ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1978

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXI, № 2, 1978 Механика

Л. А. МОВСИСЯН

К УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ СИЛОВЫХ И ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Устойчивость цилиндрических оболочек с упругим заполнителем достаточно хорошо изучена при силовых воздействиях, когда начальное напряженное состояние однородное, устойчивость же оболочек, находящихся в произвольном температурном поле и при произвольных нагрузках, исследована недостаточно полно.

Ниже рассматривается устойчивость свободно опертой цилиндрической оболочки с заполнителем, когда внешняя нагрузка и температура на внешней поверхности цилиндра меняются произвольным образом вдоль образующей.

Решение задачи состоит из трех этапов:

а) определение температуры в оболочке и заполнителе;

б) определение температурных напряжений в оболочке и заполнителе (решение уравнений невозмущенного состояния);

в) определение критических параметров (решение уравнений устойчивости).

Каждый из этих этапов рассмотрим в отдельности.

1. Пусть имеется цилиндрическая оболочка радиуса R, толщины h и длины l, которая наполнена упругим материалом. Принимается, что материал заполнителя во много раз податливее материала оболочки. Для простоты принимается, что заполнитель — сплошной (не полый).

Как обычно, предположим, что температура по толщине оболочки меняется линейно

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2} + z\,\frac{t_1 - t_2}{h} \tag{1.1}$$

где t_1 — заданная температура на внешней поверхности, а t_2 — искомая температура на внутренней поверхности (на контакте).

В заполнителе температура должна быть определена из уравнения теплопроводности [1]

$$\frac{\partial^2 t_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial t_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 t_0}{\partial x^2} = 0 \tag{1.2}$$

и из граничных условий

$$\begin{aligned} t_0 &= t^0(r) \quad \text{при} \quad x = 0 \\ t_0 &= t^1(r) \quad \text{при} \quad x = l \end{aligned} \tag{1.3}$$

Представим t_0 в виде ряда

$$t_0 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(r)\sin\lambda_k x, \qquad C_k = \frac{2}{l}\int_0^l t_0 \sin\lambda_k x\,dx, \qquad \lambda_k = \frac{k\pi}{l} \tag{1.4}$$

Умножая (1.2) на $\frac{2}{l}\sin\lambda_k$ и интегрируя от 0 до l, при этом учитывая граничные условия (1.3), получим [2]

$$\frac{d^2C_k}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dC_k}{dr} - \lambda_k^2 C_k = \frac{2k\pi}{l^2}\left[(-1)^k t^1(r) - t^0(r)\right] \tag{1.5}$$

Решение (1.5) при условии конечности t_0 при $r=0$ имеет вид

$$C_k(r) = c_k I_0(\lambda_k r) + c_k^0(r) \tag{1.6}$$

где $c_k^0(r)$ — частное решение, соответствующее правой части (1.5).

Представим t_1 и t_2 в виде рядов

$$t_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\lambda_k x, \qquad t_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\lambda_k x \tag{1.7}$$

Предполагая для определенности, что на поверхности контакта оболочки с заполнителем имеется идеальный тепловой контакт [1]

$$\begin{aligned} &t = t_0; \quad t_2 = t_0 \\ &K\frac{\partial t}{\partial z} = K_0\frac{\partial t_0}{\partial r}; \quad K\frac{t_1 - t_2}{h} = K_0\frac{\partial t_0}{\partial r} \end{aligned} \qquad \text{при } r = R \tag{1.8}$$

где K и K_0 — коэффициенты теплопроводности соответственно оболочки и заполнителя*), для неизвестных коэффициентов получим

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{a_k - c_k^0(R) - \dfrac{K_0}{K} h c_k^{0\prime}(R)}{I_0(\lambda_k R) + \dfrac{K_0}{K} h\lambda_k I_1(\lambda_k R)} \\ b_k &= c_k I_0(\lambda_k R) + c_k^0(R) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь и в дальнейшем штрих означает дифференцирование по r.

Сходимость ряда (1.4) можно улучшить, выделив из него

$$\left(1 - \frac{x}{l}\right)t^0(r) + \frac{x}{l}t^1(r)$$

*) Здесь и в дальнейшем температурные и упругие характеристики оболочки обозначаются без индексов, а заполнителя — с нулевым индексом.

Таким образом, по (1.4), (1.6) и (1.7) определятся неизвестные температуры t_2 и t_0.

2. Для определения докритических усилий в оболочке должны быть совместно решены уравнения равновесия оболочки и заполнителя.

Эти задачи также решаются весьма просто. В частности, необходимые нам перемещения и напряжения в заполнителе определяются формулами

$$U = \sum_{m=0}^{\infty} U_m \cos \lambda_m x, \quad W = \sum_{m=1}^{\infty} W_m \sin \lambda_m x$$
$$\sigma_r = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m \sin \lambda_m x, \quad \tau = \sum_{m=0}^{\infty} \tau_m \cos \lambda_m x \tag{2.1}$$

$$U_m = \lambda_m \left[C_m^{(1)} I_0(\lambda_m r) + C_m^{(2)} \frac{r}{R} I_1(\lambda_m r) \right] + U_m^0(r)$$

$$W_m = \left\{ C_m^{(1)} I_0'(\lambda_m r) + C_m^{(2)} \left[\frac{r}{R} I_1'(\lambda_m r) - \frac{3-4\nu_0}{R} I_1(\lambda_m r) \right] \right\} + W_m^0(r)$$

$$\sigma_m = 2G_0 \left\{ C_m^{(1)} \left[\lambda_m^2 I_0(\lambda_m r) - \frac{1}{r} I_0'(\lambda_m r) \right] - \right.$$
$$\left. - \frac{3-2\nu_0}{R} \left[I_0'(\lambda_m r) + \frac{1-2\nu_0 - \lambda_m^2 r^2}{rR} I_1(\lambda_m r) \right] C_m^{(2)} \right\} +$$
$$+ 2G_0 \left\{ \frac{dU_m^0}{dr} + \frac{\nu_0}{1-2\nu_0} \left(\frac{dW_m^0}{dr} + \frac{W_m^0}{r} - \lambda_m U_m^0 \right) \right\} - 2G_0 \frac{1+\nu_0}{1-2\nu_0} \alpha_0 C_m(r)$$

$$\tau_m = 2G_0 \lambda_m \left\{ C_m^{(1)} I_0'(\lambda_m r) + \left[\frac{r}{R} I_1'(\lambda_m r) - \frac{1-2\nu_0}{R} I_1(\lambda_m r) \right] C_m^{(2)} \right\} +$$
$$+ G_0 \left[\frac{dU_m^0}{dr} + \lambda_m W_m^0 \right]$$

в случае, когда на торцах отсутствуют радиальное перемещение и продольное напряжение.

Здесь U_m^0 и W_m^0 — частные решения, соответствующие заданной температуре.

Если искать решение уравнений оболочки

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} + \frac{\nu}{R} \frac{dw_0}{dx} = \frac{1-\nu^2}{Eh} [X_2^0 - X_1^0] + \alpha (1+\nu) \frac{d\Theta_0}{dx}$$

$$\frac{h^2}{12} \frac{d^4 w_0}{dx^4} + \frac{w_0}{R^2} + \frac{\nu}{R} \frac{du_0}{dx} = \frac{1-\nu^2}{Eh} [Z_1^0 - Z_2^0] + \tag{2.2}$$
$$+ \frac{1}{R} \alpha (1+\nu) \Theta_0 - \frac{h^2}{12} \alpha (1+\nu) \frac{d^2 \Theta_1}{dx^2}$$

где

$$\Theta_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}, \qquad \Theta_1 = \frac{t_1 - t_2}{h}$$

в виде рядов

$$u_0 = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos \lambda_m x, \quad w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \lambda_m x \tag{2.3}$$

и при этом неизвестные контактные нагрузки от заполнителя на оболочку также представить в виде рядов

$$X_2^0 = \sum_{m=0}^{\infty} X_m \cos \lambda_m x, \quad Z_2^0 = \sum_{m=1}^{\infty} Z_m \sin \lambda_m x \tag{2.4}$$

то вместе с контактными условиями

$$\begin{array}{ll} u_0 = U, & X_2^0 = \tau \\ w_0 = W, & Z_2^0 = \sigma, \end{array} \quad \text{при } r = R \tag{2.5}$$

получим шесть уравнений для определения шести неизвестных $C_m^{(1)}$, $C_m^{(2)}$, A_m, B_m, X_m и Z_m (их выражения из-за громоздкости не записываются).

В конечном итоге необходимые для решения задачи устойчивости начальные усилия можно представить в виде рядов

$$T_1^0 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \sum_{m=0}^{\infty} d_m \cos \lambda_m x, \quad T_2^0 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \sum_{m=0}^{\infty} e_m \cos \lambda_m x \tag{2.6}$$

где в выражения d_m и e_m входят внешняя нагрузка и температура.

3. Уравнение устойчивости оболочки берем в виде [3]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{R \partial x \partial \theta} + \frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{R \partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial \theta} -$$

$$- \frac{h^2}{12R^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\nu}{R}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{h^2}{12}\nabla^4 w +$$

$$+ \frac{1-\nu^2}{Eh}\left(T_1^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2^0 \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2}\right) + \frac{1-\nu^2}{Eh} Z = 0$$

Как показано в многочисленных исследованиях (напр., в [4]), нагрузочные члены в первых двух уравнениях несущественно влияют на значения критических параметров, поэтому они пренебрежены.

По предположению на торцах оболочки имеются условия свободного опирания, следовательно, перемещения, удовлетворяющие этим условиям, будут иметь вид

$$u = \cos n\theta \sum_{q=0}^{\infty} u_q \cos \lambda_q x$$

$$v = \sin n\theta \sum_{q=1}^{\infty} v_q \sin \lambda_q x \tag{3.2}$$

$$w = \cos n\theta \sum_{q=1}^{\infty} w_q \sin \lambda_q x$$

Нормальное давление Z определяется из решения трехмерной задачи для заполнителя с учетом контактных условий с оболочкой $\tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0$, $w = W$; $\sigma_r = Z$ для возмущенного состояния. Выражение для нормального давления можно представить в виде

$$Z = \cos n\theta \sum_{q=1}^{\infty} z_{qn} \sin \lambda_q x \tag{3.3}$$

Коэффициенты z_{qn} довольно громоздкие и сложные, но они сильно упрощаются, если воспользоваться их асимптотическим представлением для больших q и n [5, 6]

$$z_{qn} = \frac{G_0}{1-\nu_0} \sqrt{\lambda_q^2 + \frac{n^2}{R^2}} \tag{3.4}$$

Как показано в [5, 6], такое приближение дает вполне приемлемые результаты.

Учитывая (3.2)—(3.4), для w_q получим следующую бесконечную систему [7]:

$$Q_{qn} w_q - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{p=1}^{q} \left(\lambda_p^2 e_{q-p} + \frac{n^2}{R^2} d_{q-p} \right) w_p + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=q}^{\infty} \left(\lambda_p^2 e_{p-q} + \frac{n^2}{R^2} d_{p-q} \right) w_p - \sum_{p=1}^{\infty} \left(\lambda_p^2 e_{p+q} + \frac{n^2}{R^2} d_{p+q} \right) w_p \right\} = 0 \tag{3.5}$$

где через Q_{qn} обозначено

$$Q_{qn} = \frac{h^2}{12} \left(\lambda_q^2 + \frac{n^2}{R^2} \right)^2 + \frac{(1-\nu^2)\lambda_q^4}{R^2 \left(\lambda_q^2 + \frac{n^2}{R^2} \right)^2} + \frac{z_{qn}(1-\nu^2)}{Eh} -$$

$$-\frac{h^2 n^4}{12R^4}\,\frac{\dfrac{n^2}{R^2}+(2+\nu)\lambda_q^2}{\lambda_q^2+\dfrac{n^2}{R^2}} \tag{3.6}$$

Критические параметры (нагрузка и температура, при которой происходит потеря устойчивости) определяются из (3.5), как наименьшие собственные значения матрицы этой системы.

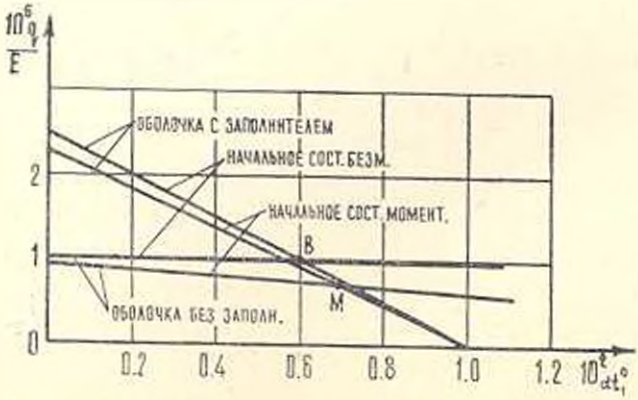
4. Рассмотрим два примера. В обоих примерах принято, как наиболее интересный случай [6], что нагревается только оболочка и что она теплоизолирована от заполнителя (получается как частный случай (1.8)— а именно: $t_1=t_1$, $t_0=0$).

Пусть на оболочку действует внешнее синусоидальное давление и такая же температура на внешней поверхности

$$Z_1^0=q\sin\frac{\pi x}{l}$$
$$t_1=t_1^0\sin\frac{\pi x}{l} \tag{4.1}$$

Расчеты проводились для оболочки $R/h=302.1$; $\pi R/l=10$; $\nu=0.3$; $\nu_0=0.5$; $E/E_0=10^4$ как с заполнителем, так и без заполнителя в предположении безмоментности и моментности начального напряженного состояния*).

Изменение критического давления в зависимости от температуры показано на фиг. 1.



Фиг. 1.

Как видно из фиг. 1, при отсутствии воздействия температуры расчет на устойчивость в предположении безмоментности начального состояния

*) Были рассмотрены определители третьего и четвертого порядков. Результаты практически совпадают.

приводит к незначительным погрешностям в значении критического давления, независимо от того, есть или нет заполнитель. При наличии же температурного воздействия, если расчет оболочки без заполнителя должен был вестись, исходя из моментности начального состояния, то уже оболочку с заполнителем вполне можно рассчитывать, исходя из безмоментной теории.

Интересно отметить еще то, что существуют критические значения внешнего давления и температуры, которые одинаковы для оболочек без заполнителя и с заполнителем (точки B и M).

Теперь изучим случай, когда на поверхности оболочки заданы постоянное давление и постоянная температура. Тогда вместо бесконечной системы (3.5) получится одно уравнение, которое после упрощения [3] принимает вид

$$\frac{T_2^0}{Eh} = \frac{h^2 n^2}{12(1-\nu^2)R^2} + \frac{\pi^4 R^4}{l^4 n^6} + \frac{G_0}{E(1-\nu_0)} \frac{R}{h} \frac{1}{n}$$

$$T_2^0 \left[1 + \frac{E_0(1-\nu^2)}{E(1-\nu_0)} \frac{R}{h}\right] = Rq + \frac{E_0 R(1+\nu)}{1-\nu_0} \alpha t_1^0 \qquad (4.2)$$

Критические параметры и формы потери устойчивости определяются весьма просто.

Для параметров $\nu = 0.3$; $\nu_0 = 0.5$; $E = 10^4 E_0$ критические значения для выражений $10^5 q/E + 20\alpha t_1^0$ при различных R/h и R/l приведены в табл. 1.

Таблица 1

$$\frac{q}{E} 10^5 + 20\alpha t_1^0$$

l/R \ R/h	100		300		500	
1	0.9578	1.696	0.05936	0.4928	0.01642	0.3056
1.5	0.6122	1.520	0.05651	0.4928	0.01104	0.3056
2	0.4601	1.460	0.02945	0.4928	0.008227	0.3056
2.5	0.3885	1.429	0.02369	0.4928	0.006592	0.3056
3	0.3059	1.419	0.01737	0.4928	0.005634	0.3056

В первых столбцах для каждого R/h помещены значения критического давления для оболочки без заполнителя ($E_0 = 0$).

Из таблицы видно, как при наличии заполнителя критические параметры очень быстро достигают своего асимптотического значения (оболочка «становится» длинной) и, во-вторых, чем длиннее оболочка, тем большее влияние оказывает температура.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 21 IX 1977

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ԼՑՈՆՈՎ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ՈՒԺԱՅԻՆ ԵՎ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է ազատ հենված լրիվ լցոնած գլանային թաղանթի կայունությունը, երբ նրա արտաքին մակերևույթի վրա տրված են բեռ և ջերմություն, որոնք կամայական ձևով են փոխվում ըստ թաղանթի ծնիչի։ Ջերմության բաշխումը, ինչպես և նախնական լարումները թաղանթում և լցոնում տրվում են շարքերի տեսքով։ Լցոնի ազդեցությունը հաշվի է առնվում միայն որպես նորմալ ճնշում։ Կրիտիկական պարամետրերի որոշումը բերված է անվերջ մատրիցի ամենափոքրագույն սեփական արժեքի գտնելուն։

Դիտարկված են երկու օրինակներ։

THE STABILITY OF CYLINDRICAL SHELLS WITH AN ELASTIC CORE UNDER TEMPERATURE AND STRESS EFFECTS

L. A. MOVSISIAN

S u m m a r y

The stability of cylindrical shells with an elastic complete core is investigated, where axially symmetrical temperature and normal pressure on the external surface are given.

Two examples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боли Б., Уэйнер Д.* Теория температурных напряжений. Изд. «Мир», 1964.
2. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.—Л., Изд. АН СССР, 1948.
3. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.
4. *Яо.* Устойчивость длинных центрально сжатых цилиндрических оболочек с упругим подкрепляющим слоем. ПМ (Тр. американского общества инженеров-механиков), сер. E, 1962, т. 29, № 2.
5. *Иванов В. А.* К определению коэффициента «постели» в задачах устойчивости оболочки вращения с упругим заполнителем. ПМ, 1974, т. X, вып. 5.
6. *Мовсисян Л. А.* Устойчивость кольца с заполнителем при силовых и температурных воздействиях. Докл. АН АрмССР, 1976, т. 64, № 2.
7. *Мовсисян Л. А.* Устойчивость цилиндрических оболочек при быстрых нагружениях. Докл. АН АрмССР, 1972, т. 55, № 4.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

Մեխանիկա XXXI, № 2, 1978 Механика

А. А. ЧАХОЯН

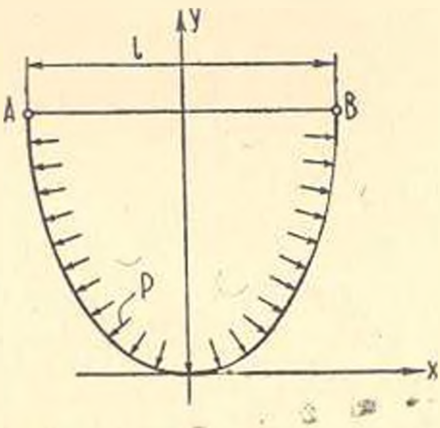
СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ МЯГКОЙ ТЯЖЕЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

1. В некоторых практических случаях представляет интерес задача о колебаниях мягкой цилиндрической оболочки, подверженной внутреннему давлению; в частности, это относится к гибкому ограждению аппарата на воздушной подушке. Но обычно при анализе колебаний таких оболочек вес оболочки не учитывается, причем возникающая при этом ошибка остается неясной. Для оценки этой ошибки ниже рассматривается задача о свободных колебаниях такой оболочки с учетом собственного веса.

Оболочка, которая считается безмоментной и нерастяжимой, закреплена двумя образующими, расположенными в одной горизонтальной плоскости (фиг. 1). Считая задачу плоской, отнесем все рассуждения к оболочке, размер которой вдоль образующей равен единице.

Дифференциальные уравнения свободных колебаний оболочки в проекциях на оси x и y имеют вид [1]

$$\rho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial s}\left(N\frac{\partial x}{\partial s}\right)+p\frac{\partial y}{\partial s}$$
$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial s}\left(N\frac{\partial y}{\partial s}\right)-p\frac{\partial x}{\partial s}-q \tag{1.1}$$



Фиг. 1.

где t — время, $x(s, t)$ и $y(s, t)$ — координаты точек срединной поверхности, s — координата по длине дуги оболочки, ρ и q — масса и вес оболочки на единицу площади ее срединной поверхности, N — окружное нормальное усилие, зависящее от времени и координаты, p — нормальное давление, величину которого мы будем считать неизменной.

Условие нерастяжимости оболочки имеет вид

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2=1 \tag{1.2}$$

Если в уравнениях (1.1) положить левые части равными нулю, то получим уравнения, определяющие форму равновесия оболочки: далее с учетом соотношений $\frac{dx}{ds} = \cos\varphi$, $\frac{dy}{ds} = \sin\varphi$ нетрудно найти [4]:

$$
\frac{ds}{d\varphi} = \frac{C}{(p + q\cos\varphi)^2}
$$
$$
N = \frac{C}{p + q\cos\varphi} \tag{1.3}
$$

Здесь φ — угол между касательной к контуру и осью x в состоянии равновесия (фиг. 2); C — постоянная, которую можно вычислить по формуле

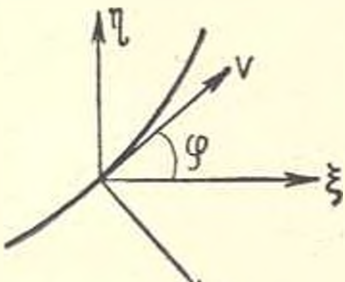
при $q < p$

$$
C = \frac{L(p^2 - q^2)}{2\left[\frac{2p}{\sqrt{p^2 - q^2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{p^2 - q^2}\,\mathrm{tg}(\varphi_0/2)}{p + q} - \frac{q\sin\varphi_0}{p + q\cos\varphi_0}\right]} \tag{1.4}
$$

при $q > p$

$$
C = \frac{L(q^2 - p^2)}{2\left[\frac{q\sin\varphi_0}{p + q\cos\varphi_0} - \frac{p}{\sqrt{q^2 - p^2}}\ln\frac{\sqrt{q^2 - p^2}\,\mathrm{tg}(\varphi_0/2) + p + q}{\sqrt{q^2 - p^2}\,\mathrm{tg}(\varphi_0/2) - p - q}\right]} \tag{1.5}
$$

где φ_0 — угол между касательной к контуру и осью x в закрепленных точках, L — длина дуги оболочки. Эти формулы можно получить из рассмотрения равновесной формы оболочки.



Фиг. 2.

2. При колебаниях можно принять

$$
\begin{aligned}
x &= x_0(s) + \xi(s, t) \\
y &= y_0(s) + \eta(s, t) \\
N &= N_0(s) + N_*(s, t)
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Здесь $x_0(s)$ и $y_0(s)$ — функции, определяющие равновесную форму контура (они находятся из решения статической задачи), $N_0(s)$ — окружное нормальное усилие в состоянии равновесия, $\xi(s, t)$ и $\eta(s, t)$ — проекции на оси x и y перемещения произвольной точки контура при колебаниях, $N_*(s, t)$ — динамическая добавка нормального усилия.

Подставляя (2.1) в (1.1) и (1.2) и пренебрегая величинами второго порядка малости с учетом условий равновесия, получим

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(N_0\frac{\partial\xi}{\partial s} + N_*\frac{dx_0}{ds}\right) + p\frac{\partial\eta}{\partial s} \\
\rho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(N_0\frac{\partial\eta}{\partial s} + N_*\frac{dy_0}{ds}\right) - p\frac{\partial\xi}{\partial s}
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

$$\frac{dx_0}{ds}\frac{\partial \xi}{\partial s}+\frac{dy_0}{ds}\frac{\partial \eta}{\partial s}=0 \tag{2.3}$$

Далее вместо перемещений ξ и η используются нормальное и тангенциальное перемещения (фиг. 2):

$$\begin{aligned} u &= \xi\sin\varphi-\eta\cos\varphi \\ v &= \xi\cos\varphi+\eta\sin\varphi \end{aligned} \tag{2.4}$$

Для удобства перейдем от аргумента s к аргументу φ с помощью (1.3); с учетом (2.4) получим

$$\begin{aligned} &\rho\frac{C}{(p+q\cos\varphi)^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=-q\cos\varphi\left(v-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial N_\lambda}{\partial\varphi} \\ &\rho\frac{C}{(p+q\cos\varphi)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=(p+q\cos\varphi)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)- \\ &\qquad -N_\lambda-q\sin\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}-v\right) \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$u=-\frac{\partial v}{\partial\varphi} \tag{2.6}$$

Исключая из этих уравнений функции N_λ и u, получаем дифференциальное уравнение относительно перемещения v

$$\begin{aligned} &\rho\frac{C}{(p+q\cos\varphi)^2}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial^4 v}{\partial t^2\partial\varphi^2}-\frac{2q\sin\varphi}{p+q\cos\varphi}\frac{\partial^3 v}{\partial t^2\partial\varphi}\right]+ \\ &\quad+(p+q\cos\varphi)\frac{\partial^4 v}{\partial\varphi^4}-2q\sin\varphi\frac{\partial^3 v}{\partial\varphi^3}+ \\ &\quad+(p+q\cos\varphi)\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}-2q\sin\varphi\frac{\partial v}{\partial\varphi}=0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Принимая по методу Фурье

$$v(\varphi,t)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(\varphi)\,T_n(t) \tag{2.8}$$

и разделяя переменные, получим два уравнения

$$\frac{d^2T_n}{dt^2}+k_n^2T_n=0 \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} &(1+\alpha\cos\varphi)\frac{d^4V_n}{d\varphi^4}-2\alpha\sin\varphi\frac{d^3V_n}{d\varphi^3}+ \\ &\quad+\left[1+\alpha\cos\varphi+\frac{\lambda_n^2}{(1+\alpha\cos\varphi)^2}\right]\frac{d^2V_n}{d\varphi^2}+ \\ &\quad+2\alpha\sin\varphi\left[\frac{\lambda_n^2}{(1+\alpha\cos\varphi)^3}-1\right]\frac{dV_n}{d\varphi}-\frac{\lambda_n^2}{(1+\alpha\cos\varphi)^2}V_n=0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $\lambda_n^2 = \gamma \dfrac{Ck_n^2}{p^3}$, $\alpha = q/p$, k_n — постоянная разделения, имеющая смысл собственной частоты.

3. Уравнение (2.10) описывает собственные формы колебаний и представляет собой линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. В частности, если $\alpha = 0$ (то есть без учета собственного веса), вместо (2.10) получается линейное уравнение с постоянными коэффициентами; его решение имеет вид [3]

$$V_n^{(0)} = c_{1n}\sin z_{1n}\varphi + c_{2n}\cos z_{1n}\varphi + c_{3n}\,\mathrm{sh}\, z_{2n}\varphi + c_{4n}\,\mathrm{ch}\, z_{2n}\varphi \tag{3.1}$$

где

$$z_{1n} = \sqrt{\sqrt{\beta_n^2 + 2\beta_n - 1} + \beta_n}$$

$$z_{2n} = \sqrt{\sqrt{\beta_n^2 + 2\beta_n - 1} - \beta_n}$$

$$2\beta_n = 1 + (\lambda_n^{(0)})^2, \qquad (\lambda_n^{(0)})^2 = \gamma \frac{L (k_n^{(0)})^2}{2\gamma_0 p}$$

$k_n^{(0)}$ — собственная частота при $\alpha = 0$. В противоположном случае, когда $p \to 0$, то есть $\alpha \to \infty$, из (2.10) получается уравнение для собственной формы колебаний тяжелой оболочки (цепи), не испытывающей внутреннего давления, ее равновесное состояние описывается цепной линией [1], [2]:

$$\cos\varphi \frac{d^4 V_n}{d\varphi^4} - 2\sin\varphi \frac{d^3 V_n}{d\varphi^3} + \left[\cos\varphi + \frac{(\lambda_n^{(1)})^2}{\cos^2\varphi}\right] \frac{d^2 V_n}{d\varphi^2} +$$

$$+ 2\sin\varphi \left[\frac{(\lambda_n^{(1)})^2}{\cos^2\varphi} - 1\right] \frac{dV_n}{d\varphi} - \frac{(\lambda_n^{(1)})^2}{\cos^2\varphi} V_n = 0 \tag{3.2}$$

где

$$(\lambda_n^{(1)})^2 = \gamma \frac{(k_n^{(1)})^2 C}{q^3}, \qquad C = \frac{L}{2} \frac{q^2}{\mathrm{tg}\,\varphi_0}$$

Приближенное решение уравнения (3.2) и определение собственных частот колебаний тяжелой цепи приведено в работе [1]. В промежуточных случаях, близких к случаю $q = 0$, то есть при $\alpha \ll 1$, собственные частоты оболочки можно приближенно определить из уравнения (2.10) методом Галеркина. Для этого примем в качестве базисных функций выражения (3.1) при соответствующих граничных условиях, то есть решения вырожденной задачи ($\alpha = 0$).

Решение уравнения (2.10) ищем в виде

$$V = \sum_{n=1}^{r} a_n V_n^{(0)} \tag{3.3}$$

где r — число членов, удерживаемых в разложении.

При этом получится система алгебраических уравнений линейных и однородных относительно постоянных a_n. Приравняв нулю определитель этой системы, получим частное уравнение. Для определения двух первых частот примем $r=2$; тогда получим: $V_2 = a_1 V_1^{(0)} + a_2 V_2^{(0)}$, где

$$V_1^{(0)} = (\operatorname{ch} z_{21}\varphi_0/\cos z_{11}\varphi_0)\cos z_{11}\varphi - \operatorname{ch} z_{21}\varphi$$

$$V_2^{(0)} = (\operatorname{sh} z_{22}\varphi_0/\sin z_{12}\varphi_0)\sin z_{12}\varphi - \operatorname{sh} z_{22}\varphi$$

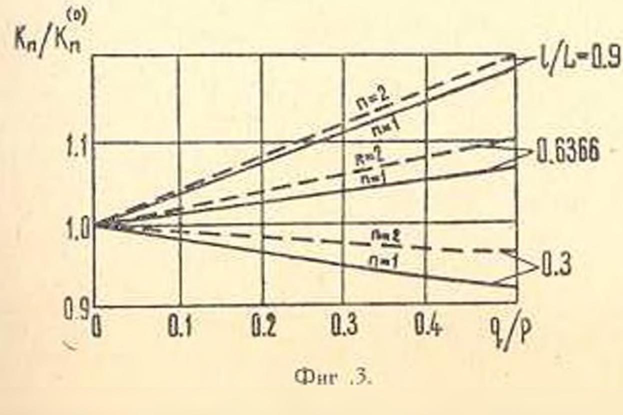
базисные (координатные) функции, которые удовлетворяют граничным условиям при $\varphi = \pm\varphi_0$, $V_1^{(0)} = \dfrac{dV_1^{(0)}}{d\varphi} = 0$, $V_2^{(0)} = \dfrac{dV_2^{(0)}}{d\varphi} = 0$. Подставив в уравнение (2.10), умножив на $V_n^{(0)}$ $(n=1, 2)$ и проинтегрировав от $-\varphi_0$ до φ_0, получим систему алгебраических уравнений относительно a_1 и a_2:

$$\begin{aligned} &a_1\int\limits_{-\varphi_0}^{\varphi_0}(A_1+\lambda_n^2B_1)\,V_1^{(0)}d\varphi + a_2\int\limits_{-\varphi_0}^{\varphi_0}(A_2+\lambda_n^2B_2)\,V_1^{(0)}d\varphi = 0\\ &a_1\int\limits_{-\varphi_0}^{\varphi_0}(A_1+\lambda_n^2B_1)\,V_2^{(0)}d\varphi + a_2\int\limits_{-\varphi_0}^{\varphi_0}(A_2+\lambda_n^2B_2)\,V_2^{(0)}d\varphi = 0\end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$A_n = (1+\alpha\cos\varphi)\left(\frac{d^4V_n^{(0)}}{d\varphi^4} + \frac{d^2V_n^{(0)}}{d\varphi^2}\right) - 2\alpha\sin\varphi\left(\frac{d^3V_n^{(0)}}{d\varphi^3} + \frac{dV_n^{(0)}}{d\varphi}\right)$$

$$B_n = \frac{1}{(1+\alpha\cos\varphi)^2}\left(\frac{d^2V_n^{(0)}}{d\varphi^2} + \frac{2\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\frac{dV_n^{(0)}}{d\varphi} - V_n^{(0)}\right)$$



Фиг. 3.

Из условия существования нетривиального решения системы (3.4) получим уравнение для определения частот. Результаты машинного решения частотного уравнения для трех частных случаев $l/L = 0.3$; 0.6366; 0.9 показаны на фиг. 3, где n—номер частоты (вычисления были выполнены на ЭЦВМ «Наири-К»).

4. В качестве общего заключения можно отметить, что коэффициент, оценивающий влияние собственного веса на первую и вторую собственную частоту, практически пропорционален отношению q/p и близок к единице. При $q/p<0.14$ влияние веса на собственную частоту становится меньше, чем 5% даже при $l/L=0.9$. Это позволяет считать, что обычное пренебрежение весом во многих случаях вполне обосновано.

Ленинградский ордена Ленина
кораблестроительный институт

Поступила 4 I 1977

Ա. Ա. ՉԱԽՈՅԱՆ

ՓԱՓՈՒԿ ԵՎ ԾԱՆՐ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ՆԵՐՔԻՆ ՃՆՇՄԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Բերվում է փափուկ գլանային թաղանթի սեփական տատանումների վերաբերյալ հարթ խնդրի լուծումը ներքին ճնշման և թաղանթի սեփական կշռի հաշվառման դեպքում։

Թաղանթը համարվում է անմոմենտ և չձգվող, իսկ ճնշումը՝ չփոփոխվող։ Մի քանի մասնավոր դեպքերի համար որոշվել է տատանման հաճախականության վրա թաղանթի սեփական կշռի ազդեցությունը գնահատող գործակիցը։

NATURAL FREQUENCIES OF A SOFT HEAVY-WEIGHT CYLINDRICAL SHELL UNDER THE INFLUENCE OF INNER PRESSURE

A. A. TCHAKHOYAN

Summary

The solution of a plane problem of natural vibration of a soft cylindrical shell, considering its weight and inner pressure, is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Saxon D. and Cahn A. S.* Modes of vibration of a suspended chain. (Quarterly Journal of Mechanics and applied Mathematics. September, 1953, vol. 4, part. 3.
2. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., 1961.
3. *Чахоян А. А.* Собственные частоты безмоментной цилиндрической оболочки при действии внутреннего давления. Изв. АН АрмССР, Механика, 1977, т. XXX, № 1.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

Մեխանիկա XXXI, № 2, 1978 Механика

М. Н. М. АЛЛАМ, Б. Е. ПОБЕДРЯ

К РЕШЕНИЮ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ АНИЗОТРОПНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

1. Рассмотрим линейную вязкоупругую анизотропную среду, для которой связь между напряжениями σ_{ij} и деформациями ε_{ij} имеет вид [1]

$$\sigma_{ij} = \int_0^t R_{ijkl}(t-\tau)\, d\varepsilon_{kl}(\tau) \tag{1.1}$$

$$\varepsilon_{ij} = \int_0^t \Pi_{ijkl}(t-\tau)\, d\sigma_{kl}(\tau) \tag{1.2}$$

Тензоры ядер релаксации $R_{ijkl}(t)$ и ядер ползучести $\Pi_{ijkl}(t)$ являются взаимообратными. Это означает, что если нам известен один из этих тензоров, например, $R_{ijkl}(t)$, то тензор ядер ползучести получается из решения следующих интегральных уравнений:

$$\int_0^t R_{ijkl}(t-\tau)\, d\Pi_{klmn}(\tau) = \Delta_{ijmn} - R_{ijkl}(t)\, \Pi_{klmn}(0) \tag{1.3}$$

где

$$\Delta_{ijmn} = \frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) \tag{1.4}$$

И обратно, если задан тензор ядер ползучести $\Pi_{ijkl}(t)$, то для тензора ядер релаксации имеем

$$\int_0^t \Pi_{ijkl}(t-\tau)\, dR_{klmn}(\tau) = \Delta_{ijmn} - \Pi_{ijkl}(t)\, R_{klmn}(0) \tag{1.5}$$

Экспериментально замечено [1], что для большинства реальных вязкоупругих материалов объем изменяется по упругому закону. Из соотношений (1.2) для изменения объема $\theta = \varepsilon_{ii}$ имеем

$$\theta = \int_0^t \Pi_{iikl}(t-\tau)\, d\sigma_{kl}(\tau) \tag{1.6}$$

и каков бы ни был тензор σ_{kl}

$$\sigma_{kl} = \sigma^0_{kl} h(t) \tag{1.7}$$

где σ^0_{kl} — тензор-константа, а $h(t)$ — единичная функция Хевисайда, величина θ не должна зависеть от времени. Это означает, что не должен зависеть от времени тензор $B_{kl} = \Pi_{iikl}$, то есть

$$B_{kl} = \Pi_{iikl} = \Pi_{iikl}(0) \tag{1.8}$$

Умножая левую и правую части (1.5) на δ_{ij} и производя суммирование по i и j, получим

$$B_{kl} R_{klmn}(t) = \delta_{mn} \tag{1.9}$$

то есть левая часть этого равенства также не должна зависеть от времени.

2. Частным видом анизотропии является так называемая структурная анизотропия. Пусть материал составлен из двух компонентов, один из которых (армировка) является изотропным упругим материалом с модулем Юнга E_a и коэффициентом Пуассона ν_a, а другой (заполнитель) — изотропным вязкоупругим материалом с модулем сжатия $K_з$ и ядром $\omega(t)$, то есть связь между напряжениями и деформациями для заполнителя имеет вид (индексы а и з, если это не вызывает недоразумений, мы будем опускать, то есть будем считать, что если индекс отсутствует, $\nu = \nu_a$, $E = E_a$, $K = K_з$)

$$s_{ij} = 3K \int_0^t \omega(t-\tau)\, de_{ij}(\tau) = 3K \overset{*}{\omega} e_{ij}; \quad \sigma = K\theta \tag{2.1}$$

где

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\theta\delta_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{kk} \tag{2.2}$$

и обратно

$$e_{ij} = \frac{1}{3K}\int_0^t \pi(t-\tau)\, dS_{ij}(\tau) = \frac{1}{3K}\overset{*}{\pi} S_{ij}; \qquad \theta = \frac{\sigma}{K} \tag{2.3}$$

Тогда различными способами можно ввести так называемые эффективные ядра релаксации $R_{ijkl}(t)$ или ползучести $\Pi_{ijkl}(t)$. При этом эти ядра имеют вид [2]

$$\begin{aligned} R_{ijkl}(t) &= \sum_{\alpha=1}^{V} R^{(\alpha)}_{ijkl} \varphi_\alpha(t) \\ \Pi_{ijkl}(t) &= \sum_{\beta=1}^{U} \Pi^{(\beta)}_{ijkl} \chi_\beta(t) \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $R^{(\alpha)}_{ijkl}$ и $\Pi^{(\beta)}_{ijkl}$ — тензоры-константы, зависящие от ν_a, E_a, $K_з$, процентного содержания компонентов γ, геометрии армировки и т. п.;

$\psi_2(t)$ — функция, представляющая собой или единицу, или $\omega(t)$, или ядро А. А. Ильюшина $\dot{g}_{\beta}(t)$ [1]

$$\dot{g}_{\beta} = \frac{1}{1 + \beta\dot{\omega}} \tag{2.5}$$

$\chi_2(t)$ — функция, являющаяся или единицей, или $\pi(t)$, или ядром (2.5).

В литературе известны эффективные модули упругости, построенные на основе различных подходов. Например, для слоистого композита, отношение толщины слоя армировки в котором к толщине всего пакета, из которых составлен материал, равно γ, эффективные ядра ползучести могут быть построены на основании эффективных модулей упругости [3]

$$\Pi_{ijkl}(t) = \Pi^{(1)}_{ijkl} + \Pi^{(2)}_{ijkl} g_{\beta_1}(t) + \Pi^{(3)}_{ijkl} g_{\beta_2}(t) + \Pi^{(4)}_{ijkl} \pi(t) \tag{2.6}$$

где

$$\Pi^{(1)}_{1111} = \Pi^{(1)}_{2222} = \Pi^{(1)}_{1122} = \frac{1-\nu}{\gamma\beta_1 E} = L$$

$$\Pi^{(1)}_{1133} = \Pi^{(1)}_{2233} = \frac{(1-\gamma)(1-\nu) - 2\gamma\nu}{\gamma\beta_1 E}$$

$$\Pi^{(1)}_{3333} = \frac{2\gamma\nu - (1-\gamma)(1-\nu)}{\gamma(1-\nu)\beta_1 E} + \frac{\gamma(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}$$

$$\Pi^{(1)}_{1313} = \Pi^{(1)}_{2323} = \frac{1(1+\nu)\gamma}{E}$$

$$\Pi^{(2)}_{1111} = \Pi^{(2)}_{2222} = \frac{2\beta_2(1-\nu) - (\beta_1 - 2)}{\gamma(\beta_2 - \beta_1)E} - \frac{\beta_2(1-\nu)}{\gamma\beta_1(\beta_2 - \beta_1)E} = M_1$$

$$\Pi^{(2)}_{1122} = \frac{\nu(\beta_1 - 2) + \beta_2(1-\nu)}{\gamma(\beta_2 - \beta_1)E} - \frac{\beta_2(1-\nu)}{\gamma\beta_1(\beta_2 - \beta_1)E} = M_2$$

$$\Pi^{(2)}_{1133} = \Pi^{(2)}_{2233} = \frac{2\gamma\nu - (1-\gamma)(1-\nu)}{\gamma\beta_1 E} - \frac{\gamma\nu + (1-\gamma)(1-\nu)}{\gamma E}$$

$$\Pi^{(3)}_{1111} = \Pi^{(3)}_{2222} = \frac{1}{\gamma E} - L - M_1$$

$$\Pi^{(3)}_{1122} = -\frac{\nu}{\gamma E} - L - M_2$$

$$\Pi^{(3)}_{1212} = \frac{2(1+\nu)}{\gamma E}$$

$$\Pi^{(4)}_{1313} = \Pi^{(4)}_{2323} = \frac{2(1-\gamma)}{3K} \tag{2.7}$$

$$\beta_1 = 2 + \frac{9K}{E}\frac{1-\gamma}{\gamma}(1-\nu)$$
$$\beta_2 = \frac{3K}{E}\frac{1-\gamma}{\gamma}(1+\nu) \qquad (2.8)$$

В соотношениях (2.7) выписаны только отличные от нуля компоненты тензоров структурных постоянных с учетом симметрии [1]:

$$\Pi_{ijkl} = \Pi_{klij} = \Pi_{jikl} = \Pi_{ijlk} \qquad (2.9$$

3. Подставляя в (1.7) выражение эффективных ядер ползучести в виде (2.4), получим вместо тензора-константы B_{kl} выражение

$$\overset{*}{B}_{kl}(t) = \sum_{\beta=1}^{U} \Pi^{(\beta)}_{iikl}\chi_\beta(t) \qquad (3.1)$$

Тензор $\overset{*}{B}_{kl}(t)$ отличен от постоянного тензора B_{kl} и совпадает с ним только в случае $\gamma = 0$, $\gamma = 1$ или при любом γ, если $K_a = K_и$ ($E = 3K(1-2\nu)$). За меру отклонения тензора $\overset{*}{B}_{kl}(t)$ от тензора-константы B_{kl} можно взять величину ξ, отнесенную к какой-нибудь величине, имеющей размерность упругой податливости:

$$\xi = \left(\sum_{q=1}^{U_1} \Pi^{(q)}_{iikl}\Pi^{(q)}_{jjkl}\right)^{1/2} \qquad (3.2)$$

где суммирование ведется по всем q, для которых $\chi_q(t)$ отлично от тождественной постоянной, $U_1 \le U$.

Для рассмотренного в предыдущем пункте примера имеем

$$\xi = \sqrt{\eta_{(2)} + \eta_{(3)} + \eta_{(4)}} \qquad (3.3)$$

где

$$\eta_{(\alpha)} = \Pi^{(\alpha)}_{iikl}\Pi^{(\alpha)}_{jjkl}, \quad (\alpha = 2, 3, 4) \qquad (3.4)$$

Компоненты тензора $\overset{*}{B}_{kl}(t)$ имеют вид

$$\overset{*}{B}_{11} = \overset{*}{B}_{22} = P_1 + \left(\frac{1-2\nu}{E} - P_1\right) g_{\beta_1}(t)$$
$$\overset{*}{B}_{33} = P_2 + P_3 g_{\beta_1}(t) \qquad (3.5)$$

где β_1 для ядра $g_{\beta_1}(t)$ дается формулой (2.8), а постоянные P_1, P_2, P_3

$$P_1 = \frac{1}{\gamma^2\beta_1 E}[3(1-\nu) - \gamma(1+\nu)]$$

$$P_2 = \frac{\gamma(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} + \frac{(1-\gamma)(1-\nu) - 2\gamma\nu}{1-\nu}P_1$$

$$P_3 = \left[\frac{9(1-\gamma)\beta_1}{2-\beta_1} + \frac{(1-\gamma)(1-\nu) - 2\gamma\nu}{1-\nu}\right]\left[\frac{1-2\nu}{E} - P_1\right] \qquad (3.6)$$

Следовательно, величина ξ имеет вид

$$\xi = \left|\frac{1-2\nu}{E} - P_1\right| \left[2 + \left(\frac{9(1-\gamma)\beta_1}{2-\beta_1} + \frac{(1-\gamma)(1-\nu)-2\gamma\nu}{1-\nu}\right)^2\right]^{1/2} \tag{3.7}$$

Вычисления показывают, что ξ не превосходит $\frac{1}{E}$.

4. При решении квазистатических задач линейной теории вязкоупругости для композитов может быть использован метод сведения неоднородной задачи изотропной вязкоупругости к последовательности задач однородной анизотропной теории вязкоупругости аналогично тому, как это сделано в упругом случае [2]. При этом для решения в каждом приближении задачи однородной анизотропной теории вязкоупругости благодаря специальному виду эффективных ядер релаксации и ползучести (2.4) может быть использовано некоторое обобщение метода аппроксимаций [1].

Суть этого обобщения заключается в следующем. Пусть получено решение соответствующей упругой задачи для анизотропной среды и пусть в этом решении встречается выражение типа $f(\cdot)Q$, где Q — известная величина, $f(\cdot)$ означает функцию от модулей анизотропной упругости. Подставляя вместо этих модулей их выражения через величины ν_a, E_a, K_a и ω, получим функцию $f = f(\omega)$, которую аппроксимируем с помощью ядер $\psi_\alpha(t)$ и $\chi_\beta(t)$, входящих в представление (2.4):

$$f(\omega) = \sum_{\alpha=1}^{V} A_{(\alpha)}\psi_\alpha + \sum_{\beta=1}^{U} B_{(\beta)}\chi_\beta \equiv \sum_{\alpha=1}^{U+V} C_{(\alpha)}\varphi_\alpha \tag{4.1}$$

где $\varphi_\alpha(t)$ представляет собой единицу или ядра $\omega(t)$, $\pi(t)$ или $g_\beta(t)$, определяемые соотношением (2.5).

Неизвестные постоянные $C_{(\alpha)}$ можно определить, например, методом наименьших квадратов. Для этого записывается выражение

$$J \equiv \int_{\omega'}^{\omega''} \left[f(\omega) - \sum_{\alpha=1}^{U+V} C_{(\alpha)}\varphi_\alpha\right]^2 d\omega \tag{4.2}$$

где ω' и ω'' — границы изменения ядра $\omega(t)$, $0 \leqslant \omega' < \omega'' \leqslant 1$, например,

$$\omega'' = \omega_0 = \omega(0), \quad \omega' = \omega_\infty = \lim_{t\to\infty} \omega(t) \tag{4.3}$$

Приравнивая нулю производные $\frac{\partial J}{\partial C_{(\beta)}}$, получаем систему алгебраических уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial C_{(\beta)}} = -2 \int_{\omega'}^{\omega''} \left[f(\omega) - \sum_{\alpha=1}^{U+V} C_{(\alpha)}\varphi_\alpha\right] \varphi_\beta d\omega = 0$$

$$\beta = 1, \ldots, U+V \tag{4.4}$$

для определения величин $C_{(\alpha)}$. После этого искомое вязкоупругое решение получается расшифровкой выражения $f(\cdot)Q$ в следующем виде:

$$\sum_{\alpha=1}^{U+V} C_{(\alpha)} \int_0^t \varphi_\alpha (t-\tau)\, dQ(\tau) \tag{4.5}$$

Если пределы ω' и ω'' заранее неизвестны и удобно вести интегрирование в (4.2) от 0 до 1, иногда, чтобы исключить возможность появления сингулярностей, полезно в подынтегральное выражение вводить некоторую положительную весовую функцию $\Omega(\omega)$:

$$J = \int_0^1 \Omega(\omega) \left| f(\omega) - \sum_{\alpha=1}^{U+V} C_{(\alpha)} \varphi_\alpha \right|^2 d\omega \tag{4.6}$$

5. В качестве примера рассмотрим задачу о растяжении силой P в направлении оси x бесконечной ортотропной пластинки. Из решения упругой задачи [4] следует, что максимальное напряжение σ_θ возникает на контуре окружности в точках пересечения оси x, проходящей через центр окружности, и равно

$$(\sigma_\theta)_{max} = (1 + \varkappa_1 + \varkappa_2)\, P \tag{5.1}$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — корни бигармонического уравнения,

$$\frac{x^4}{E_x} - \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\nu_{xy}}{E_x}\right) x^2 + \frac{1}{E_y} = 0 \tag{5.2}$$

причем

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = \sqrt{2\left(\sqrt{\frac{E_x}{E_y}} - \nu_{xy}\right) + \frac{E_x}{G_{xy}}} \tag{5.3}$$

где E_x, E_y, G_{xy}, ν_{xy} — модули упругости ортотропной пластинки [4].

В работе [2] для плоско-напряженного состояния даны выражения тензора эффективных ядер ползучести. Компоненты этого тензора выражаются через операторы 1, $\tilde{g}_3$, $\tilde{\nu}$, где

$$g_3 = \frac{1}{1+\beta\omega}, \quad \beta = \frac{1}{2}\left(1 + 9M\frac{1-\nu}{\nu}\right), \quad M = \frac{K_*}{E_*} \tag{5.4}$$

Подставляя в (5.3) вместо модулей упругости соответствующие операторы, получим

$$F(\omega) = \varkappa_1 + \varkappa_2 = 2\left\{1 - m(1-\nu) + \sqrt{1 + \frac{m[2+(1-9M)\omega]^2}{9M\omega(2+\omega)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{m}{3M}\, \frac{2 + (1-9M)\omega + 27M^2(1+\nu)\omega^2}{\omega(2+\omega)}\right\}^{1/2} \tag{5.5}$$

где

$$m \equiv \gamma (1 - \gamma) \tag{5.6}$$

Запишем аппроксимацию функции $F(\omega)$ в виде

$$F(\omega) = A_1 + A_2 \omega + A_3 g_3 \tag{5.7}$$

Чтобы иметь возможность интегрировать в (4.6) от 0 до 1, введем весовую функцию $\Omega - \omega$. Тогда

$$\omega F(\omega) = B_1 + B_2 \omega + B_3 g_3 \tag{5.8}$$

где

$$B_1 = A_2 + \frac{A_3}{\beta}, \quad B_2 = A_1, \quad B_3 = -\frac{A_3}{\beta} \tag{5.9}$$

Для нахождения величин $B_i (i = 1, 2, 3)$ имеем систему алгебраических уравнений

$$L_{ij} B_j = N_i \tag{5.10}$$

где

$$L_{ij} = \int\limits_0^1 \varphi_i \varphi_j d\omega, \quad N_i = \int\limits_0^1 \omega F(\omega) \varphi_i d\omega$$
$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = \omega, \quad \varphi_3 = g_3 \tag{5.11}$$

После решения системы (5.10) получим, учитывая (5.9) для коэффициента концентрации $k = \frac{(\sigma_\theta)_{max}}{P}$

$$k = 1 + A_1 + A_2 \omega(t) + A_3 g_3(t) \tag{5.12}$$

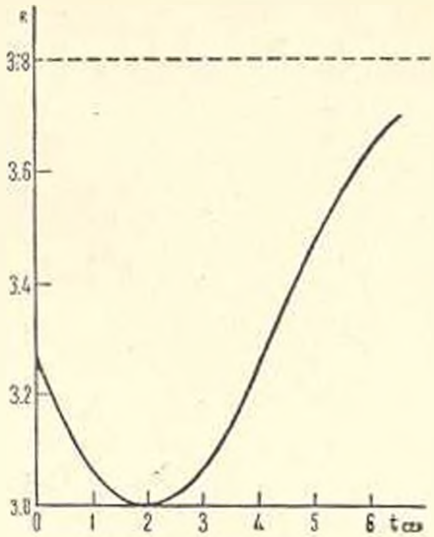
В частности, для ядра $\omega(t)$ в виде

$$\omega(t) = a + b e^{-\alpha t} \tag{5.13}$$

имеем

$$k = 1 + A_1 + A_2 \left[\frac{1}{a} - \frac{b}{a(a+b)} e^{-\frac{\alpha a}{a+b} t} \right] +$$
$$+ A_3 \left[\frac{1}{1+\beta a} - \frac{\beta b}{(1+\beta a)(1+\beta a+\beta b)} e^{-\frac{\alpha(1+\beta a)}{1+\beta a+\beta b} t} \right] \tag{5.14}$$

На фиг. 1 показана зависимость $k(t)$ при следующих параметрах:



Фиг. 1.

$$\nu_\Lambda = 0.4, \quad E_\Lambda = 10^6 \frac{кг}{см^2}, \quad K_\Lambda = 10^5 \frac{кг}{см^2}, \quad m = 0.1$$

$$a = 0.01, \quad b = 0.99, \quad \alpha = 1$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 27 V 1977

Մ. Ն. Մ. ԱԼԱՄ, Բ. Ե. ՊՈԲԵԴՐՅԱ

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՄԱԾՈՒՑԻԿԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՔՎԱԶԻՍՏԱՏԻԿ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Աշխատանքում քննարկվում է ըստ կառուցվածքի անիզոտրոպ մածուցիկառաձգական միջավայրերի ծավալային դեֆորմացիան։

Այդպիսի միջավայրերի համար քվազիստատիկ խնդիրների լուծման համար առաջարկվում է եղանակ, որը հիմնված է ապրոքսիմացիայի եղանակի ընդհանրացման վրա։ Տրվում է թվային օրինակ։

ON SOLUTION OF QUASI-STATICAL PROBLEMS IN THE NONISOTROPIC THEORY OF VISCOELASTICITY

M. N. M. ALLAM, B. E. POBEDRYA

S u m m a r y

The volumetric deformations of structural nonisotropic media are discussed. A method of solution based on a generalization of the approximation method is suggested for the solution of quasi-statical problems. A numerical example is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1970, 280 с.
2. *Победря Б. Е.* О структурной анизотропии в вязкоупругости. Механика полимеров, 1976, № 4, с. 622—626.
3. *Победря Б. Е., Горбачев В. И.* О статических задачах упругих композитов. Вестник Моск. университета, сер. 1, 1977, № 6.
4. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М.—Л., 1947, 356 с.

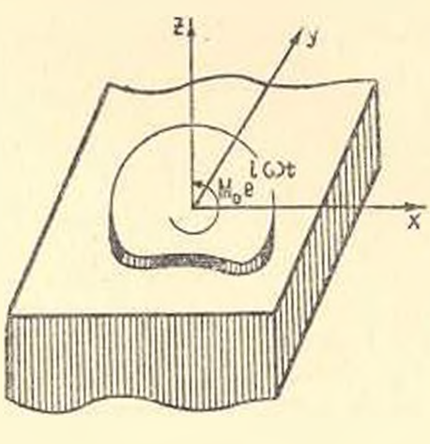
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXI, № 2, 1978 Механика

В. М. АЛЕКСАНДРОВ, В. Г. БУРЯК

НЕОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О КРУЧЕНИИ ШТАМПОМ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В работе рассматривается задача о совместном колебании упругого изотропного полупространства и жесткой на растяжение пластинки (штампа), к которой приложен крутящий момент (фиг. 1) $M_0e^{i\omega t}$ (t — время). Изгибную жесткость пластинки предполагаем пренебрежимо малой. Между поверхностями штампа и полупространства в области их контакта Ω осуществлено полное сцепление. В дальнейшем, для краткости, говоря о напряжениях, перемещениях, сдвиге фаз, подразумеваем их амплитудные значения. Истинные значения получаются умножением на $e^{i\omega t}$. С помощью метода Винера-Хопфа получено приближенное решение задачи в достаточно простой форме для полосовой области контакта при больших значениях относительной частоты $\varkappa = \omega a (\rho/G)^{1/2}$ (ρ, G — плотность и модуль сдвига упругого полупространства, a — полуширина штампа). Насколько известно авторам, подобная задача ранее не рассматривалась.



Фиг. 1.

§ 1. Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид

$$\left.\begin{array}{l} u = f_1(x, y) \\ v = f_2(x, y) \end{array}\right| \text{ при } (x, y) \in \Omega \text{ и } z = 0$$

$$\sigma_z = 0 \text{ при любых } x, y \text{ и } z = 0 \tag{1.1}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ вне области } \Omega \text{ при } z = 0$$

Здесь u и v — упругие перемещения по осям x и y, σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} — напряжения на площадке с нормалью z.

Пользуясь принципом предельного поглощения [1], в правой части системы уравнений Ляме, помимо инерционных членов, будем учитывать член $i\rho\varepsilon\omega^2\bar{u}$, $\varepsilon>0$, соответствующий наличию вязкого трения. В этом случае нужно считать, что напряжения и перемещения на бесконечности исчезают. Используя двумерное преобразование Фурье, поставленную смешанную задачу сведем к системе двух двумерных интегральных уравнений первого рода

$$\iint\limits_{\Omega} \tau_1(\xi, \eta) K_{11}(x-\xi, y-\eta)\, d\xi d\eta + \iint\limits_{\Omega} \tau_2(\xi, \eta) K_{12}(x-\xi, y-\eta)\, d\xi d\eta =$$

$$= 4\pi^2 G f_1(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \qquad (1.2)$$

$$\iint\limits_{\Omega} \tau_1(\xi, \eta) K_{12}(x-\xi, y-\eta)\, d\xi d\eta + \iint\limits_{\Omega} \tau_2(\xi, \eta) K_{22}(x-\xi, y-\eta)\, d\xi d\eta =$$

$$= 4\pi^2 G f_2(x, y), \quad (x, y) \in \Omega$$

Здесь $\tau_1(x, y) = \tau_{xz}(x, y) = \tau_{11}(x, y) + i\tau_{12}(x, y)$, $\tau_2(x, y) = \tau_{yz}(x, y) = \tau_{21}(x, y) + i\tau_{22}(x, y)$ — касательные напряжения в области контакта,

$$K_{11}(p, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int F_1(\beta, \gamma, k)[F(\gamma, k)]^{-1} e^{i(\alpha p+\beta s)}\, d\alpha d\beta$$

$$K_{12}(p, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int F_2(\alpha, \beta, \gamma, k)[F(\gamma, k)]^{-1} e^{i(\alpha p+\beta s)}\, d\alpha d\beta$$

$$K_{22}(p, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int F_1(\alpha, \gamma, k)[F(\gamma, k)]^{-1} e^{i(\alpha p-\beta s)}\, d\alpha d\beta$$

$$F_1(\beta, \gamma, k) = -4\beta^2\gamma^2 + (3\beta^2 + \gamma^2 - k^2)k^2 + 4\beta^2\sqrt{\gamma^2-k^2}\sqrt{\gamma^2-b_0^2k^2}$$

$$F_2(\alpha, \beta, \gamma, k) = \alpha\beta(4\gamma^2 - 3k^2 - 4\sqrt{\gamma^2-k^2}\sqrt{\gamma^2-b_0^2k^2})$$

$$F(\gamma, k) = \sqrt{\gamma^2-k^2}\,[4\gamma^2\sqrt{\gamma^2-k^2}\sqrt{\gamma^2-b_0^2k^2} - (2\gamma^2-k^2)^2]$$

$$F_1(\alpha, \gamma, k) = F_1(\beta, \gamma, k)|_{\beta=\alpha}, \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$k^2 = \rho\omega^2 G^{-1}(1 - i\varepsilon), \qquad b_0^2 = (1-2\nu)/2(1-\nu)$$

ε — коэффициент пропорциональности, характеризующий внутреннее трение, ν — коэффициент Пуассона.

Для больших значений параметра $|k|$ и полосовой области контакта система уравнений (1.2) с точностью до членов порядка $\frac{1}{|k|^2}$ распадается на два независимых уравнения:

$$\int_{-a}^{a} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \tau_j(\xi, \eta)\, d\eta \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - k^2}}\, e^{i[\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)]} d\alpha\, d\beta = 4\pi^2 G f_j(x, y) \quad (1.3)$$

$$(j = 1, 2)$$

Принимая во внимание, что $f_1(x, y) = -\theta y$, $f_2(x, y) = \theta x$ и разыскивая решения уравнений (1.3) соответственно в форме

$$\tau_1(x, y) = -y\tau_1^*(x), \quad \tau_2(x, y) = \tau_2^*(x) \quad (1.4)$$

с учетом равенств

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \eta e^{i\beta(y-\eta)} d\eta\, d\beta = y, \quad \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta(y-\eta)} d\eta\, d\beta = 1$$

понимаемых в смысле теории обобщенных функций [2], убедимся, что $\tau_1^*(x)$ и $\tau_2^*(x)$ должны быть найдены из одномерных интегральных уравнений первого рода, которые в безразмерных переменных будут иметь вид

$$\int_{-1}^{1} \tau_j^*(\xi)\, k_j[\varkappa(x - \xi)]\, d\xi = \pi\Delta f_j^*(x), \quad (|x| \leqslant 1,\ j = 1, 2) \quad (1.5)$$

$$k_j[\varkappa(x - \xi)] = \int_0^{\infty} \frac{\cos[\varkappa(x - \xi) m]\, dm}{\sqrt{m^2 - (1 - i\varepsilon)}} \quad (1.6)$$

Здесь $\Delta = Ga^{-1}$, $f_1^*(x) = \theta$, $f_2^*(x) = \theta x$, $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ — амплитуда угла поворота штампа. Используя метод работы [3], получим главный член асимптотики решения уравнений (1.5) для больших $\varkappa$. С учетом обозначений (1.4) при $\varepsilon \to 0$ будем иметь

$$\tau_1(x, y) = -\Delta\theta\varkappa i\,[e^{-i\varkappa(1+x)}/\sqrt{i\pi\varkappa(1+x)} + \operatorname{erf}\sqrt{i\varkappa(1+x)} + e^{-i\varkappa(1-x)}/\sqrt{i\pi\varkappa(1-x)} + \operatorname{erf}\sqrt{i\varkappa(1-x)} - 1]\,y \quad (1.7)$$

$$\tau_2(x, y) = \Delta\theta\varkappa i \Big| \left(x - \frac{1}{2}i\varkappa\right) e^{-i\varkappa(1+x)}/\sqrt{i\pi\varkappa(1+x)} + x\operatorname{erf}\sqrt{i\varkappa(1+x)} - \left(x + \frac{1}{2}i\varkappa\right) e^{-i\varkappa(1-x)}/\sqrt{i\pi\varkappa(1-x)} + x\operatorname{erf}\sqrt{i\varkappa(1-x)} - x \Big|, \quad \left(\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds\right)$$

Далее определим реактивный момент, действующий на штамп со стороны полупространства, отнесенный к единице длины

$$M_* = \frac{1}{2b} \int_{-1}^{1} dx \int_{-b}^{b} [x\tau_2(x, y) - y\tau_1(x, y)]\, dy = M_1 + iM_2 \quad (1.8)$$

Подставляя (1.7) в (1.8), получим

$$M_z = \Delta\theta\left[(1 + 4\varkappa i)\,\mathrm{erf}\sqrt{2\varkappa i} + 2\sqrt{2\varkappa i}\,e^{-2\varkappa i}/\sqrt{\pi} - 2\varkappa i\right]/3 \tag{1.9}$$

$$(M_z = M_z'/b^2, \quad M_z = M_1 + iM_2)$$

В формулах (1.8) и (1.9) учтено, что штамп не бесконечно длинный, а имеет конечную, но достаточно большую длину.

§ 2. Получим формулы для подсчета угла сдвига фаз φ и модуля комплексной амплитуды колебания штампа θ_0. Запишем уравнение вращательного движения штампа относительно оси z

$$J_z \frac{d^2}{dt^2}\left(\theta e^{i\omega t}\right) = M_0 e^{i\omega t} - M_z e^{i\omega t} \tag{2.1}$$

где

$$\mathrm{Im}\, M_0 = 0, \quad J_z = J_z'/b^2, \quad M_0 = M_0'/b^2$$

J_z' — момент инерции штампа относительно оси z.

Выполнив дифференцирование в (2.1) и произведя разделение действительной и мнимой частей, получим, принимая во внимание (1.9)

$$M_0 = \theta_1(A_{11} - J_z\omega^2) + A_{12}\theta_2, \quad 0 = \theta_1 A_{21} + \theta_2(A_{22} - J_z\omega^2) \tag{2.2}$$

Решая систему (2.2) относительно θ_1 и θ_2, найдем

$$\mathrm{tg}(-\varphi) = \theta_2/\theta_1 = A_{21}^*\left(\varkappa^2 J_z^* - A_{22}^*\right)^{-1}$$

$$\theta_0^* = \left[(\varkappa^2 J_z^* - A_{11}^*)^2 + (A_{12}^*)^2\right]^{-1/2} \tag{2.3}$$

Здесь

$$J_z^* = J_z(a\rho)^{-1}, \quad A_{nj}^* = A_{nj}/\Delta, \quad (n, j = 1, 2)$$

$$M_1 = (A_{11}\theta_1 + A_{12}\theta_2)\,\Delta, \quad M_2 = (A_{21}\theta_1 + A_{22}\theta_2)\,\Delta \tag{2.4}$$

$$A_{22} = A_{11}, \quad A_{21} = -A_{12}, \quad \theta_0^* = \theta_0\Delta/M_0, \quad \theta_0 = (\theta_1^2 + \theta_2^2)^{1/2}$$

Результаты вычисления величин

$$\tau_{11}(0, 1)/\Delta = a_1\theta_1 + a_2\theta_2, \quad \tau_{12}(0, 1)/\Delta = -a_2\theta_1 + a_1\theta_2$$

$$\tau_1(1, 1)/\Delta[\theta_1 - \theta_2 + i(\theta_1 + \theta_2)] = a_3, \quad \tau_{21}^*(1, 1)/\Delta = b_1\theta_1 + b_2\theta_2$$

$$\tau_{22}^*(1, 1)/\Delta = -b_2\theta_1 + b_1\theta_2, \quad \tau_j^*(1, 1) = \lim_{x\to 1}\tau_j(x, 1)\sqrt{1 - x}$$

$$M_1/\Delta = c_1\theta_1 + c_2\theta_2, \quad M_2/\Delta = -c_2\theta_1 + c_1\theta_2$$

$$c_1 = A_{11}, \quad c_2 = A_{12}$$

произведенные по найденным в п. 1 асимптотическим формулам, сведены в табл. 1, 2.

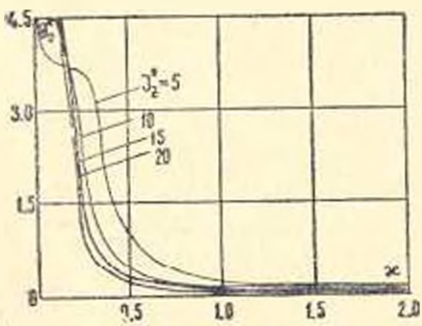
Таблица 1

$\varkappa$	a_1	a_2	b_1	b_2
0.25	-0.3036	0.2526	0.598	0.199
0.50	-0.3077	0.3672	0.564	0.000
0.75	-0.2458	0.5132	0.576	-0.115
1.00	-0.1542	0.6982	0.598	-0.199
1.25	-0.0524	0.9213	0.624	-0.268
1.50	0.0469	1.1781	0.651	-0.326
1.75	0.1348	1.4628	0.678	-0.377
2.00	0.2054	1.7690	0.705	-0.423
2.25	0.2549	2.0897	0.731	-0.465
2.50	0.2817	2.4182	0.757	-0.505

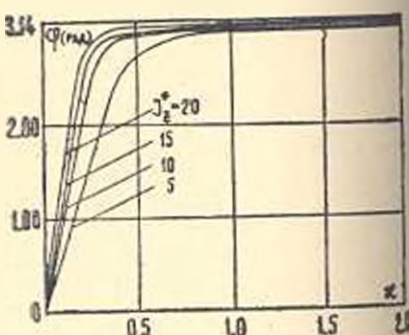
Таблица

$\varkappa$	a_3	c_1	c_2
0.25	-0.199	0.3168	-0.2750
0.50	-0.282	0.3745	-0.3908
0.75	-0.345	0.3825	-0.5139
1.00	-0.399	0.3703	-0.6532
1.25	-0.446	0.3517	-0.8078
1.50	-0.489	0.3345	-0.9741
1.75	-0.528	0.3226	-1.1477
2.00	-0.564	0.3170	-1.3244
2.25	-0.598	0.3172	-1.5007
2.50	-0.631	0.3215	-1.6745

На фиг. 2, 3 изображены зависимости величин φ и θ_0 от безразмерной частоты $\varkappa$ при различных значениях безразмерного момента инерции J_2^*.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Видно, что для значений $\varkappa \geqslant 0.25$ модуль комплексной амплитуды уменьшается с увеличением $\varkappa$ и J_2^*, а угол сдвига фаз φ увеличивается с увеличением $\varkappa$ и J_2^*, что вполне соответствует физическому смыслу задачи.

Ростовский государственный университет
Ворошиловградский машиностроительный институт

Поступила 29 XII 1976

Վ. Մ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎ, Վ. Գ. ԲՈՒՐՅԱԿ

ԴՐՈՇՄՈՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՈԼՈՐՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ՈՉ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է առաձգական կիսատարածության և դրոշմի համատեղ տատանման վերաբերյալ ոչ առանցքասիմետրիկ խնդիրը, երբ դրոշմի վրա կիրառվել է ըստ ժամանակի հարմոնիկ օրենքով փոփոխվող ոլորող մոմենտ։

Խնդրի լուծումը բերվել է երկչափանի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարումներից բաղկացած սիստեմի։

Ցույց է տրված, որ տատանումների բավականաչափ մեծ հաճախականության դեպքում այդ հավասարումները կարելի է լուծել միմյանցից անկախ։

Վիներ-Խոպֆի մեթոդի օգնությամբ ստացվել է ասիմպտոտական լուծում պլանում խիստ ձգված ուղղանկյունաձև դրոշմի տատանումների համար։

THE AXIASYMMETRIC DYNAMIC PROBLEM ON STAMP TORSION OF A RESILIENT SEMISPACE

V. M. ALEXANDROV, V. G. BURYAK

S u m m a r y

The axiasymmetric dynamic problem on joint vibration of a resilient semispace and stamp is considered.

Torque changable by harmonic law dependent of time is applied to the stamp. The problem is reduced to a system of two two-dimensional integral equations of the first kind. It is shown that at a sufficiently great frequency of vibration these equations may be solved irrespective of each other. By the Wiener-Hopf method an asymptotic solution in an analytic space is obtained for the case of vibration of the stamp of a strongly expanded rectangular shape in plane.

All the major characteristics of the problem are examined numerically.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1972.
2. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М., «Наука». 1976.
3. *Александров В. М., Буряк В. Г.* Динамическая смешанная задача деформации чистого сдвига для упругого полупространства. Прикл. механика, 1971, т. 7, вып. 4.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXI, № 2, 1978 Механика

Г. Я. ПОПОВ

К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ДЛЯ СЛОИСТЫХ СРЕД

Излагается подход к решению линейных задач механики и математической физики для слоистых сред, основанный на обобщении известного метода начальных параметров [1] для решения дифференциальных уравнений строительной механики на случай кусочно-постоянных (кусочно-непрерывных) коэффициентов.

1. Рассмотрим линейную краевую задачу механики в области (для определенности — трехмерной), ограниченной координатными поверхностями: $\xi = \alpha_0$, $\xi = \alpha_m$; $\eta = \beta_0$, $\eta = \beta_1$; $\zeta = \gamma_0$, $\zeta = \gamma_1$. Пусть область координатными поверхностями $\xi = \alpha_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$ делится на m слоев, в каждом из которых, вообще говоря, различны физические и механические параметры.

Допустим, что существуют интегральные преобразования дифференциальных уравнений в частных производных рассматриваемой краевой задачи по переменным η и ζ на интервалах (β_0, β_1) и (γ_0, γ_1) соответственно, позволяющие удовлетворить краевым условиям по граничным поверхностям $\eta = \beta_j$, $\zeta = \gamma_j$ $(j = 0, 1)$ и свести упомянутые уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям по переменной ξ.

Дальнейший путь решения подобного рода задач заключается в построении общих решений этих обыкновенных дифференциальных уравнений в пределах каждого слоя. Содержащиеся в общих решениях произвольные постоянные (точнее, функции параметров интегральных преобразований), количество которых пропорционально порядку уравнений и количеству слоев, находятся из граничных условий на поверхностях $\xi = \alpha_0$, $\xi = \alpha_m$ и условий сопряжения между слоями. При этом для некоторых случаев удалось [2], на основе рекуррентных соотношений для упомянутых постоянных, снизить порядок алгебраических уравнений для их определения до порядка дифференциальных уравнений и ниже.

В настоящей работе предлагается общий способ подобного снижения, базирующийся на формулировке рассматриваемой задачи механики или математической физики в виде замкнутой системы N уравнений в частных производных, содержащих производные не выше первого порядка. Эта система записывается относительно функций $u_j(\xi, \eta, \zeta)$ $(j = 0, 1, \ldots, N-1)$, входящих в наиболее общие краевые условия по граням, совпадающим с координатными поверхностями $\xi, \eta, \zeta = \mathrm{const}$. Например, если рассматриваются продольные колебания стержня, то в формулировку краевых условий (здесь только одна координатная поверхность $x = \mathrm{const}$) будет вхозить продольное перемещение $u(x, t)$ и продольная сила $N(x, t)$, то есть здесь $N=2$ ($u_0=u$, $u_1=N$) и уравнение колебаний стержня надлежит записать так:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - eN = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial x} - c\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad (e^{-1} = EF,\ c = \rho F) \qquad (1.1)$$

(ρ, E, F — плотность, модуль упругости, площадь сечения).

Если же рассматривается задача теплопроводности в декартовой системе координат (x, y, z), то в формулировку общих краевых условий по граням x, y, $z=\text{const}$ будет входить температура θ, тепловой поток q через поверхность $x=\text{const}$ и тепловые потоки p и r через две другие поверхности y, $z=\text{const}$. Следовательно, здесь $N=4$ ($u_0=\theta$, $u_1=q$, $u_2=p$, $u_3=r$) и дифференциальное уравнение теплопроводности следует записать в виде

$$\begin{gathered} k_1\frac{\partial\theta}{\partial x} + q = 0, \qquad k_2\frac{\partial\theta}{\partial y} + p = 0, \qquad k_3\frac{\partial\theta}{\partial z} + r = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} + \rho c\frac{\partial\theta}{\partial t} = f(x, y, z, t) \end{gathered} \qquad (1.2)$$

где k_i — коэффициенты теплопроводности, c — коэффициент теплоемкости, ρ — плотность, f — функция, описывающая источники тепла.

В случае осесимметричной задачи теории упругости в общие краевые условия на поверхности $r=\text{const}$ войдут вертикальное w и радиальное u перемещения, касательное τ_{rz} и нормальное σ_r напряжения. На плоскостях же $z=\text{const}$ краевые условия формируются из тех же перемещений и того же касательного напряжения, а роль σ_r выполняет нормальное напряжение σ_z. Таким образом, для этой задачи $N=5$ ($u_0=w$, $u_1=u$, $u_2=\tau_{rz}$, $u_3=\sigma_z$, $u_4=\theta_2$) и аналог систем (1.1) и (1.2) здесь имеет вид*

$$\begin{gathered} \frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} + r\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} - 2\mu\frac{u}{r} - \lambda\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}ru\right) = 0 \\ \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + r\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\tau_{rz}}{\mu} = 0 \\ 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}ru\right) - \sigma_z = 0 \\ 2\mu\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}ru\right) - \sigma_r = 0 \end{gathered} \qquad (1.3)$$

(λ, μ — параметры Ламе).

* Отметим, что осесимметричные и плоские (в том числе анизотропные) задачи теории упругости для слоистой среды были предметом исследований многих авторов (на основе других подходов), например [2—6].

Общим для получаемых таким путем систем является то, что те из функций u_j ($j=0, 1, \ldots, N-1$), которые формируют общие краевые условия только на одной из поверхностей (например, $\eta=\mathrm{const}$), могут находиться только под знаком производной вдоль нормали к этой поверхности (то есть $\partial/\partial\eta$).

Отмеченное обстоятельство позволяет из систем, составленных на основе изложенных соображений, исключить функции u_j (ξ, η, ζ), не входящие в формирование краевых условий по поверхностям $\xi=\mathrm{const}$. Это делается либо непосредственно в системах, либо после применения интегральных преобразований по всем переменным, кроме ξ. Если обозначить трансформанты функций $u_j(\xi, \eta, \zeta)$ по переменным η и ζ через $u_j^{(\alpha)}(\xi)$ и считать функции $u_j(\xi, \eta, \zeta)$ $j=0, 1, \ldots, n-1$ $(n<N)$ ответственными за формирование краевых условий по поверхностям $\xi=\mathrm{const}$, то мы придем к системе из n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которую запишем в матричном виде

$$P_0\frac{dz}{d\xi}+P_1 z=f \tag{1.4}$$

Здесь P_j ($j=0, 1$) — квадратные матрицы n-ого порядка $\det P_0\neq 0$, а $z(\xi)$ и $f(\xi)$ — вектор-функции (матрицы-столбцы) того же порядка, и компонентами которых являются соответственно трансформанты функций u_j ($j=0, 1, \ldots, n-1$) и правых частей систем типа (1.1) и (1.2). Например, применительно к задаче теплопроводности для слоя $(a_0\leqslant x\leqslant a_1, -\infty<y, z<\infty)$ следует к системе (1.1) применить преобразование Лапласа по времени и преобразование Фурье по переменным y и z (соответствующие трансформанты будем помечать индексом α). Последующее исключение трансформант $p_\alpha(x)$ и $r_\alpha(x)$ приводит систему к уравнению (1.4), в котором следует положить

$$P_0=I, \quad P_1=\begin{pmatrix}0 & k_1^{-1}\\ k_\alpha & 0\end{pmatrix}, \quad z=\begin{pmatrix}\theta_\alpha\\ q_\alpha\end{pmatrix}, \quad f=\begin{pmatrix}0\\ f_\alpha\end{pmatrix} \tag{1.5}$$

где $k_\alpha=\gamma c p+k_1\beta^2+k_2\gamma^2$; p, β, γ — параметры упомянутых интегральных преобразований соответственно по t, y, z.

Для получения такой же системы применительно к осесимметричной задаче для упругого слоя $(h_0\leqslant z\leqslant h_1, 0\leqslant r<\infty)$ следует из системы (1.3) сперва исключить напряжение σ_θ, как не участвующее в формировании краевых условий по плоскостям $z=\mathrm{const}$, для чего следует воспользоваться пятым уравнением из (1.3). Затем последовательное применение к первым четырем уравнениям преобразования Ханкеля (с параметром преобразования α, с пометкой трансформант значком α) с индексами у функций Бесселя: 1, 0, 1, 0 приведет к системе

$$\frac{d\tau_\alpha}{dz}-\alpha^2(2\mu+\lambda)u_\alpha-\alpha\lambda\frac{dw_\alpha}{dz}=0, \quad \frac{d\sigma_\alpha}{dz}+\alpha\tau_\alpha=0$$

$$\sigma_\alpha-(2\mu+\lambda)\frac{dw_\alpha}{dz}-\lambda\alpha u_\alpha=0, \qquad \tau_\alpha+\mu\alpha w_\alpha-\mu\frac{du_\alpha}{dz}=0 \tag{1.6}$$

Заменяя первое уравнение в (1.6) линейной комбинацией первого и третьего, вновь приходим к системе (1.4), в которой следует положить

$$P_0 = I;\ f = 0;\ P_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha\lambda\lambda^* & 0 & -\alpha\mu^*\lambda^* \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^* & 0 & \alpha\lambda\lambda^* \\ -\mu^{-1} & 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}; \quad z = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ \sigma_0 \\ w_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda^* = (2\mu + \lambda)^{-1};\quad \mu^* = 4\mu(\lambda + \mu))$$

Таким образом, сформулированная вначале задача для слоистой среды в общем случае сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, заданных на участках $\alpha_k < \xi < \alpha_{k+1}$ ($k=0, 1, \ldots, m-1$), число которых m совпадает с количеством слоев. На каждом из этих участков уравнение (1.4) имеет, вообще говоря, свои матрицы $P_i^{(k)}$ и вектора $f^{(k)}$, то есть имеет вид

$$P_0^{(k)} \frac{dz^{(k)}}{d\xi} + P_1^{(k)} z^{(k)} = f^{(k)} \qquad \begin{matrix} \alpha_k < \xi < \alpha_{k+1} \\ k = 0, 1, \ldots, m-1 \end{matrix} \tag{1.7}$$

Помимо решения этих m уравнений необходимо удовлетворить граничному условию

$$Az^{(0)}(\alpha_0) + Bz^{(m-1)}(\alpha_m) = \gamma \tag{1.8}$$

Здесь A, B — квадратные матрицы n-ого порядка, а γ — матрица-столбец того же порядка. Например, для задачи теплопроводности, если на одной из граней ($x=\alpha_0$) задана температура θ_0, а на другой ($x=\alpha_m$) — θ_m, то в (1.8) следует положить

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma = \begin{pmatrix} \theta_0^* \\ \theta_m^* \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

Наконец, еще следует удовлетворить условиям сопряжения

$$z^{(k)}(\alpha_k) = A^{(k)} z^{(k-1)}(\alpha_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{1.10}$$

Здесь $A^{(k)}$ — тоже квадратная матрица n-ого порядка. В частности, если $A^{(k)} = I$, то (1.10) соответствует непрерывности вектор-функции $z(\xi)$ при переходе от одного слоя к другому. Это случай наиболее распространенный. Например, применительно к задаче теплопроводности (1.2) это соответствует случаю, когда между слоями имеет место идеальный контакт (в случае же теплообмена по Ньютону $A^{(k)} \neq I$), а для задачи упругости (1.3) — случаю, когда между слоями реализовано полное сцепление.

2. Займемся решением одномерной краевой задачи (1.7), (1.8) с условиями сопряжения (1.10). Если построен матрицант [6] уравнения (1.7), то есть матрица $Z^{(k)}$ n-ого порядка, удовлетворяющая уравнению

$$P_0^{(k)} \frac{dZ^{(k)}}{d\xi} + P_1^{(k)} Z^{(k)} = 0 \tag{2.1}$$

и обладающая свойством

$$Z^{(k)}(\alpha_k) = I \tag{2.2}$$

то общее решение уравнения (1.7) можно [6] записать в виде

$$z^{(k)}(\xi) = Z^{(k)}(\xi)\, z^{(k)}(\alpha_k) + \int\limits_{\alpha_k}^{\xi} K^{(k)}(\xi, \eta) f^{(k)}(\eta)\, d\eta$$

$$\left(K^{(k)}(\xi, \eta) = Z^{(k)}(\xi)\left[P_0^{(k)}(\eta) Z^{(k)}(\eta)\right]^{-1}\right) \tag{2.3}$$

Отсюда находим

$$z^{(k)}(\alpha_k) = Z^{(k)}(\alpha_{k+1})\, z^{(k)}(\alpha_k) + f_*^{(k)}$$

$$f_*^{(k)} = \int\limits_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} K^{(k)}(\alpha_{k+1}, \eta) f^{(k)}(\eta)\, d\eta \tag{2.4}$$

Подставляя полученное выражение в условие сопряжения (1.10), получим

$$z^{(k)}(\alpha_k) = A^{(k)} Z^{(k-1)}(\alpha_k)\, z^{(k-1)}(\alpha_{k-1}) + A^{(k)} f_*^{(k-1)} \tag{2.5}$$

Таким образом, получена рекуррентная связь между векторами $z^{(k)}(\alpha_k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, которая позволяет получить формулу

$$z^{(k)}(\alpha_k) = B_{k-1}^{(k)} z^{(0)}(\alpha_0) + g_*^{(k)}$$

$$B_l^{(k)} = \prod_{j=0}^{l} A^{(k-j)} Z^{(k-j-1)}(\alpha_{k-j}), \quad l = 0, 1, \ldots, k-1 \tag{2.6}$$

$$g_*^{(k)} = A^{(k)} f_*^{(k-1)} + \sum_{j=0}^{k-2} B_j^{(k)} A^{(k-j-1)} f_*^{(k-j-2)}$$

(при $k = 1$ сумму следует считать равной нулю).

Используя формулу (2.6), решение уравнения (1.7) с учетом (2.3) можем выразить непосредственно через начальный вектор $z^{(0)}(\alpha_0)$, то есть

$$z^{(k)}(\xi) = Z^{(k)}(\xi)\, B_{k-1}^{(k)} z^{(0)}(\alpha_0) + Z^{(k)}(\xi)\, g_*^{(k)} + \int\limits_{\alpha_k}^{\xi} K^{(k)}(\xi, \eta) f^{(k)}(\eta)\, d\eta \tag{2.7}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, m-1)$$

Воспользовавшись далее формулой (2.4), а затем (2.6), получим

$$
\begin{aligned}
z^{(m-1)}(\alpha_m) &= Z^{(m-1)}(\alpha_m) B_{m-2}^{(m-1)} z^{(0)}(\alpha_0) + g_m \\
g_m &= Z^{(m-2)}(\alpha_m) g_*^{(m-2)} + f_*^{(m-1)}
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Подставляя это выражение в граничное условие (1.8), приходим к алгебраической системе (относительно компонент начального вектора $z^{(0)}(a_0)$)

$$
\begin{aligned}
[A + BC_m]\, z^{(0)}(a_0) &= \gamma - g_m \\
C_m &= Z^{(m-1)}(\alpha_m) \prod_{j=0}^{m-2} A^{(m-j-1)} Z^{(m-j-2)}(\alpha_{m-j-1})
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

такого же порядка n, что и система дифференциальных уравнений (1.4), что и требовалось (фактически порядок еще ниже, так как часть компонентов начального вектора заранее бывает известной).

Результирующие формулы (2.7) и (2.9) существенно упрощаются ($K^{(k)}$, $g_*^{(k)}$, $g_m = 0$), если уравнение (1.7) однородно ($f^{(k)} = 0$). Чаще всего в условиях сопряжения $A^{(k)} = I$, что тоже приводит к упрощению. Например, в формуле (2.9) в этом случае

$$
C_m = \prod_{j=0}^{m-1} Z^{(m-j-1)}(\alpha_{m-j})
\tag{2.10}
$$

С другой стороны, условия сопряжения нельзя записать в форме (1.9), если одна из компонент $z_j^{(k)}(\xi)$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ вектора $z^{(k)}(\xi)$ на поверхностях, разделяющих слои, обращается в нуль. Например, применительно к уравнениям упругости (1.3), (1.6) для слоистой среды ($h_k < z < h_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$) это будет тогда, когда между упругими слоями реализован гладкий контакт, то есть равны нулю касательные напряжения: $\tau_\alpha(h_k) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Обращение в нуль какой-либо компоненты $z^{(k)}(\xi)$ на границе слоев, как правило, влечет за собой отсутствие в условии сопряжения (1.10) другой какой-нибудь компоненты (например, применительно к слоистой упругой среде с гладким контактом, в условиях сопряжения между слоями будет отсутствовать горизонтальное смещение, то есть компонента u_α). Если обращается в нуль несколько компонент, то такое же их количество будет отсутствовать и в условиях сопряжения.

В подобных ситуациях (для определенности считаем, что $z_0^{(k)}(a_0) = 0$ $k = 0, 1, \ldots, m-1$ и что компонента $z_{n-1}^{(k)}$ не входит в условия сопряжения) следует поступать так. Пользуясь представлением (2.3) для вектора $z^{(k)}(\xi)$ (при этом ради простоты полагаем $f^{(k)} = 0$) реализуем условие

$$z_0^{(k)}(x_{k+1}) = \sum_{j=0}^{n-1} Z_{0j}^{(k)}(x_{k+1})\, z_j^{(k)}(x_k) = 0$$

(через $Z_{ij}^{(k)}$ обозначены компоненты матриранта $Z^{(k)}$), которое позволяет, очевидно, выразить компоненту $z_{n-1}^{(k)}(\xi)$ через оставшиеся компоненты $z_j^{(k)}(x_k)$, $j = 0, 1, \ldots, n-2$.

Если теперь ввести новый вектор $(n-1)$-го порядка $z_*^{(k)}(\xi)$, отличающийся от прежнего отсутствием компоненты $z_{n-1}^{(k)}(\xi)$, то можно получить для него такое представление

$$z_*^{(k)}(z) = Z_*^{(k)}(\xi)\, z_*^{(k)}(x_k) \qquad (2.11)$$

где $Z_*^{(k)}$ — матрица $(n-1)$-го порядка, компоненты которой достаточно просто выражаются через компоненты матриранта $Z^{(k)}$.

Для введенного таким образом вектора условия сопряжения можно записать в прежней форме, то есть

$$z_*^{(k)}(x_k) = A_*^{(k)} z_*^{(k-1)}(x_k) \qquad k = 1, 2, \ldots, m-1 \qquad (2.12)$$

Краевые условия тоже можно записать относительно введенного вектора $z_*^{(k)}$, то есть

$$A_* z_*^{(1)}(x_0) + B_* z_*^{(m-1)}(x_m) = \gamma_* \qquad (2.13)$$

Применительно к рассмотренной выше слоистой упругой среде, на грани которой $z = h_0$ заданы напряжения $\tau_z^{(0)}(h_0) = 0$, $\sigma_z^{(0)}(h_0) = \sigma_0$, а на грани $z = h_m$ выполнено условие гладкого контакта $\tau_*^{(m-1)}(h_m) = 0$, $w_*^{(m-1)}(h_m) = 0$, причем между слоями (то есть при $z = h_k$; $k = 1, 2, \ldots, m-1$) находятся упругие гладкие пластинки с жесткостями D_k, в (2.12) и (2.13) следует положить

$$A_*^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & D_k\alpha^4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \gamma_* = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Если же пластинки между слоями отсутствуют, а слои между собой находятся в условиях гладкого контакта, то $A_*^{(k)} = I$.

Располагая соотношениями (2.11) и (2.13) и поступая точно так же, как и выше, придем к формулам (2.7) и (2.9), в которых следует положить $f^{(k)}$, $g_*^{(k)}$, $g_m = 0$ и заменить $Z^{(k)}$ и $z^{(k)}$ на $Z_*^{(k)}$ и $z_*^{(k)}$.

Мы рассмотрели случай, когда одна компонента вектора $z^{(k)}$ обращается в нуль на границе слоев. Точно также можно поступить, когда обращается в нуль несколько его компонент.

3. Наиболее трудным этапом в реализации изложенного метода является построение матриранта. Исследуем этот вопрос для дифференциаль-

ных уравнений с постоянными коэффициентами. В этом случае уравнение (2.1) для матриданта $Z^{(k)}(\xi)$ можно записать в таком виде:

$$\frac{dZ^{(k)}}{d\xi} + P^{(k)}Z^{(k)} = 0, \quad (\alpha_k \leqslant \xi \leqslant \alpha_{k+1}, \ Z(\alpha_k) = I, \quad P^{(k)} = \mathrm{const}) \quad (3.1)$$

Согласно [6] в этом случае матрицант можно взять в виде

$$Z^{(k)}(\xi) = \exp[-P^{(k)}(\xi - \alpha_k)] \quad (3.2)$$

Использование такой формы матрицанта для решения краевой задачи (1.7), (1.8) и (1.10) (при $P_0^{(k)} = I$, $P_1^{(k)} = P^{(k)}$) особенно удобно, если

$$P^{(k)} = \nu_k P + \mu_k Q, \quad PQ = QP \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1) \quad (3.3)$$

Действительно, в этом случае благодаря справедливости матричного соотношения $\exp P \cdot \exp Q = \exp(P+Q)$ формулы (2.7), (2.9) и (2.10) при $f^{(k)} = 0$, $A^{(k)} = I$ принимают вид

$$z^{(k)}(\xi) = \exp[-P(\nu_k\xi - \nu_k\alpha_k + \nu^{(k)}_{k-1}) - Q(\mu_k\xi - \mu_k\alpha_k + \mu^{(k)}_{k-1})]\, z^{(0)}(\alpha_0) \quad (3.4)$$

$$(\alpha_k \leqslant \xi \leqslant \alpha_{k+1}, \ k = 0, 1, \ldots, m-1)$$

$$(A + BC_m)\, z^{(0)}(\alpha_0) = \gamma; \quad C_m = \exp[-P\nu^{(m)}_{m-1} - Q\mu^{(m)}_{m-1}]$$

$$[\nu_l^{(k)}, \mu_l^{(k)}] = \sum_{j=0}^{l} [\nu_{k-j-1}, \mu_{k-j-1}](\alpha_{k-j} - \alpha_{k-j-1})$$

Однако, случаи представления (3.3), в основном, из-за требования перестановочности ($PQ = QP$) достаточно редки. Поэтому укажем еще один способ построения матрицанта, представляющего собой некоторую модификацию метода Коши [7].

Введем в рассмотрение матрицу

$$M(\zeta) = E\zeta + P^{(k)} \quad (3.5)$$

определитель которой, очевидно, будет многочленом степени n, то есть

$$|M(\zeta)| = Q_n(\zeta) = \prod_{j=0}^{n-1}(\zeta - \zeta_j) \quad (3.6)$$

Если ζ не совпадает ни с одним из корней этого многочлена, то будет существовать

$$M^{-1}(\zeta) = \Delta^{*}(\zeta)\, Q_n^{-1}(\zeta) \quad (3.7)$$

где $\Delta^{*}(\zeta)$ — матрица, транспонированная к матрице алгебраических дополнений для элементов матрицы (3.5).

Покажем, что

$$Z^{(k)}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\Delta^{*}(\zeta)}{Q_n(\zeta)}\, e^{(\xi - \alpha_k)\zeta}\, d\zeta \quad (3.8)$$

(C — любой замкнутый контур, охватывающий все нули многочлена Q_n). Для этого подставим (3.8) в уравнение (3.1), примем во внимание, что матрица (3.7) является обратной к матрице (3.5) и воспользуемся теоремой Коши. В результате придем к требуемому тождеству. Остается еще показать, что

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\Delta^*(\zeta)\,d\zeta}{Q_n(\zeta)} = I \tag{3.9}$$

Для этого достаточно подсчитать вычет подынтегрального выражения в (3.8) при $\zeta=\infty$, учтя при этом, что для алгебраических дополнений элементов матрицы (3.5) имеют место следующие асимптотические представления:

$$\Delta_{jk}(\zeta) = \begin{cases} O(\zeta^{n-2}), & j \neq k \\ \zeta^{n-1} + O(\zeta^{n-2}), & j = k \end{cases}$$

Полученное выражение (3.8) для матриканта можно, очевидно, записать и в таком виде

$$Z^{(k)}(\xi) = \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{Res}\left|\frac{\Delta^*(\zeta)\, I^{(\xi-a_k)\zeta}}{Q_n(\zeta)}\right|_{\zeta=\zeta_j} \tag{3.10}$$

В силу единственности решения уравнения (3.1) при $Z^{(k)}(a_k) = I$ полученная формула (3.10) может одновременно служить и для подсчета показательной функции (3.2) от матричного аргумента.

4. В качестве простого, но типичного примера, иллюстрирующего существо предлагаемого подхода, рассмотрим задачу о продольных колебаниях (1.1) ступенчатого стержня: $a_k < x < a_{k+1}$, $e_k^{-1} = E_kF_k$, $c_k = \gamma_kF_k$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Предполагая нулевые начальные условия, но произвольные граничные условия (при отсутствии загрузки и сосредоточенных масс в промежуточных сечениях), применяем к уравнениям (1.1) преобразование Фурье (с параметром α) по времени на интервале $(0, \infty)$. В результате придем к краевой задаче (1.7), (1.8) и (1.10), в которой следует принять ($\xi = x$, $\alpha_k = a_k$)

$$z^{(k)} = \begin{pmatrix} u_\alpha^{(k)} \\ N_\alpha^{(k)} \end{pmatrix}, \quad P_1^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & -e_k \\ c_k\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_0^{(k)} = A^{(k)} = I, \quad f^{(k)} = 0 \tag{4.1}$$

Для ее решения представим

$$P_1^{(k)} = P^{(k)} = c_k\alpha^2 C - e_k D, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

и возьмем матрикант в виде (3.2), то есть

$$Z^{(k)}(x) = \exp\left[-(x-a_k)(c_k\alpha^2 C - e_k D)\right] \tag{4.3}$$

В разбираемом случае от показательной функции можно избавиться и не прибегая к формуле (3.10). Вместо нее следует воспользоваться формулой

$$\exp(aA + bB) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(aA + bB)^n}{n!} = I \operatorname{ch}\sqrt{ab} + (aA + bB)\frac{\operatorname{sh}\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} \tag{4.4}$$

Здесь a, b — произвольные числа, A, B — произвольные матрицы, обладающие свойствами

$$A^m = 0, \quad B^m = 0, \quad m \geqslant 2, \quad AB + BA = I \tag{4.5}$$

Вывод формулы (4.4) прост. Достаточно разбить суммирование в (4.4) по четным и нечетным степеням и воспользоваться (4.5).

Очевидно, матрицы C и D, содержащиеся в (4.2), обладают свойством (4.5), а потому на основании (4.4) будем иметь вместо (4.3) следующее выражение для матрицанта:

$$\begin{gathered} Z^{(k)}(x) = I\cos x_k + (De_k\varepsilon_k^{-1} - C\alpha^2 c_k)\sin x_k \\ x_k = |\alpha|\varepsilon_k(x - a_k), \quad \varepsilon_k^2 = c_k e_k = E_k\rho_k^{-1} \end{gathered} \tag{4.6}$$

что позволяет записать решение разбираемой краевой задачи в виде

$$\begin{pmatrix} u_\alpha^{(k)} \\ N_\alpha^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x_k & e_k\varepsilon_k^{-1}\sin x_k \\ -c_k\varepsilon_k^{-1}\alpha^2\sin x_k & \cos x_k \end{pmatrix} B_k z^{(0)}(a_0) \tag{4.7}$$

$$k = 0, 1, \ldots, m - 1$$

$$B_k = \Omega_{k-1}\Omega_{k-2}\ldots\Omega_0$$

$$\Omega_k = \begin{pmatrix} \cos\omega_k & e_k\varepsilon_k^{-1}\sin\omega_k \\ -c_k\varepsilon_k^{-1}\alpha^2\sin\omega_k & \cos\omega_k \end{pmatrix}, \quad \omega_k = (a_{k+1} - a_k)\varepsilon_k|\alpha|$$

Начальный вектор $z^{(0)}(a_0)$ определим из граничного условия

$$(A + BB_m)z^{(0)}(a_0) = \gamma \tag{4.8}$$

Если один торец $x = a_m$ ступенчатого стержня закреплен, а другой загружен продольной силой $Q(t)$, то в (4.8) следует положить

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} Q_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

Формулы (4.7), (4.8) и (4.9) одновременно дают решение задачи об установившихся вынужденных колебаниях разбираемого ступенчатого стержня при действии нагрузки $Q(t) = Q_\alpha e^{i\alpha t}$, причем $u(x, t) = u_\alpha(x)e^{i\alpha t}$ и $N(x, t) = N_\alpha e^{i\alpha t}$. Если же рассматриваются свободные колебания, то частотное уравнение относительно α получим ($\gamma = 0$) из (4.8) приравниванием определителя к нулю, то есть

$$|A + BB_m| = 0 \tag{4.10}$$

Формулы (4.7) и (4.8) наглядно показывают, что предлагаемый здесь подход к решению задач для слоистых сред является обобщением метода начальных параметров [1] на случай дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными (кусочно-непрерывными) коэффициентами.

5. Выше предполагалось, что для уравнений в частных производных первого порядка относительно функций $u_j(x, \eta, \zeta)$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$, описывающих краевую задачу для слоистой среды $a_k < x < a_{k+1}$ ($k=0, 1, \ldots, m-1$), $\beta_0 < \eta < \beta_1$, $\gamma_0 < \zeta < \gamma_1$, существуют интегральные преобразования по переменным η и ζ. Это и позволило прийти к одномерной краевой задаче (1.7), (1.8) и (1.10). Однако, предлагаемый подход можно реализовать и в случае, когда таких преобразований нет. Для этого следует воспользоваться идеей метода начальных функций В. З. Власова [8] или символического метода А. И. Лурье [7], что позволит краевую задачу для слоистой среды записать по-прежнему в виде указанной одномерной задачи, но при этом в матрицах P_j ($j = 0, 1$) вместо параметров интегральных преобразований по переменным η и ζ будут содержаться операторы дифференцирования по этим переменным. Применяя те же построения, приходим вновь к соотношению (2.7), выражающему решение рассматриваемой проблемы через начальные функции $z_j^{(0)}(x_0) = u_j(x_0, \eta, \zeta)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ и к соотношению (2.9), которое теперь будет представлять собой дифференциальные уравнения бесконечного порядка по переменным η и ζ для упомянутых начальных функций[1].

Проиллюстрируем сказанное на примере стационарной задачи теплопроводности для слоистой среды $a_k \leqslant x \leqslant a_{k+1}$ ($k = 0, 1, \ldots, m-1$), $b_0 \leqslant y \leqslant b_1$, $c_0 \leqslant z \leqslant c_1$.

Считая в (1.2) операторы дифференцирования по y и z числами $\partial_1 = \partial/\partial y$, $\partial_2 = \partial/\partial z$ и полагая $\partial/\partial x = d/dx$, $\partial/\partial t = 0$, $f(x, y, z) = 0$, посредством исключения из третьего уравнения p и r приходим к следующему аналогу уравнения (1.4):

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \theta \\ q \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nu\Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 \tag{5.1}$$

Здесь ради упрощения принято, что $k_2 = k_3$ и введены обозначения $\nu = k_1 k_2$, $\lambda = k_1^{-1}$.

Соответствующая система (1.7) в рассматриваемом случае будет второго порядка, и если считать, что ν остается постоянным для всех слоев, а меняется только λ, то

[1] В цитированной выше работе [8] применительно к задаче теории упругости для слоистой среды реализован иной путь получения дифференциальных уравнений бесконечного порядка относительно начальных функций. Отличие его от развиваемого здесь состоит в отсутствии привязки к соответствующей одномерной краевой задаче (1.7), (1.8) с общими условиями сопряжения (1.10), что приводит к потере общности и единообразия (но не исключает в отдельных случаях выигрыша в эффективности).

$$P_0^{(k)}=I,\quad P_1^{(k)}=\lambda_k P,\quad P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\nu\Delta & 0\end{pmatrix},\qquad f^{(k)}=0 \tag{5.2}$$

Таким образом, имеет место случай (3.3), причем $\mu_k=0$ и на основании формулы (3.4) имеем следующее выражение температурного поля в k-ом слое:

$$\begin{pmatrix}\theta^{(k)}\\ q^{(k)}\end{pmatrix}=\exp\left[-P(\lambda_k x-\lambda_k a_k+\lambda_{k-1}^{(k)})\right]\begin{pmatrix}\theta_0\\ q_0\end{pmatrix} \tag{5.3}$$

через начальные функции $\theta_0=\theta(a_0, y, z)$, $q_0=q(a_0, y, z)$, причем постоянные $\lambda_l^{(l)}$ определяются соответствующей формулой из (3.4) с заменой α_k на a_k.

Если для рассматриваемой задачи теплопроводности принять такие краевые условия

$$\theta\big|_{x=a_0}=\theta_0(y, z)\equiv 0;\quad \theta\big|_{x=a_m}=\theta_m(y, z) \tag{5.4}$$

то уравнение для начального вектора, содержащееся в (3.4), приобретает вид

$$(A+Be^{-Pl_m})\begin{pmatrix}0\\ g_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\theta\\ Q_m\end{pmatrix},\quad l_m=\sum_{j=0}^{m-1}\lambda_j(a_{j+1}-a_j) \tag{5.5}$$

Входящая сюда показательная функция от матрицы легко вычисляется с помощью разложения [6]

$$e^{-Pl}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P^n(-l_m)^n}{n!} \tag{5.6}$$

Действительно, легко проверяется с учетом (5.2), что

$$P^{2j}=(-\nu\Delta)^j I,\qquad P^{2j+1}=(-\nu\Delta)^j P$$

и, следовательно, на основании (5.6) имеем

$$e^{-Pl}=I\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-\nu\Delta)^j l_m^{2j}}{(2j)!}-l_m P\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-\nu\Delta)^j l_m^{2j}}{(2j+1)!} \tag{5.7}$$

Принимая это во внимание, соотношение (5.5) приводит к следующему дифференциальному уравнению бесконечного порядка:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-k)^j l_m^{2j}}{(2j)!}\left(1-\frac{l_m}{2j+1}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^j q_0(y, z)=\theta_m(y, z) \tag{5.8}$$

относительно начальной функции $q_0(y, z)$, через которую согласно (5.3) выражается искомое температурное поле в исследуемой слоистой среде.

При малых величинах [illegible] можно ограничиться конечным отрезком ряда в левой части (5.8). К полученному таким образом приближенному уравнению нужно добавить граничные условия по цилиндрической поверхности, если таковой ограничено рассматриваемое слоистое тело: $a_0 < r < a_n$. При этом эти граничные условия следует записать в интегральном (осредненном) по толщине ($a_n - a_0$) виде.

В заключение заметим, что в целях наибольшей ясности существа развиваемого подхода иллюстрирующие примеры проводились на задачах достаточно простых и хорошо исследованных. Включение же новых или малоисследованных (как правило, достаточно сложных и громоздких) увеличило бы сильно объем статьи. Поэтому такие задачи являются предметом дальнейших исследований.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Поступила 29 XII 1976

Գ. Յա. ՊՈՊՈՎ

ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Շերտավոր միջավայրերի համար շատ խնդիրներ ինտեգրալ ձևափոխությունների օգնությամբ բերվում են որոշ ինտերվալների վրա տրված միաչափ դիֆերենցիալ հավասարումների, որոնց թիվը հավասար է շերտերի թվին։

Նշված հավասարումների լուծումը բերվում է շերտերի թվին համեմատական կամավոր հաստատունների որոշմանը։

Հոդվածում առաջարկվում է նշված կամավոր պարամետրերի թվի, մինչև շերտերի քանակությունից չկախված, այլ դիֆերենցիալ հավասարումների կարգով որոշվող քանակությունը, նվազեցնելու ընդհանուր եղանակ։

Ցույց է տրվում, որ եղանակը կարող է օգտակար լինել նաև այն դեպքում, երբ սկզբնական խնդիրը շերտավոր միջավայրի համար չի կարող ինտեգրալ ձևափոխությունների օգնությամբ բերվել միաչափ խնդիրին։

ON SOLUTION OF PROBLEMS IN MECHANICS AND MATHEMATICAL PHYSICS FOR LAMINAR MEDIA

G. Y. POPOV

Summary

Many problems for laminar media are reduced by means of integral transforms to one-dimensional differential equations prescribed

for the regions whose number is equal to that of layers. The solution of the aforesaid equations leads to the definition of arbitrary constants (from conjugate conditions) proportional to the number of layers.

A general method of reduction of the above arbitrary parameters to the number determined by the order of the differential equations, independent of the number of layers, is suggested.

The method is shown to be useful in the case where the initial problem for the laminar medium may not be reduced (by means of integral transforms) to a one-dimensional problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крылов А. Н.* О расчете балок, лежащих на упругом основании. Л., Изд. АН СССР, 1930.
2. *Петришин В. И., Приварников А. К., Шевляков Ю. А.* К решению задач для многослойных оснований. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2.
3. *Саркисян В. С.* Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван. Изд. Ереванского ун-та, 1976.
4. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* Задачи теории упругости для многослойных сред. М., «Наука», 1973.
5. *Раппопорт Р. М.* К вопросу о построении решений осесимметричной и плоской задач теории упругости многослойной среды. Изв. Всесоюзн. НИИ гидротехн., т. 73, Л., 1963.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., Гостехтеориздат, 1954.
7. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. М.—Л., Гостехтеориздат, 1950.
8. *Власов В. З., Леонтьев Н. Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М., Физматгиз, 1960.
9. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехтеориздат, 1955.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXI, № 2, 1978 Механика

Ю. М. ПОЧТМАН, З. И. ПЯТИГОРСКИЙ

О ПРОЕКТИРОВАНИИ ИЗГИБАЕМЫХ ПЛАСТИН МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА, ОПТИМАЛЬНЫХ ПО ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТИ

1. В развитие работы авторов [1] в настоящей работе анализируется проектирование изгибаемых приспосабливающихся пластин минимального веса при воздействии соответствующих статических и квазипостоянных нагрузок.

Проектирование конструкций минимального веса так же, как и их оптимизация по другим характеристикам, обязательно ведется с учетом необходимости обеспечить их прочность и достаточную жесткость. При этом распространенным является случай, когда одни нагрузки воздействуют на конструкцию систематически и, ввиду этого, их требования к жесткости конструкции значительно превышают аналогичные требования по отношению к другим нагрузкам, превышающим первые по модулю, но значительно менее вероятным (например, аварийным). В этих случаях, а также во многих других задачах инженерной практики возникает необходимость анализа предельного состояния конструкций. Предельное состояние конструкции при квазистатическом нагружении может быть установлено методами теории приспособляемости, одним из обязательных аспектов которых до недавнего времени считалась необходимость предварительного анализа работы конструкций в предположении неограниченной упругости материала, то есть предположении $\sigma_T \to \infty$. Указанное обстоятельство значительно усложняло анализ приспособляемости и сдерживало его внедрение в практику. Поэтому получение проекта оптимальной по приспособляемости конструкции без анализа ее работы в упругой стадии весьма актуально. В работе [1] показана такая возможность для ряда случаев нагружения прямоугольных пластин.

2. Рассматривается оптимальное проектирование пластин из идеального упруго-пластического материала, подчиняющегося диаграмме Прандтля. Пластины нагружены силовой квазистатической нагрузкой, то есть нагрузкой, изменяющейся достаточно медленно, чтобы можно было пренебречь динамическими эффектами, но достигающей своего максимума и минимума неоднократно и по неизвестной программе. В случае, когда отношение модулей максимума и минимума нагрузки близко к единице, нагрузку будем называть квазипостоянной. В работе [2] показано, что оптимальное проектирование приспосабливающихся конструкций позволяет получить проекты конструкций, для которых прилагаемые проектные квазистатические и квазипостоянные нагрузки предельны, то есть воспринимающая их оптимальная конструкция находится в предельном состоянии; дальней-

шее циклическое увеличение нагрузки приводит ее к разрушению в том смысле, что она неспособна ему сопротивляться. При этом проектируемые оптимальные пластины должны воспринимать нагрузку при упругой работе материала. Однако, в начальных циклах изменения нагрузки допускаются ограниченные пластические деформации. Естественно, что эти пластические деформации могут вызвать в пластине остаточные напряжения. Если сумма этих не зависящих от времени остаточных напряжений в любой точке пластины с напряжениями, вычисленными для этой же точки в любой момент времени в предположении упругой работы материала, безопасна, то с этого момента пластина будет воспринимать квазистатическую нагрузку при чисто упругой работе материала (понятие безопасности конкретизируется теорией прочности).

Поиск таких остаточных напряжений базируется на фундаментальных теоремах приспособляемости Мелана и Койтера [3]. Статическая теорема приспособляемости Мелана утверждает, что если указанное выше статически возможное самоуравновешенное поле остаточных напряжений можно себе представить, то приспособляемость обязательно наступит, хотя действительное поле остаточных напряжений может не совпадать с представленным: вид действительного поля зависит от конкретной истории нагружения. Описанная в [2] методика позволяет запроектировать конструкцию без анализа истории нагружения, так как знание только пределов изменения всех параметров нагрузки не даст возможности в общем случае описать всевозможные истории нагружения с последующим их перебором.

Примем, что всякая сложная нагрузка задана пределами изменения зависящих от одного параметра простых нагрузок, совокупностью которых она является. В качестве условия безопасности принимаем условие Мизеса. Можно показать, что для любой нормали к срединной поверхности изгибаемой пластины безопасное состояние точек нормали, лежащих на поверхности пластины, эквивалентно безопасному состоянию всех точек нормали в целом. Поэтому условие безопасности Мизеса для всей изгибаемой пластины может быть записано в следующей форме:

$$\forall r(x, y) \in (A = \max(M_x^2 + M_y^2 - M_x \cdot M_y + 3M_{xy}^2)_t \leq H^2)\ldots \qquad (2.1)$$

где M_x, M_y, M_{xy} — соответственно действующие изгибающие и крутящий моменты в точке $r(x, y)$ срединной поверхности пластины, $H = \sigma_T h^2/6$, h — толщина пластины в той же точке, σ_T — предел текучести материала пластины. В дальнейшем для остаточных усилий принят индекс „0“, для вычисленных в предположении упругой работы пластины — индекс „e“. Состояние приспособляемости изгибаемой пластины постоянной толщины описывается зависимостью (2.1) с подстановками:

$$M_x = M_x^0 + M_x^e; \qquad M_y = M_y^0 + M_y^e; \qquad M_{xy} = M_{xy}^0 + M_{xy}^e \qquad (2.2)$$

при одновременном удовлетворении этой же зависимости подстановками

$$M_x = M_x^0; \qquad M_y = M_y^0; \qquad M_{xy} = M_{xy}^0 \qquad (2.3)$$

для квазистатической нагрузки. Так как в любой момент времени $M^{\cdot} = \sum_{N} \alpha_i M_i^{\cdot}$, где N — количество однопараметрических нагрузок, составляющих нагружение, то есть его параметров, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, то задача отыскания A может быть сформулирована в пространстве параметров α_i измерения N. Можно доказать методом математической индукции, что $\max A$ достигается на границах области существования α_i, то есть либо $\alpha_i = 0$, либо $\alpha_i = 1$. Таким образом, для определения A в точке $r(x, y)$ нет необходимости устанавливать экстремум методами математического программирования, а достаточно решить следующее уравнение:

$$A = \max (A(\max M_x),\ A(\max M_y),\ A(\max M_{xy})$$
$$A(\min M_x),\ A(\min M_y),\ A(\min M_{xy})) \tag{2.4}$$

Здесь для M значения те же, что в (2.2) и (2.3).

Таким образом, рассмотрение приспособляемости пластины при действии сложной квазистатической нагрузки может быть эквивалентно заменено рассмотрением взаимодействия статически возможного поля остаточных усилий с полями огибающих.

3. Представляется естественной постановка задачи проектирования пластины, удовлетворяющей следующим требованиям:

$$\exists M^0 \neq 0 \rightarrow (\forall r \in R \rightarrow f(M^e + M^0) \leqslant H^2) \&$$
$$\forall \beta > 1 \rightarrow (\exists \bar{r} \in R \rightarrow f(\beta M^e + M^0)_{\bar{r}} > H^2) \& \tag{3.1}$$
$$(\forall \beta < 1 \& \forall (\bar{M}^0 \neq M^0)_{\bar{r}}) \rightarrow (\exists \bar{r} \in R \rightarrow f(\beta M^e + \bar{M}^0) > H^2)$$

Удовлетворяющая этим условиям пластина и поле возникших в ней остаточных усилий названы нами оптимальными по приспособляемости. Невозможность проанализировать возможные истории нагружения привела к тому, что оптимальное по приспособляемости поле остаточных усилий фиктивно в смысле теоремы Мелана: его существование доказывает способность пластины приспособиться к нагрузке. В то же время, оно не единственно: существуют и другие оптимальные по приспособляемости поля. Однако, все эти поля имеют одинаковые значения M^0 в точках, где $f(M^e + M^0) = H^2$, так как именно этим обеспечивается экстремальность оптимальной по приспособляемости конструкции (О. П. К.) и ее единственность: проект пластины (ее толщина) определяется именно этими стационарными в указанном смысле значениями M^0. В остальных точках срединной поверхности пластины значения M^0 не единственны. Таким образом, задача отыскания M^0 по (1.5) есть многоэкстремальная задача математического программирования и в этом состоит главная особенность указанного подхода.

4. Для полей остаточных усилий единственно известным в настоящее время является дискретное представление.

Условие самоуравновешенности названного поля в функциональной форме имеет вид

$$\frac{\partial^2 M_x^0}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}^0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^0}{\partial y^2} = 0 \tag{4.1}$$

Аппроксимируя это уравнение сеткой на срединной поверхности пластины, заменяем его по известным формулам линейным оператором

$$\begin{array}{ccc} -0.5\,M_{xy} & M_y\mu^2 & 0.5\,M_{xy}\mu \\ M_x & -2\,(M_x + M_y\mu^2) & M_x \\ 0.5\,M_{xy}\mu & M_y\mu^2 & -0.5\,M_{xy}\mu \end{array} \tag{4.2}$$

Здесь μ — соотношение сторон сетки $\mu = \Delta y/\Delta x$. Так как уравнений (узлов сетки) значительно меньше, чем неизвестных, приходится решать задачу математического программирования большой размерности: например, в пластине с сеткой 5×5 количество управляемых параметров достигает 47.

5. Для численной реализации на ЭВМ задачи (3.1) с учетом (1÷4.7) используем моделирующий приспособляемость алгоритм случайного поиска, описанный в [1], который обладает следующими особенностями:

а) слабой чувствительностью к повышению размерности пространства управляемых параметров;

б) возможностью получения множества оптимальных по приспособляемости полей остаточных усилий;

в) возможностью получения траектории фазовой точки статически возможного процесса приспособляемости в пространстве компонент остаточных усилий;

г) алгоритм не налагает никаких дополнительных ограничений на управляемые параметры поля остаточных усилий.

Последняя особенность алгоритма, по нашему мнению, представляется необходимой ввиду следующего обстоятельства. Многими исследователями (например, в работах [4], [5] и [6]) к параметрам поля остаточных усилий (напряжений) обычно проявляются некоторые интегральные требования (на стадии формулировки задачи — в [4] и [5] или в алгоритме решения — в [6]). С их учетом представляется необходимым дополнительно доказать тождественность полученного проекта оптимальному по приспособляемости, что достаточно сложно в многоэкстремальной задаче. Кроме того, алгоритм случайного поиска требует лишь непрерывности функции цели и функций ограничений, тогда как большинство регулярных методов поиска требуют [7] их дифференцируемости.

Необходимо обратить внимание, что применение данного метода приводит к множеству статически возможных полей остаточных усилий и для случая простого нагружения.

6. Рассмотрим проектирование О. П. К. — пластины, нагруженной квазипостоянной нагрузкой, область безопасности материала которой описывается условием Мизеса. Существование приспособляемости для конструкции из такого материала доказано в [3]. В работе [8] авторами предложено поле остаточных напряжений $\sigma(M^{\circ})$ в приспосабливающейся конструкции представлять в виде

$$\sigma(M^{\circ}) = \sigma(\bar{M}^{\circ}) + \sigma(M^{\circ}(N)) \qquad (6.1)$$

где $\bar{M}^{\circ}$ — составляющая поля M°, самоуравновешенная в сечении, а $M^{\circ}(N)$ — составляющая поля M°, приводимая в сечениях к полю N усилий в линиях связях и самоуравновешенная в конструкции в целом. Составляющая $\bar{M}^{\circ}$, естественно, является функцией формы сечения. Для прямоугольного сечения, а, следовательно, и для пластины в краевых волокнах

$$\max|\sigma(\bar{M}^{\circ})| = 0.5\,\sigma_T$$

Рассмотрим прямоугольную свободно опертую пластину, нагруженную в центре сосредоточенной квазипостоянной силой P, такой, что

$$\bar{P}' \leqslant P \leqslant \bar{P} \wedge 1 - \frac{\bar{P}'}{\bar{P}} = \alpha \wedge \alpha \leqslant 1 \qquad (6.2)$$

Введем следующие коэффициенты: λ_s — коэффициент расширения области упругой работы конструкции (определяется как отношение предельной приспосабливающей нагрузки P_s к нагрузке P^e — предельной по условию отсутствия пластических деформаций при нагружении пластинки из естественного состояния). $\bar{\lambda}_s$ — коэффициент снижения несущей способности конструкции при изменении характера нагрузки со статического на квазипостоянный (определяется как отношение предельной статической нагрузки P_T, превышение которой недопустимо ввиду образования в пластине механизма разрушения с пластическими шарнирами, к предельной приспосабливающей нагрузке P_s).

P_s вычисляется по известным формулам из [8], а P_s определяется по описанной выше методике ((2.1), (2.2), (2.4), (4.2), (6.1)). Полученные для различных отношений сторон пластины μ величины этих коэффициентов приведены в таблице.

Таблица

№ п/п	μ	λ_s	$\bar{\lambda}_s$	№ п/п	μ	λ_s	$\bar{\lambda}_s$
1	1.0	2.0	1.44	4	2.5	2.0	1.82
2	1.5	2.0	1.52	5	3.0	2.0	1.98
3	2.0	2.0	1.66				

В рассмотренных случаях имеет место отмеченное в [1] равенство предельной квазипостоянной нагрузки P_1 и верхнего по модулю предела квазистатической нагрузки, когда нижним пределом является нуль, то есть разгрузка. Малейшее нарушение условий приспособляемости для рассматриваемой квазипостоянной нагрузки приводит к пластической диссипации энергии в точках, принадлежащих по напряженному состоянию к поверхности нагружения и, естественно, к приращению пластической деформации.

Полученные здесь результаты свидетельствуют, что для определенных случаев предельная статическая нагрузка P_4 недостижима даже теоретически, если учесть, что «идеальных» статических нагрузок не существует. Отмеченное явление внешне в определенном напоминает ползучесть, однако наблюдение его затруднено тем фактом, что подавляющее большинство конструкционных материалов обладает свойством упрочняться, а так как для упрочняющихся материалов приспособляемость имеет место [9], то после некоторого периода нарушения условий приспособляемости к квазипостоянной нагрузке, когда исчерпывается площадка текучести и начинается упрочнение, пластические деформации прекращаются, ибо наступает приспособляемость при новом, увеличенном значении предела текучести σ_T.

Днепропетровский инженерно-строительный
институт

Поступила 18 XI 1976

Յու. Մ. ՊՈՉՏՄԱՆ, Զ. Ի. ՊՅԱՏԻԳՈՐՍԿԻ

ԱՄԵՆԱՓՈՔՐ ԿՇՌՈՎ ԵՎ ԸՍՏ ՀԱՐՄԱՐՎՈՂԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼ ԾՌՎՈՂ ՍԱԼԵՐԻ ՆԱԽԱԳԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է գվազիստատիկ ուժային բեռով բեռնավորվող սալերի օպտիմալ նախագծումը։

Ցույց են տրվում սահմանափակված պլաստիկական դեֆորմացիաներ և նրանցով պայմանավորված մնացորդային լարումներ։ Վերլուծությունը կատարվում է հարմարվողականության տեսության հիման վրա։

Բեռնավորման պատմությունը անհայտ է յուրաքանչյուր անկախ բեռի մասին հայտնի է միայն նրա տեսակը, նրա կիրառման տեղը և նրա մեծության փոփոխության սահմանները։

Ստացված արդյունքների հիման վրա վերլուծվում են կոնստրուկցիայի առաձգական աշխատանքի շրջանակի լայնացումը քվազի հաստատուն բեռնավորման դեպքում, ինչպես նաև բեռի քվազի հաստատուն կիրառման ժամանակ նրա սահմանային մեծության փոքրացումը ստատիկական բեռի հետ համեմատած։

Արդյունքները ստացվել են պատահական որոնումների եղանակով։

THE DESIGNING OF BENDING PLATES OF MINIMAL WEIGHT, OPTIMAL IN SHAKEDOWN

Yu. M. POCHTMAN, Z. I. PYATIGORSKY

Summary

The optimal designing of plates loaded quasi-statically is considered. A limited plastic deformation and the resulting stresses are permitted. The analysis is made in terms of the shakedown theory. The load history is unknown: only the shape, the place of its application and the limits of variation in its value are known.

The expansion of the field of the structure's elastic work under quasi-constant load as well as the lowering of the value of limited load under quasi-constant loading, compared with its statical application, are analyzed on the basis of the results obtained by the random search method.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Почтман Ю. М., Пятигорский З. И.* О влиянии истории нагружения на предельные состояния некоторых оптимальных по приспособляемости конструкции. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т. XXIX, № 4.
2. *Почтман Ю. М., Пятигорский З. И.* Оптимальное проектирование приспосабливающихся конструкций как метод установления их предельного состояния. Докл. АН СССР, 1974, т. 216, № 6.
3. *Койтер В. Т.* Общие теоремы теории упруго-пластических сред. М., 1961.
4. *Чирас А. А., Аткочюнас Ю. Ю.* Математические модели поверочного расчета упруго-пластического тела при повторно-переменном загружении. Вильнюс, Литовский мех. сборник, 1970, № 2 (7).
5. *Чирас А. А., Аткочюнас Ю. Ю.* Математические модели проектного расчета упруго-пластического тела при повторно-переменном загружении. Вильнюс, Литовский мех. сборник, 1971, № 1 (8).
6. *Лантух А. Г., Перельмутер А. В.* К вопросу о приспособляемости пластин. Проблемы прочности, № 6. Киев, «Наукова думка», 1970.
7. *Волынский Э. И., Почтман Ю. М.* Алгоритм метода случайного поиска для оптимизации стержневых и континуальных систем. Строительная механика и расчет сооружений, 1974, № 5.
8. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник под общей ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. М., 1968.
9. *Киракосян Р. М.* Теорема о приспособляемости тел к переменным внешним воздействиям при произвольном упрочнении материала. Докл. АН Арм. ССР, 1971, т. 52, № 4.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXI, № 2, 1978 Механика

А. М. СИМОНЯН

К ВОПРОСУ О ВЫБОРЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ МЕТАЛЛОВ

Как известно, при изучении высокотемпературной ползучести металлов, в особенности при высоких напряжениях, обычно наблюдается большой разброс экспериментальных данных. Увеличение числа образцов, испытуемых при одних и тех же температурах и напряжениях, приводит к большей достоверности усредненных данных, иначе говоря, приводит к сближению этих данных к их математическому ожиданию, то есть к усредненным данным из предполагаемого бесчисленного множества однотипных экспериментов.

При решении задач о напряженном и деформированном состоянии в конструкции обычно используются только эти усредненные экспериментальные данные, факт же разброса, естественно, имеющий место и в реальных конструкциях, не принимается во внимание. Однако, в зависимости от специфики задачи, разброс данных о ползучести материала по-различному влияет на напряженно-деформированное состояние элемента конструкции, причем влияние это может быть весьма значительным. Для изучения этого вопроса необходимо задаться функцией распределения параметров, определяющих ползучесть материала.

В настоящей работе исследуется вопрос о выборе функции распределения основного параметра ползучести сплавов Д16Т и хромо-никелевой стали Х18Н10Т, а также рассмотрен пример построения функции распределения напряжений в простейшей статически-неопределимой стержневой системе.

1. При статистической обработке экспериментальных данных о механических свойствах материала большое распространение получил нормальный закон распределения. Этому, в известной мере, способствовало то обстоятельство, что нормальный закон изучен наиболее полно, а непосредственное построение действительного закона плотности распределения экспериментальным путем требует очень большого количества экспериментальных данных.

Однако, согласно нормальному закону распределения рассматриваемая величина с конечной вероятностью может иметь отрицательный знак, и, вследствие этого, использование его для некоторых параметров ползучести, как, впрочем, и для модуля упругости, коэффициента Пуассона и ряда других механических характеристик в вероятностных расчетах вряд ли приемлемо.

Выбор функции распределения для некоторого параметра x здесь осуществляется следующим способом: на основе экспериментальных данных определяются выборочные несмещенные значения некоторых вероятностных показателей, которые затем сравниваются с аналогичными показателями, определенными из того или иного выражения функции плотности распределения $f(x)$. Затем производится проверка согласованности выбранной функции распределения согласно критерию согласия А. Н. Колмогорова. В качестве вероятностных показателей здесь, кроме математического ожидания m и дисперсии D, рассматриваются также первый абсолютный момент ν_a, характеризующийся средним отклонением, третий центральный момент ν_3, характеризующийся асимметрией функции распределения, и медиана Ме, характеризующаяся, в основном, функцией распределения в средней ее части. Ниже приводятся формулы для определения этих вероятностных показателей из аналитического выражения $f(x)$

$$m=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx,\quad D=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 f(x)\,dx,\quad \nu_a=\int_{-\infty}^{\infty}|x-m|f(x)\,dx$$

$$\nu_3=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^3 f(x)\,dx,\qquad \int_{\mathrm{Me}}^{\infty} f(x)\,dx=\frac{1}{2} \tag{1.1}$$

а также для определения их выборочных несмещенных значений на основе экспериментов в тождественных условиях [1]

$$m^*=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}x_i,\qquad D^*=\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(x_i-m^*)^2$$

$$\nu_a^*=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}|x_i-m^*|,\qquad \nu_3^*=\frac{n}{n^2-3n+2}\sum_{1}^{n}(x_i-m^*)^3 \tag{1.2}$$

$$\mathrm{Me}^*=x_{\frac{n}{2}}\quad \text{при условии } x_{i+1}>x_i,\quad i=1, 2\ldots$$

Вышеприведенный способ оценки функции плотности распределения, по-видимому, может быть использован и при наличии не очень большого количества экспериментальных данных. Действительно, для такой оценки следует иметь выборочные значения вероятностных показателей с некоторой заданной точностью.

2. Рассмотрим значения деформации кратковременной ползучести образцов из сплава Д16Т при температуре 207°С и напряжении 18 *кг/мм*^{2} через 20 *час* после нагружения. Пользуясь данными гистограммы 293 кривых ползучести [2], согласно формулам (1.2), получим

$$m^* = 0.3 \cdot 10^{-2}; \quad D^* = 0.19\, m^{*2}, \quad \nu_a^* = 0.35\, m^*$$
$$\nu_3^* = 0.068 m^{*3}, \quad \mathrm{Me}^* = 0.89\, m^* \tag{2.1}$$

Отметим, что определение Me из гистограммы мало эффективно, так как при этом возможна ошибка, равная шагу, принятому в гистограмме, что в рассмотренном случае составляет $0.056\, m^*$.

Следует оговорить, что гистограмма, заимствованная из [2], построена была на основе данных ползучести, где напряжение и температура были специально взяты с некоторыми отклонениями от своих средних значений, так что данные гистограммы определяются не только свойствами материала, но и выбором этих отклонений.

При изучении 3-й стадии одноосной ползучести хромо-никелевой стали Х18Н10Т при 700°С и при напряжении $\sigma = 11.15$ *кг/мм*^{2} для аппроксимации доли деформаций ползучести, протекающей с возрастающей скоростью, использовалось выражение [3]

$$\varepsilon_{III}(t) = x t^3 \tag{2.2}$$

где с помощью подбора x можно с достаточной точностью описать экспериментальные кривые для каждого отдельно взятого i-го эксперимента. Значения x_i для 17 однотипных экспериментов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Экспериментальные значения x_i

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_i \cdot 10^{-8}\ \frac{1}{час^3}$	0.020	0.022	0.035	0.038	0.065	0.068	0.073	0.078	0.078
i	10	11	12	13	14	15	16	17	
$x_i \cdot 10^{-8}\ \frac{1}{час^3}$	0.083	0.090	0.099	0.100	0.124	0.182	0.183	0.284	

Вероятностные характеристики (1.2) оказываются равными

$$m^* = 0.955 \cdot 10^{-9}\, \frac{1}{час^3}, \qquad D^* = 1.503\, m^{*2}, \qquad \nu_a^* = 0.4984\, m^*$$
$$\nu_3^* = 0.216 m^{*3}, \quad \mathrm{Me}^* = 0.818\, m^* \tag{2.3}$$

3. Рассмотрим некоторые функции плотности распределения $f(x)$, параметры которых подобраны так, чтобы математическое ожидание m и дисперсия D совпали бы с выборочными значениями m^* и D^*; остальные же статистические характеристики ν_3, ν_a и Me, подсчитанные для этих функций распределения, сравниваются с соответственными выборочными значениями.

Плотности распределений $f(x)$ должны удовлетворять условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = m^* \tag{3.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - m^*)^2 f(x)\,dx = D^*$$

$$f(x) \geq 0$$

Здесь рассмотрены лишь простейшие функции распределения, которые не зависят от выбора размерности измеряемой величины, соответствуют непрерывным случайным величинам, не включают в себя чрезмерных ограничений в отношении распределения и удобны в применении. Например, здесь не рассмотрены закон Пуассона, требующий выполнения равенства $D = m$; 1-й тип распределения Пирсона [4], соответствующий двусторонне ограниченному интервалу изменения x; 2-ой тип распределения Пирсона, определяющий зависимость кривой распределения от размерности x и ряд других более сложных функций распределения.

а) Нормальный закон распределения предусматривает следующий вид плотности распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D^*}}\, e^{-\frac{(x-m^*)^2}{2D^*}} \tag{3.2}$$

Функция $f(x)$, согласно (3.2), удовлетворяет условиям (3.1); используя m^* и D^* для ползучести сплава Д16Т из (2.1), а также (1.1), получим

$$\nu_{\text{а}} = 0.347, \quad \nu_{\text{э}} = 0, \quad \mathrm{Me} = m \tag{3.3}$$

Аналогично для сплава Х18Н10Т, согласно m^* и D^* из (2.3), получим

$$\nu_{\text{а}} = 0.5623\, m, \quad \nu_{\text{э}} = 0, \quad \mathrm{Me} = m \tag{3.4}$$

б) Третий тип распределения Пирсона [4]

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a^\gamma}{\Gamma(\gamma)}\, x^{\gamma-1} e^{-ax}, & 0 < x < \infty, \quad \gamma > 1, \quad a > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

удовлетворяет условиям (3.1) при $a = \frac{m^*}{D^*}$, $\gamma = \frac{m^{*2}}{D^*}$. При этом, согласно (1.1), для сплава Д16Т будем иметь

$$\nu_1 = 0.343\, m, \quad \nu_2 = 0.072\, m^2, \quad Me = 0.9568\, m \tag{3.6}$$

а для сплава Х18Н10Т

$$\nu_1 = 0.6084\, m, \quad \nu_2 = 0.5060\, m^2, \quad Me = 0.84\, m \tag{3.7}$$

в) Рассмотрим функцию распределения вида

$$f(x) = \begin{cases} (bx^n + cx^k)\, e^{-a^2x^2}, & 0 < x < \infty, \quad b \geqslant 0, \quad c \geqslant 0 \\ 0 & x < 0, \quad n > 0, \quad k > 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Можно показать, что функция $f(x)$, определяемая по (3.8), удовлетворяет условиям (3.1), если соотношение $\frac{D^*}{m^{*2}}$ удовлетворяет нижеследующим неравенствам:

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{(k-n)\dfrac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}}{4A(k,\,n)} \\[2em] \dfrac{(k-n)\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{2A(k,\,n)\,\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} - \dfrac{B(k,\,n)\,\Gamma^2\left(\frac{k+1}{2}\right)}{2A(k,\,n)\,\Gamma^2\left(\frac{k+2}{2}\right)} \end{matrix}\right| \leqslant \frac{D^*}{m^{*2}} + 1 \leqslant$$

$$\leqslant \left|\begin{matrix} \dfrac{(k-n)^2}{8A(k,\,n)\,B(k,\,n)} \\[1em] \dfrac{(k-n)^2}{8\,(n+1)\,A^2(k,\,n)} \end{matrix}\right. \tag{3.9}$$

где

$$A(k,\,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$B(k,\,n) = (k+1)\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} - (n+1)\,\frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}$$

Γ — гамма-функция.

В табл. 2, согласно (3.9), для некоторых значений k и n приведены интервалы $\frac{D^*}{m^{*2}}$, для которых функция (3.8) может являться функцией плотности распределения.

Таблица 2

Интервалы значений $\dfrac{D^*}{m^{*2}}$

n	k	$\dfrac{D^*}{m^{*2}}$	n	k	$\dfrac{D^*}{m^{*2}}$
0.5	1	0.274 —0.422	1	5	0.090 —0.306
0.5	3	0.132 —0.373	1	7	0.067 —0.330
0.5	5	0.0866—0.411	1	11	0.0428—0.416
0.5	7	0.0643—0.463	1	15	0.033 —0.503
0.5	9	0.0515—0.514	1	17	0.021 —0.535
0.5	13	0.0363—0.626	3	5	0.089 —0.1325
1	2	0.178 —0.284	3	17	0.0281—0.2434
1	3	0.133 —0.273	3	25	0.0195—0.3315

Как видно из табл. 2, чем больше различаются k и n, тем для больших интервалов $\dfrac{D^*}{m^{*2}}$ можно использовать формулу (3.8).

Параметры a, b и c определяются из условий (3.1) по формулам

$$a = \frac{(k-n)\,m^*}{4(D^* + m^{*2})\,A(k, n)} + \sqrt{M} \tag{3.10}$$

где

$$M = \frac{(k-n)^2 m^{*2}}{16(D^*+m^{*2})^2 A^2(k, n)} + \frac{k+1}{2(D^*+m^{*2})} - \frac{(k-n)\,\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{2A(k, n)(D^*+m^{*2})\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}$$

$$b = \frac{4a^{n+3}}{(k-n)\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\left(\frac{k+1}{2a^2} - D^* - m^{*2}\right)$$

$$c = \frac{2a^{k+1}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} - b\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}\,a^{k-n}$$

Отметим, что функция плотности распределения (3.8) обычно соответствует более быстрому затуханию плотности при больших x, чем это имеет место при нормальном законе и, в особенности, при распределения (3.5). Кроме того, при соответствующем подборе параметров n и k функция $f(x)$, согласно (3.8), может описывать и распределения с отрицательной асимметрией, хотя, как правило, она соответствует положительной асимметрии.

Соответственно данным (2.1), согласно (3.8), для значений параметров $n=1$, $k=2$ будем иметь

$$\nu_a = 0.3499\,m, \quad \nu_3 = 0.06845\,m^3, \quad \mathrm{Me} = 0.9633\,m \qquad (3.11)$$

Для данных (2.3) при значении параметров $n=0.5$, $k=9$ будем иметь

$$\nu_a = 0.583\,m, \quad \nu_3 = 0.3097\,m^3, \quad \mathrm{Me} = 0.8044\,m \qquad (3.12)$$

Данные сравнения экспериментальных выборочных показателей распределения с теоретическими приведены в табл. 3.

Таблица 3

Сравнение выборочных показателей распределения с теоретическими

	Вероятностные показатели	Экспериментальные данные	Нормальное распределение	III тип распределения Пирсона	Формула (3.8)
Сплав Д16Т	$m\cdot 10^2$	0.3005	0.3005	0.3005	0.3005
	$\frac{D}{m^2}$	0.1894	0.1894	0.1894	0.1894
	$\nu_a\cdot m^{-1}$	0.3501	0.3470	0.3430	0.3509
	$\nu_3\cdot m^{-3}$	0.0680	0	0.0720	0.0685
	$\mathrm{Me}\cdot m^{-1}$	0.9450	1	0.9568	0.9633
Сплав Х18Н10Т	$m\left(\frac{1}{час^3}\right)\times 10^7$	0.955	0.955	0.955	0.955
	$D\left(\frac{1}{час^6}\right)\times 10^{15}$	0.456	0.456	0.456	0.456
	$\nu_a\cdot m^{-1}$	0.4984	0.5623	0.6084	0.5828
	$\nu_3\cdot m^{-3}$	0.2160	0	0.5060	0.3097
	$\mathrm{Me}\cdot m^{-1}$	0.818	1	0.840	0.804

Из сравнения данных табл. 3 видно, что рассмотренные вероятностные показатели для ползучести двух рассмотренных металлов лучше описываются распределением в форме (3.8), чем (3.2) или (3.5), это и естественно, так как в (3.8) имеется возможность удачно подобрать параметры n и k. Поскольку вероятностные показатели дают лишь ориентировочную оценку выбранного распределения, проведем проверку (3.8) для данных (2.3) согласно критерию согласия А. Н. Колмогорова по методике [1, стр. 157]. Соответствующие вычисления показывают, что гипотеза о распределении параметра ползучести, согласно формуле (3.8), соблюдается с вероятностью 0.89. Отметим, что для определения вероятности p нахождения величины x в любом заданном интервале $[\alpha, \beta]$ достаточно проинтегрировать в этих пределах выражение $f(x)$: $p = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$. Для оценки доверительного интервала здесь можно исходить из неравенства Чебышева, справедливого для любой функции распределения: $|m^* - m| < \delta$ соблюдается с вероятностью $p \geqslant 1 - \frac{D}{n\delta^2} \approx 1 - \frac{D^*}{n\delta^2}$, то есть, имея число однотипных экспериментов (n) и выборочную дисперсию D^*, задаваясь вероятностью (p_*), можно вычислить $\lambda = \sqrt{\frac{D^*}{(1-p_*)\,n}}$, являющееся верхней границей наибольшего расхождения средней арифметической (m^*) и математического ожидания (m).

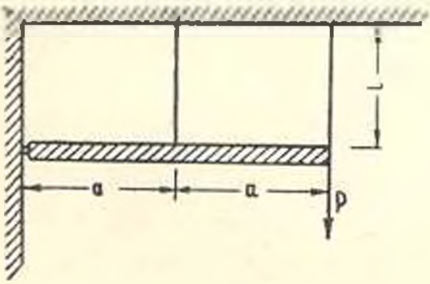
4. В качестве иллюстрации приложений функции распределения ниже рассмотрен расчет на надежность статически-неопределимой системы (фиг. 1), состоящей из жесткой балки, шарнирно закрепленной левым концом и поддерживаемой двумя подвесками 1 и 2. Положим, что подвески имеют одно и то же поперечное сечение F и сделаны из одного и того же материала, деформационные свойства которого описываются уравнением установившейся теории ползучести [5]

$$\varepsilon_i(t) = x_i \int_0^t \sigma_i^\rho(\tau)\, d\tau; \quad \rho > 1, \quad i = 1, 2 \tag{4.1}$$

или уравнением [3]

$$\varepsilon_i(t) = x_i \int_0^t \sigma_i^\lambda(\tau) \left| \int_0^\tau \sigma_i^\nu(\xi)\, d\xi \right|^2 d\tau; \qquad \lambda + 2\nu = \rho; \quad i = 1, 2 \tag{4.2}$$

где пренебрегаются упругие деформации, а параметр x_i, будучи случайной величиной, определяется одной и той же функцией распределения для $i = 1, 2$.



Фиг. 1.

Нашей задачей здесь является построить функции распределения усилий в стержнях 1 и 2, то есть дать вероятностную оценку того, что усилия в стержнях будут заключены в тех или иных пределах, вследствие разброса экспериментальных данных о ползучести материала. Решая уравнения статики и совместности деформаций как для (4.1), так и для (4.2), получим

$$\sigma_1(t) = \frac{\frac{P(t)}{F}}{\frac{1}{2} + \left(\frac{2x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{\rho}}}; \qquad \sigma_2(t) = \frac{\frac{P(t)}{F}}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x_2}{2x_1}\right)^{\frac{1}{\rho}}} \tag{4.3}$$

Построим функцию плотности распределения $g(y)$ для величины

$$y = \frac{1}{\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{2x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right]} \tag{4.4}$$

определяющей $\sigma_i(t)$.

Положим, что параметры ползучести x_i распределены по нормальному закону. Тогда плотность $f(x_1, x_2)$ системы величин x_1 и x_2, не зависящих друг от друга, определяется по формуле

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi D} \exp\left[-\frac{1}{2D}[(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2]\right] \tag{4.5}$$

Для определения функции распределения $G(y)$ необходимо проинтегрировать выражение (4.5) в области x_1 и x_2, где соответственные значения y меньше некоторого фиксированного. Из этого условия будем иметь

$$G(y) = \int_{-\infty}^{0} dx_2 \left\{ \int_{-\infty}^{(\pm)\left[\frac{x_2}{2}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)^{\beta}\right]} f(x_1, x_2)\, dx_1 + \int_{-\frac{x_2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\beta}}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1 \right\} +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} dx_2 \left\{ \int_{-\infty}^{-\frac{x_2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\beta}} f(x_1, x_2)\, dx_1 + \int_{(\pm)\left[\frac{x_2}{2}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)^{\beta}\right]}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1 \right\} \quad \text{при} \quad y > 0 \tag{4.6}$$

$$G(y) = \int_{-\infty}^{0} dx_2 \int_{-\frac{x_2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\beta}}^{\frac{|x_2|}{2}\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right|^{\beta}} f(x_1, x_2)\, dx_1 + \int_{0}^{\infty} dx_2 \int_{-\frac{x_2}{2}\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right|^{\beta}}^{-\frac{x_2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\beta}} f(x_1, x_2)\, dx_1$$

$$\text{при} \quad y < 0$$

где обозначено $(\pm)x^{\beta} = |x|^{\beta} \operatorname{sign} x$.

Для плотности распределения $g(y) = \frac{\partial G(y)}{\partial y}$ после ряда выкладок получим

$$g(y) = \frac{\beta}{4\pi D y^2} \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right|^{\beta - 1} e^{-\frac{m^2[1 - \alpha(y)]^2}{2D[1 + \alpha^2(y)]}} \left[\frac{2D e^{-\frac{m^2[1 + \alpha(y)]^2}{2D[1 + \alpha^2(y)]}}}{1 + \alpha^2(y)} + \right.$$

$$\left. + \frac{m\sqrt{2\pi D}}{[1 + \alpha^2(y)]^{3/2}} \,|1 + \alpha(y)|\, \operatorname{erf} \frac{m\,|1 + \alpha(y)|}{\sqrt{2D}\sqrt{1 + \alpha^2(y)}} \right], \quad -\infty < y < \infty \tag{4.7}$$

где $\alpha(y) = (\pm)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)^{\beta}$.

Отметим, что при $y=0$ или при $y=2$, что соответствует $z_1=0$ или $z_2=0$, плотность распределения также равна нулю, причем скорость устремления к нулю одна и та же, типа $(\Delta y)^{\rho-1}$, хотя при $y>2$ и $y<0$, соответствующих $z_1<0$ и $z_2<0$, имеющих место соответственно при $x_1<0$ и $x_2<0$, плотность распределения $g(y)$ конечна. Проверка условия $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)\,dy=1$ осуществлена.

Рассмотрим теперь распределение параметров ползучести x_i согласно формуле (3.8). Тогда плотность распределения $f(x_1, x_2)$ определяется по формуле

$$f(x_1, x_2)=(bx_1^n+cx_1^k)(bx_2^n+cx_2^k)\,e^{-a^2(x_1^2+x_2^2)} \tag{4.8}$$

После ряда выкладок, аналогичных проделанным выше, получим

$$\begin{aligned} g(y)=\frac{\rho}{2y^2}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)^{\rho-1}&\left\{\frac{b^2}{2^{n+1}a^{2n+2}}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)^{\rho n}\times\right.\\ &\times\frac{\Gamma(n+1)}{\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)^{2\rho}\right]^{n+1}}+\frac{bc}{2a^{n+k+2}}\left[\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)^{\rho n}+\right.\\ &\left.+\frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)^{\rho k}\right]\frac{\Gamma\left(\frac{n+k+2}{2}\right)}{\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)^{2\rho}\right]^{\frac{n+k+2}{2}}}+\\ &\left.+\frac{c^2}{2^{k+1}a^{2k+2}}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)^{\rho k}\frac{\Gamma(k+1)}{\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)^{2\rho}\right]^{k+1}}\right\};\quad 0<y<2 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Еще более простое выражение $g(y)$ имеет место при распределении Пирсона (3.5) для параметров ползучести x_i

$$g(y)=\frac{\rho\Gamma\left(2\frac{m^2}{D}\right)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)^{\rho\frac{m^2}{D}-1}}{2^{\frac{m^2}{D}}\Gamma^2\left(\frac{m^2}{D}\right)y^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)^{\rho}\right]^{2\frac{m^2}{D}}};\quad 0<y<2 \tag{4.10}$$

Формулы (4.7), (4.9) и (4.10) позволяют определить вероятность p нахождения, например, z_1 в любых заданных пределах, скажем,

$\sigma_1' < \sigma_1 < \sigma_1''$. Для этого, вычисляя соответствующие $y' = \frac{F}{p}\sigma_1'$ и $y'' = \frac{F}{p}\sigma_1''$, искомую вероятность p определяем, интегрируя $g(y)$ в этих пределах $p = \int\limits_{y'}^{y''} g(y)\,dy$. Для определения вероятности нахождения σ_1 в заданных пределах σ_1' и σ_1'' соответствующие значения y' и y'' берем из $y' = 2 - \frac{2F}{p}\sigma'$ и $y'' = 2 - \frac{2F}{p}\sigma''$. Такой расчет позволяет определить вероятность соблюдения условия прочности в стержнях системы.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 4 VII 1977

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ՄԵՏԱՂՆԵՐԻ ԲԱՐՁՐՋԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ՊԱՐԱՄԵՏՐՆԵՐԻ ԲԱՇԽՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԸՆՏՐՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում դիտարկված է բարձրջերմաստիճանային սողքի հիմնական պարամետրի բաշխման ֆունկցիայի ընտրության ընթացքը փորձնական հավանականության տարբեր կարգի մոմենտների նրանց տեսական արժեքների հետ համեմատության հիման վրա։ Ցույց է տված, որ D16T *և* X18H10T *միահալույթների սողքի համար առաջարկված և հետազոտված բաշխման ֆունկցիան ավելի լավ է համընկնում փորձնական տվյալների հետ, քան Գիրսոնի և նորմալ բաշխումները։ Տրված է բաշխման ֆունկցիայի կիրառման իլյուստրացիան ձողային ստատիկորեն անորոշ սիստեմի հաշվարկի համար։*

ON CHOICE OF THE DISTRIBUTION FUNCTION FOR PARAMETERS OF HIGH-TEMPERATURE CREEP IN METALS

A. M. SIMONIAN

S u m m a r y

The method of choice of the distribution function for the principal parameter of high-temperature creep is discussed on the basis of comparison of experimental probability moments of different orders with the theoretical ones. It is shown that with respect to creep of alloys D16T

and X18H10T the distribution function under examination offers a better coincidence with the experimental results than the distribution of Pirson and normal distribution. The application of the distribution function is presented to calculate the reliability of a pivoted statically-indefinite system.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. М., «Наука», 1969.
2. *Кузнецов А. П., Трубий В. А.* Исследование разброса кривых ползучести. ПМТФ, 1972, № 5.
3. *Симонян А. М.* Исследование ползучести стали Х18Н10Т при больших деформациях. Проблемы прочности, 1975, № 6.
4. *Кендалл М. Дж., Стьюарт А.* Теория распределений. М., «Наука», 1966.
5. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXI, № 2, 1978 Механика

И. Е. ПРОКОПОВИЧ, Е. У. ЕНЬКОВ

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА С ТРЕЩИНАМИ ПРИ ДЛИТЕЛЬНОМ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗКИ

К настоящему времени теория расчета анизотропных оболочек развита достаточно полно [1]. Недавно было показано, что методы этой теории, в определенной степени, могут быть обобщены на случай, когда анизотропия создается вследствие появления и развития трещин, например, как это имеет место в железобетонных тонкостенных элементах [2, 3].

Разработанная теория кратковременного деформирования железобетона [3] учитывает влияние процесса образования и развития трещин, а также характера их расположения. Согласно этой теории железобетон с трещинами является анизотропным материалом, причем эта анизотропия зависит от величины действующих усилий. Поэтому, в общем случае, анизотропия связана как с уровнем загружения, так и с геометрическими координатами.

На базе теории [2, 3] создан метод расчета железобетонных плит с трещинами, учитывающий влияние на анизотропию уровня и продолжительности действия нагрузки, а также места расположения сечения [4].

Настоящая статья посвящена выводу основных уравнений для расчета железобетонных конструкций с трещинами, работающих в условиях плоского напряженного состояния при длительном действии нагрузки. Полученные результаты базируются на работах [2, 3] и линейном варианте наследственной теории старения [5, 6, 7].

Последнее связано с рассмотрением эксплуатационной стадии, то есть стадии, в которой сжимающие напряжения в бетоне обычно не превышают $0.5\,R_{пр}$, но возможно появление трещин.

При низком уровне нагрузки, не вызывающем трещин, железобетонная конструкция приближенно может рассматриваться как изотропная. Это относится и к зонам (элементам) конструкций, где трещины не образуются. Для плоского напряженного состояния изотропного и однородного тела, обладающего линейной ползучестью, получено интегро-дифференциальное уравнение [6, 7]

$$\nabla^2\nabla^2 F^*(t) - E(t)\int_{\tau_1}^{t} \nabla^2\nabla^2 F^*(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau =$$

$$= -E(t)\left[\frac{\partial^2\varepsilon_x^0(t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y^0(t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\gamma_{xy}^0(t)}{\partial x\partial y}\right] \tag{1.1}$$

где $\delta(t, \tau)$ — полная относительная деформация:

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \tag{1.2}$$

$E(\tau)$ — модуль упруго-мгновенных деформаций: $C(t, \tau)$ — мера простой ползучести при сжатии — растяжении.

При отсутствии вынужденных деформаций $[\varepsilon_x^0(t) = \varepsilon_y^0(t) = \gamma_{xy}^0(t) = 0]$ (1.1) вырождается в однородное интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра 2-го рода. В этом случае, если граничные условия не зависят от ползучести (контур свободен от связей: или на контур наложены абсолютно жесткие связи и можно считать, что коэффициенты поперечной деформации ползучести и упруго-мгновенной дефомации $\nu_2(t, \tau) = \nu_1(\tau) = \nu(\tau_1) = \text{const}$), при действии внешних сил напряжения не зависят от ползучести и определяются путем решения соответствующей упруго-мгновенной задачи [5, 7].

Для описания плоской задачи теории железобетона с трещинами при длительном действии нагрузки, кроме обычно применяемых в теории упругости гипотез, характеризующих статическую и геометрическую сторону задачи, привлечены дополнительные предпосылки, обоснованные в работах [2, 3, 5, 7]:

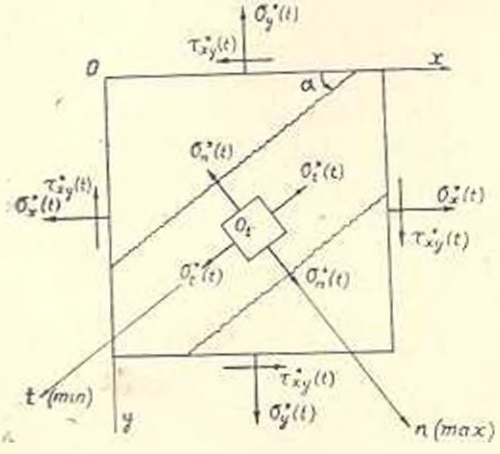
а) применим принцип наложения воздействий к определению средних деформаций железобетонного элемента с трещинами:

б) трещины образуются по площадкам главных растягивающих напряжений. Рассматривается схема непересекающихся трещин (фиг. 1), как наиболее распространенная [3];

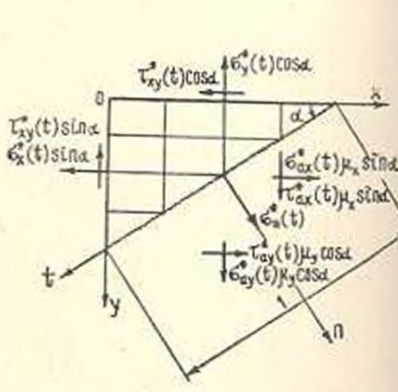
в) арматура в виде ортогональной сетки считается «размазанной» по длине сечения с интенсивностью f_{ax} и f_{ay}; коэффициенты армирования равны

$$\mu_x = \frac{f_{ax}}{h}, \quad \mu_y = \frac{f_{ay}}{h}$$

где h—толщина рассматриваемого элемента;



Фиг. 1. Схема трещин и напряжений в железобетонном элементе



Фиг. 2. Распределение напряжений в сечении с трещиной

г) арматура в наклонных к ней трещинах воспринимает, помимо растягивающих, также и сдвигающие усилия (фиг. 2);

д) в направлении осей x и y деформации железобетонного элемента с трещинами складываются из проекций средних деформаций арматуры и деформаций полос бетона между трещинами

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^*(t) &= \varepsilon_{ax}^{*c}(t) + \varepsilon_{бx}^*(t) \\ \varepsilon_y^*(t) &= \varepsilon_{ay}^{*c}(t) + \varepsilon_{бy}^*(t) \end{aligned} \tag{1.3}$$

е) при определении деформаций полос бетона вдоль трещин влияние арматуры и поперечных деформаций бетона не учитывается;

ж) в сжатом и растянутом бетоне между трещинами развиваются деформации упругие, пластические и ползучести. Связь деформаций с напряжениями принимаем в виде [7]

$$\varepsilon_б^*(t) = \frac{\sigma_б^*(t)}{E(t)} + \frac{1-\nu}{\nu}\frac{\sigma_б(\tau_1)}{E(\tau_1)} - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_б^*(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau \tag{1.4}$$

где ν учитывает быстронатекающие деформации ползучести, развивающиеся при загружении;

з) влияние усадки бетона может быть учтено отдельно.

В теории [3], построенной применительно к кратковременному действию нагрузки, сложный характер работы арматуры в трещинах учитывается с помощью коэффициентов λ_x и λ_y, которые определяются из специальных экспериментов, а усреднение деформаций арматуры производится с помощью коэффициентов типа Мурашева В. И. ψ_{ax} и ψ_{ay}.

Естественно, что при длительном действии нагрузки следует положить:

$$\lambda_i = \lambda_i^*(t); \qquad \psi_{ai} = \psi_{ai}^*(t), \quad (i = x, y).$$

Средние деформации арматуры на участке между трещинами равны

$$\varepsilon_{ai}^*(t) = \frac{\sigma_{ai}^*(t)}{E_{ai}}\psi_{ai}^*(t) \tag{1.5}$$

$\sigma_{ai}^*(t)$ — напряжение в арматуре i-го направления в трещине. Из условий равновесия (фиг. 2) и совместности осевых и тангенциальных перемещений арматурного стержня в зоне трещины [3] с учетом (1.5) получены зависимости [3, 2]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ax}^{*c}(t) &= \frac{\sigma_x^*(t) + \tau_{xy}^*(t)\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{E_{ax}\mu_x}\lambda_x^*(t)\,\psi_{ax}^*(t) \\ \varepsilon_{ay}^{*c}(t) &= \frac{\sigma_y^*(t) + \tau_{xy}^*(t)\,\mathrm{tg}\,\alpha}{E_{ay}\mu_y}\lambda_y^*(t)\,\psi_{ay}^*(t) \end{aligned} \tag{1.6}$$

где $\sigma_x^*(t)$, $\sigma_y^*(t)$ и $\tau_{xy}^*(t)$ — напряжения с учетом ползучести в железобетонном элементе с трещиной; α — угол, образуемый трещиной и осью x; E_{ai} — модуль упругости арматуры i-го направления $(i = x, y)$.

Проекции на оси x и y деформаций полос бетона между трещинами записываются так:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{**}_{бx}(t) &= \varepsilon^{*}_{бt}(t)\cos^2\alpha \\ \varepsilon^{**}_{бy}(t) &= \varepsilon^{*}_{бt}(t)\sin^2\alpha \end{aligned} \tag{1.7}$$

Так как армирование полос бетона не учитывается (гипотеза с), то можно считать, что

$$\varepsilon^{*}_{бt}(t) = \varepsilon^{*}_{t}(t); \quad \sigma^{*}_{бt}(t) = \sigma^{*}_{t}(t) \tag{1.8}$$

Используя известные из курса сопротивления материалов соотношения

$$\sigma^{*}_{t}(t) = \sigma^{*}_{x}(t) - \tau^{*}_{xy}(t)\,\mathrm{tg}\,\alpha = \sigma^{*}_{y}(t) - \tau^{*}_{xy}(t)\,\mathrm{ctg}\,\alpha \tag{1.9}$$

деформации $\varepsilon^{*}_{x}(t)$ и $\varepsilon^{*}_{y}(t)$ с помощью (1.3), (1.4), (1.6), (1.7), (1.8) и (1.9) можно связать с напряжениями

$$\begin{aligned} \varepsilon^{*}_{x}(t) &= \frac{1}{E(t)}\{[\sigma^{*}_{x}(t) + \tau^{*}_{xy}(t)\,\mathrm{ctg}\,\alpha]\,a^{*}_{x}(t) + \Phi^{*}_{x}(t)\cos^2\alpha - \Phi^{*}_{xy}(t)\sin\alpha\cos\alpha\} \\ \varepsilon^{*}_{y}(t) &= \frac{1}{E(t)}\{[\sigma^{*}_{y}(t) + \tau^{*}_{xy}(t)\,\mathrm{tg}\,\alpha]\,a^{*}_{y}(t) + \Phi^{*}_{y}(t)\sin^2\alpha - \Phi^{*}_{xy}(t,\tau)\sin\alpha\cos\alpha\} \end{aligned} \tag{1.10}$$

где

$$a^{*}_{i}(t) = \frac{m_i(t)}{\mu_i}\lambda^{*}_{i}(t)\,\psi^{*}_{ai}(t) \tag{1.11}$$

$$m_i(t) = \frac{E(t)}{E_{ai}} \quad (i = x,\ y) \tag{1.12}$$

$$\Phi^{*}_{x}(t) = \sigma^{*}_{x}(t) + \frac{1-\nu}{\nu}\frac{E(t)}{E(\tau_1)}\sigma_x(\tau_1) - E(t)\int\limits_{\tau_1}^{t}\sigma^{*}_{x}(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau \tag{1.13}$$

$\Phi^{*}_{y}(t)$ и $\Phi^{*}_{xy}(t)$ определяются по формуле (1.13), если в ней заменить σ_x соответственно на σ_y и τ_{xy}.

Углы сдвига определяются по теории малых деформаций, то есть по формуле [3]

$$\gamma^{*}_{xy}(t) = \varepsilon^{*}_{x}(t)\,\mathrm{ctg}\,\alpha + \varepsilon^{*}_{y}(t)\,\mathrm{tg}\,\alpha - \varepsilon^{*}_{t}(t)\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} \tag{1.14}$$

Деформация $\varepsilon^{*}_{t}(t)$ выражается через (1.8), где $\sigma^{*}_{t}(t)$ следует заменить на [3]

$$\sigma^{*}_{t}(t) = \sigma^{*}_{x}(t)\cos^2\alpha + \sigma^{*}_{y}(t)\sin^2\alpha - 2\tau^{*}_{xy}(t)\sin\alpha\cos\alpha \tag{1.15}$$

Тогда

$$\gamma^*_{xy}(t)=\frac{1}{E(t)}\{\sigma^*_x(t)\,a^*_x(t)\operatorname{ctg}\alpha+\sigma^*_y(t)\,a^*_y(t)\operatorname{tg}\alpha+\tau^*_{xy}(t)\,[a^*_x(t)\operatorname{ctg}^2\alpha+$$

$$+a^*_y(t)\operatorname{tg}^2\alpha]-[\Phi^*_x(t)+\Phi^*_y(t)]\sin\alpha\cos\alpha+\Phi^*_{xy}(t)\} \qquad (1.16)$$

Физические зависимости (1.10) и (1.16) позволяют учитывать нелинейность деформирования железобетона, вызванную трещинообразованием и ползучестью бетона при обобщенном плоском напряженном состоянии. При $t=\tau_1$ они совпадают с соответствующими выражениями для случая кратковременного действия нагрузки [2].

Если известны a^*_i, то есть ψ^*_i, ψ^*_{si} (1.11), то уравнения равновесия, уравнение совместности деформаций и формулы (1.10) и (1.16) образуют полную систему уравнений, описывающую напряженное состояние.

Если ввести функцию напряжений $F^*(t)=F^*(x,y,t)$, причем

$$\sigma^*_x(t)=\frac{\partial^2F^*(t)}{\partial y^2};\quad \sigma^*_y(t)=\frac{\partial^2F^*(t)}{\partial x^2};\quad \tau^*_{xy}(t)=-\frac{\partial^2F^*(t)}{\partial x\partial y} \qquad (1.17)$$

то система уравнений состояния может быть сведена к такому интегро-дифференциальному уравнению:

$$\Delta^4_a[F^*(t)]+\Delta^4_b\left|F^*(t)+\frac{1-\nu}{\nu}\frac{E(t)}{E(\tau_1)}F(\tau_1)-\right.$$

$$\left.-E(t)\int\limits_{\tau_1}^{t}F^*(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right|=0 \qquad (1.18)$$

Δ^4_a — дифференциальный оператор следующей структуры:

$$\Delta^4_a=a_{11}\frac{\partial^4}{\partial y^4}-2\left(a_{13}\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3}+a_{23}\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y}\right)+a_{33}\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+a_{22}\frac{\partial^4}{\partial x^4}+$$

$$+\left(2\frac{\partial a_{11}}{\partial y}-\frac{\partial a_{13}}{\partial x}\right)\frac{\partial^3}{\partial y^3}+\left(2\frac{\partial a_{22}}{\partial x}-\frac{\partial a_{23}}{\partial y}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\left(\frac{\partial a_{33}}{\partial y}-3\frac{\partial a_{23}}{\partial x}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+$$

$$+\left(\frac{\partial a_{33}}{\partial x}-3\frac{\partial a_{13}}{\partial y}\right)\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+\left(\frac{\partial^2a_{11}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2a_{13}}{\partial x\partial y}\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2a_{33}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2a_{13}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2a_{23}}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial^2a_{22}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2a_{23}}{\partial x\partial y}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad (1.19)$$

в котором обозначено

$$a_{11}=a^*_x(t);\quad a_{22}=a^*_y(t);\quad a_{33}=a^*_x(t)\operatorname{ctg}^2\alpha+a^*_y(t)\operatorname{tg}^2\alpha$$

$$a_{13}=a^*_x(t)\operatorname{ctg}\alpha;\quad a_{23}=a^*_y(t)\operatorname{tg}\alpha \qquad (1.20)$$

Δ^4_B — то же, что и (1.19), но с заменой a_{ij} на b_{ij}, причем

$$b_{11} = \cos^2\alpha; \quad b_{22} = \sin^2\alpha; \quad b_{33} = 1$$
$$b_{12} = b_{21} = -\sin\alpha\cos\alpha \tag{1.21}$$

Решение уравнения (1.18) удобно выполнять путем разыскания функции F^* в определенные, наперед заданные моменты времени, то есть путем построения вектора значений этой функции. Если использовать известную зависимость между интегральным оператором и произведением вектора на матрицу [8], то задачу можно свести к решению матричного уравнения

$$\Delta_a^4 [\overrightarrow{F^*(t_k)}] + \Delta_B^4 [\| \Delta\delta \| \cdot \overrightarrow{F^*(t_k)}] = 0 \tag{1.22}$$

где $\overrightarrow{F^*(t_k)}$ — вектор функции напряжений для моментов времени τ_1, t_1, $t_2, \ldots, t_k$; $\|\Delta\delta\|$ — треугольная матрица вида

$$\|\Delta\delta\| = \left\| \begin{matrix} 1/\nu \\ \Delta_{10}\,\Delta_{11} \\ \Delta_{20}\,\Delta_{21}\,\Delta_{22} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \Delta_{k0}\,\Delta_{k1}\,\Delta_{k2}\,\ldots\,\Delta_{kk} \end{matrix} \right\| \tag{1.23}$$

Элементы матрицы (1.23) определяются формулами

$$\Delta_{i0} = E(t_i) \left[\delta(t_i, \tau_1) - \delta(t_i, \xi)_{\tau_1}^{t_1} + \frac{1-\nu}{\nu E(\tau_1)} \right]$$

$$\Delta_{in} = E(t_i) \left[\delta(t_i, \xi)_{t_{n-1}}^{t_n} - \delta(t_i, \xi)_{t_n}^{t_{n+1}} \right] \tag{1.24}$$

$$\Delta_{ii} = E(t_i)\,\delta(t_i, \xi)_{t_{i-1}}^{t_i} \qquad (i,\ n = 1,\ 2, \ldots,\ k;\ t_0 = \tau_1)$$

$\delta(t_i, \xi)_{t_{n-1}}^{t_n}$ — полная относительная деформация (1.2), средняя в смысле удовлетворения равенства

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} \delta(t_i, \tau) \frac{\partial F^*(t)}{\partial\tau} d\tau = [F^*(t_n) - F^*(t_{n-1})]\,\delta(t_i, \xi)_{t_{n-1}}^{t_n} \tag{1.25}$$

При выполнении практических расчетов приходится принимать

$$\delta(t_i, \xi)_{t_{n-1}}^{t_n} = \delta\left(t_i, \ \frac{t_n + t_{n-1}}{2}\right)$$

в чем, собственно, и заключается приближенность замены интеграла в (1.18) конечной суммой [7].

При кратковременном действии нагрузки ($t = \tau_1$) может быть использован алгоритм, описанный в [3]. Для последующих моментов времени расчет принципиально не отличается от решений, основанных на использовании метода Н. М. Крылова—Н. Н. Боголюбова. Таким образом, решение сводится к системе дифференциальных уравнений в частных производных 4-го порядка с переменными коэффициентами относительно функции напряжений F^* для моментов времени $t = \tau_1, t_1, t_2, \ldots, t_k$.

При этом влияние ползучести учитывается коэффициентами этих уравнений. При записи уравнения (1.18) и построении схемы его решения предполагалось, что функции a_{ij} заданы. Фактически эти функции связаны с напряженным состоянием, то есть являются неизвестными. Описанный выше шаговый способ решения позволяет использовать для определения этих функций величины напряжений, подсчитанные на предыдущем шаге во времени. В случае необходимости соответствующие итерации могут производиться внутри каждого шага.

Зоны (элементы) без трещин могут быть рассчитаны по уравнению (1.1), которое также представляется в дискретном по времени виде.

Дискретизация по координатам с помощью одного из численных методов дает возможность для решения конкретных задач применить ЭВМ.

Как уже указывалось, коэффициенты a_{ij} (1.11) зависят от λ^*_i и ψ^*_{ai}. Методика определения величин λ^*_i требует дополнительного экспериментального обоснования; соответствующие опыты применительно к методике [3] для случая кратковременного загружения проводятся в настоящее время в Одесском инженерно-строительном институте.

Коэффициенты ψ_{ai} могут определяться по формуле, полученной на основе решения, приведенного в [7] для случая изгиба (обозначения сохранены)

$$\psi^*_{ai}(t) = 1 - \omega \frac{\sigma_{ai,T} - n_p R_p \left[1 + \dfrac{1 - \lambda_i(\tau_1) H^*_{6i}(t, \tau_1)}{\mu_i n_p}\right]}{\sigma^*_{ai}(t)} \quad (i = x, y) \quad (1.26)$$

Для создания определенного представления о характере и величинах коэффициентов λ^*_i, ψ^*_{ai} и влиянии трещинообразования на деформации ε^*_x, ε^*_y, γ^*_{xy} ниже рассмотрены два простейших случая.

Растяжение в направлении n $(\sigma_n > R_p)$. Стержни ортогональной арматурной сетки расположены под углом $\alpha = 45^\circ$ к образовавшейся трещине $(E_a \mu_x = E_a \mu_y = E_a \mu)$. В этом случае можно считать [2]

$$\lambda^*_i(t) = \lambda_i(\tau_1) = \lambda = \text{const}; \quad \psi^*_{ai}(t) = \psi^*_a(t), \quad (i = x, y)$$

Исходные данные: $\sigma_n = \sigma = 2.4$ МП*а*, $E_a = 2.1 \cdot 10^5$ МП*а*, $\mu = 0.01$; бетон из опытов ОИСИ (I серия) [7], $\tau_1 = 20$ *сут*.

Коэффициент затухания напряжений в бетоне между трещинами вследствие ползучести $H^*_{6i}(t, \tau_1)$, входящий в (1.26), определяем, воспользовавшись аппаратом наследственной теории старения для случая простого растяжения железобетонного элемента без трещин [7].

По формулам (1.26) (1.10) и (1.16) получаем: $\varphi_a(\tau_1) = 0.5694$; $\varepsilon_x(\tau_1) = \varepsilon_y(\tau_1) = 65.07 \cdot 10^{-5}$; $\gamma_{xy}(\tau_1) = 130 \cdot 10^{-5}$; $\varphi^*_a(900) = 0.6809$; $\varepsilon^*_x(900) = \varepsilon^*_y(900) = 77.72 \cdot 10^{-5}$; $\gamma^*_{xy}(900) = 155.52 \cdot 10^{-5}$.

Растяжение со сжатием ($\sigma_n = \sigma > R_p$; $\sigma_t = -\sigma$). Квадрат, выделенный в пределах такого элемента под углом $\alpha = 45^\circ$, находится в условиях чистого сдвига. Исходные данные те же, что и в предыдущем примере.

В силу этого φ^*_1 и φ^*_{a1} равны соответствующим величинам из предыдущего примера.

Деформации (1.10) и (1.16): $\varepsilon_x(\tau_1) = \varepsilon_y(\tau_1) = 56.16 \cdot 10^{-5}$; $\gamma_{xy}(\tau_1) = 147.95 \cdot 10^{-5}$; $\varepsilon^*_x(900) = \varepsilon^*_y(900) = 49.91 \cdot 10^{-5}$; $\gamma^*_{xy}(900) = 211.22 \cdot 10^{-5}$.

В первом примере деформации растрескавшегося железобетонного элемента возрастают вследствие ползучести бетона до 20%. Во втором примере деформации ε^*_x и ε^*_y уменьшаются, но углы сдвига увеличиваются на 43%.

Необходимо иметь в виду, что уравнения (1.1), (1.18) и (1.22) описывают весьма сложное напряженное и деформированное состояние. Учитывается характер, расположение, направление и ширина раскрытия трещин, особенности деформаций арматуры как в трещинах, так и между ними, и, наконец, ползучесть бетона. Это открывает возможности для детального описания поведения железобетонных дисков при достаточно широком диапазоне уровней нагрузок.

Одесский инженерно-строительный институт

Поступила 17 XI 1976

Ի. Ե. ՊՐՈԿՈՊՈՎԻՉ, Ե. ՈՒ. ԵՆԿՈՎ

ՃԱՔԵՐՈՎ ԵՐԿԱԹԲԵՏՈՆԻ ՀԱՐԹ ԼԱՐՎԱԾ ՎԻՃԱԿԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԲԵՌԻ ԵՐԿԱՐԱՏԵՎ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ստացվել է հարթ խնդիրը լուծող ինտեգրո-դիֆերենցիալ համակարգը, որը հաշվի է առնում ճաքերով երկաթբետոնի աշխատանքի անիզոտրոպ բնույթը բեռի երկարատև ազդեցության դեպքում։

THE BASIC EQUATION FOR PLANE STRESS IN FERRO-CONCRETE WITH CRACKS UNDER PROLONGED LOAD

I. E. PROKOPOVICH, E. U. ENIKOV

S u m m a r y

The permitting integral-differential equation for the plane problem is obtained, taking into consideration the anisotropic character of work of reinforced concrete with cracks under prolonged load.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М., «Наука», 1974
2. *Гвоздев А. А., Карпенко Н. И.* Работа железобетона с трещинами при плоском напряженном состоянии. «Строительная механика и расчет сооружений», 1965, № 2.
3. *Карпенко Н. И.* Теория деформирования железобетона с трещинами. М., Стройиздат, 1976.
4. *Прокопович И. Е., Яременко А. Ф.* Исследование работы железобетонных плит с учетом трещинообразования и ползучести. Сб. «Проблемы ползучести и усадки бетона». ЦНИИ Минтрансстроя, вып. 77, М., 1974.
5. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М., Гостехиздат, 1952.
6. *Александровский С. В.* Температурные напряжения в массивных бетонных блоках от экзотермии цемента. «Исследования. Массивные и стержневые конструкции». Тр. НИИ по строительству. Госстройиздат, 1952.
7. *Прокопович И. Е.* Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояния сооружений. М., Госстройиздат, 1963.
8. *Прокопович И. Е., Рекша В. В.* О напряженно-деформированном состоянии тела, обладающего ползучестью и усиленного связями. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1969, XXII, № 1.