frac{\partial P}{\partial\rho_{10}}\right)_{qs} \tag{2.7}$$

$$m_e=\frac{\tau_{Vs}}{2a_{e0}^3}\frac{a_{1f0}^2-a_{1e0}^2}{(1-\beta_0)^2}\left(1-\frac{\beta_0\rho_0 a_{e0}^2}{P_0}\right)^2,\qquad \tau_{Vs}=\frac{\tau_*}{H_0}\left(\frac{\partial q}{\partial Q_0}\right)_{\rho_1 s}$$

В последнем соотношении (2.7) индексы показывают какие параметры течения фиксированы, a_f — замороженная скорость звука.

Уравнения (2.5)—(2.6) образуют замкнутую систему, описывающую течение релаксирующей газожидкостной смеси в окрестности волны, которая удобна при решении задач с начальными условиями. При формулировке граничной задачи перейдем от (r, t') к переменным (x, τ), где $\tau = t - x/a_{e0}$ — время пробега частицы смеси до фронта волны ($\tau=0$). Согласно формулам перехода [10]

$$\left.\frac{\partial}{\partial t'}\right|_r=a_0\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_\tau,\qquad \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_{t'}=-\frac{\varepsilon}{a_0}\left.\frac{\partial}{\partial\tau}\right|_x$$

после возврата к истинной скорости u приведем систему к виду

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha_e u\frac{\partial u}{\partial\tau}-\delta_e\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}-\gamma_e\frac{\partial^3 u}{\partial\tau^3}\right)=\frac{a_{e0}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{2.8}$$

где $\delta_e=\delta_{1e}+\varkappa_e+m_e$. Без учета диссипации и дисперсии, связанной с наличием пузырьков, (2.8) совпадает с уравнением, полученным в [4]. Релаксационное свойство и сжимаемость жидкой фазы, как видно из (2.7), приводят к увеличению коэффициента диссипации смеси.

Вводя безразмерные переменные

$$u=Uu_0,\quad \xi=\alpha_e\omega u_0 x,\quad y=l\eta,\quad z=l\zeta,\quad \theta=\omega\tau$$

где ω, l, u_0 — некоторые характерные размерные константы, уравнение (2.8) запишем как

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}-U\frac{\partial U}{\partial\theta}-\delta_e^*\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}-\gamma_e^*\frac{\partial^3 U}{\partial\theta^3}\right)=\frac{N}{4}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\zeta^2}\right) \tag{2.9}$$

где

$$\delta_e^*=\delta_e\omega/\alpha_e u_0,\quad \gamma_e^*=\gamma_e\omega^2/\alpha_e u_0,\quad N=2a_{e0}/l^2\omega^2\alpha_e u_0$$

а) Плоская задача. Линейное приближение.

Пусть на границе смеси задается двумерный пучок в виде плоской неоднородной волны

$$U(0, \eta, \theta) = e^{-\eta^2} \sin \theta \text{ при } \xi = 0 \tag{2.10}$$

Характерные константы наделены уже конкретным смыслом: l — характерная ширина пучка, ω — частота, u_0 — начальное значение амплитуды волны, число

$$N = (2\pi^2 a_{e0}^2 \alpha_e M_0)^{-1} (\lambda/l)^2, \quad M_0 = u_0/a_0, \quad \lambda = 2\pi a_{e0}/\omega$$

характеризует относительный вклад нелинейных и дифракционных эффектов в искажении профиля волны, λ — длина волны. При больших значениях N преобладают дифракционные эффекты и нелинейностью можно пренебречь. Решение получаемого из (2.9) линейного уравнения плоской задачи ищем в форме

$$U(\xi, \eta, \theta) = \operatorname{Im} A(\xi, \eta) \exp[i(\theta - \gamma_e^* \xi + i\delta_e^* \xi)] \tag{2.11}$$

где $A(\xi, \eta)$ — комплексная амплитуда, для которой получаем параболическое уравнение

$$i \frac{\partial A}{\partial \xi} = \frac{N}{4} \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2}$$

Решая полученное уравнение методом разделения переменных, находим

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} [B(n) \cos(n\eta) + C(n) \sin(n\eta)] e^{i \frac{N}{4} \xi n^2} dn \tag{2.12}$$

Граничное условие (2.10) трансформируется для A в начальное

$$\text{при } \xi = 0 \quad A(0, \eta) = e^{-\eta^2}$$

Согласно начальному условию, представляющему собой четную функцию, из (2.12) следует, что $C(n) \equiv 0$, и тогда $B(n)$ определится из обратного косинус-преобразования Фурье [11] от начального условия для

$$B(n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{n^2}{4}}$$

Подставляя значение $B(n)$ в (2.12), определим комплексную амплитуду

$$A(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{1 - iN\xi}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{1 - iN\xi}\right)$$

Тогда решение (2.11) после отделения мнимой части запишется в окончательном виде

$$U = \frac{1}{\sqrt[4]{1+N^2\xi^2}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{1+N^2\xi^2} - \delta_e^*\xi\right) \sin\left(\theta - \gamma_e^*\xi - \right.$$
$$\left. - \eta^2 \frac{N\xi}{1+N^2\xi^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\, N\xi\right)$$

При отсутствии диссипации и дисперсии ($\delta_e^* = \gamma_e^* = 0$) полученное решение совпадает с [4] и описывает переход от плоской ($\xi = 0$) к цилиндрической ($\xi \to \infty$) волне. Видно, что дифракция приводит к увеличению ширины пучка, уменьшению амплитуды волны и искривлению поверхностей равных фаз. Наличие пузырьков, согласно (1.11) и определению числа N, приводит к уменьшению числа N и, соответственно, к менее яркому дифракционному эффекту. Учет пузырьков приводит также к увеличению толщины волны и к большему искривлению поверхностей равных фаз, а учет химической реакции — к затуханию волны.

3. *Квазизамороженный процесс.*

Вывод уравнения, описывающего течение газожидкостной смеси в окрестности волны при квазизамороженном процессе распространения возмущений, аналогичен выводу уравнения (2.9).

За независимые термодинамические переменные принимаются P_1, ρ_1 и полнота химической реакции q. Как и в [2, 12], нетрудно показать, что в принятом приближении сжатие газожидкостной смеси происходит обратимо, время протекания химической реакции τ_* намного больше времени пробега частицей волновой зоны и имеют место порядки величин: $q' \sim \varepsilon$, $s' \sim \varepsilon$, $\tau_* \sim 1$.

Не приводя здесь промежуточных выкладок, выпишем окончательное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha_f u \frac{\partial u}{\partial \tau} - \delta_f \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \gamma_f \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} + gu\right) = \frac{a_{f0}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (3.1)$$

где $\delta_f = \delta_{1f} + \kappa_f$, $g = m_f/\tau_{Vs}^2$, a_{f0} — невозмущенная замороженная скорость звука в смеси, остальные коэффициенты задаются соотношениями (2.7) с заменой a_{e0} на a_{f0}. Переходя в (3.1) к безразмерным переменным п. 2, рассмотрим линейное приближение плоской задачи, для которого сформулируем граничную задачу (2.10). Решение получаемого линейного уравнения будем искать в форме

$$U(\xi, \eta, \theta) = \mathrm{Im}\, A(\xi, \eta) \exp\left[i(\theta - \gamma_f^*\xi) - (\delta_f^* + g^*)\,\xi\right]$$

Не повторяя выкладок предыдущего параграфа, окончательное решение запишем в виде

$$U = \frac{1}{\sqrt[4]{1+N^2\xi^2}} \exp\left[-\frac{\eta^2}{1+N^2\xi^2} - (\delta_f^* + g^*)\right] \sin\left(\theta - \gamma_f^*\xi - \right.$$
$$\left. - \eta^2 \frac{N\xi}{1+N^2\xi^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\, N\xi\right)$$

где

$$\delta^*_f = \frac{(\delta_{1f} + \varkappa_f)\,\omega}{a_f u_0}, \quad g^* = \frac{m_f}{\tau^2_{V_s}\omega a_f u_0}, \quad \gamma^*_f = \frac{\gamma_f \omega}{a_f u_0}, \quad N = \frac{2a_{f0}}{l^2\omega^2 a_f u_0}$$

4. *Среды, в которых скорости звука близки.* Исходя из термодинамических соотношений [8], связь между замороженной и равновесной скоростями звука в жидкой фазе можно найти в виде

$$a^2_{1f0} - a^2_{1e0} = \frac{1}{\rho_1^2}\frac{e^2_{12}}{e_{11}} \geqslant 0, \quad e_{12} = \left(\frac{\partial^2 e}{\partial V_1 \partial q}\right)_s, \quad e_{11} = \left(\frac{\partial^2 e}{\partial q^2}\right)_{V_1 s} \tag{4.1}$$

где знак неравенства определяется требованием термодинамической устойчивости системы. Пусть величины скоростей a_{1e0} и a_{1f0} в состоянии покоя близки друг к другу, тогда из (1.11) следует, что разность скоростей звука a_{e0} и a_{f0} в покоящейся смеси также мала. Примем $e_{120} = \varepsilon^{1/2} e'_{120}$. В предельных процессах распространения возмущений соответственно сначала $Q' \sim \varepsilon$, а затем $q' \sim \varepsilon$. Если теперь предположить, что они одинакового порядка и не настолько малы, то в (1.9) необходимо сделать замену $Q' \to \varepsilon^{1/2} Q'$, $q' \to \varepsilon^{1/2} q'$ и тогда время протекания химической реакции τ_* окажется порядка ε.

По предположению, невозмущенная скорость звука a_0 не совпадает ни с одной из предельных скоростей a_{e0} и a_{f0}, поэтому положим

$$a_{f0} - a_0 = \varepsilon a_0 \sigma_{f1}, \quad a_0 - a_{e0} = \varepsilon a_0 \sigma_{e1} \tag{4.2}$$

где постоянные σ_{e1} и σ_{f1} — величины порядка единицы.

Аналогично [12], легко показать, что в рассматриваемом приближении опять выполняются первых два соотношения из (2.3) с заменой a_{e1} на a_1, условие потенциальности течения (2.5) и

$$Q = e_{110} q - \frac{\rho_1}{\rho_{10}^2} e_{120}, \quad \sigma_{e1} = \sigma_{f1} + \frac{e^2_{120}}{2\rho_0^2 a_0^2 e_{110}}\left(1 - \frac{\beta_0 \rho_0 a_0^2}{P_0}\right)^2 = \sigma_{f1} + \tau_{V_s}\frac{g a_0}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{H_0}{\tau_* a_0}\left[e_{110} q - \frac{e_{120}}{\rho_0 a_0}\left(1 - \frac{\beta_0 \rho_0 a_0^2}{P_0}\right) u\right] \tag{4.3}$$

Применяя преобразования (1.7)—(1.9) к x-составляющей уравнения (2.2) и к (3.1), оставляя главные члены, получим два уравнения, содержащие также слагаемые порядка $\varepsilon^0 = 1$. Учитывая соотношения (4.1), (1.10) и (2.3), а также $(\partial \rho_1/\partial q_0)_{P_s} = e_{120}/a^2_{1f0}$, исключим друг из друга слагаемые нулевого порядка. Получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_0^2\left(\alpha_f u - \frac{\sigma_{f1}}{a_0}\right)\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{a_0^3}{\varepsilon^2}(\delta_1 + \varkappa)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{a_0^4}{\varepsilon^3}\gamma\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} +$$

$$+ \frac{a_0}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{\partial w}{\partial z_1}\right) = \frac{e_{120}}{\rho_0}\left(1 - \frac{\beta_0 \rho_0 a_0^2}{P_0}\right)\frac{\partial q}{\partial r} \tag{4.4}$$

где выражения коэффициентов выписаны в (2.7) с заменой a_{e0} на a_0, a_{1e0} на a_{10} и учтены соотношения (1.10).

Исключая в (4.4) посредством (4.3) параметр q и константу σ_{f1}, получим уравнение, описывающее совместно с (2.5) течение в окрестности волны, распространяющейся в специальных средах. Записывая систему через одно уравнение и переходя к переменным (x, τ), получим

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\left(\alpha_f u-\varepsilon\frac{\sigma_{e1}}{a_0}\right)\frac{\partial u}{\partial\tau}-(\delta_1+\varkappa+m)\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}-\gamma\frac{\partial^3 u}{\partial\tau^3}\right]-$$
$$-\frac{a_0}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=-\tau_{Vs}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\left(\alpha_f u-\varepsilon\frac{\sigma_{e1}}{a_0}\right)\frac{\partial u}{\partial\tau}-\right.$$
$$\left.-(\delta_1+\varkappa)\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}-\gamma\frac{\partial^3 u}{\partial\tau^3}\right]+\tau_{Vs}\frac{a_0}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (4.5)$$

где явные выражения τ_{Vs} и m даны в (2.7). Если скорости a_{f0} и a_{1e0} почти совпадают друг с другом, то есть $m \ll (\delta_1+\varkappa)$, то (4.5) один раз интегрируется и получаемое уравнение будет описывать течение в окрестности волны, распространяющейся в химически инертной газожидкостной смеси.

Нетрудно показать, что (4.5) в предельных случаях переходит в уравнения (2.8) и (3.1). Действительно, пусть $\tau_{Vs}\sim\varepsilon^2$ и $\sigma_{e1}=0$. Оставляя в (4.5) главные члены, то есть только левую часть, снова придем к (2.8). Если же $\tau_{Vs}\sim 1$ и $\sigma_{f1}=0$, то, заменяя с помощью (4.3) σ_{e1} на σ_{f1} и оставляя главные члены, приведем (4.5) к (3.1).

а) Плоская задача. Линейное приближение.

Вводя безразмерные переменные п. 2, линейный двумерный вариант уравнения (4.5) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial U}{\partial\xi}+\sigma_{e1}^*\frac{\partial U}{\partial\theta}-(\delta_1^*+\varkappa^*+m^*)\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}-\gamma^*\frac{\partial^3 U}{\partial\theta^3}\right]-\frac{N}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}=$$
$$=-N_1\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[\frac{\partial U}{\partial\xi}+\sigma_{e1}^*\frac{\partial U}{\partial\theta}-(\delta_1^*+\varkappa^*)\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}-\gamma^*\frac{\partial^3 U}{\partial\theta^3}\right]+\frac{NN_1}{4}\frac{\partial^3 U}{\partial\theta\partial\eta^2} \qquad (4.6)$$

Здесь коэффициенты δ_1^*, $\varkappa^*$, m^*, γ^*, N те же, что и в (2.9) с заменой a_{e0} на a_0, α_e на α, $N_1=\tau_{Vs}\omega$, $\sigma_{e1}^*=\varepsilon\sigma_{e1}/\alpha u_0 a_0$, $\alpha=\alpha_f=\alpha_e$.

Решение задачи, сформулированной в п. 2, для уравнения (4.6) можно записать в виде

$$U=\frac{1}{\sqrt[4]{1+N^2\xi^2}}\exp\left[-\frac{\eta^2}{1+N^2\xi^2}-(\delta_1^*+\varkappa^*)\xi-\frac{m^*}{1+N_1^{(2)}}\xi\right]\sin\left(\theta-\right.$$
$$\left.-\eta^2\frac{N\xi}{1+N^2\xi^2}-\gamma^*\xi-\sigma_{e1}^*\xi+\frac{N_1 m^*}{1+N_1^2}\xi+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}N\xi\right)$$

который в предельных случаях переходит в решения п. 2 и 3. По сравнению с предыдущими решениями видно, что имеют место лишь количественные изменения в структуре (толщине) волны и поверхностях равных фаз. Качественная картина не меняется: происходит эволюция плоской волны в цилиндрическую.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 12 VII 1978

Գ. Գ. ՕՀԱՆՅԱՆ

ՌԵԼԱՔՍԱՑՎՈՂ ԳԱԶԱՀԵՂՈՒԿԱՅԻՆ ԽԱՌՆՈՒՐԴՈՒՄ ԹՈՒՅԼ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է եռաչափ ալիքների տարածման խնդիրը գազի պղպջակներ պարունակող քիմիապես ակտիվ հեղուկների խառնուրդում։ Մածուցիկության, ռելաքսացիայի և պղպջակների առկայության դեպքում դուրս են բերված թույլ հարվածային ալիքների ճակատների շրջակայքերում ոչ ստացիոնար շարժումը նկարագրող ոչ գծային հավասարումները։

Ոչ ստացիոնար հարթ ալիքների համար, գրգռումների տարածման տարբեր պրոցեսներում, գծային դրվածքով լուծվում են մոնոխրոմատիկ ալիքների էվոլյուցիայի խնդիրներ։ Վերոհիշյալ էֆեկտների հաշվառումը ալիքների ճակատների և հավասար ֆազաների մակերևույթներում առաջ է բերում կազմության մեջ միայն քանակական փոփոխություններ։

PROPAGATION OF WEAK WAVES IN A RELAXATING GAS-FLUID MIXTURE

G. G. OHANIAN

S u m m a r y

The three-dimensional problem on propagation of waves in a mixture of chemically active fluids containing gas bubbles is considered. The non-linear equations, describing unsteady flows in the vicinity of weak shock waves fronts in the presence of the effects of viscosity, relaxation and bubbles, are derived.

For unsteady plane waves in linear statement the problems on evolution of monochromatic waves in various processes of disturbances propagation are solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бэтчелор Г. К.* Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1968, № 3.
2. *Наполитано Л. Дж., Рыжов О. С.* Об аналогии между неравновесными и вязкими инертными течениями при околозвуковых скоростях. Ж. выч. матем. и математич. физики, 1971, т. 11, № 5.
3. *Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.* Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде. Успехи физ. наук, 1967, т. 93, № 1.
4. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М., «Наука», 1975.
5. *Соболев В. В.* Распространение и самофокусировка звука в неоднородной газожидкостной среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.
6. *Акуличев В. А.* Пульсация кавитационных полостей. Сб. «Мощные ультразвуковые поля». М., «Наука», 1968.
7. *Ландау Л. Д.* и *Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
8. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.
9. *Ван-Вейнгарден Л.* Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа. Сб. «Реология суспензий». М., «Мир», 1975.
10. *Багдоев А. Г.* Некоторые нелинейные задачи о движении сжимаемой жидкости. Ереван, Изд-во АН Арм. ССР, 1967.
11. *Градштейн И. С.* и *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
12. *Оганян Г. Г.* Распространение слабых волн в химически активной среде в нелинейной постановке. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1973, т. 26, № 6.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 2, 1979 Механика

З. А. МАРТИРОСЯН

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ ЦИЛИНДРОВ

Осесимметричные контактные задачи с определением площадки контакта для однородного цилиндра и жестких штампов исследовались в работах [5—7] и др. Контактные задачи с определением области контакта для случаев двух контактируемых тел, когда одно из них или оба имеют неограниченные размеры, рассмотрены в работах [8—22] и др. Определение области контакта между двумя упругими конечными телами из различных материалов исследовано в работах [23, 24] и др. Контактная задача для двух цилиндров при учете переменного коэффициента сцепления рассмотрена в работе [25], где изучен характер распределения контактных напряжений. Осесимметричные контактные задачи с определением площадки контакта двух цилиндров конечной длины рассмотрены в работе [26].

В настоящей работе рассматривается осесимметричная задача теории упругости для двух цилиндров с различными упругими свойствами, имеющих конечные длины и одинаковые диаметры, которые контактированы между собой торцами при сжимающей внешней торцевой нагрузке. На боковых поверхностях цилиндров нормальные и касательные напряжения равны нулю. Контакт между цилиндрами принимается гладким, то есть без сцепления, а зона контакта двух цилиндров считается неизвестной и определяется в процессе решения задачи. Осесимметричная сжимающая нагрузка берется таким образом, что образуется контактная область в виде круга. Решение рассматриваемой задачи представляется в виде рядов Фурье и Фурье-Дини, при этом для коэффициентов этих рядов получены две бесконечные системы линейных уравнений и парные ряды-уравнения, содержащие функции Бесселя, которые сводятся к квази-вполне регулярной бесконечной системе, свободные члены которой стремятся к нулю.

Окончательные выражения для контактных напряжений получены с выделенной особенностью. Для конкретных внешней нагрузки, упругих констант и размеров цилиндров вычислены размеры контакта и напряжения на контактных поверхностях.

1. Пусть два цилиндра конечной длины и одинакового диаметра, изготовленных из различных материалов, прижимаются по торцам друг к другу (фиг. 1). На других торцах цилиндров приложена осесимметричная сжимающая нагрузка таким образом, что образуется контактная область в виде круга. Сцепление на поверхности контакта отсутствует. На боковой поверхности цилиндров нормальные и касательные напряжения равны нулю.

В дальнейшем все величины, относящиеся к левому цилиндру, будем отмечать индексом 1, а к правому — индексом 2.

Граничные условия рассматриваемой осесимметричной задачи имеют вид

$$\sigma_z^{(i)}(r,\ l_i) = \begin{cases} -P_i & (0 \leqslant r < a) \\ 0 & (a < r < R) \end{cases} = a_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(i)} J_0(\beta_k r) \tag{1.1}$$

$$\tau_{rz}^{(i)}(r,\ l_i) = 0 \tag{1.2}$$

$$\sigma_r^{(i)}(R,\ z) = \tau_{rz}^{(i)}(R,\ z) = 0 \tag{1.3}$$

Из условия гладкого контакта имеем

$$\tau_{rz}^{(i)}(r,\ 0) = 0, \quad \sigma_z^{(1)}(r,\ 0) = \sigma_z^{(2)}(r,\ 0) \tag{1.4}$$

$$u_z^{(1)}(r,\ 0) = -u_z^{(2)}(r,\ 0) \quad (0 \leqslant r < c) \tag{1.5}$$

$$\sigma_z^{(1)}(r,\ 0) = 0 \quad (c < r < R) \tag{1.6}$$

где l_i — длина, R — радиус цилиндров. $J_n(x)$ — функция Бесселя действительного аргумента первого рода, а β_k — положительные корни уравнения $J_1(\beta_k R) = 0$, расположенные в порядке возрастания. ($i = 1, 2$).

Решение задачи сводится к нахождению функций Лява $\Phi^{(i)}(r, z)$, которые удовлетворяют бигармоническому уравнению [2]

$$\Delta^2\Phi^{(i)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 \Phi^{(i)}(r,\ z) = 0 \tag{1.7}$$

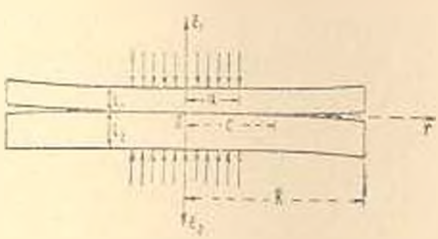
граничным условиям (1.1—1.3) и условиям контакта (1.4—1.6).

Напряжения и перемещения выражаются через функцию $\Phi^{(i)}(r, z)$ следующим образом [2]:

$$\sigma_r^{(i)} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_i \Delta\Phi^{(i)} - \frac{\partial^2\Phi^{(i)}}{\partial r^2}\right)$$

$$\sigma_\theta^{(i)} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_i \Delta\Phi^{(i)} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial r}\right)$$

$$\sigma_z^{(i)} = \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu_i)\Delta\Phi^{(i)} - \frac{\partial^2\Phi^{(i)}}{\partial z^2}\right]$$



Фиг. 1.

$$\tau_{rz}^{(i)} = \frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu_i)\Delta\Phi^{(i)} - \frac{\partial^2\Phi^{(i)}}{\partial z^2}\right] \tag{1.8}$$

$$u_z^{(i)} = \frac{1}{2G_i}\left[2(1-\nu_i)\Delta\Phi^{(i)} - \frac{\partial^2\Phi^{(i)}}{\partial z^2}\right]$$

$$u_r^{(i)} = -\frac{1}{2G_i}\frac{\partial^2\Phi^{(i)}}{\partial r\partial z}$$

где G_i — модуль сдвига, а ν_i — коэффициент Пуассона.

Решения уравнений (1.7) ищем в следующем виде [1]:

$$\Phi^{(i)}(r, z) = z\,(A_i r^2 + B_i z^2 + C_i z) + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k^{(i)} I_0(\lambda_{ki} r) +$$

$$+ G_k^{(i)} \lambda_{ki} r I_1(\lambda_{ki} r)] \sin \lambda_{ki} z +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(i)} \operatorname{sh} \beta_k z + B_k^{(i)} \operatorname{ch} \beta_k z + C_k^{(i)} \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z + D_k^{(i)} \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z)\, J_0(\beta_k r) \qquad (1.9)$$

где $I_k(x)$ — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента, а

$$\lambda_{ki} = \frac{k\pi}{l_i}$$

Удовлетворяя условиям (1.1—1.6) при помощи (1.8), получаем

$$A_i = \frac{\nu_i}{2(1+\nu_i)} a_0^{(i)} \qquad B_i = \frac{1-2\nu_i}{6(1+\nu_i)} a_0^{(i)} \qquad (1.10)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^3 \{- A_k^{(i)} \operatorname{ch} \mu_{ki} - C_k^{(i)} (\mu_{ki} \operatorname{ch} \mu_{ki} - \operatorname{sh} \mu_{ki}) -$$

$$- D_k^{(i)} [\mu_{ki} \operatorname{sh} \mu_{ki} - (1-2\nu_i) \operatorname{ch} \mu_{ki}]\}\, J_0(\beta_k r) +$$

$$+ \frac{4}{R} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \lambda_{ki}^4 I_1(\lambda_{ki} R)\, G_k^{(i)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p^2 J_0(\beta_p r)}{(\lambda_{ki}^2 + \beta_p^2)^2 J_0(\beta_p R)} = a_k^{(i)} \qquad (1.11)$$

$$A_k^{(i)} \operatorname{sh} \mu_{ki} + C_k^{(i)} \mu_{ki} \operatorname{sh} \mu_{ki} + D_k^{(i)} (2\nu_i \operatorname{sh} \mu_{ki} + \mu_{ki} \operatorname{ch} \mu_{ki}) = 0 \qquad (1.12)$$

$$\frac{4}{l_i} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^4 J_0(\beta_k R) \Big\{ C_k^{(i)} \sum_{p=1}^{\infty} \Big[\frac{(-1)^p \operatorname{ch} \mu_{ki} - 1}{\lambda_{pi}^2 + \beta_k^2} - \frac{(-1)^p \operatorname{ch} \mu_{ki} - 1}{(\lambda_{pi}^2 + \beta_k^2)^2} \beta_k^2 \Big] +$$

$$+ D_k^{(i)} \sum_{p=1}^{\infty} \Big[\frac{(-1)^p \operatorname{sh} \mu_{ki}}{\lambda_{pi}^2 + \beta_k^2} - \frac{\operatorname{sh} \mu_{ki}}{(\lambda_{pi}^2 + \beta_k^2)^2} \beta_k^2 \Big] \Big\} \cos \lambda_{pi} z -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{ki}^2 I_1(\lambda_{ki} R)\, \varphi_k^{(i)} G_k^{(i)} \cos \lambda_{ki} z = 0 \qquad (1.13)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^3 [- A_k^{(1)} + (1-2\nu_1) D_k^{(1)}]\, J_0(\beta_k r) +$$

$$+ \frac{4}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k1}^4 I_1(\lambda_{k1} R)\, G_k^{(1)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p^2 J_0(\beta_p r)}{(\lambda_{k1}^2 + \beta_p^2)^2 J_0(\beta_p R)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^3 [- A_k^{(2)} + (1-2\nu_2) D_k^{(2)}]\, J_0(\beta_k r) +$$

$$+ \frac{4}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k2}^4 I_1(\lambda_{k2} R)\, G_k^{(2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p^2 J_0(\beta_p r)}{(\lambda_{k2}^2 + \beta_p^2)^2 J_0(\beta_p R)} \qquad (1.14$$

$$(1-2\nu_1)C_1 + G(1-2\nu_2)C_2 +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\left[(1-\nu_1)C_k^{(1)} + G(1-\nu_2)C_k^{(2)}\right]J_0(\beta_k r) = 0 \quad 0 \leqslant r < c \tag{1.15}$$

$$a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^3\left[-A_k^{(1)} + (1-2\nu_1)D_k^{(1)}\right]J_0(\beta_k r) +$$

$$+\frac{4}{R}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{k1}^4 I_1(\lambda_{k1}R)\,G_k^{(1)}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_p^2 J_0(\beta_p r)}{(\lambda_{k1}^2+\beta_p^2)^2 J_0(\beta_p R)} = 0 \qquad c < r < R$$

$$E_k^{(i)} I_1(\lambda_{ki}R) + G_k^{(i)}\left[2(1-\nu_i)I_1(\lambda_{ki}R) + \lambda_{ki}R I_0(\lambda_{ki}R)\right] = 0 \tag{1.16}$$

$$B_k^{(i)} + 2\nu_i C_k^{(i)} = 0 \tag{1.17}$$

где введены обозначения

$$\mu_{ki} = \beta_k l_i, \quad G = \frac{G_1}{G_2}, \qquad \gamma_k^{(i)} = \lambda_{ki}R - \lambda_{ki}R\,\frac{I_0^2(\lambda_{ki}R)}{I_1^2(\lambda_{ki}R)} - \frac{2(1-\nu_i)}{\lambda_{ki}R} \tag{1.18}$$

При получении (1.10—1.15) использованы разложения функций $\operatorname{sh}\beta_k z$, $\operatorname{ch}\beta_k z$, $\beta_k z \operatorname{sh}\beta_k z$, $\beta_k z \operatorname{ch}\beta_k z$ по $\cos\lambda_{pi}z$, функций $I_0(\lambda_{ki}r)$ и $\lambda_{ki} r I_1(\lambda_{ki} r)$ по $J_0(\beta_k r)$ и соотношения (1.16—1.17).

Введем обозначения

$$-A_k^{(1)} + (1-2\nu_1)D_k^{(1)} = \frac{X_k}{\beta_k^3}, \qquad \lambda_{ki}^3 I_1(\lambda_{ki}R)\,G_k^{(i)} = Y_k^{(i)} \tag{1.19}$$

Из соотношений (1.11), (1.12), (1.14) и (1.19) получим

$$C_k^{(i)} = -H_k^{(i)}\frac{X_k}{\beta_k^3} - \frac{4F_k^{(i)}}{\beta_k R J_0(\beta_k R)}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p\lambda_{pi}Y_p^{(i)}}{(\lambda_{pi}^2+\beta_k^2)^2} -$$

$$-\delta_{i,2}\frac{4H_k^{(i)}}{\beta_k R J_0(\beta_k R)}\sum_{p=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda_{p1}Y_p^{(1)}}{(\lambda_{p1}^2+\beta_k^2)^2} - \frac{\lambda_{p2}Y_p^{(2)}}{(\lambda_{p2}^2+\beta_k^2)^2}\right] + F_k^{(i)}\frac{a_k^{(i)}}{\beta_k^3} \tag{1.20}$$

$$D_k^{(i)} = \frac{1}{\operatorname{sh}^2\mu_{ki} - \mu_{ki}^2}\left\{\frac{\operatorname{sh}^2\mu_{ki}}{\beta_k^3}X_k + \frac{4\mu_{ki}\operatorname{sh}\mu_{ki}}{\beta_k R J_0(\beta_k R)}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p\lambda_{pi}Y_p^{(i)}}{(\lambda_{pi}^2+\beta_k^2)^2} -\right.$$

$$\left.-\delta_{i,2}\frac{4\operatorname{sh}^2\mu_{ki}}{\beta_k R J_0(\beta_k R)}\sum_{p=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda_{p1}Y_p^{(1)}}{(\lambda_{p1}^2+\beta_k^2)^2} - \frac{\lambda_{p2}Y_p^{(2)}}{(\lambda_{p2}^2+\beta_k^2)^2}\right] - \frac{\mu_{ki}\operatorname{sh}\mu_{ki}}{\beta_k^3}a_k^{(i)}\right\} \tag{1.21}$$

где

$$\delta_{1,2} \text{ — символ Кронекера:} \quad \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n \\ 0 & \text{при } m \neq n \end{cases}$$

$$\frac{\operatorname{sh}\mu_{ki} + \mu_{ki}\operatorname{ch}\mu_{ki}}{\operatorname{sh}^2\mu_{ki} - \mu_{ki}^2} = F_k^{(i)}(\beta_k l_i), \qquad \frac{\operatorname{sh}\mu_{ki}\operatorname{ch}\mu_{ki} + \mu_{ki}}{\operatorname{sh}^2\mu_{ki} - \mu_{ki}^2} = H_k^{(i)}(\beta_k l_i) \tag{1.22}$$

Введем обозначения

$$M_k = \alpha M_k^{(1)} + (1-\alpha) M_k^{(2)}, \qquad M_k^{(i)} = \frac{\operatorname{sh}\mu_{ki}(\operatorname{ch}\mu_{ki} - \operatorname{sh}\mu_{ki}) + \mu_{ki}(1+\mu_{ki})}{\operatorname{sh}^2\mu_{ki} - \mu_{ki}^2}$$

$$\frac{1-\nu_1}{1-\nu_1+G(1-\nu_2)} = \alpha$$

Подставляя значения $C_k^{(i)}$ в (1.15) и имея ввиду (1.19), получим следующие парные ряды-уравнения, содержащие функции Бесселя:

$$\begin{aligned} &q_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(1+M_k)\frac{X_k}{\beta_k}J_0(\beta_k r) = \sum_{k=1}^{\infty} N_k J_0(\beta_k r) \quad 0 \leqslant r < c \\ &a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k J_0(\beta_k r) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k J_0(\beta_k r) \qquad c < r < R \end{aligned} \tag{1.23}$$

где введены обозначения

$$q_0 = -\frac{(1-2\nu_1)C_1 + G(1-2\nu_2)C_2}{1-\nu_1+G(1-\nu_2)}, \qquad P_k = -\frac{4\beta_k^2}{RJ_0(\beta_k R)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n1}Y_n^{(1)}}{(\lambda_{n1}^2+\beta_k^2)^2}$$

$$N_k = -\frac{4\beta_k}{RJ_0(\beta_k R)}\left\{\alpha F_k^{(1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\lambda_{n1}Y_n^{(1)}}{(\lambda_{n1}^2+\beta_k^2)^2} + \right.$$

$$+ (1-\alpha)F_k^{(2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\lambda_{n2}Y_n^{(2)}}{(\lambda_{n2}^2+\beta_k^2)^2} +$$

$$\left. + (1-\alpha)H_k^{(2)}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda_{n1}Y_n^{(1)}}{(\lambda_{n1}^2+\beta_k^2)^2} - \frac{\lambda_{n2}Y_n^{(2)}}{(\lambda_{n2}^2+\beta_k^2)^2}\right]\right\} +$$

$$+ \frac{\alpha F_k^{(1)}a_k^{(1)} + (1-\alpha)F_k^{(2)}a_k^{(2)}}{\beta_k} \tag{1.24}$$

Приведем парные ряды-уравнения к бесконечной системе [4, 5, 26]. Неизвестные X_k ищем в виде

$$X_k = \frac{1}{(\beta_k c)^{1/2}J_0^2(\beta_k R)}\sum_{n=1}^{\infty} b_n J_{2n+1/2}(\beta_k c) - \frac{4\beta_k^2}{RJ_0(\beta_k R)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n1}Y_n^{(1)}}{(\lambda_{n1}^2+\beta_k^2)^2} \tag{1.25}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Подставляя (1.25) во второе уравнение (1.23) и пользуясь разложением функции

$$f(r) = \begin{cases} (c^2-r^2)^{-1/2}F\left(-s,\ s+1/2,\ 1,\ \dfrac{r^2}{c^2}\right) & (0 < r < c) \\ 0 & (c < r < R) \end{cases}$$

$$= \frac{(2c)^{1/2}\Gamma(s+1/2)}{R^2\Gamma(s+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J_{2s+1/2}(\beta_k c)J_0(\beta_k r)}{\beta_k^{1/2}J_0^2(\beta_k R)} \quad (s = 1, 2, \ldots) \tag{1.26}$$

получим

$$b_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a_0^{(1)} \qquad (1.27)$$

Подставляя (1.25) в первое уравнение (1.23), затем умножая полученное соотношение на $r(c^2-r^2)^{-1/2}F(-s, s+1/2, 1, r^2/c^2)$, далее интегрируя по r в пределах от 0 до c и используя значение интеграла

$$\int_0^c r^{\nu+1}(c^2-r^2)^{p/2}F\left(-s, 1+p/2+s+\nu, \nu+1, \frac{r^2}{c^2}\right)J_\nu(\beta_k r)\,dr =$$

$$=\left(\frac{2}{\beta_k}\right)^{1+p/2} c^{1+\nu+p/2}\frac{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1+p/2+s)}{2\Gamma(1+s+\nu)}J_{\nu+2s+p/2+1}(\beta_k c) \qquad (1.28)$$

$$(s = 1, 2, \ldots)$$

получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+M_k)J_{2n+1/2}(\beta_k c)J_{2s+1/2}(\beta_k c)}{\beta_k^2 J_0^2(\beta_k R)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{N_k}{\beta_k^{3/2}}J_{2s+1/2}(\beta_k c) -$$

$$-\sqrt{c}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+M_k)P_k}{\beta_k^{3/2}}J_{2s+1/2}(\beta_k c) +$$

$$+\sqrt{c}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha F_k^{(1)}a_k^{(1)} + (1-\alpha)F_k^{(2)}a_k^{(2)}}{\beta_k^{3/2}}J_{2s+1/2}(\beta_k c) \qquad (1.29)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ — гипергеометрический ряд.

Выражение (1.29) представляет собой бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно b_n и $Y_n^{(i)}$.

Пользуясь значением ряда

$$\frac{2}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{\nu+2s+1/2}(\beta_k c)J_{\nu+2n+1/2}(\beta_k c)}{\beta_k^2 J_0^2(\beta_k R)} = \frac{\delta_{ns}}{2\nu+4s+1} +$$

$$+\frac{2}{\pi}(-1)^{n+s}\int_0^{\infty}\frac{k_1(y)I_{\nu+2n+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right)I_{\nu+2s+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right)}{yI_1(y)}dy \qquad (1.30)$$

бесконечную систему (1.29) приведем к виду

$$b_s = \sum_{n=0}^{\infty}a_{sn}b_n + \sum_{n=1}^{\infty}a_{sn}^{(1)}Y_n^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty}a_{sn}^{(2)}Y_n^{(2)} + d_s \qquad (1.31)$$

где введены обозначения

$$a_{sn} = -\frac{2(4s+1)(-1)^{s+n}}{\pi}\int_0^\infty \frac{k_1(y)\, I_{2n+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right) I_{2s+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right)}{y I_1(y)}\, dy -$$

$$-\frac{2(4s+1)}{R^2}\sum_{k=1}^\infty \frac{M_k\, J_{2n+1/2}(\beta_k c)\, J_{2s+1/2}(\beta_k c)}{\beta_k^2 J_0^2(\beta_k R)}$$

$$a_{sn}^{(i)} = -\frac{8(4s+1)\sqrt{c}\,\alpha^{(i)}}{R^3}\sum_{k=1}^\infty \frac{\beta_k^{1/2}}{J_0(\beta_k R)}\left|\frac{(-1)^n F_k^{(i)} - H_k^{(i)}}{(\lambda_{ni}^2+\beta_k^2)^2}\lambda_{ni}\right| J_{2s+1/2}(\beta_k c)$$

$$d_s = \frac{2(4s+1)\sqrt{c}}{R^2}\sum_{k=1}^\infty \frac{\alpha F_k^{(1)} a_k^{(1)} + (1-\alpha) F_k^{(2)} a_k^{(2)}}{\beta_k^{3/2}} J_{2s+1/2}(\beta_k c) \qquad (1.32)$$

$$\alpha^{(1)} = \alpha, \quad \alpha^{(2)} = 1-\alpha, \ (i=1,\ 2)$$

$I_n(x)$, $k_n(x)$ — функции Бесселя от мнимого аргумента соответственно первого и второго рода.

Подставляя значения $C_k^{(i)}$ и $D_k^{(i)}$ в (1.13) и имея ввиду (1.19) и (1.25), получаем бесконечную систему линейных уравнений

$$Y_k^{(i)} = \sum_{n=0}^\infty a_{kn}^{(i)} b_n + \sum_{n=1}^\infty b_{kn}^{(i)} Y_n^{(i)} + A_k^{(i)} \qquad (1.33)$$

где введены обозначения

$$a_{kn}^{(i)} = \frac{4\lambda_{ki}^2}{l_i \varphi_k^{(i)}}\sum_{p=1}^\infty \frac{\beta_p\,[H_p^{(i)} - (-1)^k F_p^{(i)}]}{(\beta_p c)^{1/2} J_0(\beta_p R)\,(\lambda_{ki}^2+\beta_p^2)^2} J_{2n+1/2}(\beta_p c)$$

$$b_{kn}^{(i)} = \frac{16\lambda_{ki}^2}{l_i R \varphi_k^{(i)}}\sum_{p=1}^\infty \frac{\beta_p^3\,\{[(-1)^k F_p^{(i)} - H_p^{(i)}] + (-1)^n [F_p^{(i)} - (-1)^k H_p^{(i)}]\}}{(\lambda_{ki}^2+\beta_p^2)^2(\lambda_{ni}^2+\beta_p^2)^2}\lambda_{ni}$$

$$A_k^{(i)} = \frac{4\lambda_{ki}^2}{l_i \varphi_k^{(i)}}\sum_{p=1}^\infty \frac{\beta_p J_0(\beta_p R)}{(\lambda_{ki}^2+\beta_p^2)^2}[H_p^{(i)}(-1)^k - F_p^{(i)}]\, a_p^{(i)} \qquad (1.34)$$

Докажем, что бесконечные системы (1.31) и (1.33) квази-вполне регулярны. Для этого оценим сумму модулей коэффициентов при неизвестных при $s\to\infty$

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{n=1}^\infty |a_{sn}| = \lim_{s\to\infty} d_s = 0, \text{ как показано в работах [5, 26].}$$

Учитывая, что $F_k^{(i)}$ и $H_k^{(i)}$ — ограниченные величины и при возрастании индекса монотонно стремятся соответственно к нулю и единице, а также пользуясь оценкой [27]

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{(n^2+x^2)^2} < \frac{16}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{4x^3} + \frac{x^2}{2(1+x^2)^2} \qquad (1.35)$$

для второго и третьего членов (1.31) получим оценку

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{sn}^{(i)}|<\frac{8(4s+1)\alpha^{(i)}\sqrt{c}}{R^3}(F_1^{(i)}+H_1^{(i)})\frac{l^3}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^{1/2}\left[\frac{16}{\left(1+\frac{l^2}{\pi^2}\beta_k^2\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\frac{l^3}{\pi^3}\beta_k^3}+\frac{\frac{l^2}{\pi^2}}{2\left(1+\frac{l^2}{\pi^2}\beta_k^2\right)^2}\beta_k^2\right]\left|\frac{J_{2s+1/2}(\beta_k c)}{J_0(\beta_k R)}\right| \qquad (1.36)$$

где

$$k\pi<\beta_k<(k+1)\pi \qquad (1.37)$$

Ряд по «к» в выражении (1.36) сходится, и выражение (1.36) является аналитической функцией s. При возрастании s $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{sn}^{(i)}|$ стремится к нулю, следовательно, бесконечная система (1.31) квази-вполне регулярна.

Имея ввиду, что ряд по n $\sum_{n=1}^{\infty}|J_{2n+1/2}(\beta_k c)|$ сходится и его сумма имеет порядок $\beta_p^{-1/2}$, аналогичным образом можно доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{kn}|\to 0(k^{-1/2})$$

Для сумм модулей коэффициентов при неизвестных $Y_n^{(i)}$ системы (1.34) будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_{kn}^{(i)}|\leqslant\frac{16\lambda_{ki}^2}{l_i R|\varphi_k^{(i)}|}\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2\beta_p^3 F_p^{(i)}}{(\lambda_{ki}^2+\beta_p^2)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{ni}}{(\lambda_{ni}^2+\beta_p^2)^2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2\beta_p^3 H_p^{(i)}}{(\lambda_{ki}^2+\beta_p^2)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{ni}}{(\lambda_{ni}^2+\beta_p^2)^2}\right\} \qquad (1.38)$$

Первая двухкратная сумма в (1.38) при «к», стремящемся к бесконечности, стремится к нулю, так как $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{ni}}{(\lambda_{ni}^2+\beta_p^2)^2}$ имеет порядок (β_p^{-2}), $\beta_p F_p^{(i)}=0(pe^{-p})$, а $\lim_{k\to\infty}|\varphi_k^{(i)}|=1$.

При больших значениях «к» вторая сумма имеет оценку*

$$\frac{32\lambda_{ki}^2}{l_i R|\varphi_k^{(i)}|}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_p^3 H_p^{(i)}}{(\lambda_{ki}^2+\beta_p^2)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{ni}}{(\lambda_{ni}^2+\beta_p^2)^2}<\frac{8}{\pi^2} \qquad (1.39)$$

Таким образом, сумма модулей коэффициентов бесконечных систем (1.33) при $k\to\infty$ стремится к нулю или остается меньше единицы. Следовательно, эти системы, свободные члены которых имеют порядок (k^{-1}), квази-вполне регулярны.

* Такая оценка получена и в работе [24].

После решения бесконечных систем (1.31) и (1.33), из первого уравнения (1.23) при фиксированном c определяется q_0.

Решая бесконечные системы (1.31) и (1.33), получим значения неизвестных b_n и $Y_n^{(1)}$, выраженные через неизвестную величину c. Далее по формулам (1.12), (1.16), (1.17), (1.19—1.21) последовательно можно определить все искомые коэффициенты, а, следовательно, напряжения и перемещения в любой точке составного цилиндра, выраженные через постоянную c.

Нормальное напряжение на поверхности контакта двух материалов, выраженное через b_n, имеет вид

$$\sigma_z(r, 0) = \begin{cases} 0 & c < r < R \\ \dfrac{R^2(c^2 - r^2)^{-1/2}}{\sqrt{2}\, c} \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \dfrac{n! F\left(-n, n+1/2, 1, \dfrac{r^2}{c^2}\right)}{\Gamma(n+1/2)} & 0 < r < c \end{cases} \tag{1.40}$$

Неизвестную величину c можно определить из условия равенства нулю контактного напряжения на границе области контакта, что равносильно условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n = 0 \tag{1.41}$$

2. *Численные примеры.* Рассмотрим два цилиндра одинаковой длины и одинакового диаметра, изготовленных из различных материалов, которые прижимаются по торцам друг к другу без сцепления. На других торцах цилиндров приложены равномерно распределенные нормальные нагрузки (фиг. 1)

$$\sigma_z^{(1)}(r, l_1) = \begin{cases} -p & \text{при } 0 < r < a \\ 0 & \text{при } a < r < R \end{cases} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\beta_k r) \tag{2.1}$$

где

$$a_0 = -\frac{a^2}{R^2} p; \qquad a_k = -\frac{2a J_1(\beta_k a)}{R^2 \beta_k J_0^2(\beta_k R)} p \tag{2.2}$$

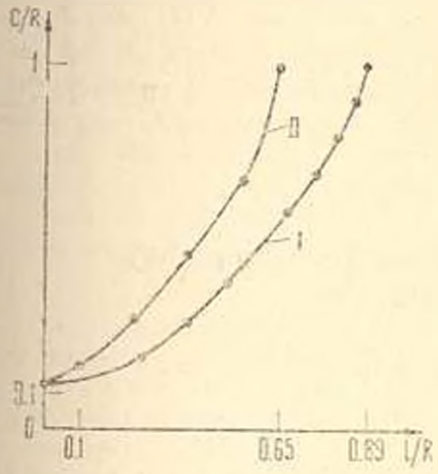
Целью вычислений является определение размеров области контакта и величин контактных напряжений.

Для этого предварительно необходимо найти зависимость c от l. Но это связано с большим объемом вычислений.

Во избежание отмеченных трудностей, будем задавать значения c и определять соответствующие длины цилиндров ($l_1 = l_2 = l$).

Вычисления проведены для значений $a = 0.125\,R$; $\nu_1 = 0.1$; 0.4; $\nu_2 = 0.4$; 0.1; $G = 0.05$, 0.5, 1, 2, 20; $c = 0.2$, $0.3, \ldots, 0.9$, $1\,R$.

График зависимости размеров области контакта от длины цилиндров для значений $a = 0.125R$, $G = 0.5$, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.4$ показан на фиг. 2, кривая I. Кривая II на фиг. 2 выражает зависимость размеров области контакта в случае, когда на боковых поверхностях цилиндров выполняются условия симметрии [26].



Фиг. 2

Фиг. 3

Распределение нормального контактного напряжения при различных значениях l показано на фиг. 3.

Таблица 1

G	ν_1	ν_2	c/R	l/R	$\sigma_z(0, 0)/p$
0.5	0.1	0.4	0.9	0.8625	−0.05968
20	0.1	0.4	0.9	0.[illegible]500	−0.06098

На основании проведенных вычислений заключаем (табл. 1), что изменение модулей сдвига и коэффициентов Пуассона материалов слоев мало влияет на размеры области контакта и на напряженное состояние цилиндров.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 13 VI 1978

Գ. Ս. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

ԵՐԿՈՒ ԳԼԱՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է ճակատներով հպված, տարբեր առաձգական հատկու-թյուններ, միևնույն տրամագծեր և վերջավոր երկարություններ ունեցող երկու շրջանային գլանների առաձգականության տեսության առանցքասիմետրիկ խնդիր։ Նորմալ և շոշափող լարումները գլանային մակերևույթների վրա բա-

ցակայում են։ Գլանների կոնտակտի տիրույթը համարվում է անհայտ և այն որոշվում է խնդրի լուծման ընթացքում։ Խնդրի լուծումը ներկայացվում է Ֆուրյեի և Ֆուրյե-Դինիի շարքերի միջոցով։ Այդ շարքերի գործակիցների որոշման համար ստացվում են գծային հավասարումների անվերջ սիստեմներ և Բեսելի ֆունկցիաներ պարունակող զույգ շարք-հավասարումներ։ Զույգ շարք-հավասարումների լուծումները հանգեցված են քվազիլիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմների լուծմանը։ Բերված թվային օրինակներում որոշվում են կոնտակտի տիրույթի չափը և լարումները կոնտակտի մակերևույթի վրա։

THE AXISYMMETRIC CONTACT PROBLEM FOR TWO CYLINDERS

Z. A. MARTIROSIAN

S u m m a r y

Considered is the axisymmetric contact problem in the elasticity theory for two cylinders of finite lengths and equal diameters with different elastic properties contacted to each other by fronts under a pressing external frontal load.

The normal and shear stresses are equal to zero on the surfaces of the cylinders. The contact between the cylinders is assumed smooth. The contact zone is thought of as unknown and determined in solving the problem. The solution is presented as the Fourier and Fourier-Dini series. Two infinite systems of linear equations and dual series-equations, containing Bessel's functions reduced to a quasi-quite-regular infinite system, are obtained to determine the coefficients of the series. The contact sizes and stresses on the contact surfaces are calculated for the actual external load, elastic constants and the sizes of the cylinders.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л.* К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. Докл. АН Арм.ССР, 1954, т. XIX, № 1.
2. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. М., ОНТИ, 1937.
3. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М., Гостехиздат, 1953.
4. *Cooke J. C., Tranter C. J.* Dual Fourier-Bessel Series. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, August 1959, vol. XII, part. 2. Oxford.
5. *Баблоян А. А., Мелконян А. П.* О двух смешанных осесимметричных задачах теории упругости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1969, т. XXII, № 5.
6. *Мелконян А. П.* Об одной смешанной осесимметричной задаче теории упругости для цилиндра конечной длины. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1971, т. XXIV, № 2.
7. *Баблоян А. А., Мелконян А. П.* Об одной осесимметричной контактной задаче для цилиндра конечной длины. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1973, т. XXVI, № 5.
8. *Stippes M., Wilson H. B., Jr. Krull F. N.* A contact Stress Problem for a Smooth Disk in an Infinite Plate. Proceedings of the 4-th U. S. National Congress of Applied Mechanics, ASME, 1962.

9. *Наумов Ю. А., Шевляков Ю. А.* Изгиб балочных плит на упругом основании при неполном контакте. Сб. «Гидроаэромеханика и теория упругости», Изд. Харьковского университета, 1968, вып. 9.

10. *Noble B., Hussain M.* Exact Solution of Certain Dual Series for Indentation and Inclusion Problem. Intern. J. Eng. Sci., 1969, vol. 7, No. 11.

11. *Вейцман.* О контакте без сцепления между пластиной и упругим полупространством. Прикл. мех. (Труды ASME, сер. E), 1969, т. 36.

12. *Pu S. L., Hussain M. A., Anderson G.* Lifing of a Plate from the Foundation due to Axisymmetric Pressure. Developments in Mechanics Proceedings of the 11-th Midwestern Mechanics Conference, 1969, vol. 5.

13. *Пу, Хуссейн.* К вопросу о контакте без сцепления между пластиной и упругим полупространством. Прикл. мех. (Труды ASME, сер. E). 1970, т. 37, № 3.

14. *Наумов Ю. А., Никифорова В. Д.* Об отставании упругого слоя. Прикл. мех. Журнал АН Укр. ССР, 1971, т. 7, № 11.

15. *Кир, Дандерс, Цлай.* Контактная задача для слоя, лежащего на полупространстве. Прикл. мех. (Труды ASME, сер. E), 1972, т. 39, № 4.

16. *Кир, Сильва.* Две смешанные задачи для полуполосы. Прикл. мех. (Труды ASME, сер. E), 1972, т. 39, № 4.

17. *Weitsman Y.* A tensionless Contact between a Beam and an Elastic Half-Space. Intern. J. Eng. Sci., 1972, vol. 10, No. 1.

18. *Erdogan F., Ratwani M.* The Contact Problem for an Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes. J. Appl. Mech. (Trans. ASME, ser. E), 1974, 41, No. 3.

19. *Gladwell G. M. L., Iyer K. R. P.* On the Unbounden Contact Between a Circular Plate and an Elastic Foundation. Journal Elasticity, 1974, vol. 4.

20. *Tsai K. C., Dunders J., Keer L. M.* Elastic Layer Pressed against a Half Space. J. Appl. Mech. (Trans. ASME, ser. E), 1974, 41, No. 3.

21. *Dunders J.* Properties of Elastic Bodies in Contact. The mechanics of the Contact between Deformable Bodies. Proceedings of IUTAM Simposium. Enschede, Natherlands, 20—23, August 1974, Ed-rs A. D. de Pater, J. J. Kalker. Delft University Press, 1975.

22. *Абрамян Б. Л., Макарян В. С.* Осесимметричная задача о контакте между двумя слоями из различных материалов с учетом трения между слоями. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т. XXIX, № 5.

23. *Баблоян А. А., Мелконян М. Г.* О контакте двух прямоугольников без сцепления с определением области контакта. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 5.

24. *Мелконян М. Г., Мкртчян А. М.* Об одной контактной задаче для двух прямоугольников. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. XXIII, № 3.

25. *Pytko Stanislaw, Wierzcholski Krzysztof.* Wytezenie materialu w obstarze styku dwoch walcow przy uwzglednieniu zmiennego wspolczynnika sczepienia. „Zag. eksploat. maszyn", 1976, 11, No. 2.

26. *Мартиросян З. А.* О двух контактных задачах для круглых упругих цилиндров конечной длины. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1978, т. XXXI, № 5.

27. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 1.

28. *Бенсйчева Т. Г., Зипинг К. К.* Термоупругая осесимметричная задача для двухслойного цилиндра. ПМТФ, изд. «Наука», Сибирское отд., 1978, № 1.

29. *Янке Э. и Эмде Ф.* Таблицы функций. М., ИЛ, 1949.

30. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций, ч. 1 и 2. М., ИЛ, 1949.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 2, 1979 Механика

В. Д. КУЛИЕВ, А. Э. САДЫХОВ

ПРОБЛЕМА РИМАНА ДЛЯ ДВУХ ПАР ФУНКЦИЙ И ОДНО ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

При решении некоторых краевых задач математической физики методом интегральных преобразований в плоскости комплексного параметра получается краевая задача Римана для двух пар функций. В отличие от случая одной пары функций эта задача в общем случае не имеет замкнутого решения в интегралах. В настоящей работе дается обзор всех тех частных случаев, в которых решение краевой задачи Римана для двух пар функций находится в замкнутом виде в интегралах. Указаны также некоторые новые случаи точных замкнутых решений. Рассмотрена плоская задача теории упругости для бесконечной плоскости с прямолинейным полубесконечным разрезом, имеющим одно конечное прямолинейное ответвление, наклоненное под некоторым произвольным углом к бесконечному разрезу. Дано точное решение однородной сингулярной задачи, не имеющееся в литературе. Указанная задача сводится к одному интегрируемому случаю задачи Римана для двух пар функций. Полученное точное решение привлекается для построения нового варианта теории криволинейных трещин, который сравнивается с другими известными вариантами.

§ 1. *Введение. Задача Римана для двух пар функций*

Пусть L — гладкий замкнутый контур в плоскости Z, где $z=x+iy$. Область, лежащую внутри контура L, обозначим через D^+, а остальную часть плоскости — через D^-. Положительным направлением обхода границы L считается такое, при котором область D^+ остается все время слева. Предполагается, что начало координат принадлежит области D^+.

Краевая задача Римана для системы n пар функций формулируется следующим образом [1]: найти кусочно-голоморфный вектор $\Phi(z) = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ с линией скачков L, имеющей конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + F(t) \qquad t \in L$$
$$G(t) = \| g_{ij}(t) \|, \quad F(t) = (F_1, F_2, \ldots, F_n) \tag{1.1}$$
$$(i, j = 1, 2, 3, \ldots)$$

где $g_{ij}(t)$, $F_i(t)$ — некоторые функции, удовлетворяющие условию Гельдера.

Краевая задача (1.1) впервые была сформулирована в 1857 г. Б. Риманом [2] в связи с задачей отыскания дифференциального уравнения, интегралы которого при обходе особых точек претерпевают заданную линейную подстановку (уравнение с заданной группой монодромии).

Краевая задача (1.1) сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма, ядро которых зависит от коэффициентов краевого условия [3, 4]. При $n = 1$ замкнутое решение задачи получено в 1937 г. Ф. Д. Гаховым [5]. При $n > 1$ замкнутое решение этой задачи не найдено.

Построим каноническое решение однородного уравнения

$$X^+(t)[X^-(t)]^{-1} = G(t) \tag{1.2}$$

при дополнительном условии

$$X^+(t)[X^-(t)]^{-1} = [X^-(t)]^{-1}X^+(t) \tag{1.3}$$

Если задача (1.2), (1.3) будет решена, то решение соответствующей неоднородной задачи (1.1) не представляет труда [3, 4].

При $n = 1$ условие (1.3) всегда выполняется тождественно. Кусочно-голоморфное решение задачи (1.2) при нулевом индексе будет таким [5]:

$$X(z) = \exp\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln G(t)}{t-z}\,dt \tag{1.4}$$

Представляет интерес вопрос о том, в каких случаях решение однородной задачи при $n > 1$ дается той же формулой (1.4). Этот вопрос был поставлен Ф. Д. Гаховым [1]. Ответ на него был дан Г. Н. Чеботаревым [6]. Оказалось, что решение однородной задачи (1.2) имеет вид (1.4), если матрица $G(t)$ принадлежит, например, к следующим классам:

А) функционально-коммутативные матрицы

$$G(t_1)\,G(t_2) = G(t_2)\,G(t_1)$$

Класс функционально-коммутативных матриц был выделен Ф. Д. Гаховым [1] (см. также [6]) и исследован с алгебраической точки зрения В. В. Морозовым [7]. Теорема Морозова сводит изучение функционально-коммутативных матриц к изучению семейства постоянных попарно коммутативных матриц. Это семейство матриц образует коммутативную алгебру Ли.

Б) матрицы, коммутирующие со своим сингулярным интегралом Коши,

$$g(t)\,h(t) = h(t)\,g(t)$$

где

$$g(t) = \ln G(t), \qquad h(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(t)}{t-\tau}\,dt$$

Заметим, что условие А является достаточным для выполнения условия Б.

Теорема 1 (А. А. Храпков [8]). Пусть матрица $G(t)$ обладает следующими свойствами:

1. $$G(t) = b(t)I + c(t)\begin{Vmatrix} l(t) & m(t) \\ n(t) & -l(t) \end{Vmatrix}$$

где $b(t)$, $c(t)$ — произвольные функции, $l(t)$, $m(t)$ и $n(t)$ — полиномы.

2. $$\det G(t) \neq 0 \qquad \text{на } L$$

3. $$f(t) = l^2(t) + m(t)\,n(t) \qquad \text{на } L$$

4. $$\varkappa = \frac{1}{4\pi i}\ln\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)}\Big|_L = L$$

где $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ — характеристические функции матрицы, то есть корни уравнения

$$\det[G(t) - \lambda I] = 0$$

5. $$\int_L t^{k-1}\frac{\ln[\lambda_1(t)/\lambda_2(t)]}{\sqrt{f(t)}}\,dt = 0 \tag{1.5}$$

$$k = 1, 2, \ldots, m_1$$

где m_1 — наибольшее из целых чисел таких, что величина $2m_1 + 1$ не превосходит степени полинома $f(z)$ на бесконечности.

Тогда каноническое решение однородной задачи (1.2)—(1.3) имеет вид

$$X(z) = F(z)\,\{I\,\mathrm{ch}[\sqrt{f(z)}\,\beta(z)] + Q(z)\,\mathrm{sh}[\sqrt{f(z)}\,\beta(z)]\} \tag{1.6}$$

Здесь

$$\Delta(z) = \det G(z), \quad f(z) = l^2(z) + m(z)\,n(z)$$

$$\Xi(z) = \frac{1}{2}\ln[\lambda_1(z)/\lambda_2(z)]$$

$$F(z) = (z-a)^{-\varkappa_2}\exp\frac{1}{4\pi i}\int_L\frac{\ln\Delta(t)}{t-z}\,dt$$

$$\beta(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Xi(t)}{\sqrt{f(t)}}\,\frac{dt}{t-z}$$

$$\varkappa_2 = \frac{1}{2\pi i}\ln[\lambda_1(t)\,\lambda_2(t)]\Big|_L$$

$$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{f(z)}}\begin{Vmatrix} l(z) & m(z) \\ n(z) & -l(z) \end{Vmatrix}$$

Подставляя матрицу (1.6) в краевое условие (1.2), непосредственно убеждаемся в том, что оно тождественно выполняется при любых $X(z)$, определяемых формулой (1.6). Анализируя поведение на бесконечности матричной функции $X(z)$, нетрудно заметить, что если выполняются условия (1.5), оно будет иметь конечный порядок на бесконечности (то есть будет вести себя при $z \to \infty$ как некоторый полином).

Теорему можно обобщить, допуская любое конечное число нулей функций $\Delta(t)$ и $f(t)$ на контуре L (в отличие от условий 2 и 3 теоремы). Это обобщение производится аналогично случаю одной пары функций [9].

Рассмотрим следующую задачу. Пусть матрица $G(t)$ имеет вид

$$G(t) = b(t)I + c(t)\begin{Vmatrix} \psi_{11}(t) & \psi_{12}(t) \\ \psi_{21}(t) & -\psi_{22}(t) \end{Vmatrix} \tag{1.7}$$

Здесь $b(t)$, $c(t)$, $\psi_{ij}(t)$ — некоторые функции. Построим каноническое решение однородной задачи (1.1), (1.2).

В этом случае для решения однородной задачи теорема 1 не применима и возможность точного построения этого решения в интегралах весьма трудна. Поэтому для нахождения решения однородной задачи может быть использован приближенный метод, аналогичный методу для одной пары функций [10].

Теорема 2. Пусть $\psi_{ij}(i, j = 1,2)$ близка к рациональной функции

$$\psi_{ij}(t) = \psi^*_{ij}(t) + \varepsilon q^*_{ij}(t) \quad t \in L \tag{1.8}$$

Пусть, кроме того, матрица

$$G_*(t) = b(t)I + c(t)\|\psi^*_{ij}(t)\| \quad t \in L \tag{1.9}$$

удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда каноническое решение однородной задачи с матричным коэффициентом (1.9) дается формулой (1.6) и это же каноническое решение является приближенным* решением исходной однородной задачи с матричным коэффициентом (1.7). Здесь ε — малый параметр, $q^*_{ij}(t)$ — ограниченная непрерывная функция.

Доказательство. Поскольку матрица $G_*(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то, согласно этой теореме, решение однородной задачи дается формулой (1.6).

Согласно условию (1.8), матричные функции $G(t)$ и $G_*(t)$ приближенно равны на контуре L. Следовательно, окончательные решения будут также приближенно равны, так как нет необходимости в том, чтобы функции $G(t)$ и $G_*(t)$ вели себя одинаковым образом в комплексной плоскости вне линии L. Теорема доказана.

Заметим, что факторизации некоторых классов матриц-функций, встречающихся в теории упругости, посвящены многие работы (см., например, Г. П. Черепанов [11], В. А. Бабешко [12, 13]).

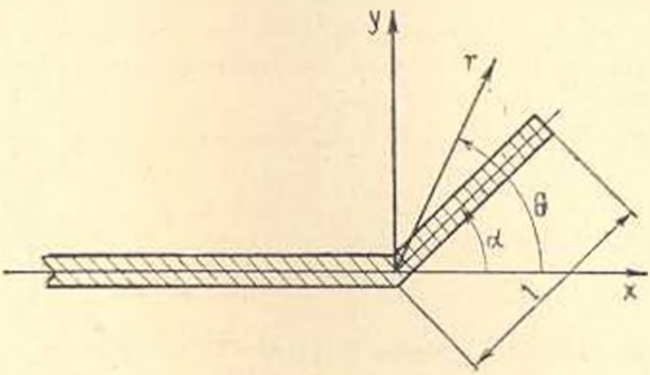
---

* Точность решения зависит от точности аппроксимации матриц-функций в виде рациональной функции.

При решении некоторых краевых задач математической физики методом интегральных преобразований приходят к системе функциональных уравнений типа Винера-Хопфа, которые являются частными случаями рассмотренной краевой задачи Римана для нескольких пар функций. Один такой пример из теории упругости рассмотрен ниже.

§ 2. *Полубесконечная щель с ответвлением*

В работе А. А. Храпкова [8] рассмотрено равновесие клина с несимметричным радиальным надрезом в вершине клина под действием внешних нагрузок, приложенных к разрезу. В том случае, когда угол раствора клина φ больше π, в этой задаче появляется сингулярное однородное решение [14], которое представляет наибольший интерес для приложений. В работе А. А. Храпкова это решение упущено из виду. Ниже построим это решение для интересующего нас случая $\varphi = 2\pi$ и проанализируем его применительно к механике разрушения.



Фиг. 1

Рассмотрим плоскую задачу теории упругости — полубесконечную прямолинейную щель с прямолинейным ответвлением (фиг. 1). Берега разрезов свободны от внешних нагрузок (однородная задача). Прямолинейная декартова система координат x, y указана на фиг. 1. Длину отростка без ограничения общности можно считать равной единице, так как в рассматриваемой задаче нет другого характерного линейного размера. Будем пользоваться также полярной системой координат r, θ (фиг. 1).

Граничные условия имеют вид

при

$$\theta = \pm\pi \qquad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \tag{2.1}$$

при

$$\theta = \alpha \begin{cases} r < 1 & \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad (2.2) \\ r > 1 & [\sigma_\theta] = [\sigma_r] = [\tau_{r\theta}] = 0 \quad (2.3) \end{cases}$$

при

$$\theta = \alpha, \quad r \to 1 + 0, \quad \sigma_\theta(r, \alpha) = k_{\rm I}/\sqrt{2\pi(r-1)} \tag{2.4}$$
$$\tau_{r\theta}(r, \alpha) = k_{\rm II}/\sqrt{2\pi(r-1)}$$

при

$$\theta = 0, \quad r \to \infty \quad \sigma_\theta = K_{\rm I}/\sqrt{2\pi r} \tag{2.5}$$
$$\tau_{r\theta} = K_{\rm II}/\sqrt{2\pi r}$$

где σ_θ, $\tau_{r\theta}$, σ_r — компоненты тензора напряжений, $K_{\rm I}$, $K_{\rm II}$ — коэффициенты интенсивности напряжений для нормального разрыва и поперечного сдвига (в данной постановке они считаются заданными [14]), $k_{\rm I}$, $k_{\rm II}$ — коэффициенты интенсивности напряжений в вершине трещины $\theta = \alpha$, $r = 1$. Под знаком $[F]$ понимается скачок величины F.

Применим преобразование Меллина

$$\overline{f(p)} = \int_0^\infty f(r)\, r^p dr$$

(p — комплексный параметр)

к уравнениям равновесия и условию совместности; в результате для функции $\bar\sigma_\theta(p, \theta)$ получим следующее дифференциальное уравнение четвертого порядка [15]:

$$\frac{d^4\bar\sigma_\theta}{d\theta^4} + [(p+1)^2 + (p-1)^2]\frac{d^2\bar\sigma_\theta}{d\theta^2} + (p+1)^2(p-1)^2\bar\sigma_\theta = 0 \tag{2.6}$$

Функции $\bar\tau_{r\theta}$ и $\bar\sigma_r$ выражаются через $\bar\sigma_\theta$ так:

$$\bar\tau_{r\theta} = \frac{1}{p-1}\frac{d\bar\sigma_\theta}{d\theta}, \qquad p\bar\sigma_r = \frac{d\bar\tau_{r\theta}}{d\theta} - \bar\sigma_\theta \tag{2.7}$$

Общий интеграл уравнений (2.6) имеет вид

при $\alpha < \theta < \pi$

$$\bar\sigma_\theta(p, \theta) = A\cos(p+1)\theta + B\cos(p-1)\theta + A_0\sin(p+1)\theta + B_0\sin(p-1)\theta \tag{2.8}$$

при $-\pi < \theta < \alpha$

$$\bar\sigma_\theta(p, \theta) = C\cos(p+1)\theta + D\cos(p-1)\theta + C_0\sin(p+1)\theta + D_0\sin(p-1)\theta \tag{2.9}$$

Здесь A, B, C, D, A_0, B_0, C_0, D_0 — неизвестные функции комплексного параметра p.

Используя обычную процедуру Б. Нобла [10], при помощи (2.1)—(2.3), (2.7)—(2.9) приходим к следующей однородной системе уравнений Винера-Хопфа для неизвестных трансформант разрывов производных смещений на самом надрезе и напряжений на его продолжении:

$$
\begin{aligned}
V^-(p, \alpha) &= f_{11}(p, \alpha)\,\Phi^+(p, \alpha) + f_{12}(p, \alpha)\,\Psi^+(p, \alpha) \\
U^-(p, \alpha) &= f_{21}(p, \alpha)\,\Phi^+(p, \alpha) + f_{22}(p, \alpha)\,\Psi^+(p, \alpha)
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Здесь

$$
V^-(p, \alpha) = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \int_0^1 \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right]\bigg|_{\theta=\alpha} r^p dr
$$

$$
U^-(p, \alpha) = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \int_0^1 \left[\frac{\partial u_r}{\partial r}\right]\bigg|_{\theta=\alpha} r^p dr
$$

$$
f_{21}(p, \alpha) = \frac{\sin 2p\pi}{2\delta\delta_0}\, p(p+1)\sin^2\alpha \sin 2p\alpha
$$

$$
f_{22}(p, \alpha) = \frac{\sin 2p\pi}{2\delta\delta_0}\,[\sin p(\pi+\alpha)\sin(\pi-\alpha)p -
$$

$$
- p^2 \sin^2\alpha \cos 2p\alpha + p\sin\alpha\cos\alpha\sin 2p\alpha]
$$

$$
\delta_0 = \sin^2 p(\pi-\alpha) - p^2\sin^2\alpha
$$

$$
\delta = \sin^2 p(\pi+\alpha) - p^2\sin^2\alpha
$$

$$
\Phi^+(p, \alpha) = \int_1^\infty \sigma_\theta(r, \alpha)\, r^p dr
$$

$$
\Psi^+(p, \alpha) = \int_1^\infty \tau_{r\theta}(r, \alpha)\, r^p dr
$$

Решение системы уравнений (2.10), согласно (2.4), имеет вид

$$
\varphi^+(p) = \frac{p}{p+1/2}\,\frac{M}{K^+(p)\,X^+(p)} \tag{2.11}
$$

$$
\varphi^-(p) = \frac{K^-(p)}{X^-(p)}\,M \tag{2.12}
$$

Здесь

$$
X^\pm(p) = F^\pm(p)\,\{I\,\mathrm{ch}[\sqrt{f(p)}\,\beta^\pm(p)] + Q(p)\,\mathrm{sh}[\sqrt{f(p)}\,\beta^\pm(p)]\}
$$

$$
\exp\left[\frac{1}{4\pi i}\int\limits_L \frac{\ln \Delta(t)}{t-p}\,dt\right] = \begin{cases} F^+(p), & (p\in D^+) \\ F^-(p), & (p\in D^-) \end{cases}
$$

$$
\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varepsilon(t)}{\sqrt{f(t)}}\,\frac{dt}{t-p} = \begin{cases} \beta^+(p) & (p\in D^+) \\ \beta^-(p) & (p\in D^-) \end{cases}
$$

$$
K^+(p) = \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1/2-p)}, \qquad K^-(p) = \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(3/2+p)}
$$

$$
\varphi^+(p) = \{\Phi^+(p),\ \Psi^+(p)\}, \qquad \varphi^-(p) = \{V^-(p),\ U^-(p)\}
$$

$$
b(p) = \frac{\sin^2 p\pi}{\delta(p)\,\delta_0(p)}\,[\sin p(\pi+\alpha)\sin p(\pi-\alpha) + p^2\sin^2\alpha\cos 2p\alpha]
$$

$$
c(p) = -\frac{\sin^2 p\pi}{\delta(p)\,\delta_0(p)}\,p\sin\alpha\sin 2p\alpha
$$

$$
l(p) = \cos\alpha, \quad m(p) = (1-p)\sin\alpha
$$

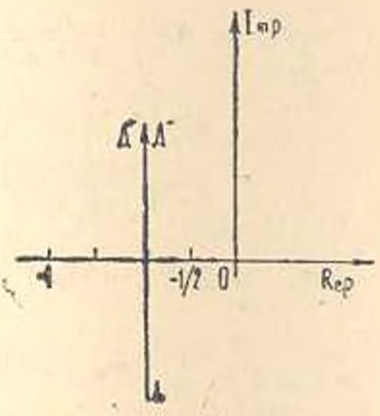
$$
n(p) = (1+p)\sin\alpha
$$

$$
M = \{M_1,\ M_2\}
$$

$$
M_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(k_{\rm I}\cos q + k_{\rm II}\sin q)
$$

$$
M_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(k_{\rm I}\sin q - k_{\rm II}\cos q)
$$

$$
q = \frac{\sin\alpha}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varepsilon(t)}{\sqrt{f(t)}}\,dt
$$



Фиг. 2.

Контур интегрирования L показана на фиг. 2.

§ 3. *Анализ решения*

Определим зависимость коэффициентов интенсивности напряжений $k_{\rm I}$ и $k_{\rm II}$ в окрестности вершины трещины $\theta = \alpha$, $r = 1$ от коэффициентов интенсивности напряжений на бесконечности $K_{\rm I}$, $K_{\rm II}$ и угла α.

Согласно формулам (2.11), (2.5) находим

$$
k_{\rm I} = \frac{F^+(-1/2)}{2}\{K_{\rm I}[m_{11}M_{22}(-1/2,\ \alpha) - m_{21}M_{12}(-1/2,\ \alpha)] +
$$

$$
+ K_{\rm II}[m_{22}M_{12}(-1/2,\ \alpha) - m_{12}M_{22}(-1/2,\ \alpha)]\} \tag{3.1}
$$

$$
k_{\rm II} = \frac{F^+(-1/2)}{2}\{K_{\rm I}[m_{21}M_{11}(-1/2,\ \alpha) - m_{11}M_{21}(-1/2,\ \alpha)] +
$$

$$
+ K_{\rm II}[m_{12}M_{21}(-1/2,\ \alpha) - m_{22}M_{11}(-1/2,\ \alpha)]\}
$$

Здесь

$$M_{11} = A_{11}(-1/2, \alpha)\cos q - A_{12}(-1/2, \alpha)\sin q$$

$$M_{12} = A_{11}(-1/2, \alpha)\sin q + A_{12}(-1/2, \alpha)\cos q$$

$$M_{21} = A_{21}(-1/2, \alpha)\cos q - A_{22}(-1/2, \alpha)\sin q$$

$$M_{22} = A_{21}(-1/2, \alpha)\sin q + A_{22}(-1/2, \alpha)\cos q$$

$$A_{11}(p, \alpha) = \mathrm{ch}\left[\sqrt{f(p, \alpha)}\,\beta^{+}(p, \alpha)\right] -$$

$$- \frac{\cos\alpha}{\sqrt{f(p, \alpha)}}\,\mathrm{sh}\left[\sqrt{f(p, \alpha)}\,\beta^{+}(p, \alpha)\right]$$

$$A_{12}(p, \alpha) = \frac{p-1}{\sqrt{f(p, \alpha)}}\sin\alpha\,\mathrm{sh}\left[\sqrt{f(p, \alpha)}\,\beta^{+}(p, \alpha)\right]$$

$$A_{21}(p, \alpha) = -\frac{p+1}{\sqrt{f(p, \alpha)}}\sin\alpha\,\mathrm{sh}\left[\sqrt{f(p, \alpha)}\,\beta^{+}(p, \alpha)\right]$$

$$A_{22}(p, \alpha) = \mathrm{ch}\left[\sqrt{f(p, \alpha)}\,\beta^{+}(p, \alpha)\right] +$$

$$+ \frac{\cos\alpha}{\sqrt{f(p, \alpha)}}\,\mathrm{sh}\left[\sqrt{f(p, \alpha)}\,\beta^{-}(p, \alpha)\right]$$

$$m_{11} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \quad m_{12} = 3\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}, \quad m_{21} = \sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$m_{22} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(3\sin^2\alpha/2 - 1\right)$$

В частности, при $\alpha = 0$ имеем $k_{\rm I} = K_{\rm I}$, $k_{\rm II} = K_{\rm II}$.

§ 4. *Теория криволинейных трещин*

Ответвление можно рассматривать в рамках теории возмущений бесконечно-малым и происходящим под действием внешних несимметричных нагрузок, характеризуемых коэффициентами $K_{\rm I}$ и $K_{\rm II}$. Будем предполагать, что ответвление представляет собой трещину нормального разрыва, то есть

$$k_{\rm II}(\alpha) = 0$$

Это уравнение при помощи (3.1) можно записать так:

$$\lambda = -\frac{\varphi_{21}(\alpha)}{\varphi_{22}(\alpha)}, \qquad \lambda = \frac{K_{\rm II}}{K_{\rm I}} \tag{4.1}$$

$$\varphi_{21} = m_{21}M_{11}(-1/2, \alpha) - m_{11}M_{21}(-1/2, \alpha)$$

$$\varphi_{22} = m_{12}M_{21}(-1/2, \alpha) - m_{22}M_{11}(-1/2, \alpha)$$

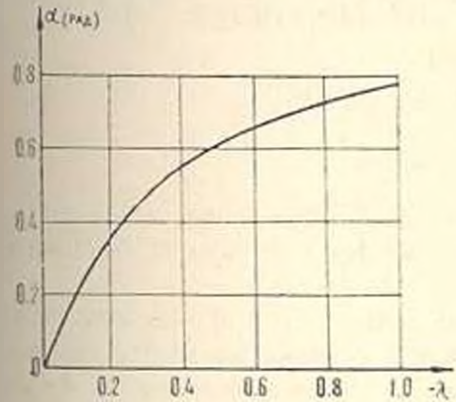
Уравнение (4.1) служит для определения угла отклонения трещины по заданному отношению $\frac{K_{\rm II}}{K_{\rm I}}$. Зависимость $\alpha = \alpha(\lambda)$ изображена на фиг. 3.

Начало развития хрупкой трещины определяется условием $k_1 = K_{1c}$, то есть согласно (3.1) и (4.1)

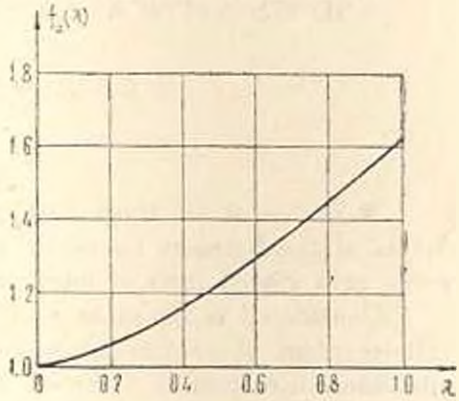
$$K_1 f_0(\lambda) = K_{1c}$$

$$f_0(\lambda) = m_{11} M_{22}(-1/2, \alpha) - m_{21} M_{12}(-1/2, \alpha) +$$
$$+ \lambda [m_{22} M_{12}(-1/2, \alpha) - m_{12} M_{22}(-1/2, \alpha)]$$

График функции $f_0(\lambda)$ приведен на фиг. 4.



Фиг. 3



Фиг. 4

Как показывает сравнение, результаты данной теории при $\lambda < 1$ весьма близки к соответствующим результатам, полученным по энергетической теории и по теории обобщенного нормального разрыва [14]. Серьезное расхождение этих теорий получается при $\lambda > 1$. Имеющихся данных пока недостаточно, чтобы отдать предпочтение той или другой теории. Заметим, что некоторые неоднородные задачи для трещин с ветвлением рассмотрены в работах [16, 17].

Авторы благодарны академику АН СССР Ф. Д. Гахову и профессору Г. П. Черепанову за обсуждение работы.

Азербайджанский государственный
педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступила 17 VI 1977

Վ. Դ. ԿՈՒԼԻԵՎ, Ա. Է. ՍԱԴԻԽՈՎ

ԵՐԿՈՒ ԶՈՒՅԳ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ՌԻՄԱՆԻ ԽՆԴԻՐԸ ԵՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ՆՐԱ ՄԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Դիտարկվում է ուղղագիծ կիսաանվերջ ճեղքով անվերջ հարթության համար առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը։

Ճեղքն ունի մի վերջավոր ուղղագիծ ճյուղավորում, որը թեքված է կիսաանվերջ ճեղքի նկատմամբ կամայական անկյունով։

Տրվում է համասեռ սինգուլյար խնդրի ճշգրիտ լուծումը։ Ստացված լուծումն օգտագործվում է կորագիծ ճեղքերի տեսության նոր տարբերակ կառուցելու համար, որը համեմատվում է այլ հայտնի տարբերակների հետ։

THE RIEMANN PROBLEM FOR TWO PAIRS OF FUNCTIONS AND ITS APPLICATION IN THE ELASTICITY THEORY

F. D. KULIEV, A. E. SADYKHOV

Summary

A review of all those particular cases is presented where the solution of the Riemann boundary problem for two pairs of functions is given in a closed form of integrals.

Considered is the plane problem in the theory of elasticity for an infinite plane of rectilinear semi-infinite cross-section having one definite linear direction at a certain angle to infinite cross-section. An accurate solution to the homogeneous singular problem is obtained that is not found in the literature.

The accurate solution is used to evolve a new variant of the curvilinear crack theory which is compared with other known variants.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гахов Ф. Д.* Краевая задача Римана для системы пар функций. Успехи матем. наук, 1952, т. 7, вып. 4, 3—54.
2. *Риман Б.* Сочинения. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1968.
4. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М., «Наука», 1970.
5. *Гахов Ф. Д.* О краевой задаче Римана. Матем. сб., 1937, т. 2(44), № 4, 673—683.
6. *Чеботарев Г. Н.* К решению в замкнутой форме краевой задачи Римана для системы пар функций. Уч. зап. Казанского ун-та, 1956, т. 116, кн. 4, 31—58.
7. *Морозов В. В.* О коммутативных матрицах. Уч. зап. Казанского ун-та, 1952, т. 112, кн. 9, 17—20.
8. *Храпков А. А.* Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил. Прикл. матем. и мех. 1971, т. 35, вып. 4, 677—689.
9. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
10. *Нобл Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., ИЛ, 1962.
11. *Черепанов Г. П.* Об одном интегрируемом случае краевой задачи Римана для нескольких функций. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 6, 1285—1288.
12. *Бабешко В. А.* Факторизация одного класса матриц-функций и ее приложения. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 5, 1094—1097.
13. *Бабешко В. А.* К факторизации одного класса матриц-функций, встречающихся в теории упругости. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 6, 1333—1335.

14. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.

15. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в теории упругости. Л., «Наука», 1968.

16. *Özbek T.* The plane problem of a semi-infinite crack and a finite crack in two radial lines. Int. Journal of Engineering Sci. 1977, vol. 15, No. 3, 185—192.

17. *Chattergee S. N.* The stress field in the neighborbood of a brached in an infinite elastic sheet. Int. Journal of solids and struct, 1975, vol. 11, No. 5, 521—538.

18. *Chien H. Wu.* Elasticity problems of a slender Z-crack. Journal of Elasticity, 1978, vol. 8, No. 2, 183—205.

19. *Tamotr Osamu.* Two arbitrary situated cracks in an elastic plate under flexure. Int. Journal Solids and Structures, 1976, vol. 12, No. 4, 287—298.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 2, 1979 Механика

И. И. КУДИШ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НАКЛАДКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В УСЛОВИЯХ УСТАНОВИВШЕЙСЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ, С УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ

Предполагается, что скорость деформации накладки в продольном направлении является достаточно произвольной нелинейной функцией нормального напряжения, действующего в ее поперечном сечении. Решение задачи строится с помощью асимптотических методов. В частности, для относительно жесткой накладки решение представлено в виде регулярного асимптотического ряда, а в случае накладки относительно малой жесткости для построения решения используются методы сращиваемых асимптотических разложений [1, 2]. Частный случай данной задачи (степенная нелинейность) рассмотрен в работе [3], в которой предложен метод решения эффективный лишь для относительно жестких накладок.

1. Выведем уравнения рассматриваемой задачи. Предположим, что скорость деформации накладки в продольном направлении $\dot{\varepsilon}_x$ связана с нормальным напряжением σ_x, действующим в ее поперечном сечении, зависимостью

$$\dot{\varepsilon}_x = F\left(\frac{\sigma_x}{E_n}\right) \tag{1.1}$$

При достаточно большом времени t (режим установившейся ползучести) зависимость (1.1) можно представить в виде

$$\varepsilon_x = tF\left(\frac{\sigma_x}{E_n}\right) \tag{1.2}$$

Учитывая, что для элемента накладки при обычных предположениях [4, 5, 6] имеет место соотношение

$$\sigma_x = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{x}[\tau(s) - t(s)]\,ds \tag{1.3}$$

и подставляя (1.3) в (1.2), получим основное уравнение, описывающее процесс деформации накладки в условиях установившейся нелинейной ползучести

$$\frac{du^{(1)}}{dx} = tF\left(\frac{1}{hE_n}\int_{-\infty}^{x}[\tau(s) - t(s)]\,ds\right) \tag{1.4}$$

Здесь $E_н$ — постоянная, характеризующая ползучесть накладки; h и a — соответственно толщина и полудлина накладки; $\tau(x)$ — контактное касательное напряжение, действующее на накладку; $t(x)$ — касательное напряжение, создаваемое внешней пригрузкой; $u^{(1)}(x)$ — продольное перемещение точек накладки.

Как известно [7], перемещения граничных точек полуплоскости $u^{(2)}(x)$ имеют вид

$$u^{(2)}(x) = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E_0} \int\limits_{-a}^{a} \tau(s) \ln \frac{1}{|x-s|} ds + \text{const} \tag{1.5}$$

где E_0 — модуль упругости полуплоскости, ν — коэффициент Пуассона.

На участке $[-a, a]$ контакта накладки с полуплоскостью имеет место условие

$$\frac{du^{(1)}}{dx} = \frac{du^{(2)}}{dx}, \quad x \in [-a, a] \tag{1.6}$$

Теперь с помощью (1.4), (1.5) и (1.6) получим уравнение для определения $\tau(x)$

$$\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E_0} \int\limits_{-a}^{a} \frac{\varphi'(\xi)\, d\xi}{\xi - x} = tF\left(\frac{\varphi(x) - \psi(x)}{hE_н}\right) \tag{1.7}$$

которое будем рассматривать при граничных условиях

$$\varphi(-a) = P_1, \quad \varphi(a) = \psi(a) + P_2 \tag{1.8}$$

При этом

$$\varphi(x) = P_1 + \int\limits_{-a}^{x} \tau(\xi)\, d\xi, \qquad \psi(x) = \int\limits_{-a}^{x} t(\xi)\, d\xi \tag{1.9}$$

Здесь P_1, P_2 — сосредоточенные силы, приложенные к концам накладки.

Введем безразмерные переменные

$$x' = x/a, \quad t'(x) = t(x)/\tau_0, \quad P_i' = P_i/\tau_0 a, \quad \varphi' = \varphi/\tau_0 a, \quad \psi' = \psi/\tau_0 a$$

Здесь τ_0 — характерная величина касательного напряжения. Введя безразмерные величины в уравнения (1.7)—(1.9) и опустив штрихи, после простых преобразований получим

$$\varphi(x) = -\frac{\lambda}{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} F[\varphi(t) - \psi(t)] \ln \frac{1 - tx + \sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}{1 - tx - \sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}\, dt +$$

$$+ \frac{\psi(1) + P_2 - P_1}{\pi} \arcsin x + \frac{\psi(1) + P_1 + P_2}{2} \tag{1.10}$$

$$\varphi(x) = P_1 + \int_{-1}^{x} \tau(\xi)\,d\xi, \quad \psi(x) = \int_{-1}^{x} t(\xi)\,d\xi \qquad (1.11)$$

Здесь λ — параметр, характеризующий относительную жесткость накладки. В частности, при степенной зависимости $F(\varepsilon_x) = |\varepsilon_x|^{\alpha-1}\varepsilon_x$ (α — показатель ползучести, $\alpha \geqslant 1$) для λ имеем

$$\lambda = l\,\frac{E_0}{2\tau_0(1-\nu^2)}\left(\frac{\tau_0 a}{hE_*}\right)^{\alpha} \qquad (1.12)$$

В дальнейшем будем предполагать, что функция F и обратная к ней функция Φ являются достаточно гладкими функциями своих аргументов, а также обладают следующими свойствами:

$$F(-\varepsilon_x) = -F(\varepsilon_x), \quad F(\varepsilon_x) \sim 1 \text{ при } \varepsilon_x \sim 1 \qquad (1.13)$$

$$\Phi(\varepsilon_x) = |\varepsilon_x|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\varepsilon_x + o\left(|\varepsilon_x|^{\frac{1}{\alpha}}\right), \quad \varepsilon_x \ll 1; \quad \Phi(\varepsilon_x) \sim 1, \quad \varepsilon_x \sim 1 \qquad (1.14)$$

Воспользовавшись существованием функции Φ, обратной к функции F, уравнения (1.7) и (1.8) в безразмерных переменных можно представить также в виде

$$\varphi(x) = \psi(x) + \Phi\left[\frac{\lambda^{-1}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi'(t)\,dt}{t-x}\right] \qquad (1.15)$$

$$\varphi(-1) = P_1, \quad \varphi(1) = \psi(1) + P_2 \qquad (1.16)$$

С помощью (1.13) легко видеть, что при $P_1 = P_2 = 0$, $t(x) = \frac{t_0}{\sqrt{1-x^2}}$ для любого $\lambda > 0$ вне зависимости от конкретного вида функции F решением уравнения (1.10), или что то же (1.15), (1.16), является

$$\varphi(x) = t_0\left[\arcsin x + \frac{\pi}{2}\right], \quad \tau(x) = \varphi'(x) = t(x) \qquad (1.17)$$

Физически это решение означает, что накладка ведет себя как абсолютно жесткое тело.

2. *Схема регулярных возмущений.*

Рассмотрим случай $\lambda \ll 1$. Функцию $t(x)$ будем предполагать интегрируемой на отрезке $[-1, 1]$, а также P_1, P_2, $\psi(1) \sim 1$ при $\lambda \ll 1$. Решение уравнения (1.10) будем искать в виде равномерно пригодного на $[-1, 1]$ асимптотического разложения [1]

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(x) \qquad (2.1$$

Решение (1.10) представимо в виде (2.1), если функция $F(\sigma_x)$ представима в виде ряда по степеням λ при $\sigma_x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \sigma_{x,k}$*. Будем считать, что это предположение выполнено.

Подставив (2.1) в уравнение (1.10) и приравняв коэффициенты при λ^k, получим уравнения для $\varphi_k(x)$

$$\varphi_0(x) = \frac{\psi(1) + P_2 - P_1}{\pi} \arcsin x + \frac{\psi(1) + P_1 + P_2}{2} \tag{2.2}$$

$$\varphi_1(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} F[\varphi_0(t) - \psi(t)] \ln \frac{1 - tx + \sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}{1 - tx - \sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}\, dt$$

$$\varphi_2(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} F'[\varphi_0(t) - \psi(t)]\,\varphi_1(t) \ln \frac{1 - tx + \sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}{1 - tx - \sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}\, dt$$

и т. д. Здесь $F'(\sigma) = \frac{dF}{d\sigma}$.

Из (1.11) с помощью равенств (2.2) получим трехчленное равномерно пригодное асимптотическое разложение для касательного напряжения

$$\tau(x) = \frac{\psi(1) + P_2 - P_1}{\pi\sqrt{1-x^2}} - \frac{\lambda}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1} \frac{F[\varphi_0(t) - \psi(t)]\sqrt{1-t^2}\,dt}{t - x} -$$

$$- \frac{\lambda^2}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1} \frac{F'[\varphi_0(t) - \psi(t)]\,\varphi_1(t)\sqrt{1-t^2}\,dt}{t - x} \tag{2.3}$$

Легко видеть, что развитая выше процедура регулярных асимптотических разложений справедлива при любой интегрируемой функции $l(x)$.

Интересно отметить, что при $\lambda \ll 1$ локальные свойства пригрузки $l(x)$ начинают сказываться на напряжении $\tau(x)$, лишь начиная с первого приближения посредством интегрального члена. Это поведение $\tau(x)$ становится очевидным, если учесть тот факт, что случай $\lambda \ll 1$ соответствует относительно жесткой накладке (см., напр., (1.12)).

3. *Схема сингулярных возмущений*

Рассмотрим случай накладки с относительно малой жесткостью, то есть $\lambda \gg 1$. В этом случае при исследовании оказывается удобным пользоваться уравнениями задачи в виде (1.15), (1.16). Решение задачи при $\lambda \gg 1$ будем строить методом сращиваемых асимптотических разложений [1]. В дальнейшем, если не оговорено противное, ограничимся исследованием главных членов асимптотик функций $\varphi(x)$ и $\tau(x)$.

* Аналогично может быть рассмотрен случай, когда $F(\sigma_x)$ представляется в виде асимптотического ряда по иным функциям параметра λ.

Будем предполагать, что

$$t(x) \underset{x\to-1}{\simeq} t_m(1+x)^{\varkappa_m}, \quad t(x) \simeq t_p(1-x)^{\varkappa_p}; \quad \varkappa_m, \ \varkappa_p > -1 \tag{3.1}$$

$$\underset{x\pm1\sim1}{t(x)} \sim 1, \quad t_m, \ t_p \sim 1 \text{ при } \lambda \gg 1$$

$t(x)$ удовлетворяет условию Гельдера при $x \pm 1 \sim 1$.

При $\lambda \gg 1$ область контакта естественным образом распадается на три подобласти. В малых окрестностях точек $x = \pm 1$ (внутренние области) напряжение $\tau(x)$, действующее на накладку, формируется в результате сложного взаимодействия накладки и основания, в то время как вне этих окрестностей (внешняя область) напряжение $\tau(x)$ в главном определяется внешней пригрузкой $t(x)$, приложенной к верхней поверхности накладки.

Рассмотрим сначала случай

$$t(x) \neq 0, \quad -1 < \varkappa_m < 0, \quad -1 < \varkappa_p < 0 \tag{3.2}$$

Предположим также, что P_1, $P_2 \neq 0$ и P_1, $P_2 \sim 1$ при $\lambda \gg 1$. Введем в упомянутых выше внутренних областях новые независимые переменные $r = \dfrac{x+1}{\varepsilon_m}$ и $s = \dfrac{x-1}{\varepsilon_p}$, где ε_m и ε_p — характерные размеры соответствующих внутренних областей. Решение задачи (1.15), (1.16) во внешней области будем искать в виде

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + o(1), \quad x \pm 1 \sim 1 \tag{3.3}$$

Из (3.2) и (1.3) следует, что $\psi(x) \neq 0$, $x \in [-1, 1]$, поэтому считая $x \pm 1 \sim 1$, то есть рассмотрев внешнюю область с помощью (3.3), из уравнений (1.5) и (1.14) получим

$$\varphi_0(x) = \psi(x), \quad \tau(x) = t(x), \quad x \pm 1 \sim 1 \tag{3.4}$$

Соотношения (3.3), (3.4), очевидно, становятся непригодными в качестве решения задачи (1.15), (1.16) во внутренних областях $r \sim 1$ и $s \sim 1$, так как с помощью (3.3), (3.4) невозможно удовлетворить граничным условиям (1.9) на $\varphi(x)$ в точках $x = \pm 1$. Поэтому решение во внутренних областях будем искать в виде

$$\varphi(x) = \varphi_m(r) + o(1), \quad \varphi_m(r) \sim 1 \text{ при } r \sim 1 \tag{3.5}$$

$$\varphi(x) = \varphi_p(s) + o(1), \quad \varphi_p(s) \sim 1 \text{ при } s \sim 1 \tag{3.6}$$

С помощью соотношения (3.1) легко получить асимптотики функции $\psi(x)$ при $x \to \pm 1$, а поэтому, использовав равенство (3.4), получим одночленное внутреннее разложение одночленного внешнего разложения в виде [1]

$$\varphi_0(x) = \varepsilon_m^{1+\varkappa_m} \frac{l_m r^{1+\varkappa_m}}{1+\varkappa_m} + o(\varepsilon_m^{1+\varkappa_m}), \quad r \sim 1$$

$$\varphi_0(x) = \psi(1) - \varepsilon_p^{1+\varkappa_p} \frac{l_p(-s)^{1+\varkappa_p}}{1+\varkappa_p} + o(\varepsilon_p^{1+\varkappa_p}), \quad s \sim 1 \tag{3.7}$$

Рассмотрев поочередно внутренние области, примыкающие к точкам $x = \pm 1$, с помощью (3.5)—(3.7) и (1.14)—(1.16) соответственно получим уравнения [1]

$$\varphi_m(r) = \Phi\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varphi_m'(t)\,dt}{t-r}\right], \qquad \varphi_m(0) = P_1, \quad \varphi_m(r) \underset{r\to\infty}{\to} 0 \tag{3.8}$$

$$\varphi_p(s) = \psi(1) + \Phi\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 \frac{\varphi_p'(t)\,dt}{t-s}\right] \tag{3.9}$$

$$\varphi_p(0) = P_2 + \psi(1), \quad \varphi_p(s) \underset{s\to-\infty}{\to} \psi(1)$$

и соотношения, определяющие ε_m и ε_p

$$\varepsilon_m = \varepsilon_p = \lambda^{-1} \tag{3.10}$$

Обратим внимание на то, что размеры внутренних областей ε_m и ε_p при $P_1, P_2 \neq 0$ не зависят ни от поведения $f(x)$ при $x \to \pm 1$, ни от вида функции Φ, в то время как касательные напряжения $\tau(x) = \lambda\varphi_m'(r) + \cdots$ и $\tau(x) = \lambda\varphi_p'(s) + \cdots$ во внутренних областях определяются видом функции Φ.

В случае, когда $\Phi(\varepsilon_z) = |\varepsilon_z|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\varepsilon_z$, решение задачи (3.8) ((3.9)) зависит от двух (трех) параметров, однако, существенной является зависимость лишь от α. Действительно, если положить $\varphi_m(r) = P_1 q_m(r/P_1^{\alpha-1})$, то задачу (3.8) легко привести к виду

$$q_m(R) = \frac{1}{\pi^{1/\alpha}}\left|\int_0^\infty \frac{q_m'(t)\,dt}{t-R}\right|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \int_0^\infty \frac{q_m'(t)\,dt}{t-R} \tag{3.11}$$

$$q_m(0) = 1, \quad q_m(R) \underset{R\to\infty}{\to} 0$$

Аналогичное преобразование имеет место для задачи (3.9).

Из приведенного анализа следует, что в главном решения задачи (1.15), (1.16) во внутренних областях независимы. Поэтому в дальнейшем, как правило, будем рассматривать лишь одну из внутренних областей, например, область, в которой $r \sim 1$.

Исследуем теперь случай $P_1 = 0$, по-прежнему предполагая выполненными соотношения (3.1). Как и ранее, во внешней области решение будем искать в виде (3.3); очевидно, оно определится равенством (3.4). Асимптотиками внешнего решения являются равенства (3.7). Во внутренней области, примыкающей к точке $x = -1$, решение в случае $P_1 = 0$ будем искать в виде

$$\varphi(x) = \varepsilon_m^{1+\varkappa_m} \varphi_m(r) + o(\varepsilon_m^{1+\varkappa_m}), \quad \varphi_m(r) \sim 1 \text{ при } r \sim 1 \tag{3.12}$$

Подставив представление $\varphi(x)$ в виде (3.12) в уравнения (1.15), (1.16), во внутренней области получим [1] с помощью (1.14)

$$\varphi_m(r) = \frac{t_m r^{1+\varkappa_m}}{1+\varkappa_m} + \frac{1}{\pi^{1/\alpha}} \left| \int_0^\infty \frac{\varphi_m'(t)\,dt}{t-r} \right|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \int_0^\infty \frac{\varphi_m'(t)\,dt}{t-r}$$

$$\varphi_m(0) = 0, \quad \varphi_m(r) \underset{r\to\infty}{\to} \frac{t_m r^{1+\varkappa_m}}{1+\varkappa_m} \tag{3.13}$$

а для характерного размера ε_m получим

$$\varepsilon_m = \lambda^{-p_m}, \quad p_m = \frac{1}{\alpha(1+\varkappa_m) - \varkappa_m} \tag{3.14}$$

Очевидно, что $p_m > 0$ при $\alpha \geqslant 1$ и $\varkappa_m > -1$.

Обратим внимание на то, что при $\varkappa_m = -1/2$ решением задачи (3.13) является $\varphi_m(r) = 2t_m r^{1/2}$, что согласуется с точным решением задачи (1.17) при $t(x) = \dfrac{t_m\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

Интересно отметить, что протяженность пограничного слоя, расположенного в окрестности точки $x = -1$ и касательное напряжение $\tau(x) = \lambda^{-\varkappa_m p_m} \varphi_m'(r) + \cdots$ при $P_1 = 0$ в отличие от случая $P_1 \neq 0$ определяются как показателем ползучести α, так и поведением $t(x)$ при $x \to -1$.

Рассмотрим теперь случай

$$t(x) \not\equiv 0; \quad \varkappa_m,\ \varkappa_p > 0 \tag{3.15}$$

Тогда решение задачи во внешней области будем искать в виде

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda^{-1/\alpha} \varphi_1(x) + o(\lambda^{-1/\alpha}); \quad \varphi_0(x),\ \varphi_1(x) \sim 1 \text{ при } x \pm 1 \sim 1 \tag{3.16}$$

Подставив это представление $\varphi(x)$ в уравнение (1.15) и приравняв члены при одинаковых степенях λ, получим с помощью (1.14)

$$\varphi_0(x) = \psi(x), \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{\pi^{1/\alpha}} \left| \int_{-1}^{1} \frac{t(\xi)\,d\xi}{\xi - x} \right|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \int_{-1}^{1} \frac{t(\xi)\,d\xi}{\xi - x} \tag{3.17}$$

Из (3.16) и (3.17) во внешней области получим двучленное асимптотическое разложение

$$\varphi(x) = \psi(x) + \frac{\lambda^{-1/\varkappa}}{\pi^{1/\varkappa}} \left| \int\limits_{-1}^{1} \frac{t(\xi)\, d\xi}{\xi - x} \right|^{\frac{1-\varkappa}{\varkappa}} \int\limits_{-1}^{1} \frac{t(\xi)\, d\xi}{\xi - x}, \qquad \tau(x) = \varphi'(x) \tag{3.18}$$

Отметим, что при наличии сосредоточенных сил, то есть $P_1, P_2 \neq 0$ асимптотический анализ во внутренних областях полностью совпадает с анализом, проведенным для случая $-1 < \varkappa_m, \varkappa_p < 0$.

Поэтому остановимся подробнее на случае отсутствия сосредоточенных сил, то есть положим, что $P_1 = P_2 = 0$. Исследуем окрестность точки $x = -1$. Положим

$$N_m = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{t(\xi)\, d\xi}{\xi + 1} \tag{3.19}$$

Очевидно, что при $\varkappa_m > 0$ интеграл (3.19) сходится.

Введем новую функцию

$$\theta(x) = \varphi(x) - \psi(x) \tag{3.20}$$

тогда уравнение (1.15) примет вид

$$\theta(x) = \Phi\left\{ \frac{\lambda^{-1}}{\pi} \left[\int\limits_{-1}^{1} \frac{\theta'(t)\, dt}{t - x} + \int\limits_{-1}^{1} \frac{t(\xi)\, d\xi}{\xi - x} \right] \right\} \tag{3.21}$$

Если $t(x)$ таково, что $N_m \neq 0$, то воспользовавшись соотношениями (3.18)—(3.20), получим одночленное внутреннее разложение одночленного внешнего разложения функции $\theta(x)$ в виде

$$\theta(x) \simeq \lambda^{-1/\varkappa} \left| N_m \right|^{\frac{1-\varkappa}{\varkappa}} N_m, \quad r \sim 1 \tag{3.22}$$

Поэтому, в силу принципа сращивания, решение во внутренней области будем искать в виде

$$\theta(x) = \lambda^{-1/\varkappa} \varphi_m(r) + o(\lambda^{-1/\varkappa}), \quad \varphi_m(r) \sim 1 \text{ при } r \sim 1 \tag{3.23}$$

В аналогичном виде следует искать решение и в другой внутренней области.

Подставив (3.23) в уравнение (3.21), рассматриваемое во внутренней области, с помощью асимптотики (1.14) и равенства (3.19) получим уравнение

$$\varphi_m(r) = \frac{1}{\pi^{1/\varkappa}} \left| \pi N_m + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\varphi_m'(t)\, dt}{t - r} \right|^{\frac{1-\varkappa}{\varkappa}} \left\{ \pi N_m + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\varphi_m'(t)\, dt}{t - r} \right\} \tag{3.24}$$

и граничные условия

$$\varphi_m(0) = 0, \quad \varphi_m(r) \underset{r \to \infty}{\to} \left| N_m \right|^{\frac{1-\varkappa}{\varkappa}} N_m \tag{3.25}$$

При выводе граничных условий были использованы равенства (1.16), (3.20) и $P_1 = P_2 = 0$. В процессе изложенного выше асимптотического анализа, кроме того, получим

$$\varepsilon_m = \lambda^{-1/\alpha} \tag{3.26}$$

Отметим, что с помощью замены

$$\varphi_m(r) = |N_m|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} N_m q_m(|N_m|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} r) \tag{3.27}$$

уравнения (3.24) и (3.25) могут быть приведены к виду

$$q_m(R) = \frac{1}{\pi^{1/\alpha}} \left| \pi + \int_0^\infty \frac{q_m'(t)\,dt}{t-R} \right|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left\{ \pi + \int_0^\infty \frac{q_m'(t)\,dt}{t-R} \right\} \tag{3.28}$$

$$q_m(0) = 0, \quad q_m(R) \underset{R \to \infty}{\to} 1$$

Исследуем теперь случай $N_m = 0$. Тогда предположим, что [8]

$$\varphi_1(x) = \varepsilon^n |K_m|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} K_m r^n + o(\varepsilon^n), \quad K_m \sim 1, \quad 0 < n < \frac{\nu_m}{\alpha}, \quad r \sim 1 \tag{3.29}$$

Из (3.17), (3.20) и (3.29) получим внешнее решение, переразложенное по внутренних переменных

$$\psi(x) \sim \lambda^{-1/\alpha} \varepsilon_m^n |K_m|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} K_m r^n \tag{3.30}$$

Поэтому решение уравнения (3.21) в области $r \sim 1$ следует искать в виде

$$\theta(x) = \lambda^{-1/\alpha} \varepsilon_m^n \varphi_m(r) + o(\lambda^{-1/\alpha} \varepsilon_m^n), \quad \varphi_m(r) \sim 1 \text{ при } r \sim 1 \tag{3.31}$$

Подставив (3.31) в (3.21) и воспользовавшись равенствами (1.16) и (3.20), с помощью (1.14) для $\varphi_m(r)$ получим уравнения, совпадающие с (3.24), (3.25). Разница состоит лишь в том, что в (3.24) и (3.25) нужно постоянную N_m заменить на K_m из (3.29).

Характерная величина внутренней области ε_m определяется из соотношений

$$\varepsilon_m = \lambda^{-p_m}, \quad p_m = \{\alpha[n(\alpha-1)+1]\}^{-1} > 0 \text{ при } \alpha > 1 \tag{3.32}$$

Исследование, приведенное для случая $N_m = 0$, справедливо при $\frac{\nu_m}{\alpha} < 1$. Подобное исследование в случае $\frac{\nu_m}{\alpha} = i$ (i — натуральное число) сопряжено с существенными трудностями, а случай $i \neq \frac{\nu_m}{\alpha} > 1$ по существу сводится к одному из рассмотренных случаев при $P_1 = P_2 = 0$, если вместо $\psi(x)$ в (3.20) подставить внешнее разложение решения максимального порядка, которое допускается функцией $t(x)$. После указанной замены методика определения новой искомой функции $\theta(x)$ аналогична методике для случая $\frac{\varkappa_m}{\alpha} < 1$.

В рассмотренном случае (3.15) следует обратить внимание на то, что напряжение $\tau(x)$ во внутренних областях в главном определяется поведением пригрузки $t(x)$, а также показателем ползучести α.

Из независимости друг от друга в главном решений задачи во внутренних областях следует, что смешанные случаи такие как $\varkappa_m < 0$, $\varkappa_p > 0$, $P_1 = P_2 = 0$; $\varkappa_m > 0$, $\varkappa_p > 0$, $P_1 = 0$, $P_2 \neq 0$, и тому подобные могут быть рассмотрены совершенно аналогично с помощью предложенных выше подходов в комплексе.

В случае $t(x) \equiv 0$, $\varkappa_m = P_1 = 0$ и $\varkappa_p > -1$, $P_2 \sim 1$ возникают определенные затруднения при выводе уравнения для главного члена асимптотики $\varphi(x)$ во внутренней области $x \sim 1$. В связи с этим данный случай рассматриваться не будет.

Рассмотрим теперь случай

$$t(x) \equiv 0, \quad x \in [-1, 1] \tag{3.33}$$

Будем предполагать ниже, что функция $\Phi(\varepsilon_x) = |\varepsilon_x|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \varepsilon_x$, $\alpha > 1$ при любых значениях ε_x.

Из (1.11) и (3.33) следует, что $\psi(x) \equiv 0$. Отметим, что решение задачи во внешней области в главном есть $\varphi(x) = 0$, а при $P_1, P_2 \neq 0$ исследование внутренних областей полностью совпадает со случаем (3.2) при $P_1, P_2 \neq 0$. Поэтому рассмотрим случай

$$P_1 = 0, \quad P_2 \neq 0, \quad P_2 \sim 1 \tag{3.34}$$

Тогда во внутренней области $x \sim 1$ для главного члена асимптотики (3.6) получим задачу (3.9), в которой следует положить $\psi(1) = 0$. При этом ε_p определится соотношением (3.10).

Для определения ненулевого решения во внешней области необходимо рассмотреть, так называемый, характерный предел [2], а именно: положим

$$\varphi(x) = \mu(\lambda)\,\varphi_0(x), \quad \varphi_0(x) \sim 1 \text{ при } \lambda \gg 1 \tag{3.35}$$

Здесь $\mu(\lambda)$ — неизвестная пока функция большого параметра λ.

Подставим (3.35) в (1.15) при $\psi(x) = 0$. Тогда из сравнения порядка членов в (1.15) получим соотношение

$$\mu = \lambda^{\frac{1}{1-\alpha}} \ll 1, \quad \alpha > 1 \text{ при } \lambda \gg 1 \tag{3.36}$$

Одновременно получим уравнение

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/\alpha}} \left| \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi_0(t)\,dt}{t-x} \right|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi_0(t)\,dt}{t-x} \tag{3.37}$$

и граничное условие

$$\varphi_0(-1) = 0 \tag{3.38}$$

Недостающим граничным условием является условие сращивания внешнего решения с внутренним

$$\varphi_0(x) \underset{x\to 1-0}{\sim} \lambda^{\frac{1}{\alpha-1}} \varphi_\rho(\lambda(x-1)) \tag{3.39}$$

Здесь $\varphi_\rho(s)$ есть решение задачи (3.9) при $\varphi(1)=0$.

В рассмотренном случае, в отличие от всех предыдущих случаев, сначала определяется внутреннее решение $\varphi_\rho(s)$, а затем с помощью сращивания — внешнее решение $\varphi_0(x)$.

4. *О поведении решений в малых окрестностях концов накладки*

Исследуем поведение решения задачи (1.15), (1.16) при $x\to-1$. Из граничного условия (1.16) следует, что $\varphi(x)$ — ограниченная функция при $x\to-1$. Предположим, что асимптотика $\varphi(x)$ при $x\to-1$ имеет вид

$$\varphi(x) \simeq P_1 + \varphi_0(1+x)^{1+\gamma}, \quad \gamma>-1 \tag{4.1}$$

Тогда из (4.1) получим

$$\tau(x) = \varphi'(x) \cong \varphi_0(1+\gamma)(1+x)^{\gamma} \tag{4.2}$$

Предположим, кроме того, что $\tau(x)$ имеет интегрируемую особенность при $x\to-1$, то есть

$$-1<\gamma\leqslant 0 \tag{4.3}$$

Использовав известный факт о том, что при условиях (4.2), (4.3) [7]

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi'(t)\,dt}{t-x} = -\pi\varphi_0(\gamma+1)\operatorname{ctg}\pi\gamma\,(1+x)^{\gamma} + G(x) \tag{4.4}$$

($G(x)$ — регулярная на отрезке $[-1, b]$ $(0<b<1)$ функция) и учтя ограниченность $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ при $x\to-1$, из уравнения (1.15) получим, что первый член в правой части (4.4) должен обратиться в нуль [9], то есть

$$\varphi_0(\gamma+1)\operatorname{ctg}\pi\gamma = 0 \tag{4.5}$$

Учитывая то, что $\varphi_0\neq 0$, получим уравнение $\operatorname{ctg}\pi\gamma=0$, решением которого, удовлетворяющим (4.3), является

$$\gamma = -\frac{1}{2} \tag{4.6}$$

Аналогичный анализ при $x\to 1$ также приводит к равенству (4.6).

Из (4.2) и (4.6) следует, что в сделанных предположениях касательное напряжение $\tau(x)$ представимо в виде

$$\tau(x) = \frac{\tau_*(x)}{\sqrt{1-x^2}} \tag{4.7}$$

где $\tau_*(x)$ — регулярная на всем отрезке $[-1, 1]$ функция.

Отметим, что результат (4.7) согласуется с поведением решения задачи (1.10), полученным при $\lambda \ll 1$ в § 2.

5. Обобщение на пространственную задачу

Изложенный в §§ 2, 3 асимптотический метод исследования задачи (1.10) (или (1.15), (1.16)) легко распространяется на случай пространственной задачи для накладки прямоугольного сечения [9], находящейся в условиях установившейся нелинейной ползучести. Уравнения, описывающие эту задачу, имеют вид

$$\varphi(x) = \psi(x) + \Phi\left\{\frac{\lambda^{-1}}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{t-x} + V(x-t)\right]\varphi'(t)\,dt\right\} \tag{5.1}$$

$$\varphi(-1) = P_1, \quad \varphi(1) = \psi(1) + P_2$$

или иначе

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1}^{1} V(s-t)\,\varphi'(t)\,dt - \lambda\pi F[\varphi(s) - \psi(s)]\right\} \times$$

$$\times \ln\frac{1 - sx + \sqrt{(1-s^2)(1-x^2)}}{1 - sx - \sqrt{(1-s^2)(1-x^2)}}\,ds +$$

$$+ \frac{\psi(1) + P_2 - P_1}{\pi}\arcsin x + \frac{\psi(1) + P_1 + P_2}{2} \tag{5.2}$$

$$\varphi(-1) = P_1, \quad \varphi(1) = \psi(1) + P_2$$

Здесь $V(x)$ — ограниченная непрерывная функция.

В случае, если $F(\sigma_x)$ представима в виде степенного по λ асимптотического ряда (§ 2), решение задачи (5.2) при $\lambda \ll 1$ следует искать в виде (2.1). При этом уравнения для первых членов разложения имеют вид

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} V(s-t)\,\varphi_0'(t)\ln\frac{1 - sx + \sqrt{(1-s^2)(1-x^2)}}{1 - sx - \sqrt{(1-s^2)(1-x^2)}}\,ds\,dt +$$

$$+ \frac{\psi(1) + P_2 - P_1}{\pi}\arcsin x + \frac{\psi(1) + P_1 + P_2}{2} \tag{5.3}$$

$$\varphi_0(-1) = P_1, \quad \varphi_0(1) = \psi(1) + P_2$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\left\{\int\limits_{-1}^{1} V(s-t)\,\varphi_1'(t)\,dt - \lambda\pi F\left[\varphi_0(s)-\psi(s)\right]\right\}\times$$

$$\times \ln\frac{1-sx+\sqrt{(1-s^2)(1-x^2)}}{1-sx-\sqrt{(1-s^2)(1-x^2)}}\,ds\,dt, \quad \varphi_1(\pm 1) = 0$$

и т. д.

Уравнения для $\varphi_n(x)$, $\varphi_l(x)$, ... интегрированием по частям с учетом граничных условий приводятся к уравнениям Фредгольма второго рода, которые затем могут быть решены одним из известных методов.

При $\lambda \gg 1$ и $x \pm 1 \sim 1$ из (5.1) следует, что в главном выполняются равенства (3.3), (3.4), а при $x \to \pm 1$ решение не приближается соотношениями (3.3), (3.4). В возникающих внутренних областях для главных членов асимптотики $\varphi(x)$ при выполненных условиях (1.13), (1.14) и (3.1) получаются уравнения, совпадающие с соответствующими уравнениями для $\varphi_n(r)$ и $\varphi_l(s)$ § 3. Исключение составляют случаи $\varkappa_n$, $\varkappa_l > 0$, для которых следует лишь заменить величины N_n, N_l соответственно на

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{1}{s+1} + V(-s-1)\right] t(s)\,ds$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{1}{s-1} + V(1-s)\right] t(s)\,ds$$

Протяженность внутренних областей совпадает с протяженностью этих областей для плоской задачи.

6. *Численные результаты*

В качестве примера рассмотрим задачу для накладки, скорость деформации которой является степенной функцией напряжения $F(\sigma_x) = |\sigma_x|^{\alpha-1}\sigma_x$. При этом λ определяется соотношением (1.12).

Проиллюстрируем полученные результаты в случае линейной накладки ($\alpha = 1$) на примере следующих режимов:

1) $P_1 = P_2 = 1$, $\psi(x) = 0$; 2) $P_1 = -1$, $P_2 = 1$, $\psi(x) = 0$

3) $P_1 = P_2 = 0$, $\psi(x) = x + 1$; 4) $P_1 = P_2 = 0$, $\psi(x) = \dfrac{x^2-1}{2}$

при $\lambda = 0.5$. В табл. 1 приведены значения коэффициента при особенности $A = \lim\limits_{x\to 1}\tau(x)\sqrt{1-x^2}$. При этом в первой строке приведены результаты, любезно предоставленные для указанных режимов Е. В. Коваленко, а во второй строке — результаты, полученные с помощью двучленного разложения $\tau(x)$, (см. (2.3)).

Таблица 1

№ режима	1	2	3	4
A (Коваленко)	0.387	0.822	0.595	0.08496
A	0.341	0.841	0.592	0.0674

Трехчленное разложение $\tau(x)$ для режимов 1) и 4) при $\lambda=0.5$ дает соответственно $A=0.408$ и $A=0.0961$.

В случае нелинейной накладки $(F(\sigma_x)=|\sigma_x|^{\alpha-1}\sigma_x)$ приведем результаты вычислений $\tau(x)$ в точках $x=-0.8$, 0, 0.8 с помощью двучленного разложения для следующих режимов:

$$5)\ \alpha=1.5,\ \lambda=0.50293; \qquad 6)\ \alpha=1.75,\ \lambda=0.31279$$

при $P_1=0$, $P_2=1$ и $t(x)=0$. В табл. 2 приведены указанные значения $\tau(x)$, причем в скобках даны значения $\tau(x)$, полученные в [3].

Таблица 2

№ режима	5	6
$\tau(-0.8)$	0.4043 (0.5083)	0.5086 (0.5190)
$\tau(0)$	0.2509 (0.3081)	0.2968 (0.3120)
$\tau(0.8)$	0.7592 (0.5651)	0.5823 (0.5480)

Автор благодарит Н. Х. Арутюняна и В. М. Александрова за полезное обсуждение при постановке задачи и ее решении.

Всесоюзный научно-исследовательский
конструкторско-технологический институт
подшипниковой промышленности

Поступила 9 IX 1978

Ի. Ի. ԿՈՒԻՆ

ԿԱՅՈՒՆԱՑԱԾ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ ՎԵՐԱԴԻՐԻ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԵՏ

Ամփոփում

Դիտարկվում է կայունացած սողքի վիճակում գտնվող վերջավոր երկարությամբ վերադիրով ուժեղացված կիսահարթության համար կոնտակտային խնդիրը։

Խնդրի լուծումը կառուցվում է ռեգուլյար և սինգուլյար ասիմպտոտական վերլուծությունների օգնությամբ։ Մի քանի դեպքերի համար բերվում են թվային օրինակներ։

INTERACTION OF A STIFFENER, IN A NON-LINEAR STEADY-STATE CREEP, WITH AN ELASTIC SEMI-PLANE

I. I. KUDISH

Summary

A contact problem for a semi-plane reinforced with a stiffener of finite length, in a non-linear steady-state creep, is considered.

The solution of the problem is obtained with the use of regular and singular asymptotic expansions.

A numerical analysis of the problem for several cases is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М., изд. «Мир», 1967.
2. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М., изд. «Мир», 1972.
3. *Саркисян В. С., Мхитарян В. Г., Овсепян Л. О.* Передача нагрузки от степенно упрочняющейся накладки к деформируемому основанию. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. XXVIII, № 5.
4. *Melan E.* Ing. Archiv, 1932, Bd. 3, № 2.
5. *Арутюнян Н. Х.* Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
6. *Александров В. М., Соловьев А. С.* Некоторые смешанные плоские задачи теории упругости и их приложение к расчету погрешностей тензоизмерений. МТТ, 1970, № 1.
7. *Галин Л. А.* Контактная задача теории упругости. М., ГИТТЛ, 1953.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962.
9. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 2, 1979 Механика

А. АБДУКАДИРОВ, М. А. ЗАДОЯН

НЕЛИНЕЙНАЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ НАСЛЕДСТВЕННО-СТАРЕЮЩИХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СОВМЕСТНОМ РАСТЯЖЕНИИ, ИЗГИБЕ И КРУЧЕНИИ

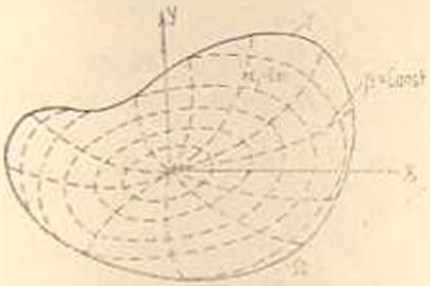
§ 1. *Постановка задачи и основные уравнения.* Рассматривается напряженное состояние цилиндрического стержня из нелинейного наследственно-стареющего несжимаемого материала, торцы которого находятся под совместным воздействием осевой силы, крутящих и изгибающих моментов. Принимается, что материал стержня описывается уравнениями нелинейной теории ползучести Маслова-Арутюняна [1]. Напряженное состояние стержней при комбинированных воздействиях внешних сил в условиях установившейся ползучести исследовано в монографии Ю. Н. Работнова [2] и в статье [3]. Нелинейная ползучесть стержней из наследственно-стареющих материалов при воздействии в отдельности крутящих и изгибающих моментов исследована в работах [4—5].

К цилиндрическому стержню отнесем криволинейную ортогональную систему (α, β, γ), причем координату γ направим по оси стержня, а координатами (α, β) определяются точки поперечного сечения, занимающие область Ω с контуром Γ (фиг. 1). Принимаем, что координаты α и β связаны с декартовыми координатами x и y соотношениями Коши-Римана

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{\partial y}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial x}{\partial \beta} = -\frac{\partial y}{\partial \alpha} \qquad (1.1)$$

причем коэффициент Ламе будут $H_1 = H_2 = H$, $H_3 = 1$

$$H(\alpha, \beta) = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2} \qquad (1.2)$$



Фиг. 1

Соотношения теории ползучести принимаем в виде [1]

$$2G\varepsilon_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta} + \int_{\tau_1}^{t} f(\sigma_0)\, s_{\alpha\beta}\, K(t, \tau)\, d\tau \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \qquad (1.3)$$

Здесь $G = E/3$, а E принимается постоянным, $s_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}\sigma$, $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, σ — среднее давление, σ_0 — интенсивность касательных напряжений. Далее принимается

$$f(\sigma_0) = \mu + \omega\sigma_0^{m-1} \qquad (1.4)$$

$$K(t, \tau) = -E\varphi'(\tau) + E[\varphi'(\tau) + \gamma_0\varphi(\tau)]\, e^{-\gamma_0(t-\tau)} \tag{1.5}$$

$$\varphi(\tau) = \frac{A_0}{\tau} + C_0 \tag{1.6}$$

причем A_0, C_0, γ_0, μ и λ — параметры, характеризующие свойство ползучести материала.

Соотношения между компонентами деформаций и перемещений имеют вид [6]

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{H}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{1}{H^2}\frac{\partial H}{\partial\beta}u_\beta, \qquad 2\varepsilon_{\alpha\gamma} = \frac{1}{H}\frac{\partial u_\gamma}{\partial\alpha} + H\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{u_\alpha}{H}\right) \quad (\alpha, \beta)$$
$$\varepsilon_{\gamma\gamma} = \frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}, \qquad 2\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\beta}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_\alpha}{H}\right) \tag{1.7}$$

Принимая тензор деформаций не зависящим от γ, полуобратным способом, как в [7], получаем

$$\varepsilon_{\gamma\gamma} = Ax - By + C \tag{1.8}$$

$$2\varepsilon_{\alpha\gamma} = \frac{1}{H}\frac{\partial u_{\gamma 0}}{\partial\alpha} + (E_1 - Dy)\frac{1}{H}\frac{\partial x}{\partial\alpha} + (E_2 + Dx)\frac{1}{H}\frac{\partial y}{\partial\alpha} \quad (\alpha, \beta) \tag{1.9}$$

Здесь $u_{\gamma 0}$ — функция от α, β и t, а A, B, C, D, E_1, E_2 — неизвестные функции времени.

Исключая из двух соотношений (1.9) $u_{\gamma 0}$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(H\varepsilon_{\beta\gamma}) - \frac{\partial}{\partial\beta}(H\varepsilon_{\alpha\gamma}) = DH^2 \tag{1.10}$$

Боковая поверхность стержня свободна от внешних нагрузок. Положим, что $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\beta\beta}$ и $\sigma_{\alpha\beta}$ равны нулю по всему объему стержня. Тогда получаем

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \varepsilon_{\beta\beta} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\gamma\gamma}, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta} = 0 \tag{1.11}$$

Для рассматриваемой задачи из (1.3) будем иметь

$$\sigma_{\gamma\gamma} + \int_{\tau_1}^{t} f(\varepsilon_0)\,\sigma_{\gamma\gamma}K(t, \tau)\, d\tau = E(Ax - By + C) \tag{1.12}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma} + \int_{\tau_1}^{t} f(\varepsilon_0)\,\sigma_{\alpha\gamma}K(t, \tau)\, d\tau = 2G\varepsilon_{\alpha\gamma} \quad (\alpha, \beta) \tag{1.13}$$

где

$$\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{1}{3}\varepsilon_{\gamma\gamma}^2 + \varepsilon_{\alpha\gamma}^2 + \varepsilon_{\beta\gamma}^2}$$

Дифференциальное уравнение равновесия в нашем случае будет [6]

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(H\tau_{\alpha\zeta}) + \frac{\partial}{\partial \beta}(H\tau_{\beta\zeta}) = 0 \tag{1.14}$$

Вводя функцию напряжений $\Phi(\alpha, \beta, t)$

$$\tau_{\alpha\zeta} = -\frac{1}{H}\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}, \qquad \tau_{\beta\zeta} = \frac{1}{H}\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \tag{1.15}$$

и оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{1}{H^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\right)$$

из уравнений (1.10) и соотношений (1.13) приходим к интегро-дифференциальному уравнению

$$\Delta\Phi + \int_{\tau_1}^{t} \frac{1}{H^2}\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[f(\tau_0)\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right] + \frac{\partial}{\partial \beta}\left[f(\tau_0)\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right]\right\} K(t, \tau)\, d\tau = 2GD(t) \tag{1.16}$$

Для функции Φ имеем нулевое значение на внешнем контуре Γ и различные значения, зависящие от t на внутренних контурах области Ω.

Таким образом, приходим к задаче Дирихле для системы уравнений (1.12) и (1.16) в области Ω относительно функций Φ и τ_{η}.

Интегрируя обе части уравнения (1.16) в произвольной области Ω_*, лежащей в Ω и ограниченной замкнутым контуром Γ_*, и переходя в левой части к контурному интегралу, получим уравнение

$$\oint_{\Gamma_*} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds + \int_{\tau_1}^{t}\left[\oint_{\Gamma_*} f(\tau_0)\frac{\partial \Phi}{\partial n} ds\right] K(t, \tau)\, d\tau = 2G\Omega_* D(t) \tag{1.17}$$

выражающее теорему о циркуляции сдвига для нашей задачи.

Крутящий момент определяется через функцию напряжений

$$M_z = 2\sum_{k=1}^{n} \Phi_k(t)\,\Omega_k + 2\iint_{\Omega} \Phi(\alpha, \beta, t)\, d\Omega \tag{1.18}$$

где $\Phi_k(t)$ — значение Φ на контуре Γ_k, а Ω_k — площадь области, ограниченной Γ_k. Для определения $\Phi_k(t)$ применяем формулу (1.17) n раз, а статические условия на торцах стержня (1.18) и

$$\iint_{\Omega} \sigma_{\zeta\zeta} d\Omega = N, \quad \iint_{\Omega} \sigma_{\zeta\zeta} y\, d\Omega = M_x, \quad \iint_{\Omega} \sigma_{\zeta\zeta} x\, d\Omega = M_y \tag{1.19}$$

где N — нормальная сила, M_x и M_y — изгибающие моменты, соответственно, относительно оси x и y, и соотношение (1.18) определяют функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$.

§ 2. *Задача релаксации напряжений при совместном растяжении и кручении стержня круглого сечения.* В частном случае воздействия осевой силы и крутящего момента, переходя к цилиндрической системе координат ($\alpha = \ln r$, $\beta = \theta$, $\gamma = z$, $H = r$) и учитывая осесимметричность напряженного состояния, имеем $\Phi = \Phi(r, t)$,

$$\tau_{rz} = 0, \quad \tau_{\theta z} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \qquad \Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)$$

Тогда уравнение (1.16) примет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \int_{\tau_1}^{t}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[f(\sigma_0)\, r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right]K(t, \zeta)\, d\zeta = 2GD(t) \tag{2.1}$$

причем
$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{3}\sigma_{zz}^2 + \tau_{\theta z}^2}$$

Интегрированием из (2.1) получим

$$\tau_{\theta z} + \int_{\tau_1}^{t} f(\sigma_0)\, \tau_{\theta z} K(t, \zeta)\, d\zeta = GD(t)\, r \tag{2.2}$$

Далее, из (1.12), принимая $A = B = 0$, будем иметь

$$\sigma_{zz} + \int_{\tau_1}^{t} f(\sigma_0)\, \sigma_{zz} K(t, \zeta)\, d\zeta = EC(t) \tag{2.3}$$

Сообщим стержню в начальный момент относительное удлинение $C(\tau_1)$ и крутку $D(\tau_1)$, которые остаются неизменными во времени. Тогда, очевидно, имеем

$$C(\tau_1) = \frac{N}{EF}, \qquad D(\tau_1) = \frac{M_z}{GWa} \tag{2.4}$$

где $N = N(\tau_1)$ и $M_z = M_z(\tau_1)$ — соответственно начальная нормальная сила и крутящий момент, $F = \pi a^2$, $W = \dfrac{\pi a^4}{2}$, где a — радиус круга поперечного сечения.

Таким образом, для определения закона релаксации напряжений во времени, если ввести обозначения $\sigma_{zz} = \sigma(\xi, t)$, $\tau_{\theta z} = \tau(\xi, t)$, $\xi = r/a$, приходим к системе двух нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра

$$\begin{gathered}\sigma + \int_{\tau_1}^{t} f(\sigma_0)\, \sigma K(t, \zeta)\, d\zeta = \sigma_* \\ \tau + \int_{\tau_1}^{t} f(\sigma_0)\, \tau K(t, \zeta)\, d\zeta = \tau_*\end{gathered} \tag{2.5}$$

где выражениями

$$\sigma(\tau_1) = \sigma_0 = \frac{N}{F}, \qquad \tau(\tau_1) = \tau_0 = \frac{M_z}{W}\xi \tag{2.6}$$

определяются напряжения в начальный момент $t = \tau_1$ и

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{3}\sigma^2 + \tau^2}$$

Переходя к безразмерному времени $t_* = \gamma_0 t$ (в дальнейшем индекс * опускается), принимая $m = 3$ и вводя обозначения $A_1 = E\gamma_0 A_0$, $C_1 = EC_0$,

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 + \left(\frac{A_1}{t} + C_1\right)[\mu + \lambda(\sigma^2 + \tau^2)], \qquad \omega_1 = 2\lambda\left(\frac{A_1}{t} + C_1\right)\sigma\tau \\ h_2 &= 1 + \left(\frac{A_1}{t} + C_1\right)\left[\mu + \lambda\left(\frac{\sigma^2}{3} + 3\tau^2\right)\right], \qquad \omega_2 = \frac{1}{3}\omega_1 \end{aligned} \tag{2.7}$$

систему интегральных уравнений (2.5) приведем к следующей системе дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma} + h_1\dot{\sigma} + \omega_1\dot{\tau} &= 0 \\ \ddot{\tau} + h_2\dot{\tau} + \omega_2\dot{\sigma} &= 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

с начальными условиями (2.6) и

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(\tau_1) &= -\left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_1\right)\left[\mu + \lambda\left(\frac{\sigma_*^2}{3} + \tau_*^2\right)\right]\sigma_* \\ \dot{\tau}(\tau_1) &= -\left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_1\right)\left[\mu + \lambda\left(\frac{\sigma_*^2}{3} + \tau_*^2\right)\right]\tau_* \end{aligned} \tag{2.9}$$

На ЭВМ „Наири" при значении параметров $E = 1.5\cdot10^5$ *кг/см²*, $C_0 = 0.9\cdot10^{-5}$ *см²/кг*, $A_0 = 4.82\cdot10^{-5}$ *кг/см²*, $\gamma_0 = 0.026$ *1/день*, $\mu = 1$, $\lambda = 10^{-4}$ *см⁴/кг²*, $\sigma_* = 200$ *кг/см²*, $\tau_* = 200\xi$ *кг/см²* дано решение системы уравнений при начальных условиях (2.6) и (2.9). В приведенных на фиг. 2 и 3 графиках показано изменение напряжения во времени в зависимости от возраста материала τ_1 и продолжительности действия нагрузки $T = t - \tau_1$. На фиг. 4, наряду с начальным распределением напряжений, показано распределение напряжений по радиусу круга как для двух различных значений τ_1, так и для двух значений T.

Для старого материала $A_1 = 0$, и система (2.8) представится в виде

$$(\dot{\sigma} + h\sigma)^{\cdot} = 0, \qquad (\dot{\tau} + h\tau)^{\cdot} = 0 \tag{2.10}$$

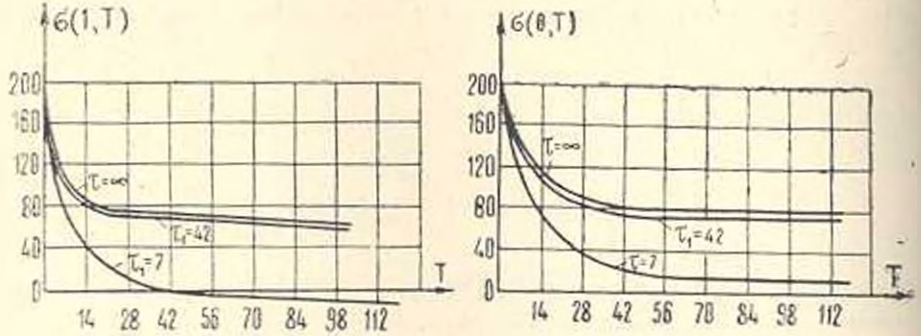
причем

$$h = 1 + \mu C_1 + \lambda C_1 \left(\frac{\sigma^2}{3} + \tau^2 \right) \tag{2.11}$$

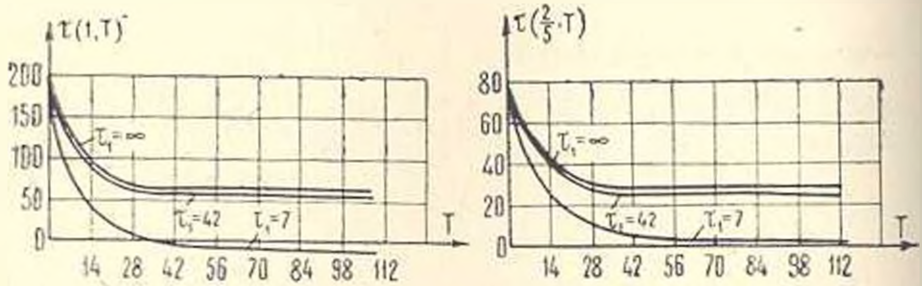
Интегрируя систему уравнений (2.10) при учете начальных условий (2.6) и (2.9), приходим к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{\sigma} + h\sigma = \sigma_*, \quad \dot{\tau} + h\tau = \tau_* \tag{2.12}$$

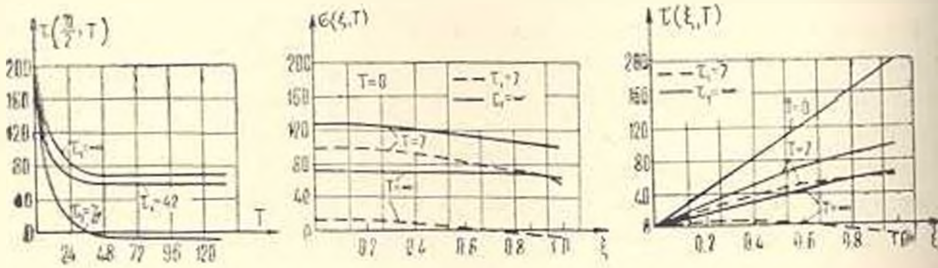
с начальными условиями (2.6).



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Численное решение этой системы при начальных условиях (2.6), как и должно быть, совпадает с вышеприведенным решением системы (2.8) с начальными условиями (2.6) и (2.9) при $\tau_1 \to \infty$.

Исключая t из (2.12), приходим к уравнению

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{\tau_* - h\tau}{\sigma_* - h\sigma} \tag{2.13}$$

с начальным условием

$$\tau = \tau_* \text{ при } \sigma = \sigma_* \tag{2.14}$$

Численное решение нелинейного дифференциального уравнения (2.13) при начальных условиях (2.14) показывает, что в процессе релаксации зависимость между σ и τ близка к линейному закону.

§ 3. *Совместное кручение и изгиб тонкостенного цилиндрического стержня.* Рассмотрим тонкостенный цилиндрический стержень, поперечное сечение которого представляет криволинейное кольцевое сечение, контуры которого совпадают с координатными линиями α_1 и α_2. Пренебрегая $\sigma_{\gamma\gamma}$ из (1.16) получаем

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} + \int_{\tau_1}^{t} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[f(\sigma_0)\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right] K(t, \tau)\, d\tau = 2GH^2D(t) \tag{3.1}$$

Интегрируя обе части уравнения (3.1) и пренебрегая изменением $\tau_{\beta\gamma}$ по толщине трубы, приближенно получаем

$$\tau_{\beta\gamma} + \int_{\tau_1}^{t} f(\sigma_0)\, \tau_{\beta\gamma} K(t, \tau)\, d\tau = 2GQ(\alpha_0, \beta)\, D(t) \tag{3.2}$$

где принято $\alpha_0 = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$, и

$$Q(\alpha, \beta) = \frac{1}{H(\alpha, \beta)} \int H^2(\alpha, \beta)\, d\alpha \tag{3.3}$$

Далее, полагая в (1.12) $A = C = 0$ и $\alpha = \alpha_0$, будем иметь

$$\sigma_{\beta\beta} + \int_{\tau_1}^{t} f(\sigma_0)\, \sigma_{\beta\beta} K(t, \tau)\, d\tau = Ey(\alpha_0, \beta)\, B(t) \tag{3.4}$$

Рассмотрим задачу релаксации напряжений. В начальный момент стержню сообщим крутку $D(\tau_1)$ и кривизну $B(\tau_1)$, остающихся во времени неизменными. Вводя обозначения $\sigma_{\beta\beta} = \sigma(\beta, t)$, $\tau_{\beta\gamma} = \tau(\beta, t)$ и

$$\tau_* = 2GQ(\alpha_0, \beta)\, D(\tau_1), \quad \sigma_* = Ey(\alpha_0, \beta)\, B(\tau_1) \tag{3.5}$$

приходим к системе нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра, определяющей закон релаксации напряжений во времени при совместном изгибе и кручении.

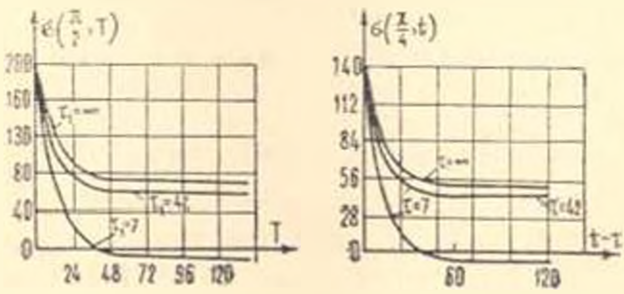
$$\sigma + \int_{\tau_1}^{t} f(\sigma_0)\,\sigma K(t,\tau)\,d\tau = \sigma_*$$

$$\tau + \int_{\tau_1}^{t} f(\sigma_0)\,\tau K(t,\tau)\,d\tau = \tau_* \tag{3.6}$$

Полученную систему уравнений, переходя к безразмерному времени, как в предыдущем параграфе, приводим к системе дифференциальных уравнений (2.8) при начальных условиях (2.6) и (2.9), а для старого материала — к системе уравнений (2.12) с начальными условиями (2.6), причем в этих условиях значения σ_* и τ_* следует принимать не по (2.6), а по (3.5). Для кругового кольцевого сечения, переходя к цилиндрическим координатам, получаем $Q = r_0/2$, $y(\rho_0, \theta) = r_0 \sin\theta$ и

$$\sigma_* = \frac{M_x}{W_1}\sin\theta, \quad \tau_* = \frac{M_z}{2W_1} \tag{3.7}$$

где $M_x = M_x(\tau_1)$ и $M_z = M_z(\tau_1)$ — соответственно изгибающий и крутящий моменты в начальный момент, $W_1 = \pi r_0^2\delta$, r_0 — радиус средней окружности кольцевой области, δ — толщина стенки трубы. Для тех же значений параметров, приведенных в предыдущем параграфе, на ЭВМ «Наири» получены решения системы (3.6) при начальных условиях (3.7), причем принято $\sigma_* = 200 \sin\theta$ $кг/см^2$, $\tau_* = 200$ $кг/см^2$. На фиг. 5 и 6 построены графики релаксации напряжений тонкостенной цилиндрической трубы при совместном изгибе и кручении в зависимости от возраста материала τ_1 и продолжительности действия заданных деформаций $T = t - \tau_1$. На фиг. 7 показано распределение напряжения по четверти окружности сечения как в начальный момент, так и по двум значениям каждого из τ_1 и T.



Фиг. 5

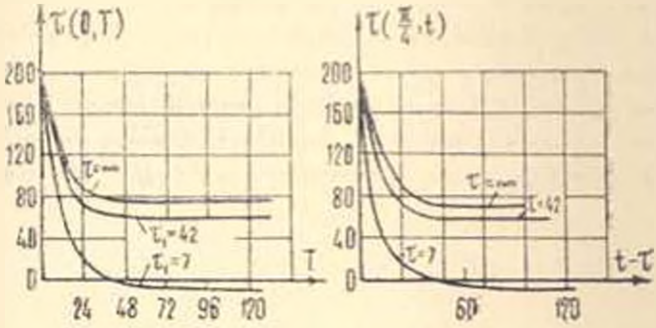
В качестве открытого профиля рассмотрим криволинейное кольцевое сечение с вырезом. Интегрируя обе части уравнения (3.1) и принимая $e_{\theta_1} = 0$ на $\theta_1 = \alpha_1 + \alpha_2/2$, приближенно будем иметь

$$\sigma_{3_1} + \int_{\tau_1}^{t} f(\sigma_0)\,\sigma_{3_1} K(t,\tau)\,d\tau = \frac{2GD(t)}{H}\int_{r_0}^{r} H^2 dr \tag{3.8}$$

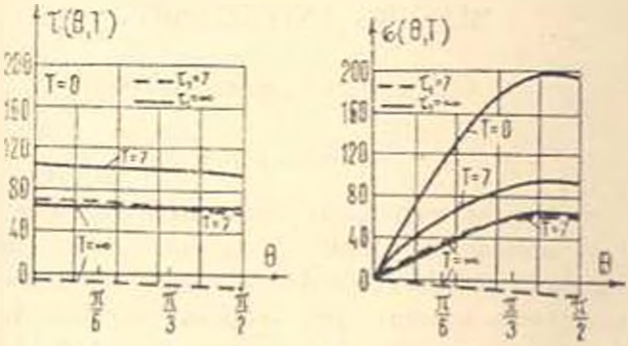
Для цилиндрической тонкостенной трубы с продольным вырезом, принимая $r = r_0 + x$, получаем

$$\sigma_{3_1} + \int_{\tau_1}^{t} f(\sigma_0)\,\sigma_{3_1} K(t,\tau)\,d\tau = GD(t)\,x \tag{3.9}$$

К этому уравнению присоединяется уравнение (3.4), в котором принимается $y(\alpha_0, \beta) = r_0 \sin\theta$.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Здесь, как и в предыдущем параграфе, для конкретности, сообщаемые стержню деформации приняты постоянными во времени, а степень «упрочнения» $m=3$. Однако, как это следует из изложения, аналогично можно решить задачи и в случае, когда задан закон изменения во времени деформации и m произвольное.

Самаркандский Государственный
архитектурно-строительный институт
им. М. Улугбека
Институт механики АН Армянской ССР

Поступила 2 VI 1978

Ա. ԱԲԴՈՒԿԱԴԻՐՈՎ, Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

ԺԱՌԱՆԳԱԲԱՐ ԾԵՐԱՑՈՂ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՁՈՂԵՐԻ ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԸ ՀԱՄԱՏԵՂ ՁԳՄԱՆ, ՈԼՈՐՄԱՆ ԵՎ ԾՌՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Կորագիծ օրթոգոնալ կոորդինատային սիստեմում ուսումնասիրվում է անսեղմելի, ժառանգաբար ծերացող նյութից պատրաստված գլանային ձողի ոչ-գծային սողքի համատեղ ձգման, ոլորման և ծռման դեպքում։

Օգտագործելով կիսադարձային մեթոդը, խնդիրը բերվում է ոչ-գծային ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի լարումների ֆունկցիայի և առանցքային նորմալ լարման նկատմամբ։

Ուսումնասիրված է ռելաքսացիայի խնդրի 2 դեպք։

Առաջին դեպքում քննարկվում է կլոր կտրվածք ունեցող ձողի ռելաքսացիայի խնդիրը համատեղ ոլորման և ձգման դեպքում, իսկ երկրորդ դեպքում բարակապատ գլանային խողովակի ռելաքսացիայի խնդիրը համատեղ ոլորման և ծռման դեպքում, բերված են ժամանակի ընթացքում լարումների փոփոխման գրաֆիկները, որոնք կառուցված են թվային օրինակների հիման վրա։

NON-LINEAR CREEP IN CYLINDRICAL BARS OF HEREDITARILY AGING MATERIALS ON JOINT TENSION, BENDING AND TORSION

A. ABDUKADIROV, M. A. ZADOYAN

Summary

In the system of curvilinear orthogonal coordinates the stress state of the cylindrical bar made of non-linear, incompressible, hereditarily aging material, the terminals of which are under the joint influence of axial force, bending and torsional moments is investigated.

By the semi-reverse method, assuming the strain tensor as independent of the linear coordinate, the problem leads to the solution of the system of two non-linear integral equations of the Volterra type.

The relaxation problem for the two cases has been investigated. In the first case the joint torsion and tension of the round bar has been studied while in the second case — the joint bending and torsion of the thin-walled cylindrical bar. In both cases the system of integral equations leads to that of differential equations.

Variations in stress with time are shown graphically.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., ГТТА, 1952.
2. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкции. М., «Наука», 1967.
3. *Задоян М. А.* Задача установившейся ползучести призматического стержня при совместном растяжении, изгибе и кручении. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1968, т. 21, № 3.
4. *Александрян Р. А., Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Релаксационная задача об изгибе призматического стержня. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
5. *Александрян Р. А., Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля в условиях неустановившейся ползучести. ПММ, 1958, т. 22, в. 6.
6. *Новожилов В. В.* Теория упругости. М.—Л., Судстройиздат, 1962.
7. *Задоян М. А.* Задача о пластическом состоянии цилиндрических стержней при совместном изгибе и кручении. «Механика деформируемых тел и конструкций». Сб., посв. 60-летию акад. Ю. Н. Работнова, М., «Машиностроение», 1975.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 2, 1979 Механика

Н. Е. САРКИСЯН, О. С. СИРОТКИН, В. В. ВОРОБЕЙ,
М. М. МАРТИРОСЯН, А. Н. КАГРАМАНЯН

СУММИРОВАНИЕ ПОВРЕЖДЕНИЙ ПРИ КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ И ПЕРЕМЕННОМ НАГРУЖЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Конструкции и детали из стекловолокнистого композиционного материала испытывают различного рода нагрузки, могущие дискретно меняться во времени в процессе эксплуатации. Поэтому представляет определенный интерес в связи с выбором запасов прочности изучение степени влияния предварительного нагружения на изменение механических свойств материала при последующем статическом кратковременном нагружении.

Еще в 1952 году было установлено, что предварительное циклическое нагружение не влияет на характер кривой напряжение-деформация ($\sigma\sim\varepsilon$) и предел прочности $\sigma_в$ однонаправленного стеклопластика при последующем статическом растяжении или сжатии [1]. В дальнейшем этот вопрос стал предметом изучения для других авторов [2—8 и др.]. В этих работах было рассмотрено влияние одного простого гармонического вида циклического деформирования (растяжение [1], [5—7], сжатие [1], растяжение-сжатие [4], изгиб [2, 3]). Кроме того, анизотропия механических свойств стеклопластика не учитывалась (нагрузка прикладывалась только в направлении армирования).

В указанных работах не была установлена общая закономерность изменения остаточной прочности от величины напряжения или количества циклов предварительного нагружения. По полученным экспериментальным результатам можно заключить, что изменение остаточной прочности стеклопластика $\sigma_{ост}$ носит несколько разный характер в зависимости от вида предварительной деформации. Если при изгибе остаточная прочность резко уменьшается по мере увеличения циклического напряжения и в зависимости от материала [2, 3] составляет от 15—60 до 60—95% исходного значения прочности $\sigma_в$ ($N = 10^4 \div 10^7$ *циклов*), то при осевой деформации, наоборот, снижение предела прочности при последующем растяжении становится более заметным при большем количестве циклов предварительного нагружения ($N > 10^5$ *циклов*). Кроме того, в последнем случае, по сравнению с изгибом, падение прочности меньше ($\sigma_{ост} = 0.70-0.85\cdot\sigma_в$) [4—6] или, даже, изменением прочности можно пренебречь [1, 7].

Что касается влияния предварительного деформирования на модуль упругости E стеклопластика, то его снижение по сравнению с исходным значением оказывается еще меньше и практически не зависит от числа циклов нагружения в области многоцикловой усталости [1, 5—7].

Влияние длительного статического нагружения (ползучесть) на изменение остаточной прочности и деформативности стеклопластиков исследовано в работах [9—12], где рассмотрено только одноосное растяжение. Анизотропия механических свойств материала изучалась лишь в [9, 10], где нагрузка прикладывалась не только вдоль волокон ($\varphi = 0$), но и в направлениях $\varphi = 15°$, $30°$ и $45°$.

Установлено, что процесс ползучести практически не отражается на зависимости $\sigma - \varepsilon$ при последующем кратковременном растяжении, если испытуемые образцы вырезаны вдоль волокон стеклопластика [9]. В этом случае наблюдается некоторое упрочнение материала (по прочности на 10—15%). В случаях же приложения нагрузки в направлениях $\varphi \neq 0°$, когда в работу композита вовлекается и полимерное связующее, наблюдается не только более значительное изменение остаточной прочности $\sigma_{ост}$ (на 5—40% в зависимости от напряжения, продолжительности ползучести и угла φ), но и меняется зависимость $\sigma - \varepsilon$ [9].

В отношении тканых стеклопластиков литературные данные несколько противоречивы [11, 12]. Для различных материалов, в зависимости от температурно-влажностных условий испытаний, предварительное воздействие длительно растягивающей нагрузки может вызвать как упрочнение материала (до 15—20%) [11, 12], так и может не отразиться на механических свойствах композита, либо стать причиной его разупрочнения [11].

Целью настоящей работы явилось исследование влияния предварительного нагружения квазистатическими и переменными нагрузками на изменение прочности и деформативности стеклопластика при последующем однократном кратковременном статическом растяжении, когда предварительное нагружение во времени проходит по совершенно различным законам.

Рассмотрено влияние совокупности трех видов силового воздействия: 1) вибрационного или многоциклового растяжения частотой 1200 *цикл/мин* (для удобства изложения этот вид нагружения условно обозначим α), 2) повторно-статического или малоциклового растяжения частотой 1 *цикл/мин* (вид нагружения — β) и 3) длительного статического растяжения (ползучести), воздействие которого обозначим через γ. Влияние предварительного растяжения изучено в зависимости от очередности приложения силовых факторов типа α, β и γ и продолжительности их воздействия.

Исследование проведено с учетом анизотропии механических свойств стеклопластика, для чего нагрузка прикладывалась в направлении армирования (основы ткани, $\varphi = 0°$) и в направлении под углом $\varphi = 45°$.

В качестве материала для испытаний служил стеклотекстолит, изготовленный методом прессования на основе ткани ТСУ-8/3-78М и связующего ЭДТ-10.

Опыты проводились на плоских образцах, вырезанных из листов стеклотекстолита толщиной от 3.2 до 4.8 *мм*. Образцы имели форму двухсторонней лопатки с радиусом перехода к галтелям, равным 75 *мм*. Ширина и длина рабочего участка образца составляли 15 и 50 *мм*. Толщина образца соответствовала толщине листа. Испытание образцов производилось в течение промежутка времени примерно 0.5—1.5 года после изготовления материала при температуре среды 22±3°С и относительной влажности

$67\pm7\%$. На каждом уровне напряжения при длительном нагружении испытывалось не менее 3 образцов, а при определении свойств контрольных образцов (неподвергшихся предварительному деформированию) 7 и 18 образцов (соответственно для $\varphi=0°$ и $45°$).

Эксперименталное исследование проведено в три этапа.

На первом этапе определяли кривую деформирования для материала в условно исходном состоянии (контрольные испытания). Кривые $\sigma\sim\varepsilon$ снимались на разрывной машине ЦД-10/90 при ручном нагружении, с использованием для измерения деформаций механического тензометра МК-3. Значения предела прочности $\sigma_в$, модуля упругости E, среднеквадратические их отклонения приведены в табл. 1. Графики $\sigma\sim\varepsilon$ показаны на фиг. 1 и 2 сплошными линиями.

Таблица 1

Данные контрольных испытаний

Угол вырезки φ, *град*	Прочность $\sigma_в$, *кг/мм²*	Модуль упругости E, *кг/мм²*
0	52.70 ± 1.90	2725 ± 125
45	20.85 ± 3.85	1570 ± 105

На втором этапе определяли временные зависимости прочности испытуемого стеклотекстолита в условиях нагружения, соответствующих режимам α, β и γ.

Вибрационное растяжение (α) осуществляли на базе $N=2\cdot10^6$ циклов до разрушения по методике, указанной в [5]. Установлена корреляционная связь усталостной прочности в зависимости от угла φ, имеющая вид

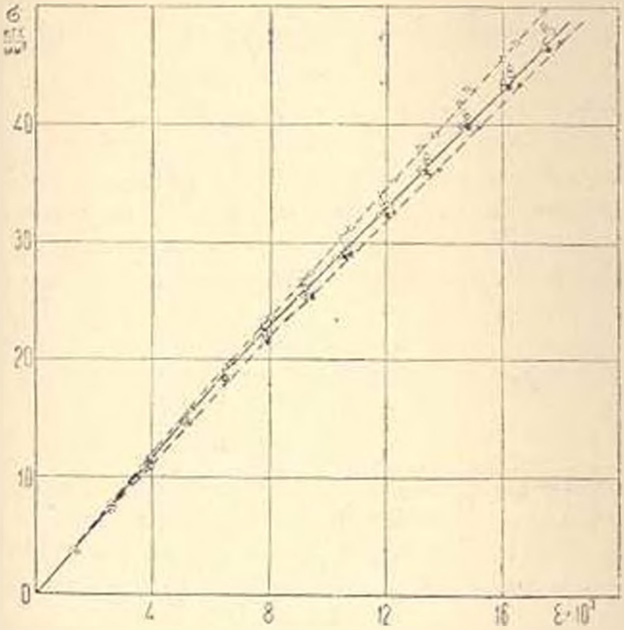
$$\begin{aligned}\sigma_0 &= 52.48-6.7385\lg N\\ \sigma_{45} &= 19.76-0.8532\lg N\end{aligned}\tag{1.1}$$

Повторно-статическое растяжение (β) проводили на разрывной машине статического деформирования ЦДМ-10, оборудованной специально для этого автоматическими переключателями. Деформирование происходило с постоянной скоростью, соответствующей скорости холостого перемещения захватов машины, равной 6 *мм/мин*. Если в испытаниях α осуществлялось отнулевое растяжение, то в данном случае коэффициент асимметрии пульсирующего цикла растяжения колебался в пределах 0.03—0.07, в зависимости от угла φ и величины задаваемого напряжения. База испытаний при малоцикловом нагружении была принята равной 10^3 *циклам*.

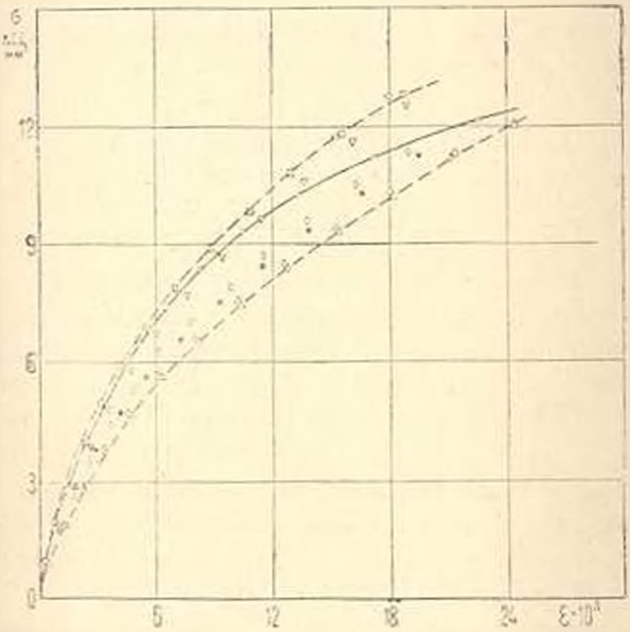
Корреляционная зависимость между усталостной прочностью и соответствующим числом циклов до разрушения в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= 54.24-6.7204\lg N\\ \sigma_{45} &= 26.09-2.9958\lg N\end{aligned}\tag{1.2}$$

Исследование длительной статической прочности проведено по методике [9]. Испытания проводили на базе времени $2\cdot10^4$ *мин* до разрушения об-



Фиг. 1. Влияние комплекса предварительного нагружения на зависимость $\sigma \sim \varepsilon$ ($\varphi = 0°$). ---- границы влияния.



Фиг. 2. Влияние комплекса предварительного нагружения на зависимость $\sigma \sim \varepsilon$ ($\varphi = 45°$). ---- границы влияния.

разца. Установлена в зависимости от анизотропии корреляционная связь между длительной прочностью и долговечностью τ (в *мин*), имеющая вид

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 47.46 - 2.377 \lg \tau \\ \sigma_{45} &= 16.66 - 7.460 \lg \tau \end{aligned} \qquad (1.3)$$

На третьем этапе исследовалось влияние суммирования повреждений при квазистатическом и переменном нагружении на величину остаточной прочности стеклопластика.

В качестве модели для суммирования повреждений была предложена модель в виде полинома

$$Z\{b, T_j\} = b_0 + b_1 T_1 + b_2 T_2 + \cdots + b_{11} T_1^2 + b_{22} T_2^2 + \cdots +$$
$$+ \cdots + b_{111} T_1^3 + b_{222} T_2^3 + \cdots \qquad (1.4)$$

где $Z\{b, T_j\}$ — параметр, характеризующий величину остаточной прочности $\sigma_{ост}$; $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{11}, b_{22}, \ldots, b_i$ — коэффициенты, определяемые из опыта; $T_1, T_2, \ldots, T_j$ — параметры, учитывающие относительное накопление повреждений при заданном виде нагружения.

Учитывая, что параметр T_j всегда заведомо меньше единицы $(T_j < 1)$, можно упростить модель (1.4), отбросив члены, содержащие степени больше единицы. В этом случае неизвестные коэффициенты определяются из специально построенного эксперимента с использованием греко-латинских планов.

Предварительное деформирование осуществляли в зависимости от порядка чередования видов нагружения по форме

$$\begin{aligned} &\alpha_i - \beta_j - \gamma_k - \text{ост} \\ &\beta_i - \alpha_j - \gamma_k - \text{ост} \\ &\gamma_i - \alpha_j \rightarrow \beta_k \rightarrow \text{ост} \end{aligned} \qquad (1.5)$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$ соответствуют уровням накопления повреждений в условиях предварительного деформирования одного вида нагружения.

Рассматривались три уровня повреждаемости от предварительного растяжения, которые соответствовали продолжительности деформирования 0.1, 0.2 и 0.3 от базового значения долговечности при данном виде нагружения.

Базовое значение долговечности было принято равным $N_{р.\alpha} = 2\cdot10^6$, $N_{р.\beta} = 200$ циклов и $\tau_{р.\gamma} = 240$ *часов*. Таким образом, имели $\alpha_1 = 2\cdot10^5$, $\alpha_2 = 4\cdot10^5$ и $\alpha_3 = 6\cdot10^5$ *цикл*; $\beta_1 = 20$, $\beta_2 = 40$ и $\beta_3 = 60$ *цикл*; $\gamma_1 = 24$, $\gamma_2 = 48$ и $\gamma_3 = 72$ *часа*.

Величину напряжения, соответствующую базовому значению долговечности, вычисляли по корреляционным уравнениям (1—3). При нагружении вдоль основы ткани $(\varphi = 0°)$ имели $\sigma_\alpha = 10.02$, $\sigma_\beta = 40.10$ и $\sigma_\gamma = 37.57$ *кгс/мм²*. При растяжении под углом $\varphi = 45°$ соответственно: $\sigma_\alpha = 4.11$, $\sigma_\beta = 19.19$ и $\sigma_\gamma = 13.56$ *кгс/мм²*.

Все испытания проводили практически беспрерывно. Переход от одного вида нагружения к другому занимал время не более 5 *мин*. Следует также отметить, что было изучено влияние продолжительности «отдыха» образца после третьего этапа нагружения на изменение прочности и деформативности при последующем растяжении. Для этого по 3 образца, прошедших определенный цикл по форме (1.5), были испытаны непосредственно после заключительного этапа нагружения и после недельного «отдыха». Результаты испытаний оказались практически одинаковыми. Такое явление было установлено как на образцах, вырезанных вдоль основы ткани, так и в направлении $\varphi = 45°$.

Полученные средние значения экспериментальных результатов сведены в табл. 2* и иллюстрируются графиками, показанными на фиг. 1 и 2.

Таблица 2

Данные испытаний по определению влияния предварительного нагружения

№ п/п	Чередование видов нагружения	Средн. значения характеристик $кгс/мм^2$				Примечание**
		$\varphi = 0°$		$\varphi = 45°$		
		$\sigma^*_{ост}$	E	$\sigma^*_{ост}$	E	
1	$\gamma_3 \to \beta_3 \to \alpha_3$	55.80	2730	22.62	1120	—
2	$\alpha_3 \to \beta_3 \to \gamma_3$	55.10	2850	17.55*	—	$\tau = 33.0$ и 56.0 *час* (γ)
3	$\alpha_3 \to \beta_1 \to \gamma_3$	53.95	2730	23.97	1480	—
4	$\beta_3 \to \alpha_3 \to \gamma_2$	58.91	2755	23.95	1645	$\tau = 8.5$ и 9.5 *час* (γ)
5	$\beta_3 \to \alpha_3 \to \gamma_3$	—	—	20.72	1260	$\tau = 7.5$; 7.5 и 31.5 *час* (γ)
6	$\beta_3 \to \alpha_1 \to \gamma_2$	51.65	2605	19.81	1125	$\tau = 8.5$ *час* (γ)
7	$\gamma_1 \to \alpha_1 \to \beta_1$	58.22	2845	24.52	1600	—
8	$\gamma_1 \to \alpha_3 \to \beta_1$	55.27	2695	16.38*	—	$N = 14$ *цикл* (β)
9	$\gamma_1 \to \alpha_3 \to \beta_3$	54.42	2700	23.07	1645	—

* Соответствуют разрушающим нагрузкам первого цикла повторно-статического растяжения (β).

** Соответствуют образцам ориентации $\varphi = 0°$, разрушившимся в процессе указанного вида нагружения.

Несмотря на то, что относительный уровень повреждаемости (T_i) не превосходил 0.3, а максимальная суммарная повреждаемость составляла 0.8, часть образцов из-за разброса механических свойств разрушилась до момента определения остаточной прочности. В этих случаях величина $\sigma^*_{ост}$ задавалась равной величине действующего напряжения последнего вида испытания с добавлением части напряжения, пропорциональной доли проработанного ресурса $\frac{N_з}{N_б}$ или $\frac{\tau_р}{\tau_б}$, где $N_р$ — количество циклов до

* Значение модуля упругости E при $\varphi = 0°$ соответствует начальному линейному участку графика $\sigma \sim \varepsilon$, а при $\varphi = 45°$ — напряжению $0.215\ \sigma_в$ (то же для контрольной группы испытаний).

разрушения; τ_p — время до разрушения; $N_к$ и $\tau_б$ — базовое значение долговечности, соответственно.

После обработки эксперметальных результатов и получения искомых коэффициентов b_i были вычислены теоретические значения остаточной прочности $\sigma^T_{ост}$ по формуле (1.4), приведенной к виду

$$\sigma^T_{ост}\{b_i T_j\} = \text{П}\{\alpha, \beta, \gamma\}\left[b_0 - b_1\frac{\sum\limits_{i=1}^{N_{p,\alpha}} N_i}{N_{б,\alpha}} - b_2\frac{\sum\limits_{i=1}^{N_{p,\beta}} N_i}{N_{б,\beta}} - b_3\frac{\sum\limits_{i=1}^{\tau_p} \tau_i}{\tau_{б,\gamma}}\right] \quad (1.6)$$

где $b_0 = \sigma_в$ — предел прочности стеклопластика

$$b_1 = \begin{cases} 9\ кгс/мм^2, & \varphi = 0 \\ 2\ кгс/мм^2, & \varphi = 45^\circ, \end{cases} \qquad b_2 = \begin{cases} 20\ кгс/мм^2, & \varphi = 0^\circ \\ 16\ кгс/мм^2, & \varphi = 45^\circ \end{cases}$$

$$b_3 = \begin{cases} 12\ кгс/мм^2, & \varphi = 0 \\ 1\ кгс/мм^2, & \varphi = 45^\circ \end{cases} \qquad \text{П} = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha, \beta, \gamma \\ 0.7 & \text{при } \beta, \alpha, \gamma \end{cases}$$

$\text{П}\{\alpha, \beta, \gamma\}$ — коэффициент, учитывающий влияние очередности видов нагружения.

N_i, τ_i — количество циклов и время действия нагрузки.

$N_{б,\alpha}$; $N_{б,\beta}$; $\tau_{б,\gamma}$ — базовое значение долговечности для α, β и γ видов нагружения.

$N_{p,\alpha} = 0.95\ N_{п,\alpha}$ — для заданной величины нагрузки.

Определение искомых коэффициентов в уравнении (1.6) осуществлялось в соответствии с принятой методикой проведения экспериментов по латинским планам.

Не приводя полностью всех этапов расчета (они известны из литературы по планированию эксперимента), можно дать следующие упрощающие формулы для определения коэффициентов уравнения (1.6):

$$b_1 = -\frac{\sum\limits_1^n \frac{\Delta\sigma_{ост,\alpha\beta\gamma}}{\Delta T_\alpha}}{n}; \qquad b_2 = -\frac{\sum\limits_1^n \frac{\Delta\sigma_{ост,\beta\alpha\gamma}}{\Delta T_\beta}}{n}; \qquad b_3 = -\frac{\sum\limits_1^n \frac{\Delta\sigma_{ост,\gamma\alpha\beta}}{\Delta T_\gamma}}{n}$$

где $\Delta\sigma_{ост}$ — приращение (в данном случае — уменьшение) прочности после предварительного нагружения, соответствующее относительному повреждению ΔT (например, $\sigma_{ост,1} \to T_{\alpha,1}$, $\sigma_{ост,2} \to T_{\alpha,2}$, $T_{\alpha,2} - T_{\alpha,1} = \Delta T_\alpha$), n — количество образцов на один вид испытания (в данной работе 3, но можно и 1).

Величина коэффициента П, учитывающего влияние очередности видов нагружения, принимается из условия

$$\sigma \ll \sigma_{T,0} \text{ или } \sigma \geq \sigma_{T,0}$$

где σ — напряжение, которое вызывает трещинообразование в композитном материале (для стеклопластиков обычно $\sigma_{T,0} = 0.50 - 0.65 \cdot \sigma_в$, в зависимости от процентного содержания волокна).

Если известно напряжение $\sigma_{\gamma,0}$, то можно не определять экспериментально значение $H(\beta, \alpha, \gamma)$ и задаться его значением.

Если существуют другие условия, то значения H могут быть определены экспериментально по формулам

$$H(\beta, \alpha, \gamma) = \frac{\sum\limits_{1}^{k} SS_{\beta\alpha\gamma}}{\sum\limits_{1}^{m} SS_{\alpha\beta\gamma}}, \qquad H(\gamma, \alpha, \beta) = \frac{\sum\limits_{1}^{l} SS_{\gamma\alpha\beta}}{\sum\limits_{1}^{m} SS_{\alpha\beta\gamma}},$$

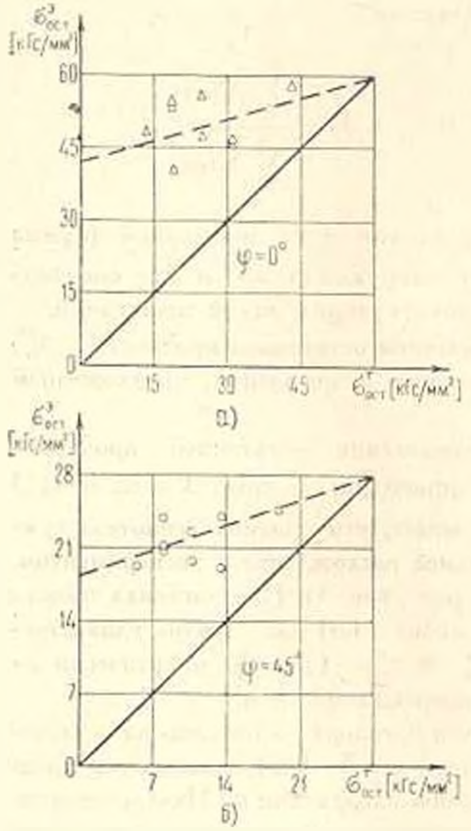
где $\sum SS_{\alpha\beta\gamma}$ и $\sum SS_{\beta\alpha\gamma}$ — сумма результатов всех испытаний (сумма всех значений $\sigma_{ост}$) с очередностью нагружений $\alpha\beta\gamma$ и $\beta\alpha\gamma$ соответственно, k, m и l — количество соответствующих видов испытаний.

Одновременно были произведены расчеты остаточной прочности $\sigma^{Г}_{ост}$ на основе линейной гипотезы суммирования повреждений, предложенной Пальмгреном [13].

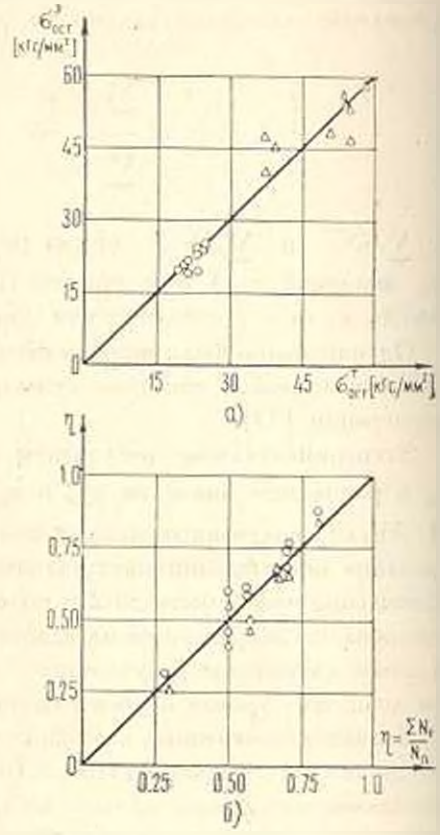
Экспериментальные результаты определения остаточной прочности $\sigma^{*}_{ост}$ и расчетные значения $\sigma^{Г}_{ост}$ и $\sigma^{Г*}_{ост}$ приведены в табл. 3 и на фиг. 3 и 4. Анализ полученных данных показывает, что линейная гипотеза суммирования повреждений дает значительное расхождение с экспериментом. Расхождение может быть до 2 и более раз (фиг. 3). Предлагаемая модель суммирования повреждений на основе закона (1.6) дает вполне удовлетворительное совпадение результатов $\sigma^{*}_{ост}$ и $\sigma^{Г}_{ост}$ (фиг. 4) практически на всем диапазоне уровня относительной повреждаемости η.

Значения полученных коэффициентов b_i говорят о том, что на остаточную прочность в меньшей степени (в пределах 5—8%) сказывается предварительное нагружение малыми по уровню нагрузками α. Начальное циклическое нагружение высоким уровнем напряжения β приводит к существенному снижению $\sigma_{ост}$ (до 30%) ввиду появления на начальной стадии испытаний микротрещин в связующем. С ростом количества циклов предварительного нагружения величина $\sigma_{ост}$ уменьшается, что в первую очередь связано с разупрочнением связующего и релаксацией напряжений в нем. Это подтверждает также относительно большее падение остаточной прочности $\sigma_{ост}$ для стеклотекстолита под углом $\varphi = 45°$, когда возрастает роль связующего в обеспечении прочности и жесткости образца (фиг. 2). Модуль упругости образцов, испытанных по основе ($\varphi = 0°$) практически остается без изменения (фиг. 1).

Таким образом, можно заключить, что в условиях предварительного нагружения происходит сложный процесс изменения механических свойств материала, который идет по двум конкурирующим друг с другом направлениям — упрочнению и разупрочнению. В частности, при вибрационном растяжении вблизи предела усталости ($N = 2 \cdot 10^{6}$ *цикл*) механические свойства стеклотекстолита меняются мало, а в условиях длительного статического растяжения (ползучесть) может преобладать как процесс упрочнения, так и разупрочнения. Однако при повторно-статическом растяжении имевшем место при весьма значительных уровнях напряжения, естественно, интенсивнее происходит процесс разупрочнения.



Фиг. 3. Оценка суммирования повреждений по линейной гипотезе. ——— линейная гипотеза, - - - - экспериментальные значения.



Фиг. 4. Оценка суммирования повреждений по предлагаемой модели (1.6). △, ○ — значения остаточной прочности $\sigma^э_{ост}$ при $\varphi = 0°$ и $45°$ соответственно, ——— по теории на основе (6), а — сопоставление значений $\sigma^э_{ост}$ и $\sigma^T_{ост}$, б — влияние исходного уровня повреждаемости η.

Возможность использования модели суммирования повреждений (1.6) для оценки разрушающих нагрузок реальных конструкций была проверена при испытании стыков оболочки из композиционного материала, рассчитанных по условию равнопрочности [14]. Испытания проводились на циклическое нагружение при напряжении $\sigma_a = 0.65\,\sigma_{вр}^т$ и длительное статическое нагружение (≈ 40 час), после чего снимались значения остаточной прочности $\sigma_{ост}$. Отклонение $\sigma^э_{ост}$ от $\sigma^T_{ост}$, рассчитанное по (1.6), было в пределах 10—12%, что можно считать вполне приемлемым.

Таблица 3

Результаты расчета по линейной гипотезе и модели (1.6) в *кгс/мм²*

№ п/п	Чередование видов нагружения	$\psi=0°$			$\psi=45°$		
		$\sigma^{*}_{ост}$	$\sigma^{T}_{ост}$	$\sigma^{T*}_{ост}$	$\sigma^{*}_{ост}$	$\sigma^{T}_{ост}$	$\sigma^{T*}_{ост}$
1	$\alpha_1\to\beta_2\to\gamma_3$	55.80	53.9	25.1	22.62	23.5	10.88
2	$\alpha_2\to\beta_2\to\gamma_2$	48.1	51.0	12.4	19.19	21.7	5.44
3	$\alpha_3\to\beta_3\to\gamma_3$	53.95	54.1	18.9	23.97	24.7	8.16
4	$\beta_3\to\alpha_2\to\gamma_3$	45.6	39.5	31.2	23.95	[illegible]	13.6
5	$\beta_2\to\alpha_3\to\gamma_3$	40.0	37.3	18.9	20.72	20.8	8.16
6	$\beta_2\to\alpha_1\to\gamma_3$	47.4	37.2	25.1	19.81	19.8	10.88
7	$\gamma_3\to\alpha_3\to\beta_3$	58.22	58.3	43.5	24.52	[illegible]	19.04
8	$\gamma_1\to\alpha_2\to\beta_2$	46.5	55.4	31.2	19.19	23.5	13.8
9	$\gamma_1\to\alpha_3\to\beta_3$	54.42	53.4	18.9	21.13	21.7	8.16

Выводы. 1. Рассмотренная совокупность предварительного вибрационного, повторно-статического и длительно-статического растяжения стеклотекстолита независимо от ориентации нагрузки φ в целом мало влияет на характер кривой деформирования при последующем растяжении. По сравнению с контрольными данными (образцов, ранее не подвергшихся силовому воздействию) среднее значение предела прочности и модуля упругости по начальному участку графика $\sigma\sim\varepsilon$ изменяется незначительно (до 5—10%). Однако в указанных пределах наблюдается определенная связь между остаточной прочностью и модулем упругости, с одной стороны, и очередностью видов, а также продолжительностью предварительного нагружения, с другой. Значительно более ощутимое влияние оставляет повторно-статическое растяжение, менее — вибрационное.

2. Для оценки суммирования повреждений стеклопластиков целесообразно использовать модель, учитывающую очередность и сочетание нагрузок в виде (1.6).

Институт механики
АН Армянской ССР
Московский авиационный
институт

Поступила 29 V 1978

Ն. Ն. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Ռ. Ա. ԱՐՈՒՏԿԻՆ, Վ. Վ. ՎՈՐՈԲԵՅ,
Մ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, Ա. Ն. ՂԱՀՐԱՄԱՆՅԱՆ

ԿՈՄՊՈԶԻՑԻՈՆ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ԷԼԵՄԵՆՏՆԵՐԻ ԿՎԱԶԻՍՏԱՏԻԿ ԵՎ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԲԵՌՆԱՎՈՐՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ ՎՆԱՍՎԱԾՔՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ

Ամփոփում

Ուսումնասիրված է նախնական ուժային կոմպլեքսի՝ երկարատև ստատիկ, վիբրացիոն և կրկնվող-ստատիկ բեռնվածքների ազդեցությունը ապա-

տեքստոլիտի մնացորդային ամրության և դեֆորմատիվության վրա։ Բացահայտված է մնացորդային ամրության և դեֆորմացիայի կապը նախնական բեռնավորման տեսքից, նրա կիրառման հաջորդականությունից և տևողությունից։ Ցույց է տրված, որ վնասվածքների գումարման գծային հիպոթեզը փորձի հետ տալիս է զգալի տարբերություն։ Որպես վնասվածքների գումարման մոդել առաջարկված է բազմանդամային կապակցություն, որը հաշվի է առնում նախնական բեռնավորման տեսքերը, նրանց ազդման հերթականությունը և տևողությունը։

DAMAGE SUMMATION FOR QUASI-STATIC AND VARIABLE LOADING OF ELEMENTS MADE OF COMPOSITIONAL MATERIALS

N. E. SARKISIAN, O. S. SIROTKIN, V. V. VOROBEY,
M. M. MARTIROSIAN, A. N. KAGRAMANIAN

S u m m a r y

Examined is the influence of the complex of preliminary force effect (vibrational, repectedly-static and prolonged-static) on the residual strength and deformability of fibreglass plastic. The dependence of the residual strength and the module of deformation upon succession and duration of the types of preliminary loading is revealed. The linear hypothesis of damage summation is shown to significantly differ from experiment. Polynomial dependence, taking account of succession and combination of the types of preliminary loading, is suggested as a model.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Freas A. D.* Effect of preloading and fatique on mechanical properties of glass-cloth plastic laminates. Trans. ASME, May, 1953.
2. *Mattign A., Haferkamp H.* Zum Alterungsverhalten glassfaser-verstarkter Kunststoffe. Kunststoffe, 1962, 52, No. 12.
3. *Гальперин М. Я.* Сопротивление усталости и рассеяние циклической долговечности некоторых стеклопластиков при изгибе. Машиноведение, 1966, № 3.
4. *Иванов О. Н., Валиулин А. Х., Иевечко В. Ф., Носелиани В. П.* Механические свойства стеклопластика на основе волокна полой структуры. Механика полимеров, 1971, № 2.
5. *Саркисян Н. Е.* О влиянии предварительного циклического нагружения на статическую прочность и деформативность стеклопластика. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1973, т. 24, № 1.
6. *Tanimoto Toshio, Amijma Sadao.* Progressive nature of fatique damage of glass-fiber reinforced plastics. „J. compos. Mater.", 1975, No. 9.
7. *Liber T., Daniel I. M.* Effects of tensile load cycling on advanced composite anle-ply laminates. „Proc. 31st. Annu. Conf. Reinforced Plast. Compos. Inst.", 1976.

8. *Захаров В. Н.* Влияние циклических нагрузок на статическую прочность стеклопластиков, применяемых в судостроении. В сб. Свойства полиэфирных стеклопластиков и методы их контроля. Л., Судостроение, 1970, вып. 2.
9. *Мартиросян М. М.* О ползучести стеклопластика СВАМ в ранний период после изготовления материала. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, 1964, т. 17, № 5.
10. *Мартиросян М. М.* О кратковременной ползучести стеклопластика СВАМ. Механика полимеров, 1965, № 2.
11. *Панфёров К. Е., Романенков И. Г., Абашидзе Г. С., Никитин В. Н., Львов Б. С., Шпаковская Е. И.* Атмосферостойкость стеклопластиков, находящихся под нагрузкой. Пластические массы, 1968, № 6.
12. *Романенков И. Г., Иванов Г. Н.* Прочность стеклотекстолита при действии долговременных нагрузок. Пластические массы, 1971, № 10.
13. *Schijve, Jacobs F.* Research on Cumulative Damage in Fatique of Riveted Aluminum Alloy Joints. „National Luctvaar laboratorium, Amsterdam Report", 1956; No. 1999.
14. *Сироткин О. С.* Проектирование и технология соединений элементов композиционных материалов. Пластические массы, 1976, № 3.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 2, 1979 Механика

Е. В. КОВАЛЕНКО

ОБ ЭФФЕКТИВНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОГО ОСНОВАНИЯ С ТОНКИМ УСИЛИВАЮЩИМ ПОКРЫТИЕМ

Рассмотрено интегральное уравнение второго рода на конечном интервале с ядром, зависящим от разности аргументов. К уравнению такого типа приводится ряд плоских контактных задач для линейно-деформируемых оснований, поверхность которых усилена тонким упругим покрытием.

В данной работе установлена разрешимость указанного уравнения в функциональных пространствах, важных в приложениях, и построено решение в виде ряда Фурье по полиномам Лежандра.

В качестве примера рассмотрена контактная задача теории упругости о вдавливании штампа в упругую полосу, покрытую «винклеровскими» пружинами и лежащую без трения на жестком основании. Результаты работы могут также найти применение в плоских контактных задачах при наличии абразивного износа [1].

1. Пусть поверхность линейно-деформируемого основания усилена по всей длине $|x|<\infty$ тонким упругим слоем, работающим по типу основания Фусса-Винклера. Допустим теперь, что такое слоистое основание нагружено некоторой распределенной нормальной нагрузкой $q(x)$ на участке $|x|\leqslant a$. Под действием ее граничные точки основания получат перемещение $v(x)$, которое складывается из перемещения $v_1(x)$, возникающего благодаря деформации линейно-деформируемого основания, и перемещения $v_2(x)$, возникающего благодаря чисто местным деформациям покрытия.

Известно, что для линейно-деформируемого основания [2, 3] функция $v_1(x)$ имеет вид

$$v_1(x) = -\frac{1}{\pi\theta_1}\int_{-a}^{a} q(\xi)\,d\xi\int_0^{\infty}\frac{L_1(u)}{u}\cos\left(u\,\frac{\xi-x}{\mu}\right)du$$

где θ_1 — величина, характеризующая физико-механические свойства линейно-деформируемого основания, μ — характерный геометрический параметр.

Функция $v_2(x)$ в общем случае может быть представлена в форме

$$v_2(x) = -kq(x)-\frac{1}{\pi\theta_2}\int_{-a}^{a} q(\xi)\,d\xi\int_0^{\infty}\frac{L_2(u)}{u}\cos\left(u\,\frac{\xi-x}{\mu}\right)du$$

Здесь величины k, θ_2 характеризуют упругие свойства покрытия.

Таким образом, функция $v(x)$, характеризующая перемещения граничных точек всего основания будет иметь вид

$$v(x) = -kq(x) + \frac{1}{\pi\theta_1}\int_{-a}^{a} q(\xi)\,d\xi \int_0^\infty \frac{L(u)}{u}\cos\left(u\,\frac{\xi - x}{\mu}\right)du \qquad (1.1)$$

$$L(u) = L_1(u) + lL_2(u), \quad l = \frac{\theta_2}{\theta_1} \qquad (1.2)$$

Для ряда практически важных случаев $L(u)/u$ в (1.2) удовлетворяет следующим условиям:

1) функция $L(u)/u$ непрерывна, вещественна и четна на оси $|u| < \infty$,

2) функция

$$\frac{L(u)}{u} > 0 \quad (|u| < \infty) \qquad (1.3)$$

3) функция

$$L(u) = Au + O(u^2)\ (u \to 0), \quad \frac{L(u)}{u} = Cu^{-2\gamma}[1 + O(u^{-\delta})] \qquad (1.4)$$

$$(u \to \infty)$$

$$0 < \gamma < 1$$

A, C, γ, δ — постоянные, причем $\delta > \gamma$ при $\gamma > 0.5$, $\delta > 1 - \gamma$ при $\gamma < 0.5$.

Полагая, что в (1.1) $v(x) = g(x)$ — известная функция (задача о штампе), с учетом обозначений $a^{-1}k\theta_1 = p$, $x = ax'$, $\xi = a\xi'$, $\lambda = \mu/a$, $q(x) = \varphi(x')$, $f(x') = a\theta_1 g(x)$ (штрихи в дальнейшем будем опускать), получим интегральное уравнение контактной задачи в безразмерных переменных

$$p\varphi(x) + \int_{-1}^{1} \varphi(\xi)K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right)d\xi = \pi f(x) \quad (|x| < 1)$$

$$K(t) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u}\cos ut\,du \quad \left(t = \frac{\xi - x}{\lambda}\right) \qquad (1.5)$$

Исследуем далее структуру решения интегрального уравнения (1.5).

2. Введем некоторые определения для необходимых в дальнейшем пространств.

1. Обозначим через H_γ множество функций $h(x)$ таких

$$\|h\|_H^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(u)}{u}\,|H(u)|^2\,du < \infty, \qquad H(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,e^{iux}\,dx \qquad (2.1)$$

Очевидно [4], элементы из H_γ принадлежат некоторой шкале гильбертовых пространств.

2. $L_r(a, b)$ — пространство абсолютно суммируемых на $[a, b]$ со степенью $r \geq 1$ функций с обычной нормой.

3. $C(a, b)$ — пространство непрерывных на $[a, b]$ функций.

4. l_r — пространство абсолютно суммируемых со степенью r числовых последовательностей. В работе В. А. Бабешко [4] доказаны следующие:

Лемма 2.1. Любое пространство L_r, $(\gamma + 0.5)^{-1} < r < \infty$, $\gamma < 0.5$ и $1 < r < \infty$, $0.5 < \gamma$ вложено в H_γ.

Для исследования структуры решения уравнения (1.5) изучим свойства функции $K(t)$.

Лемма 2.2. Справедливы при $t \to 0$ оценки

$$K(t) = O(t^{2\gamma-1}), \quad \gamma < 0.5; \quad K(t) = O(\ln |t|), \quad \gamma = 0.5$$
$$K(t) = O(1), \ \gamma > 0.5$$

При $|t| > \varepsilon > 0$ функция $K(t)$ непрерывна.
На основании леммы 2.2 доказывается теорема [4].

Теорема 2.1. Оператор

$$R\varphi = \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi \tag{2.2}$$

действует из L_r в $C(-T, T)$ вполне непрерывно. Здесь $(2\mu)^{-1} < r < \infty$, $\gamma \leqslant 0.5$; $1 < r < \infty$, $0.5 < \gamma$; $T < \infty$.

Теорема 2.2. В пространстве $L_2(-1, 1)$ $(0.25 < \gamma < 1)$ решение уравнения (1.5) существует и единственно при любом значении параметров p, $\lambda \in (0, \infty)$, если $f(x) \in L_2(-1, 1)$.

Для доказательства умножим (1.5) на $\varphi(x) \in L_2(-1, 1)$ и проинтегрируем по всей оси. Получим

$$p\|\varphi\|_{L_2}^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|_{H_\gamma} = \int_{-1}^{1} f(x)\varphi(x)\,dx \tag{2.3}$$

Здесь нужно учесть, что $\varphi(x) = 0$ при $|x| > 1$.

В силу теоремы 2.1 и леммы 2.1 соотношение (2.3) корректно. Из теоремы 2.1 следует, что к уравнению (1.5) применима теория Фредгольма [5], а в силу (2.3) имеем: если $f(x) = 0$, $x \in [-1, 1]$, то $\varphi(x) = 0$, $|x| < \infty$. Теорема доказана. Далее ограничимся изучением лишь четного случая, то есть предположим, что функция $f(x)$, а следовательно, и $\varphi(\xi)$ в (1.5) — четные. Рассмотрение нечетного случая можно провести аналогичным образом.

3. Будем искать функцию $\varphi(\xi)$ в (1.5) в виде следующего ряда по нормированным полиномам Лежандра [6]:

$$\varphi(\xi)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m P_{2m}^{*}(\xi), \qquad P_n^{*}(\xi)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(\xi) \tag{3.1}$$

Известно [5], что они составляют базис в пространстве $L_2(-1,1)$. В силу теоремы 2.2 ряд (3.1) сходится по норме пространства $L_2(-1,1)$, а соответствующие последовательности $\{a_i\}\in l_2$ ввиду равенства Парсеваля [5]. Функции $K(t)$ и $f(x)$ разложим соответственно в двойной и одинарный ряды по указанной системе полиномов. Будем иметь

$$K(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(\lambda)\,P_{2i}^{*}(\xi)\,P_{2j}^{*}(x) \tag{3.2}$$

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty} b_m P_{2m}^{*}(x) \tag{3.3}$$

В силу леммы 2.2 и ограничений, наложенных на функцию $f(x)$ в теореме 2.2, ряды (3.2), (3.3) сходятся по норме пространства $L_2(-1,1)$.

Воспользовавшись известным [6] свойством ортогональности полиномов Лежандра, получим

$$c_{ij}(\lambda)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)P_{2i}^{*}(\xi)\,P_{2j}^{*}(x)\,d\xi\,dx \tag{3.4}$$

$$b_m=\int_{-1}^{1} f(x)\,P_{2m}^{*}(x)\,dx \tag{3.5}$$

Подставив в (3.4) $K(t)$ в форме второго равенства (1.5) и используя интеграл [6]

$$\int_0^1 P_{2n}(x)\cos ax\,dx=\frac{(-1)^n\,\pi\Gamma(2n+1)}{(2n)!\,\Gamma(1/2)\sqrt{2a}}\,J_{1/2+2n}(a)$$

представим коэффициенты $c_{ij}(\lambda)$ в виде

$$c_{ij}(\lambda)=(-1)^{i+j}\sqrt{4i+1}\sqrt{4j+1}\,(\pi\lambda)\int_0^{\infty}\frac{L(u)}{u^2}\,J_{1/2+2i}\left(\frac{u}{\lambda}\right)J_{1/2+2j}\left(\frac{u}{\lambda}\right)du \tag{3.6}$$

Лемма 3.1. Если функция $f(x)\in L_2(-1,1)$, то любому решению $\varphi(x)$ из класса $L_2(-1,1)$ уравнения (1.5) соответствует последовательность чисел $\{a_i\}$ из класса l_2, удовлетворяющая бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$a_n = -\frac{1}{p}\sum_{m=0}^{\infty} c_{mn}(\lambda)\, a_m + \frac{\pi}{p}\, b_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.7}$$

Наоборот, если функция $f(x) \in L_2(-1, 1)$, то любому решению $\{a_n\}$ из класса l_2 системы (3.7) соответствует решение $\varphi(x) \in L_2(-1, 1)$ уравнения (1.5) вида (3.1).

Для доказательства, с учетом теоремы 2.2, подставим в интегральное уравнение (1.5) функции $\varphi(\xi)$, $f(x)$, $K(t)$ в виде (3.1)—(3.3) и вычислим интегралы, используя свойство ортогональности полиномов Лежандра [6]. Получим соотношение, в левой и правой частях которого стоят ряды по четным полиномам Лежандра. Приравнивая коэффициенты обеих частей при полиномах одинакового номера, получим бесконечную систему (3.7). Легко производятся и обратные преобразования с учетом соотношения $\|\varphi\|_{L_2(-1,1)} = \|\varphi\|_{l_2}$.

Теорема 3.1. Если функция $f(x) \in L_2(-1, 1)$, то оператор, стоящий в правой части (3.7), действует в пространстве l_2 и является в нем вполне непрерывным [5] при всех $p, \lambda \in (0, \infty)$.

Учитывая поведение ядра интегрального уравнения (1.5) (лемма 2.2) и равенство Парсеваля [5] $\|\varphi\|_{L_2(-1,1)} = \|\varphi\|_{l_2}$ нетрудно показать, что при

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{mn}^2(\lambda) < \infty, \quad \{f_k\} \in l_2 \tag{3.8}$$

Отсюда следует, что оператор, стоящий в правой части (3.7), действует в пространстве последовательностей l_2 и является там вполне непрерывным при $p, \lambda \in (0, \infty)$. Поэтому к системе применима альтернатива Гильберта [7] о разрешимости бесконечных систем. Поскольку соответствующее системе (3.7) решение интегрального уравнения (1.5) существует и единственно в пространстве $L_2(-1, 1)$, то в силу леммы 3.1 существует единственное нетривиальное решение бесконечной алгебраической системы (3.7), принадлежащее пространству l_2, которое можно найти с любой степенью точности методом последовательных приближений или методом редукции.

Решив систему (3.7), найдем затем по формулам (3.1) решение интегрального уравнения (1.5). При этом обобщенная сила вычисляется по формуле

$$P = \int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, d\xi = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \tag{3.9}$$

4. В качестве примера рассмотрена плоская контактная задача о вдавливании штампа с плоским прямолинейным основанием ширины $2a$ в упругую полосу толщины h, покрытую «винклеровскими» пружинами [8, 9], с упругими характеристиками ν (коэффициент Пуассона) и G (модуль сдвига), лежащую без трения на жестком основании. При этом

$$L_1(u) = L(u) = \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u}, \quad L_2(u) = 0$$

$\lambda = ha^{-1}$, $A = 0.5$, $\theta_1 = G(1-\nu)^{-1}$, k – коэффициент постели основания Фусса-Винклера.

Решение задачи может быть получено методом, изложенным в п. 3. При этом значение коэффицинета p в (1.5) бралось равным единице. Коэффициенты разложения $c_{mn}(\lambda)$ подсчитывались с четырьмя точными знаками после запятой при различных значениях λ и занесены в таблицу 1.

Таблица 1

mn	$\lambda=2$	$\lambda=1$	$\lambda=1/2$	mn	$\lambda=2$	$\lambda=1$	$\lambda=1/2$
00	2.4544	1.4159	0.7477	22	0.4497	0.4482	0.4177
01	−0.3073	−0.1960	−0.0742	03			−0.0100
02	−0.0343	−0.0390	−0.0395	13			−0.0330
11	0.8262	0.7714	0.5805	23			−0.1122
12	−0.1863	−0.1799	−0.1312	33			0.3049

В табл. 2 занесены значения $\varphi(0)$ при различных λ и величины обобщенных P. Отметим, что погрешность приведенных в табл. 2 результатов не превосходит 1.5%.

Таблица 2

$\varphi(0)$			P		
$\lambda=2$	$\lambda=1$	$\lambda=1/2$	$\lambda=2$	$\lambda=1$	$\lambda=1/2$
0.860	1.258	1.774	2.253	3.037	3.949

При этом в урезанной системе (3.7) достаточно было взять не более четырех уравнений.

Автор благодарит В. М. Александрова за ценные советы и помощь.

НИИ механики и прикладной математики
Ростовского государственного
университета

Поступила 23 VI 1978

Ե. Վ. ԿՈՎԱԼԵՆԿՈ

ՔԱՐԱԿ ՈՒԺԵՂԱՑՆՈՂ ԾԱԾԿՈՒՅԹՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑՎՈՂ ՀԻՄՔԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԷՖԵԿՏԻՎ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է վերջավոր *[illegible]* վրա փաթեթի տեղի *[illegible]* *[illegible]* հավասարումների հատուկ դաս, որոնց կորիզները պարունակում են

երկրաչափական կամ ֆիզիկական $\lambda \in (0, \infty)$ պարամետր։ Այդպիսի հավասարումների են բերվում բարակ առաձգական ծածկույթներով ուժեղացված մակերևույթներով գծային դեֆորմացվող հիմքերի համար, մի շարք հարթ կոնտակտային խնդիրներ։

Կիրառությունների համար կարևոր ֆունկցիաների տարածություններում ցույց է տրված ինտեգրալ հավասարումների լուծելիությունը և կառուցված է էֆեկտիվ լուծում λ անչափ պարամետրի կամայական արժեքների համար։

ON THE EFFECTIVE METHOD OF SOLVING CONTACT PROBLEMS FOR A LINEAR-STRAINED BASIS WITH A THIN REINFORCING COAT

E. V. KOVALENKO

Summary

Investigated is the special class of integral equations of the second kind of a convolution type on the finite interval whose kernels involve some geometric or physical parameter $\lambda \in (0, \infty)$. To such equations is reduced a series of plane contact problems for linear-strained bases whose surface is reinforced with a thin elastic coat.

The solvability of the integral equations in spaces of functions, significant in supplements, is proved and the solution, effective for any value of the dimensionless parameter λ, is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости при наличии износа. ПММ, 1976, т. 40, вып. 6.
2. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
3. Развитие теории контактных задач в СССР. М., «Наука», 1976.
4. *Бабешко В. А.* Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физике. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
5. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.
6. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., ГИФМЛ, 1963.
7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., ГИФМЛ, 1959.
8. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М., Гостехиздат, 1949.
9. *Попов Г. Я.* Об интегральных уравнениях теории упругости с разностными и суммационными ядрами. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.