ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1979

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 1, 1979 Механика

Ф. С. ТОРОСЯН

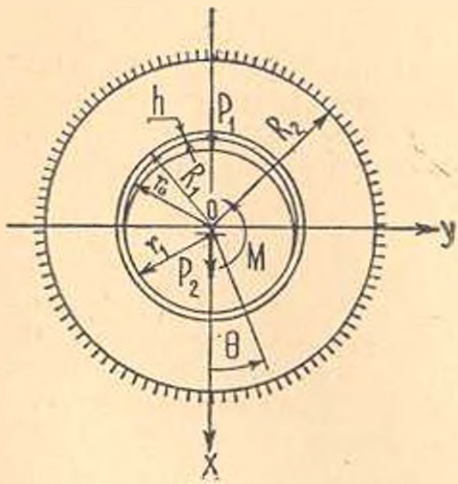
О ВНУТРЕННЕМ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ КРУГОВОГО ДИСКА И КРУГОВОГО КОЛЬЦА, ПОДКРЕПЛЕННОГО НА ОБВОДЕ ОТВЕРСТИЯ ТОНКИМ КОЛЬЦЕВЫМ ПОКРЫТИЕМ

Контактные задачи о взаимодействии кругового диска и бесконечной пластины с круговым отверстием близких радиусов рассматривались в работах [1—9]. В ряде практически важных случаев представляет значительный интерес также получение решений этих же задач, когда вместо бесконечной пластины с круговым отверстием рассматривается круговое кольцо. В настоящей работе исследуется контактная задача о вдавливании кругового упругого диска на внутренний контур кругового упругого кольца, когда этот контур усилен приваренным или приклеенным к нему тонким упругим кольцевым покрытием. Предполагается, что внешний контур кругового кольца жестко закреплен. В качестве физической модели усиливающего упругого покрытия принимается модель напряженного состояния тонких цилиндрических оболочек, основанной на известных гипотезах Кирхгофа-Лява [10]. Решение исследуемой задачи сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода. На основе известного аппарата ортогональных многочленов Якоби получено эффективное решение разрешающего уравнения. Рассмотрены частные случаи. Получены числовые результаты.

§ 1. *Постановка задачи и вывод разрешающего уравнения.* Пусть упругое круговое кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями радиусов R_1 и R_2 $(R_1 < R_2)$, жестко закреплено вдоль своей внешней границы, а вдоль внутренней границы усилено приваренным к нему упругим кольцевым покрытием малой толщины h $(h/R_1 \leqslant 1/20)$. Пусть далее внутрь этого кольца вставлен упругий диск радиуса r_1, который прижимается к обводу кольца силами P_1, P_2 и скручивается моментом M (фиг. 1). Будем учитывать также силу тяжести диска. При этом разность $\varepsilon = r_0 - r_1$ $(r_0 = R_1 - h)$ предполагается величины порядка упругих перемещений. Кроме того, считается, что эти тела находятся в условиях плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния. Задача заключается в определении законов распределения контактных напряжений под диском и размеров области контакта.

Введем следующие обозначения. Обозначим через $q_j(\theta)$, $\tau_j(\theta)$ $(j = 1, 2)$ соответственно нормальные и тангенциальные контактные напряжения, действующие под диском $(j = 1)$ и на линии соединения усиливающего покрытия с основанием $(j = 2)$. Далее, через $v_r^{(j)}$, $v_1^{(j)}$

($j = 1, 2$) обозначим радиальные и тангенциальные компоненты упругих перемещений граничных точек диска ($j = 1$) и отверстия радиуса R_1 кольца ($j = 2$). Участком контакта пусть будет $[-\theta_1, \theta_2]$.



Фиг. 1.

Приняв те же физические предположения [10] относительно усиливающего покрытия, что и в [9], и предполагая, что во всей зоне контакта действуют только силы сцепления, придем к тем же условиям, имеющим место в области контакта, что и в [9]

$$
\begin{aligned}
v_r^{(1)} + v_r^{(2)} &= \delta\cos\theta - r_1\psi\sin\theta - \varepsilon(1-\cos\theta) \\
v_\theta^{(1)} - v_\theta^{(2)} &= \delta\sin\theta - 2r_1\psi\sin^2\frac{\theta}{2}
\end{aligned}
\qquad (-\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) \qquad (1.1)
$$

где δ — жесткое смещение диска в направлении оси ox, ψ — угол поворота диска относительно первоначальной точки касания.

Далее, пользуясь известным комплексным представлением решения плоской задачи теории упругости [11], легко получить, что компоненты перемещений $v_r^{(j)}$, $v_\theta^{(j)}$ ($j = 1, 2$) выражаются формулами

$$
v_r^{(1)} = \frac{(\varkappa_1+1)r_1}{4\pi\mu_1}\int_{-\theta_1}^{\theta_2} q_1(\xi)\ln 2\left|\sin\frac{\theta-\xi}{2}\right| d\xi +
$$

$$
+ \frac{(\varkappa_1-1)r_1}{8\mu_1}\int_{-\theta_1}^{\theta_2}\tau_1(\xi)\,\mathrm{sign}(\theta-\xi)\,d\xi - \int_{-\theta_1}^{\theta_2} q_1(\xi)K^{(1)}(\theta-\xi)\,d\xi +
$$

$$
+ \int_{-\theta_1}^{\theta_2}\tau_1(\xi)K^{(2)}(\theta-\xi)\,d\xi + \frac{r_1}{2\pi\mu_1}\int_{-\theta_1}^{\theta_2} q_1(\xi)\cos(\theta-\xi)\,d\xi + f_1(\theta)
$$

$$
(-\pi < \theta \leq \pi)
$$

$$v_\theta^{(1)} = \frac{(\varkappa_1 + 1) r_1}{4\pi\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \tau_1(\xi) \ln 2 \left| \sin \frac{\theta - \xi}{2} \right| d\xi -$$

$$- \frac{(\varkappa_1 - 1) r_1}{8\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} q_1(\xi) \operatorname{sign}(\theta - \xi)\, d\xi - \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \tau_1(\xi) K^{(1)}(\theta - \xi)\, d\xi -$$

$$- \int_{-\theta_1}^{\theta_1} q_1(\xi) K^{(2)}(\theta - \xi)\, d\xi - \frac{r_1}{2\pi\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \tau_1(\xi) \cos(\theta - \xi)\, d\xi + f_2(\theta)$$

$$2\mu_2 (v_r^{(2)} + i v_\theta^{(2)}) = a_1 R_1 B_0 + a_2 R_1 \overline{B}_1 e^{-i\theta} + a_4 R_1 (B_{-1} e^{-i\theta} + B_1 e^{i\theta}) -$$

$$- (1 - a_2) R_1 \overline{B}_0 - (1 - 2a_2) R_1 \frac{\overline{B}_{-1}}{2} e^{i\theta} + R_1 \sum_{k=2}^{\infty} C_k^{(2)} (B_{-k} e^{-ik\theta} + B_k e^{ik\theta}) -$$

$$- \varkappa_2 R_1 \sum_{k=2}^{\infty} (1 - C_k^{(1)}) \frac{\overline{B}_k}{k - 1} e^{-ik\theta} - R_1 \sum_{k=2}^{\infty} (1 - C_k^{(3)}) \frac{\overline{B}_{-k}}{k + 1} e^{ik\theta}$$

где

$$B_k = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [q_2(\xi) - i\tau_2(\xi)] e^{-ik\xi} d\xi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

При этом имеют место условия равновесия диска

$$r_1 \int_{-\theta_1}^{\theta_1} [q_1(\xi) - i\tau_1(\xi)] e^{-i\xi} d\xi = P_1 + P_2 + G_1, \qquad r_1^2 \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \tau_1(\xi)\, d\xi = M \qquad (1.2)$$

Здесь $\varkappa_j = 3 - 4\nu_j$ ($j = 1, 2$) — при плоской деформации и $\varkappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$ — при обобщенном плоском напряженном состоянии, $\mu_j = E_j/2(1 + \nu_j)$, а E_j и ν_j — соответственно модули упругости и коэффициенты Пуассона для материалов диска ($j = 1$) и кольца ($j = 2$). Кроме того, введены обозначения

$$K^{(1)}(\theta - \xi) = \frac{(\varkappa_1 + 1) r_1}{4\pi\mu_1} R_{11}(\theta - \xi) + \frac{(\varkappa_1 - 1) r_1}{8\pi\mu_1} R_{12}(\theta - \xi)$$

$$K^{(2)}(\theta - \xi) = \frac{(\varkappa_1 + 1) r_1}{4\pi\mu_1} R_{21}(\theta - \xi) +$$

$$+ \frac{(\varkappa_1 - 1) r_1}{8\pi\mu_1} R_{22}(\theta - \xi) - \frac{(\varkappa_1 - 1) r_1}{8\pi\mu_1} (\theta - \xi)$$

где

$$R_{11}(\theta-\xi)=2\sin^2\frac{\theta-\xi}{2}\ln 2\left|\sin\frac{\theta-\xi}{2}\right|$$

$$R_{12}(\theta-\xi)=\sin(\theta-\xi)(\pi-|\theta-\xi|)\operatorname{sign}(\theta-\xi)$$

$$R_{21}(\theta-\xi)=\sin(\theta-\xi)\ln 2\left|\sin\frac{\theta-\xi}{2}\right|$$

$$R_{22}(\theta-\xi)=-2\sin^2\frac{\theta-\xi}{2}(\pi-|\theta-\xi|)\operatorname{sign}(\theta-\xi)$$

Далее,

$$f_1(\theta)=\frac{(\varkappa_1+1)r_1}{8\pi\mu_1}\int\limits_{-\theta_1}^{\theta_1}q_1(\xi)\,d\xi+\frac{(\varkappa_1+1)P_1}{8\pi\mu_1}-\frac{P_1}{2\pi\mu_1}\cos\theta-$$

$$-\frac{\varkappa_1+1}{4\pi\mu_1}P_1\cos\theta\ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)-\frac{(\varkappa_1-1)P_1}{8\pi\mu_1}\theta\sin\theta-$$

$$-\frac{P_2}{2\pi\mu_1(1+\varkappa_1)}\cos\theta+\frac{G_1}{16\pi\mu_1}(\varkappa_1+\varkappa_1')\cos\theta-\frac{3G_1}{4\pi\mu_1}\cos\theta$$

$$f_2(\theta)=\frac{\varkappa_1+1}{4\pi\mu_1r_1}M+\frac{\varkappa_1+1}{4\pi\mu_1}P_1\sin\theta\ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)-\frac{(\varkappa_1-1)P_1}{8\pi\mu_1}\theta\cos\theta+$$

$$+\frac{P_2}{2\pi\mu_1(1+\varkappa_1)}\sin\theta+\frac{G_1}{16\pi\mu_1}(\varkappa_1+\varkappa_1')\sin\theta-\frac{G_1}{4\pi\mu_1}\sin\theta$$

$$(-\pi<\theta\leqslant\pi)$$

$$G_1=\pi r_1^2g\rho_1,\qquad a_1=\frac{(\varkappa_2+1)(r-1)}{(\varkappa_2r+1)^2-(r-1)^2},\qquad a_2=\frac{(1+\varkappa_2)(\varkappa_2r+1)}{(\varkappa_2r+1)^2-(r-1)^2}$$

$$a_3=\frac{2(r-1)^2}{(1+\varkappa_2)(\varkappa_2r^2+1)}-\frac{\varkappa_2}{1+\varkappa_2}\ln r,\quad a_4=\frac{r-1}{\varkappa_2r^2+1},\quad a_5=\frac{1+\varkappa_2}{2(\varkappa_2r^2+1)}$$

$$C_k^{(1)}=\frac{1+\varkappa_2}{\varkappa_2}\frac{\overset{*}{D}_k}{D_k},\quad C_k^{(2)}=(1+\varkappa_2)(r-1)/D_k,\quad C_k^{(3)}=(1+\varkappa_2)\frac{D_k'}{D_k}$$

где

$$r=(R_2/R_1)^2,\quad \overset{*}{D}_k=(k^2-1)(r-1)^2+\varkappa_2r^{-k+1}+\varkappa_2^2r^2$$
$$D_k'=1+\varkappa_2r^{-k+1}$$

$$D_k=(k^2-1)(r-1)^2+\varkappa_2r^{k+1}+\varkappa_2r^{-k+1}+\varkappa_2^2r^2+1,\quad (k=2,3,\ldots)$$

g — ускорение силы тяжести, ρ_1 — плотность материала диска, $\varkappa_1=4\nu_1-1$ — при плоской деформации и $\varkappa_1'=(3\nu_1-1)/(\nu_1+1)$ — при обобщенном плоском напряженном состоянии.

Функции $K^{(j)}(\theta - \xi)$ $(j = 1, 2)$ — непрерывные в области $-\theta_1 \leqslant \theta,\ \xi \leqslant \theta_2$ и имеют квадратично суммируемые частные производные первого порядка.

Далее, для исключения $q_2(\theta)$ и $\tau_2(\theta)$ из системы (1.1), содержащей неявно $q_2(\theta)$ и $\tau_2(\theta)$, используем уравнения равновесия усиливающего покрытия (оболочки) в перемещениях, приведенные в [9]. Выполняя те же операции, что и в [9], получим соотношения

$$\operatorname{Re} B_0 = \operatorname{Re} A_0 [1 + D'(1 - a_1 - a_2)], \quad \operatorname{Im} B_0 = \operatorname{Im} A_0$$

$$B_1 = A_1, \quad B_{-1} = [A_{-1} + 2(D + D') a_4 \overline{A}_1] / [1 + (D + D')(1 - 2a_3)]$$

$$B_k = \frac{d_k^{(1)}}{d_k} A_k + \frac{d_k^{(2)}}{d_k} \overline{A}_{-k}, \qquad B_{-k} = \frac{d_k^{(3)}}{d_k} \overline{A}_k + \frac{d_k^{(4)}}{d_k} A_{-k}, \quad (k = 2, 3, \ldots)$$

где

$$A_k = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} [q_1(\xi) - i\tau_1(\xi)] e^{-ik\xi} d\xi, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$D = E_0 h^3 / 24 R_1^3 \mu_2$, $D' = (2\mu_0 + \lambda_0) h / 2R_1 \mu_2$, $2\mu_0 + \lambda_0 = E_0(1 - \nu_0)/(1 + \nu_0)(1 - 2\nu_0)$ — при плоской деформации и $2\mu_0 + \lambda_0 = E_0/(1 - \nu_0^2)$ — при обобщенном плоском напряженном состоянии, E_0, ν_0 — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона для материала усиливающего покрытия,

$$d_k^{(1)} = -DC_k^{(2)} k^2 (k^2 - 1) + D(1 - C_k^{(3)}) k^2 (k + 1) +$$
$$+ D' C_k^{(2)} (k^2 - 1) + D'(1 - C_k^{(3)})(k + 1) + 2$$

$$d_k^{(2)} = DC_k^{(2)} k^2 (k - 1)^2 - D(1 - C_k^{(3)}) k^2 (k - 1) +$$
$$+ D' C_k^{(2)} (k - 1)^2 + D'(1 - C_k^{(3)})(k - 1)$$

$$d_k^{(3)} = DC_k^{(2)} k^2 (k + 1)^2 - \varkappa_2 D(1 - C_k^{(1)}) k^2 (k + 1) +$$
$$+ D' C_k^{(2)} (k + 1)^2 + \varkappa_2 D'(1 - C_k^{(1)})(k + 1)$$

$$d_k^{(4)} = -DC_k^{(2)} k^2 (k^2 - 1) + \varkappa_2 D(1 - C_k^{(1)}) k^2 (k - 1) +$$
$$+ D' C_k^{(2)} (k^2 - 1) + \varkappa_2 D'(1 - C_k^{(1)})(k - 1) + 2$$

$$d_k = 2\varkappa_2 DD'(1 - C_k^{(1)})(1 - C_k^{(3)}) k^2 (k^2 - 1) -$$
$$- 2DD'(C_k^{(2)})^2 k^2 (k^2 - 1)^2 + \varkappa_2 D(1 - C_k^{(1)}) k^2 (k - 1) +$$
$$+ D(1 - C_k^{(3)}) k^2 (k + 1) - 2DC_k^{(2)} k^2 (k^2 - 1) +$$
$$+ \varkappa_2 D'(1 - C_k^{(1)})(k - 1) + D'(1 - C_k^{(3)})(k + 1) +$$
$$+ 2D' C_k^{(2)} (k^2 - 1) + 2 \neq 0$$

В конечном итоге придем к интегральному уравнению [9] (при $\mu_1 < \infty$)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[\ln\frac{1}{2\left|\sin\frac{t-s}{2}\right|} - i\frac{\pi}{2}\,\text{th}\,\pi\mu^{(j)}\,\text{sign}\,(t-s)\right]\chi_0(s)\,ds +$$

$$+ 2q^{(j)}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\frac{1}{2\left|\sin\frac{t-s}{2}\right|}\,\text{Re}\,[\chi_0(s)]\,ds +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} K_1^{(j)}(t-s)\,\chi_0(s)\,ds + \int_{-\pi}^{\pi} K_2^{(j)}(t-s)\,\overline{\chi_0(s)}\,ds = f_0^{(j)}(t) \tag{1.3}$$

$$(j = 1,\ 2,\ 3), \quad (-\pi \leqslant t,\ s \leqslant \pi)$$

где индекс $j = 1$ относится к общему случаю ($D \neq 0$, $h \neq 0$), $j = 2$ относится к случаю, когда усиливающее покрытие настолько гибкое, что пренебрегается его изгибной жесткостью ($D = 0$, $h \neq 0$) а $j = 3$, когда на ободе отверстия кольца отсутствует усиливающее покрытие ($D = 0$, $h = 0$).

Новые переменные t, s, входящие в (1.3), связаны со старыми соотношениями

$$t = \theta + \beta, \quad s = \xi - \beta, \quad \alpha = (\theta_1 + \theta_2)/2, \quad \beta = (\theta_1 - \theta_2)/2$$

В (1.3) введены также обозначения

$$q^{(1)} = q^{(3)} = 0, \; q^{(2)} = 2g_0\varkappa_2/(\varkappa_2 + 1), \quad \text{th}\,\pi\mu^{(1)} = \text{th}\,\pi\mu^{(2)} = -(\varkappa_1 - 1)/(\varkappa_1 + 1)$$

$$\text{th}\,\pi\mu^{(3)} = (\varkappa_2 - 1)[(\varkappa_1 - 1)R_1\mu_2/(\varkappa_1 - 1)r_1\mu_1 - 1]/[1 + (\varkappa_2 + 1)g_0](\varkappa_1 + 1) = \lambda$$

$$\chi_0(t) = p_0(t) + i\tau_0(t) - R_1[q_1(t-\beta) + i\tau_1(t-\beta)]/4\pi\mu_2\varepsilon$$

$$K_1^{(j)}(t-s) = 4\pi\mu_1 K^{(1)}(t-s)/(\varkappa_1 + 1)r_1 + g_0\sum_{k=2}^{\infty} a_k^{(1j)}\cos k(t-s) +$$

$$+ 2a_{13}^{(j)}g_0\cos(t-s) + q^{(j)}R_{11}(t-s) - \frac{1}{2}q^{(j)}\cos(t-s) +$$

$$+ i\left[4\pi\mu_1 K^{(2)}(t-s)/(\varkappa_1 + 1)r_1 + g_0\sum_{k=2}^{\infty} a_k^{(2j)}\sin k(t-s) + q^{(j)}R_{21}(t-s)\right]$$

$$(j = 1,\ 2)$$

$$K_2^{(j)}(t-s) = g_0\sum_{k=2}^{\infty} a_k^{(3j)}\cos k(t-s) - [2(\varkappa_1 + 1) + 2a_{14}^{(j)}g_0]\cos(t-s) +$$

$$+ q^{(j)}R_{11}(t-s) + i\left[g_0\sum_{k=2}^{\infty} a_k^{(4j)}\sin k(t-s) + q^{(j)}R_{21}(t-s)\right] \quad (j = 1,\ 2)$$

$$K_1^{(3)}(t-s) = R_{11}(t-s) - \frac{\lambda}{2} R_{12}(t-s) -$$

$$- g_1 \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\varkappa_2 C_k^{(1)}}{k-1} + \frac{C_k^{(3)}}{k+1} \right) \cos k(t-s) - 2a_5 g_1 \cos(t-s) +$$

$$+ i \left[R_{21}(t-s) - \frac{\lambda}{2} R_{22}(t-s) + \frac{\lambda}{2}(t-s) + \right.$$

$$\left. + g_1 \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\varkappa_2 C_k^{(1)}}{k-1} - \frac{C_k^{(3)}}{k+1} \right) \sin k(t-s) \right]$$

$$K_2^{(3)}(t-s) = -2g_1 \sum_{k=2}^{\infty} C_k^{(2)} \cos k(t-s) -$$

$$- [2(\varkappa_1 + 1) g_0 - 2a_4] g_1 \cos(t-s)$$

Здесь

$$a_{13}^{(1)} = (1/2 - a_5)/[1 + (D + D')(1 - 2a_5)]$$

$$a_{14}^{(1)} = a_4/[1 + (D + D')(1 - 2a_5)], \qquad a_{13}^{(2)} = a_{13}^{(1)}\big|_{D=0}, \qquad a_{14}^{(2)} = a_{14}^{(1)}\big|_{D=0}$$

$$g_0 = R_1 \nu_2 / r_1 \nu_1 (1 + \varkappa_1), \quad g_1 = g_0/[1 + (1 + \varkappa_2) g_0]$$

$$a_k^{(11)} = -C_k^{(2)} \frac{d_k^{(2)} + d_k^{(3)}}{d_k} + (1 - C_k^{(1)}) \frac{\varkappa_2 d_k^{(1)}}{(k-1) d_k} + (1 - C_k^{(3)}) \frac{d_k^{(4)}}{(k+1) d_k}$$

$$a_k^{(21)} = -C_k^{(2)} \frac{d_k^{(2)} - d_k^{(3)}}{d_k} - (1 - C_k^{(1)}) \frac{\varkappa_2 d_k^{(1)}}{(k-1) d_k} + (1 - C_k^{(3)}) \frac{d_k^{(4)}}{(k+1) d_k}$$

$$a_k^{(31)} = -C_k^{(2)} \frac{d_k^{(1)} + d_k^{(4)}}{d_k} + (1 - C_k^{(1)}) \frac{\varkappa_2 d_k^{(2)}}{(k-1) d_k} + (1 - C_k^{(3)}) \frac{d_k^{(3)}}{(k+1) d_k}$$

$$a_k^{(41)} = -C_k^{(2)} \frac{d_k^{(1)} - d_k^{(4)}}{d_k} - (1 - C_k^{(1)}) \frac{\varkappa_2 d_k^{(2)}}{(k-1) d_k} + (1 - C_k^{(3)}) \frac{d_k^{(3)}}{(k+1) d_k}$$

$$a_k^{(12)} = a_k^{(11)}\big|_{D=0} + \left[\frac{d_k^{(4)*} - d_k^{(4)}}{(k+1) d_k} + \frac{\varkappa_2 (d_k^{(1)*} - d_k^{(1)})}{(k-1) d_k} \right]\Bigg|_{D=0}$$

$$a_k^{(22)} = a_k^{(21)}\big|_{D=0} + \left[\frac{d_k^{(4)*} - d_k^{(4)}}{(k+1) d_k} - \frac{\varkappa_2 (d_k^{(1)*} - d_k^{(1)})}{(k-1) d_k} \right]\Bigg|_{D=0}$$

$$a_k^{(32)} = a_k^{(31)}\big|_{D=0} + \left[\frac{d_k^{(3)*} - d_k^{(3)}}{(k+1) d_k} - \frac{\varkappa_2 (d_k^{(2)*} + d_k^{(2)})}{(k-1) d_k} \right]\Bigg|_{D=0}$$

$$a_k^{(42)} = a_k^{(41)}\big|_{D=0} + \left[\frac{d_k^{(3)*} - d_k^{(3)}}{(k+1) d_k} + \frac{\varkappa_2 (d_k^{(2)*} + d_k^{(2)})}{(k-1) d_k} \right]\Bigg|_{D=0}$$

где

$$d_k^{(1)*} = [2\varkappa_2 (D' + 1) + \varkappa_2 D' C_k^{(1)} (k - 1) + (\varkappa_2 - 1) D' C_k^{(2)} (k^2 - 1) -$$

$$- \varkappa_2 D' C_k^{(3)} (k + 1)]/(\varkappa_2 + 1)$$

$$d_k^{(2)*} = [2 (D' + 1) - \varkappa_2 D' C_k^{(1)} (k - 1) - (\varkappa_2 + 1) D' C_k^{(2)} (k - 1)^2 +$$

$$+ \varkappa_2 D' C_k^{(3)} (k - 1) - 2D' C_k^{(3)}]/(\varkappa_2 + 1)$$

$$d_k^{(3)*} = [2\varkappa_2 (\varkappa_2 D' - 1) - \varkappa_2 D' C_k^{(1)} (k + 1) - 2\varkappa_2^2 D' C_k^{(1)} +$$

$$+ (\varkappa_2 + 1) D' C_k^{(2)} (k + 1)^2 - 2\varkappa_2 D' C_k^{(2)} (k^2 - 1) + \varkappa_2 D' C_k^{(3)} (k + 1)]/(\varkappa_2 + 1)$$

$$d_k^{(4)*} = [- \varkappa_2 D' + 2 - \varkappa_2 D' C_k^{(1)} (k - 1) - (\varkappa_2 - 1) D' C_k^{(2)} (k^2 - 1) +$$

$$+ \varkappa_2 D' C_k^{(3)} (k - 1)]/(\varkappa_2 + 1)$$

Функции $f_0^{(j)}(t)$ $(j = 1, 2, 3)$ имеют вид

$$f_0^{(j)}(t) = f_0^{(1j)}(t) + i f_0^{(2j)}(t) \tag{1.4}$$

При этом

$$f_0^{(1j)}(t) = P_{10} \left\{ 1/2 + \left[a_{12}^{(j)} g_0 - 2/(1 + \varkappa_1) - \ln\left(2\cos\frac{t - \beta}{2}\right)\right] \cos(t - \beta) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\frac{\varkappa_1 - 1}{\varkappa_1 + 1}(t - \beta)\sin(t - \beta)\right\} + P_{20}[a_{12}^{(j)} g_0 - 2/(1 + \varkappa_1)^2] \cos(t - \beta) +$$

$$+ G_{10}[(\varkappa_1 + \varkappa_1')/4(1 + \varkappa_1) - 3/(1 + \varkappa_1) + a_{12}^{(j)} g_0] \cos(t - \beta) +$$

$$+ (\delta_0 + 1) g_0 \cos(t - \beta) - \gamma_0 g_0 \sin(t - \beta) +$$

$$+ (1/2 - a_{11}^{(j)} g_0) \int_{-\pi}^{t} p_0(s)\, ds + q^{(j)} \int_{-\pi}^{\pi} p_0(s)\, ds - g_0, \quad (j = 1, 2)$$

$$f_0^{(2j)}(t) = M_0 (1 - a_{21}^{(j)} g_0) - P_{10} \left\{ \left[a_{12}^{(j)} g_0 - \ln\left(2\cos\frac{t - \beta}{2}\right)\right] \sin(t - \beta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\varkappa_1 - 1}{\varkappa_1 + 1}(t - \beta)\cos(t - \beta)\right\} - P_{20}[a_{12}^{(j)} g_0 - 2/(1 + \varkappa_1)^2] \sin(t - \beta) +$$

$$+ G_{10}[(\varkappa_1 + \varkappa_1')/4(1 + \varkappa_1) - 1/(1 + \varkappa_1) - a_{12}^{(j)} g_0] \sin(t - \beta) +$$

$$+ \frac{1}{2} q^{(j)} (P_{10} + P_{20} + G_{10}) \sin(t - \beta) - \delta_0 g_0 \sin(t - \beta) +$$

$$+ \gamma_0 g_0 [1 - \cos(t - \beta)], \quad (j = 1, 2)$$

$$[1 + (1 + \varkappa_2) g_0] f_0^{(3)}(t) = [f_0^{(11)}(t) + i f_0^{(21)}(t)] \Big|_{\substack{D = 0 \\ D' = 0}} + g_0 \int_{-\pi}^{t} p_0(s)\, ds -$$

$$
-\frac{1}{2} g_0 (P_{10} + P_{20} + G_{10}) \cos (t-\beta) +
$$

$$
+ i \left[g_0 M_0 + \frac{1}{2} g_0 (P_{10} + P_{20} + G_{10}) \sin (t - \beta) \right]
$$

В последних формулах положено

$$
P_{10} = R_1 P_1 / 4\pi\mu_2 r_1 \varepsilon, \quad P_{20} = R_1 P_2 / 4\pi\mu_2 r_1 \varepsilon, \quad G_{10} = R_1 G_1 / 4\pi\mu_2 r_1 \varepsilon
$$

$$
M_0 = R_1 M / 4\pi\mu_2 r_1^2 \varepsilon, \quad \delta_0 = \delta/\varepsilon, \quad \psi_0 = r_1 \psi / \varepsilon
$$

$$
a_{11}^{(1)} = (1 - a_1 - a_2)/[1 + D' (1 - a_1 - a_2)], \quad a_{11}^{(2)} = a_{11}^{(1)}
$$

$$
a_{12}^{(1)} = a_3 + [2 (D + D') (a_4)^2 - a_5 + 1/2]/[1 + (D + D') (1 - 2a_5)]
$$

$$
a_{21}^{(1)} = 1 + a_1 - a_2, \quad a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)}, \quad a_{12}^{(2)} = a_{12}^{(1)} \big|_{D=0}
$$

В ядре уравнения (1.3) выделены его особая часть в виде функций

$$
\ln \left(1/2 \left| \sin \frac{t-s}{2} \right| \right) - i \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \pi\mu^{(j)} \operatorname{sign} (t - s)
$$

$$
q^{(j)} \ln \left(1/2 \left| \sin \frac{t-s}{2} \right| \right)
$$

и регулярная часть в виде функций $K_1^{(j)} (t - s)$, $K_2^{(j)} (t - s)$ ($j = 1, 2, 3$), непрерывных в области $-\alpha \leqslant t, s \leqslant \alpha$ и имеющих квадратично суммируемые первые частные производные.

Отметим, что когда в области контакта действуют силы кулоновского трения, то, как в [9], получим уравнение, аналогичное (1.3).

Таким образом, решение рассмотренной контактной задачи приводится к решению интегрального уравнения (1.3), определяющего неизвестные контактные напряжения $p_n(t)$ и $\tau_n(t)$. Кроме того, в данной задаче следует определить также размеры области контакта (α, β), жесткое смещение δ и угол относительного поворота ψ диска. Поэтому, к уравнению (1.3) должны быть присоединены условия равновесия диска (1.2) и условия ограниченности контактных напряжений на концах зоны контакта [1, 11, 12]

$$
\chi_0 (\pm \alpha) = 0 \tag{1.5}
$$

§ 2. *Сведение интегрального уравнения (1.3) к бесконечной системе линейных уравнений.* Решение уравнения (1.3) представим в виде ряда [9]

$$
\chi_0 (t) = w (t) \sum_{m=0}^{\infty} Z_m P_m^{(\alpha, \beta)} \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} / \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \tag{2.1}
$$

с неизвестными коэффициентами $\{Z_m\}_{m=0}^{\infty}$. При этом ввиду (1.5) должны иметь место условия

$$
\sum_{m=0}^{\infty} Z_m P_m^{(\alpha, \beta)} (\pm 1) = 0
$$

Здесь

$$w(t) = \frac{1}{2}\left(\sec\frac{t}{2}\right)^{2+\alpha+\beta}\left(\sin\frac{a-t}{2}\right)^{\alpha}\left(\sin\frac{a+t}{2}\right)^{\beta}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} - i\mu^{(j)}, \qquad \beta = -\frac{1}{2} + i\mu^{(j)}$$

$\{P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{m=0}^{\infty}$ $(\mathrm{Re}(\alpha,\beta) > -1)$ — многочлены Якоби, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$.

Подставляя (2.1) в (1.3), а затем используя известные интегральные соотношения, аналогичные приведенному [13], уравнение (1.3) известным способом относительно неизвестных коэффициентов сведем к квазивполне регулярной бесконечной системе

$$z_n(1+q^{(j)}) + \frac{H_n}{n}n^{\varepsilon_1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z_m}{m^{\varepsilon_1}}\left(K_{n,m}^{(1j)} + q^{(j)}K_{n,m}^{(1*)}\right) +$$

$$+\frac{H_n}{n}n^{\varepsilon_1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\overline{z}_m}{m^{\varepsilon_1}}\left(K_{n,m}^{(2j)} + q^{(j)}K_{n,m}^{(2*)}\right) = \frac{H_n}{n^2}n^{\varepsilon_1}b_n, \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad (2.2)$$

где

$$z_n = Z_n/n^{1-\varepsilon_1}, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

а ε_1 — сколь угодно малое, но фиксированное положительное число. Кроме того, для определения коэффициента Z_0 получим соотношение

$$Z_0\left[1 - \gamma_0^{-1}h_0\ln\left(2\,\mathrm{tg}\,\frac{a}{2}\right) - \gamma_0^{-1}J_0^{(\alpha,\beta)}\right] - \gamma_0^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}Z_mJ_m^{(\alpha,\beta)} +$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}Z_mK_{0,m}^{(1j)} - \sum_{m=0}^{\infty}\overline{Z}_mK_{0,m}^{(2j)} + q^{(j)}\left[(Z_0\gamma_0^{(1)} + \overline{Z}_0\gamma_0^{(1)})\gamma_0^{-1} -\right.$$

$$-(Z_0+\overline{Z}_0)\gamma_0^{-1}h_0\ln\left(2\,\mathrm{tg}\,\frac{a}{2}\right) - (Z_0+\overline{Z}_0)\gamma_0^{-1}J_0^{(\alpha,\beta)} -$$

$$\left.-\gamma_0^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}(Z_mJ_m^{(\alpha,\beta)} + \overline{Z}_mJ_m^{(\beta,\alpha)}) - q_m\left(\sum_{m=1}^{\infty}Z_mK_{0,m}^{(1*)} + \sum_{m=1}^{\infty}\overline{Z}_mK_{0,m}^{(2*)}\right)\right] = b_0 \quad (2.3)$$

Здесь введены обозначения

$$K_{n,m}^{(1j)} = -i\frac{\pi}{4}\,\mathrm{th}\,\pi\mu^{(j)}\int_{-a}^{a}\sec^2\frac{t}{2}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,P_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)}(x)\,dt$$

$$K_{n,m}^{(1*)} = \sin\frac{a}{2}\int_{-a}^{a}\left[h_0P_m^{(\alpha,\beta)}(x) +\right.$$

$$+ i \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \pi\mu^{(2)} \overline{w_1(t)} P_{n-1}^{(-\tau, -\rho)}(x) \Big| \overline{w(t)} P_n^{(\tau, \rho)}(x)\, dt$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots;\; m = 1, 2, \ldots)$$

$$h_0 = \pi \operatorname{sech} \pi\mu^{(j)}, \quad \gamma_0^{(1)} = -\pi \operatorname{sech} \pi\mu^{(j)} [\ln 2 + \psi(0.5 - i\mu^{(j)}) - \psi(1)]$$

$$q_m = m^{-1} \pi \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} (\gamma_0 h_0)^{-1}, \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

$$H_n = n\pi^{-1} \operatorname{ch} \pi\mu^{(j)} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} (h_n)^{-1}, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

где

$$x = \operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \qquad w_1(t) = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^{-1} \sec^2 \frac{t}{2} \left[\overline{w(t)} \right]^{-1}$$

$$h_n = \Gamma(n - \tau)\, \Gamma(n - \rho) : 2\, [\Gamma(n + 1)]^2$$

$\psi(x)$ — пси-функция Эйлера, $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Бесконечная система (2.2) и соотношение (2.3) при $j = 1$ и $j = 3$ ($q^{(1)} = q^{(3)} = 0$) совпадают с аналогичной бесконечной системой и аналогичным соотношением, рассмотренными в [9]. Поэтому остальная часть обозначений, содержащаяся в (2.2) и (2.3), здесь не приводится.

Отметим также, что квазивполне регулярность системы (2.2) при $j = 1$ и $j = 3$ доказана в [9]. Аналогичным образом, как и в [9, 14], можно показать, что при $j = 2$ ($q^{(2)} \neq 0$), то есть при добавлении к ядрам $K_{n,m}^{(11)}$ и $K_{n,m}^{(22)}$ соответственно ядер $q^{(2)} K_{n,m}^{(11*)}$ и $q^{(2)} K_{n,m}^{(22*)}$, квазивполне регулярность системы (2.2) не нарушается.

§ 3. *Числовой пример.* Рассмотрим уравнение (1.3) при отсутствии тангенциальных контактных напряжений, то есть $\tau_0(t) = 0$, и положим $P_{10} = M_0 = 0$. Тогда оно принимает вид [7]

$$(1 + 2q^{(j)}) \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{t - s}{2} \right|} p_0(s)\, ds + \int_{-\alpha}^{\alpha} K_j(t - s)\, p_0(s)\, ds = f_{0j}(t)$$

$$K_j(t - s) = \operatorname{Re} [K_1^{(j)}(t - s) + K_2^{(j)}(t - s)]$$

$$f_{0j}(t) = \operatorname{Re} [f_0^{(j)}(t)], \quad (j = 1, 2, 3)$$

В указанном частном случае в зоне контакта будет действовать только нормальное давление $p_0(t)$, область контакта становится симметричной относительно оси ox ($\beta = 0$, $\psi = 0$) и будем иметь $p_0(-t) = p_0(t)$.

Условие равновесия диска примет вид

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} p_0(s)\cos s\,ds = P_{20} + G_{10}$$

Числовые расчеты здесь будут выполнены по схеме, приведенной в [7].

Рассмотрим два случая:

1) пренебрегается изгибная жесткость усиливающего покрытия ($D = 0$).

2) отсутствует усиливающее покрытие на обводе отверстия кольца ($h = 0$).

Числовые расчеты проведены для случая $\varkappa_j = 3 - 4\nu_j$ при следующих значениях физических и геометрических параметров:

$$\mu_1 = \mu_2 \;\; (E_1 = E_2), \quad \mu_0/\mu_2 = 1/2 \;\; (E_0/E_2 = 1/2), \quad \nu_0 = \nu_1 = \nu_2 = 0.3$$

$$h/R_1 = 0.05, \quad R_2/R_1 = 2, \quad R_3/R_1 = 4 \;\; (r = 4,\ r = 16)$$

Кроме того, положено $r_0 \approx r_1$, в то время как принимается $\varepsilon \neq 0$ ($\varepsilon = r_0 - r_1$).

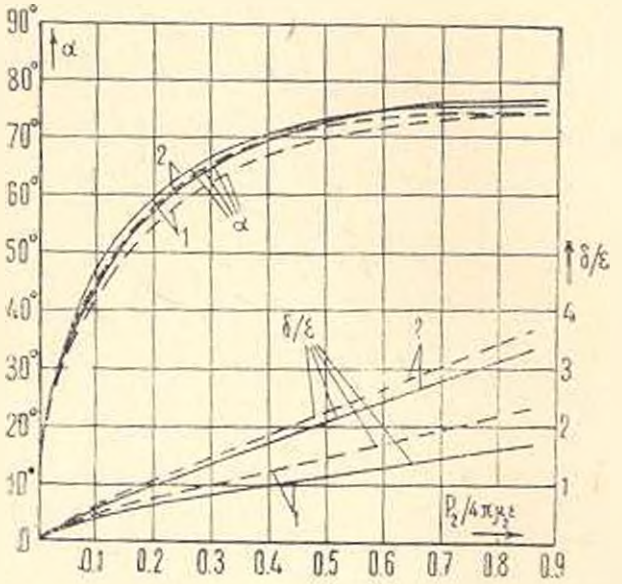
Вычисления проводились на ЭВМ «Наири-2». Бесконечные системы решались методом редукции, причем для получения максимальных нормальных давлений с тремя верными знаками, достаточно было брать три уравнения из бесконечных систем.

Числовые результаты приведены в таблице.

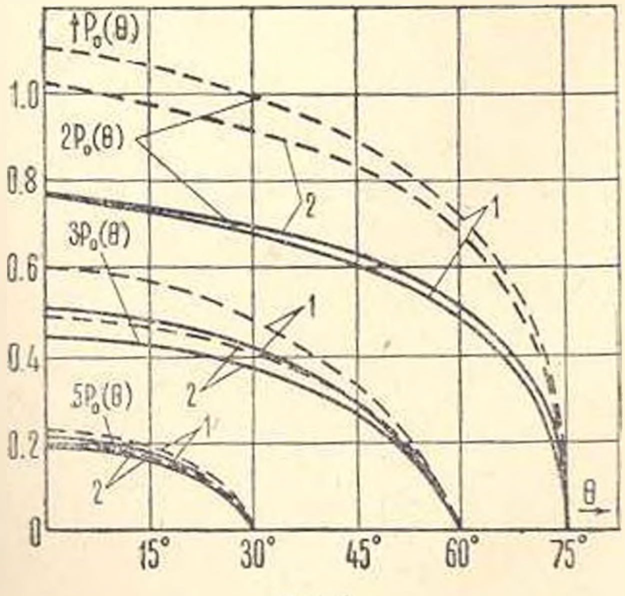
		$h/R_1 = 0.05$			$h = 0$		
		$\alpha = 30°$	$\alpha = 60°$	$\alpha = 75°$	$\alpha = 30°$	$\alpha = 60°$	$\alpha = 75°$
$R_2/R_1 = 2$	P_{20}, G_{10}	0.0331	0.2317	0.5941	0.0361	0.2701	0.8712
	ϑ_0	0.1915 0.2500	0.6667 1.0790	1.3262 2.3846	0.2111 0.2754	0.8890 1.3694	2.3670 3.8980
	X_0	0.0109	0.0842	0.2313	0.0120	0.0980	0.3393
	X_1	−0.0109	−0.0851	−0.2342	−0.0121	−0.1001	−0.3430
	X_2	0	0.0010	0.0030	0.0001	0.0029	0.0018
	X_3	0	−0.0001	−0.0001	0	0.0001	0.0019
	$p_0(\vartheta)_{max}$	0.0421	0.1704	0.3849	0.0467	0.2001	0.5603
$R_3/R_1 = 4$	P_{20}, G_{10}	0.0302	0.2063	0.6087	0.0304	0.2264	0.8138
	ϑ_0	0.2411 0.2950	0.9609 1.3280	2.4100 3.4870	0.2670 0.3080	1.1548 1.5590	3.5510 5.0040
	X_0	0.0100	0.0752	0.2384	0.0100	0.0825	0.3186
	X_1	−0.0099	−0.0740	−0.2350	−0.0100	−0.0814	−0.3143
	X_2	−0.0001	−0.0010	−0.0028	0	−0.0010	−0.0035
	X_3	0	−0.0002	−0.0006	0	−0.0001	−0.0008
	$p_0(\vartheta)_{max}$	0.0382	0.1484	0.3870	0.0386	0.1630	0.5177

Отметим, что вычисления проводились при следующей схеме нагружения диска: либо считалось, что на диск действует только сила P_2 ($G_1 = 0$).

либо наоборот, на диск действуют только силы тяжести диска $G_1 (P_2 = 0)$. Полученные результаты показывают, что в обоих случаях при $P_2 = G_1$ распределение контактных давлений и размеры области контакта получаются



Фиг. 2.



Фиг. 3.

одинаковыми, однако во втором случае ($P_2 = 0$) несколько увеличивается жесткое смещение диска δ (в таблице значения δ_* приведены в двух рядах, причем верхний ряд соответствует случаю $G_1 = 0$, а нижний — $P_2 = 0$).

Для наглядного представления полученных эффектов, обусловленных наличием на обводе отверстия кольца подкрепляющего покрытия и изменением отношения R_2/R_1, приведены графики зависимости длины участка контакта (2α) и величины жесткого смещения диска (δ_0) от прижимающей силы P_0 (фиг. 2). Приведены также графики распределения контактных давлений при $\alpha = 30°$, $60°$ и $75°$ (фиг. 3). В этих графиках сплошные линии соответствуют случаю 1), а пунктирные — случаю 2). Кроме того, через 1 и 2 обозначены кривые, соответствующие отношениям $R_2/R_1 = 2$ и $R_2/R_1 = 4$.

Автор признателен С. М. Мхитаряну за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ленинаканский филиал Ереванского политехнического ин-та им. К. Маркса

Поступила 24 IV 1978

Ֆ. Ս. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՍԿԱՎԱՌԱԿԻ ԵՎ ԱՆՑՔԻ ՇՐՋԱԳԾՈՎ ԲԱՐԱԿ ՕՂԱԿԱՁԵՎ ԾԱԾԿՈՒՅԹՈՎ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՕՂԱԿԻ ՆԵՐՔԻՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է շրջանային առաձգական սկավառակի և արտաքին եզրագծով կոշտ ամրացված շրջանային օղակի ներքին կոնտակտային փոխազդեցության խնդիրը, երբ օղակի անցքի շրջագիծը ուժեղացված է օղակաձև բարակ առաձգական ծածկույթով։ Խնդրի որոշիչ հավասարումը հանգում է Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարման։ Վերջինիս լուծումը Յակոբիի օրթոգոնալ բազմանդամների մաթեմատիկական ապարատի հիման վրա բերված է համարժեք քվազիլիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծմանը։ Մի քանի մասնավոր դեպքերի համար ստացված են թվային արդյունքներ։

ON THE INTERNAL CONTACT INTERACTION OF A ROUND DISK AND A CIRCULAR RING SUPPORTED ON THE CONTOUR OF THE HOLE WITH A THIN CIRCULAR COATING

F. S. TOROSSIAN

Summary

The contact problem on the external interaction of an elastic round disk with a circular ring rigidly fastened along its external boundary, when the outline of the hole is supported with a thin circular elastic coating stuck to it, is considered.

The solution of the above problem is reduced to that of the first kind Fredholm integral equation. It's effective solution is presented. For some particular cases the numerical results are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
2. *Коровчинский М. В.* О некоторых вопросах эластореологии, имеющих приложение в теории трения. Трение и износ в машинах. Сб. XV, М., ин-т машиноведения, 1962
3. *Кочанов Ф. П.* Решение обобщенной задачи И. Я. Штаермана. Докл. АН СССР, 1967, т. 173, № 5.
4. *Мазинг Р. И.* Контактная задача для тяжелого полого цилиндра. Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 2.
5. *Панасюк В. В., Теплый М. И.* Об одной контактной задаче с учетом сил трения. Прикл. механика, 1972, т. 8, вып. 7.
6. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К теории контактных задач для цилиндрических тел с учетом сил трения. Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 2.
7. *Торосян Ф. С.* Об одной контактной задаче для цилиндрических тел. Уч. записки ЕрГУ, 1977, № 1.
8. *Мазинг Р. И.* Цилиндрический штамп с симметричной трещиной. Изв. АН СССР МТТ, 1978, № 1.
9. *Мхитарян С. М., Торосян Ф. С.* О контактном взаимодействии кругового диска и бесконечной пластины с круговым отверстием, подкрепленным тонким кольцевым покрытием. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1978, т. 31, № 5.
10. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1951.
11. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
12. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
13. *Попов Г. Я.* Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
14. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Контактная задача о вдавливании штампа в упругую полуплоскость с тонким усиливающим покрытием. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 1, 1979 Механика

П. А. МКРТЧЯН

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В работе [1] на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел [2, 3] получены двумерные уравнения магнитоупругости сферической оболочки, находящейся в произвольном неоднородном магнитном поле. В данной работе с помощью указанных уравнений рассматривается задача о параметрических колебаниях электропроводящей сферической оболочки в радиальном магнитном поле. Получено уравнение для определения критических частот главного параметрического резонанса. Исследуется влияние напряженности заданного магнитного поля на критические частоты и области динамической неустойчивости.

Аналогичные задачи динамической устойчивости электропроводящих пластин в магнитном поле рассмотрены в работах [4, 5].

1. Рассмотрим задачу динамической устойчивости замкнутой сферической оболочки постоянной толщины $2h$ и радиуса R под действием равномерно распределенной по поверхности радиальной нагрузки $p(t) = p_0 + p_t \cos \omega_0 t$. Ортогональная система координат выбрана так, что срединная поверхность сферической оболочки отнесена к географическим координатам α, β (α представляет угол долготы, β — угол широты), а γ направлена по нормали к срединной поверхности. Тогда для коэффициентов первой квадратичной формы и для кривизны срединной поверхности будем иметь $A = R$, $B = R \sin \alpha$, $k_1 = k_2 = R^{-1}$. В последующем, ради сохранения симметричной структуры получаемых выражений, приведенные выше значения A и B в расшифрованном виде не будем подставлять, однако все время будем понимать, что A — величина постоянная, а B не зависит от β [6, 7].

Пусть оболочка, изготовленная из материала с конечной постоянной электропроводностью σ, помещена в стационарном неоднородном магнитном поле $\vec{H}_0(\gamma)$, вектор напряженности которого перпендикулярен к недеформированной срединной поверхности [10]. Начальное невозмущенное состояние характеризуется вектором упругих перемещений $\vec{U}_0$, электрического поля $\vec{E}_0$ и магнитного поля $\vec{H}_0$. Их определяем из уравнений магнитоупругости и электродинамики невозмущенного состояния. Предполагая, что напряженное состояние оболочки до потери устойчивости является безмоментным и пренебрегая силами инерции [8], из указанных уравнений найдем следующие выражения для характеристик невозмущенного состояния:

$$\vec{E}_0 = 0, \quad \vec{H}_0 = \frac{H_0}{(1+\gamma/R)^2} \cdot \vec{n}_\gamma$$
$$\vec{U}_0 = -\frac{(1-\nu)R^2}{4Eh} p(t) \cdot \vec{n}_\gamma, \qquad N_1^0 = N_2^0 = -\frac{1}{2} Rp(t) \tag{1.1}$$

где H_0 — величина вектора напряженности магнитного поля на срединной поверхности ($\gamma = 0$), $\vec{n}_\gamma$ — единичный вектор в направлении координатной линии γ, N_1^0 и N_2^0 — внутренние силы начального невозмущенного состояния.

Как видно из (1.1), до возникновения возмущений внешнее магнитное поле $\vec{H}_0$ не вызывает дополнительного электромагнитного поля, так как тангенциальные перемещения невозмущенного состояния оболочки равны нулю.

В основу последующих рассуждений ставятся следующие предположения:

а) гипотеза магнитоупругости тонких тел, определяющая закон изменения упругих перемещений и компонент индуцированного электромагнитного поля по толщине оболочки [3];

б) для внешней области (для среды, окружающей оболочку) считаются справедливыми уравнения Максвелла для вакуума;

в) влияние токов смещения на характеристики динамической устойчивости пренебрегается.

На основе принятых предположений основная линеаризованная система сингулярных интегро-дифференциальных уравнений устойчивости сферической оболочки имеет вид [1, 8]

$$\Delta\Psi - \frac{4\pi\sigma R^2}{c^2}\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{R}{h}\Delta F + \frac{4\pi\sigma H_0 R^2}{c^3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\theta - \frac{2w}{R}\right) = 0$$
$$(\Delta + 1 - \nu)\theta - \frac{1}{R}\left(\frac{h^2}{3R^2}\Delta + 1 - \nu\right)(\Delta + 2)w +$$
$$+ \frac{\sigma H_0 R^2}{\rho c c_0^2}\left[\Psi + \frac{H_0}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2w}{R} - \theta + \frac{h^2}{3R^3}\Delta w\right)\right] = 0 \tag{1.2}$$
$$\left(\frac{h^2}{3R^3}\Delta - \frac{1+\nu}{R}\right)\theta - \frac{h^2}{3R^4}(\Delta + 1 - \nu)(\Delta + 2)w - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} +$$
$$+ \frac{\sigma H_0^2 h^2}{3\rho c^2 c_0^2 R^2}\frac{\partial}{\partial t}\Delta w - \frac{p(t)}{4\rho h R c_0^2}(\Delta + 2)w = 0$$

Здесь приняты обозначения:

$$\theta = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(Bu) + \frac{\partial}{\partial\beta}(Av)\right] + \frac{2w}{R}$$
$$\Delta = \frac{R^2}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right]$$

$$\Psi = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\psi) - \frac{\partial}{\partial\beta}(A\varphi)\right] \tag{1.3}$$

$$F = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{r}{2}\right)\right]\Psi(\xi, \eta, t)\sin\xi d\xi d\eta$$

$$r^2 = 2(1-\cos\theta_0), \qquad c_0^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$$

$$\cos\theta_0 = \cos\xi\cos\alpha + \sin\xi\sin\alpha\cos(\eta-\beta)$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала оболочки, c — скорость света, c_0 — скорость звука в материале оболочки, $\varphi(\alpha, \beta, t)$, $\psi(\alpha, \beta, t)$ — искомые тангенциальные компоненты индуцированного в оболочке электрического поля, $u(\alpha, \beta, t)$, $v(\alpha, \beta, t)$, $w(\alpha, \beta, t)$ — искомые перемещения срединной поверхности оболочки.

Решения приведенных уравнений должны удовлетворять условиям непрерывности и однозначности на сфере.

2. Решения уравнений (1.2) представим в виде разложения

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)\, Y_n(\alpha, \beta), \qquad \theta = \sum_{n=1}^{\infty}\theta_n(t)\, Y_n(\alpha, \beta)$$

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n(t)\, Y_n(\alpha, \beta) \tag{2.1}$$

$$Y_n(\alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{n}(A_{nk}\cos k\beta + B_{nk}\sin k\beta)\, P_n^k(\cos\alpha)$$

где A_{nk} и B_{nk} — коэффициенты Фурье, определяемые формулами

$$A_{nk} = \frac{1}{\|Y_n^k\|^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_n(\alpha, \beta)\, P_n^k(\cos\alpha)\cos k\beta\sin\alpha\, d\alpha\, d\beta$$

$$B_{nk} = \frac{1}{\|Y_n^k\|^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_n(\alpha, \beta)\, P_n^k(\cos\alpha)\sin k\beta\sin\alpha\, d\alpha\, d\beta$$

$$\|Y_n^k\|^2 = \frac{2\pi\varepsilon_k}{2n+1}\,\frac{(n+k)!}{(n-k)!}, \qquad \varepsilon_k = \begin{cases}2 \text{ при } k=0,\\ 1 \text{ при } k>0,\end{cases}$$

$$P_n^k(x) = (1-x^2)^{k/2}\frac{d^k P_n(x)}{dx^k}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \text{ — полиномы Лежандра.}$$

Подставляя (2.1) в уравнения (1.2), получим систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\left[\lambda_n + (2n+1)\frac{R}{2h}\right]\Psi_n + \frac{4\pi\sigma R^2}{c^2}\frac{d}{dt}\left[\Psi_n - \frac{H_0}{c}\frac{d}{dt}\left(\theta_n - \frac{2w_n}{R}\right)\right] = 0$$

$$(\lambda_n - 1 + \nu)\,\theta_n + \frac{1}{R}\left(\frac{\lambda_n h^2}{3R^2} - 1 + \nu\right)(\lambda_n - 2)\,w_n +$$

$$+ \frac{\sigma H_0^2 h^2 \lambda_n}{3\rho R c^2 c_0^2}\frac{dw_n}{dt} - \frac{\sigma H_0 R^2}{\rho c c_0^2}\left[\Psi_n - \frac{H_0}{c}\frac{d}{dt}\left(\theta_n - \frac{2w_n}{R}\right)\right] = 0 \qquad (2.2)$$

$$\frac{1}{R}\left(1 + \nu + \frac{\lambda_n h^2}{3R^2}\right)\theta_n + \frac{h^2}{3R^4}(\lambda_n - 1 + \nu)(\lambda_n - 2)\,w_n +$$

$$+ \frac{1}{c_0^2}\frac{d^2 w_n}{dt^2} + \frac{\sigma h^2 H_0^2 \lambda_n}{3\rho c^2 c_0^2 R^2}\frac{dw_n}{dt} - \frac{p(t)}{4\rho h R c_0^2}(\lambda_n - 2)\,w_n = 0$$

Здесь $\lambda_n = n(n+1)$.

Система уравнений (2.2) после некоторых преобразований приводится к одному дифференциальному уравнению относительно $w_n(t)$

$$a_1\frac{d^3 w_n}{d\tau^3} + a_2\frac{d^2 w_n}{d\tau^2} + \alpha_0(1 - 2\gamma_0\cos\omega\tau)\frac{dw_n}{d\tau} +$$

$$+ [1 - 2\mu_0(\cos\omega\tau - a_1\omega\sin\omega\tau)]\,w_n = 0 \qquad (2.3)$$

где введены обозначения

$$a_1 = \frac{\sigma_0 R^2 \Omega}{c h d_n}\left(1 + \frac{d_n\beta_0^2}{\lambda_n - 1 + \nu}\right), \qquad a_2 = 1 + \frac{\lambda_n c_0^2\sigma_0^2\beta_0^2(d_n\beta_0^2 + \lambda_n - 2)}{3d_n c^2(\lambda_n - 1 + \nu)}$$

$$\alpha_0 = a_3 - \frac{a_1 p_t}{p_* - p_0}, \qquad p_* = \frac{4Eh}{R}\,\frac{1 + \delta^2(\lambda_n - 1)^2}{\lambda_n - 1 + \nu}, \qquad \mu_0 = \frac{p_t}{2(p_* - p_0)}$$

$$a_3 = \frac{\sigma_0 R^2 \Omega p_*}{c h d_n (p_* - p_0)} + \frac{\sigma_0 h c_0^2 \beta_0^2}{3c\Omega R^2(\lambda_n - 1 + \nu)}\Bigg[\lambda_n^2 + (\lambda_n - 2)(\lambda_n - 1 + \nu) +$$

$$+ \frac{6R^2(1+\nu)}{h^2}\Bigg], \qquad \gamma_0 = \frac{a_1\mu_0}{\alpha_0}, \qquad \Omega_0^2 = \frac{gE}{\gamma_1 R^2}(\lambda_n - 2)\frac{1 + \delta^2(\lambda_n - 1)^2}{\lambda_n - 1 + \nu} \qquad (2.4)$$

$$\frac{\gamma_1}{g} = \rho, \qquad \delta^2 = \frac{h^2}{3R^2(1-\nu^2)}, \qquad \sigma_0 = \frac{4\pi\sigma h}{c}, \qquad \beta_0 = \frac{V_A}{c_0}, \qquad V_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

$$d_n = \lambda_n + \frac{R}{2h}(2n+1), \qquad \omega = \frac{\omega_0}{\Omega}, \qquad \Omega^2 = \Omega_0^2\left(1 - \frac{p_0}{p_*}\right), \qquad \tau = \Omega t$$

В (2.4) Ω_0 — частота собственных колебаний сферической оболочки в вакууме при отсутствии магнитного поля, γ_0 и μ_0 — коэффициенты возбуждения, p_* — значения критической силы при статической устойчивости оболочки, параметры σ_0 и β_0 характеризуют электропроводность материала оболочки и напряженность внешнего магнитного поля соответственно, V_A — скорость распространения волн Альфвена.

Уравнение (2.3) имеет периодические коэффициенты и, как известно [8, 9], при некоторых соотношениях между коэффициентами имеет неограниченно возрастающие решения. Границы области главного параметрического резонанса определим, используя метод гармонического баланса [8].

Согласно сказанному, решение уравнения (2.3) будем искать в виде

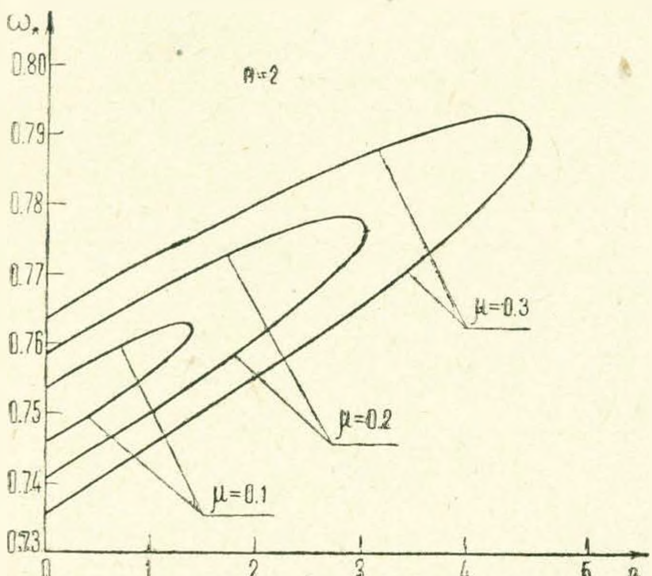
$$w_n(\tau) = A_0 \sin\frac{\omega\tau}{2} + B_0 \cos\frac{\omega\tau}{2} \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в (2.3) и приравнивая определитель нулю, для определения критических частот главного параметрического резонанса получим уравнение

$$a_1^2 z^3 + (a_2^2 - 2a_1\alpha_0) z^2 + (\alpha_0^2 - \mu_0^2 a_1^2 - 2a_2) z + 1 - \mu_0^2 = 0 \tag{2.6}$$

где $z = \omega^2/4$.

На основании (2.6) проведем численный анализ для алюминиевой оболочки при $h/R = 0.01$, $p_0 = 5$ *атм*.



Фиг. 1.

На фиг. 1 представлены графики зависимости критических частот главного параметрического резонанса ω_* от напряженности заданного магнитного поля $\beta(\beta = 10^4\,\beta_0^2)$ при различных значениях коэффициента возбуждения μ, где

$$\omega_* = \frac{\omega_0^2}{4\omega_1^2}, \qquad \omega_1^2 = \frac{gE}{\gamma_1 R^2}, \qquad \mu = \frac{p_0 + p_t/2}{p_{**}}, \qquad p_{**} = \frac{8Eh^2}{R^2\sqrt{3(1-\nu^2)}}$$

Здесь p_{**}— минимальное значение по n критической силы при статической устойчивости оболочки.

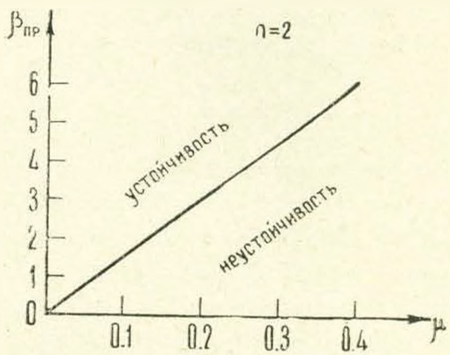
Рассматривая фиг. 1, замечаем, что при наложении магнитного поля и дальнейшем увеличении его напряженности область главного параметрического резонанса уменьшается и стремится к нулю при определенном значении напряженности магнитного поля $\beta_{пр}$. Это значит, что существует минимальное значение ($\beta_{пр}$) напряженности заданного магнитного поля, превышение которого исключает возможность появления параметрического резонанса.

В табл. 1 приведены значения $H_{пр}$ при некоторых значениях коэффициента возбуждения μ для алюминиевой оболочки.

Таблица 1

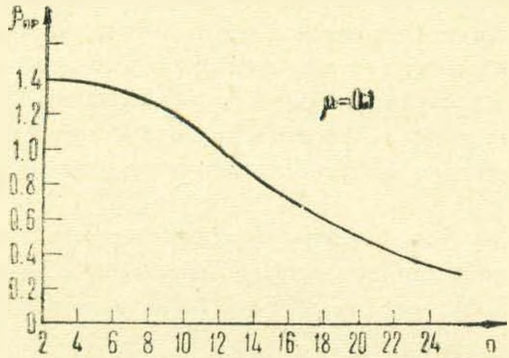
$H_{пр}$, 10^4 *эрстед*	1.0862	3.4348	5.0698	6.1991	7.1698
μ	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4

Расчеты показывают, что ω_* является монотонно возрастающей функцией от числа волн n, поэтому фиг. 1 построена для $n = 2$, соответствующему наименьшему значению ω_* в зависимости от n.



Фиг. 2.

Зависимость $\beta_{пр}$ от коэффициента возбуждения μ приведена на фиг. 2, которая показывает, что чем больше интенсивность магнитного поля, тем большая амплитуда параметрической силы требуется, чтобы вызвать динамическую неустойчивость оболочки. Приведенная кривая отделяет область устойчивости ($H_0 > H_{пр}$) от области неустойчивости ($H_0 < H_{пр}$) и построена при $n = 2$.



Фиг. 3.

Из фиг. 3 видно, что зависимость $\beta_{пр}$ от числа волн n является монотонно убывающей функцией.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 6 IX 1977

Պ. Հ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԷԼԵԿՏՐԱՀԱՂՈՐԴԻՉ ԳՆԴԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Հոդվածում ելնելով բարակապատ մարմինների մագնիսաառաձգականության վարկածներից, դիտարկվում է գնդային թաղանթի դինամիկ կայունության խնդիրը ստացիոնար մագնիսական դաշտում, երբ մագնիսական դաշտի լարվածության վեկտորը ուղղված է թաղանթի միջին մակերևույթի նորմալով։ Ստացված է բնութագրիչ հավասարում գլխավոր պարամետրական ռեզոնանսի կրիտիկական հաճախականության նկատմամբ։

Ուսումնասիրվում է տված մագնիսական դաշտի լարվածության ազդեցությունը դինամիկ կայունության տիրույթների վրա։ Որոշված է արտաքին մագնիսական դաշտի սահմանային արժեքը, որի դեպքում բացառվում է պարամետրական ռեզոնանսի հնարավորությունը։

DYNAMIC STABILITY OF AN ELECTROCONDUCTIVE SPHERICAL SHELL IN THE MAGNETIC FIELD

P. A. MKRTCHIAN

Summary

In terms of the hypothesis of a thin body magnetoelasticity the problem of parametric vibration of an electroconductive spherical shell in the radial magnetic field is considered. An equation is obtained to determine the critical frequencies of the main parametric resonance. The influence of the specified magnetic field strength upon the critical frequencies and the dynamic instability region is studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдасарян Г. Е., Мкртчян П. А.* Об уравнениях магнитоупругости тонких сферических оболочек. Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. XXIX, № 5.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
3. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
4. *Багдасарян Г. Е.* О динамической устойчивости проводящих пластин в поперечном магнитном поле. Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. XXVIII, № 2.
5. *Багдасарян Г. Е.* О параметрических колебаниях проводящих пластин в продольном магнитном поле. Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. XXVIII, № 5.
6. *Власов В. З.* Общая теория оболочек. М.—Л., Гостехиздат, 1949, с. 265—275.
7. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М., «Наука», 1974 с. 128—132.
8. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1956 с. 586—593.
9. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., Изд. «Наука», 1961, с. 183—208.
10. *Зенкевич В. Б., Сычев В. В.* Магнитные системы на сверхпроводниках. М., Изд. «Наука», 1972, с. 228—231.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 1, 1979 Механика

К. Б. КАЗАРЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТОКОНЕСУЩЕЙ ОБОЛОЧКИ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В последнее время в технике получили применение токонесущие упругие тела. В связи с этим ряд работ был посвящен исследованию поведения токонесущих упругих тел в магнитном поле [1—7]. В [2] показана возможность потери устойчивости гибкого токонесущего провода в магнитном поле. Вопросу устойчивости и колебания упругих токонесущих стержней посвящены работы [3—5]. В [4] рассмотрена задача устойчивости упругого токонесущего стержня круглого и эллиптического сечений в случае, когда электрический ток течет по направлению оси стержня и является поверхностным током. Для стержня круглого сечения в [5] теоретическим и экспериментальным путем рассмотрена аналогичная задача в случае, когда электрический ток равномерно распределен по сечению стержня.

В работе [6] показано, что цилиндрическая оболочка может потерять устойчивость в магнитном поле электрического тока, протекающего по направлению образующей оболочки.

Для пластин и оболочек с электрическим током исследование некоторых задач колебаний и устойчивости приводится в [7].

В настоящей работе рассматривается задача устойчивости токонесущей оболочки конечной длины, по направлению образующей которой течет объемный электрический ток. Оболочка находится под действием внешнего продольного магнитного поля, параллельного электрическому току. Определены критические значения плотностей электрического тока и напряженностей внешнего магнитного поля, при которых оболочка теряет устойчивость.

§ 1. Круговая тонкая цилиндрическая оболочка длины L, толщины $2h$, радиуса срединной поверхности R отнесена к триортогональной системе координат (α, β, γ) так, что координатные линии α и β совпадают с линиями кривизны срединной поверхности. Под α и β подразумеваются размерные координаты точки срединной поверхности, откладываемые соответственно вдоль образующей и по дуге.

Материал оболочки изотропен, не обладает магнитными свойствами, является проводником электрического тока.

По оболочке по направлению оси α течет стационарный, равномерно распределенный по толщине электрический ток плотностью j_0. Токонесущая оболочка помещена во внешнее стационарное однородное магнитное поле, вектор напряженности которого $\bar{H}_1$ параллелен образующей оболочки. Как известно, токонесущая оболочка обладает собственным магнитным полем, которое для тонкой бесконечной оболочки равно [6]

$$\overline{H}_0 = H_0 \cdot \overline{i}_0; \quad H_0 = -\frac{4\pi j_0}{c}(\gamma + h) \quad |\gamma| < h$$

$$H_0 = 0 \qquad \gamma \leqslant -h \tag{1.1}$$

$$H_0 = -\frac{8\pi j_0 h}{c} \qquad \gamma > h$$

Рассматривается устойчивость конечной токонесущей оболочки во внешнем магнитном поле $\overline{H}_1$.

Для собственного магнитного поля конечной оболочки принимается значение магнитного поля бесконечной оболочки.

В отношении упругой оболочки принимается гипотеза Кирхгофа-Лява.

В невозмущенном состоянии на оболочку, вследствие протекания электрического тока, действует объемная пондеромоторная сила Ампера

$$\overline{F}_0 = \frac{1}{c}\,[\overline{j}_0 \times (\overline{H}_0 + \overline{H}_1)]; \quad \overline{F}_0 = F_0 \cdot \overline{i}_\gamma; \quad F_0 = -\frac{4\pi j_0^2(\gamma + h)}{c^2} \tag{1.2}$$

Внешнее продольное магнитное поле $\overline{H}_1 = H_1 \cdot \overline{i}_1$, будучи параллельным направлению тока, для невозмущенной оболочки не вносит вклада в объемную силу $\overline{F}_0$.

Принимается, что под действием силы $\overline{F}_0$ в оболочке устанавливается безмоментное напряженное состояние, определяемое кольцевым усилием [6]

$$N_0 = -\frac{8\pi j_0^2 h^2 R}{c^2} \tag{1.3}$$

В [6] показано, что учет индуцированных электромагнитных полей, возникших вследствие колебаний, не влияет на критическое значение плотности электрического тока, при котором оболочка теряет устойчивость. Здесь, в силу этого, задача устойчивости оболочки рассматривается на основе статического подхода [8].

В возмущенном состоянии оболочки, вследствие изгиба, возникает поперечный компонент вектора плотности электрического тока, определяемый из условия непротекаемости электрического тока [7]

$$(\overline{j} \cdot \overline{n}) = 0 \tag{1.4}$$

В (1.3) $\overline{n}$ — нормаль к поверхности возмущенной оболочки, $\overline{j}$ — вектор плотности электрического тока возмущенной оболочки.

Так как $\overline{n} = \mathrm{grad}\,(w - \gamma)$, то из условия (1.4), учитывая, что оболочка является тонкой, для нормального компонента вектора плотности начального электрического тока возмущенной оболочки получим

$$j_\gamma = j_0 \frac{\partial w}{\partial \alpha}$$

где w — нормальное перемещение срединной поверхности оболочки.

Взаимодействие электрического тока плотности j_1 с внешним продольным магнитным полем H_1 приводит к возникновению объемной пондеромоторной силы

$$\bar{f} = f_0 \cdot \bar{i}_3; \qquad f_0 = \frac{j_0 H_1}{c} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \tag{1.5}$$

Вопрос устойчивости токонесущей оболочки во внешнем магнитном поле рассматривается на основе уравнений технической теории тонких оболочек.

В силу допущения безмоментности исходного напряженного состояния, определяемого кольцевым усилием (1.3), и с учетом тангенциальной возмущенной пондеромоторной силы (1.5) эти уравнения в перемещениях срединной поверхности имеют вид [8]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{(1-\nu^2) H_1 H_2}{8\pi E h} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0$$

$$D \Delta^2 w + \frac{2Eh}{R(1-\nu^2)} \left(\frac{w}{R} + \nu \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) - \frac{H_2^2 R}{8\pi} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} = 0 \tag{1.6}$$

В (1.6) E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона материала оболочки, u, v — тангенциальные перемещения срединной поверхности оболочки, $H_2 = 8\pi j_0 h c^{-1}$ — абсолютное значение собственного магнитного поля на внешней поверхности оболочки, обусловленного электрическим током, $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$, $\Delta = \partial^2/\partial \alpha^2 + \partial^2/\partial \beta^2$.

§ 2. Как известно, для определения условий потери устойчивости оболочки в статической постановке необходимо для токонесущей оболочки определить те значения магнитных полей H_1, H_2, при которых система уравнений (1.6) имеет нетривиальные решения.

Задача решается при условиях шарнирного, свободного в тангенциальном направлении опирания на торцах оболочки $\alpha = 0$, $\alpha = L$.

Можно показать, что рассматриваемая здесь задача устойчивости принадлежит к классу несамосопряженных краевых задач. Для решения используем вариационный метод Бубнова—Галеркина, применяемый в неконсервативных задачах [9]. Согласно этому методу представим решения уравнений (1.6) в виде следующих рядов функций, удовлетворяющих условиям опирания и замкнутости оболочки:

$$u = e^{ip\beta} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cos k_n \alpha; \qquad v = e^{ip\beta} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin k_n \alpha$$

$$w = e^{ip\beta} \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin k_n \alpha \tag{2.1}$$

$$\left(p = \frac{m}{R}, \qquad k_n = \frac{\pi n}{L}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \right)$$

Подставляя (2.1) в (1.6) и используя обычный процесс ортогонализации метода Бубнова—Галеркина, после некоторых преобразований приходим к следующей бесконечной алгебраической системе относительно w_n:

$$A w_q + i \sum_{n=1}^{\infty} B_{nq} w_n = 0 \quad (q = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.2}$$

где

$$A_q = D(p^2+k_q^2)^4 + 2Ehk_q^4R^{-2} - (8\pi)^{-1}R(k_q^2+p^2)p^2H_1^2$$

$$B_{nq} = \bar{B}_{nq}H_1H_2$$

$$\bar{B}_{nq} = \begin{cases} 0 & (n-q \text{ — четное число}) \\ 0 & (n=q) \\ (R\pi^2)^{-1}[(2+\nu)pk_n^2+p^3k_n] & (n+q \text{ — нечетное число}) \end{cases}$$

Представляя в (2.2) комплексный прогиб w_n в виде $w_{1n}+iw_{2n}$ и разделяя действительные и мнимые части системы (2.2), получим следующую бесконечную систему относительно w_{1q}, w_{2q}:

$$\begin{aligned} A_q w_{1q} - \sum_{n=1}^{\infty} w_{2n} B_{nq} &= 0 \\ A_q w_{2q} + \sum_{n=1}^{\infty} w_{1n} B_{nq} &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Приравняв нулю определитель Q системы (2.3), найдем критические значения напряженностей магнитных полей H_1 и H_2, при которых оболочка теряет устойчивость.

Определитель Q приводится к произведению определителей двух транспонированных матриц

$$Q = \det|C_{qn}|\cdot\det|C_{nq}| = [\det|C_{qn}|]^2$$

Общий член определителя $\det|C_{qn}|$ имеет вид

$$\begin{aligned} C_{qn} &= A_n\delta_{nq} + (-1)^q B_{nq} && (n \pm q \text{ — нечетное число}) \\ C_{qn} &= A_n\delta_{nq} && (n \pm q \text{ — четное число}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

(δ_{nq} — символ Кронекера).

Как известно [9], для использования метода Бубнова—Галеркина в несамосопряженных краевых задачах необходимо, чтобы этот метод приводил к бесконечным определителям, принадлежащим к классу нормальных определителей.

Для доказательства принадлежности определителя $\det|C_{qn}|$ к классу нормальных определителей разделим q-ю строчку определителя на $\sqrt{D}(k_q^2+p^2)^2$, а n-й столбец на $\sqrt{D}(k_n^2+p^2)^2$.

Тогда определитель $\det|C_{qn}|$ можно представить в виде

$$\tilde{\Delta} = |\delta_{qn} + C^*_{qn}|$$

где C^*_{qn} равно

$$C^*_{qn} = \frac{2Ehk_n^4R^{-2} - (8\pi)^{-1}RH_2^2(k_n^2 + p^2)^2p^2}{D(k_n^2 + p^2)^2(k_q^2 + p^2)^2}\delta_{nq} +$$

$$+ \frac{(-1)^q H_1H_n[(2+\nu)pk_n^3 + k_np^3]q}{\pi^2RD(k_n^2 + p^2)^2(k_q^2 + p^2)^2(q^2 - n^2)} \quad (n \pm q \text{ — нечетное число})$$

$$C^*_{qn} = \frac{2EhR^{-2}k_n^4 - (8\pi)^{-1}H_2^2Rp^2(k_n^2 + p^2)^2}{D(k_n^2 + p^2)^2(k_q^2 + p^2)^2}\delta_{nq} \quad (n \pm q \text{ — четное число})$$

Используя некоторые простые неравенства, можно легко показать, что

$$\prod_{q=1}^{\infty}|C^*_{qq}| < \infty, \quad \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|C^*_{qn}| < \infty$$

Определитель, общий член которого удовлетворяет этим условиям, является нормальным.

§ 3. Для качественного анализа вопроса устойчивости оболочки ограничимся приближениями бесконечного нормального определителя $\det|C_{qn}|$ при $n = 2$; $n = 3$; $n = 4$.

При $n = 2$ условие $\det|C_{qn}| = 0$ имеет вид

$$\tilde{\Delta}_2 = A_1A_2 - B_{12}|B_{21}| \tag{3.1}$$

При $n = 3$ и $n = 4$ имеем соответственно

$$\tilde{\Delta}_3 = A_3\tilde{\Delta}_2 - A_1B_{23}|B_{32}| \tag{3.2}$$

$$\tilde{\Delta}_4 = A_4\tilde{\Delta}_3 - A_3[A_2B_{34}|B_{43}| + A_2B_{14}|B_{41}|] - \tilde{B}H_1^4H_2^4 \tag{3.3}$$

В (3.3) $\tilde{B} = [|\tilde{B}_{43}|\tilde{B}_{12} - |\tilde{B}_{32}|\tilde{B}_{14}][|\tilde{B}_{41}|\tilde{B}_{23} - |\tilde{B}_{21}|\tilde{B}_{34}]$ и $\tilde{B} > 0$, так как

$$|\tilde{B}_{43}| > |\tilde{B}_{32}|, \quad \tilde{B}_{12} > \tilde{B}_{14}, \quad |\tilde{B}_{41}| > B_{34}, \quad \tilde{B}_{23} > |\tilde{B}_{21}|$$

Обозначив $H_1^2 = \xi$, $H_2^2 = \gamma_i^2$, из (3.1), (3.2), (3.3) получим следующие функции $\xi^2 = \xi^2(\gamma_i)$, определяющие критические значения напряженностей магнитных полей, при которых оболочка теряет устойчивость

$$\xi_i^2 = \frac{(a_1 - \gamma_i^2)(a_2 - \gamma_i^2)}{b_{12}\gamma_i^2}, \quad \gamma_i \in (0, a_1] \tag{3.4}$$

$$\xi_2^2 = \frac{(a_1-\eta^2)(a_2-\eta^2)(a_3-\eta^2)}{\eta^2[\varepsilon_{12}(a_1-\eta^2)+\varepsilon_{23}(a_3-\eta^2)]}, \qquad \eta \in (0,\ a_1] \tag{3.5}$$

$$\xi_3^2 = \frac{-f(\eta)+\sqrt{f^2(\eta)+4\varepsilon(a_1-\eta^2)(a_2-\eta^2)(a_3-\eta^2)(a_4-\eta^2)}}{2\varepsilon\eta^2} \tag{3.6}$$

$$\eta \in (0,\ a_1]$$

В (3.4) — (3.6) приняты следующие обозначения:

$$a_j = 8\pi[D(p^2+k_j^2)^4+2Ehk_j^4R^{-2}][Rp^2(k_j^2+p^2)^2]^{-1} \qquad (a_j > a_{j-1})$$

$$\varepsilon_{js} = \frac{64[(2+\nu)k_j^2+p^2][(2+\nu)k_s^2+p^2]k_jk_sjs}{\pi^2R^4p^2(k_j^2+p^2)^2(k_s^2+p^2)^2(j^2-s^2)^2}$$

$$\varepsilon = B(64\pi^2)^2[p^6R^4(k_1^2+p^2)^2(k_2^2+p^2)^2(k_3^2+p^2)^2(k_4^2+p^2)^2]^{-1} \tag{3.7}$$

$$f(\eta) = \varepsilon_{34}(a_1-\eta^2)(a_2-\eta^2)+\varepsilon_{12}(a_3-\eta^2)(a_4-\eta^2)+$$
$$+\varepsilon_{14}(a_2-\eta^2)(a_3-\eta^2)+\varepsilon_{23}(a_1-\eta^2)(a_2-\eta^2)$$

$$(j = 1, 2, 3, 4;\ s = 1, 2, 3, 4)$$

Функции ξ_1^2, ξ_2^2, ξ_3^2 являются монотонно возрастающими функциями от η^2 при $\eta \to 0$, причем

$$\xi_j^2(a_1) = 0, \quad \lim_{\eta\to 0}\xi_j^2(\eta) = \infty \quad (j = 1, 2, 3)$$
$$\xi_1^2 > \xi_2^2 > \xi_3^2 \quad \forall \eta \in (0,\ a_1] \tag{3.8}$$

Таким образом, как первое, так и два последующих приближения определителя $\det\|C_{mn}\|$ приводят к функциям $\xi_j^2(\eta)$, из анализа которых видно, что внешнее магнитное поле, параллельное току оболочки, уменьшает область ее устойчивости.

На фиг. 1 в плоскости $H_1 = \xi$, $H_2 = \eta$ заштрихованная область является областью устойчивости оболочки, для всех остальных значений H_1 и H_2 оболочка неустойчива.

§ 4. Для количественного анализа устойчивости (неустойчивости) оболочки воспользуемся в качестве примера первым приближением.

Из (3.1) условием, определяющим критические значения H_1 и H_2, будет

$$(a_1-H_2^2)(a_2-H_2^2)-\varepsilon_{12}H_1^2H_2^2 = 0 \tag{4.1}$$

где

$$a_1 = \frac{8\pi D(k^2+p^2)^2}{Rp^2}+\frac{16Eh\pi k^4}{R^3(k^2+p^2)^2p^2}$$

$$a_2 = \frac{8\pi D(4k^2+p^2)^2}{Rp^2}+\frac{256Eh\pi k^4}{R^3(4k^2+p^2)^2p^2}$$

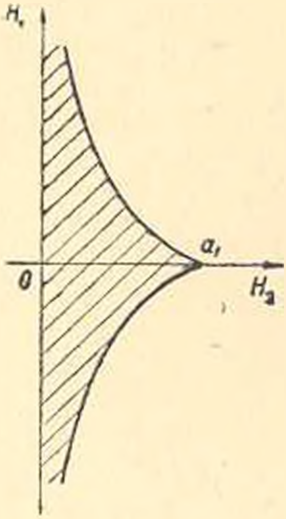
$$\gamma_{12} = \frac{256\,[(2+\nu)\,k^2 + p^2][(2+\nu)\,4k^2 + p^2]}{9R^4L^2p^2\,(k^2-p^2)^2\,(4k^2+p^2)^2} \tag{4.2}$$

$$k = \frac{\pi}{L}, \qquad p = \frac{m}{R}$$

Для определения минимальных значений H_1 и H_2 необходимо сначала определить минимальное значение функции a_1 от m.

Формула, определяющая a_1, значительно упрощается, если принять известное в теории устойчивости цилиндрических оболочек допущение [8]

$$\left(\frac{2\pi R}{mL}\right)^2 \ll 1 \tag{4.3}$$



Фиг. 1

Используя (4.3) и минимизируя a_1 по m, получаем

$$m_* \approx 2.3 \sqrt[4]{\frac{R}{h}}\,\sqrt{\frac{R}{L}} \quad (\nu = 0.3)$$

Формулы (4.2) в силу (4.3) примут вид

$$a_{1m} = \frac{16\pi E h^3 m^2}{3R^3} + \frac{16\pi^5 E h R^3}{L^4 m^4}$$

$$a_{2m} = \frac{16\pi E h^3 m^2}{3R^3} + \frac{256\pi^5 E h R^3}{L^4 m^4}$$

$$\gamma_{12m} = \frac{256R^2}{9L^2 m^4} \tag{4.4}$$

Для определения наименьшего значения функции $a(m)$ необходимо определить $a(\bar{m}) = \min\{a(E(m_*)),\ \ a(E(m_*)+1),\ \ a(1)\}$. Функция $E(m_*)$ есть наибольшее натуральное число, не превышающее m_*.

Кривые зависимости H_{1m}^2 от H_{2m}^2 при различных значениях m являются, вообще говоря, взаимно пересекающимися кривыми.

Можно показать, что если $m\,[\in m_1,\ m_*]$, где $m_1 \approx 2.17 \sqrt[4]{\frac{R}{h}}\,\sqrt{\frac{R}{L}}$ ($\nu = 0.3$), то кривые зависимости H_{1m}^2 от H_{2m}^2 являются взаимно пересекающимися; вне этого интервала пересечение кривых не имеет места.

Эти кривые будут различными, если

$$|m_1 - m_*| > 2 \tag{4.5}$$

Из (4.5) условием пересечения кривых является

$$\frac{R}{L} > 237 \sqrt{\frac{h}{R}} \tag{4.6}$$

При $m = m_*$ (4.3) имеет вид

$$\frac{R}{L} \ll 0.13 \sqrt{\frac{R}{h}} \tag{4.7}$$

Из сопоставления (4.6) и (4.7) видно, что пересечение кривых имеет место только для очень тонких оболочек, а именно, для оболочек, у которых $h/R < 10^{-5}$. Ограничиваясь оболочками с $h/R > 10^{-5}$, приведем основные формулы, определяющие критические значения H_1 и H_2

$$\begin{gathered} [a_1(\bar{m}) - H_2^2][a_2(\bar{m}) - H_2^2] - \varepsilon_{12}(\bar{m}) H_1^2 H_2^2 = 0 \\ H_2 = \sqrt{a_1(\bar{m})}; \quad H_1 = 0 \end{gathered} \tag{4.8}$$

В (4.8) $\bar{m}$ есть то натуральное число, при котором функция $a_1(\bar{m})$ принимает наименьшее значение.

Для проведения численных расчетов относительно критических комбинаций напряженностей H_1 и H_2, введем следующие безразмерные параметры:

$$\bar{\eta} = \frac{H_2}{\sqrt{a_1(\bar{m})}}, \quad \bar{\xi} = \frac{H_1}{\sqrt{a_1(\bar{m})}} \tag{4.9}$$

где $\sqrt{a_1(\bar{m})}$ — критическое значение напряженности собственного магнитного поля токонесущей оболочки в отсутствии внешнего поля H_1.

Используя (4.2) и (4.3), запишем (4.8) в безразмерном виде

$$(1 - \bar{\eta}^2)(4.75 - \bar{\eta}^2) - \varepsilon_{12}(\bar{m}) \bar{\eta}^2 \bar{\xi}^2 = 0 \tag{4.10}$$

На основе (4.10) в табл. 1 в некотором диапазоне отношений R/L, h/R для оболочек, изготовленных из алюминия, приведены критические значения параметра $\bar{\xi}$ при $\bar{\eta} = 0.9$, а также значения $\bar{m}$, отвечающие минимуму $\sqrt{a_1}$. Приведены и критические значения собственного магнитного поля $H_{2^*} = \sqrt{a_1}$ в случае отсутствия внешнего поля ($H_1 = 0$).

Таблица 1

R/L	h/R	$\bar{m}$	$\bar{\xi}$	H_{2^*} (э)	$j_{кр}$ (а/см^2)
0.1	1/1000	4	120	1700	676
0.1	1/500	4	70	1280	510
0.15	1/600	4	102	1240	490
0.2	1/200	4	53	5680	2260
0.3	1/300	6	90	4190	1670
0.4	1/500	6	140	2560	1010
0.4	1/250	5	86	6080	2420
0.5	1/500	7	160	2860	1130

В табл. 1 для оболочек с $h = 0.1$ *см* приведены также соответствующие H_2, критические плотности электрического тока оболочки.

Как видно из численных результатов табл. 1, внешнее продольное магнитное поле незначительно уменьшает область устойчивости оболочки. В действительности, при внешних магнитных полях, достигающих порядка нескольких десятков $\sqrt{a_1}$, критическая напряженность собственного магнитного поля уменьшается до $0.9\sqrt{a_1}$.

В заключение отметим, что при $H_1 = 0$ решение (4.8), полученное на основе метода Бубнова—Галеркина, совпадает с точным решением задачи устойчивости токонесущей оболочки.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 5 III 1978

Կ. Բ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

ԱՐՏԱՔԻՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ՀՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է արտաքին երկայնական մագնիսական դաշտում գտնվող հոսանքատար գլանային թաղանթի կայունության խնդիրը։

Բուբնով-Գալյորկինի մեթոդի հիման վրա որոշված են արտաքին մագնիսական դաշտի և թաղանթի սեփական մագնիսական դաշտի կրիտիկական լարումները։

Ցույց է տրված, որ արտաքին մագնիսական դաշտը փոքրացնում է հոսանքատար թաղանթի կայունության տիրույթը։

ON STABILITY OF A CURRENT-CARRYING SHELL IN AN EXTERNAL MAGNETIC FIELD

K. B. KAZARIAN

Summary

The stability problem of a current-carrying cylindrical shell in an external longitudinal magnetic field is considered.

The critical strengths of the shell's own magnetic field as well as of an external magnetic field are obtained by Bubnov-Galerkin's method.

The external magnetic field is shown to diminish the stability domain of the current-carrying shell.

ЛИТЕРАТУРА

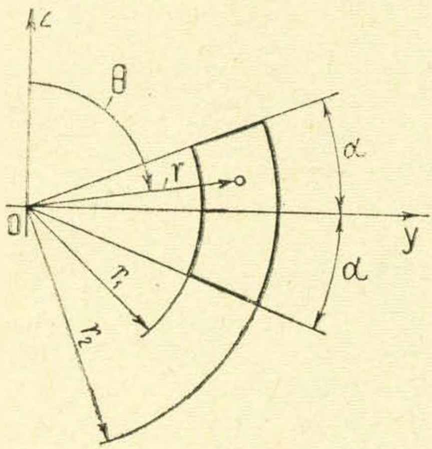
1. *Баранов Д. Г., Вамов В. М., Раев Р. А., Рыков В. Л., Шалашов Н. М.* Напряженно-деформированное состояние параболической оболочки вращения, находящейся под внешним магнитным давлением. ПМТФ, 1974, № 3.
2. *Леонтович М. А., Шафранов В. Д.* Об устойчивости гибкого провода в магнитном поле. Сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. I, Изд. АН СССР, 1958.
3. *Долбин Н. И.* Распространение упругих волн в токонесущем стержне. ПМТФ, 1962, № 2.
4. *Долбин Н. И., Морозов А. И.* Упругие изгибные колебания стержня с электрическим током. ПМТФ, 1966, № 3.
5. *Chattopadhyay S., Moon F. S.* Magnetoelastic buckling and vibration of a rod carrying electric current. Trans. ASME, E42, 1975, No. 4, 809—814 pp.
6. *Казарян К. Б.* Колебания и устойчивость токонесущей цилиндрической оболочки. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 2.
7. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М., Изд. «Наука», 1977, с. 150—204.
8. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. М., ГИФМЛ, 1963, с. 463—500.
9. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., ГИФМЛ, 1961, с. 272—280.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 1, 1979 Механика

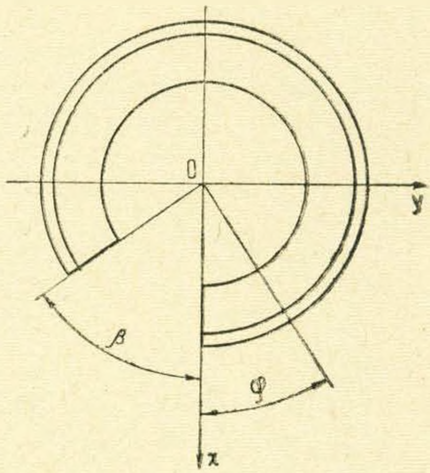
П. В. ГАЛПЧЯН, М. А. ЗАДОЯН

ПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ КРУГОВОГО СТЕРЖНЯ С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ КОЛЬЦЕВОГО СЕКТОРА

Рассматривается задача о пластическом кручении кривого стержня. Материал стержня подчиняется условию изотропного упрочнения. В сферической системе координат (r, θ, φ) боковые поверхности стержня являются координатными поверхностями $r = r_1$, $r = r_2$ $(r_1 < r_2)$ и $\theta = \pi/2 \pm \alpha$, а торцевые поверхности — координатными поверхностями $\varphi = 0$ и $\varphi = \beta$ (фиг. 1, 2). Здесь r — расстояние от центра сферы, θ — полярное расстояние, а φ — угол долготы. Меридиональные поперечные сечения Ω такого стержня представляют собой кольцевые секторы (фиг. 1). Стержень скручивается противоположными силами P (фиг. 3), действующими по оси z, соответственно в плоскостях $\varphi = 0$, $\varphi = \beta$.



Фиг. 1.



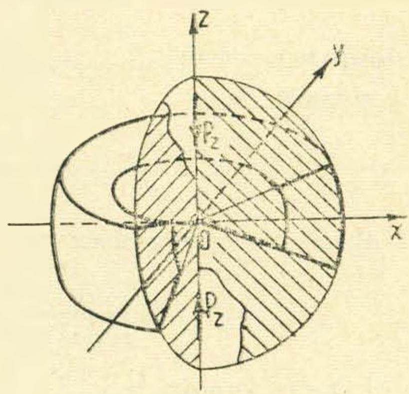
Фиг. 2.

Впервые задача о кручении кривого стержня в постановке теории упругости рассматривалась в работе [1], а затем — в [2—6]. Аналогичная задача в идеальной жестко-пластической постановке для неупрочняющегося материала рассматривалась в работе [10]. В работах [11, 12] в тороидальных и цилиндрических координатах рассматривалась задача о пластическом кручении сектора кольца из упрочняющегося материала. При помощи некоторого полуобратного метода в указанных работах получено поле напряжений и деформаций, когда контур поперечных сечений совпадает с координатными линиями. В работе [12] обобщается теорема о циркуляции сдвига и исследуется случай тонкостенных стержней.

1. Принимается, что интенсивность деформаций сдвига Γ и интенсивность касательных напряжений T связаны соотношением $\Gamma = 2(1 + \lambda T^{\nu})T$, а зависимости между компонентами тензоров деформации и напряжений имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = f(T)(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad f(T) = 1 + \lambda T^{\nu} \tag{1.1}$$

Здесь σ_{ij} представляют отношения компонентов напряжения к $2G$ (G — модуль сдвига), σ — среднее давление в точке, δ_{ij} — символ Кронекера, а λ и ν — некоторые положительные физические параметры, причем для простоты принимаем ν целым. Нулевое значение параметра λ соответствует линейной упругости. Упругая часть составляющих полной деформации в (1.1) будет $\varepsilon^{e}_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$.



Фиг. 3.

Дифференциальные соотношения между компонентами деформации и компонентами смещения в сферических координатах имеют вид

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta$$

$$2\gamma_{r\theta} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

$$2\gamma_{\theta\varphi} = \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u_\varphi}{\sin\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} \tag{1.2}$$

$$2\gamma_{\varphi r} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right)$$

Компоненты перемещения представим в виде

$$u_r = u_{r0}(r, \theta) + r\sin\theta\int\left[2\gamma_{\varphi r} - r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right)\right]d\varphi$$

$$u_\theta = u_{\theta 0}(r, \theta) + \sin\theta\int\left[2r\gamma_{\theta\varphi} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u_\varphi}{\sin\theta}\right)\right]d\varphi \tag{1.3}$$

$$u_\varphi = u_{\varphi 0}(r, \theta) + \int(\varepsilon_\varphi r\sin\theta - u_\theta\cos\theta - u_r\sin\theta)\,d\varphi$$

где u_{r0}, $u_{\theta 0}$, $u_{\varphi 0}$ — произвольные функции r и θ. Предполагая, что тензор напряжения, следовательно, и тензор деформации не зависят от φ, из (1.2) и (1.3) получаем выражения для компонентов деформации

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_{r0}}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \theta} + \frac{u_{r0}}{r}, \quad 2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_{r0}}{\partial \theta} - \frac{u_{\theta 0}}{r}$$
$$2\gamma_{\varphi r} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_{\varphi 0}}{r}\right) + \frac{B}{r}\operatorname{ctg}\theta, \quad 2\gamma_{\theta\varphi} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u_{\varphi 0}}{r\sin\theta}\right) - \frac{B}{r} \tag{1.4}$$

где $B = \mathrm{const}$ — крутка. Полагая далее отличными от тождественного нуля только компоненты напряжения $\tau_{\theta\varphi}$, $\tau_{r\varphi}$ и компоненты деформации $\gamma_{\theta\varphi}$, $\gamma_{r\varphi}$, для перемещения можно получить

$$u_r = B\varphi\cos\theta, \quad u_\theta = -B\varphi\sin\theta, \quad u_\varphi = u_{\varphi 0}(r, \theta) + Er\sin\theta$$
$$E = \frac{1}{r^*}u_{\varphi 0}(r^*, \pi/2) - \frac{\partial u_{\varphi 0}(r^*, \pi/2)}{\partial r}, \quad r^* \in [r_1, r_2]$$

Из выражений для $\gamma_{\varphi r}$ и $\gamma_{\theta\varphi}$ (1.4) получаем уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial\gamma_{\theta\varphi}}{\partial r} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\gamma_{\varphi r}}{r\sin\theta}\right) = \frac{B}{r^2\sin^2\theta} \tag{1.5}$$

Вводя функцию напряжений

$$\tau_{\varphi r} = -\frac{B}{r^3\sin^2\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \qquad \tau_{\varphi\theta} = \frac{B}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial r} \tag{1.6}$$

из (1.1) и (1.5) получим

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{f(T)}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right] + \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{f(T)}{r^4\sin^3\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right] = \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \tag{1.7}$$

когда $(r, \theta) \in \Omega - \Gamma\Omega$

$$T = \frac{B}{r^2\sin^2\theta}\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)^2}$$

Рассматривая условия на боковой поверхности стержня, приходим к условию $\Phi = \mathrm{const}$ на контуре Γ границы области меридионального поперечного сечения $\Gamma\Omega$. В случае многосвязной области на каждом контуре Γ_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, m)$ функция Φ принимает различные постоянные значения. Таким образом, задача сводится к определению функции Φ из уравнения (1.7) при условии $\Phi = \mathrm{const}$ на контуре Γ.

Выбирая начало координат за центр приведения на торцевой плоскости $\varphi = 0$, вычисляем главный момент M и проекции главного вектора P_z, P_x на оси x, z поверхностных сил

$$M = -B\iint\limits_{\Omega}\frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\,d\Omega$$

Переходя к криволинейному интегралу, получаем

$$M = -B\oint\limits_{\Gamma}\frac{\Phi}{\sin^2\theta}\,d\theta$$

В случае многосвязной области будем иметь

$$M = -B\Phi_0\oint\limits_{\Gamma_0}\frac{d\theta}{\sin^2\theta} + B\sum_{k=1}^{m}\Phi_k\oint\limits_{\Gamma_k}\frac{d\theta}{\sin^2\theta} = 0$$

так как все интегралы в этом выражении равны нулю. Здесь Φ_0, Φ_k — значения Φ соответственно на внешнем и внутренних контурах Γ_0, Γ_k. Принимая $\Phi_0 = 0$ на внешнем контуре, находим

$$P_z = -B\sum_{k=1}^{m}\Phi_k\oint\limits_{\Gamma_k}\frac{d\theta}{r\sin\theta} - \frac{\cos\theta dr}{r^2\sin^2\theta} + 2B\iint\limits_{\Omega}\frac{\Phi}{r^3\sin^3\theta}\,d\Omega \tag{1.8}$$

В случае односвязной области будем иметь

$$P_z = 2B\iint\limits_{\Omega}\frac{\Phi}{r^3\sin^3\theta}\,d\Omega \tag{1.9}$$

Аналогично находим

$$P_t = B\Phi_0\oint\limits_{\Gamma_0}\frac{\cos\theta d\theta}{r\sin^2\theta} + \frac{dr}{r^2\sin\theta} - B\sum_{k=1}^{m}\Phi_k\oint\limits_{\Gamma_k}\frac{\cos\theta d\theta}{r\sin^2\theta} + \frac{dr}{r^2\sin\theta} = 0$$

так как

$$\oint\limits_{\Gamma_k}\frac{\cos\theta d\theta}{r\sin^2\theta} + \frac{dr}{r^2\sin\theta} = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ m)$$

Таким образом, P_z будет равнодействующей данной системы поверхностных сил.

В области меридионального сечения возьмем произвольный замкнутый контур Γ_*. Область, ограниченную этим контуром, обозначим Ω_*. Интегрируя обе части уравнения (1.7) в области Ω_* и переходя к криволинейному интегралу, получим

$$\oint\limits_{\Gamma_*}\frac{f(T)}{r^3\sin^3\theta}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial r}\,r d\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\,dr\right] = -\oint\limits_{\Gamma_*}\frac{d\theta}{r\sin^3\theta}$$

Имея в виду, что $r d\theta = -ds\cos(t,\ r)$ и $dr = ds\cos(t,\ \theta)$, где t — направление внешней нормали к контуру Γ_*, а s — дуга этого контура, окончательно получим

$$\oint_{\Gamma_*} \frac{1}{r^3 \sin^3 \theta} f\left(\frac{B}{r^2 \sin^2 \theta} |\operatorname{grad} \Phi|\right) \frac{\partial \Phi}{\partial t} ds = \oint_{\Gamma_*} \frac{d\theta}{r \sin^3 \theta} \tag{1.10}$$

Полученное уравнение является обобщением известной теоремы о циркуляции касательного напряжения при кручении, которой можно пользоваться при рассмотрении многосвязных областей.

2. Рассмотрим случай, когда меридиональное сечение стержня есть кольцевой сектор. Решение уравнения (1.7) при условии $\Phi = 0$ на $\Gamma\Omega$ ищем в виде

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \Phi_k \tag{2.1}$$

Преобразуя (1.7), подставляя в него разложение (2.1) и вводя новую переменную $\theta = \frac{\pi}{2} + \omega$ $(-\alpha \leqslant \omega \leqslant \alpha)$, приходим к системе рекуррентных первых граничных задач

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} + \frac{3}{r^2} \operatorname{tg} \omega \frac{\partial \Phi_n}{\partial \omega} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \omega^2} = -Q_n, \quad \text{когда } (r, \omega) \in \Omega - \Gamma\Omega \\ \Phi_n = 0, \quad \text{когда } (r, \omega) \in \Gamma\Omega \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{gathered} \tag{2.2}$$

где $Q_0 = -1$, а при $n \geqslant 1$

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{grad} F_k \operatorname{grad} \Phi_{n-k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} Q_{n-k-1} F_k$$

При $\nu = 2$

$$F_n = \frac{B^2}{r^4 \cos^4 \omega} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{grad} \Phi_k \operatorname{grad} \Phi_{n-k}$$

Здесь Φ_0 характеризует линейно-упругое состояние.

Можно показать, что задача (2.2) имеет единственное решение и тождественно удовлетворяется условие разрешимости, а соответствующая однородная задача имеет только нулевое решение.

3. Решение задачи (2.2) ищем в виде ряда

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_{nk}(\omega) R_k(r) \tag{3.1}$$

где

$$R_k(r) = \frac{\sqrt{2}}{\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right)^{1/2}} r^{3/2} \sin\left(s_k \ln \frac{r}{r_1}\right), \quad s_k = \frac{k\pi}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

собственные функции задачи (2.2).

Разложим $r^2Q_n(r, \omega)$ в ряд по $R_k(r)$

$$r^2Q_n(r, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_{nk}(\omega) R_k(r) \tag{3.2}$$

Имея в виду, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^4} R_k R_l \, dr = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq l \\ 1 & \text{при } k = l \end{cases}$$

получим для коэффициентов

$$Q_{nk}(\omega) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\xi^2} Q_n(\xi, \omega) R_k(\xi) \, d\xi$$

Подставив разложения (3.1) и (3.2) в первое уравнение (2.2), для коэффициентов Ω_{nk} получаем уравнения

$$\Omega''_{nk} + 3 \operatorname{tg} \omega \Omega'_{nk} - \mu_k \Omega_{nk} = -Q_{nk}, \qquad \mu_k = \frac{k^2\pi^2}{\ln^2 \frac{r_2}{r_1}} + \frac{9}{4} \tag{3.3}$$

удовлетворяющие граничным условиям $\Omega_{nk}(\pm\alpha) = 0$.

Подстановка $\bar{\Omega}_{nk}(\omega) = (x^2 - 1)^2 u_{nk}(x)$, $x = \sin \omega$ переводит соответствующее (3.3) однородное уравнение в уравнение

$$(x^2 - 1) u''_{nk} + 6x u'_{nk} + (4 - \mu_k) u_{nk} = 0, \quad |x| < 1$$

общий интеграл которого будет

$$u_{nk} = C_1 P''_{\nu_k}(x) + C_2 Q''_{\nu_k}(x), \qquad \nu_k = -\frac{1}{2} + \frac{k\pi i}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

где $P''_{\nu_k}(x)$ и $Q''_{\nu_k}(x)$ — сферические функции Лежандра первого и второго родов с индексом ν_k.

Общий интеграл однородного уравнения (3.3) будет

$$\bar{\Omega}_{nk} = C_{1k} \cos^2 \omega P^2_{\nu_k}(\sin \omega) + C_{2k} \cos^2 \omega Q^2_{\nu_k}(\sin \omega)$$

где $P^2_{\nu_k}(x)$ и $Q^2_{\nu_k}(x)$ — присоединенные сферические функции.

Разыскивая частное решение Ω^*_{nk} по методу вариации произвольных постоянных C_{1k} и C_{2k}, получим общий интеграл уравнения (3.3)

$$\Omega_{nk}(\omega) = \tilde{\Omega}_{nk}(\omega) + \Omega^*_{nk}(\omega) = C_{1k}\cos^2\omega P^2_{\nu_k}(\sin\omega) + C_{2k}\cos^2\omega Q^2_{\nu_k}(\sin\omega) -$$

$$- \cos^2\omega Q^2_{\nu_k}(\sin\omega)\int\limits_{-\alpha}^{\omega}\frac{Q_{nk}(\psi)\,P^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,d\psi}{\cos^2\psi\,[P^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,Q^3_{\nu_k}(\sin\psi) - Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,P^3_{\nu_k}(\sin\psi)]} +$$

$$+ \cos^2\omega P^2_{\nu_k}(\sin\omega)\int\limits_{-\alpha}^{\omega}\frac{Q_{nk}(\psi)\,Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,d\psi}{\cos^2\psi\,[P^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,Q^3_{\nu_k}(\sin\psi) - Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,P^3_{\nu_k}(\sin\psi)]}$$

Определив C_{1k} и C_{2k} из граничных условий (3.3), окончательно получим

$$\Omega^*_{nk}(\omega) = -\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} Q_{nk}(\psi)\,\frac{M_{\nu_k}}{N_{\nu_k}}\,d\psi -$$

$$-\int\limits_{-\alpha}^{\omega} Q_{nk}(\psi)\,\frac{\cos^2\omega\,[Q^2_{\nu_k}(\sin\omega)\,P^2_{\nu_k}(\sin\psi) - P^2_{\nu_k}(\sin\omega)Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)]}{\cos^2\psi\,[P^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,Q^3_{\nu_k}(\sin\psi) - Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,P^3_{\nu_k}(\sin\psi)]}\,d\psi \qquad (3.4)$$

$$M_{\nu_k} = \cos^2\omega\,[P^2_{\nu_k}(\sin\omega)Q^2_{\nu_k}(-\sin\alpha) - Q^2_{\nu_k}(\sin\omega)\,P^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)]\times$$

$$\times[Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\,P^2_{\nu_k}(\sin\psi) - P^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\,Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)]$$

$$N_{\nu_k} = \cos^2\psi\,[Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\,P^2_{\nu_k}(-\sin\alpha) - P^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\,Q^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)]\times$$

$$\times[P^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,Q^3_{\nu_k}(\sin\psi) - Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,P^3_{\nu_k}(\sin\psi)]$$

Подставив (3.4) в (3.1), после некоторых преобразований получим решение задачи (2.2) в виде

$$\Phi_n(r,\ \omega) = \iint\limits_{\Omega} Q_n(\xi,\ \psi)\,G(\xi,\ \psi;\ r,\ \omega)\,d\Omega$$

где $G(\xi,\ \psi;\ r,\ \omega)$ — функция Грина задачи (2.2)

$$G(\xi,\ \psi;\ r,\ \omega) =$$

$$= \frac{\cos^2\omega}{\xi^3\cos^2\psi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,P^2_{\nu_k}(-\sin\alpha) - P^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,Q^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)]}{[Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\,P^2_{\nu_k}(-\sin\alpha) - P^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\,Q^2_{\nu_k}(-\sin\alpha)]}\times$$

$$\times\frac{[P^2_{\nu_k}(\sin\omega)\,Q^2_{\nu_k}(\sin\alpha) - P^2_{\nu_k}(\sin\alpha)\,Q^2_{\nu_k}(\sin\omega)]}{[P^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,Q^3_{\nu_k}(\sin\psi) - Q^2_{\nu_k}(\sin\psi)\,P^3_{\nu_k}(\sin\psi)]}\,R_k(\xi)\,R_k(r) \qquad \text{при} \quad \psi \leqslant \omega$$

$$G(\xi, \psi; r, \omega) =$$

$$= \frac{\cos^2 \omega}{\xi^3 \cos^2 \psi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[Q^2_{\nu_k}(\sin \omega) P^2_{\nu_k}(-\sin \alpha) - P^2_{\nu_k}(\sin \omega) Q^2_{\nu_k}(-\sin \alpha)]}{[Q^2_{\nu_k}(\sin \alpha) P^2_{\nu_k}(-\sin \alpha) - P^2_{\nu_k}(\sin \alpha) Q^2_{\nu_k}(-\sin \alpha)]} \times$$

$$\times \frac{[Q^2_{\nu_k}(\sin \alpha) P^2_{\nu_k}(\sin \psi) - P^2_{\nu_k}(\sin \alpha) Q^2_{\nu_k}(\sin \psi)]}{[P^2_{\nu_k}(\sin \psi) Q^3_{\nu_k}(\sin \psi) - Q^2_{\nu_k}(\sin \psi) P^3_{\nu_k}(\sin \psi)]} R_k(\xi) R_k(r) \quad \text{при } \psi \geqslant \omega$$

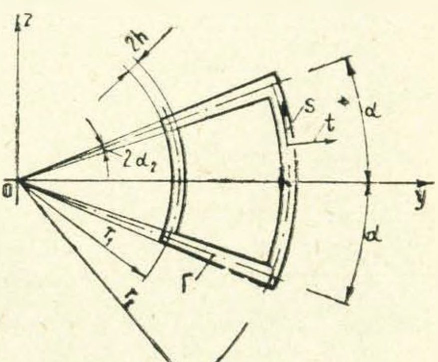
Переходя к доказательству сходимости ряда (2.1), отметим, что уравнение (2.2) в области Ω является равномерно эллиптическим с коэффициентами, принадлежащими пространству C_{α_1}, $\alpha_1 \in (0, 1)$. Следовательно, справедливы априорные оценки Шаудера [13]. Область Ω и граничные значения Φ_n гладкие. При этих условиях $\Phi_0 \in C_{2+\alpha_1}$, так как $Q_0 \in C_{\alpha_1}$, и вообще из выражения Q_n (2.2) следует, что $Q_n \in C_{\alpha_1}$, следовательно, $\Phi_n \in C_{2+\alpha_1}$.

Вводя норму в C_{α_1}

$$\| X \| = \max_{M \in \Omega} | X(M) | + \max_{M, N \in \Omega} \frac{| X(M) - X(N) |}{\overline{MN}^{\alpha_1}}$$

и применяя априорные оценки Шаудера $\| D^2\Phi_n \| \leqslant c^* \| Q_n \|$, где c^* — постоянная, зависящая от геометрии области, аналогично [12] показывается, что ряд (2.1) и ряды, составленные из производных $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^k D\Phi_k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^k D^2\Phi_k$, сходятся абсолютно и равномерно с некоторым радиусом сходимости.

4. Рассмотрим тонкостенный стержень с замкнутым профилем (фиг. 4) в виде двухсвязной области, толщиной стенки $2h$ $(2\alpha_2 r_2 = 2h)$. Переходя



Фиг. 4.

к координатной системе (t, s), где t направлено по внешней нормали, а s — по касательной к срединной линии Γ меридионального сечения, из (1.6) получим

$$\tau_t = \frac{B}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial s}, \qquad \tau_s = -\frac{B}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

Преобразуя уравнение (1.7) к координатной системе (t, s) и пренебрегая ввиду малости толщины стенки компонентом напряжения τ_t, приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[f(T)\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right] = 1, \qquad T = \frac{B}{S(s)} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{4.1}$$

где

$$S(s) = \begin{cases} (r_1+s)^2\cos^2\alpha & \text{при } r_1 \leqslant r \leqslant r_2,\ \theta = \pi/2+\alpha \\ r_2^2 \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha-\dfrac{s}{r_2}\right) & \text{при } r = r_2,\ \pi/2-\alpha \leqslant \theta \leqslant \pi/2+\alpha \\ (r_2-s)^2\cos^2\alpha & \text{при } r_1 \leqslant r \leqslant r_2,\ \theta = \pi/2-\alpha \\ r_1^2 \sin\left(\dfrac{s}{r_1}+\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) & \text{при } r = r_1,\ \pi/2-\alpha \leqslant \theta \leqslant \pi/2+\alpha \end{cases}$$

Интегрируя уравнение (4.1) при $\nu = 1$, получаем

$$\Phi = -\frac{S(s)}{2\lambda B} t + \frac{2\lambda B}{3S(s)} \sqrt{\left(x + \frac{S(s)}{\lambda B} t\right)^3} + k_2(s) \tag{4.2}$$

где $K_1(s)$ и $K_2(s)$ — произвольные функции, определяющиеся из граничного условия,

$$x = \left[\frac{S(s)}{2\lambda B}\right]^2 + \frac{K_1(s)\, S(s)}{\lambda B}$$

Полагая на внешнем контуре $\Phi = 0$, а на внутреннем $\Phi = \Phi_1$, найдем

$$K_2(s) = \frac{hS(s)}{2\lambda B} - \frac{2\lambda B}{3S(s)} \sqrt{\left(x + \frac{hS(s)}{\lambda B}\right)^3}$$

где x определяется из уравнения

$$x^4 + b_1 x^3 + c_1 x^2 + d_1 x + e_1 = 0 \tag{4.3}$$

где

$$b_1 = -\frac{3\chi}{4h^2\upsilon}\left(\frac{\lambda B}{S(s)}\right)^3, \qquad c_1 = \frac{2h^2}{\upsilon}, \qquad d_1 = -\frac{9\chi}{4\upsilon}$$

$$e_1 = \frac{27\chi}{64h^2\upsilon} + \frac{h^4}{3\upsilon}\left(\frac{S(s)}{\lambda B}\right)^2$$

$$\chi = \Phi_1^2 - \frac{2hS(s)}{\lambda B}\Phi_1 + \left(\frac{hS(s)}{\lambda B}\right)^2, \qquad \upsilon = 2 + \left(\frac{\lambda B}{S(s)}\right)^2$$

Корни уравнения (4.3), как известно, совпадают с корнями двух уравнений

$$x^2 + \frac{1}{2}(b_1 + A)\,x + \left(y + \frac{b_1 y - d_1}{A}\right) = 0$$

где $A = \pm\sqrt{8y + b_1^2 - 4c_1}$, a y — какой-либо действительный корень кубического уравнения

$$8y^3 + by^2 + cy + d = 0$$

где

$$b = -4c_2,\quad c = 2b_1 d_1 - 8e_1,\quad d = e_1(4c_1 - b_1^2) - d_1^2$$

Пренебрегая двойным интегралом, из (1.8) получим

$$\Phi_1 = \frac{r_1 r_2 P_z}{BH(r_1 - r_2)},\qquad H = \frac{2\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \ln\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} \tag{4.4}$$

Подставив Φ_1 из (4.4) в выражение для x, а Φ — из (4.2) в (1.10), получим уравнение для определения B

$$\oint_\Gamma \frac{x\,ds}{[S(s)]^{5/2}} = \frac{1}{2k^2B^2}\left[\frac{1}{\cos\alpha}\ln\frac{r_2}{r_1} + \ln\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}\right] + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

В случае линейной упругости из (4.1) будем иметь

$$\Phi = \frac{1}{2}t^2 + K_3(s)\,t + K_4(s) \tag{4.5}$$

Полагая на внешнем контуре $\Phi = 0$, а на внутреннем $\Phi = \Phi_1$, найдем произвольные функции $K_3(s)$ и $K_4(s)$

$$K_3 = -\frac{\Phi_1}{2h} = \text{const},\qquad K_4 = \frac{1}{2}(\Phi_1 - h^2) = \text{const}$$

Из (1.10) и (4.4) определим B, а затем напряжение τ_s

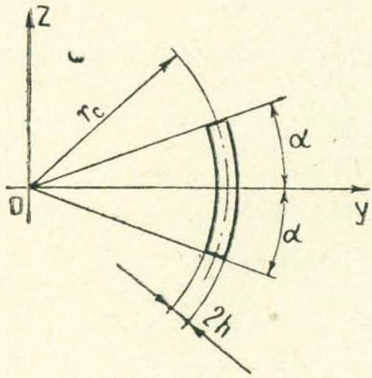
$$B = \frac{(r_1^2 + r_2^2)\,P_z}{2hH(r_1 - r_2)^2},\qquad \tau_s = \frac{B}{S(s)}\left[\frac{(r_1 - r_2)\,r_1 r_2}{r_1^2 + r_2^2} - t\right]$$

Для простоты вычисления в общем случае закона упрочнения (1.1), ввиду малости толщины стенки $2h$, функцию напряжения приближенно можно взять также в виде (4.5). Тогда имеем

$$B = \frac{(r_1^2 + r_2^2)\,P_z}{2hH(r_1 - r_2)^2} - \frac{2kr_1r_2}{H(r_1 - r_2)}\left(\frac{r_1r_2P_z}{2hH(r_2 - r_1)}\right)^{\nu-1}\oint_\Gamma \frac{ds}{[S(s)]^{\nu+3/2}}$$

$$\tau_s = \frac{B}{S(s)}\left|\frac{r_1 r_2 P_z}{2BhH(r_1 - r_2)} - t\right|$$

5. Положим $r = r_c + \zeta$, где $|\zeta| \le h$, $r_c = (r_1 + r_2)/2$. Если $2h/r_c \ll 1$ и $h/\alpha r_c \ll 1$, тогда будем иметь тонкостенный стержень открытого профиля, вытянутый по направлению полярного расстояния (фиг. 5).



Фиг. 5.

Полагая $\gamma_{\varphi r} \approx 0$, $\tau_{\varphi r} \approx 0$, из (1.5) получаем

$$\frac{\partial \gamma_{\theta\varphi}}{\partial r} = \frac{B}{r^2 \sin^2\theta} \tag{5.1}$$

Согласно (1.1) и (1.6), подставим $\gamma_{\theta\varphi}$ в (5.1) и проинтегрируем, принимая $\tau_{\theta\varphi} = 0$ при $r = r_c$. Тогда получим

$$f(T)\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{r^2}{r_c} - r$$

или в новых переменных ζ

$$f(T)\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} = -\zeta \tag{5.2}$$

Интегрируя (5.1) в пределах от r_c до $r_c + \zeta$, получим

$$\gamma_{\theta\varphi} = \frac{B\zeta}{r_c^2 \sin^2\theta} \tag{5.3}$$

Интегрируя (5.2), с учетом (5.3), получим

$$\Phi = -\int\limits_{-h}^{\zeta} \zeta f^*\left(\frac{|B\zeta|}{r_c^2\sin^2\theta}\right) d\zeta \tag{5.4}$$

где $f^*(\Gamma) = 1/f(T)$. Параметр B определится из (1.9)

$$P_z = -\frac{2B}{r_c^2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \frac{d\theta}{\sin^3\theta}\int\limits_{-h}^{h} d\zeta \int\limits_{-h}^{\zeta} \eta f^*\left(\frac{|B\eta|}{r_c^2\sin^2\theta}\right) d\eta =$$

$$= \frac{4B}{r_c^2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \frac{d\theta}{\sin^3\theta}\int\limits_{0}^{h} \eta^2 f^*\left(\frac{|B|\eta}{r_c^2\sin^2\theta}\right) d\eta \tag{5.5}$$

При $\nu = 1$ будем иметь

$$T^2 + \frac{1}{\lambda}T - \frac{\Gamma}{2\lambda} = 0$$

откуда

$$T = -\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{2|B\zeta|}{\lambda r_c^2 \sin^2\theta}}$$

Подставив это выражение для T в (5.5), окончательно получим

$$P_z = \frac{8Br_c^4(2+\cos^2\alpha)\sin\alpha}{45\lambda^3|B^3|} - \frac{8r_c^2h^2\sin\alpha}{\lambda^2 B} +$$

$$+\frac{4r_c^2h}{5\lambda^2 B}\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha}\sin\theta\sqrt{\left(1+\frac{2\lambda h|B|}{r_c^2\sin^2\theta}\right)^3}\,d\theta -$$

$$-\frac{4Br_c^4}{15\lambda^3|B^3|}\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha}\sin^3\theta\sqrt{\left(1+\frac{2\lambda h|B|}{r_c^2\sin^2\theta}\right)^3}\,d\theta$$

Подставив (5.4) в (1.6), будем иметь

$$\tau_{\varphi\theta} = -\frac{2B\zeta}{(r_c+\zeta)^2\left(1+\sqrt{1+\dfrac{2\lambda|B\zeta|}{r_c^2\sin^2\theta}}\right)\sin^2\theta} \approx$$

$$\approx -\frac{2B\zeta}{r_c^2\left(1+\sqrt{1+\dfrac{2\lambda|B\zeta|}{r_c^2\sin^2\theta}}\right)\sin^2\theta}$$

В случае линейной упругости $f^* \equiv 1$. Тогда из (5.5), (5.4) и (1.6) получаем

$$B = \frac{3r_c^2P_z}{2Hh^3}, \qquad \Phi = -\frac{1}{2}(\zeta^2 - h^2)$$

$$\tau_{\varphi\theta} = -\frac{3r_c^2P_z}{2Hh^3}\,\frac{\zeta}{(r_c+\zeta)^2\sin^2\theta} \approx -\frac{3P_z}{2Hh^3}\,\frac{\zeta}{\sin^2\theta}$$

Аналогично можно получить решение и для тонкостенного стержня с профилем, вытянутым по направлению r.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 23 I 1978

Պ. Վ. ԳԱԼՊՃՅԱՆ, Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

ՕՂԱԿԱՅԻՆ ՍԵԿՏՈՐԻ ՁԵՎ ՈՒՆԵՑՈՂ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՁՈՂԻ ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է շրջանային օղակի սեկտորի ձև ունեցող կոր ձողի ոլորումը, երբ միջօրեականային կտրվածքներն ունեն օղակային սեկտորի ձև։ Ձողը ոլորվում է ծայրային կտրվածքներում ազդող և օղակի առանցքով ուղղված հակադիր ուժերով։ Ձողի նյութը ենթարկվում է իզոտրոպ ամրապնդման։

Խնդիրը բերվում է լարումների ֆունկցիայի նկատմամբ առաջին եզրային խնդրին։ Այդ խնդրի լուծումը փնտրվում է աստիճանային շարքի տեսքով, ըստ մի որոշ ֆիզիկական պարամետրի և հանգեցվում է ռեկուրրենտ առաջին եզրային խնդիրների անվերջ համակարգի։ Կառուցվում են այդ խնդիրների լուծումները և ցույց է տրվում շարքի զուգամիտությունը։

Բերված են նաև փակ և բաց տրամատավորության բարակապատ ձողերի համար մոտավոր լուծումները։

THE PLASTIC TORSION OF A CIRCULAR BAR WITH A CIRCULAR SECTOR CROSS-SECTION

P. V. GALPCHIAN, M. A. ZADOYAN

Summary

The torsion of a curved bar in the form of a circular ring sector, whose meridional sections are of a circular sector shape, is considered. The bar is twisted by the opposite forces acting to the end sections along the axis of the ring. The material of the bar obeys the condition of isotropic strengthening.

The problem is reduced to a first boundary one relative to the function of strain. The solution of the latter is sought in the form of a power series by certain physical parameter and is reduced to an infinite system of recurrent first boundary problems. The solutions of these problems are given and the series convergence is shown.

The approximate solutions for thin bars with closed and open profiles are also presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gohner O.* Spannugsverteilung in einem an den Endquerschnitten belasteten Ringstabsektor. Ingr-Arch., 1931, Bd2, p. 381—414.
2. *Freiberger W.* The uniform torsion of an incomplate tore. Austral. J. Scient. Res. Ser. A, 1949, vol. 2, No. 3, p. 354—375.

3. *Larghaar H. L.* Torsion of curved beams of rectangular cross section. J. Appl. Mech., 1952, vol. 19, No. 1.
4. *Рабинович А. Л.* Кручение элемента кругового кольца. Исследования по механике и прикладной математике. Тр. Моск. физ.-техн. ин-та, 1958, вып. 1.
5. *Stein I.* Stress analysis of a helical coil. Trans, ASME, ser. E. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, No. 1, p. 122—126. (Руск. перев.: Прикл. механ., Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. Е, 1963, т. 30, № 1).
6. *Reissner E.* Not on the problem of twisting of a circular ring sector. Quart, Appl. Math., 1949, vol. 7, No. 3, p. 342--347.
7. *Freiberger W.* The uniform torsion of a perfectly plastic circular ring. Commonwealth of Australia. Aeronautical Research Laboratories, Report ARLSM 2B, 1953.
8. *Freiberger W., Prager W.* Plastic twisting of thich-walled circular ring sectors. J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, No. 3, p. 461—463.
9. *Wang A. J., Prager W.* Plastic twisting of a circular ring sector. J. Mech. and Phys. Solids, 1955, vol. 3, p. 169—175.
10. *Freiberger W.* Elastic-plastic torsion of circular ring sectors. Quart. Appl. Math., 1956, vol. 14, No. 3, p. 259—269.
11. *Задоян М. А.* Пластическое кручение неполного тора. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 2.
12. *Задоян М. А.* Пластическое кручение сектора кольца. Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 1.
13. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 1, 1979 Механика

А. А. ЗЕВИН, И. Г. ПАДВА

ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА В ЗАДАЧАХ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Изображение по Лапласу решения квазистатической задачи наследственной теории упругости можно получить на основании принципа соответствия [1]. В простейших случаях оригинал может быть найден аналитически: в общем случае применяются численные методы обращения, использующие значения изображения при некоторых дискретных значениях параметра преобразования p_i.

Если свойства среды описываются экспоненциальными ядрами и изображение $\overline{\varphi}(p)$ известно в аналитической форме, то значения $\overline{\varphi}(p_i)$ могут быть вычислены с необходимой точностью и серьезных затруднений при переходе к оригиналам, вообще говоря, не возникает. Однако, во многих практически важных случаях зависимость решения задачи теории упругости от констант материала в явном виде не известна, но задача может быть решена численно. Тогда значения $\overline{\varphi}(p_i)$ могут быть получены с ограниченной точностью, так как определяются из численного решения задачи теории упругости с константами материала, зависящими от p_i.

Эффективность ряда методов численного обращения исследовал Кост [2]. Большинство методов оказались крайне чувствительны к точности, с которой известны значения $\overline{\varphi}(p_i)$. Наилучший результат получен при применении метода наименьших квадратов Шепери [1], который основан на приближении решения в оригиналах линейной комбинацией экспоненциальных функций.

Если свойства среды описываются слабо сингулярными ядрами, при численном обращении могут возникнуть существенные трудности. Метод Шепери становится очень чувствительным к точности, с которой задано изображение в узловых точках, что показано на примере в § 4. Более эффективен метод аппроксимаций А. А. Ильюшина [3, 4], однако он приспособлен к случаю, когда свойства среды описываются одним оператором.

В настоящей статье полученное ранее [5] интегральное представление функции дробно-экспоненциальных операторов распространяется на операторы более общего вида и на примерах иллюстрируется его эффективность. Развиты два метода численного обращения преобразования Лапласа, основанные на разложении решения по интегралам от дробно-экспоненциальных функций. Методы применимы к решению задач для анизотропных или кусочно-неоднородных тел, свойства которых описываются несколькими независимыми операторами.

§ 1. Пусть свойства в общем случае анизотропного или кусочно неоднородного тела описываются операторами

$$\bar{G}_k = G_{k0}[1 - \Gamma_k^*] \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где G_{k0} — константы, Γ_k^* - операторы типа свертки с ядрами вида

$$\Gamma_k(t) = \sum_{i=1}^{m} \chi_{ki} \vartheta_\alpha(-\vartheta_{ki}, t), \quad -1 < \alpha < 0, \ \vartheta_{ki} > 0 \tag{1.2}$$

$Э_\alpha(-\vartheta_\alpha, t)$ — дробно-экспоненциальная функция, введенная Ю. Н. Работновым [6].

Выбор ядер специального вида по существу не является ограничением. Дробно-экспоненциальные функции хорошо отвечают опытным данным, и для описания экспериментальных кривых $\Gamma_k(t)$ достаточно в представлении (1.2) удержать от 1 до 3 слагаемых.

Изображение по Лапласу функции $Э_\alpha(-\vartheta, t)$

$$L\{Э_\alpha(-\vartheta, t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} Э_\alpha(-\vartheta, t)\, dt = \omega(p) = \frac{1}{p^\nu + \vartheta}, \quad \nu = 1 + \alpha \tag{1.3}$$

Пусть $\varphi(t)$ — некоторая величина, характеризующая напряженно-деформированное состояние в фиксированной точке тела, причем решение квазистатической упругой задачи имеет вид

$$\varphi_0(t) = F_0[G_{10}, \ldots, G_{n0}]\, y(t) \tag{1.4}$$

где $y(t)$ — известная функция, пропорционально которой изменяются внешние воздействия. Тогда на основании принципа соответствия [1] изображение $\varphi(t)$

$$\bar{\varphi}(p) = F_0\left[G_{10}\left(1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{\chi_{1i}}{p^\nu + \vartheta_{1i}}\right), \ldots, G_{n0}\left(1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{\chi_{ni}}{p^\nu + \vartheta_{ni}}\right)\right] \bar{y}(p) \tag{1.5}$$

В работе [5] получено интегральное представление оригинала выражения (1.5), которое при $y(t) = 1$ (нагрузка постоянна) приводится к виду

$$\varphi(t) = F_0[G_{1\infty}, \ldots, G_{n\infty}] - \frac{1}{\nu\pi}\left[\int_0^1 \exp\left(-u^{\frac{1}{\nu}} t\right) \frac{R(u)\, du}{u} + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \exp\left(-u^{-\frac{1}{\nu}} t\right) \frac{W(u)\, du}{u}\right] \tag{1.6}$$

Здесь $G_{k\infty} = G_{k0}\left[1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{\chi_{ki}}{\vartheta_{ki}}\right]$; $R(u)$ и $W(u)$ — мнимые части функций, получаемые из решения задачи теории упругости с комплексными константами материала, зависящими от действительного параметра u:

$$R(u) = \operatorname{Im} F_0[B_1(u), \ldots, B_n(u)]; \quad W(u) = \operatorname{Im} F_0[D_1(u), \ldots, D_n(u)] \quad (1.7)$$

$$B_k(u) = G_{k0}\left[1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{Z_{ki}}{u \exp(-i\nu\pi) + \theta_{ki}}\right]$$

$$D_k(u) = G_{k0}\left[1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{Z_{ki} u}{\exp(-i\nu\pi) + u\theta_{ki}}\right] \quad (1.8)$$

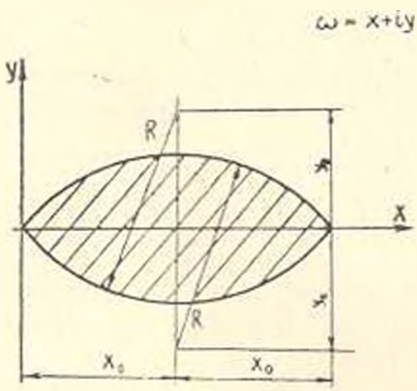
Условия, при которых справедлива формула (1.6), удобно определить следующим образом. Введем переменную $\omega(p) = 1/(p^{\nu} + \theta)$ ($\theta > 0$ произвольно). Тогда функция F_0 из (1.5) может быть представлена в виде

$$F_0\left[G_{10}\left(1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{Z_{1i}\omega}{1 - (\theta - \theta_{1i})\omega}\right), \ldots G_{n0}\left(1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{Z_{ni}\omega}{1 - (\theta - \theta_{ni})\omega}\right)\right] = \\ = F(\omega) \quad (1.9)$$

Можно показать, что представление (1.6) справедливо, если функция $F(\omega)$ аналитична в заштрихованной области, показанной на фиг. 1.

В [5] интегральное представление (1.6) получено при несколько более жестких ограничениях.

Выражение (1.6) позволяет эффективно вычислять $\varphi(t)$, используя формулы численного интегрирования. Пусть u_j ($j = 1, \ldots, r$) — узлы выбранной квадратурной формулы, приведенные к интервалу [0, 1]. Значения функций $R(u)$ и $W(u)$ в узловых точках можно найти, заменяя в решении задачи теории упругости константы G_{k0} величинами $B_k(u_j)$ и $D_k(u_j)$ и выделяя мнимую часть полученных выражений.



Фиг. 1.

Можно показать, что подынтегральные функции в (1.6) непрерывны, поэтому вычисление квадратур не представляет затруднений. Сходимость численной квадратуры при увеличении числа узлов иллюстрируется на примерах в § 4.

Представление (1.6) можно обобщить на случай, когда свойства тела описываются ядрами вида

$$R_k(t) = e^{-\beta t} \sum_{i=1}^{m} Z_{ki} Э_{\alpha}(-\theta_{ki}, t), \quad -1 < \alpha < 0, \quad \theta_{ki} > 0 \quad (1.10)$$

Каждое слагаемое в (1.10) представляет собой резольвенту ядра $\exp(-\beta t)\, t^{\alpha}/\Gamma(\alpha + 1)$, предложенного А. Р. Ржаницыным [7]. Ядра вида (1.10) и интегралы от них протабулированы [4].

Повторяя выкладки работы [5] и используя теорему смещения изображения [8], получим

$$\varphi(t) = F_0[G_{1\infty}, \ldots, G_{n\infty}] - \frac{1}{\pi} \left| \int_0^1 \exp[-(\rho + u^{\frac{1}{\alpha}})] \frac{R(u) u^{\frac{1}{\alpha}-1} du}{(u^{\frac{1}{\alpha}} + \rho)} + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \exp[-(\rho + u^{-\frac{1}{\alpha}})] \frac{W(u)\, du}{(1 + \rho u^{1/\alpha})\, u} \right| \qquad (1.11)$$

Здесь $G_{k\infty} = G_{k0} \left| 1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{\gamma_{ki}}{\rho^{\alpha} + \theta_{ki}} \right|$, а функции $R(u)$ и $W(u)$ определяются выражениями (1.7).

§ 2. При численном решении задачи теории упругости для определения $R(u_j)$ и $W(u_j)$ необходимо решить $2r$ задач с комплексными константами материала, равными $B_k(u_j)$ и $D_k(u_j)$, $j = 1, \ldots, r$. Это может вызвать определенные трудности, так как в существующих программах для решения задач теории упругости обычно предусматривается, что константы материала — действительные числа.

Приведем два метода численного обращения преобразования Лапласа, использующие значения изображения в узлах на действительной положительной полуоси. Эти значения могут быть найдены из решения задачи теории упругости с действительными константами материала. Методы основаны на разложении оригинала по дробно-экспоненциальным функциям и оказываются эффективными, если свойства наследственно-упругого тела описываются слабо сингулярными ядрами.

Представим решение наследственной задачи в виде

$$\varphi(t) = y(t) + \int_0^t \Theta(\tau)\, y(t - \tau)\, d\tau \qquad (2.1)$$

где $y(t)$ — известная функция, а изображение $\overline{\Theta}(p)$ функции $\Theta(t)$ может быть найдено в некоторых узлах p_i. Для вычисления выражения (2.1) достаточно найти $\Theta(t)$.

Если ядра операторов, фигурирующих в исходных уравнениях состояния, имеют особенности порядка α, то функция $\Theta(t)$ имеет особенность того же порядка.

Рассмотрим сначала случай, когда $-0.5 < \alpha < 0$.

Будем разыскивать приближение $\Theta(t)$ в виде

$$\Theta(t) \approx \Theta_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k Э_\alpha(-\theta_k, t) \qquad (2.2)$$

где θ_k — заданные параметры, γ_k — неопределенные коэффициенты. Параметр α в выражении (2.2) положим равным порядку особенности функции $\Theta(t)$.

Коэффициенты γ_k определим из условия минимума квадратичной погрешности в пространстве оригиналов

$$\varepsilon^2 = \int_0^\infty \left| \Theta(t) - \sum_{k=1}^{N} \gamma_k Э_\alpha(-\vartheta_k, t) \right|^2 dt \tag{2.3}$$

Приравнивая нулю производные по γ_k выражения (2.3), получим систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{N} \delta_{ik}\gamma_k = b_i \quad (i = 1, \dots, N) \tag{2.4}$$

Здесь

$$\delta_{ik} = \int_0^\infty Э_\alpha(-\vartheta_i, t)\, Э_\alpha(-\vartheta_k, t)\, dt \tag{2.5}$$

$$b_i = \int_0^\infty \Theta(t)\, Э_\alpha(-\vartheta_i, t)\, dt \tag{2.6}$$

Подынтегральные функции в (2.5) и (2.6) при $t = 0$ имеют особенность порядка $2\alpha > -1$, поэтому интегралы в нуле сходятся.

Так как решение упруго-наследственной задачи стремится к конечному пределу при действии постоянной нагрузки, интеграл

$$I = \int_0^\infty \Theta(t)\, dt < \infty \tag{2.7}$$

Из последнего выражения и монотонного стремления функции $Э_\alpha(-\vartheta, t)$ к нулю при $t \to \infty$ следует сходимость интегралов (2.5), (2.6) на бесконечности.

Для вычисления коэффициентов δ_{ik} воспользуемся интегральным представлением дробно-экспоненциальной функции, которое является частным случаем представления ядра аналитической функции дробно-экспоненциального оператора, полученного в [5]:

$$Э_\alpha(-\vartheta, t) = \frac{\sin\nu\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^\nu \exp(-xt)\, dx}{x^{2\nu} + 2\vartheta x^\nu \cos\nu\pi + \vartheta^2} \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в (2.5) и учитывая, что внутренний интеграл после изменения порядка интегрирования равен изображению по Лапласу функции $Э_\alpha(-\vartheta_k, t)$, получим

$$\delta_{ik} = \int_0^\infty u^\lambda f(u)\, du; \quad f(u) = \frac{\lambda \sin\nu\pi}{\pi (u + \vartheta_k)(u^2 + 2\vartheta_i u \cos\nu\pi + \vartheta_i^2)}, \quad \lambda = \frac{1}{\nu} \tag{2.9}$$

причем при $0.5 < \nu < 1$ функция $z^{\lambda+1} f(z)$ стремится к нулю, когда $|z|$ стремится к нулю и к бесконечности.

Интеграл (2.9) может быть взят с помощью вычетов. Следуя схеме интегрирования, приведенной в [9], найдем

$$b_{ik} = -\frac{\sin\nu\pi\,(\vartheta_i^{\lambda}+\vartheta_k^{\lambda})}{\nu\sin\lambda\pi\,(\vartheta_i^2+\vartheta_k^2-2\vartheta_i\vartheta_k\cos\nu\pi)} \qquad (2.10)$$

Аналогично, подставляя (2.8) в (2.6), изменяя порядок интегрирования и учитывая, что внутренний интеграл есть преобразование по Лапласу функции $\Theta(t)$ с действительным параметром преобразования, будем иметь

$$b_i = \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{x^{\nu}\,\overline{\Theta}(x)\,dx}{x^{2\nu}-2\vartheta_i x^{\nu}\cos\nu\pi+\vartheta_i^2} \qquad (2.11)$$

Таким образом, параметры b_i выражаются через интегралы по действительной положительной полуоси от известного изображения функции $\Theta(t)$. При численном интегрировании удобно выражение (2.11) преобразовать к следующему:

$$b_i = \int\limits_0^1 y^{\lambda} f_1(y)\,dy + \int\limits_0^1 y^{1-\lambda} f_2(y)\,dy \qquad (2.12)$$

$$f_1(y) = \frac{\sin\nu\pi\,\overline{\Theta}_0(y)}{\nu\pi\,(y^2+2\vartheta_i y\cos\nu\pi+\vartheta_i^2)}$$

$$f_2(y) = \frac{\sin\nu\pi\left[\frac{1}{y}\overline{\Theta}_0\left(\frac{1}{y}\right)\right]}{\nu\pi\,(1+2\vartheta_i y\cos\nu\pi+\vartheta_i^2 y^2)}, \qquad \overline{\Theta}_0(\xi) = \overline{\Theta}\left(\xi^{\frac{1}{\nu}}\right)$$

В случае, когда изображение $\overline{\Theta}(p)$ в явном виде не известно, для определения значений $\overline{\Theta}_0(y)$ и $\overline{\Theta}_0\left(\frac{1}{y}\right)$ в узлах необходимо решить $2r$ задач теории упругости с действительными константами материала (r — число узлов квадратурной формулы). Если, например, свойства тела описываются операторами вида (1.1), (1.2), то функция $\overline{\Theta}_0(y)$ в узлах $y_j^{(1)}$ определяется из решения r упругих задач для тела с константами материала, равными

$$G_{kj}^{(1)} = G_{k0}\left(1-\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_{ki}}{y_j^{(1)}+\vartheta_{ki}}\right) \quad (j = 1,\ldots, r) \qquad (2.13)$$

Аналогично, для определения $\overline{\Theta}_0\left(\frac{1}{y_j^{(2)}}\right)$ необходимо решить r упругих задач, в которых упругие константы принимают следующие значения:

$$G_{kj}^{(2)} = G_{k0}\left(1-\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_{ki}y_j^{(2)}}{1+\vartheta_{ki}y_j^{(2)}}\right) \quad (j = 1,\ldots, r) \qquad (2.14)$$

В выражениях (2.13), (2.14) $y_j^{(1)}$ и $y_j^{(2)}$ — узлы (вообще, различные) квадратурных формул, которые используются для интегрирования выражений с весами y^{α} и $y^{1-\alpha}$.

§ 3. Изложенный метод неприменим, если порядок особенности функции $\Theta(t)$ $\alpha < -0.5$, так как интегралы (2.5), (2.6) расходятся.

Приведем метод численного обращения, применимый при любых $\alpha \in (-1, 0]$.

Будем разыскивать приближение функции $\Theta(t)$ в виде (2.2). Коэффициенты γ_k определим из условия минимума квадратичной погрешности в пространстве изображений.

Представим функцию $\bar{\Theta}_0(\xi) = \bar{\Theta}\left(\xi^{\frac{1}{\nu}}\right)$ в виде

$$\bar{\Theta}_0(\xi) = \sum_{n=1}^{N} A_n \omega_n(\xi) \tag{3.1}$$

где

$$\omega_n(\xi) = \sum_{s=1}^{n} \frac{C_{ns}}{\xi + \vartheta_s}, \quad \vartheta_s = \exp(s-1) \tag{3.2}$$

— полная на интервале $[0, \infty]$ ортонормированная система функций. Значения параметров C_{ns} приведены в [11].

Коэффициенты A_n определяются из выражения

$$A_n = \int_0^\infty \bar{\Theta}_0(\xi)\,\omega_n(\xi)\,d\xi = \int_0^1 \left[\bar{\Theta}_0(y) \sum_{s=1}^{n} \frac{C_{ns}}{y + \vartheta_s} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{y}\,\bar{\Theta}_0\left(\frac{1}{y}\right) \sum_{s=1}^{n} \frac{C_{ns}}{1 + y\vartheta_s}\right] dy \tag{3.3}$$

Интеграл (3.3) можно взять численно. При этом для определения коэффициентов A_n используются значения изображения $\bar{\Theta}_0(\xi)$ в точках $\xi_s = y_s$ и $\xi_s = 1/y_s$ (y_s — узлы выбранной квадратурной формулы).

Возвращаясь к переменной p, получим

$$\bar{\Theta}(p) \approx \sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_k}{p^{\nu} + \vartheta_k}, \quad \gamma_k = \sum_{n=k}^{N} A_n C_{nk} \tag{3.4}$$

Функции $(p^{\nu} + \vartheta_k)^{-1}$ представляют собой изображения дробно-экспоненциальных функций. Переходя к оригиналам, получим приближение (2.2).

§ 4. Для иллюстрации изложенных методов рассмотрим задачу об изгибе длинной равномерно нагруженной прямоугольной пластинки, лежащей на упругом основании и шарнирно опертой по длинным краям [12].

Изгибающий момент в середине короткой стороны упругой пластинки

$$M = \frac{1}{8} q l^2 u_2(\xi), \quad u_2(\xi) = \frac{2 \operatorname{sh} \xi \sin \xi}{\xi^2 (\operatorname{ch} 2\xi + \cos 2\xi)}, \quad \xi = \frac{l}{2} \sqrt[4]{\frac{3k_0(1-\nu_0^2)}{E_0 h_0^3}} \tag{4.1}$$

где l и h_0 — ширина и толщина пластинки, q — интенсивность нагрузки, k_0 — коэффициент постели.

Вычислялась функция $\varphi(t) = M(t)/M(0)$, представляющая собой отношение решения с учетом ползучести к решению упругой задачи. При расчетах приняты следующие числовые значения параметров, характеризующих размеры пластинки и упругие свойства материала: $l = 0.25$ *м*, $h_0 = 0.01$ *м*, $E_0 = 1910$ *МПа*, $\nu_0 = 0.25$, $k_0 = 29.4$ *МПа/м*. Реологические параметры пластинки и основания варьировались. Выполнено несколько вариантов расчета

1°. При решении задачи методом, изложенным в § 1, операторы, описывающие упруго-наследственные свойства пластинки и основания приняты в виде

$$\bar{E} = E_0(1 - \Gamma_1^*), \quad \bar{k} = k_0(1 - \Gamma_2^*)$$

$$\Gamma_k(t-\tau) = \lambda_k \exp[-\beta(t-\tau)]\, Э_\alpha(-\theta_k,\ t-\tau) \tag{4.2}$$

Числовые значения реологических параметров:

$\lambda_1 = 1.16$, $\theta_1 = 1.54$, $\lambda_2 = 0.3$, $\theta_2 = 1$, $\alpha = -0.8$ (единица времени 10 *сут*).

Для вычисления $\varphi(t)$ на основе представления (1.11) находим

$$R(u) = \operatorname{Im} \frac{u_2[\xi(B_1(u),\ B_2(u))]}{u_2[\xi(E_0,\ k_0)]} \qquad W(u) = \operatorname{Im} \frac{u_2[\xi(D_1(u),\ D_2(u))]}{u_2[\xi(E_0,\ k_0)]} \tag{4.3}$$

где функции $B_i(u)$ и $D_i(u)$ определяются в соответствии с (1.8). При вычислении интегралов в выражении (1.11) использовалась квадратурная формула Гаусса. Число узлов r варьировалось от 4 до 14. Результаты расчетов приведены в табл. 1.

Таблица 1

r \ t	0.10	0.25	0.75	1.00	3.00	10.0	15.0
4	0.14383	0.07141	0.00574	−0.00817	−0.05672	−0.09137	−0.09759
8	0.13301	0.07049	0.00613	−0.00902	−0.05753	−0.09047	−0.09627
12	0.13200	0.07087	0.00608	−0.00899	−0.05753	−0.09048	−0.09627
14	0.13192	0.07089	0.00609	−0.00899	−0.05753	−0.09048	−0.09627

Как видно, расхождение при $r = 12$ и $r = 14$ не превосходит 0.00008, что дает основание считать верными 4 знака после запятой в последней и предпоследней строках таблицы. Максимальное расхождение при $r = 4$ и $r = 14$ составляет 0.019.

Отметим, что при численном интегрировании обычно используются квадратурные формулы с положительными коэффициентами, поэтому метод, основанный на представлениях (1.6), (1.11) мало чувствителен к точности, с которой заданы значения $R(u)$ и $W(u)$.

2°. Приведем результаты решения рассмотренной задачи методами численного обращения преобразования Лапласа, изложенными в § 2 и § 3.

При решении методом § 2 реологические операторы приняты в виде (4.2) при $\mu = 0$ и $\alpha = -0.375$, то есть свойства пластинки и основания описываются дробно-экспоненциальными функциями.

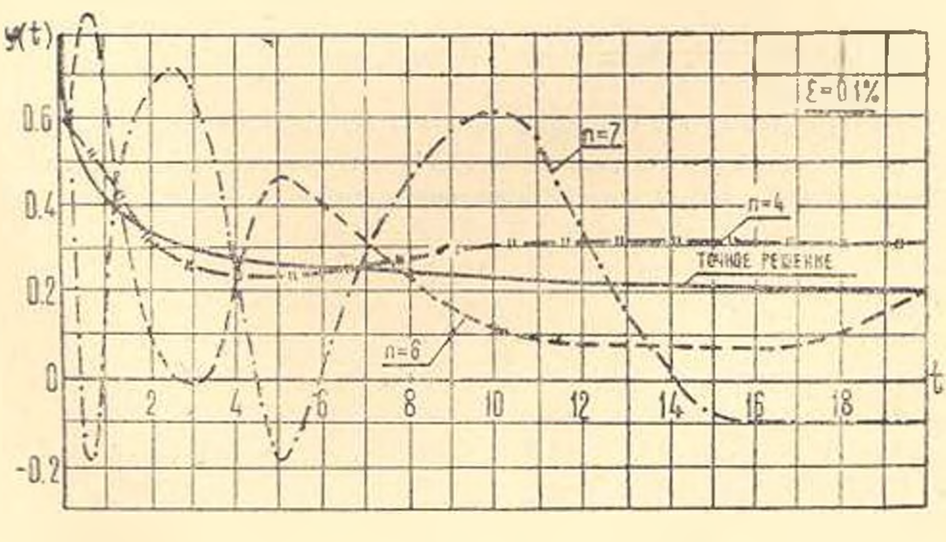
Изображение функции $\Theta(t)$

$$\bar{\Theta}(p) = \frac{u_1[\xi(\bar{E}(p),\ \bar{k}(p))]}{u_2[\xi(E_0,\ k_0)]} - 1$$

$$\bar{E}(p) = E_0[1 - \lambda_1/(p^{\alpha} + \vartheta_1)],\quad \bar{k}(p) = k_0[1 - \lambda_2/(p^{\alpha} + \vartheta_2)] \tag{4.4}$$

Приближение $\Theta_N(t)$ разыскивалось в виде разложения по четырем функциям $Э_\alpha(-\vartheta_k, t)$ с параметрами ϑ_k, равными 0.5, 1, 1.5, 2. При вычислении каждого из интегралов (2.14) применялась квадратурная формула наивысшей алгебраической степени точности [10], использующая 6 узлов. Была исследована чувствительность метода к точности, с которой известно изображение. Для этого на значения функций $\Theta_0(y)$ и $\Theta_0\left(\frac{1}{y}\right)$, которые вычислялись на ЭВМ с точностью 6 значащих цифр, налагалась относительная погрешность $\pm\varepsilon$, различная по знаку для различных узлов. Величина ε варьировалась от 0 до 0.06.

Результаты расчетов приведены на фиг. 2.



Фиг. 2.

Сплошная линия соответствует решению, полученному с точностью 4—5 значащих цифр методом численного интегрирования, изложенным в § 1.

При $\varepsilon = 0$ максимальная погрешность метода численного обращения преобразования Лапласа составила 0.0075. Соответствующая кривая на графике сливается со сплошной линией.

Как видно из графика, даже при очень большой погрешности $\varepsilon = \pm 6\%$ приближение в оригиналах оказалось удовлетворительным, особенно при $t \leqslant 5$.

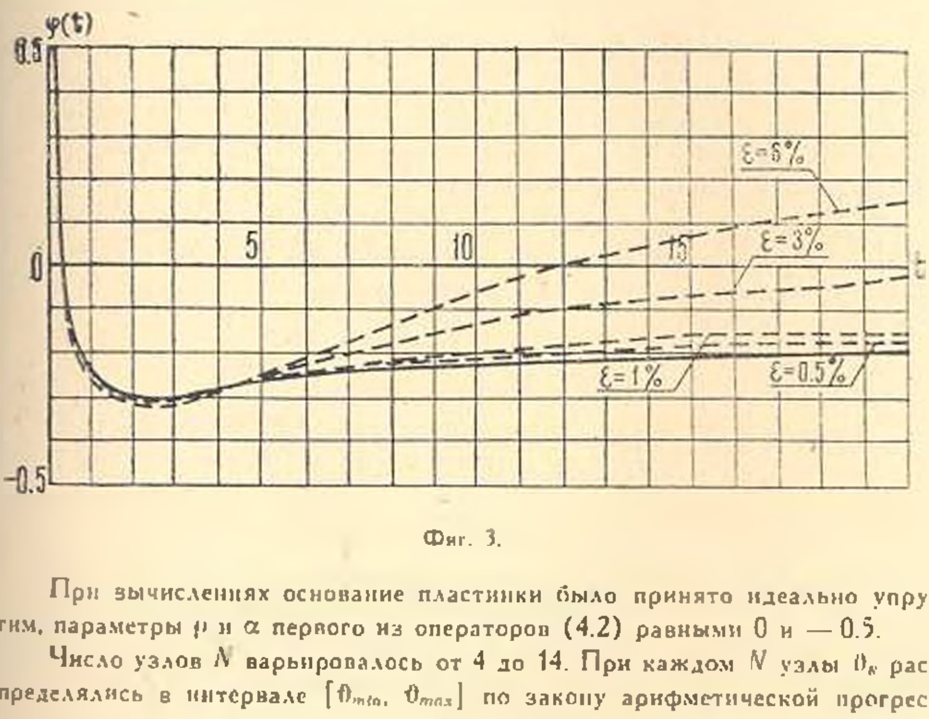
При решении задачи методом, изложенным в § 3, параметр α принят равным -0.7 и $\rho = 0$. Приближение функции $\Theta(t)$ также разыскивалось в виде разложения по четырем дробно-экспоненциальным функциям, но с параметрами $\theta_k = \exp(k-1)$. Интегралы (3.3) вычислялись по формуле Гаусса с девятью узлами. Погрешность ε, налагаемая на значения функций $\Theta_s(y)$ и $\Theta_s(1/y)$, варьировалась.

Метод оказался мало чувствительным к величине ε.

При $\varepsilon = 0$ максимальная и средняя абсолютные погрешности приближения функции $\varphi(t)$ равнялись соответственно 0.026 и 0.017. При $\varepsilon = \pm 6\%$ эти погрешности не увеличились.

Устойчивость метода объясняется тем, что процесс интегрирования при определении параметров A_k сглаживает случайные по знаку погрешности, с которыми было задано изображение.

3°. Задача об изгибе пластинки была решена также методом коллокации, предложенным Шепери. Метод Шепери основан на разложении оригинала $\varphi(t)$ по функциям $A_k \exp(-\theta_k t)$, причем параметры θ_k полагаются заданными, а коэффициенты A_k определяются из системы линейных уравнений, правые части которой представляют собой значения изображения $\bar{\varphi}(p)$ в узлах θ_k [1].



Фиг. 3.

При вычислениях основание пластинки было принято идеально упругим, параметры ρ и α первого из операторов (4.2) равными 0 и -0.5.

Число узлов N варьировалось от 4 до 14. При каждом N узлы θ_k распределялись в интервале $[\theta_{min}, \theta_{max}]$ по закону арифметической прогрессии, геометрической прогрессии или в узлах полинома Чебышева, приведенных к рассматриваемому интервалу. Параметр θ_{min} был принят равным 0.01, а θ_{max} варьировался от 1 до 20.

На значения изображения в узлах налагалась относительная погрешность $\pm \varepsilon$.

При $\varepsilon = 0$ и $N = 14$ минимальная погрешность, с которой удалось получить приближение $\varphi(t)$, равнялась 3%. При $\varepsilon \geqslant 0.001$ во всех рассмотренных случаях были получены неудовлетворительные результаты.

На фиг. 3 приведены графики $\varphi(t)$, полученные методом, изложенным в § 1, с точностью до четырех верных знаков (сплошная линия) и методом Шепери при различных N.

Как видно, наилучший результат получен при $N = 4$, однако точность его невелика. При увеличении N точность приближения ухудшается.

Таким образом, если для описания свойств материала используются ядра с особенностью, обращение методом Шепери не может быть рекомендовано.

Северо-Западное отделение ВГПИ
и НИИ «Энергосетьпроект»

Поступила 20 III 1978

Ա. Ա. ԶԵՎԻՆ, Ի. Գ. ՊԱԴՎԱ

ԺԱՌԱՆԳԱԿԱՆ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ԼԱՊԼԱՍԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ԴԱՐՁԱՑՈՒՄԸ

Ամփոփում

Կոտորակա-էքսպոնենցիալ օպերատորների ֆունկցիայի ինտեգրալ ներկայացումը տարածվել է ավելի ընդհանուր տեսքի օպերատորների վրա։

Զարգացվել են Լապլասի ձևափոխության թվային գործածման երկու եղանակներ, որոնք հիմնված են լուծման ըստ կոտորակա-էքսպոնենցիալ ֆունկցիաների բաղադրյալների վերլուծման վրա։

Այդ եղանակները կիրառելի են անիզոտրոպ, կամ կտոր առ կտոր անհամասեռ մարմնի համար խնդիրների լուծման համար, երբ մարմնի հատկությունները նկարագրվում են մի քանի անկախ օպերատորներով։

Բերված են օրինակներ։

CONVERSION OF LAPLACE TRANSFORMATION IN THE PROBLEMS OF THE HEREDITARY ELASTICITY THEORY

A. A. ZEVIN, I. G. PADWA

Summary

Integral representation of a fraction-exponential operator function is applied to an operator of a more general type.

A method of numerical conversion of the Laplace transformation based on integral expansion of the solution from fraction — exponential functions is developed.

Both methods may be used to solve problems for an anisotropic or lump-heterogeneous body, whose properties are described by several independent operators. Examples are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М., «Мир», 1974.
2. *Кост Т.* Приближенное обращение преобразования Лапласа при анализе вязкоупругих напряжений. Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 12.
3. *Ильюшин А. А.* Метод аппроксимаций для расчета конструкций по линейной теории термовязкоупругости. Механика полимеров, 1968, № 2.
4. *Колтунов М. А.* Ползучесть и релаксация. М., «Высшая школа», 1976.
5. *Зевин А. А.* О функциях дробно-экспоненциальных операторов в теории наследственной упругости. Прикл. механ., 1969, т. 5, в. 11.
6. *Работнов Ю. Н.* Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. 12, в. 1.
7. *Ржаницын А. Р.* Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М.—Л., Гостеоретиздат, 1949.
8. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М., «Наука», 1971.
9. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. М., «Наука», 1965.
10. *Крылов В. И., Шульгина Л. Т.* Справочная книга по численному интегрированию. М., «Наука», 1966.
11. *Яковлев Ю. С.* Общий метод обращения интегральных преобразований Фурье, Лапласа, Ханкеля и Стильтьеса функций класса L_p. Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела, 1977, № 5.
12. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М., ГИФМЛ, 1963

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 1, 1979 Механика

А. Н. ГУЗЬ, А. В. НАВОЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСЖИМАЕМЫХ ПЛАСТИН ПРИ РАВНОМЕРНОМ БОКОВОМ ДАВЛЕНИИ

Введение. В работах [1, 2] исследована соответственно устойчивость полосы (плоская деформация) и стержня кругового поперечного сечения, которые помещены без трения между двумя абсолютно жесткими стенками и к боковым поверхностям которых приложено равномерное давление. Материал полосы и стержня считался упругим, несжимаемым с произвольной формой потенциала. В результате исследования в [1, 2] получен следующий вывод: состояние равновесия является устойчивым, если к боковой поверхности приложено давление в виде «следящей» нагрузки и неустойчивым, если к боковой поверхности приложено давление в виде «мертвой» нагрузки. В последнем случае критическая нагрузка для длинных полосы и стержня приблизительно в два раза меньше эйлеровой силы при осевом сжатии. Для проверки общности полученных результатов целесообразно исследовать другие задачи рассматриваемого класса (для тел с поперечным сечением другой формы).

В данной статье исследуем устойчивость пластин прямоугольной и круговой формы, которые помещены без трения в абсолютно жесткие цилиндры соответствующей формы (что определяет граничные условия на торцах пластин) и к боковым (нижней и верхней) поверхностям которых приложено равномерное давление в виде «следящей» или «мертвой» нагрузок. Для определения «следящих» нагрузок будем использовать соотношения [3], которые в рамках теории малых докритических деформаций являются более точными по сравнению с обычно принятыми. Материал пластин будем считать изотропным, несжимаемым с произвольной формой потенциала. Следуя работам [1—5], исследования выполним в общей форме для трехмерных линеаризированных теорий упругой устойчивости при конечных и малых докритических деформациях [6, 7]. При исследовании применим лагранжевы координаты, которые в недеформированном состоянии совпадают с декартовыми (x_1, x_2, x_3) или круговыми цилиндрическими (r, θ, x_3) координатами. Величины, относящиеся к докритическому состоянию, отметим индексом «ноль», возмущения отмечать индексом не будем.

Заметим, что в рассматриваемых задачах в силу условия несжимаемости для докритического состояния при его определении приходим к задаче о всестороннем равномерном сжатии. В связи с этим можно использовать основные соотношения [3—5]. Следуя [1, 2, 4, 5], будем полагать, что выполняется неравенство

$$\mu_0 > 0 \qquad (0.1)$$

которое обеспечивает устойчивость состояния равновесия несжимаемого тека при всестороннем равномерном сжатии, когда ко всей боковой поверхности приложено давление в виде «следящей» нагрузки [4]. Величина μ_0 в (0.1) определяется через упругий потенциал соотношениями (1.8) или (1.9).

§ 1. *Основные соотношения.* Следуя [1—5], представим в следующем виде линеаризированные:
уравнения движения

$$\mu_0 \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \mu_0 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + \operatorname{grad} p - \rho \vec{u} = 0 \tag{1.1}$$

условие несжимаемости

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \tag{1.2}$$

граничные условия в напряжениях на части S_1 поверхности тела

$$\vec{Q}|_{S_1} = \vec{P}; \quad \vec{Q} = (2\mu_0 - \sigma_0)\vec{N} \cdot \nabla \vec{u} + (\mu_0 - \sigma_0)\vec{N} \times \operatorname{rot} \vec{u} + \vec{N} p \tag{1.3}$$

и выражения для определения правых частей граничных условий (1.3) при действии на S_1 «следящей» нагрузки

$$\vec{P} = -\sigma_0 (\vec{N} \cdot \nabla \vec{u} + \vec{N} \times \operatorname{rot} \vec{u})|_{S_1} \tag{1.4}$$

Из (1.3) и (1.4) получаем граничные условия, когда действует «следящая» нагрузка, в следующем виде:

$$(2\mu_0 \vec{N} \cdot \nabla \vec{u} + \mu_0 \vec{N} \times \operatorname{rot} \vec{u} + \vec{N} p)|_{S_1} = 0 \tag{1.5}$$

Из (1.3) получаем граничные условия, когда действует «мертвая» нагрузка ($\vec{P} = 0$), в виде

$$[(2\mu_0 - \sigma_0)\vec{N} \cdot \nabla \vec{u} + (\mu_0 - \sigma_0)\vec{N} \times \operatorname{rot} \vec{u} + \vec{N} p]|_{S_1} = 0 \tag{1.6}$$

Примечание 1. Из сравнения выражений (1.5) и (1.6) следует, что граничные условия (1.5) при действии «следящей» нагрузки можно получить формально из граничных условий (1.6) при действии «мертвой» нагрузки, если в последнем выражении положить $\sigma_0 = 0$, которое входит явно.

Граничные условия (1.5) и (1.6) относятся к боковым поверхностям. На торцах, которые соприкасаются без трения со стенками абсолютно жестких цилиндров, будем считать, что выполняются следующие условия

$$u_n = 0; \quad \vec{Q}_S = 0 \tag{1.7}$$

В (1.7) введены обозначения: u_n — составляющая вектора перемещений, направленная по нормали к торцу; $\vec{Q}_S$ — составляющая вектора напряжений на поверхности торца, лежащая в касательной плоскости.

В (1.1) — (1.6) и ниже введены следующие обозначения: $\vec{u}$ — возмущения вектора перемещений; ρ — плотность материала в естественном (недеформированном) состоянии; $\vec{N}$ — орт нормали к поверхности тела в естественном состоянии; $\vec{P}$ — возмущения внешних нагрузок, действующих на S_1; p — возмущение величины, связанной с гидростатическим давлением (заметим, что вышеизложенные соотношения сформулированы относительно вектора $\vec{u}$ и скаляра p); σ_0 — напряжение, соответствующее всестороннему равномерному сжатию (заметим, что напряжение σ_0 является истинным и для теории конечных докритических деформаций, поскольку в силу условий несжимаемости при всестороннем равномерном сжатии площадь поверхности тела не изменяется); μ_0 — величина, которая определяется через упругий потенциал из нижеприведенных выражений.

Следуя [4], приведем выражения для определения величины μ_0 через упругий потенциал, который является функцией A_i^0 — алгебраических инвариантов тензора деформаций Грина. В этом случае для теории конечных докритических деформаций получено следующее выражение:

$$\mu_0 = \left(\frac{\partial}{\partial A_1^0} + \frac{\partial}{\partial A_2^0}\right)\Phi^0\Big|_{A_i^0=0}; \qquad \Phi^0 = \Phi^0(A_1^0,\ A_2^0) \tag{1.8}$$

а в случае первого и второго вариантов теории малых докритических деформаций — следующее выражение:

$$\mu_0 = \frac{\partial}{\partial A_2^0}\Phi^0\Big|_{A_i^0=0} + \sigma_0; \qquad \Phi^0 = \Phi^0(A_2^0,\ A_3^0) \tag{1.9}$$

Исследуем вопрос о применимости метода Эйлера к рассматриваемым задачам. В случае действия «мертвых» нагрузок ($\vec{P} = 0$), как известно, можно применять метод Эйлера. В случае действия «следящих» нагрузок на боковые поверхности первое условие (1.7) обеспечивает выполнение достаточных условий [8] применимости метода Эйлера. Таким образом, в рассматриваемых задачах как при действии «мертвых» нагрузок, так и при действии «следящих» нагрузок можно применять метод Эйлера. В связи с этим в дальнейшем будем применять уравнение (1.1) без инерционных членов в виде

$$\mu_0 \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - \mu_0 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} + \operatorname{grad} p = 0 \tag{1.10}$$

Следуя [7], запишем представление общего решения уравнений (1.10) и (1.2). В данном случае оно имеет вид

$$\begin{gathered} u_n = \frac{\partial}{\partial S}\psi - \frac{\partial^2}{\partial n \partial x_3}\chi, \quad U_S = -\frac{\partial}{\partial n}\psi - \frac{\partial^2}{\partial S \partial x_3}\chi, \\ u_3 = \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\chi, \qquad p = \mu_0 \frac{\partial}{\partial x_3}\Delta\chi, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \end{gathered} \tag{1.11}$$

где ψ и χ — гармоническая и бигармоническая функции. В (1.11) через

n и S обозначены нормаль и касательная к контуру поперечного сечения при $x_3 = \text{const}$.

Таким образом, рассматриваемые задачи сводятся к однородным задачам: к уравнениям (1.10) и (1.2); граничным условиям на торцах (1.7); граничным условиям по боковым поверхностям (1.5) при действии «следящих» нагрузок или (1.6) при действии «мертвых» нагрузок.

Примечание 2. Уравнения (1.10) и (1.2), а также граничные условия при действии «следящих» нагрузок (1.5) переходят в соответствующие однородные соотношения линейной классической теории упругости, если величину μ_0 заменить на постоянную Ляме μ. Граничные же условия (1.6) при действии «мертвой» нагрузки и граничные условия на торцах (1.7) не переходят в соответствующие выражения классической линейной теории упругости при указанной замене.

Перейдем к исследованию устойчивости пластин конкретной формы.

§ 2. *Прямоугольные пластины.* Рассмотрим устойчивость прямоугольных пластин $(0 < x_1 < a;\ 0 < x_2 < b;\ -h < x_3 < +h)$, которые при $x_1 = 0,\ a$ и $x_2 = 0,\ b$ соприкасаются без трения со стенками абсолютно жесткого тела, а при $x_3 = \pm h$ загружены равномерным давлением в виде „следящей" или „мертвой" нагрузки.

Из (1.7) получаем граничные условия при $x_1 = 0$ и $x_1 = a$ в следующем виде:

$$u_1 = 0, \quad \mu_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} = 0 \tag{2.1}$$

а также при $x_2 = 0$ и $x_2 = b$ в следующем виде:

$$u_2 = 0, \qquad \mu_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} = 0 \tag{2.2}$$

Из (1.5) получаем граничные условия при $x_3 = \pm h$ в случае действия «следящей» нагрузки в форме

$$\mu_0\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) = 0, \quad \mu_0\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) = 0, \quad 2\mu_0 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + p = 0 \tag{2.3}$$

Из (1.6) получаем граничные условия при $x_3 = \pm h$ в случае действия «мертвой» нагрузки в форме

$$\begin{gathered}
(2\mu_0 - \sigma_0)\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + (\mu_0 - \sigma_0)\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) = 0 \\
(2\mu_0 - \sigma_0)\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + (\mu_0 - \sigma_0)\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) = 0 \\
(2\mu_0 - \sigma_0)\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + p = 0
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Согласно (1.11) общее решение представим в следующем виде:

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}\psi - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}\chi; \quad u_2 = -\frac{\partial}{\partial x_1}\psi - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\chi$$
$$u_3 = \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\chi; \qquad p = \mu_0 \frac{\partial}{\partial x_3}\Delta\chi \tag{2.5}$$

Гармоническую и бигармоническую функции ψ и χ, удовлетворяющие условиям на торцах (2.1) и (2.2), представим в следующем виде:
для изгибной формы потери устойчивости

$$\psi = A \operatorname{sh} \gamma x_3 \sin \pi \frac{m}{a} x_1 \sin \pi \frac{n}{b} x_2, \qquad \gamma^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$$
$$\chi = (B \operatorname{ch} \gamma x_3 + C\gamma x_3 \operatorname{sh} \gamma x_3) \cos \pi \frac{m}{a} x_1 \cos \pi \frac{n}{b} x_2 \tag{2.6}$$

для потери устойчивости с образованием шейки

$$\psi = A \operatorname{ch} \gamma x_3 \sin \pi \frac{m}{a} x_1 \sin \pi \frac{n}{b} x_2$$
$$\chi = (B \operatorname{sh} \gamma x_3 + C\gamma x_3 \operatorname{ch} \gamma x_3) \cos \pi \frac{m}{a} x_1 \cos \pi \frac{n}{b} x_2 \tag{2.7}$$

Рассмотрим вначале случай действия «мертвых» нагрузок, так как при действии «следящих» нагрузок результаты можно получить из рассматриваемого случая, следуя примечанию 1, § 1. Подставляя выражения (2.6) в граничные условия (2.3), после ряда преобразований получаем характеристическое уравнение в виде

$$\delta = 0, \ \delta = \det \| \alpha_{ij} \|, \ i, j = 1, 2, 3 \tag{2.8}$$

В (2.8) введены следующие обозначения:

$$\alpha_{11} = -\mu_0 \pi \frac{n}{b} \gamma \operatorname{ch} \gamma h, \ \alpha_{12} = -\mu_0 \pi \frac{m}{a} \gamma^2 (2\mu_0 - \sigma_0) \operatorname{ch} \gamma h$$
$$\alpha_{13} = -\pi \frac{m}{a} \gamma^2 (2\mu_0 - \sigma_0) \gamma h \operatorname{sh} \gamma h - \pi \frac{m}{a} \gamma^2 2\mu_0 \operatorname{ch} \gamma h$$
$$\alpha_{21} = -\alpha_{11} \frac{m}{a} \frac{b}{n}, \quad \alpha_{22} = \alpha_{12} \frac{n}{b} \frac{a}{m}, \quad \alpha_{23} = \alpha_{13} \frac{n}{b} \frac{a}{m}, \quad \alpha_{31} = 0 \tag{2.9}$$
$$\alpha_{32} = -(2\mu_0 - \sigma_0) \gamma^3 \operatorname{sh} \gamma h, \ \alpha_{33} = -(2\mu_0 - \sigma_0) \gamma^3 \gamma h \operatorname{ch} \gamma h + \sigma_0 \gamma^3 \operatorname{sh} \gamma h$$

Подставляя выражения (2.7) для случая потери устойчивости с образованием шейки в граничные условия (2.3), также получаем характеристическое уравнение в виде (2.8) и (2.9). Таким образом, две различные формы потери устойчивости (изгибная и с образованием шейки) соответствуют одному и тому же характеристическому уравнению и, следовательно, имеют одну и ту же критическую нагрузку. После ряда преобразований характеристическому определителю (2.8) и (2.9) можно придать следующий вид:

$$\delta = -\gamma^6\mu_0(2\mu_0 - \sigma_0)^2\gamma h\left(1 - \frac{2\mu_0 + \sigma_0}{2\mu_0 - \sigma_0}\frac{\operatorname{sh} 2\gamma h}{2\gamma h}\right) \tag{2.10}$$

Следуя примечанию 1. § 1 и положив в (2.10) $\sigma_0 = 0$, которое входит явно, получаем характеристический определитель для случая действия «следящей» нагрузки в следующей форме:

$$\delta = -4\gamma^6\mu_0^3\gamma h\left(1 - \frac{\operatorname{sh} 2\gamma h}{2\gamma h}\right) \tag{2.11}$$

Учитывая неравенство (0.1) и неравенство $\operatorname{sh}2\gamma h > 2\gamma h$, из (2.11) получаем, что $\delta > 0$, то есть $\delta \neq 0$. Таким образом, приходим к выводу, что состояние равновесия при действии давления при $x_3 = \pm h$ в виде «следящей» нагрузки является устойчивым. Заметим, что этот результат получен для тела с потенциалом произвольной формы.

В случае действия «мертвой» нагрузки, учитывая неравенство (0.1), а также то обстоятельство, что при сжатии $\sigma_0 < 0$, из (2.10) получаем одно уравнение, корни которого имеют физический смысл, в следующем виде:

$$1 - \frac{2\mu_0 + \sigma_0}{2\mu_0 - \sigma_0}\frac{\operatorname{sh} 2\gamma h}{2\gamma h} = 0 \tag{2.12}$$

Уравнение (2.12) по форме совпадает с соответствующими уравнениями [1, 4] для задачи об устойчивости полосы.

§ 3. *Круговые пластины*. Рассмотрим устойчивость круговой пластины ($0 \leq r \leq R$; $-h \leq x_3 \leq +h$), которая при $r = R$ соприкасается без трения со стенками абсолютно жесткого цилиндра, а при $x_3 = \pm h$ загружена равномерным давлением в виде «мертвой» или «следящей» нагрузки. Исследование выполним для осесимметричной задачи. Из (1.7) и (1.3) в этом случае получаем при $r = R$ следующие граничные условия:

$$u_r = 0, \quad \mu_0\frac{\partial u_r}{\partial r} = 0 \tag{3.1}$$

$$\mu_0\left(\frac{\partial u_r}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial r}\right) = 0, \qquad 2\mu_0\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + p = 0 \tag{3.2}$$

Из (1.6) получаем граничные условия при $x_3 = \pm h$ в случае действия «мертвой» нагрузки в следующем виде:

$$\begin{gathered}(2\mu_0 - \sigma_0)\frac{du_r}{\partial x_3} + (\mu_0 - \sigma_0)\left(\frac{\partial u_3}{\partial_r} - \frac{\partial u_r}{\partial x_3}\right) = 0\\ (2\mu_0 - \sigma_0)\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + p = 0\end{gathered} \tag{3.3}$$

Согласно (1.11) общее решение для рассматриваемого случая можно представить в такой форме:

$$u_r = -\frac{\partial^2}{\partial r \partial x_3}\chi, \quad u_\theta = 0, \quad u_3 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\chi$$
$$p = \mu_0 \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\chi \tag{3.4}$$

где χ — осесимметричная бигармоническая функция.

Бигармоническую осесимметричную функцию χ, удовлетворяющую условиям (3.1) на торцах, представим в следующем виде: для изгибной формы потери устойчивости —

$$\chi = (A \operatorname{ch} \gamma x_3 + B\gamma x_3 \operatorname{sh} \gamma x_3)\, J_0(\gamma r); \qquad \gamma = \frac{\varkappa_k}{R} \tag{3.5}$$

и для потери устойчивости с образованием шейки —

$$\chi = (A \operatorname{sh} \gamma x_3 + B\gamma x_3 \operatorname{ch} \gamma x_3)\, J_0(\gamma r) \tag{3.6}$$

В (3.5) и (3.6) введены обозначения: $J_0(\alpha)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка; $\varkappa_k$ — k-ый корень уравнения $J_0'(\varkappa) = 0$.

Рассмотрим вначале случай действия «мертвых» нагрузок, так как при действии «следящих» нагрузок результаты можно получить из рассматриваемого случая, следуя примечанию 1, § 1. Подставляя выражение (3.5) в граничные условия (3.3), после ряда преобразований получаем характеристическое уравнение в следующем виде:

$$\delta = 0, \quad \delta = \det \| a_{ij} \|, \quad i, j = 1, 2 \tag{3.7}$$

В (3.7) введены следующие обозначения:

$$a_{11} = -\gamma^3 (2\mu_0 - \sigma_0) \operatorname{ch} \gamma h, \quad a_{12} = -\gamma^3 [(2\mu_0 - \sigma_0)\gamma h \operatorname{sh} \gamma h + 2\mu_0 \operatorname{ch} \gamma h]$$
$$a_{21} = -\gamma^3 (2\mu_0 - \sigma_0) \operatorname{sh} \gamma h, \quad a_{22} = -\gamma^3 [(2\mu_0 - \sigma_0)\gamma h \operatorname{ch} \gamma h - \sigma_0 \operatorname{sh} \gamma h] \tag{3.8}$$

После преобразований характеристический определитель можно представить в следующем виде:

$$\delta = \gamma^6 (2\mu_0 - \sigma_0)^2 \gamma h \left(1 - \frac{2\mu_0 + \sigma_0}{2\mu_0 - \sigma_0}\, \frac{\operatorname{sh} 2\gamma h}{2\gamma h}\right) \tag{3.9}$$

Подставляя выражения (3.6) для случая потери устойчивости с образованием шейки в граничные условия (3.3), также получаем характеристический определитель в виде (3.9). Таким образом, две различные формы потери устойчивости (изгибная и с образованием шейки) соответствуют одному и тому же характеристическому уравнению, следовательно, имеют одну и ту же критическую нагрузку.

Следуя примечанию 1, § 1 и положив в (3.9) $\sigma_0 = 0$, которое входит явно, получаем характеристический определитель для случая действия «следящей» нагрузки в следующем виде:

$$\delta = 4\gamma^6 \mu_0^2 \gamma h \left(1 - \frac{\operatorname{sh} 2\gamma h}{2\gamma h}\right) \tag{3.10}$$

В результате анализа выражения (3.10), как и в случае прямоугольной пластины, приходим к выводу об устойчивости состояния равновесия при $x_1 = \pm h$ «следящей» нагрузки для тела с потенциалом произвольной формы. В случае действия «мертвой» нагрузки снова приходим к уравнению (2.12), анализ которого выполним в следующем параграфе.

§ 4. *Примеры.* В настоящем параграфе рассмотрим примеры для случая действия «мертвой» нагрузки при $x_1 = \pm h$, то есть выполним анализ уравнения (2.12) для различных теорий.

Из (1.8) и (2.12) для теории конечных докритических деформаций получаем следующее выражение для определения критической нагрузки:

$$(\sigma_0)_{\text{кр}} = 2\left[\left(\frac{\partial}{\partial A_1^0} + \frac{\partial}{\partial A_2^0}\right)\Phi^0\Big|_{A_i^0=0}\right] \min\left\{\frac{2\gamma h - \operatorname{sh} 2\gamma h}{2\gamma h + \operatorname{sh} 2\gamma h}\right\} \tag{4.1}$$

Из выражений (1.9) и (2.12) для первого и второго вариантов теории малых докритических деформаций получаем следующее выражение для определения критической нагрузки:

$$(\sigma_0)_{\text{кр}} = 2\left[\frac{\partial}{\partial A_2^0}\Phi^0\Big|_{A_i^0=0}\right] \min\left\{\frac{2\gamma h - \operatorname{sh} 2\gamma h}{3\operatorname{sh} 2\gamma h - 2\gamma h}\right\} \tag{4.2}$$

Для тонкостенных пластин ($\gamma h < 1$) из (4.1) для теории конечных докритических деформаций с точностью до $(\gamma h)^4$ получаем

$$(\sigma_0)_{\text{кр}} \approx -\left[\left(\frac{\partial}{\partial A_1^0} + \frac{\partial}{\partial A_2^0}\right)\Phi^0\Big|_{A_i^0=0}\right] \frac{2}{3}(\gamma_1 h)^2\left[1 - \frac{2}{15}(\gamma_1 h)^2\right] \tag{4.3}$$

Для тонкостенных пластин ($\gamma h < 1$) из (4.2) для первого и второго вариантов теории малых докритических деформаций с точностью до $(\gamma h)^4$ получаем следующее выражение для определения критической нагрузки:

$$(\sigma_0)_{\text{кр}} \approx -\left[\frac{\partial}{\partial A_2^0}\Phi^0\Big|_{A_i^0=0}\right] \frac{2}{3}(\gamma_1 h)^2\left[1 - \frac{4}{5}(\gamma_1 h)^2\right] \tag{4.4}$$

В (4.3) и (4.4) введены следующие обозначения: $\gamma_1 = \pi\sqrt{a^{-2} + b^{-2}}$ — для прямоугольной пластины; $\gamma_1 = \varkappa_1 R^{-1}$ — для круглой пластины.

Представим упругие потенциалы в виде рядов; для теории конечных докритических деформаций

$$\Phi^0(A_1^0, A_2^0) = \sum_{i,j} C_{ij}(A_1^0)^i (A_2^0)^j \tag{4.5}$$

а также для первого и второго вариантов теории малых докритических деформаций

$$\Phi^0(A_2^0, A_3^0) = \sum_{i,j} \varkappa_{ij}(A_2^0)^i (A_3^0)^j \tag{4.6}$$

В результате из (4.3) и (4.5) получаем для теории конечных докритических деформаций

$$(\sigma_0)_{\text{кр}} \approx -\frac{1}{2} p_{\text{эл}} \left| 1 - \frac{2}{15} (\gamma_1 h)^2 \right|, \quad p_{\text{эл}} = \frac{4}{3} (C_{10} + C_{01}) (\gamma_1 h)^2 \quad (4.7)$$

а из (4.4) и (4.6) — для первого и второго вариантов теории малых докритических деформаций

$$(\sigma_0)_{\text{кр}} \approx -\frac{1}{2} p_{\text{эл}} \left| 1 - \frac{4}{5} (\gamma_1 h)^2 \right|, \quad p_{\text{эл}} = \frac{4}{3} \mu_{10} (\gamma_1 h)^2 \qquad (4.8)$$

В (4.7) и (4.8) через $p_{\text{эл}}$ обозначена эйлерова сила при равномерном сжатии в плоскости пластины, вычисленная с привлечением гипотезы Кирхгофа—Лява.

Из (4.7) и (4.8) следует, что при действии «мертвой» нагрузки при $x_1 = \pm h$ состояние равновесия является неустойчивым.

Выводы. Вышеизложенные результаты для прямоугольной и круговой пластин, а также результаты [1, 2] для полосы и стержня дают возможность сделать следующие общие выводы, относящиеся к вопросу устойчивости упругих несжимаемых тел, которые помещены без трения между абсолютно жесткими стенками и к боковым поверхностям которых приложено равномерное давление в виде «следящей» или «мертвой» нагрузок.

1) Состояние равновесия является устойчивым, если к боковой поверхности давление приложено в виде «следящей» нагрузки.

2) Состояние равновесия является неустойчивым, если к боковой поверхности давление приложено в виде «мертвой» нагрузки.

3) В случае действия «мертвой» нагрузки величины критической нагрузки для тонких (длинных) тел приблизительно в два раза меньше эйлеровой силы при осевом сжатии.

4) Изгибная форма потери устойчивости и форма потери устойчивости с образованием шейки имеют одну и ту же критическую нагрузку.

Институт механики АН УССР
Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 10 I 1978

Ա. Ն. ԳՈՒԶ, Ա. Վ. ՆԱՎՈՅԱՆ

ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԿՈՂՄՆԱՅԻՆ ՃՆՇՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ ՉՍԵՂՄՎՈՂ ԹԻԹԵՂՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում հետազոտված է չսեղմվող ուղղանկյուն և շրջանային թիթեղների կայունությունը, որոնք առանց շփման տեղավորված են բացարձակ կոշտ պատերի միջև և որոնց կողմնային մակերևույթներին կիրառված է հավասարաչափ ճնշում «հետևող» կամ «մեռած» բեռնավորումների տեսքով: Արդյունքները ստացված են ընդհանուր տեսքով եռաչափ գծայնացված *կայունության տեսությունների համար վերջավոր և փոքր նախակրիտիկական դեֆորմացիաների դեպքում։*

Ապացուցված են հետևյալ դրույթները՝ 1) Հավասարակշռության վիճակը կլինի կայուն, եթե կողմնային մակերևույթներին կիրառված լինի «հետևող» բեռնավորում, 2) Հավասարակշռության վիճակը կլինի անկայուն, եթե կողմնային մակերևույթներին կիրառված լինի «մեռած» բեռնավորում, 3) «մեռած» բեռնավորման դեպքում կրիտիկական բեռնավորումը բարակ թիթեղների համար մոտավորապես երկու անգամ փոքր է լինում էյլերյան ուժից. 4) Ճկման ձևով կայունության կորուստ և կայունության կորուստ վզիկի առաջացման ձևով ունեն նույն կրիտիկական բեռնավորումը։

ON STABILITY OF INCOMPRESSIBLE PLATES UNDER UNIFORM LATERAL PRESSURE

A. N. GOOZ, A. V. NAVOYAN

S u m m a r y

The investigation on the stability of incompressible rectangular and circular plates placed without friction between absolutely frigid walls, their lateral surfaces being subjected to uniform compressive forces of the "following" and "non-following" (dead) type, is described. The results have been obtained in general form for three-dimentional linearized theories of elastic stability for finite and small critical deformations.

The following statements have been proved:

1) The equilibrium is stable when ;compressive forces, applied to lateral surfaces, are of the "following" type;

2) The equilibrium is instable when compressive forces, applied to lateral surfaces, are the "non-following" (dead) type;

3) When compressive forces are of the dead type, the critical forces for thin plates are about twice less than Eyler's forces;

4) The flexion type of stability loss and that forming a neck are of the same critical force.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих несжимаемых тел при равномерном боковом давлении. Прикл. механика, 1977, т. 13, в. 11.
2. *Гузь А. Н., Навоян А. В.* Об устойчивости несжимаемого стержня при равномерном боковом давлении. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1978, т. 31, № 5.
3. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. Прикл. механика, 1976, т. 12, в. 6.
4. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих несжимаемых тел при всестороннем сжатии. Прикл. механика, 1976, т. 12, в. 11.

5. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии «мертвой» нагрузкой». Прикл. механика, 1976, т. 12, в. 12.
6. *Гузь А. Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. К., «Наукова думка», 1971, с. 276.
7. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. К., «Наукова думка», 1973, с. 270.
8. *Гузь А. Н.* Достаточные условия применимости метода Эйлера для случая «следящей» нагрузки, заданной на части поверхности тела. Докл. АН УССР, сер. А, 1977, 10.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 1, 1979 Механика

Г. П. ЧЕРЕПАНОВ, В. М. СМОЛЬСКИЙ

К РЕШЕНИЮ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ

Основными прочностными и пространственными характеристиками многослойной панели являются:

1. Изгибная жесткость панели, пропорциональная величине [1]

$$c_1(h) = c_1(h_1, h_2, \ldots, h_n) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} E_i(a_i^3 - a_{i-1}^3)$$

$$a_i = \sum_{j=0}^{i} h_j, \quad h_0 = 0$$

2. Предел пропорциональности, характеризующий условие работы панели в упругой области

$$c_2(h) = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n} E_i h_i \varepsilon, \qquad \varepsilon = \min_{1\leq i\leq n}\left\{\frac{\sigma_{\Pi i}}{E_i}\right\}$$

3. Вязкость разрушения панели [2]

$$c_3(h) = K_C = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n} K_C^{(i)} h_i$$

4. Вес панели, пропорциональный величине

$$c_4(h) = P = \sum_{i=1}^{n} h_i \rho_i$$

5. Толщина панели (объем панели пропорционален толщине)

$$c_5(h) = h = \sum_{i=1}^{n} h_i$$

Здесь введены следующие обозначения: h_i — толщина i-ого слоя панели; E_i, $\sigma_{\Pi i}$, $K_C^{(i)}$, ρ_i — соответственно, модуль упругости, предел пропорциональности, вязкость разрушения и плотность материала i-ого слоя. Для многослойной панели через n, K_C, P, h обозначены число слоев, вязкость разрушения, приведенный вес и толщина соответственно.

При выборе n и h_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ стараются добиться возможно больших значений характеристик $c_1(h)$, $c_2(h)$ и $c_3(h)$ и возможно меньших значений $c_4(h)$ и $c_5(h)$. Поэтому общую многокритериальную задачу оптимального проектирования многослойной панели можно сформулировать следующим образом (критерий Парето (3)):

$$\max \sum_{j=1}^{5} \lambda_j c_j(h), \quad \lambda_j \begin{cases} >0, & j=1,\ 2,\ 3 \\ <0, & j=4,\ 5 \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{5} |\lambda_j| = 1 \tag{1.1}$$

Величины $|\lambda_j|$ характеризуют важность отдельного критерия в многокритериальной задаче и выбираются при постановке задачи, либо по уже известным решениям однокритериальных задач [3, 4], либо «волевым» решением группой экспертов.

Другим подходом сведения многокритериальной задачи к задаче с одним критерием является выбор одного критерия в качестве главного, причем на остальные характеристики панели накладываются ограничения в форме неравенств. Если при этом в задаче есть один параметр, по которому критерии меняются монотонно, удается дать наглядную интерпретацию множителям λ_j. В нашей задаче в качестве характерного параметра можно взять параметр t пропорционального изменения толщины панели $h_i = h_i^* t$. По этому параметру критерии можно разбить на две группы: одни улучшаются с увеличением t (увеличение изгибной жесткости панели), другие ухудшаются (увеличение вязкости разрушения, минимум веса и толщины панели); предел пропорциональности не меняется с изменением t.

Многокритериальные задачи возникают тогда, когда есть критерии из различных групп (противоречивые критерии), иначе решение оптимальной задачи тривиально. Например, решение задачи

$$\max_{n,\, h_i} [\lambda_3 K_C - \lambda_4 P], \quad \lambda_j > 0, \quad j = 3,\ 4$$

сводится к определению такого t, при котором достигается

$$\max_{1 \le t < \infty} [\lambda_3 K_C^{(0)}(h_{i0}) - \lambda_4 h_{i0} \rho_i]$$

После разбиения критериев на группы по характерному параметру удобно сначала оценить критерии по их сложности и наиболее сложный взять в качестве основного (в наших условиях это, по-видимому, первый критерий).

Рассмотрим следующую задачу:

$$\max_{h_i} c_1(h) \tag{1.2}$$

при ограничениях

$$c_3(h) \geqslant K_0 \tag{1.3}$$

$$c_j(h) \leqslant c_{j0}, \; j = 2,\ 4,\ 5 \tag{1.4}$$

Поскольку критерий (1.2) монотонно растет с увеличением толщины любого слоя, решение задачи (1.2)—(1.4) находится на границе ограничений (1.3)—(1.4). Поэтому решение этой задачи распадается на решение нескольких задач с ограничениями типа равенства и проверкой выполнения для этих решений оставшихся ограничений. Решение общей задачи получается выбором наилучшего решения из конечного числа решений этих задач. Полученные вспомогательные задачи методом множителей Лагранжа сводится к решению задачи с критерием (1.1); однако параметры λ_i определяются в ходе решения задачи; таким образом, устанавливается связь между множителями λ_i и константами K_0, c_{in} в ограничениях [5].

Следует заметить, что поставленная задача непрерывна по h_i и дискретна по n. Решение по дискретному параметру n производится полным перебором. В дальнейшем считаем n фиксированным и решаем задачу по непрерывным параметрам.

Из вспомогательных задач рассмотрим как наиболее сложную следующую задачу:

$$\max_{h_i} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} E_i (a_i^3 - a_{i-1}^3), \qquad a_i = \sum_{j=0}^{i} h_j, \qquad h_0 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} [K_C^{(i)}(h_i) - K_0] h_i = 0 \tag{1.5}$$

Остальные ограничения не выписываем; их учет производится в конце решения задачи.

Составим функцию Лагранжа

$$F(h_i, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{3} E_i (a_i^3 - a_{i-1}^3) + \lambda h_i (K_C^{(i)} - K_0) \right]$$

и необходимые условия для определения оптимальных значений h_i и λ

$$\frac{\partial F}{\partial h_i} = \sum_{k=i}^{n} E_k (a_k^2 - a_{k-1}^2) + \lambda f_i(h_i) = 0 \tag{1.6}$$

$$f_i(h_i) = K_C^{(i)}(h_i) - K_0 + h_i \frac{dK_C^{(i)}(h_i)}{dh_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Вместо системы уравнений (1.6) рассмотрим эквивалентную систему, полученную из последнего уравнения системы (1.6) и последовательных разностей i-ого и $(i+1)$-ого уравнений системы (1.6)

$$E_n h_n \left(h_n + 2 \sum_{j=0}^{n-1} h_j \right) + \lambda f_n(h_n) = 0 \tag{1.7}$$

$$E_i h_i \left(h_i + 2 \sum_{j=0}^{i-1} h_j \right) + \lambda [f_i(h_i) - f_{i+1}(h_{i+1})] = 0 \tag{1.8}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Соотношение (1.5) дополняет условия (1.7), (1.8) для определения λ, h_i.

Примечательно, что система уравнений (1.8) не содержит K_0, поэтому можно, задавая λ, рекуррентно по i выразить все h_i через λ и h_1. Подставив K_0 из (1.5) в (1.7), получаем еще одну связь h_n и h_1. Затем решаем полученное уравнение численно и получаем для данного λ оптимальные толщины всех слоев и величины $K_0(\lambda)$, $c_{j}(\lambda)$ ($j = 2, 4, 5$). По графикам этих монотонных функций от λ определяем то значение λ, при котором все ограничения выполнены (одно из них является равенством).

Таким образом, при решении задачи считается заданной не величина K_0, а значение λ, по которому потом определяется $K_0(\lambda)$; поэтому важно указать границы изменения величин λ и h_i. Для этого нужно провести конкретное исследование функций $f_i(h_i)$.

Удобна и реалистична следующая аппроксимация:

$$K_C^{(i)}(h_i) = \left[c_i + \frac{d_i}{1+2x_i^2} \right]^{1/2}$$

$$c_i = [K_{IC}^{(i)}]^2, \quad d_i = [K_C^{(i)}(h_0)]^2 - c_i, \quad x_i = \frac{h_i}{h_{i0}} - 1 > 0$$

В этом случае

$$f_i(h_i) = \frac{1}{K_C^{(i)}(h_i)} \left[c_i + d_i \frac{1-2x_i}{(1+2x_i^2)^2} \right] - K_0$$

Отсюда следует, что при $h_n > 1.5\, h_{n0}$ функция $f_n(h_n)$ отрицательна и для выполнения соотношения (1.7) необходимо неравенство $\lambda > 0$. Тогда во всех соотношениях (1.8) будет

$$f_i(h_i) - f_{i+1}(h_{i+1}) < 0$$

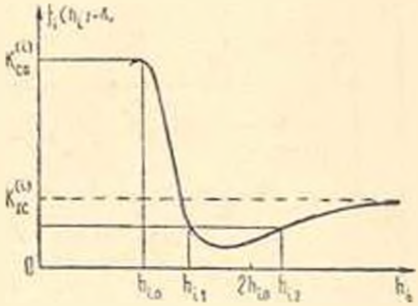
причем эта разность монотонно убывает с увеличением i (считается, что E_i растет с ростом i). Это соответствует постепенному приближению h_i к h_{i0} с уменьшением i.

Примерный график функции $f_i(h_i) - K_0$ показан на фиг. 1; при $K_0 > \max\limits_i K_{IC}^{(i)}$ существует отрицательный относительный минимум $f_i(h_i)$ и поэтому, вообще говоря, две точки h_{i1} и h_{i2} (фиг. 1), которые удовлетворяют необходимым условиям. Ясно, что точки $h_{i2} > h_{i1}$ надо брать для слоев с большим номером, однако они могут не удовлетворять ограничениям (1.4). Кроме того, в решении надо учитывать и граничную точку $h_i = h_{i0}$. Таким образом, непрерывная задача (1.2)—(1.4) сводится к проверке 3^n точек вида

$$\{h_{1j_1}, h_{2j_2}, \ldots, h_{nj_n}\}$$

$$(j_i = 0, 1, 2; \; i = 1, 2, \ldots, n)$$

Из проведенного исследования вытекает, что для многослойных панелей из материалов, у которых существенно различны модули упругости, оптимальными будут следующие величины толщин слоев: для всех слоев, кроме последнего, надо брать $h_i = h_{i0}$, а для последнего слоя — $h_n = h_{n2}$. Для материалов с близкими характеристиками надо проводить расчет по формулам (1.5), (1.7), (1.8).



Фиг. 1. Примерный график функции $f_i(h_i) + K_{ic}$.

Построенный принцип выбора оптимальной многослойной панели по пяти основным ее характеристикам следует рекомендовать как наиболее реалистический принцип оптимального проектирования авиационных слоистых конструкций. Заметим, что в настоящее время в инженерной практике обычно проектируют панели лишь по двум характеристикам (по жесткости и весу).

Примеры. В качестве первого примера проведем расчет шестислойной панели из следующих листовых материалов: алюминиевого сплава 7075-Т6 ($h_0 = 0.26$ *см*, $K_{IC} = 4200$ *кг/см*$^{3/2}$, $K_C(h_0) = 9165$ *кг/см*$^{3/2}$, $E = 0.71 \times 10^6$ *кг/см*^{2}), титанового сплава ВТ14 ($h_0 = 0.1$ *см*, $K_{IC} = 5500$ *кг/см*$^{3/2}$, $K_C(h_0) = 9420$ *кг/см*$^{3/2}$, $E = 1.15 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}), стали ВКС-1 ($h_0 = 0.1$ *см*, $K_{IC} = 6300$ *кг/см*$^{3/2}$, $K_C(h_0) = 9030$ *кг/см*$^{3/2}$, $E = 2.05 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}).

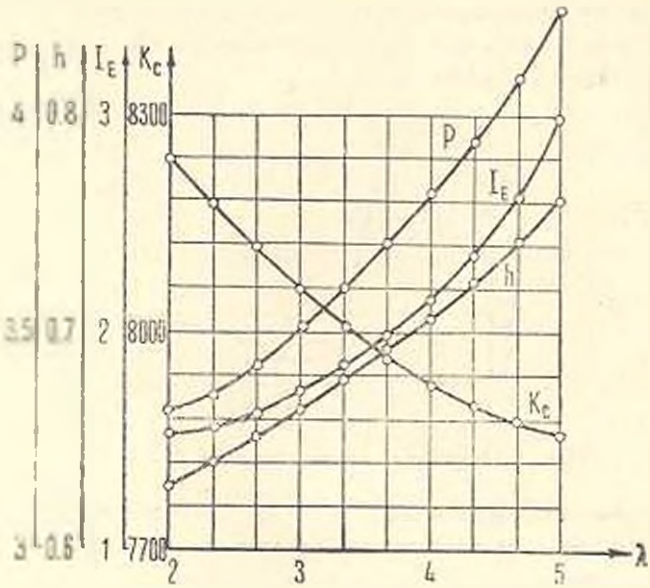
Графики зависимостей $c_{m}(\lambda)$ приведены на фиг. 2. Расчетом подтверждается решение для материалов с различными модулями упругости, изложенное выше.

В качестве второго примера спроектируем шестислойную панель из следующих алюминиевых сплавов с близкими характеристиками: сплава 7075-Т6 (его характеристики даны в первом примере); сплава Д16 ($h_0 = 0.2$ *см*, $K_{IC} = 4000$ *кг/см*$^{3/2}$, $K_C(h_0) = 9000$ *кг/см*$^{3/2}$, $E = 0.72 \times 10^6$ *кг/см*^{2}) и сплава АК8 ($h_0 = 0.22$ *см*, $E = 0.73 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}, $K_{IC} = 4000$ *кг/см*$^{3/2}$, $K_C(h_0) = 8200$ *кг/см*$^{3/2}$).

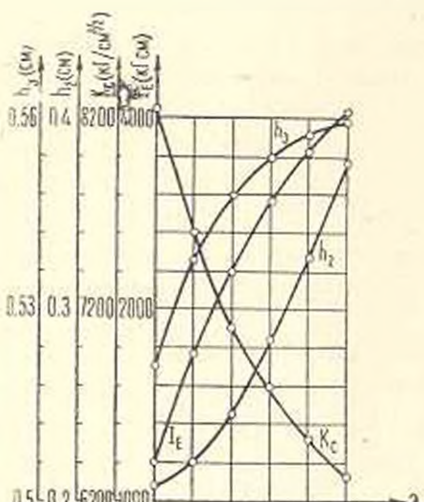
Графики зависимостей представлены на фиг. 3, 4.

Толщины отдельных слоев отличаются от величин h_{i0} при больших значениях вязкости разрушения и монотонно изменяются с увеличением λ.

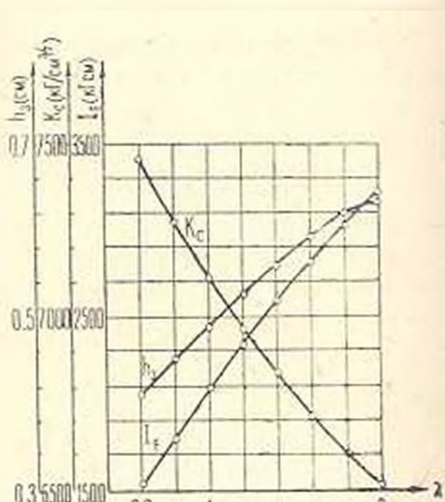
Замечание. Несмотря на то, что рассматриваемая задача решается методами оптимизации по параметрам, она является задачей оптимального проектирования в начальной постановке, поскольку, как показано в [2], ограничения в виде плоского напряженного состояния панели приводят к критерию (1.3). Разумеется, параметрическая оптимизация многослойной панели, предложенная в [2] и в настоящей статье, является определенным



Фиг. 2. Зависимость приведенного веса ($кг/см^2 \cdot 10^3$), толщины ($см$), изгибной жесткости ($кг\ см \cdot 10^{-[illegible]}$) и вязкости разрушения ($кг/см^{3/2}$) от λ.



Фиг. 3. Результаты расчета для материалов с близкими характеристиками (меняется толщина 2-х слоев).



Фиг. 4. Результаты расчета для материалов с близкими характеристиками (меняется толщина третьего слоя)

упрощением общей задачи оптимального проектирования панели. Это упрощение основано на схематизации физического процесса деформации и разрушения панели (что отражено характеристиками c_1, c_2, c_3), а также на схематизации геометрической структуры панели (характеристики c_1, c_2). Оно не учитывает, например, динамических волновых эффектов, докритического роста трещин и многого другого, когда следует оптимизировать другие критерии. Общая задача оптимизации многослойной панели весьма неопределенна и ее решение невозможно без таких упрощений. Рассматриваемая постановка может считаться начальной при наличии аварийного и безаварийного режимов работы панели [2].

Заключение. Предложенный подход оптимального проектирования многослойных панелей с помощью множителя Лагранжа дает возможность установить связь между этим множителем в общем критерии многокритериальной задачи и правой частью ограничения типа равенства в однокритериальной задаче. Общая задача оптимального проектирования многослойной панели распадается на набор вспомогательных однокритериальных задач.

Московский авиационный
институт

Поступила 24 XI 1977

Գ. Պ. ՉԵՐԵՊԱՆՈՎ, Վ. Մ. ՍՄՈԼՍԿԻ

ԲԱԶՄԱՇԵՐՏ ՊԱՆԵԼՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՆԱԽԱԳԾՄԱՆ ԲԱԶՄԱՉԱՓԱՆԻՇԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Բազմաշերտ պանելի օպտիմալ նախագծման բազմաչափանիշային խնդիրը բերվել է օժանդակ միաչափանիշային խնդիրներին, որոնք առաջարկվում է լուծել Լագրանժի բազմապատկիչների մեթոդով։

Կառուցվել է ըստ հինգ հիմնական բնորոշիչների օպտիմալ բազմաշերտ պանելների ընտրության սկզբունքը, որն առաջարկվում է որպես շերտավոր ավիացիոն պանելների օպտիմալ նախագծման ավելի գործնական սկզբունք։

Այդ սկզբունքի հիման վրա լուծվել է քայքայման ֆիքսված մածուցիկությամբ և ծռման ամենամեծ կոշտությամբ բազմաշերտ պանելի օպտիմալ նախագծման խնդիրը։

ON THE SOLUTION OF A MULTICRITERIA PROBLEM OF OPTIMAL DESIGN OF MULTILAYERED PANELS

G. P. CHEREPANOV, V. M. SMOLSKY

Summary

The multicriteria problem of optimal design of a multilayered panel is reduced to a set of auxiliary one-criterion problems. The auxiliary problem of design of the multilayered panel of maximum flexural rigidity and given fracture toughness is solved as an example.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
2. *Черепанов Г. П., Смольский В. М., Таги-Заде А. Г.* Об оптимальном проектировании некоторых инженерных материалов. «Изв. АН Арм. ССР, Механика», 1976, т. XXIX, № 3.
3. *Trojanowski St.* Wielokryteriowa optimalizacja w sensie Pareto niewspolimierych funkcji celu. Prz. statist., 1975, v. 22, No. 3, 427—433.
4. *Бартель Д. Л., Маркс Р. В.* Оптимальное проектирование механических систем при противоречивых критериях, конструирование и технология машиностроения. Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков, сер. Б, 1974, № 1, 72—80.
5. *Смольский В. М.* Апостериорная оценка промежуточного параметра в комбинированном методе поиска экстремума. Автоматизация управления нефтеперерабатывающей и нефтехимической промышленности, М., 1972, № 2, 77—81.