

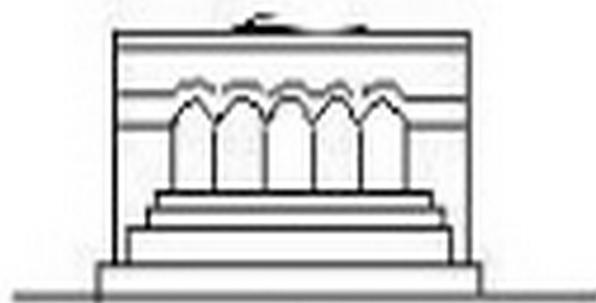
ՄԵՆԱՆԻՑԱ



МЕХАНИКА



MECHANICS



1978

М. С. ГАБРИЕЛЯН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТРАТЕГИИ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО  
 АЛЬТЕРНАТИВЫ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ  
 С НЕСКОЛЬКИМИ ЦЕЛЕВЫМИ МНОЖЕСТВАМИ  
 ПРИ МЕНЯЮЩИХСЯ СИСТЕМАХ

Рассматривается дифференциальная игра с несколькими целевыми множествами, когда порядок встреч строго зафиксирован, но после каждой встречи меняется система дифференциальных уравнений. Определяются кусочно-позиционные стратегии, доказываемая альтернатива о существовании  $\varepsilon$ -равновесия в этих стратегиях, когда плата имеет довольно общий вид.

§ 1. *Постановка задачи.* Пусть движение конфликтно управляемой системы описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_k = f_k(t, x_k, u_k, v_k) \quad (k = 1, \dots, m) \quad (1.1)$$

Здесь  $f_k: [t_0, \infty) \times R^n \times P_k \times Q_k \rightarrow R^n$  — непрерывная функция;  $P_k \subset R^{p_k}$ ,  $Q_k \subset R^{q_k}$  — компакты, характеризующие возможности игроков ( $k = 1, \dots, m$ ). Предполагается, что функции  $f_k$  удовлетворяют условиям:

$$|x_k' f_k(t, x_k, u_k, v_k)| \leq z_k (1 + |x_k|^p)$$

при

$$(t, x_k, u_k, v_k) \in [t_0, \infty) \times R^n \times P_k \times Q_k$$

где  $x_k' f_k$  — скалярное произведение векторов  $x_k$  и  $f_k$ ;  $|x_k|$  — евклидова норма вектора  $x_k$ ;  $z_k$  — постоянные числа. Для любой ограниченной области  $G \subset R^{n+1}$  выполняются следующие условия Липшица:

$$|f_k(t, x_k^{(1)}, u_k, v_k) - f_k(t, x_k^{(2)}, u_k, v_k)| \leq L_k^{(1)} |x_k^{(1)} - x_k^{(2)}|$$

при

$$(t, x_k^{(i)}, u_k, v_k) \in G \times P_k \times Q_k \quad (i = 1, 2; k = 1, \dots, m).$$

Предполагается также, что выполняются условия седловой точки маленькой игры [1] (стр. 55) для каждого  $f_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ), то есть

$$\min_{u_k \in P_k} \max_{v_k \in Q_k} s' f_k(t, x_k, u_k, v_k) = \max_{v_k \in Q_k} \min_{u_k \in P_k} s' f_k(t, x_k, u_k, v_k) \quad (1.2)$$

при  $s \in R^n$ ;  $(t, x_k) \in [t_0, \infty) \times R^n$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

Рассматривается дифференциальная игра, в которой плата определена равенством

$$\gamma(y[\cdot]) = \varepsilon(\tau_1(y[\cdot]), \dots, \tau_m(y[\cdot])) \quad (1.3)$$

Здесь через  $y[\cdot]$  обозначается следующая непрерывная  $n$ -мерная вектор-функция:

$$y[\cdot] = \{x_k(t) : t \in [\tau_{k-1}(x_k[t]), \tau_k(x_k[t])], \tau_0 = t_0;$$

$$x_k[\tau_k] = x_{k+1}[\tau_k]; k = 1, \dots, m; x_{m-1}(t) = x_m(t), t \geq \tau_m\}$$

$x_k(t)$  — реализовавшиеся движения системы (1.1);  $\varepsilon : [t_0, \infty)^m \rightarrow (-\infty, +\infty)$  — заданная функция:

$$\tau_k(x_k[\cdot]) = \min \{ \tau : \tau \in T(x_k[\cdot], \bar{M}_k, \bar{N}) \}$$

где  $T(x_k[\cdot], \bar{M}_k, \bar{N}) = \{ \tau : \tau > t > \tau_{k-1}(x_{k-1}[\cdot]); (t, x_k(t)) \in \bar{N}$  при  $(\tau, x_k(\tau)) \in \bar{M}_k \}$  ( $\tau_0 = t_0$ );  $\bar{M}_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) и  $\bar{N}$  — заданные компакты; в случае  $T(x_k[\cdot], \bar{M}_k, \bar{N}) = \emptyset$  полагаем  $\tau_k(x_k[\cdot]) = \infty$ . Предполагается, что первый игрок, которому предоставлены управления  $\{u_k\}$ , стремится минимизировать значение платы  $\gamma$ , а второй игрок, выбирающий управления  $\{v_k\}$ , максимизирует значение  $\gamma$ . Функция  $\varepsilon$  удовлетворяет следующим условиям:

(1) на множестве  $[t_0, \infty)^m$  она принимает конечные значения и непрерывна;

(2)  $\varepsilon(\tau_1, \dots, \tau_m) = \infty$ , если хотя бы одно  $\tau_k = \infty$ ;

(3) множество  $\varepsilon^{-1}((-\infty, c])$  ограничено для любого конечного числа  $c$ ;

(4) неравенство  $\varepsilon(\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \tau_i^*, \tau_{i+1}, \dots, \tau_m) \leq \varepsilon(\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \tau_i, \tau_{i+1}, \dots, \tau_m)$  справедливо для любых наборов  $(\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \tau_i^*, \tau_{i+1}, \dots, \tau_m)$  и  $(\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \tau_i, \tau_{i+1}, \dots, \tau_m)$ , где  $\tau_i^* \leq \tau_i$ . Покажем, что существует равновесная ситуация в классе кусочнопозиционных стратегий.

Пусть, как определено выше, переключение системы происходит в момент сближения траектории с соответствующим целевым множеством, и это право предоставлено первому игроку.

§ 2. Формулировка альтернативы. Рассмотрим следующую систему:

$$\dot{x} = f(t, x, u, v) \quad (2.1)$$

где

$$x = \begin{bmatrix} y \\ y_{n+1} \end{bmatrix}; \quad f = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m f_i \delta_i(u_{m+1}) \\ u_{m+1} \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}; \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

Здесь  $x$  —  $(n+1)$ -мерный вектор-столбец;  $f: [t_0, \infty) \times R^{n+1} \times P \times Q \rightarrow R^{n+1}$  — непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая всем условиям, наложенным на каждую из функций  $f_k$  (1.1); множества  $P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_{m-1}$  ( $P_{m+1} = \{1, 2, \dots, m\}$ ) и  $Q = Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_m$  — компакты; функцию  $\tilde{b}_k$  можно определить выражением  $\tilde{b}_k(u_{m+1}) = (1 - u_{m+2}) \dots (k - 1 - u_{m+1}) \dots (-1)^{k-1} (k + 1 - u_{m+1}) \dots (m - u_{m+1}) \times [(k-1)!(m-k)!]^{-1}$ . Предполагается, что величина  $u_{m+1}$  принимает значения из множества  $P_{m-1}$  по строго фиксированному порядку  $1, 2, \dots, m$ .

Пусть заданы моменты времени  $t_0 < t_1 < \dots < t_m < \infty$ . Определим следующие множества:

$$M_k = \{(t, x) : (t, y) \in \bar{M}_k\} \quad k = 1, \dots, m$$

$$N_1 = \{(t, x) : (t, y) \in \bar{N}; y_{n+1} = t\}$$

$$N_k(t_0, \dots, t_{k-1}) = \left\{ (t, x) : (t, y) \in \bar{N}; y_{n+1} = kt - \sum_{i=1}^{k-1} t_i \right\} \quad k = 2, \dots, m.$$

Предполагается также, что  $y_{n+1}^{(0)} = t_0$ . Тогда сформулированная игровая задача станет эквивалентной задаче сближения со всеми целевыми множествами  $M_k$  и уклонения хотя бы от одного из них внутри соответствующих множеств  $N_k$  при фиксированном порядке встреч системы (2.1) с показателем  $\gamma(x[\cdot])$ .

Кусочно-позиционной стратегией первого игрока КПС  $U$  назовем набор  $m+1$  отображений

$$\begin{aligned} \varphi_i : x[\cdot; t_0, t] \rightarrow \varphi_i(x[\cdot; t_0, t]) \in [t_0, \infty] \quad (i = 1, \dots, m) \\ u : (t, x, t_1, \dots, t_m) \rightarrow u(t, x, t_1, \dots, t_m) \in P \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $t \in [t_0, \infty)$ ;  $x[\cdot; t_0, t] \in C_{n-1}(t_0, t)$  ( $C_{n-1}(t_0, t)$  — пространство непрерывных функций  $x[\cdot; t_0, t] : [t_0, t] \rightarrow R^{n+1}$ ); функционалы  $\varphi_i$  определены на множестве  $C^* = \bigcup_{t_0 \leq t < \infty} C_{n-1}[t_0, t]$ . Предполагается, что функционалы  $\varphi_i$  удовлетворяют следующему условию. Пусть  $t^* \in [t_0, \infty)$ ,  $x^*[\cdot; t_0, t^*] \in C_{n-1}[t_0, t^*]$ ,  $t \in [t_0, t^*]$  и  $x^*[t_0, t]$  — сужение функции  $x^*[\cdot; t_0, t^*]$  на отрезок  $[t_0, t]$ , тогда либо  $\varphi_i(x^*[\cdot; t_0, t^*]) = \infty$  и  $\varphi_i(x^*[\cdot; t_0, t]) = \infty$  при  $t \in [t_0, t^*]$ , либо  $\varphi_i(x^*[\cdot; t_0, t^*]) = t'_i < t^*$  и  $\varphi_i(x^*[\cdot; t_0, t]) = \infty$  при  $t_0 \leq t < t'_i, t'_i$  при  $t'_i < t < t^*$ .

Аналогичным образом определяются КПС  $V$  второго игрока

$$\begin{aligned} \psi_i : x[\cdot; t_0, t] \rightarrow \psi_i(x[\cdot; t_0, t]) \in [t_0, \infty] \quad (i = 1, \dots, m) \\ v : (t, x, t_1, \dots, t_m) \rightarrow v(t, x, t_1, \dots, t_m) \in Q \end{aligned} \quad (2.3)$$

Определение КПС  $V$  (2.3) удовлетворяет всем предположениям, которым удовлетворяет КПС  $U$  (2.2) первого игрока.

Движения, порожденные КПС  $U$  (2.2) вводятся следующим образом: пусть первым игроком выбрано разбиение  $\Delta = \{[\tau_i, \tau_{i+1}) : i = 0, 1, \dots; \tau_0 = t_0, \tau_i \rightarrow \infty \text{ при } i \rightarrow \infty, t_k = \tau_k, k = 1, \dots, m\}$ . (Здесь не нарушая общности предполагается, что при любом разбиении  $\Delta$  числа  $t_k$  являются точками деления). Предполагаем, что при этом разбиении КПС  $U$  (2.2) формируется управлением  $u_\Delta |t|$  по закону

$$u_\Delta |t| = u(\tau_i, x_\Delta | \cdot; t_0, \tau_i), \tau_i(x_\Delta | \cdot; t_0, \tau_i), \dots, \tau_m(x_\Delta | \cdot; t_0, \tau_i) \quad (2.4)$$

$$(\tau_i \leq t < \tau_{i+1}, \tau_0 = t_0, i = 1, 2, \dots)$$

Здесь  $x_\Delta | \cdot; t_0, \tau_i$  — ломаная Эйлера [1] (стр. 31), составленная из решений системы (2.1). Для рассматриваемой КПС  $U$  (2.2) символом  $x[\cdot; t_0, x_0, U]$  обозначим движение, определенное предельным переходом от соответствующих ломаных Эйлера  $x_\Delta | \cdot; t_0, x_0^{(j)}, U, v[\cdot]$  ( $j = 1, 2, \dots; x_0^{(j)} \rightarrow x_0; \sup_i (\tau_i^{(j)} - \tau_i) \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ ).

Аналогичным образом вводятся движения  $x[\cdot; t_0, x_0, V]$ , отвечающие КПС  $V$  (2.3). Из приведенных определений следует, что пара КПС  $U$  и КПС  $V$  всегда осуществима. Докажем следующую альтернативу.

**Теорема 2.1.** Для любой начальной позиции  $(t_0, x_0)$  и для любого числа  $c$  всегда либо существует КПС  $U_c$  такая, что неравенство  $\gamma(y[\cdot; t_0, y_0, U_c]) \leq c$  имеет место для всякого движения  $y[\cdot; t_0, y_0, U_c]$ , либо существует КПС  $V_c$  такая, что неравенство  $\gamma(y[\cdot; t_0, y_0, V_c]) > c$  справедливо для всех движений  $y[\cdot; t_0, y_0, V_c]$ .

§ 3. Задача сближения. Докажем первую часть альтернативы. Построим систему мостов ( $u$ -стабильных), по которой с помощью экстремальной КПС  $U_c$  можно провести движение и обеспечить выполнение неравенства  $\gamma(x[\cdot]) \leq c$ , если исходное положение  $(t_0, x_0)$  принадлежит начальному множеству этой системы.

Обозначим через  $M_{i,t}$  следующее сечение  $M_{i,t} = M_i \cap \{(t, x) : x \in R^{n+1}\}$ . Символом  $\delta$  обозначим такое число, что  $m$ -мерный куб  $\{(t_1, \dots, t_m) : t_i \leq t_j \leq \delta, i = 1, 2, \dots, m\}$  содержит множество  $\Sigma(c) = \{(t_1, \dots, t_m) : \gamma(t_1, \dots, t_m) \leq c\}$ . После этого предполагается, что все числа  $t_i \in [t_0, \delta]$ .

Перейдем к формальным построениям системы  $u$ -стабильных мостов. Пусть  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{m-1}$  — любой набор чисел, определим множество

$$L_{m-1}(t_1, \dots, t_{m-1}) = \{(t, x) : (t, x) \in M_m, t_{m-1} \leq t < \delta, \gamma(t_1, \dots, t_{m-1}, t) \leq c\} \quad (3.1)$$

пусть  $W_{m-1}(t_1, \dots, t_{m-1})$  — множество позиционного поглощения цели  $L_{m-1}(t_1, \dots, t_{m-1})$  (3.1) при фазовом ограничении  $(t, x) \in N_m$ , то есть  $W_{m-1}(t_1, \dots, t_{m-1})$  — совокупность всех позиций  $(t_2, x_2)$ , для которых как для начальных существует позиционная стратегия  $U = u(t, x)$ , гаранти-

рующая выполнение условий (9.1) из [1], где следует полагать  $M_c = L_{m-1}(t_1, \dots, t_{m-1})$ ,  $N_c = N_m$ . Предположим, что для целого числа  $k$  ( $2 \leq k \leq m$ ) определены множества  $L_{m-k+1}(t_1, \dots, t_{m-k+1})$  в пространстве  $(t, x)$ . Тогда полагаем

$$L_{m-k}(t_1, \dots, t_{m-k}) = \bigcup_{t_0} \{ W_{m-k-1}(t_1, \dots, t_{m-k}, t_0) \cap M_{m-k-1, t_0} : t_{m-k} \leq t_0 \leq 0 \} \quad (3.2)$$

Множество  $W_{m-k}(t_1, \dots, t_{m-k})$  определим как множество позиционного поглощения цели  $L_{m-k}(t_1, \dots, t_{m-k})$  (3.2) при фазовом ограничении  $(t, x) \in N_{m-k-1}$ . Пусть указанным способом построены множества  $L_1(t_1)$  и  $W_1(t_1)$  для любого  $t_1 \in [t_0, 0]$ . Полагаем

$$L_0 = \bigcup_{t_0} \{ W_1(t_0) \cap M_{1, t_0} : t_0 \leq t_0 \leq 0 \} \quad (3.3)$$

и пусть  $W_0$  — множество позиционного поглощения цели  $L_0$  внутри  $N_1$ . Из приведенных выше построений следует, что все множества  $W_j(t_1, \dots, t_j)$  ( $j = 0, 1, \dots, m-1$ ) являются замкнутыми и  $u$ -стабильными относительно соответствующих целевых множеств  $L_j(t_1, \dots, t_j)$  по движениям системы (2.1). Причем мосты обрываются на соответствующих целевых множествах не позже, чем в момент времени 0.

Определим КПС  $U^{(e)}$ , экстремальную к системе мостов  $W_i(t_1, \dots, t_i)$ . С этой целью определим сначала функционалы  $\varphi_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Пусть  $x^*[\cdot] : [t_0, \infty) \rightarrow R^{n-1}$  — некоторая непрерывная функция. Полагаем

$$R_0(t, x) = \{ (t, w_0) : (t, w_0) \in W_0, \|x - x_0\| = \min_w \|x - w\| \text{ при } (t, w) \in W_0; x_0 = \min \{ t > t_0 : R_0(t, x[t]) \cap L_0 = \emptyset \} \} \quad (3.4)$$

Предположим, что число  $x_0^* < \infty$  существует, тогда из определения множества  $L_0$  следует, что

$$R_0(x_0^*, x^*[x_0^*]) \cap W_1(x_0^*) \cap M_1 \neq \emptyset \quad (3.5)$$

Полагаем

$$\varphi_1(x^*[\cdot; t_0, t]) = \begin{cases} \infty & \text{при } t_0 \leq t < t_1^* \\ t_1^* & \text{при } t_1^* \leq t < \infty \end{cases}$$

где  $x^*[\cdot; t_0, t]$  — сужение функции  $x^*[\cdot]$  на отрезок  $[t_0, t]$ ;  $t_1^* = x_0^*$ . Если же число  $x_0^*$  не существует (это может быть тогда и только тогда, когда  $W_0 = \emptyset$ ), то  $\varphi_1(x^*[\cdot; t_0, t]) = \infty$  для любого  $t \in [t_0, \infty)$ . После этого предположим, что  $W_0 \neq \emptyset$ . Продолжим по индукции дальнейшие построения.

Пусть определены  $k$  чисел  $t_i^*$  и  $k$  функционалов  $\varphi_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Полагаем

$$R_k(t, x, t_1^*, \dots, t_k^*) = \{(t, w_0) : (t, w_0) \in W_k(t_1^*, \dots, t_k^*), \\ |x - w_0| = \min |x - w| \text{ при } (t, w) \in W_k(t_1^*, \dots, t_k^*)\} \quad (3.6)$$

$$x_{k+1}^* = \min \{t \geq t_k^* : R_k(t, x^*[t], t_1^*, \dots, t_k^*) \cap L_k(t_1^*, \dots, t_k^*) = \emptyset\} \quad (3.7)$$

В рассматриваемом случае из построений на предыдущем шаге следует, что множество  $W_k(t_1^*, \dots, t_k^*) \neq \emptyset$ . Поскольку это множество к моменту  $\bar{t}$  обрывается на целевом множестве  $L_k(t_1^*, \dots, t_k^*)$ , то число  $x_{k+1}^* \leq \bar{t}$  существует. Из определения множества  $L_k(t_1^*, \dots, t_k^*)$  вытекает, что

$$R_k(x_{k+1}^*, x^*[x_{k+1}^*], t_1^*, \dots, t_k^*) \cap W_{k+1}(t_1^*, \dots, t_k^*, x_{k+1}^*) \cap M_{k+1} \neq \emptyset \quad (3.8)$$

Полагаем

$$\gamma_{k+1}(x^*[\cdot; t_0, \bar{t}]) = \begin{cases} \infty & \text{при } t_k \leq t < t_{k+1}^* \\ t_{k+1}^* & \text{при } t_{k+1}^* \leq t < \infty \end{cases} \quad (3.9)$$

где  $t_{k+1}^* = x_{k+1}^*$ .

Наконец, для последнего функционала полагаем, что число  $x_n^* = t_n^*$ . Заметим, что в случае  $W_n \neq \emptyset$  все числа  $t_k^* < \bar{t}$ . С другой стороны, из определения множества  $L_{m+1}(t_1, \dots, t_{m+1})$  (3.1) следует, что имеет место неравенство

$$z(t_1^*, \dots, t_m^*) < c \quad (3.10)$$

Для того, чтобы завершить построение КПС  $U^*$ , остается определить функцию  $u^* : (t, x, t_1, \dots, t_m) \rightarrow u(t, x, t_1, \dots, t_m)$ .

Полагаем, что при  $t_k = \infty$  стратегия  $U^*$  определяется функцией  $u^*(t, x)$  для всех позиций  $(t, x) \in [t_0, \infty) \times R^{n+1}$  как позиционная стратегия, экстремальная к множеству  $W_0$ . Для любого  $k$  при  $t_k < \infty$ , а  $t_{k+1} = \infty$  КПС  $U^*$  определяется функцией  $u^*(t, x)$  для всех позиций  $(t, x) \in [t_k, \infty) \times R^{n+1}$  как позиционная стратегия, экстремальная к множеству  $W_k(t_1, \dots, t_k)$ . Таким образом, КПС  $U^*$  построена.

Покажем, что в случае, когда  $(t_0, x_0) \in W_0$ , КПС  $U^*$  доставляет решение задачи о сближении. Рассмотрим произвольную ломаную Эйлера  $x_1[\cdot] = x_1[\cdot; t_0, x_0^0, U^*, v[\cdot]]$ , где  $v[\cdot] = \{v[t] \in Q\}$  — некоторая реализация второго игрока. Пусть  $t_1^*, \dots, t_m^*$  — моменты времени, когда происходит переключение значений  $v_1(x[\cdot; t_0, t]), \dots, v_m(x[\cdot; t_0, t])$  соответственно.

Рассмотрим первый промежуток  $[t_0, t_1^*)$ . На этом промежутке первый игрок, руководствуясь стратегией  $u^*(t, x)$ , чисто позиционной экстремальной относительно моста  $W_0$ , сблизится с целью  $L_0$ . Полагаем, что начальная позиция  $(t_0, x_1^0)$  лежит вблизи моста  $W_0$ . Тогда эта стратегия будет сохранять позицию  $(t, x_1[t])$  вблизи моста

$W_0$  вплоть до ее сближения с целью  $L_0$ , которое происходит в момент  $t_1^*$ . Поэтому имеют место оценки

$$\begin{aligned} \rho((t, x_2 | t)), W_0) &\leq z_1(\Delta) \text{ при } t_0 \leq t \leq t_1^* \\ \rho((t_1^*, x_2[t_1^*]), L_0) &\leq z_1(\Delta); \quad z_1(\Delta) \rightarrow 0 \text{ при} \\ \text{diam}(\Delta) = \sup(\tau_{j+1} - \tau_j) &\rightarrow 0 \text{ и } \rho((t_0, x_0^0), W_0) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь  $\rho((t, x), D)$  — расстояние от точки  $(t, x)$  до множества  $D \subset R^{n-2}$ . Из (3.9) и определения множества  $L_0$  следует

$$\rho((t_1^*, x_2[t_1^*]), W_1(t_1^*)) \leq z_1(\Delta) \quad (3.12)$$

$$\rho((t_1^*, x_2[t_1^*]), M_1) \leq z_1(\Delta) \quad (3.13)$$

На следующем промежутке  $[t_1^*, t_2^*)$  первый игрок в моменты времени  $\tau_i \in (t_1^*, t_2^*)$  формирует постоянное управление  $u_1[t] = u_2[\tau_i]$  ( $\tau_i \leq t < \tau_{i+1}$ ,  $i \in \{1, \dots, i_2 - 1\}$ ) в соответствии с позиционной стратегией  $U^{(i)}$ , экстремальной к множеству  $W_1(t_i)$  (см. определение  $U^{(i)}$ ). Из (3.12) следует, что эта стратегия сохраняет позицию  $(t, x_2 | t)$  вблизи моста  $W_1(t_1^*)$  вплоть до ее сближения с целью  $L_1(t_1^*)$ , что произойдет в момент  $t_2^*$ . Следовательно, будут справедливы оценки

$$\begin{aligned} \rho((t, x_2 | t), W_1(t_1^*)) &\leq z_2(\Delta) \text{ при } t_1^* \leq t \leq t_2^* \\ \rho((t_2^*, x_2[t_2^*]), L_1(t_1^*)) &\leq z_2(\Delta), \text{ где } z_2(\Delta) \rightarrow 0 \text{ при } \text{diam}(\Delta) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

По определению множества  $L_1(t_1^*)$  из этой оценки следуют неравенства:

$$\rho((t_2^*, x_2[t_2^*]), W_2(t_1^*, t_2^*)) \leq z_2(\Delta); \quad \rho((t_2^*, x_2[t_2^*]), M_2) \leq z_2(\Delta)$$

Продолжая эти рассуждения, получим оценки

$$\begin{aligned} \rho((t, x_2 | t), W_{k-1}(t_1^*, \dots, t_{k-1}^*)) &\leq z_k(\Delta) \\ \rho((t_k^*, x_2[t_k^*]), M_k) &\leq z_k(\Delta) \leq z(\Delta) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$z(\Delta) \rightarrow 0 \text{ при } \text{diam}(\Delta) \rightarrow 0, \quad \rho((t_0, x_0^0), W_0) \rightarrow 0$$

Рассмотрим произвольное движение  $x[\cdot; t_0, x_0, U^{(k)}]$ , определенное предельным переходом от некоторой последовательности ломаных Эйлера  $x_r[\cdot] = x_{2,r}[\cdot; t_0, x_0, U^{(k)}, v^{(k)}[\cdot]]$  ( $r=1, 2, \dots$ ), где  $\text{diam}(\Delta_r) \rightarrow 0$ ,  $|x_k - x_k^{(r)}| \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ . Пусть  $z_r = z(\Delta_r)$ ,  $\tau_r^{(i)} = \min\{t \in T(x_r[\cdot], M_r^{z_r}, N_r^{z_r})\}$ , где  $G^z$  — замкнутая  $z$ -окрестность множества  $G$ . Поскольку множество  $W_2(t_1^*, \dots, t_k^*)$  вложено в  $N_{k-1}$ , то из (3.14) получаем неравенства  $(-\tau_r^{(i)} \leq t_r^{(i)})$  ( $i=1, \dots, m$ ;  $r=1, 2, \dots$ ), где  $t_r^{(i)}$  — моменты времени

$t_p^r$  определенные для движения  $x_r[\cdot]$ . Можно полагать, что выбранная последовательность  $x_r[\cdot]$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) такова, что  $\tau_i^{(r)} \rightarrow \tau_i^*$ ,  $t_i^{(r)} \rightarrow t_i^*$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) при  $r \rightarrow \infty$ . Поскольку  $\varepsilon(t_1^{(r)}, \dots, t_m^{(r)}) \leq c$  и  $\tau_i^* \leq t_i^*$ , то в силу наложенных на функцию  $\varepsilon(\cdot)$  ограничений получаем неравенство  $\varepsilon(\tau_1^*, \dots, \tau_m^*) \leq c$ . Заметим, наконец, что по определению чисел  $\tau_i(x[\cdot])$ ,  $t_i^*$  ( $i = 1, \dots, m$ ) для движения  $x[\cdot] = x[\cdot; t_0, x_0, U^{(r)}]$  — предела ломаных  $x_r[\cdot]$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) справедливы неравенства  $\tau_i(x[\cdot]) \leq \tau_i^*$ . Поэтому из неравенства  $\varepsilon(\tau_1^*, \dots, \tau_m^*) \leq c$  следует оценка  $\gamma(x[\cdot]) = \varepsilon(\tau_1(x[\cdot]), \dots, \tau_m(x[\cdot])) \leq c$ . Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Лемма 3.1.** Если  $(t_0, x_0) \in W_0$ , то КПС  $U^{(r)}$ , экстремальная к системе множества  $W_k(t_1^*, \dots, t_k^*)$  ( $k = 0, \dots, m-1$ ), обеспечивает выполнение неравенства  $\gamma(x[\cdot; t_0, x_0, U^{(r)}]) \leq c$  для любого движения, порожденного этой стратегией.

**§ 4. Задача об уклонении.** Покажем, что когда  $(t_0, x_0) \in W_0$ , существует КПС  $V_\varepsilon$ , которая обеспечивает выполнение неравенства  $\gamma(x[\cdot; t_0, x_0, V_\varepsilon]) > c$  для любого движения  $x[\cdot; t_0, x_0, V_\varepsilon]$ . Здесь по-прежнему полагаем, что множество  $W_0$  построено для выбранного значения  $c$ , и этот параметр во введенных ниже обозначениях опущен. Задачу построения КПС  $V_\varepsilon$  будем называть задачей об уклонении. Пусть  $\varepsilon > 0$  — некоторое число. Для набора  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{m-1}$  множество  $L_{m-1, \varepsilon}(t_1, \dots, t_{m-1})$  определим соотношением

$$L_{m-1, \varepsilon}(t_1, \dots, t_{m-1}) = \{(t, x) : (t, x) \in M_m^*, \forall \delta > t \geq t_{m-1} \\ \varepsilon(t_1, \dots, t_{m-1}, t) \leq c + \varepsilon\} \quad (4.1)$$

(Здесь и в дальнейшем символ  $G^\varepsilon$  обозначает замкнутую  $\varepsilon$ -окрестность множества  $G$ ).

Полагаем далее, что  $W_{m-1, \varepsilon}(t_1, \dots, t_{m-1})$  есть множество позиционного поглощения цели  $L_{m-1, \varepsilon}(t_1, \dots, t_{m-1})$  внутри  $N_m^*$ .

Предположим, что множества  $L_{m-k+1, \varepsilon}(t_2, \dots, t_{m-k+1})$  и  $W_{m-k+1, \varepsilon}(t_2, \dots, t_{m-k+1})$ , где  $2 \leq k \leq m$  определены для всякого набора  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{m-k+1}$ . Тогда

$$L_{m-k, \varepsilon}(t_1, \dots, t_{m-k}) = \{U[W_{m-k+1, \varepsilon}(t_2, \dots, t_{m-k+1}, t_0) \cap M_{m-k+1, \varepsilon}^*] : \\ t_{m-k} \leq t_0 \leq t_1\} \quad (4.2)$$

Полагаем, что  $W_{m-k, \varepsilon}(t_1, \dots, t_{m-k})$  есть множество позиционного поглощения цели  $L_{m-k, \varepsilon}(t_1, \dots, t_{m-k})$  внутри  $N_{m-k+1, \varepsilon}^*$ . Пусть определены множества  $L_{1, \varepsilon}(t_1)$  и  $W_{1, \varepsilon}(t_1)$ , тогда полагаем

$$L_{0, \varepsilon} = \{U[W_{1, \varepsilon}^*(t_0) \cap M_{1, \varepsilon}^*] : t_0 \leq t \leq \theta\} \quad (4.3)$$

а  $W_0$ , определим как множество позиционного поглощения цели (4.3) внутри  $N_1^*$ .

Введенные здесь множества  $L_{j, \varepsilon}(t_1, \dots, t_j)$  и  $W_{j, \varepsilon}(t_1, \dots, t_j)$  ( $j = 0, \dots, m-1$ ) при  $\varepsilon = 0$  совпадают с соответствующими множествами  $L_{j, 0}(t_1, \dots, t_j)$  и  $W_{j, 0}(t_1, \dots, t_j)$ . Можно проверить, что множества  $L_{j, \varepsilon}(t_1, \dots, t_j)$  и  $W_{j, \varepsilon}(t_1, \dots, t_j)$  зависят от параметра  $\varepsilon$  полунепрерывно сверху относительно включения. Поэтому справедливо следующее положение. Если  $(t_0, x_0) \in W_0$ , то существует число  $\varepsilon$  такое, что

$$(t_0, x_0) \in W_0^* \quad (4.4)$$

Ниже будем исходить из соотношения (4.4).

Полагаем в дальнейшем  $\varepsilon = 2$ . Введем функционалы  $\psi_i^{(2)}$ , входящие в определение КПС  $V$ .

Пусть  $x^*[\cdot]: [t_0, \infty) \rightarrow R^{n+1}$  — некоторая непрерывная функция и пусть

$$\xi_i^* = \min \{t: t \in T(x^*[\cdot], M_i^*, N_i^*)\} \quad (4.5)$$

(символ  $T(\cdot)$  определен в § 1), если здесь  $T(\cdot) = \emptyset$ , то полагаем  $\psi_i^{(2)}(x^*[\cdot; t_0, t]) = \infty$  для  $i = 1, \dots, m$ ;  $t > t_0$ . Если же в (4.5)  $T(\cdot) \neq \emptyset$ , то полагаем

$$\psi_i^{(2)}(x^*[\cdot; t_0, t]) = \begin{cases} \infty & \text{при } t_0 \leq t < t_i^* \\ t_i^* & \text{при } t \geq t_i^* \end{cases}$$

где  $t_i^* = \xi_i^*$ .

Предположим, что для  $k$ -множеств  $M_1^*, \dots, M_m^*$  определены числа  $t_1^* \leq \dots \leq t_m^* < \infty$ . Определим число

$$\xi_{k+1}^* = \min \{t: t \in T(x^*[\cdot; t_0, t], M_{k+1}^*, N_{k+1}^*), t > t_k^*\} \quad (4.6)$$

Если здесь  $T(\cdot) = \emptyset$ , то полагаем  $\psi_{k+1}^{(2)}(x^*[\cdot; t_0, t]) = \infty$  для всех  $i = k+1, \dots, m$ ;  $t > t_0$ . Если же в (4.6)  $T(\cdot) \neq \emptyset$ , то полагаем

$$\psi_{k+1}^{(2)}(x^*[\cdot; t_0, t]) = \begin{cases} \infty & \text{при } t_0 \leq t < t_{k+1}^* \\ t_{k+1}^* & \text{при } t \geq t_{k+1}^* \end{cases}$$

где  $t_{k+1}^* = \xi_{k+1}^*$ .

Указанным способом определяются все функционалы  $\psi_i^{(2)}$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Для определения функции  $\vartheta^{(2)}: (t, x, t_1, \dots, t_m) \rightarrow v(t, x, t_1, \dots, t_m) \in Q$  введем вспомогательные определения. Пусть  $X$  — совокупность точек  $x \in R^{n+1}$ , для которых существует решение уравнения в контингенциях

$$x[t] \in \text{co} \{f(t, x[t], u, v): u \in P, v \in Q \quad (t_0 \leq t \leq \tau)$$

удовлетворяющее условиям  $|x[t_0] - x_0| \leq \beta$ ;  $x[\tau] = x_1$ . Здесь  $\beta > 0$  определим ниже. Полагаем  $H = \{(t, x): t_0 \leq t \leq \tau, x \in X\}$ . При сделанных предположениях относительно функций  $f_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) множе-

ство  $H$  является компактом. Пусть  $G$  и  $D$  — некоторые компакты в  $R^{n+2}$ ,  $x[\cdot]: [t_0, \infty) \rightarrow R^{n+2}$  — непрерывная функция. Будем говорить, что для функции  $x[\cdot]$  имеет место  $(G, D)$  уклонение, если из условия  $(t, x(t)) \in D$  при всех  $t \in [t_0, \infty)$  следует, что  $(\tau, x[\tau]) \in G$ .

Итак, обратимся к определению функции  $v^{(c)}$ . Предположим, что для заданного набора  $t_0 \leq t_1 < \dots < t_k$  функция  $v^{(c)}$  для любой позиции  $(t, x) \in [t_0, \infty) \times R^{n+2}$  определена как позиционная стратегия  $V^{(c)} \rightarrow v^{(c)}(t, x)$ , гарантирующая  $(L_{0,1}, N_1')$  — уклонение для любого движения  $x[\cdot; t_0, x_0, V^{(c)}]$  при всяком выборе точки  $x_0 \in \{x: |x_0 - x| \leq \beta\}$ . Существование числа  $\beta > 0$  и стратегии  $V^{(c)}$  следует из альтернативы для позиционной дифференциальной игры [1] (стр. 68), условия (4.4) и определения множества  $W_{0,1}$ .

Пусть набор чисел  $t_i$  такой, что  $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ . Полагаем, что для этого набора функция  $v^{(c)}(\cdot; t_1, \dots, t_k)$  определена как позиционная стратегия  $V^* \rightarrow v^*(t, x)$ , которая гарантирует  $(L_{k,1}(t_1, \dots, t_k), N_{k+1}')$  — уклонение для любого движения  $x[\cdot; t_0, x_0, V^*]$  системы (2.1) при произвольном выборе точки  $(t_0, x_0)$  из множества  $\{(t, x): (t, x) \in H; (t, x) \in W_{k,1}(t_1, \dots, t_k)\}$ , где  $\omega = 2/4$ . Существование такой стратегии  $V^*$  следует из альтернативы для позиционной дифференциальной игры и определения множества  $W_{k,1}(t_1, \dots, t_k)$ . Для всякого набора  $t_0 \leq t_1 < \dots < t_m$ , где  $t_m < \infty, t_i > t_m$  функция  $v^{(c)}(\cdot; t_1, \dots, t_m)$  определяется произвольно.

Итак, КПС  $V_c$  полностью определена.

Рассмотрим ломаную Эйлера  $x_c[\cdot] = x_c[\cdot; t_0, x^*, u[\cdot], V_c]$ , где  $|x^* - x_0| \leq \beta$ . Пусть  $t_0 \leq t'_1 \leq \dots \leq t'_m$  — моменты времени, когда происходит переключение значений  $\varphi_1(x_c[\cdot; t_0, t]), \dots, \varphi_m(x_c[\cdot; t_0, t])$  соответственно. Будем полагать сначала, что  $t'_m < \infty$ . Тогда согласно (4.4) и (4.6) выполнится включение

$$(t, x_c[t]) \in N_{k+1}' \text{ при } t_k \leq t < t_{k+1}' \quad (k = 0, 1, \dots, m-1) \quad (4.7)$$

На первом промежутке  $[t_0, \tau_1]$  управление  $v_c[\cdot]$  формирует позиционную стратегию  $V_0 \rightarrow v_0(t, x)$ . При выборе достаточно мелкого разбиения  $\Delta$  существует движение  $x[\cdot] = x[\cdot; t^*, x^*, V_0]$  такое, что

$$|x[t] - x_c[t]| \leq \varepsilon \leq \varepsilon/2 \text{ при } t \in [t_0, \tau_1] \quad (4.8)$$

Учитывая (4.7), замечаем, что  $(t, x[t]) \in N_1'$  при  $t_0 < t < \tau_1$ . Поскольку для рассматриваемого движения  $x[\cdot]$  стратегия  $V_0$  гарантирует  $(L_{0,1}, N_1')$  — уклонение, то для момента  $t'_1 < \tau_1$  должно выполняться соотношение

$$(t'_1, x[t'_1]) \in L_{0,1}. \quad (4.9)$$

По определению момента  $t'_1$  справедливо включение  $(t'_1, x[t'_1]) \in N_1'$ , поэтому из (4.8) следует

$$(t_1, x[t_1]) \in M_1^* \quad (4.10)$$

Из (4.3), (4.9), (4.10) заключаем, что  $(t_1, x[t_1]) \in W_{1,1}^+(t_1)$ . Используя еще раз (4.8), получаем, что при достаточно малом значении разности  $(t_1^* - \tau_1)$  при мелком разбиении  $\Delta$  будет справедливо следующее соотношение:

$$(\tau_{1/2}, x_1[\tau_{1/2}]) \in W_{1,1}^+(t_1) \quad (\psi = \alpha/2 = \varepsilon/4) \quad (4.11)$$

Согласно определению функции  $v^{(1)}$  на промежутке  $[\tau_{1/2}, \tau_1]$  управление  $v_1[\cdot]$  формирует позиционную стратегию, которая при выполнении условия (4.11) обеспечивает выполнение соотношения  $(\tau_{1/2}, x_1[\tau_{1/2}]) \in W_{1,1}^+(t_1, t_2)$ . Это положение выводится такими же рассуждениями, как и соотношение (4.11).

Продолжая эти рассуждения для последующих этапов, приходим к последнему этапу. Получаем

$$(\tau_{i_{m-1}}, x_i[\tau_{i_{m-1}}]) \in W_{i,i}^+(t_1, \dots, t_{m-1}^*) \quad (4.12)$$

На промежутке  $[\tau_{i_{m-1}}, \tau_{i_m}]$  управление  $v_i[\cdot]$  — позиционная стратегия  $V^* + v^*(t, x)$ . Определим движение  $x[\cdot] = x[\cdot, \tau_{i_{m-1}}, x[\tau_{i_{m-1}}], V^*]$  так, чтобы выполнялась оценка

$$\|x[t] - x_i[t]\| < \varepsilon \quad \text{при } \tau_{i_{m-1}} \leq t \leq t_m^* \quad (4.13)$$

(При достаточно мелком разбиении  $\Delta$  такое движение  $x_i[\cdot]$  существует). По определению момента  $t_m^*$  имеем  $(t_m^*, x_i[t_m^*]) \in M_m^*$ , поэтому из (4.13) при  $t = t_m^*$  следует

$$(t_m^*, x[t_m^*]) \in M_m^* \quad (4.14)$$

Далее из (4.7) и (4.13) получаем

$$(t, x[t]) \in N_m^* \quad \text{при } \tau_{i_{m-1}} \leq t \leq t_m^* \quad (4.15)$$

С другой стороны, по определению функции  $v^{(i)}$  стратегия  $V^*$  такова, что при наличии (4.12) для движения  $x[\cdot]$  имеет место  $(L_{m-1, i}(t_1^*, \dots, t_{m-1}^*), N_m^*)$ -уклонение. Поэтому из (4.15) следует, что  $(t_m^*, x[t_m^*]) \in L_{m-1, i}(t_1^*, \dots, t_{m-1}^*)$ , а отсюда и из (4.14) получаем неравенство

$$z(t_1^*, \dots, t_m^*) > c + \varepsilon \quad (4.16)$$

Неравенство (4.16) доказано в предположении, что  $t_i^* < \infty$  при  $i = 1, \dots, m$ . Если это предположение не выполняется, то  $z(t_1^*, \dots, t_m^*) = \infty$  и неравенство (4.16) выполняется очевидным образом.

Итак, при достаточно мелком разбиении  $\Delta$  для любой ломаной Эйлера выполняется неравенство (4.16).

Пусть  $x[\cdot; t_0, x_0, V_c]$  — произвольное движение, отвечающее КПС  $V_c$ .  $x_j[\cdot; t_0, x_0, u^{(j)}[\cdot], V_c]$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) — последовательность ломаных Эйлера, сходящаяся к этому движению.

Пусть  $t_i^{(j)}$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots$ ) — числа, определенные указанным образом для ломаных  $x_j[\cdot]$ . Можно полагать, что  $t_i^{(j)} - t_i^{(j-1)} \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ ,  $i = 1, \dots, m$ . (Здесь не исключен неособый случай, когда  $t_i^{(j)} \rightarrow \infty$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) и  $t_i^{(j)} \rightarrow \infty$ ). Из (4.16) в силу непрерывности  $\tau$  имеем неравенство

$$\tau(t_1^{(j)}, \dots, t_m^{(j)}) > c + \varepsilon \quad (4.17)$$

Заметим теперь, что  $\tau_j(x[\cdot]) > t_j^{(j)}$  (см. определение  $\tau_j(x[\cdot])$  в § 1 и числа  $t_j^{(j)}$  в (4.5), (4.6)). Поэтому из (4.17) и свойства функции  $\tau$  получаем неравенство

$$\tau(\tau_1(x[\cdot]), \dots, \tau_m(x[\cdot])) > c + \varepsilon$$

Таким образом, доказано следующее утверждение:

**Лемма 4.1.** Если  $(t_0, x_0) \in W_0$ , то построенная КПС  $V_c$  обеспечивает выполнение неравенства  $\tau(x[\cdot; t_0, x_0, V_c]) > c$  для любого порожденного ею движения  $x[\cdot; t_0, x_0, V_c]$ .

Из лемм 3.1 и 4.1 сразу следует справедливость теоремы 2.1.

Автор благодарит академика Н. Н. Красовского за постановку задачи и ценные советы.

Ереванский государственный  
университет

Поступила 23 II 1978

Մ. Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ

ՄԻ ԸՆՆԻ ՆՊԱՏԱԿԱՅԻՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԿ  
ԽԱՂԻ ՉԱՄԱՐ ՍՏՐԱՏԵԿԻԱԿԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ ԵՎ ԱԼՏԵՌՆԱՏԻՎԱՅԻ  
ՌԱԿՑՈՒՅՑԸ ՓՈՓՈԽՒՄԸ, ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ԴԵՊՐՈՒՄ

Ու ս զ ր Ե ռ Ե մ

Դիտարկվում է մոտեցման-շեղման դիֆերենցիալ խաղը մի ընդհանուր նպատակային բազմություններով, երբ հավասարումների սխառմը յուրաքանչյուր հանդիպումից հետո փոխվում է պահպանելով հետագծի անընդհատությունը: Բազմությունների հետ հանդիպման կարգը խիստ ֆիքսված է, քանի որ հակառակ դեպքում ստացվում է հակասություն: Սահմանվում են մաքսիմալ և մինիմալ կամուրջների սխառն և կտոր առ կտոր դիրքային ստրատեգիաներ փերջավոր հիշողությամբ, սահմանված են նաև այդ կամուրջների նկատմամբ էքստրիմալ կտոր առ կտոր դիրքային ստրատեգիաները: Նման ձևով սահմանված են երկրորդ խաղացողի կտոր առ կտոր դիրքային ստրատեգիաները: Այնուհետև այդ ստրատեգիաների դասում ապացուցված է ալտերնատիվան:

որով հիմնավորվում է  $\varepsilon$ -նալվասարակչությունը ներքևից կիսաանընդհատ արժեքով գիտարկվող խաղում:

## DETERMINATION OF THE STRATEGIES AND THE PROOF OF ALTERNATIVE FOR A DIFFERENTIAL GAME WITH SEVERAL AIM SETS UNDER CHANGEABLE SYSTEMS

M. S. GABRIELIAN

### S u m m a r y

A differential game of rapprochement-deviation with several aim sets is considered where the system of equations is changed after each encounter, provided the continuity of the trajectory is maintained. The order of encounters is strictly fixed, otherwise a contradiction occurs. The piecewise-position strategies with a finite memory are defined, a system of maximum  $u$ -stable bridges is constructed and the piecewise position strategies extreme to the bridges are determined as well. The piecewise-position strategies of the second player are similarly found. Then in the class of these strategies an alternative is proved whereby the  $\varepsilon$ -equilibrium situation is established in the game in question with a semi-continued plate on the underside.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.

И. И. КУДИШ

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ УПРУГО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЯЖЕЛО НАГРУЖЕННОГО КОНТАКТА КАЧЕНИЯ

В работе исследуется плоская неизотермическая упруго-гидродинамическая задача для тяжело нагруженных цилиндров. Качение цилиндров происходит с проскальзыванием. Смазка считается несжимаемой ньютоновской жидкостью. Температурная деформация контактирующих цилиндров не учитывается, а температуры их поверхностей считаются заданными.

Указанная задача численно исследовалась в работе [1]. В [2] предложен метод определения силы трения в упруго-гидродинамическом контакте, основанный на приближенном решении задачи о распределении температуры  $T$  поперек слоя смазки.

В условиях тяжело нагруженного контакта давление почти во всей области контакта, за исключением малых зон входа и выхода, близко к герцевскому. В зонах же входа и выхода на величину и характер распределения давления существенное влияние оказывает течение вязкой смазки. Именно в этих зонах формируется толщина слоя смазки. Поэтому возникает необходимость детального исследования решения задачи в зонах входа и выхода. Обычно применяемые сквозные численные методы решения могут привести к значительным погрешностям, особенно при режимах недостаточной смазки и масляного голодания.

Аналогично [3], исследуем поставленную задачу методом сращиваемых асимптотических разложений.

1. Займемся выводом уравнения Рейнольдса для неизотермической задачи в случае ньютоновской жидкости. Используя обычно принимаемые допущения [4], для скорости смазки  $u(x, z)$  вдоль направления качения получим

$$u(x, z) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{\int_{-h/2}^z \frac{ds}{\mu}}{\int_{-h/2}^z \frac{ds}{\mu}} + \frac{dp}{dx} \left\{ \int_{-h/2}^z \frac{s ds}{\mu} - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{s ds}{\mu} \frac{\int_{-h/2}^z \frac{ds}{\mu}}{\int_{-h/2}^z \frac{ds}{\mu}} \right\} \quad (1.1)$$

Здесь  $x$  и  $z$  — координаты элемента смазки, измеряемые соответственно вдоль и поперек смазочного слоя (фиг. 1);  $u_1$  и  $u_2$  — линейные скорости поверхностей цилиндров;  $h = h(x)$  — зазор между цилиндрами;  $p = p(x)$  — давление в слое смазки;  $\mu = \mu(x, z)$  — динамическая вязкость смазки.

С помощью выражения (1.1) и уравнения неразрывности

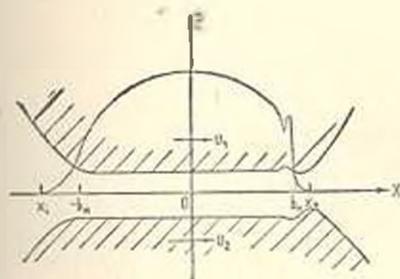
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dw}{dz} = 0$$

а также граничных условий

$$w\left(x, -\frac{h}{2}\right) = w\left(x, \frac{h}{2}\right) = 0$$

получим уравнение Рейнольдса в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ \left[ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{s ds}{\mu} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^z \frac{ds}{\mu} dz \right] \left[ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{ds}{\mu} - \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^z \frac{s ds}{\mu} dz \right] \frac{dp}{dx} \right\} = \\ = u_1 \frac{dh}{dx} + (u_2 - u_1) \frac{d}{dx} \left[ \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^z \frac{ds}{\mu} dz \right] \left[ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{ds}{\mu} \right] \end{aligned} \quad (1.2)$$



Фиг. 1. Общий вид области контакта и давления в ней.

К уравнению (1.2) необходимо добавить граничные условия в точках начала  $x = x_1$  и конца  $x = x_2$  области контакта

$$p(x_2) = p(x_1) = \frac{dp}{dx}(x_i) = 0 \quad (1.3)$$

а также уравнение для определения  $h(x)$  [3]

$$h = h_1 + \frac{x^2 - x_1^2}{R'} + \frac{4}{\pi E'} \int_{x_1}^{x_2} p(t) \ln \frac{x_2 - t}{|x - t|} dt \quad (1.4)$$

и условие равенства интеграла от давления по области контакта прижимающей нагрузке  $P$

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = P \quad (1.5)$$

Здесь  $h_1 = h(x_1)$  — толщина слоя смазки в точке выхода из области контакта;  $E'$  — приведенный модуль упругости материалов цилиндров,  
 2 Известия АН Армянской ССР, Механика, № 6

$\frac{1}{E} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{2 - \nu_2^2}{E_2} \right)$ ;  $R^*$  — приведенный радиус кривизны недеформированных цилиндров,  $\frac{1}{R^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ ;  $P$  — прижимающая нагрузка.

Положим, что вязкость смазки  $\mu$  подчиняется закону

$$\mu = \nu(p) \exp [\Delta (T_0 - T)] \quad (1.6)$$

где  $\nu(p)$  — известная функция давления  $p$ ;  $\Delta$  — температурный коэффициент вязкости;  $T_0$  — температура смазки вне области контакта,  $T = T(x, z)$  — температура смазки в области контакта.

Поскольку вязкость смазки зависит от температуры, то возникает необходимость определения температуры в области контакта. Отметим, что тепловыделение в слое смазки связано в основном с наличием вязкого сдвига в направлении качения. Рассматривая теперь уравнение энергии и учитывая тот факт, что потоки тепла поперек слоя смазки значительно превосходят потоки вдоль слоя, уравнение для температуры запишем в виде [4]

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -\nu \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \quad (1.7)$$

С помощью выражения (1.1) приведем уравнение (1.7) к виду

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{1}{\nu} \left\{ (u_2 - u_1) \left/ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{ds}{\mu} + \frac{dp}{dx} \left[ z - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{s ds}{\mu} \right/ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{ds}{\mu} \right] \right\}^2 \quad (1.8)$$

К уравнению (1.8) необходимо добавить граничные условия

$$T \left( x, -\frac{h}{2} \right) = T_{w1}(x), \quad T \left( x, \frac{h}{2} \right) = T_{w2}(x) \quad (1.9)$$

Здесь  $T_{w1}(x)$  и  $T_{w2}(x)$  — температура поверхностей контактирующих цилиндров;  $\lambda = \lambda(p)$  — коэффициент теплопроводности смазки, зависящий лишь от давления  $p$ .

Таким образом, получена замкнутая система существенно нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (1.2)—(1.6), (1.8) и (1.9) для определения функций  $p(x)$ ,  $h(x)$ ,  $T(x, z)$  и постоянных  $x_1$  и  $h_1$ . При этом функции  $T_{w1}(x)$  и  $T_{w2}(x)$ , а также постоянные  $x_1$ ,  $R^*$ ,  $E^*$ ,  $P$ ,  $\Delta$  и  $T_0$  являются заданными. Кроме того, предполагаются известными функции давления  $\nu(p)$  и  $\lambda(p)$ .

Имея в виду использование аппарата [3], необходимо исключить температуру  $T(x, z)$  из уравнения (1.2). Для этого  $T(x, z)$  должна быть явно выражена через  $p$ ,  $\lambda$ ,  $\nu$  и  $z$  из уравнений (1.6), (1.8) и (1.9), что связано с определенными трудностями. Однако, для ряда случаев с помощью асимптотического подхода удастся исключить из (1.2) температуру  $T$  и затем применить методы работы [3].

2. Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} x' = x/b_H, \quad z' = z/h_1, \quad v' = v/v_0, \quad p' = p/p_H, \quad h' = h/h_1 \\ T' = T/T_0 - 1, \quad T_{W1}' = T_{W1}/T_0 - 1, \quad u = x_j/b_H, \quad c = x_j/b_H \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $b_H$  и  $p_H$  — соответственно полуширина герцевской площадки и максимальное герцевское давление. Тогда уравнения (1.2)—(1.6), (1.8) и (1.9) преобразуются к виду (штрихи опущены)

$$\frac{d}{dx} \left\{ F_1(x) \frac{dp}{dx} \frac{V \cdot sl}{H_0^2} \left[ \frac{h}{2} - F_2(x) \right] \right\} = \frac{V}{H_0^2} \frac{dh}{dx} \quad (2.2)$$

$$p(u) = p(c) = \frac{dp}{dx}(c) = 0 \quad (2.3)$$

$$H_0(h-1) = x^2 - c^2 + \frac{2}{\pi} \int_a^c p(t) \ln \frac{c-t}{|x-t|} dt \quad (2.4)$$

$$\int_a^c p(t) dt = \frac{\pi}{2} \quad (2.5)$$

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = - \frac{8xve^{3T}}{\delta \left( \int_{-h/2}^{h/2} e^{3T} ds \right)^2} \left\{ 1 + \frac{12H_0^2}{V \cdot sl} \frac{1}{v} \frac{dp}{dx} \left[ z \int_{-h/2}^{h/2} e^{3T} ds - \int_{-h/2}^{h/2} se^{3T} ds \right] \right\}^2 \quad (2.6)$$

$$T\left(x, -\frac{h}{2}\right) = T_{W1}(x), \quad T\left(x, \frac{h}{2}\right) = T_{W2}(x) \quad (2.7)$$

$$v = v(Q_i, p), \quad i = 1, 2 \quad (2.8)$$

$$F_1(x) = \frac{12}{v} \left| \int_{-h/2}^{h/2} se^{3T} ds \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^z e^{3T} ds dz \int_{-h/2}^{h/2} e^{3T} ds - \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^z se^{3T} ds dz \right| \quad (2.9)$$

$$F_2(x) = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^z e^{3T} ds dz \int_{-h/2}^{h/2} e^{3T} ds \quad (2.10)$$

при этом

$$\begin{aligned} \delta = \Delta T_0, \quad sl = 2 \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1}, \quad x = \frac{v_0 \Delta (u_2 - u_1)^2}{8r_0} \\ V = \frac{3(u_1 + u_2)^2 v_0 E^3}{4R^2 p_H^4}, \quad H_0 = \frac{h_1 R^2}{b_H} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Постоянные  $Q_1$  и  $Q_2$  в (2.8) характеризуют скорость изменения функций  $v$  и  $i$  с изменением  $p$ .

В дальнейшем будем рассматривать режимы, для которых  $sl \neq 0$ .

Исследуем задачу для температуры  $T$  в случае режимов масляного голодания и недостаточной смазки в тяжело нагруженном контакте. Будем предполагать, что для этих режимов имеет место соотношение

$$\frac{H_0^2}{V} \frac{1}{v} \frac{dp}{dx} \ll 1, \quad x \in [a, c] \quad (2.12)$$

Временно будем считать  $\lambda(\rho)$ ,  $v(\rho)$ ,  $p(x)$  и  $h(x)$  известными функциями  $x$ ,  $a$ ,  $\delta$ ,  $V$ ,  $sl$  и  $H_0$  — известными постоянными. При этом решение уравнений (2.6), (2.7) следует искать в виде равномерно пригодного на отрезке  $[a, c]$  асимптотического представления [5].

$$T(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{H_0^2}{V} \frac{1}{v} \frac{dp}{dx} \right)^k T_k(x, z) \quad (2.13)$$

Заменив в (2.6), (2.7)  $T(x, z)$  его разложением из (2.13) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $\frac{H_0^2}{V} \frac{1}{v} \frac{dp}{dx}$ , получим уравнения для определения  $T_k(x, z)$ \*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} &= -8\gamma v e^{i\gamma z} \delta \left( \int_{-h/2}^{h/2} e^{i\gamma s} ds \right)^2 \\ T_0\left(x, -\frac{h}{2}\right) &= T_{W1}(x), \quad T_0\left(x, \frac{h}{2}\right) = T_{W2}(x) \quad (2.14) \\ \lambda \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} &= -8\gamma v e^{i\gamma z} \delta \left( \int_{-h/2}^{h/2} e^{i\gamma s} ds \right)^2 \times \\ &\times \left\{ \delta T_1 - 2\delta \int_{-h/2}^{h/2} T_1 e^{i\gamma s} ds \int_{-h/2}^{h/2} e^{i\gamma s} ds + \frac{24z}{sl} \int_{-h/2}^{h/2} e^{i\gamma s} ds \right\} \quad (2.15) \\ T_1\left(x, -\frac{h}{2}\right) &= T_1\left(x, \frac{h}{2}\right) = 0 \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Функция  $T(x, z)$  удовлетворяет нелинейному интегро-дифференциальному уравнению, в то время как все  $T_k(x, z)$  ( $k \geq 1$ ) удовлетворяют линейным уравнениям.

Предположим, что температуры поверхностей одинаковы

$$T_{W1}(x) = T_{W2}(x) = T_W(x) \quad (2.16)$$

\* Указанная процедура легко обобщается на случай, когда функции  $T_{W1,2}(x)$  представимы в виде рядов, аналогичных (2.13).

Тогда непосредственной подстановкой легко убедиться, что

$$T_0 = T_W + \frac{1}{\delta} \ln \left\{ \left( 1 + z \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_W} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 - \operatorname{th}^2 \left( \frac{2z}{h} \operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_W}} \right) \right] \right\} \quad (2.17)$$

удовлетворяет краевой задаче (2.14).

Используя линейность краевой задачи (2.15), получим  $T_1(x, z)$  в виде

$$T_1 = \\ = \frac{6h^2}{\delta sl} \int_{-1}^1 e^{\delta T_0} ds \left\{ \sqrt{\frac{1 + z \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_W}}{x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_W}}} \operatorname{th} \left( s \operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_W}} \right) - s \right\} \\ s = \frac{2z}{h} \quad (2.18)$$

Аналогичным образом могут быть построены и решены уравнения для  $T_2(x, z)$  при  $k \geq 2$ . Однако, как будет показано ниже, для исследования в главном задаче относительно  $p(x)$ ,  $H_0$  и т. д. достаточно знать лишь функции  $T_0(x, z)$  и  $T_1(x, z)$ .

С помощью соотношений (2.17) и (2.18) удается в аналитическом виде вычислить функции  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$

$$F_1(x) = \frac{3h^2 e^{\delta T_W} \left( 1 + z \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_W} \right)}{y \left( \operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_W}} \right)^2} \left\{ \sqrt{\frac{x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_W}}{1 + z \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_W}}} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_W}} - \ln \left( 1 + z \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_W} \right) + \right. \\ \left. + 2 \frac{\int_0^{\operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_W}}} \ln \operatorname{ch} u du}{\operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_W}}} \right\} + O \left( \frac{H_0}{V} \frac{1}{y} \frac{dp}{dx} \right) \quad (2.19)$$

$$F_2(x) = \frac{h}{2} \frac{H_0^2}{V} \frac{3h^2 e^{\delta T_W} \left( 1 + z \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_W} \right)}{sl y \left( \operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{y}{\lambda} e^{-\delta T_W}} \right)^2} \frac{dp}{dx} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \frac{1 + 2x \frac{v}{\lambda} e^{-\delta T_W}}{\sqrt{x \frac{v}{\lambda} e^{-\delta T_W} \left(1 + x \frac{v}{\lambda} e^{-\delta T_W}\right)}} \times \right. \\
& \times \operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{v}{\lambda} e^{-\delta T_W}} - 1 - 2 \ln \left(1 + x \frac{v}{\lambda} e^{-\delta T_W}\right) + \\
& \left. \operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{v}{\lambda} e^{-\delta T_W}} \right. \\
& \left. + 4 \frac{\int_0^1 \ln \operatorname{ch} u du}{\operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{v}{\lambda} e^{-\delta T_W}}} \right\} + O\left(\frac{H_0^4}{V^2} \left(\frac{1}{v} \frac{dp}{dx}\right)^2\right) \quad (2.20)
\end{aligned}$$

3. Заменяя в (2.2) функции  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  их выражениями из (2.19) и (2.20), получим

$$\frac{d}{dx} \left[ W(x) \frac{dp}{dx} \right] = \frac{V}{H_0^2} \frac{dh}{dx} \quad (3.1)$$

$$p(a) = p(c) = \frac{dp}{dx}(c) = 0 \quad (3.2)$$

$$H_0^2(h-1) = x^2 - c^2 - \frac{2}{\pi} \int_c^x p(t) \ln \frac{c-t}{|x-t|} dt \quad (3.3)$$

$$\int_a^c p(t) dt = \frac{\pi}{2} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
W(x) = & \frac{3h^2 e^{\delta T_W} \left(1 + x \frac{v}{\lambda} e^{-\delta T_W}\right)}{v \left(\operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{v}{\lambda} e^{-\delta T_W}}\right)^2} \left\{ 1 + \ln \left(1 + x \frac{v}{\lambda} e^{-\delta T_W}\right) - \right. \\
& - \sqrt{\frac{1 + x \frac{v}{\lambda} e^{-\delta T_W}}{x \frac{v}{\lambda} e^{-\delta T_W}}} \operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{v}{\lambda} e^{-\delta T_W}} - \\
& \left. \operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{v}{\lambda} e^{-\delta T_W}} \right. \\
& \left. + 2 \frac{\int_0^1 \ln \operatorname{ch} u du}{\operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{v}{\lambda} e^{-\delta T_W}}} \right\} + O\left(\frac{H_0^4}{V} \frac{1}{v} \frac{dp}{dx}\right) \quad (3.5)
\end{aligned}$$

где

$$\int_0^x \ln \operatorname{ch} x dz = \frac{x^2}{2} - x \ln 2 + \frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} e^{-2kx} \quad (3.5)$$

При  $\delta = 0$  и  $x \rightarrow 0$  функция  $W(x) = \frac{H^2}{\nu}$ , что соответствует изотермическому случаю.

Для широкого класса задач упруго-гидродинамической теории смазки уравнение Рейнольдса приводится к виду (3.1), причем функция  $W(x)$  определяется особенностями задачи. Так, например, в изотермической постановке для жидкости Ри-Эйрина при  $sl = 0$  функция  $W(x)$  имеет вид [6]

$$W(x) = 3 \frac{H^2}{\nu} \frac{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u}{u^2}, \quad u = H_0 z h \frac{dp}{dx} \quad (3.5')$$

Здесь  $z = \frac{p_H}{GE}$ ,  $G$  — модуль сдвига жидкости Ри-Эйрина.

Исследуем случай тяжело нагруженного контакта, при котором давление почти во всей области контакта близко к герцевскому. Это означает, что в уравнения (3.1)—(3.5) входит малый параметр  $\omega$ , связанный с параметрами  $V$ ,  $Q_1$  и  $Q_2$  таким образом, что в области

$$x - a \gg \varepsilon_1, \quad c - x \gg \varepsilon_2, \quad \text{при } \omega \ll 1 \quad (3.6)$$

имеет место неравенство

$$\frac{H_0^2}{V} \frac{d}{dx} \left[ W(x) \frac{dp}{dx} \right] \ll 1 \quad \text{при } \omega \ll 1 \quad (3.7)$$

Здесь  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — характерные размеры малых окрестностей соответственно точек  $x = a$  (зона входа) и  $x = c$  (зона выхода), то есть

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\omega) \ll 1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2(\omega) \ll 1 \quad \text{при } \omega = \omega(V, Q_1, Q_2) \ll 1$$

Область, определенную неравенствами (3.6), будем называть герцевской зоной контакта.

С помощью неравенства (3.7) из уравнений (3.1), (3.3) и (3.4) в герцевской зоне контакта получим

$$x^2 - c^2 + \frac{2}{\pi} \int_a^c p(t) \ln \frac{c-t}{|x-t|} dt = 0, \quad \int_a^c p(t) dt = \frac{\pi}{2}$$

$$p(x) = \sqrt{\frac{1 + 2ac + \left(\frac{c-a}{2}\right)^2 - (a+c)x}{(x-a)(c-x)}} \quad (3.8)$$

Предположим, что координата входа  $a$  равна

$$a = -1 + \alpha_1 \varepsilon_q, \quad \alpha_1 \sim 1 \quad \text{при} \quad \omega \ll 1 \quad (3.9)$$

Введем внутренние переменные в зонах входа и выхода

$$r = \frac{x-a}{\varepsilon_q}, \quad s = \frac{x-c}{\varepsilon_q}$$

тогда асимптотиками внешнего представления  $p(x)$  в виде (3.8) соответственно будут

$$\begin{aligned} p(x) &= \varepsilon_q^{1/2} \left[ \sqrt{2r} + \frac{a_1}{2r} \right] + O(\varepsilon_q^{3/2}) \quad \text{при} \quad r = \text{fix} \\ p(x) &= \varepsilon_q^{1/2} \left[ \sqrt{-2s} - \frac{b_1}{\sqrt{-2s}} \right] + O(\varepsilon_q^{3/2}) \quad \text{при} \quad s = \text{fix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из условия сраживания решений в зонах входа и выхода с внутренним представлением внешнего представления в виде (3.10) следует, что

$$\begin{aligned} p(x) &= O(\varepsilon_q^{1/2}), \quad \frac{dp}{dx} = O(\varepsilon_q^{-1/2}) \quad \text{при} \quad r = \text{fix} \\ p(x) &= O(\varepsilon_q^{1/2}), \quad \frac{dp}{dx} = O(\varepsilon_q^{-1/2}) \quad \text{при} \quad s = \text{fix} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Поэтому решение задачи (3.1)–(3.4) при условиях (3.6) и (3.7) в зонах входа и выхода будем искать в виде

$$\begin{aligned} p(x) &= \varepsilon_q^{1/2} q(r) + o(\varepsilon_q^{1/2}), \quad q(r) \sim 1 \quad \text{при} \quad r \sim 1 \\ p(x) &= \varepsilon_q^{1/2} g(s) + o(\varepsilon_q^{1/2}), \quad g(s) \sim 1 \quad \text{при} \quad s \sim 1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Неизвестные постоянные, входящие в уравнения (3.1) и (3.4), будем искать в виде

$$H_0 = H_{00}(\omega) + o(H_{00}), \quad H_{00} \ll 1; \quad c = 1 + \varepsilon_q^2 \beta_1 + o(\varepsilon_q^2), \quad \beta_1 \sim 1 \quad (3.13)$$

Ниже исследуются лишь те режимы смазывания, при которых с каждой из сторон герцевской зоны находится по одной зоне неоднородности [5]. Это требование накладывает определенные ограничения на размеры зон входа и выхода  $\varepsilon_q$  и  $\varepsilon_s$  сверху. Конкретный вид этих ограничений зависит от функции  $W(x)$ . Например, для функций  $W(x)$ , определяемых (3.5), (3.5') или  $W(x) = \frac{h^2}{x}$  при  $\lambda(Q, p) = 1$ ,  $\gamma = e^{O, p^m}$  ( $m > 0$ ) и  $\omega = Q^{-1} \ll 1$  будем иметь ограничения в виде

$$\varepsilon_q^{2m} \ll H_{00}, \quad \varepsilon_q \ll \varepsilon_{q0} = Q^{-2m} \quad (3.14)$$

В случае  $\omega = V \ll 1$  первое из ограничений (3.14) остается без изменения, и второе при  $Q \ll V^{-m}$  принимает вид [7]

$$\varepsilon_q \ll \varepsilon_{q0} = V^{2m} \quad (3.15)$$

Отвлечемся на некоторое время от конкретного вида функции  $W(x)$ . Рассмотрим более общую функцию  $W(x)$  по сравнению с (3.5) и (3.5\*\*), а именно, предположим, что в зонах входа и выхода

$$W(x) = v_n \varepsilon_{|q|}^k H_{00}^c W_n \left( \frac{r}{s} \right) \dots W_0 \left( \frac{r}{s} \right) \sim 1 \quad \text{при} \quad \left| \frac{r}{s} \right| \sim 1 \quad (3.16)$$

а в герцевской зоне выполняется неравенство (3.7). Из (3.16) в частном случае  $n=k=l=0$  может быть получено выражение  $W(x)$  для неизотермической задачи.

Исследуя уравнения (3.1) и (3.3) в зонах входа и выхода с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений, получим

$$\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (3.17)$$

При этом были использованы представления (3.9), (3.12), (3.13) и условие (3.14).

С помощью соотношений (3.8), (3.12) и (3.13) из уравнения (3.3) в зонах входа и выхода легко получить асимптотические представления для

$\frac{dh}{dx}$  при  $\varepsilon \ll 1$

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dx} &\approx \frac{\varepsilon^{1/2}}{H_{00}} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{q(t) - \sqrt{2t}}{t-r} dt + o\left(\frac{\varepsilon^{1/2}}{H_{00}}\right), \quad r \sim 1 \\ \frac{dh}{dx} &= \frac{\varepsilon^{1/2}}{H_{00}} \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{g(t) - \sqrt{-2t}}{t-s} dt + o\left(\frac{\varepsilon^{1/2}}{H_{00}}\right), \quad s \sim 1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Здесь для краткости принято  $\varepsilon \sim \varepsilon_0 \sim \varepsilon_2$ . Далее с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений, используя соотношения (3.12) — (3.18), из уравнений (3.1), (3.2) и (3.4) получим в зонах входа и выхода систему уравнений для определения функций  $q(r)$  и  $g(s)$ , а также постоянных  $A$  и  $\beta_1$ .

$$\frac{A^{1+\beta_1}}{2} \frac{d}{dr} \left[ W_0(q) \frac{dq}{dr} \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{q(t) - \sqrt{2t}}{t-r} dt, \quad q(0) = 0 \quad (3.19)$$

$$\int_0^{\infty} \left[ q(t) - \sqrt{2t} - \frac{2\varepsilon_1}{\sqrt{2t}} \right] dt = 0$$

$$\frac{A^{1+\beta_1}}{2} \frac{d}{ds} \left[ W_0(g) \frac{dg}{ds} \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{g(t) - \sqrt{-2t}}{t-s} dt, \quad g(0) = 0 \quad (3.20)$$

$$\int_{-\infty}^0 \left[ g(t) - \sqrt{-2t} + \frac{p_1}{\sqrt{-2t}} \right] dt = 0$$

Здесь интегральные условия для  $q(r)$  и  $g(s)$  получены из рассмотренных уравнений (3.31) и (3.8) в зонах входа и выхода с привлечением условия (3.4) и условий сращивания с (3.10). Кроме этого использовались равенства (3.9), (3.12), (3.13) и (3.14).

К уравнениям (3.19), (3.20) необходимо добавить в качестве недостающих граничных условий асимптотические соотношения, вытекающие из условий сращивания (3.10)

$$q(r) \rightarrow \sqrt{2r} + \frac{p_1}{\sqrt{2r}} \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (3.21)$$

$$g(s) \rightarrow \sqrt{-2s} - \frac{p_1}{\sqrt{-2s}} \quad \text{при } s \rightarrow -\infty \quad (3.22)$$

Замена условия  $\frac{dg}{ds}(0) = 0$  на условие (3.22) правомерна, так как система уравнений (3.19) — (3.21) с условием  $\frac{dq}{dr}(0) = 0$  и система (3.19) — (3.22) эквивалентны, если решение первой из них существует и единственно, а решение второй системы единственно.

При асимптотическом анализе уравнений задачи для постоянной  $H_{00}$ , кроме того, получаем оценку

$$H_{00} = A (V_0^{-n} \varepsilon^{2-k})^{\frac{1}{1+\beta}}, \quad A = A(x_1, \beta, sl, z, m, \dots) \sim 1 \quad (3.23)$$

Из первого неравенства (3.14) и (3.23) следует  $\varepsilon \sim (V_0^{-n})^{\frac{2}{1+\beta}}$ . Это соотношение совместно с (3.16) определяет область применимости изложенного метода. Примерами этих областей являются (3.14) и (3.15).

Отметим, что при  $\varepsilon^{2-k} \ll H_{00}$  с точностью до  $\frac{\varepsilon^{2-k}}{H_{00}}$  функция зазора  $h(x) = 1$  при  $x \in [a, c]$ , а поэтому функция  $W_0(\dots)$  не зависит от  $h$ . Следовательно, при  $\varepsilon^{2-k} \ll H_{00}$  уравнения (3.19) — (3.22) замкнуты. В этом случае система уравнений (3.19) — (3.22) расщепляется таким образом, что коэффициент  $A$  в (3.23) определяется только давлением  $q(r)$  в зоне входа, а затем уже определяются давление  $g(s)$  и постоянная  $p_1$ .

В случае, когда  $\varepsilon^{2-k} \sim H_{00}$  при  $\varepsilon \ll 1$ , функция зазора  $h(x)$  на отрезке  $[a, c]$  меняется, вообще говоря, на свою величину. Поэтому для замыкания системы уравнений (3.19) — (3.22) необходимо к ней добавить уравнение для  $h(x)$ , так как в этом случае функция  $W_0$  зависит от  $h$ .

Отметим, что можно получить иную систему уравнений для  $q(r)$  и  $g(s)$  в зонах входа и выхода

$$q(r) = \sqrt{2r} \left[ 1 - \frac{A^{l+3}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\frac{d}{dt} \left| W_0(q) \frac{dq}{dt} \right| dt}{\sqrt{2t} (t-r)} \right]$$

$$A^{l+3} = \frac{\pi z_1}{\int_0^\infty \frac{\frac{d}{dt} \left| W_0(q) \frac{dq}{dt} \right| dt}{\sqrt{2t}}} \quad (3.24)$$

$$g(s) = \sqrt{1-2s} \left[ 1 - \frac{A^{l+3}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\frac{d}{dt} \left| W_0(g) \frac{dg}{dt} \right| dt}{\sqrt{1-2t} (t-s)} \right]$$

$$z_1 = \frac{A^{l+3}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\frac{d}{dt} \left| W_0(g) \frac{dg}{dt} \right| dt}{\sqrt{1-2t}}$$

эквивалентную системе уравнений (3.19)—(3.22). Для этого достаточно представить исходные уравнения (3.1)—(3.4) в виде, точно решенном относительно давления  $p(x)$ , входящего в уравнение (3.3). Дальнейшее исследование полученных таким путем уравнений производится методом, существенно отличающимся от изложенного выше.

4. Вернемся к неизотермической задаче для ньютоновской смазки в условиях тяжело нагруженного контакта. В этом случае  $H_0 = A(V^2)^{1/2}$ . Отсюда с помощью (3.8) и (3.12) можно убедиться в справедливости неравенств (2.12) и (3.7) для режима масляного голодания.

Для определенности предположим, что  $\nu(Q, p) \equiv 1$  и  $\gamma = \epsilon Q, p^m$ . Кроме того, будем считать, что малый параметр  $\epsilon = \epsilon(V, Q)$  обеспечивает выполнение одного из соотношений

$$\epsilon_q \ll Q^{-2/m}, \quad \begin{cases} Q \ll V^{-m/5} \\ \epsilon_q \ll V^{2/5} \end{cases} \quad (4.1)$$

Рассмотрим случай, когда

$$T_F(-1 + \epsilon r) = T_{F0} + O(\epsilon^2), \quad T_G(1 - \epsilon s) = T_{G0} + O(\epsilon^2)$$

$$T_{F0} = \text{const}, \quad \epsilon > 0$$

Тогда решение системы уравнений (3.19)—(3.21) при  $l=k=i=0$  (ньютоновская жидкость) выражается через соответствующее решение системы

уравнений для изотермического случая. При этом  $W_0(q) = W_0(p) = \gamma^{-1} = \text{const}$  и  $A = A_{iso}$ , где  $A_{iso}$  — один из компонентов решения изотермической задачи. Учитывая, что при условии (4.1) решение уравнений (3.19)–(3.21) при произвольном  $x_1 < 0$  имеет вид

$$q(r) = |x_2|^{1/2} q_0\left(\frac{r}{|x_2|}\right), \quad g(s) = |x_1|^{1/2} g_0\left(\frac{s}{|x_1|}\right) \\ A(x_2) = A_0 |x_2|^{\beta_0}, \quad \beta_0 = \beta_{00} |x_2| \quad (4.2)$$

Формула для толщины слоя смазки в точке  $x = c$  принимает особенно простой вид<sup>1</sup>

$$h_l = A_{07} |x_1|^{-3} (V_2^2)^{1/3} \frac{h_0^2}{R^2}, \quad A_0 = 1.2613 \quad (4.3)$$

Функции  $q_0(r)$ ,  $g_0(s)$  и постоянные  $A_0$  и  $\beta_{00}$  являются решением изотермической задачи при  $x_1 = -1$ .

Рассмотрим режим обильной смазки для ньютоновской жидкости в случае, когда  $\epsilon = V \ll 1$  и  $Q_0 \ll V^{-1/3}$ ; при этом  $\epsilon = V^{2/3}$ . Перейдем в формуле (3.23) формально к пределу  $\epsilon \rightarrow V^{2/3}$  при  $n = k = l = 0$ , тогда получим, что  $H_m \sim V^{2/3}$ . Для величины  $\frac{H_0^2}{V} \frac{1}{\nu} \frac{dp}{dx}$ , входящей в левую часть неравенства (2.12), получим в зонах входа и выхода оценку

$$\frac{H_0^2}{V} \frac{1}{\nu} \frac{dp}{dx} \sim \frac{H_0^2}{V} \epsilon^{-1/3} \sim 1 \quad (4.4)$$

Таким образом, в случае обильной смазки использованный метод построения решения для температуры  $T(x, z)$  неприменим. Это связано с тем, что в зонах входа и выхода тепловыделение, вызываемое относительным проскальзыванием поверхностей, становится соизмеримым с тепловыделением, вызываемым сопротивлением качению. Поэтому исключить из рассмотрения температуру  $T$  оказывается невозможным.

Изложим метод решения системы уравнений (2.2)–(2.10) при  $\lambda = 1$ , позволяющий в данном случае также получить асимптотически справедливые уравнения в зонах входа и выхода.

Отметим, что в герцевской зоне  $\frac{H_0^2}{V} \frac{1}{\nu} \frac{dp}{dx} \sim V^{1/3} \ll 1$ , поэтому, как и ранее, в этой зоне оказывается возможным исключить из рассмотрения температуру  $T(x, z)$  и свести задачу к уравнениям (3.1)–(3.5). Поэтому с помощью (3.6) и (3.7) из уравнений (3.1), (3.3) и (3.4) получим глав-

<sup>1</sup> В случае, когда значения показателей степеней  $n$ ,  $k$  и  $l$  отличны от нуля, в соотношениях (4.2) изменится лишь равенство для  $A(x_2)$ , то есть  $A(x_2) = A_0 |x_2|^{\frac{2}{l-3}}$ . Соответственно изменится и формула (4.3) для  $h_l$ .

ный член асимптотики давления в герцевской зоне в виде (3.8). Отсюда вытекает справедливость формулы (3.10), (3.11). Поэтому решение задачи (2.2)–(2.10) в зонах входа и выхода для  $p(x)$ ,  $H_1$  и  $\tau$  будем искать в виде (3.12) и (3.13), а для  $T(x, z)$  — соответственно

$$\begin{aligned} T(x, z) &= T_1(r, z) + o(1), \quad T_1(r, z) \sim 1 \quad \text{при } r \sim 1 \\ T(x, z) &= T_0(s, z) + o(1), \quad T_0(s, z) \sim 1 \quad \text{при } s \sim 1 \end{aligned} \quad (4.5)$$

При этом можно показать, что  $z_0 = z_1 = V^{2k}$  и в зонах входа и выхода справедливы оценки

$$F_k(x) = F_{2k}\left(\frac{r}{s}\right) + o(1), \quad F_{2k}\left(\frac{r}{s}\right) \sim 1 \quad \text{при } \left|\frac{r}{s}\right| \sim 1, \quad k = 1, 2 \quad (4.6)$$

Применяя изложенную выше методику сращиваемых асимптотических разложений, с помощью соотношений (3.12), (3.13), (4.5) и (3.18) в зонах входа и выхода получим связанную систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{A^2}{2} \frac{d}{dr} \left\{ F_{2k}(r) \frac{dq}{dr} + \frac{sl}{A^2} \left[ \frac{h_0(r)}{2} - F_{2k}(r) \right] \right\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{q(t) - V\sqrt{2t}}{t-r} dt \quad (4.7)$$

$$q(0) = 0, \quad q(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2r} - \frac{\gamma_1}{V\sqrt{2r}}, \quad \int_0^{\infty} \left| q(t) - V\sqrt{2t} - \frac{\gamma_1}{V\sqrt{2t}} \right| dt = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_1^2 T_1}{\sigma_1^2} &= \frac{8\gamma_1 e^{\gamma_1 q^* - \gamma_1 T_1}}{\lambda_0^2 \left( \int_{-h_0/2}^{\lambda_0/2} e^{-\gamma_1 T_1} ds \right)^2} \left\{ 1 + \frac{12 A^2}{sl} e^{-\gamma_1 q^*} \frac{dq}{dr} \left[ z \int_{-h_0/2}^{h_0/2} e^{-\gamma_1 T_1} ds - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_{-h_0/2}^{h_0/2} sl^{\gamma_1 T_1} ds \right] \right\}^2 \end{aligned}$$

$$T_1\left(r, -\frac{h_0}{2}\right) = T_{21}(r), \quad T_1\left(r, \frac{h_0}{2}\right) = T_{22}(r)$$

$$\frac{A^2}{2} \frac{d}{ds} \left\{ F_{2k}(s) \frac{dg}{ds} + \frac{sl}{A^2} \left[ \frac{h_0(s)}{2} - F_{2k}(s) \right] \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t) - V\sqrt{-2t}}{t-s} dt$$

$$g(0) = 0, \quad g(s) \underset{s \rightarrow -\infty}{\sim} V\sqrt{-2s} - \frac{\gamma_1}{V\sqrt{-2s}}$$

$$\int_{-\infty}^0 \left[ g(t) - V\sqrt{-2t} + \frac{\beta_1}{V\sqrt{-2t}} \right] dt = 0$$

$$\frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} = - \frac{8\gamma e^{\gamma g^m + \delta T_0}}{h_g^2} \left\{ 1 + \frac{12A^2}{sl} e^{-\gamma g^m} \frac{dg}{ds} \left| z \int_{-h_g/2}^{h_g/2} e^{\delta T_0} ds - \int_{-h_g/2}^{h_g/2} s e^{\delta T_0} ds \right|^2 \right.$$

$$\left. T_0\left(s, -\frac{h_g}{2}\right) = T_{W1}(s), \quad T_0\left(s, \frac{h_g}{2}\right) = T_{W2}(s) \right.$$

$$\left. \gamma = \begin{cases} 0, & Q, V^{m/5} \ll 1 \\ \gamma_0, & Q, V^{m/5} \sim 1 \end{cases} \quad \gamma_0 \sim 1 \text{ при } V \ll 1 \right.$$

Для того, чтобы система уравнений (4.7) стала замкнутой, к ней необходимо добавить уравнения для определения зазора  $h_g(r)$  в зоне входа и  $h_g(s)$  в зоне выхода

$$A[h_g(r) - 1] = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 \left[ l(t) - V\sqrt{-2t} + \frac{\beta_1}{V\sqrt{-2t}} \right] \ln |td| - \int_0^{\infty} \left[ q(t) - V\sqrt{2t} - \frac{\beta_1}{V\sqrt{2t}} \right] \ln |r-t| dt \right\}$$

$$A[h_g(s) - 1] = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^0 \left[ g(t) - V\sqrt{-2t} + \frac{\beta_1}{V\sqrt{-2t}} \right] \ln \left| \frac{t}{s-t} \right| dt \quad (4.8)$$

Кроме того, в процессе вывода уравнений (4.7) и (4.8) из сравнения порядка членов получим оценку

$$H_{00} = AV^{1/5}, \quad A = A(z_1, \delta, sl, \gamma, m) \sim 1 \quad (4.9)$$

Таким образом, как в случае масляного голодания, так и в случае обильной смазки удастся достаточно подробно исследовать зоны входа и выхода.

Формулы (3.23), (4.3) и (4.9) для толщины слоя смазки по структуре полностью совпадают с соответствующими формулами для изотермического процесса смазывания [7] и отличаются лишь постоянными  $A$ .

Остановимся на формулах для касательных напряжений

$$\begin{aligned} \tau = -\frac{H_0(u_1 - u_2)}{2h} = -\tau \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\nu}{\int_{-h/2}^{h/2} e^{\lambda T} ds} \left\{ \lambda l - \right. \\ \left. - \frac{12 H_0^2}{V} \frac{1}{\nu} \frac{dp}{dx} \left[ z \int_{-h/2}^{h/2} e^{\lambda T} ds - \int_{-h/2}^{h/2} s e^{\lambda T} ds \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Одним разность касательных напряжений, возникающих на трущихся поверхностях. Тогда из (4.10) получим

$$\tau \left( x, \frac{h}{2} \right) - \tau \left( x, -\frac{h}{2} \right) = 12 h \frac{H_0^2}{V} \frac{dp}{dx} \quad (4.11)$$

Поэтому в условиях масляного голодания, как это следует из (2.12), в качестве касательного напряжения на обеих поверхностях с ошибкой порядка

$\frac{H_0^2}{V} \ll 1$  можно принять

$$\tau = \frac{\nu \lambda l}{\int_{-h/2}^{h/2} e^{\lambda T} ds} = \lambda \frac{\nu^{-1} T_W \operatorname{arsh} \sqrt{x \frac{\nu}{l} e^{-\lambda T_W}}}{h \left( 1 + z \frac{\nu}{l} e^{-\lambda T_W} \right)} \sqrt{\frac{1 + z \frac{\nu}{l} e^{-\lambda T_W}}{x \frac{\nu}{l} e^{-\lambda T_W}}} \quad (4.12)$$

$Q, p$

Эта формула при  $\lambda = 1$  и  $\nu = e$  совпадает с формулой, полученной в работе [2].

Для рассмотренного выше режима обильной смазки формула (4.12) справедлива лишь в герцевской зоне, а в зонах входа и выхода касательное напряжение  $\tau$  необходимо вычислять по формуле (4.10), где температура и давление определяются из решения системы (4.7), (4.8): это непосредственно вытекает из (4.4). Тем не менее, приняв  $1 \ll Q = Q(V) \ll V^{-n-1}$ , с малой ошибкой силу трения можно вычислять по формуле (4.12) как для режима масляного голодания, так и для режима обильной смазки. При этом в (4.12) следует положить  $h = 1$ ,  $p = \sqrt{1 - x^2}$ .

В случае, когда в герцевской зоне функция  $\nu$  остается ограниченной,

расчет силы трения  $F_{1,p} = \int_{x_1}^{x_2} \tau dx$  необходимо производить по формуле (4.10).

В заключение отметим, что изложенный метод без существенных изменений может быть применен к контактно-гидродинамическим задачам для

толстой полосы при различных зависимостях вязкости от давления и температуры, например,

$$\eta = \eta_0 \nu(p) [1 + \alpha(T - T_0)]$$

$$\nu(p) = \begin{cases} \exp\left(\frac{\alpha_1 p^m}{1 + \alpha_2 p^k}\right), & p \leq p^0 \\ \exp\left(\frac{\alpha_1 p^m}{1 + \alpha_2 p^k}\right), & p > p^0 \end{cases}$$

При других зависимостях вязкости от температуры в результате асимптотического анализа может быть получена система уравнений, в определенном смысле аналогичная системе (4.7), (4.8).

5. Проиллюстрируем полученные результаты на примере численного решения системы уравнений (3.19)–(3.22) при  $l = 0$  и  $W_1(x)$ , вычисляемого с помощью (3.5) и (3.12). В силу справедливости неравенства  $\varepsilon^{-2} \ll E_2$  для режимов масляного голодания в (3.5) полагалось  $h = 1$ . Вычисления производились с помощью разностной схемы, аналогичной [3]; при этом ошибка не превышала 2%. Расчеты были проведены для  $\eta = 1$  и  $\eta = 0$  при  $m = 1$  и различных значениях  $\alpha_1$ ,  $m$ ,  $\alpha$  и  $\delta T_{W0}$  (см. формулы (4.2)). Значения  $A(\alpha_1, m, \alpha, \delta T_{W0})$  приведены в табл. 1. Для сравнения в этой же табл. 1 приведены значения коэффициентов  $A_{iso}(\alpha_1, m, \alpha)$ , соответствующие изотермической постановке задачи при температуре смазки  $T - T_0 = T_{W0} = 0$  и  $\gamma = 1$ ,  $\gamma = 0$  и  $m = 1$ .

Таблица 1

| $\alpha_1$ | $\alpha$ | $T_{W0}$ | $\gamma$ | $A_{iso}$ | $A$    |
|------------|----------|----------|----------|-----------|--------|
| —2         | 0,008    | 0        | 1        | 1,9789    | 1,9613 |
| —5         | 0,008    | 0        | 0        | 3,7648    | 3,7149 |
| —5         | 0,008    | 0        | 1        | 3,5843    | 3,5792 |
| —5         | 0,5      | 0        | 0        | 3,7648    | 3,4015 |
| —5         | 0,5      | 0        | 1        | 3,5843    | 3,2817 |
| —5         | 0,5      | 1        | 0        | 3,7648    | 2,5684 |
| —5         | 0,5      | 1        | 1        | 3,5843    | 2,4857 |
| —5         | 0,5      | 2        | 0        | 3,7648    | 1,8831 |
| —5         | 0,5      | 2        | 1        | 3,5843    | 1,8186 |

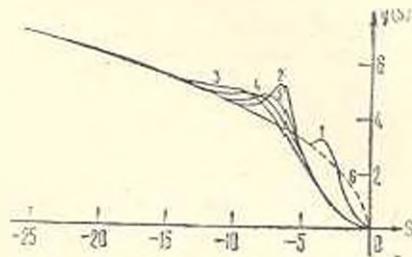
Из табл. 1 видно, что при  $T_{W0} = 0$  неизотермическое поведение смазки слабо сказывается на величине  $A$ , а, следовательно, и на толщине слоя смазки  $h_1$ , в то время как при  $T_{W0} = 1$  и  $T_{W0} = 2$  имеет место существенное уменьшение  $h_1$  по сравнению с полученным в изотермической постановке задачи. Кроме того, из табл. 1 следует, что для приближенного вычисления  $h_1$  в условиях масляного голодания можно пользоваться формулой (4.3) при  $\varepsilon = Q^{-2m}$

$$h_1 = 1,2615 \gamma |\alpha_1|^{2m} (VQ^{-2m})^{1/3} \frac{h_0^3}{R} \quad (5.1)$$

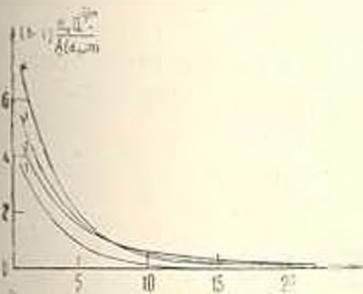
На фиг. 2 приведены кривые  $g(s)$  для некоторых значений  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\delta T_{\text{вход}}$  при  $\eta = 1$  и  $m = 1$ . Отметим, что эпюры  $g(s)$  при  $\alpha_2 = 0.008$  практически совпадают с соответствующими эпюрами, полученными из решения изотермической задачи. С увеличением  $|\alpha_2|$  локальный максимум (пик)

Фиг. 2. Распределение давления в зоне выхода при  $m = 1$  и  $\eta = Q^{-2}$ .

1.  $\alpha_1 = -2$ ,  $\alpha_2 = 0.008$ ,  $\delta T_{\text{вход}} = 0$ ;
2.  $\alpha_1 = -5$ ,  $\alpha_2 = 0.008$ ,  $\delta T_{\text{вход}} = 0$ ;
3.  $\alpha_1 = -5$ ,  $\alpha_2 = 0.5$ ,  $\delta T_{\text{вход}} = 0$ ;
4.  $\alpha_1 = -5$ ,  $\alpha_2 = 0.5$ ,  $\delta T_{\text{вход}} = 1$ ;
5.  $\alpha_1 = -5$ ,  $\alpha_2 = 0.5$ ,  $\delta T_{\text{вход}} = 2$ ;
- 6 по Герцу  $h(-s)|_{s=0} = 2\alpha_1$ .

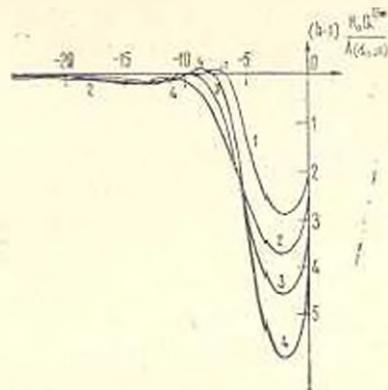


$g(s)$  смещается к центру площадки контакт и увеличивается по величине. При увеличении  $\alpha_2$  пик  $g(s)$  уменьшается и также смещается к центру области контакта; при этом наблюдается более медленный выход на герцевское решение. С увеличением  $\delta T_{\text{вход}}$  пик  $g(s)$  незначительно смещается в сторону выхода из области контакта. Давление в зоне входа является мо-



Фиг. 3. Профиль зазора между цилиндрами в зоне входа при  $m = 1$ ,  $\eta = Q^{-2}$  и  $\alpha_1 = -5$ .

1.  $\alpha_2 = 0.008$ ,  $\delta T_{\text{вход}} = 0$ ;
2.  $\alpha_2 = 0.5$ ,  $\delta T_{\text{вход}} = 0$ ;
3.  $\alpha_2 = 0.5$ ,  $\delta T_{\text{вход}} = 1$ ;
4.  $\alpha_2 = 0.5$ ,  $\delta T_{\text{вход}} = 2$ .



Фиг. 4. Профиль зазора между цилиндрами в зоне выхода при  $m = 1$ ,  $\eta = Q^{-2}$  и  $\alpha_1 = -5$ .

1.  $\alpha_2 = 0.008$ ,  $\delta T_{\text{вход}} = 0$ ;
2.  $\alpha_2 = 0.5$ ,  $\delta T_{\text{вход}} = 0$ ;
3.  $\alpha_2 = 0.5$ ,  $\delta T_{\text{вход}} = 1$ ;
4.  $\alpha_2 = 0.5$ ,  $\delta T_{\text{вход}} = 2$ .

нонно возрастающей функцией. При этом в окрестности, примыкающей к  $\alpha_1$ , оно несколько выше, а в области больших давлений несколько ниже давления, полученного в изотермической постановке. Поведение зазора  $h(x)$  такое же, как и изотермической постановке, однако значения  $h(x)$  могут существенно отличаться от полученных в изотермической постановке (фиг. 3, 4). Это отличие в основном связано с поведением величины  $A$  при изменении  $\alpha_2$  и  $\delta T_{\text{вход}}$ .



## ASYMPTOTIC ANALYSIS OF A PLANE NONISOTHERMAL ELASTO-HYDRODYNAMIC PROBLEM FOR A HEAVY-LOADED ROLLING CONTACT

I. I. KUDISH

## Summary

A plane nonisothermal elasto-hydrodynamic problem for Newtonian liquid is studied by the method of matched asymptotic expansions in case of a heavy-loaded contact. Asymptotic estimations for the lubricant film thickness were obtained for starved and fully flooded conditions. In case of starved conditions the equations for major members of pressure asymptotics were derived and numerically solved for various values of the problem parameters.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ченг, Штернлидт. Численное решение для давления, температуры и толщины смазочной пленки между двумя бесконечно длинными катящимися и скользящими цилиндрами при больших нагрузках. Теоретические основы инженерных расчетов, 1965, № 3, изд. «Мир».
2. Канисел, Улолуиг. Упрощенный анализ сил трения при упруго-гидродинамическом контакте в условиях качения со скольжением. Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Проблемы трения и смазки, 1971, т. 93, № 1.
3. Кудиш И. И. Упруго-гидродинамическая задача для тяжело нагруженного контакта качения. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1978, т. XXXI, № 1.
4. Кодири Д. С. Контактная гидродинамика смазки деталей машин. М., изд. «Машиностроение», 1976.
5. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., изд. «Мир», 1967.
6. Кудиш И. И. Определение толщины слоя смазки в условиях масляного голодания для линейного контакта. «Труды института», № 1 (91). М., Специформцентр ВНИППз, 1977.
7. Кудиш И. И. Асимптотическое решение плоской изотермической контактно-гидродинамической задачи. Тезисы докладов Всесоюзной научной конференции «Смешанные задачи механики деформируемого тела», ч. 1, Ростов-на-Дону, 1977.

Օ. Բ. ԱԳԱԼԱՐՅԱՆ

### К ЗАДАЧЕ КРУЧЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА С ТРЕЩИНОЙ

Рассмотрение вопросов пластического перераспределения полей напряжений и деформаций в телах с трещинами позволяет глубже понять механизм процесса разрушения и подойти к описанию его реального развития. В связи с этим упруго-пластические задачи теории трещин привлекают к себе большое внимание.

В общей постановке эти задачи связаны с большими математическими трудностями. Однако случай более простого деформированного состояния такого, как антиплоское, исследован достаточно подробно [1—3]. Построение их решений основано на свойствах интеграла, не зависящего от пути интегрирования, введенного Райсом [4] для плоской задачи.

С другой стороны, большой интерес представляет также изучение поля напряжений и деформаций в телах, имеющих острые надрезы и трещины и испытывающих кручение. Решения подобных задач для упруго-пластических тел важны при анализе работы скручиваемых стержней, валов, цилиндров и других деталей машин.

В данной работе изучается задача о кручении упруго-пластических осесимметричных тел, содержащих концентраторы напряжений. Предлагается общий метод решения, позволяющий в ряде случаев эффективно использовать имеющиеся результаты расчетов для антиплоской деформации. В асимптотическом приближении получаются результаты, совпадающие с известными данными для антиплоской деформации.

1. Рассматривается кручение осесимметричного тела из упруго-пластического материала, которое содержит концентратор напряжений (кольцевую выточку, надрез, трещину). Вводится цилиндрическая система координат, ось  $z$  которой направлена вдоль оси тела, радиус обозначается через  $r$ , а полярный угол — через  $\varphi$ . По условию задачи  $\varepsilon_r = \varepsilon_\varphi = \varepsilon_z = \tau_{rz} = 0$ , и имеется лишь одно уравнение равновесия для неизвестных напряжений

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rz}) + \frac{\partial}{\partial z} (r^2 \tau_{rz}) = 0 \quad (1.1)$$

Это уравнение удовлетворяется тождественно, если определить  $\tau_{rz}$  и  $\tau_{rz}$  через функцию напряжений  $\Phi = \Phi(r, z)$  по формулам

$$\tau_{rz} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \tau_{rz} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (1.2)$$

Для упруго-пластического тела сдвиговые деформации  $\tau_{rz}$  и  $\tau_{rz}$  являются функциями  $\tau_{rz}$  и  $\tau_{rz}$  вида

$$\tau_{rz} = 2f(T^2)\epsilon_{rz}, \quad \tau_{zr} = 2f(T^2)\epsilon_{zr} \quad (1.3)$$

где  $T$  — интенсивность напряжений ( $T^2 = \epsilon_{rz}^2 + \epsilon_{zr}^2$ ). Подстановка (1.2) в (1.3), а (1.3) в соотношение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\gamma_{zr}}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\gamma_{rz}}{r} \right) = 0 \quad (1.4)$$

дает уравнение для функции напряжений

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^2} f(T^2) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{r^2} f(T^2) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] = 0 \quad (1.5)$$

причем

$$T^2 = \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2$$

На границе тела предполагаются заданными напряжения  $\tau_{nn}$  ( $n$  — внешняя нормаль к поверхности). Для определенности будем считать, что  $\epsilon_{nn} = 0$ . С помощью функции напряжений это условие записывается в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \cos(n, z) - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cos(n, r) = 0 \quad (1.6)$$

В случае, когда тело не ограничено вдоль оси  $z$ , на бесконечности задается скручивающий момент  $M$ . Задача состоит в решении уравнения (1.5) при заданных условиях (1.6) на границе и фиксированном моменте  $M$  на бесконечности (в случае неограниченного тела).

2. С целью использовать особенность рассматриваемых задач, состоящую в наличии концентраторов, запишем (1.5) в эквивалентной форме, выделив члены, содержащие вторые производные,

$$A\Phi - G\Phi = 0 \quad (2.1)$$

где

$$A\Phi = f(T^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - f(T^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

$$G\Phi = - \frac{3}{r} f(T^2) \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

Вторые производные функции  $\Phi$ , входящие в выражение для  $A\Phi$ , имеют, согласно (1.2), решающее значение в местах высоких градиентов напряжений. В частности, вблизи острых углов, вершин выточек и трещины (2.1) заменяется уравнением  $A\Phi = 0$ . Это уравнение отвечает задаче об антиплоской деформации призматического тела с тем же поперечным сечением, что и рассматриваемое осесимметричное тело. Методы решения задач об антиплоской деформации хорошо разработаны [1—4]. Решение уравнения  $A\Phi = 0$  либо само по себе обеспечивает достаточную точность,

либо может служить удачным начальным приближением при отыскании  $\Phi(r, z)$  в зоне концентрации. При нахождении такого решения необходимо осуществлять стыковку функции  $\Phi$  при переходе к области, где градиенты напряжений не столь велики, как вблизи от концентратора.

Отмеченная связь с задачей об антиплоской деформации, легко обнаруживаемая с помощью функции  $\Phi$ , может быть использована и в непосредственном приложении к исходной системе дифференциальных уравнений. С целью получить результаты в форме, по возможности, близкой к форме, используемой в работе [2], перейдем в уравнениях (1.1), (1.4) к новым переменным, считая координаты  $r$  и  $z$  функциями неизвестных деформаций и напряжений. Преобразования дают

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial z_{20}} + \frac{\partial r}{\partial r_{20}} + g_1 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial r_{20}} - \frac{\partial r}{\partial z_{20}} + g_2 = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

где

$$g_1 = \frac{z_{20}}{r} \left[ \frac{\partial r}{\partial r_{20}} \frac{\partial z}{\partial z_{20}} - \frac{\partial r}{\partial z_{20}} \frac{\partial z}{\partial r_{20}} \right]$$

$$g_2 = \frac{r_{20}}{r} \left[ \frac{\partial r}{\partial r_{20}} \frac{\partial z}{\partial r_{20}} - \frac{\partial r}{\partial z_{20}} \frac{\partial z}{\partial r_{20}} \right]$$

В этой системе функции  $g_1$  и  $g_2$  малы по сравнению с другими слагаемыми в местах высоких градиентов напряжений. Их отбрасывание приводит к уравнениям задачи об антиплоской деформации. Другим существенным обстоятельством является то, что при задании этих членов как функций новых координат уравнения (2.2) с помощью частного решения сводятся к однородным. Поэтому, задав начальное приближение для функций  $g_1$  и  $g_2$ , выполняя указанные преобразования и используя хорошо разработанные методы для антиплоской деформации, получим универсальную процедуру решения задач о кручении последовательными приближениями. Эффективность этого пути зависит от удачного выбора начального приближения. Из сказанного выше следует, что в местах высоких градиентов напряжений в качестве такового можно принять  $g_1 = g_2 = 0$ . Вне этих областей обычно выполняются соотношения линейной теории упругости, что также облегчает выбор начального приближения.

3. В качестве иллюстрации рассмотрим концевую зону в вершине прямолинейной трещины, расположенной вдоль радиуса на расстоянии  $a$  от оси тела. Для определенности примем степенной закон упрочнения, то есть положим  $f(T') = \frac{1}{2}BT'$ , где  $B > 0$ ,  $\beta > 0$ . Для линейно упругого тела  $\beta = 0$   $B = \frac{1}{G}$  ( $G$  — модуль сдвига).

С помощью преобразования переменных  $r = a(1 - \rho \cos \theta)$ ,  $z = \rho \sin \theta$ , вводящего полярную систему координат в вершине трещины, получаем уравнение, эквивалентное исходному.

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{a^4 \rho^2} \Phi_1^2 + \frac{1}{a^4} \Phi_0^2 + \frac{2\beta}{a^2} \Phi_1^2 \right] \Phi_{,1} - \frac{4\beta}{a^4 \rho^2} \Phi_1 \Phi_0 \Phi_{,1\theta} + \\ & + \left[ \frac{1}{a^4 \rho^4} \Phi_1^2 + \frac{1}{a^4 \rho^2} \Phi_0^2 - \frac{2\beta}{a^4 \rho^2} \Phi_1^2 \right] \Phi_{11} + \\ & + \left[ \frac{1}{a^4 \rho} + \frac{(4\beta + 3) \cos \theta}{a^4 (1 - \rho \cos \theta)} \right] \Phi_1^3 - \frac{(4\beta + 3) \sin \theta}{a^4 \rho^2 (1 - \rho \cos \theta)} \Phi_1^2 + \\ & + \left[ \frac{(4\beta + 3) \cos \theta}{a^4 \rho^2 (1 - \rho \cos \theta)} \Phi_0 - \frac{(4\beta + 3) \sin \theta}{a^4 \rho (1 - \rho \cos \theta)} \Phi_{,1} - \right. \\ & \left. - \frac{2\beta}{a^4 \rho^3} \Phi_0 + \frac{1}{a^4 \rho^3} \Phi_0 \right] \Phi_1 \Phi_0 = 0 \end{aligned}$$

Представляя  $\Phi$  в окрестности вершины в виде  $\Phi = K\rho^\alpha F(\theta)$ , где  $K$  и  $\alpha$  — постоянные,  $F$  — функция угла  $\theta$ , после перехода к пределу при  $\rho$ , стремящемся к нулю, получим

$$\frac{F''}{F} + \frac{\alpha^2 [\alpha + 2\beta(\alpha - 1)] F^2 + \alpha [\alpha + 4\beta\alpha - 2\beta] F'^2}{\alpha^2 F^2 + (1 + 2\beta) F'^2} = 0 \quad (3.1)$$

Граничные условия для  $F(\theta)$  имеют вид

$$F = 0 \text{ при } \theta = \pi, F' = 0 \text{ при } \theta = 0 \quad (3.2)$$

Величина  $\alpha$  определяется из условия, чтобы свертка  $\tau_{ij} \epsilon_{ij}$  имела асимптотику вида  $\frac{1}{\rho}$  при  $\rho$ , стремящемся к нулю. Это условие дает

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{1 + 2\beta}{1 + \beta}$$

Решая (3.1) при граничных условиях (3.2), получим

$$\begin{aligned} F(\theta) = C_1 & \left[ \sqrt{1 + 2\beta + \beta^2 \cos^2 \theta} + (1 + \beta) \cos \theta \right]^{1/2} \times \\ & \times \left[ \sqrt{1 + 2\beta + \beta^2 \cos^2 \theta} - \beta \cos \theta \right]^{\frac{\alpha}{2(1+\beta)}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Подстановка  $F(\theta)$  в  $\Phi(\rho, \theta)$  и вычисление  $\tau_{\theta\theta}$  и  $\tau_{r\theta}$  дает явные выражения для этих напряжений

$$\begin{aligned} \tau_{\theta\theta} &= K_1 D^{-1} L_1(\theta) L_2(\theta) \left[ \rho \cos \theta + \sqrt{1 + 2\beta + \beta^2 \cos^2 \theta} \right] \\ \tau_{r\theta} &= K_1 D^{-1} L_1(\theta) L_2(\theta) \frac{1 + \beta + \beta \sin^2 \theta - \cos \theta \sqrt{1 + 2\beta + \beta^2 \cos^2 \theta}}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $K_1$  — постоянная,  $D = -2(1 + \beta) \rho^{\frac{1}{2(1+\beta)}}$

$$L_1 = \sqrt{(1 + \beta) \cos \theta + \sqrt{1 + 2\beta + \beta^2 \cos^2 \theta}}$$

$$L_2 = (1 - 2\beta + \beta^2 \cos^2 \theta - \beta \cos \theta)^{\frac{1}{2(1+\beta)}}$$

Линии постоянной интенсивности напряжений ( $\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\phi\phi} = T^2$ ) легко находятся из этих формул. Переходя к декартовой системе координат  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , имеем

$$[x - X(T)]^2 + y^2 = R^2(T)$$

где

$$X(T) = \frac{\beta(1 + 2\beta)^{1+2\beta}}{2^{1+2\beta}(1 + \beta)^{1+2\beta}} \frac{K_1^{2(1-\beta)}}{T^{-(1+\beta)}} \quad (3.5)$$

$$R(T) = \frac{(1 + 2\beta)^{1+2\beta}}{2^{1+2\beta}(1 + \beta)^1} \frac{K_1^{2(1-\beta)}}{T^{2(1-\beta)}} \quad (3.6)$$

Таким образом, линия постоянной интенсивности  $T$  является кругом с центром  $X(T)$  от вершины трещины и с радиусом  $R(T)$ . Этот результат, как и следовало ожидать, совпадает с результатом Нейбера [1] и Райса [2].

В случае, когда пластическая зона мала по сравнению с характерными размерами тела, множитель  $K_1$  можно найти с помощью инвариантного интеграла [4]:

$$J = \int_{(L)} U dz = [\sigma_{\theta\theta} \cos(n, r) + \sigma_{\phi\phi} \cos(n, z)] \frac{\partial V}{\partial r} dl$$

С одной стороны,  $J = \frac{K_{III}^2}{2G}$ , где  $K_{III}$  — коэффициент интенсивности напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$ . С другой стороны, вычисляя  $J$  по контуру внутри пластической зоны, имеем  $J = \frac{K_1^{2(1-\beta)} \pi (1 + 2\beta)^{1+2\beta} \Gamma_0}{2^{1+2\beta} (1 + \beta)^1 T_0^{2(1-\beta)}}$ , где  $T_0$  — предел текучести,  $\Gamma_0$  — деформация на пределе текучести. Учитывая инвариантность  $J$ , получим

$$K_1 = \left[ K_{III} \sqrt{\frac{2^2 (1 + \beta)^1}{\pi (1 + 2\beta)^{1+2\beta}}} T_0^{\frac{1}{1+\beta}} \right]^{\frac{1}{1-\beta}}$$

Подстановка этого выражения в (3.5), (3.6) дает выражения, полностью совпадающие с результатами Райса [2].

Հ. Ռ. ԱԳԱՐԻԱՆ

ՀԱՔՈՎ ԱՌԱՋԳԱՊԼԱՍՏԻԿ ՊՏՏՄԱՆ ԻՐԱՐՄԵՆԻ ՈՂՈՐՄԱՆ  
ԽՆԴՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ո մ

Այնատանրում ուսումնասիրվում է լարումների կոնցենտրատորներ պարունակող առածգա-սլյաստիկական պտտման մարմինների ոլորման խնդիրը: Առաջարկվում է լուծման ընդհանուր մեթոդ, որը թույլ է տալիս մի շարք դեպքերում էֆեկտիվ օգտագործել հակահարթ ղեֆորմացիայի ղեպքում ունեցած հաշվարկները: Ցույց է տրվում, որ ասիմետրիկ մոտավորությամբ ստացված արդյունքների ամբողջությամբ համընկնում են հակահարթ ղեֆորմացիայի ղեպքում հայտնի արդյունքների հետ:

ON THE PROBLEM OF TORSION OF AXISYMMETRIC  
ELASTIC-PLASTIC SOLIDS WITH A CRACK

O. B. AGALARIAN

S u m m a r y

A problem of torsion of elastic-plastic axisymmetric solids, containing concentrators of stress, is studied.

A general method of solution permitting in some cases to use effectively the results obtained for antiplane strain is suggested. In asymptotic approximation the results are presented coinciding with the well-known data on antiplane strain.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейбер Л. Теория концентрации касательных напряжений в призматических телах при произвольной нелинейной зависимости между напряжением и деформацией. Прикл. механ., 1961, № 4.
2. Райс. Напряжения, обусловленные острым вырезом в упрочняющемся упруго-пластическом материале при продольном сдвиге. МП, 1967, 2.
3. Edmunds T. M. and Willis J. R. Analysis of a crack sited at a notch in an elastic-perfectly plastic strip subjected to longitudinal shear. Int. J. of Fracture, 1976, vol. 12, No. 3, pp. 419-433.
4. Кин J. R. A path independent integral and the appropriate analysis of strain concentration by notches and cracks. Trans. ASME, 1968, ser. E, vol. 35, No. 4.

Л. А. ШЕКЯН

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОЙ  
ТЕОРИИ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ  
ДЛЯ ШЕРОХОВАТЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ\*

Работа посвящена решению осесимметричной контактной задачи теории ползучести с учетом старения материала и поверхностной структуры контактирующих тел.

Плоская контактная задача нелинейной теории ползучести впервые была рассмотрена Н. Х. Арутюняном [1]. Затем, на основе идей работы [1] при аналогичных предположениях о свойствах материала рассмотрена пространственная контактная задача о вдавлении эллиптического, в частности, круглого в плане штампа в полупространство [2]. В указанных работах, в частности, предполагается, что поверхности контактирующих тел абсолютно гладкие. При исследовании контакта реальных поверхностей, имеющих шероховатость, это условие, очевидно, не выполняется. Несмотря на исключительно малые размеры неровностей, составляющих шероховатость, они оказывают существенное влияние на самые разнообразные эксплуатационные свойства деталей. Поверхности контактирующих тел в результате технологической обработки имеют весьма разнообразные формы, зависящие как от способа обработки, так и от физико-механических свойств материала. Поэтому при исследовании контакта реальных поверхностей встречается ряд трудностей, не позволяющих получить точное решение соответствующей контактной задачи.

Плоская контактная задача для шероховатых упругих тел впервые была рассмотрена в монографии И. Я. Штаермана [3], где шероховатость учтена согласно гипотезе о пропорциональности в каждой точке контактной зоны дополнительных локальных перемещений и нормальных контактных давлений. При этом предположении решение задачи сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода с логарифмическим ядром. Решая это уравнение другим методом и проводя эксперименты на оптически активных материалах, автор работы [4] отмечает, что эксперименты подтверждают теоретические выводы. В этой постановке затем были рассмотрены пространственные контактные задачи [5].

С другой стороны, многие экспериментальные исследования [6—9] показывают, что для многих деталей дополнительные локальные перемещения, которые обусловлены шероховатостью поверхностей соприкасающихся тел, в каждой точке контактной зоны пропорциональны некоторой степени контактных давлений. Такая степенная зависимость между сближением

\* Работа доложена на Всесоюзной конференции «Смешанные задачи механики деформируемого тела» в г. Ростове-на-Дону в сентябре 1977 г.

и давлением получается и в теоретических вычислениях [7—12], где шероховатости поверхностей моделируются набором конусов, пирамид, сфер и т. д., а деформации контакта принимаются упругими, пластическими или пластическими с упрочнением. Далее, рассматривая вероятность встречи выступов, в работе [12] изучено влияние обработки поверхностей на эту зависимость. Некоторые контактные задачи для шероховатых упругих тел при степенной зависимости между дополнительным перемещением и контактным давлением рассмотрены в работах [13—15]. При таком учете шероховатости поверхностей контактирующих тел в работе [16] решена плоская контактная задача для шероховатых твердых тел со степенным упрочнением материала.

В настоящей работе рассматривается осесимметричная контактная задача нелинейной теории неустановившейся ползучести с учетом шероховатости контактирующих тел. При этом шероховатость поверхностей контактирующих тел учитывается также по степенному закону. Задача математически формулируется в виде нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна. С помощью аппарата классических ортогональных многочленов Гегенблюэра решение этого уравнения сводится к решению бесконечной системы нелинейных алгебраических уравнений, исследование которой проводится на основе принципа сжимающих отображений. Получены численные результаты для контактных давлений и взаимного сближения тел.

§ 1. *Постановка задачи и вывод разрешающего интегрального уравнения.*

Предположим, что ползучесть материала описывается реологическим уравнением [1, 17]

$$AT^{\mu-1}(t)\varepsilon_{ij}(t) = (I - L)\varepsilon'_{ij}(t) \quad (1.1)$$

где  $A$  — физическая константа материала,  $\mu$  — показатель ползучести,  $T(t)$  — интенсивность деформации сдвига,  $\varepsilon'_{ij}(t)$  — компоненты деформации,  $\varepsilon'_{ij}(t)$  — дивенатор напряжений,  $L$  — интегральный оператор Вольтерра

$$Ly(t) = \int_0^t y(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\tau(t-\tau)}] \quad (1.2)$$

$\int$  — единичный оператор, а  $t$  — время.

С учетом всех основных предположений о свойствах материала [1] для вертикальных перемещений граничных точек абсолютно гладкого полупространства от нормального давления  $p(x, y, t)$  имеем [2]

$$w_z(x, y, t) = \frac{c(y)}{A^m} \left\{ (I - L) \int \int_{\Omega} \frac{p(u, v, t) du dv}{[(x-u)^2 + (y-v)^2]^{m-1/2}} \right\}^m \quad (1.3)$$

$$m = \frac{1}{\mu}$$

Здесь  $\Omega(t)$  — область контакта,  $c(\mu)$  — коэффициент, зависящий только от  $\mu$ , причем из результатов работ [2, 18] имеем  $c(1) = 1/4$ ,  $c(2/3) = 0$ ,  $c(\mu) > 0$  при  $2/3 < \mu \leq 1$ ,  $c(\mu) < 0$  при  $0 < \mu < 2/3$ . На основе этого примем, что для реальных тел  $2/3 < \mu \leq 1$ .

Далее, вследствие шероховатости поверхностей контактирующих тел в зоне контакта возникают дополнительные перемещения, которые, исходя из ряда экспериментальных и теоретических исследований [6—12], в каждой точке контактной зоны и в каждый момент времени примем пропорциональными некоторой степени нормального давления

$$w_1(x, y, t) = K [p(x, y, t)]^\alpha \quad (1.4)$$

Здесь  $K$  и  $\alpha$  определяются экспериментально, причем [9, 11, 12] число  $\alpha$  обычно лежит в пределах  $0.3 < \alpha \leq 1$ , а коэффициент  $K$  — в пределах от 4 до 129 мк, когда  $p(x, y, t)$  измеряется в  $\text{кг/мм}^2$ . Формула (1.4) справедлива в диапазоне  $0.01$ — $1.0 \text{ кг/мм}^2$  для  $p(x, y, t)$ . Отметим также, что с увеличением чистоты обработки поверхностей контактирующих тел числа  $\alpha$  и  $K$  уменьшаются.

Условие контакта приводит к разрешающему уравнению

$$c(\mu) [A_1^{-\mu} + A_2^{-\mu}] \left\{ (1-L) \int_0^1 \int_0^1 \frac{p(u, v, t) du dv}{[(x-u)^2 + (y-v)^2]^{1-\mu/2}} \right\}^\mu + \\ + K [p(x, y, t)]^\alpha = \delta(t) - f_1(x, y) - f_2(x, y) \quad (1.5)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — физические константы,  $\delta(t)$  — мера взаимного сближения тел,  $f_1(x, y)$  и  $f_2(x, y)$  — функции, описывающие поверхности контактирующих тел.

Поскольку рассматривается осесимметричная задача, можно положить

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) = f(r), \quad p(x, y, t) = p(r, t), \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}) \quad (1.6)$$

Тогда уравнение (1.5) примет вид

$$[p_0(\xi, t)]^\alpha + \left\{ (1-L) a_0^\alpha(t) \int_0^1 K(\xi, \tau) p_0(\tau, t) \tau d\tau \right\}^\mu = \delta_0(t) - f_0(\xi, t) \quad (1.7)$$

Здесь

$$K(\xi, \tau) = \int_0^{2\pi} (\xi^2 + \tau^2 - 2\xi\tau \cos \varphi)^{\mu-2} d\varphi, \quad \xi = \frac{r}{a(t)}, \quad \omega = \frac{r}{2} \quad (1.8)$$

$$p_0(\xi, t) = [A_1^{-\mu} + A_2^{-\mu}] p(r, t), \quad a_0(t) = \frac{c(\mu) a(t)}{K} [A_1^{-\mu} + A_2^{-\mu}]^\mu \quad (1.9)$$

$$\delta_0(t) = \delta(t) K^{-1} [A_1^{-\mu} + A_2^{-\mu}]^\mu, \quad f_0(\xi, t) = f(r) K^{-1} [A_1^{-\mu} + A_2^{-\mu}]^\mu \quad (1.10)$$

$a(t)$  — радиус круговой зоны контакта.

Далее, условие равновесия дает

$$2a_0^2(t) \int_0^1 p_1(\xi, t) \xi d\xi = P_0(t) \quad (1.11)$$

где

$$P_0(t) = \frac{c^2(t)}{2k^2} [A_1^{-m} + A_2^{-m}]^{m(1+2n)} P(t) \quad (1.12)$$

$P(t)$  — равнодействующая внешних сил.

Теперь, введя обозначение

$$q(\xi, t) = [\delta_0(t) - f_0(\xi, t) - p_0^m(\xi, t)]^2, \quad \forall \xi \in \frac{1}{2} \quad (1.13)$$

из (1.11) и (1.7) получим

$$2a_0^2(t) \int_0^1 [\delta_0(t) - f_0(\xi, t) - q^m(\xi, t)]^2 \xi d\xi = P_0(t) \quad (1.14)$$

$$q(\xi, t) = (I - L) a_0^2(t) \int_0^1 K(\xi, \tau) [\delta_0(t) - f_0(\tau, t) - q^m(\tau, t)]^2 \tau d\tau \quad (1.15)$$

Таким образом, решение задачи, когда  $a(t)$  наперед задано, приводится к определению  $q(\xi, t)$  и  $\delta_0(t)$  из нелинейного интегрального уравнения (1.15) и из условия (1.14). А если  $a(t)$  неизвестно, то, кроме (1.14) и (1.15), имеем еще условие непрерывности нормальных контактных давлений

$$p(u(t), t) = 0 \text{ или } \delta_0(t) = f_0(1, t) + q^m(1, t) \quad (1.16)$$

Отметим также, что когда  $a(t)$  задана и не зависит от  $t$ , то вместо (1.15) будем иметь

$$q(\xi, t) = a_0^2 (I - L) \int_0^1 K(\xi, \tau) [\delta_0(t) - f_0(\tau) - q^m(\tau, t)]^2 \tau d\tau \quad (1.17)$$

На основе формул 6.561(14) и 6.684(1) из [19] ядро  $K(\xi, \eta)$  представим в виде

$$K(\xi, \eta) = \frac{\pi \Gamma(\omega)}{2^{1-\omega} \Gamma(1-\omega)} \int_0^\infty x^{1-\omega} J_0(\xi x) J_0(\eta x) dx \quad (1.18)$$

где  $\Gamma(z)$  — гамма-функция Эйлера и  $J_0(z)$  — функция Бесселя.

С помощью формул 8.451(1) и 3.761(4, 9) из [19] получим

$${}_1K(\xi, \eta) = \frac{2^{\mu} \pi \Gamma(1-\mu)}{\Gamma^2(1-\mu)} \frac{1}{|\xi - \eta|^{1-\mu}} + R(\xi, \eta) \quad (1.19)$$

где  $R(\xi, \eta)$  — функция, выражающаяся формулой

$$R(\xi, \eta) = \frac{\gamma \pi \Gamma(\omega)}{2^{\omega} \Gamma(1-\omega)} \int_0^{\infty} x^{1-\omega} J_0(\xi x) J_0(\eta x) dx - \frac{2^{\mu} \pi \Gamma(1-\mu)}{\Gamma^2(1-\mu) |\xi - \eta|^{1-\mu}} \quad (1.20)$$

и регулярная при  $0 < \xi, \eta \leq 1$ . При  $\xi = \eta = 0$  эта функция имеет особенность вида

$$R(\xi, \eta) = O\{(\xi + \eta)^{\mu-1}\} \quad \text{при } \xi + \eta \rightarrow 0$$

Для решения интегрального уравнения (1.17) будем пользоваться спектральным соотношением\* [20]

$$\int_0^1 \frac{1}{|\xi - \eta|^{1-\mu}} (\eta - \eta^2)^{-\nu} \varphi_n(\eta) d\eta = \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(\xi), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.21)$$

где

$$\lambda_n = \frac{\Gamma(n) \Gamma(1-\mu) \sin \pi \omega}{\pi \Gamma(n-\mu)}$$

$$\varphi_n(\xi) = \frac{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right) \sqrt{(2n-1-\mu) \Gamma(n)}}{2^n \sqrt{\pi \Gamma(n-\mu)}} C_{n-1}^{\frac{1-\mu}{2}}(2\xi-1)$$

$C_n^{\alpha}(z)$  — многочлены Гегенбауэра.

§ 2. Сведение разрешающего интегрального уравнения к бесконечной системе нелинейных алгебраических уравнений и ее исследование.

Ограничимся рассмотрением частного случая, когда  $a_0(t) = a_0 = \text{const}$ . Тогда, обозначая

$$x_0 = z_0 \bar{z}_0 - 1, \quad \text{где } z_0 = a_0^{\frac{1}{2}} P_0^{-1}(t) \quad (2.1)$$

и представляя решение интегрального уравнения (1.17) в виде ряда

\* Здесь фактически применен способ сведения ассимметричной задачи к плоской задаче. Конечно, можно было бы непосредственно исходить из ассимметричной задачи соответствующей ядру (1.18), и для этого ядра использовать известное спектральное соотношение из работы [20], где фигурируют многочлены Якоби. Однако, при таком способе решения задачи, который и был использован нами сначала, исследованием полученной нелинейной бесконечной системы связано с определенными своеобразными трудностями. Поэтому применение метода ортогональных многочленов Якоби в разбираемой задаче представляет самостоятельный интерес и будет дано в дальнейшем.

$$\varphi(L, t) = h^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t) \lambda_n^{-1} \varphi_n(\xi), \quad h^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} \varphi_n^2(0) \quad (2.2)$$

из (1.14) и (1.17) известным способом получим бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений относительно  $\{x_n(t) = x_n|_{t=0}$

$$x_0 = \frac{1+x_0}{z_0} \left[ 2 \int_0^1 F(\xi, X) \xi d\xi \right]^{-1} - 1, \quad X = (x_0, x_1, \dots)$$

$$x_n = (I-L) \int_0^1 \Phi(\xi, X) \left[ \theta \varphi_n(\xi) - \frac{\lambda_n}{h a_0} \int_0^1 R(\xi, \eta) (\xi - \eta)^{-1} \varphi_n(\eta) d\eta \right] d\xi \quad (2.3)$$

$n = 1, 2, \dots$

где

$$F(\xi, X) = \left\{ \frac{1+x_0}{z_0} - f_0(\xi) - \left[ h^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\lambda_n} \varphi_n(\xi) \right]^2 \right\}^2$$

$$\theta = \frac{2^2 \pi \Gamma(1-\mu)}{\Gamma^2(1-\mu) h a_0} \quad (2.4)$$

Теперь перейдем к исследованию бесконечной системы (2.3), которое проводится на основе принципа неподвижной точки Банаха. С этой целью, как в [16], введем в рассмотрение  $(N+1)$ -мерное вещественное евклидово пространство  $E_{N+1}$ , метрика в котором дается формулой

$$\rho(X_N, Y_N) = \max_{\tau_0 \leq \tau \leq t} \sqrt{\sum_{n=0}^N [x_n(\tau) - y_n(\tau)]^2}$$

$$X_N = [x_0(t), x_1(t), \dots, x_N(t)], \quad Y_N = [y_0(t), y_1(t), \dots, y_N(t)] \quad (2.5)$$

Пусть  $S(O, R)$  — замкнутый шар в  $E_{N+1}$  с центром  $O = (0, 0, \dots, 0)$  и радиусом  $R$ . Рассмотрим в  $S(O, R)$  оператор  $Y_N = A(X_N)$ , определяемый формулами

$$y_0 = \frac{1+|x_0|}{z_0} \left[ 2 \int_0^1 \Phi(\xi, X_N) \xi d\xi \right]^{-1} - 1 \quad (2.6)$$

$$y_n = (I-L) \int_0^1 \Phi(\xi, X_N) \left[ \theta \varphi_n(\xi) - \frac{\lambda_n}{h a_0} \int_0^1 R(\xi, \eta) (\xi - \eta)^{-1} \varphi_n(\eta) d\eta \right] d\xi$$

$$n = 1, 2, \dots, N \quad (2.7)$$

где

$$\Phi(\xi, X_N) = \left| \frac{1 + |x_0|}{z_0} - f_0(\xi) - \left| h^{-1} \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{i_n} \varphi_n(\xi) \right| \right| \quad (2.8)$$

Пользуясь неравенством Коши-Буняковского для сумм и учитывая (2.2), получим

$$\left| h^{-1} \sum_{n=1}^N x_n(\tau) i_n^{-1} \varphi_n(\xi) \right| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^N x_n^2(\tau)} \sqrt{h^{-2} \sum_{n=1}^N i_n^{-2} \varphi_n^2(0)} \leq R \quad (2.9)$$

( $z_0 \leq \tau \leq t$ )

С помощью элементарного неравенства

$$||A|^n - |B|^n| \leq |z| |A - B| \max(|A|^{n-1}, |B|^{n-1}) \quad (2.10)$$

из (2.6), (2.8) и (2.9) получим, что если

$$P_0(t) > \alpha^2 (f_0 - R^m)^2, \text{ где } f_0 = \max_{0 \leq t \leq 1} f(\xi) \geq 0 \quad (2.11)$$

то

$$(z_0^{-1} - f_0 - R^m)^2 \leq \Phi(\xi, X_N) \leq (1 + R)^2 z_0^{-2}$$

$$0 \leq y_0 \leq \frac{z_1}{1 - z_1}, \text{ где } z_1 = z_0 [f_0 - R^m]^2 < 1 \quad (2.12)$$

Далее, из (2.7), на основе неравенства Бесселя, найдем

$$\sum_{n=1}^N y_n^2 \leq 2b^2 \int_0^1 [(I-L)\Phi(\xi, X_N)]^2 (\xi - \xi^2)^{-m} d\xi + \frac{2\alpha_0^{2n}}{h^2} \sum_{n=1}^N A_n^2(t) \quad (2.13)$$

где

$$A_n(t) = i_n (I-L) \int_0^1 \Phi(\tau, X_N) d\tau \int_0^1 R(\xi, \tau) (\xi - \xi^2)^{-m} \varphi_n(\xi) d\xi \quad (2.14)$$

$n = 1, 2, \dots$

Теперь, учитывая значение интеграла [19] (для  $n = 2, 3, \dots$ )

$$2 \int_0^1 (\tau - \tau^2)^{-m} \varphi_n(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{(\xi - \xi^2)^{-m}}{n-1} \left[ \sqrt{\frac{n(2n-1-m)}{(n-1)(2n+1-m)}} \varphi_{n-1}(\xi) + (1-2\xi) \varphi_n(\xi) \right] \quad (2.15)$$

• беря внутренний интеграл в (2.14) по частям, получим

$$A_n(t) = \frac{\lambda_n}{n-1} (I-L) \int_0^1 \Phi(\tau_n, X_N) d\tau \times \\ \times \int_0^1 \frac{\partial R(\xi, \tau)}{\partial \xi} (\xi - \xi^2)^{-\mu} [b_n \varphi_{n-1}(\xi) + (1-2\xi) \varphi_n(\xi)] d\xi \quad (2.16)$$

где  $b_n = [n(2n-1-\mu)]^{1/2} [(n-\mu)(2n+1-\mu)]^{-1/2}$ .

Далее, из (2.16) следует, что

$$A_n^2(t) \leq 2c_0^2 \left\{ \int_0^1 \left[ (I-L) \Phi(\tau_n, X_N) \frac{\partial R(\xi, \tau)}{\partial \xi} d\tau \right] (\xi - \xi^2)^{-\mu} \varphi_{n-1}(\xi) d\xi \right\}^2 + \\ + 2c_1^2 \left\{ \int_0^1 \left[ (I-L) \Phi(\tau_n, X_N) \frac{\partial R(\xi, \tau)}{\partial \xi} d\tau \right] (1-2\xi) (\xi - \xi^2)^{-\mu} \varphi_n(\xi) d\xi \right\}^2 \quad (2.17)$$

где

$$c_0 = \sup_{n=2,3,\dots,n-1} \frac{\lambda_n b_n}{n-1}, \quad c_1 = \sup_{n=2,3,\dots,n-1} \frac{\lambda_n}{n-1} \quad (2.18)$$

Наконец, опять при помощи неравенства Бесселя получим

$$\sum_{n=2}^N A_n^2(t) \leq 2(c_0^2 + c_1^2) \int_0^1 \int_0^1 \left[ (I-L) \Phi(\tau, X_N) \frac{\partial R(\xi, \tau)}{\partial \xi} d\tau \right]^2 (\xi - \xi^2)^{-\mu} d\xi$$

или

$$\sum_{n=2}^N A_n^2(t) \leq 2(c_0^2 + c_1^2) \max_{0 \leq \xi \leq 1} [(I-L) \Phi(\xi, X_N)]^2 \times \\ \times \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial R(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right|^2 d\tau (\xi - \xi^2)^{-\mu} d\xi \quad (2.19)$$

Кроме того, из (2.14) имеем

$$A_1(t) \leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq \xi \leq 1} [(I-L) \Phi(\xi, X_N)] \int_0^1 \int_0^1 |R(\xi, \tau)| (\xi - \xi^2)^{-\mu} \varphi_1(\xi) d\xi d\tau \quad (2.20)$$

Таким образом, учитывая (2.13), (2.19) и (2.20), получим

$$\sqrt{\sum_{n=1}^N y_n^2} \leq a_0^2 B(\mu) \max_{0 \leq \xi \leq 1} [(I-L) \Phi(\xi, X_k)] \quad (2.21)$$

где

$$\begin{aligned}
 B(\mu) = & \left( \frac{4(c_0^2 + c_1^2)}{h^2} \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right| d\eta \right)^2 (\xi - \xi^2)^{-\omega} d\xi + \\
 & + \frac{2c_1^2}{h^2} \left[ \int_0^1 \int_0^1 |R(\xi, \eta)| (\xi - \xi^2)^{-\omega} \varphi(\xi) d\xi d\eta \right]^2 + \\
 & - \frac{2^{1+2\mu} \pi^2 \Gamma^2(1-\mu)}{\Gamma^4(1-\omega) h^2} \left( \int_0^1 (\xi - \xi^2)^\omega d\xi \right)^{1/2}
 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Теперь с помощью (2.12), (2.21) и (2.5) получим

$$\begin{aligned}
 \rho(Y_N, 0) \leq r_0 \leq \max_{0 \leq t \leq 1} \left\{ \left| \frac{z_1(t)}{1 - z_1(t)} \right|^2 + \right. \\
 \left. + a_0^{2\mu} B^2(\mu) (1 + R)^{2\mu} z_0^{-2\mu}(t) [1 + C(t, \tau_0)]^2 \right\}^{1/2}
 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Отсюда следует, что если  $r_0 \leq R$ , то оператор  $Y_N = A(X_N)$  отображает замкнутый шар  $S(O, R)$  в себя

Пусть теперь

$$X_N^{(i)} = (x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \dots, x_N^{(i)}) \in S(O, R) \text{ и } Y_N^{(i)} = A(X_N^{(i)}), \quad i = 1; 2 \quad (2.24)$$

Тогда, используя (2.6), (2.10) и (2.12), получим

$$\begin{aligned}
 |y_0^{(1)} - y_0^{(2)}| \leq \frac{z_1}{(1 - z_1)^{1+\mu}} |x_0^{(1)} - x_0^{(2)}| + \\
 + \frac{m z_0 R^{m-1}}{(1 - z_1)^{1+\mu}} \sqrt{\sum_{n=1}^N (x_n^{(1)} - x_n^{(2)})^2}
 \end{aligned} \quad (2.25)$$

аналогично (2.21)

$$\sqrt{\sum_{n=1}^N (y_n^{(1)} - y_n^{(2)})^2} \leq a_0^\mu B(\mu) \max_{0 \leq t \leq 1} |(I - L)\{\Phi(\xi, X_N^{(1)}) - \Phi(\xi, X_N^{(2)})\}| \quad (2.26)$$

Теперь, учтя (2.10), (2.12) и (2.26), находим

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\sum_{n=1}^N (y_n^{(1)} - y_n^{(2)})^2} \leq a_0^\mu B(\mu) \left[ \frac{(1 + R)^{2-1}}{z_0^\mu} |x_0^{(1)} - x_0^{(2)}| + \right. \\
 \left. + \frac{R^{m-1}}{\mu} \sqrt{\sum_{n=1}^N (x_n^{(1)} - x_n^{(2)})^2} \right]
 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Наконец, из (2.25), (2.27) и (2.5) получим

$$\rho(Y_N^{(1)}, Y_N^{(2)}) \leq \varepsilon \rho(X_N^{(1)}, X_N^{(2)}) \tag{2.28}$$

$$\varepsilon = \max \left\{ \max_{\tau_0 \leq \tau \leq t} D_1(\tau); \max_{\tau_0 \leq \tau \leq t} D_2(\tau) \right\} \tag{2.29}$$

$$D_1(\tau) = \left\{ \frac{2z_1^2(\tau)}{[1-z_1(\tau)]^{2+2\alpha}} + \frac{2\alpha_0^2 B^2(\nu)}{z_1^2 z_1^2(\tau) (1+R)^{2-2\alpha}} [1+C(\tau, \tau_0)]^2 \right\}^{1/2}$$

$$D_2(\tau) = \left\{ \frac{2m^2 z_1^2(\tau) R^{2m-2}}{[1-z_1(\tau)]^{2+2\alpha}} + \frac{2\alpha_0^2 B^2(\nu)}{\nu^2 R^{2-2\alpha}} [1+C(\tau, \tau_0)]^2 \right\}^{1/2} \tag{2.30}$$

Из (2.28) следует, что если  $\varepsilon < 1$ , то оператор  $Y_N = A(X_N)$  в  $S(O, R)$  — сжимающий. Следовательно, согласно принципу сжимающих отображений [21], существует единственное решение системы уравнений  $X_N = A(X_N)$ , которое можно найти методом последовательных приближений, исходя из любого начального значения из  $S(O, R)$ . При помощи теоремы А. Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [22] можно доказать, что решение урезанной системы  $X_N = A(X_N)$  при  $N \rightarrow \infty$  совпадает с решением бесконечной системы (2.3).

Обозначая через  $X^* = (x_0^*, x_1^*, \dots)$  решение системы (2.3), из формул (2.1), (2.2) и (1.13) находим

$$z_0(t) = z_0^{-1}(t) [1 + x_0^*(t)]$$

$$p_0(\xi, t) = \left\{ z_0(t) - f_0(\xi) - \left[ h^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} x_k^*(t) \varphi_k(\xi) \right]^m \right\}^2 \tag{2.31}$$

Принимая, что условие (2.11) выполняется,  $r_0 \leq R$  и  $\nu < 1$ , можно, исходя из  $X^{(0)} = 0$ , по рекуррентным формулам  $X^{(i+1)} = A(X^{(i)})$ ,  $i = 0, 1, \dots$  найти  $X^*$ . В первом приближении будем иметь

$$z_0^{(1)}(t) = \left\{ 2 \int_0^1 [z_0(t) - z_0^2(t) f_0(\xi)]^2 z_0 d\xi \right\}^{-1/2}$$

$$x_0^{(1)}(t) = \left\{ \int_0^1 \left[ \varphi_n(\tau) + \frac{\lambda_n}{h\alpha_0} \right] R(\xi, \tau) (\xi - z_0^2)^{-n} \varphi_n(\xi) d\xi \right\} (I - L) [z_0^{-1}(t) - f_0(\tau)]^2 d\tau \tag{2.32}$$

С помощью (1.19) — (1.21) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} x_n^{(1)}(t) \varphi_n(\xi) = z_0^2(I - L) \int_0^1 [z_0^{-1}(t) - f_0(\tau)]^2 \tau K(\xi, \tau) d\tau \tag{2.33}$$

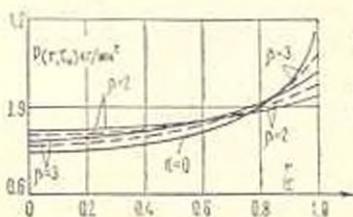
Для вычисления интеграла (2.33) можно пользоваться разложением [5, 20]

$$K(\xi, \eta) = \frac{2\Gamma(\omega)}{\Gamma(1-\omega)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(n+1-\omega)}{(2n+1-\omega)^2 \Gamma^2(n+1)} P_n^{\omega-1}(1-\xi) P_n^{\omega-1}(1-\eta) - 2\xi^{\omega} P_n^{\omega-1}(1-2\xi^{\omega})$$

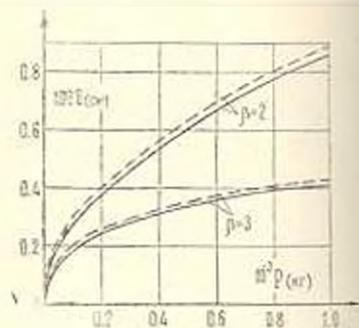
где  $P_n^{\omega}(z)$  — многочлены Якоби.

### § 3. Численный пример.

Рассмотрим задачу о давлении штампа с круглым в плане основанием на степенно упрочняющееся чугуиное полупространство. Тогда  $f(\xi) = 0$ ,  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = 10^5$  кг/см<sup>2</sup>. Считается, что поверхности тел определенным образом фрезерованные ( $\beta = 2$ ,  $K = 100$  мк) или полированные ( $\beta = 3$ ,  $K = 46.4$  мк). Вычисления, проведенные на ЭВМ «Найри-2», показывают, что в случае  $\beta = 2$  и  $\mu = 0.7$ , если принять  $R = 0.05$ ,  $a = 2$  см,  $i = 1$ ,  $P(t) = 10^5 H(t - \tau_0)$  кг, где  $H(t)$  — функция Хевисайда, рассматриваемый оператор в замкнутом шаре  $S(O, R)$  — сжимающий. При таких значениях параметров с помощью формул (2.3) и (2.31), принимая нуль в качестве нулевого приближения, методом последовательных приближений вычислены вторые приближения для контактных давлений и меры взаимного сближения. На фиг. 1 по результатам этих вычислений построены графики  $p(r, \tau_0)$ . Отметим, что при увеличении чистоты обработки поверхностей контактирующих тел, что соответствует возрастанию параметра  $\beta$ , давление в концах контактной области возрастает и в предельном случае абсолютно гладких тел приобретает традиционную особенность. Последнее обстоятельство имеет место также при возрастании  $\mu$ , когда  $\beta$  фиксировано.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

На фиг. 2 построены графики  $\delta(\tau_0)$  в зависимости от  $P(\tau_0)$ . На этих фигурах сплошные линии соответствуют случаю  $\mu = 0.7$ , а пунктирные — случаю  $\mu = 0.9$ .

Автор благодарит С. М. Мхитаряна за внимание к работе.

L. A. SHEKIAN

ԶԻԱՅՈՒՆԱՑՎԱՆՑ ՍՈՂՔԻ ՈՉ ԴՄԱՅԻՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ  
ԱՌՈՒՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԵՆԿԻՐԸ ԱՆՉԱՐԹ  
ՊԻՆԻ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՉԱՐՈՐ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Կիսարկվող խնդիրը բերվում է Համմերստեյնի տիպի ոչ գծային ինտեգրալ հավասարման լուծման. Գեգենբաուերի օրթոգոնալ բազմանդամների ապարատի օգնությամբ այդ հավասարման լուծումը բերվում է ոչ գծային հանրահաշվական անվերջ համակարգի: Վերջինիս ուսումնասիրությունը կատարվում է սեղմող արտապատկերումների սկզբունքի հիման վրա: Նշված է քննիթղիչ պարամետրի փոփոխման միջակայքը, որի դեպքում խնդիրը լուծումը կարելի է ստանալ հաջորդական մոտավորությունների մեթոդով:

Բերված է թվային օրինակ:

THE AXISYMMETRIC CONTACT PROBLEM IN THE  
NONLINEAR THEORY OF NONSTABILIZED CREEP  
FOR ROUGH SOLIDS

L. A. SHEKIAN

## S u m m a r y

The problem is reduced to the solution of Hammerstein's nonlinear integral equation. By the set of Gegenbauer's orthogonal polynoms the solution of this equation is reduced to that of the infinite system of nonlinear algebraic equations. This system is examined in terms of the principle of compressible transformations. The interval of variation in characteristic parameters, wherein the problem's solution may be found by the method of successive approximations, is defined. Numerical results are presented.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

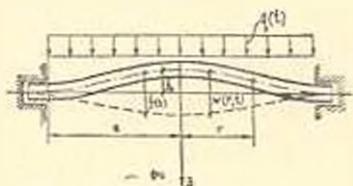
1. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
2. Кузнецов А. И. Вдавливание жестких штампов в полупространство при статическом упрочнении и при нелинейной ползучести материала. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3.
3. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостелмиздат, 1949.
4. Митрофанов Б. П. Влияние шероховатости на распределение напряжений по контактной площадке. Тбилиси, сб. «Жесткость стыков», 1966.
5. Попов Г. Я., Сивчук В. В. Контактная задача теории упругости при наличии круговой области контакта с учетом поверхностной структуры контактирующих тел. Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 3.
6. Соколовский А. П. Жесткость в технологии машиностроения. М., Машгиз, 1946.

7. Расчет контактных деформаций и отгибов направляющих. Установление форм направляющих на условиях жесткости. (Руководящие материалы). Под ред. Д. Н. Решетова. ОНТИ, 1963.
8. Решетов Д. Н., Левина Э. М. Расчет станков на контактную жесткость. Станки и инструменты. 1951, № 1.
9. Демкин Н. Б. Контактное состояние шероховатых поверхностей. М., «Наука», 1970.
10. Бобрин П. И. Связь микро- и макрогеометрии поверхностей, полученных механической обработкой. Труды МАТИ, вып. 15. Оборонгиз, 1952.
11. Рыжов Э. В. Основы расчета стыковых поверхностей деталей машины на контактную жесткость. М., «Машгиз», 1962.
12. Ling F. F. On Asperity Distributions of Metallic Surfaces. J. Appl. Physics, vol. 29, No. 8, 1958, pp. 1168—1174.
13. Рабинович А. С. Плоская контактная задача для шероховатых упругих тел. Изв. АН СССР, МТТ, 1974, № 3.
14. Рабинович А. С. Контактные задачи теории упругости для шероховатых тел. Автореф. канд. диссертации, МГУ, 1975.
15. Мартыненко М. Д., Романчик В. С. О решении интегрального уравнения контактной задачи теории упругости для шероховатых тел. ПММ, 1977, т. 41, вып. 2.
16. Мхитарян С. М., Шемян Л. А. Плоская контактная задача для двух шероховатых твердых тел, изготовленных из степенно-упрочняющихся материалов. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1977, т. 30, № 3.
17. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М., Гостехиздат, 1952.
18. Hurlbut K. The basic problem of a non-linear and non-homogeneous half-space. Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1959.
19. Гродштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
20. Попов Г. Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
21. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1972.
22. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М., изд. «Наука», 1924.

М. А. ЗАДОЯН, Г. В. ШАХАЗИЗЯН

## О НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ КРУГЛОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛИТЫ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассматривается вопрос несущей способности круглой шарнирно-оперной гибкой плиты с двухсторонними симметричными тонкими усиливающими покрытиями и с начальной погибью, направленной против осесимметрично-распределенной нагрузки  $q(t)$  (фиг. 1). Материал покрытий считается упругим, а для среднего слоя имеют место соотношения наследственной теории ползучести Маслова—Арутюняна [1].



Фиг. 1.

Потеря устойчивости в виде «хлопка» с учетом явления ползучести для металлической арки (балки) рассмотрена в работе [2]. Вопросам устойчивости при ползучести посвящены работы [3—9] и др. Подробная библиография и анализ работ в этой области даны в монографиях Ю. Н. Работнова [3—4] и Н. Хоффа [5].

1. Соотношения между внутренними силами и деформациями срединной поверхности плиты. Если принять гипотезу прямых нормалей

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r + \kappa_r z \quad (r, \theta) \quad (1.1)$$

где  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$  — деформации, а  $\kappa_r, \kappa_\theta$  — кривизны срединной поверхности плиты, напряжения в крайних слоях плиты определяются формулой

$$\sigma_{r_i} = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} [\varepsilon_r + \nu_i \varepsilon_\theta \pm (\kappa_r + \nu_i \kappa_\theta) z] \quad (r, \theta) \quad (1.2)$$

В бетонном слое имеем

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta + (\kappa_r + \nu \kappa_\theta) z] + \\ & + \int_{-h}^z \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta + (\kappa_r + \nu \kappa_\theta) z] R(t, \tau) dz \quad (r, \theta) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $R(t, \tau)$  — резольвента ядра ползучести

$$K(t, \tau) = -E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} - \nu(\tau) (1 - e^{-\nu(t-\tau)}) \right] \quad (1.4)$$

и имеет вид

$$R(t, \tau) = \frac{E'(\tau)}{E(\tau)} + \nu \nu'(\tau) E(\tau) - \frac{D(\tau)}{E(\tau)} \left[ E(\tau) e^{-\int_{\tau}^t \nu(z) dz} \right] \quad (1.5)$$

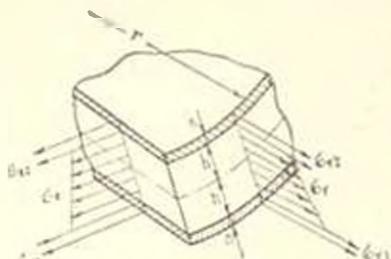
$$\nu(\tau) = \nu [1 - \varphi(\tau) E(\tau)], \quad D(\tau) = \nu^2(\tau) + \nu'(\tau) - \nu \nu''(\tau) \quad (1.5)$$

Для старого бетона  $\varphi(\tau) = C$ ,  $E(\tau) = E$  и будем иметь

$$R(t, \tau) = \tau e^{-\nu(t-\tau)}, \quad \nu = \nu EC \quad (1.6)$$

Для простоты толщину покрытия  $\Delta$  по отношению к толщине бетонного слоя считаем малой и напряжение в нем по высоте принимаем постоянным.

Из условий статики (фиг. 2) имеем



$$N_r = (\sigma_{r_0} + \sigma_{r_1}) \Delta + \int_{-h}^h \sigma_r dz$$

$$M_r = (\sigma_{r_0} - \sigma_{r_1}) \Delta h + \int_{-h}^h \sigma_r z dz \quad (r, \theta) \quad (1.7)$$

Фиг. 2

Используя выражения напряжений в слоях (1.2)—(1.3), из (1.7) получаем

$$N_r = A_0(\nu_r + \nu_{r_0}) - \int_{\tau}^t B_0(\nu_r + \nu_{r_0}) R(t, \tau) d\tau$$

$$M_r = A_1(\nu_r + \nu_{r_0}) - \int_{\tau}^t B_1(\nu_r + \nu_{r_0}) R(t, \tau) d\tau \quad (r, \theta) \quad (1.8)$$

где введены обозначения

$$A_0(t) = B_0(t) \nu_0(t), \quad B_0(t) = \frac{2E(t)h}{1-\nu^2}, \quad \nu_0 = 1 + \frac{1-\nu^2}{1-\nu_1^2} \frac{E_1 \Delta}{E(t)h}$$

$$A_1(t) = B_1(t) \nu_1(t), \quad B_1(t) = \frac{2E(t)h^2}{3(1-\nu^2)}, \quad \nu_1 = 1 + 3 \frac{1-\nu^2}{1-\nu_1^2} \frac{E_1 \Delta}{E(t)h} \quad (1.9)$$

Между компонентами перемещения и деформациями срединной поверхности плиты имеются зависимости

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 - \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \right], \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

$$\gamma_{rz} = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \gamma_{\theta z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \quad (1.10)$$

Здесь  $w_0(r)$  — начальная заданная погибь,  $w(r, t)$  — прогиб от воздействия внешних сил, а  $w_{\Sigma} = w_0 + w$ .

Краевые условия плиты будут

$$N_r = 0, \quad w' = 0, \quad \frac{\partial w'}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = a$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 0$$
(1.11)

В дальнейшем для упрощения принимаем, что коэффициенты Пуассона для бетона и усиливающих слоев равны  $\nu_1 = \nu$ .

2. *Вариационное уравнение задачи.* Согласно принципу возможных перемещений имеем

$$\int_0^a (N_r \delta e_r + N_s \delta e_s + M_r \delta \kappa_r + M_s \delta \kappa_s) r dr - \int_0^a q_1 \delta w r dr = 0 \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) эквивалентно дифференциальному уравнению равновесия нормальных сил

$$\frac{\partial}{\partial r} (r N_r) - N_s = 0 \quad (2.2)$$

и вариационному уравнению

$$\int_0^a \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r M_r) - \frac{\partial M_s}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r N_r \frac{\partial w_r}{\partial r} \right) + q_1 r \right] \delta w dr = 0 \quad (2.3)$$

Вводя функцию напряжений  $\Phi(r, t)$ ,

$$N_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad N_s = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \quad (2.4)$$

из (1.8) и (1.10) находим

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Phi) = - \frac{1-\nu^2}{2r} \left[ A_2 \left| \left( \frac{\partial w_{\Sigma}}{\partial r} \right)^2 - \left( \frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^2 \right| - \int_0^1 B_2 \left| \left( \frac{\partial w_{\Sigma}}{\partial r} \right)^2 - \left( \frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^2 \right| R(t, \tau) d\tau \right] \quad (2.5)$$

Подставляя выражения  $M_r$  и  $M_s$  из (1.8) в (2.3) и преобразуя с учетом крайних условий (1.11), получим

$$\int_0^a \left[ A_1 \nabla^2 \nabla^2 w - \int_0^1 B_1 \nabla^2 \nabla^2 w R(t, \tau) d\tau - q_1 \right] r dr = 0$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial w_r}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = 0 \quad (2.6)$$

Положим

$$w_0 = f_0 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2, \quad w = f(t) \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2 \quad (2.7)$$

где  $f_0$  — заданная начальная погибь в середине плиты, а  $f(t)$  — неизвестный, изменяющийся во времени прогиб в середине плиты.

Подставляя (2.7) в (2.5) и производя необходимые выкладки с учетом краевых условий, получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{1-\nu^2}{\alpha r} \left[ A_0(f^2 - 2f_0 f) - \int_0^t B_0(f^2 - 2f_0 f) R(t, \tau) d\tau \right] F(r) \quad (2.8)$$

где

$$F(r) = 3 \frac{r^2}{a^2} - 6 \frac{r^4}{a^4} + 4 \frac{r^6}{a^6} - \frac{r^8}{a^8}$$

Далее, внося (2.7) и (2.8) в (2.6), интегрируя и вводя обозначения

$$w(t) = f(t)/f_0, \quad q(t) = q_1(t) E, \quad \xi = f_0^2 2h \quad (2.9)$$

получим нелинейное интегральное соотношение для определения  $w$

$$\begin{aligned} a_1 w + a_0 (w^3 - 3w^2 + 2w) = q + \beta_1 \int_0^t R(t, \tau) d\tau + \\ + \beta_2 (w - 1) \int_0^t (w^2 - 2w) R(t, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_1(t) = \beta_1 \gamma_1(t), \quad \gamma_2(t) = \beta_2 \gamma_0(t) \\ \beta_1 = \frac{16\xi}{3(1-\nu^2)} \left( \frac{2h}{a} \right)^4, \quad \beta_2 = \frac{6\pi}{7} \xi^3 \left( \frac{2h}{a} \right)^4 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Полученное уравнение (2.10) сводится к системе нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра

$$\begin{aligned} a_1 w + (w - 1) \beta = q + \beta_1 \int_0^t w R(t, \tau) d\tau \\ \beta_2 (w^2 - 2w) = \beta + \beta_2 \int_0^t (w^2 - 2w) R(t, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $\psi(t)$  наряду с  $\omega(t)$  определяют характер движения плиты во времени вследствие ползучести бетона.

3. *Критическое время плиты.* За критерий потери несущей способности принимаем условие безграничного возрастания скорости прогиба ( $\omega \rightarrow \infty$ ). Соответствующий момент времени  $t = T$  при данной нагрузке  $q$  называется критическим временем конструкций.

Принимая для простоты  $q(t, t) = q - \cos \psi t$  и рассматривая случай старого бетона (1.6), из (2.10) дифференцированием по  $t$  получим

$$\left[ a_1 + a_2(3\omega^2 - 6\omega + 2) + i\beta_0 \int_0^t (\omega^2 - 2\omega) e^{-\nu(t-\tau)} d\tau \right] \frac{\nu}{\nu} =$$

$$= q - A\nu - B(\omega^2 - 3\omega^2 + 2\omega) \quad (3.1)$$

где  $\nu = \omega$ ,

$$A = \frac{16\beta_0}{3(1-\nu^2)} \left( \nu_1 - \frac{\lambda}{\tau_1} \right), \quad B = \frac{6}{7} \beta_0 \left( \nu_2 - \frac{\lambda}{\tau_2} \right) \quad (3.2)$$

Обозначая начальные значения  $\omega$  и  $\nu$  при  $t = \tau_1$  через  $\omega_0$  и  $\nu_0$ , из (2.10) и (3.1) находим

$$a_1 \omega_0 + a_2(\omega_0^2 - 3\omega_0^2 + 2\omega_0) = q$$

$$\tau_0 = \tau_1 \frac{q - A\omega_0 - B(\omega_0^2 - 3\omega_0^2 + 2\omega_0)}{a_1 + a_2(3\omega_0^2 - 6\omega_0 + 2)} \quad (3.3)$$

Определим значение  $q = q_0$ , при котором потеря несущей способности («хлопок») происходит в начальный момент  $T = \tau_0$ . Приравняв нулю знаменатель  $\tau_0$  из (3.3), получим соответствующее значение относительного прогиба

$$\omega_{00} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{\beta_0^2}{\tau^2}} \quad (3.4)$$

где

$$\beta_0 = \frac{\sqrt{56}}{3} \sqrt{\frac{\nu_0}{(1-\nu^2)\nu_0}} \quad (3.5)$$

Из формул (3.4) следует, что для явления «хлопка» необходимо, чтобы параметр удовлетворял условию  $\frac{\beta_0}{\tau} > \frac{\beta_0}{\tau_0}$ . Подставляя значение  $\omega_{00}$  из (3.4) в первое уравнение (3.3), находим значение  $q_0$ , при котором в начальный момент  $t = \tau_0$  происходит хлопок

$$q_0 = a_1 \omega_{00} + a_2(\omega_{00}^2 - 3\omega_{00}^2 + 2\omega_{00}) \quad (3.6)$$

Индексом (\*) обозначим величины, соответствующие значению  $t \rightarrow \infty$ . Применяя правило Лопиталья, из (2.10) и (3.1) находим

$$A\omega_x + B(\omega_x^3 - 3\omega_x^2 + 2\omega_x) = q$$

$$v_x = \frac{q - A\omega_x - B(\omega_x^3 - 3\omega_x^2 + 2\omega_x)}{\epsilon_1 + \epsilon_2(3\omega_x^2 - 6\omega_x + 2) - \beta_2 \frac{\lambda}{\gamma} (\omega_x - 2\omega_0)} \quad (3.7)$$

Приравнявая нулю знаменатель  $v_x$ , находим значение  $\omega_{x0}$ , при котором возможен хлопок ( $t \rightarrow \infty$ )

$$\omega_{x0} = 1 + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \sqrt{\frac{\epsilon_2^2 - \epsilon_1^2}{2\epsilon_2^2 + \epsilon_1^2}} \quad (3.8)$$

где

$$\epsilon_x = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\gamma}}} \quad (3.9)$$

Очевидно, для возможности хлопка при  $t \rightarrow \infty$  необходимо условие  $i > i_x$ . Подставляя значение  $\omega_x$  из (3.8) в выражение  $q$  из (3.7), находим значение  $q_x$ , при котором хлопок «происходит» в бесконечности ( $t \rightarrow \infty$ ):

$$q_x = A\omega_{x0} + B(\omega_{x0}^3 - 3\omega_{x0}^2 + 2\omega_{x0}) \quad (3.10)$$

При  $q < q_x$ , как видно из формулы (3.7), скорость прогиба плиты в течение времени затухает ( $v \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ).

Значение  $q$ , определяемое по формуле (3.10), будет верхним значением «безопасной» нагрузки в смысле исчерпания несущей способности плиты. Для значения, находящегося между  $q_0$  и  $q_x$ , существует критическое время, когда происходит потеря несущей способности в виде «хлопка».

Исключая интеграл из (2.10) и (3.1), приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\omega} = v$$

$$\dot{v} = \gamma v + m(\omega) v^2 + n(\omega) v^3 \quad (3.11)$$

Здесь введены обозначения

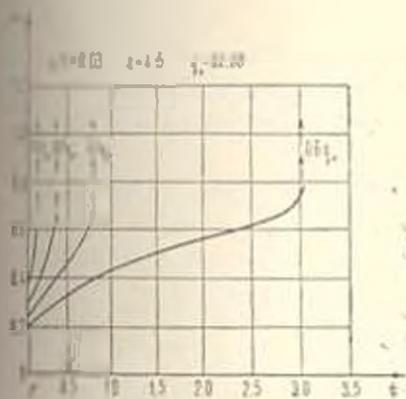
$$m(\omega) = [S_1 \omega (2 - \omega) - S_2] [q - A\omega - B(\omega^3 - 3\omega^2 + 2\omega)]^{-1}$$

$$n(\omega) = S_1 (1 - \omega) [q - A\omega - B(\omega^3 - 3\omega^2 + 2\omega)]^{-1} \quad (3.12)$$

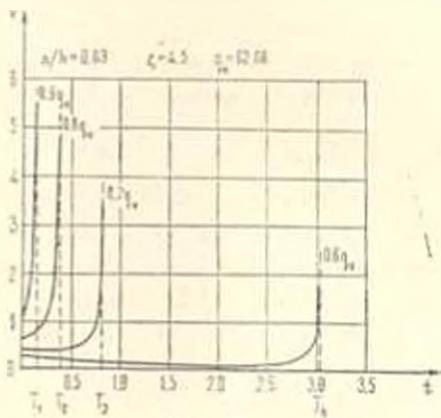
$$S_0 = \frac{36}{7} \frac{\mu}{\gamma} i^3, \quad S_1 = \frac{12}{7} \left( 3\mu_0 - 2 \frac{\lambda}{\gamma} \right) i^3$$

$$S_2 = \frac{16i}{3(1-\nu^2)} \left( 2\mu_1 - \frac{\lambda}{\gamma} \right) + \frac{12}{7} \left( 2\mu_0 - \frac{\lambda}{\gamma} \right) i^3 \quad (3.13)$$

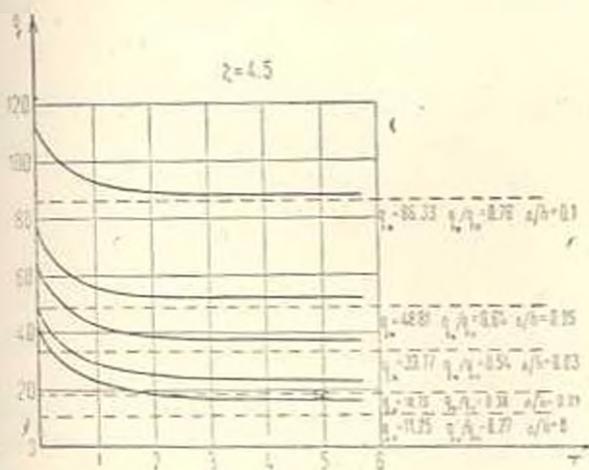
На основании численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (3.11) с начальными условиями (3.3) при значениях параметров  $\xi_1 = 2 \cdot 10^4$  кг/см<sup>2</sup>,  $E = 2 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>,  $C = 0.9 \cdot 10^{-5}$  см<sup>2</sup>/кг,  $\nu = 0.3$ ,  $\gamma = 0.026$  1/день,  $\Delta/h = 0.03$ ,  $\zeta_0 = 4.5$ , произведенного на ЭВМ „Наири-2“, построены графики  $\sigma(t)$  и  $\psi(t)$  от момента  $\tau_1$  до  $T$  (фиг. 3, 4). На



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

фиг. 5 построен график зависимости  $q$  от  $T$  для различных значений  $\Delta/h$ . Из графиков заключаем, что с увеличением толщины усиливающего слоя  $\Delta$  увеличиваются  $q_0$ ,  $q_1$  и  $q_2$ .

Կ. Ա. ՋԱԳՈՅԱՆ, Ի. Բ. ՇԱՀԱԶԻԶԻԱՆ

## ԵՌԱՇԵՐՏ ԿՈՐ ՍԱԼԻ ԿՐՈՂՈՒՆԱԿՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ ՍՈՂՔԻ ԳԵՊՔՈՒՄ

## Ա մ փ ո վ ո ո մ

Հողվածում ուսումնասիրվում է լայնական բախշված բեռին հակառակ ուղղված սկզբնական ճկվածքով եռաշերտ կլոր սալի կայունության խնդիրը:

Արտաքին շերտերի նյութը ընդունվում է առաձգական, իսկ միջին շերտը համար հաշվի է առնվում սողքը ըստ Մասլով-Հարությունյանի ժառանգական տեսության:

Օգտվելով լազրանժի վարիացիոն հավասարումից, ներմուծելով լարումների  $\Phi(r, t)$  ֆունկցիան, խնդրի լուծումը բերվում է Կոլտերի տիպի ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի, որից ստացվում է փոփոխական գործակիցներով դիֆֆերենցիալ հավասարումների սիստեմ:

Քվային ինտեգրման միջոցով կառուցված են  $w(t)$ ,  $v(t)$  և  $q(T)$  ֆունկցիաների գրաֆիկները տարբեր ղեպերի համար:

Ակնթարթային ( $t = \tau_1$ ) և երկարատև ( $t \rightarrow \infty$ ) կայունության ղեպերում, հավասարաչափ բախշված հաստատուն բեռի ( $q_0$ ) և կրիտիկական ինտենսիվությունից որոշման համար ստացված են անալիտիկ արտահայտություններ:

## ON SUPPORTING POWER OF A ROUND THREE-SHEET PLATE UNDER CREEP

M. A. ZADOYAN, H. B. SHAHAZIZIAN

## S u m m a r y

The problem on stability of a round three-sheet plate with initial deflection opposite to a transverse load is discussed.

The material of outer sheets is thought to be elastic and for the medium sheet the creep is considered in terms of the Maslov-Arutunian theory.

By using Lagrange's variational equation and introducing the tension function  $\Phi(r, t)$ , the problem is reduced to a system of nonlinear integral equations of the Volter type. From this a system of differential equations is obtained with variable ratios depending on a relative deflection.

By numerical integration the diagrams  $w(t)$ ,  $v(t)$  and  $q(T)$  are constructed for various cases.

On determining the critical intensity  $q_0$  and  $q_k$  of continuous load the analytic expressions are obtained with instant ( $t = \tau_1$ ) and continuous stability ( $t \rightarrow \infty$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М., ГИТТЛ, 1952.
2. Ryan T. H. H. Steer buckling of curved beam under lateral loading. Proc. 3-rd U. S. Nat. Congt. Appl. Mech., N. Y., 1958.
3. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкции. М., «Наука», 1966.
4. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М., «Наука», 1977.
5. Хофф Н. Продольный изгиб и устойчивость. М., ИЛ, 1955.
6. Бувакин А. А. Устойчивость тонкостенных стержней с учетом ползучести материала. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат., ест. и техн. наук, 1953, т. 6, № 2.
7. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
8. Рязанский А. Р. Устойчивость при ползучести. Пробл. устойч. в строит. мех. Тр. Всесоюзн. конф. по пробл. устойч. М., изд. «Строительство», 1965.
9. Вильмир Л. С. Устойчивость упругих систем. М., Физматгиз, 1963.
10. Задоян М. А. Смешанное вариационное уравнение нелинейно-ползучего тела и задача выпучивания призматического стержня. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1968, т. 21, № 2.
11. Задоян М. А. Применение вариационных методов теории ползучести при расчете изгибаемых элементов. Изв. АН Арм. ССР, сер. техн. наук, 1975, т. 26, № 3.

В. И. МАЛЫИ, О. М. КОЧИН, Н. С. ГУСЯТИНСКАЯ,  
 В. И. КОЗЛОВ, Ю. Н. КОРОБКИН

### ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ФОРСИРОВАННЫХ УСТАЛОСТНЫХ ИСПЫТАНИЙ КОНСТРУКЦИЙ

В работе [1] на основе анализа общей структуры выражения для кривых Велера конструкций, ведущих себя линейно при изменении действующих нагрузок, предлагается определять величину параметра форсирования  $F(N_1, N)$  натуральных ускоренных испытаний конструкций на усталость согласно соотношениям

$$F(N_1, N) = \max_q k_q(N_1, N), \quad k_q(N_1, N) = \frac{\sigma_q^*(N_1)}{\sigma_q^*(N)} \quad (1.1)$$

или

$$F(N_1, N) = \max_{q, P} k_o(N_1, N, P), \quad k_o(N_1, N, P) = \frac{\sigma_q^*(N_1, P)}{\sigma_q^*(N, P)} \quad (1.2)$$

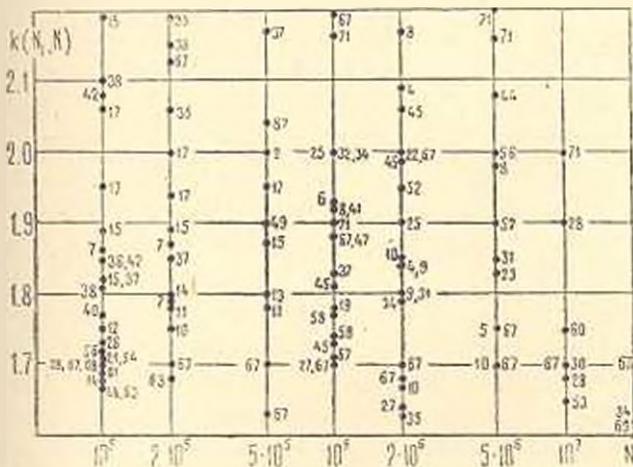
в которых набор кривых Велера  $\sigma_q^*(N)$ ,  $q = 1, 2, \dots$  или набор кривых  $\sigma_q^*(N, P)$ ,  $q = 1, 2, \dots$  равной вероятности разрушения  $P$  должен быть достаточно полным, чтобы описать все ожидаемые случаи усталостного разрушения используемых в конструкции материалов. При этом форсированным испытанием с параметром форсирования  $f$  называется усталостное испытание конструкции с увеличенными в  $f$  раз по сравнению с нормальным режимом величинами амплитуд внешних нагрузок. Испытуемые конструкции предполагаются линейными в том смысле, что при пропорциональном изменении режима циклического нагружения амплитуды напряжений во всех элементах конструкции должны изменяться пропорционально параметру  $f$ , а также простыми в том смысле, что и в нормальном, и в форсированном режимах не возникает других видов разрушения, кроме усталостного. При использовании определений (1.1) или (1.2) можно утверждать [1], что если при испытании в форсированном режиме с параметром форсирования  $f = F(N_1, N)$  долговечность конструкции окажется не ниже  $N_1$ , то ее долговечность в нормальном режиме будет не ниже  $N$ , или, соответственно, если в форсированном режиме разрушение в какой-либо точке  $r$  конструкции происходит с вероятностью  $P$ , при  $N_1$  циклах, то в нормальном режиме вероятность разрушения  $P$  в точке  $r$  при  $N$  циклах будет меньше  $P_1$ .

Практически функцию  $F(N_1, N)$  можно достаточно надежно определить, обработав все доступные опубликованные кривые Велера и кривые равной вероятности разрушения для различных конструкционных мате-

риалов в разнообразных состояниях и условиях эксплуатации и определив для них корреляционные отношения  $k_0(N_1, N)$  или  $k_1(N_1, N, P)$ .

Показано [1], что определенные таким образом значения параметра форсирования  $F(N_1, N)$  в общем случае линейных конструкций уже нельзя уменьшить без потери надежности сформулированных выше выводов из результатов форсированных испытаний.

По описанной методике было обработано более 3000 экспериментальных кривых Велера и кривых равной вероятности разрушения из 260 монографий и статей по усталости. Максимальные из полученных значений корреляционных отношений  $k(N_1, N)$  представлены на фиг. 1, 2 и 3, соответственно, для трех значений коэффициента форсирования  $N/N_1 = 10.5$  и 2 и различных  $N$ .



Фиг. 1. Максимальные значения корреляционных отношений  $k(N_1, N)$  кривых Велера при  $N/N_1 = 10$ .

Цифры рядом с точками на фигурах указывают порядковый номер источника в списке литературы [2—71], где описана экспериментальная кривая усталости, для которой получено данное значение корреляционного отношения.

Необходимо отметить, что данных о кривых равной вероятности усталостного разрушения  $\sigma^*(N, P)$  опубликовано значительно меньше, чем данных о кривых Велера  $\sigma^*(N)$ . Однако, имеющиеся данные говорят о том, что кривые  $\sigma^*(N, P)$  при различных  $P$  и кривая Велера всегда близки по форме и характеризуются близкими значениями корреляционных отношений.

Поэтому два определения (1.1) и (1.2) параметра форсирования  $F(N_1, N)$ , практически, оказались эквивалентными. Например, даже при таком большом различии кривых  $\sigma^*(N, P)$  для различных  $P$ , как это наблюдалось при испытаниях стыковых соединений из алюминиевого сплава при пульсирующем растяжении [67], значения корреляционных отношений  $k(N_1, N, P)$  не зависят от  $P$  и совпадают с  $k(N_1, N)$  для соответствующей кривой Велера.



2) для образцов с сильными концентраторами, для образцов большого размера, для хромированных, никелированных образцов и образцов с другими покрытиями в условиях фреттинга при наличии сварных швов (особенно с несправками) в случаях натуральных испытаний конструкций и их узлов  $k(N_1, N)$  достигают более высоких значений (например, до  $1.7 - 2.2$  при  $N = 10 N_1$ );

3) при воздействии коррозионных сред и высоких температур встречаются и более высокие значения  $k(N_1, N)$ , однако они на фигурах не приводятся, так как эти специфические условия испытания в данной работе не рассматривались.

Для больших  $N > 10^7$  циклов использованные литературные данные явно менее полны в смысле охвата разнообразных условий эксплуатации конструкционных материалов, и здесь необходимы дальнейшие исследования.

При  $N \leq 10^7$  циклов полученные результаты позволяют рекомендовать использовать независимо от  $N$  для параметра форсирования  $F(N_1, N)$  ускоренных испытаний значения 2.2, 1.87 и 1.35, соответственно для значений коэффициента форсирования  $N/N_1 = 10, 5$  и 2.

При проведении форсированных испытаний для  $N/N_1$ , отличных от этих значений, можно пользоваться интерполяционной формулой

$$F(N_1, N) = 1 + 1.21g \frac{N}{N_1}$$

которая при  $N/N_1 = 10, 5$  и 2 дает значения  $F(N_1, N) = 2.2, 1.84$  и 1.36, соответственно, которые несущественно отличаются от полученных выше.

Отметим в заключение, что в общем случае линейной простой конструкции, то есть без привлечения какой-либо дополнительной информации о конкретной испытываемой конструкции, нельзя использовать более низкие значения параметра форсирования  $F(N_1, N)$ , чем значения, установленные в данной работе на основе соотношений (1.1) и (1.2). В противном случае будут существовать конкретные примеры конструкций [1], для которых погрешность ускоренного определения долговечности будет идти не в запас прочности.

Всесоюзный научно-исследовательский институт  
 физико-технических и радио-технических  
 измерений

Поступила 12 XII 1977

Վ. Ի. ԱՄԻՐ, Ս. Մ. ԿՈՉԻՆ, Ն. Ս. ԳՈՐԵՆՆԻՆՍԿԻՆ,  
 Վ. Ի. ԿՈՉԼՈՎ, Յու. Ն. ԿՈՐՈՐԿԻՆ

ԿՈՄՍՏՐՈՒԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՐԱԿՈՅՎԱԾ ՀՈԳՆԱՄԱՅԻՆ ՓՈՐՁԱՐԿՈՒՄՆԵՐԻ  
 ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ԿՆՐԱՔԵՐՅԱԿ: ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ ՊՐՈՔԵՄՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Մշակվել է 3000-ից ավելի ՎԻԵՐԻ կորերը և շահագործման տարբեր պայ-  
 մաններում տարբեր կոնստրուկցիոն նյութերի բայրալման հաժախար հաժա-

նականությունը նկարագրող կորերը: Որոշվել են կորելյացիոն հարաբերությունները, որոնցով բնորոշվում են հոգնածություն կորերի թերությունները ցիկլերի թվի փոփոխության տարբեր միջակայքերի վրա:

Ստացվել է կոնստրուկցիաների արագացված հոգնածային փորձարկումների պարամետրերի որոշման համար արտահայտությունը այնպիսի մեթոդով, որը թույլ է տալիս ներքևից փստահելի ձևով զննահատել բռնի տրված լայնույթների զնայրում կոնստրուկցիայի հարատևողությունը:

## ON DETERMINATION OF PARAMETERS FOR FORCED FATIGUE TESTS OF CONSTRUCTIONS

V. I. MALY, O. M. KOCHIN, N. S. GUSIATINSKAIA,  
V. I. KOZLOV, Y. N. KOROBKIN

### S u m m a r y

More than 3000 Veler curves for various constructional materials have been analyzed under varying operating conditions. The dependence of the slope of fatigue curves on the number of cycles has been established. A relation to determine parameters for the forcing of accelerated fatigue construction tests has been obtained.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Маламь В. И. Об ускоренных усталостных испытаниях конструкций. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1978, т. XXXI, № 5.
2. Баранова Н. Б. О связи прочности материалов и детали при действии статически, циклических и ударных нагрузок. В кн. «Усталость металлов». М., Изд. АН СССР, 1960.
3. Баранова Н. Б. Применимость новых критериев усталости для построения кривых выносливости. В кн. «Прочность металлов при переменных нагрузках». Материалы III-го совещания по усталости металлов, 5—9 марта 1962. М., Изд. АН СССР, 1963.
4. Божин М. Я. Об упрощении формы образцов для испытаний металлов на усталость. Заводская лаборатория, 1959, № 11.
5. Беляев Г. С. Повышение выносливости соединения втулка-вал с клеевой пленкой. Вестник машиностроения, 1971, № 5.
6. Бернштейн М. А., Жидом В. Т., Хенстер К. Э. Влияние высокотемпературной термомеханической обработки на циклическую прочность рессорной стали 50ХГА. Проблемы прочности, 1973, № 12.
7. Бойцов Б. В. Статистический анализ точности метода ускоренных испытаний. Заводская лаборатория, 1972, № 9.
8. Быков В. А. Исследование усталости стали при плоском чистом изгибе. В кн. «Некоторые вопросы усталостной прочности стали». Под. ред. Н. Н. Давидсонской. М.—Л., Машгиз, 1953.
9. Быков В. А., Всеволодов Г. Н. Выносливость и пластичность металлов. В кн. «Прочность металлов при переменных нагрузках». Материалы III-го совещания по усталости металлов, 5—9 марта 1962. М., Изд. АН СССР, 1963.
10. Ваганяц Р. Д. К общей теории и к методике оценки масштабного эффекта при циклическом нагружении. Заводская лаборатория, 1960, № 9.

11. Вязлов Р. Д. Статистические и детерминистские закономерности усталости и возможность их моделирования. В кн. «Вопросы механической усталости». Под ред. С. В. Серенсена. М., Машиностроение, 1964.
12. Вязлов Р. Д., Фридман Я. Б. О влиянии типа нагружения на усталостную прочность. Заводская лаборатория, 1961, № 2.
13. Вязлов Р. Д. О распространении усталостных трещин в образцах судостроительной стали. Заводская лаборатория, 1959, № 6.
14. Воеводин Г. Н. О развитии трещины усталости. В кн. «Циклическая прочность металлов». Материалы II-го совещания по усталости металлов, 24—27 мая 1960, М., Изд. АН СССР, 1962.
15. Гаслиц У. Дж. Влияние на усталость стандартной технологии самолетостроения. В кн. «Усталость и выносливость металлов». Под ред. Г. В. Ужика. М., ИЛ, 1963.
16. Гаслиц У. Дж. Влияние частоты циклов нагружения на прочность металлов. В кн. «Усталость и выносливость металлов». Под ред. Г. В. Ужика. М., ИЛ, 1963.
17. Гаслиц У. Дж. Развитие трещин усталости. В кн. «Усталость и выносливость металлов». Под ред. Г. В. Ужика. М., ИЛ, 1963.
18. Гоянов Б. А., Каплинский А. А. Исследование влияния температуры, асимметрии цикла и концентрации напряжений на усталостную прочность стали ЭИ 726(1X14H18B2Br1). Проблемы прочности, 1971, № 9.
19. Гуревич Б. Г. Повышение несущей способности борированной стали и азотированного титанового сплава обкаткой роликом. Вестник машиностроения, 1972, № 1.
20. Гуревич С. Е. Влияние упрочнения поверхностного слоя концентратора напряжений на циклическую прочность. В кн. «Прочность металлов при циклических нагрузках». Материалы IV совещания по усталости металлов, 14—17 марта 1966, М., Наука, 1967.
21. Гуревич С. Е., Елидолич А. Д. Структурная повреждаемость стали в процессе усталости. В кн. «Прочность металлов при циклических нагрузках». М., Материалы IV совещания по усталости металлов, 14—17 марта 1966, М., Наука, 1967.
22. Гурьев А. В., Гохберг Я. А., Поляков В. Н. Упрочнение биметаллических деталей поверхностным пластическим деформированием. Вестник машиностроения, 1973, № 2.
23. Дмитриченко С. С., Хазанов Х. И., Филогов Э. Я., Давыдов А. П., Черкашин А. С. Стендовые испытания сварных рам на усталость. Вестник машиностроения, 1973, № 2.
24. Емичков Л. Н. К исследованию закономерностей процесса усталостного разрушения алюминиевых сплавов в связи с частотой нагружения. Заводская лаборатория, 1970, № 10.
25. Ефимов А. С., Морозов Б. А. О применении ускоренных методов к определению пределов выносливости крупных деталей. Заводская лаборатория, 1969, № 7.
26. Иванова В. С. Усталостное разрушение металлов. М., Металлургиядат, 1963.
27. Иванова В. С., Гуревич С. Е. Экспериментальная проверка ускоренного метода определения предела усталости. В кн. «Циклическая прочность металлов». Материалы II-го совещания по усталости металлов, 24—27 мая 1960, М., Изд. АН СССР, 1962.
28. Иванова В. С., Дерягин Г. А., Терентьев В. Ф. Повышение циклической прочности сплава Д16Т при ступенчатой пластической деформации. В кн. «Прочность металлов при циклических нагрузках». Материалы IV совещания по усталости металлов, 14—17 марта 1966, М., Наука, 1967.
29. Каленчик Т. А. О методике сопоставления эффективности упрочнения деталей машины с результатами испытаний на образцах. Заводская лаборатория, 1966, № 6.
30. Клячка Ю. А., Бабей Ю. И., Старчук В. Г., Нехороших В. Г. Влияние некоторых видов поверхностного упрочнения на сопротивление стали наводороживанию. Вестник машиностроения, 1973, № 3.
31. Кобрин М. М. Прочность прессовых соединений при повторно-переменной нагрузке. М., Машгиз, 1954.

32. Кобрин М. М., Соколовский П. Н. Особенности разрушения стали при циклически нагрузках в связи с анизотропией ее строения. В кн. «Циклическая прочность металлов». Материалы II-го совещания по усталости металлов, 24—27 мая 1962. М., Изд. АН СССР, 1962.
33. Коновалов А. В. Методика испытания на усталостную изгибную прочность стали для определения пусков под нагрузкой и периодического отдыха. Заводская лаборатория, 1961, № 4.
34. Крекнин А. Г., Шаврин О. И. Многообразная установка для испытаний на контактную усталостную прочность. Заводская лаборатория, 1969, № 6.
35. Кудрявцев П. И. Метод исследования кинетики развития усталостных трещин. Заводская лаборатория, 1968, № 1.
36. Кудрявцев И. В., Колодезный А. А., Топоров Г. В., Бурмистрова А. Н. Эффективность упрочнения наклепом сталей при ударно-циклическом нагружении в условиях низких температур. Проблемы прочности, 1972, № 1.
37. Кудрявцев И. В., Чудновский А. Д., Сосновский А. А. О пересекающихся кривых усталости. Заводская лаборатория, 1968, № 4.
38. Кудма Х. А. О влиянии частоты нагружения на усталостную прочность сталей при перегрузках. Заводская лаборатория, 1957, № 5.
39. Кульбацкий П. Ф. Влияние частоты нагружения и направленной анизотропии на усталостную прочность листового алюминиевого сплава АМг6ВМ. Проблемы прочности, 1972, № 6.
40. Леви Д. С. Метод расчета долговечности в связи с накоплением повреждения при перегрузках. В кн. «Усталость и выносливость металлов». Под ред. Г. В. Ужика М., ИЛ, 1963.
41. Долинский М. Г., Натанзон Е. И., Теминко В. Г. Исследование контактной усталостной прочности трехслойной стали У7-30-У7. В кн. «Прочность металлов при циклических нагрузках». М., Изд. АН СССР, «Наука», 1967.
42. Макивиц А. Дж., Илл У. Метод определения скорости распространения трещин усталости. В кн. «Усталость и выносливость металлов». Под ред. Г. В. Ужика М., ИЛ, 1963.
43. Маркони М. П. Об уравнении диаграммы усталости. Заводская лаборатория, 1962, № 1.
44. Масол В. А., Кудрявцев И. В., Болкин М. Я., Тарасова В. Н., Саввина И. М. Усталостная прочность материала полых и сплошных крупных валов. Проблемы прочности, 1971, № 3.
45. Мустаев Р. Х. Повышение выносливости резьбовых соединений с натягами. Вестник машиностроения, 1971, № 3.
46. Нахалов В. А., Шром Р. З., Барат Р. Х., Балашова Р. К. Учет формы сечения гребней труб при расчете на малоцикловую усталость. Проблемы прочности, 1973, № 10.
47. Николаев Г. А., Румянцев С. В. Влияние дефектов сварки на механические свойства сварных соединений. В кн. «Вопросы прочности материалов и конструкций». Под ред. Д. И. Решетова. М., Изд. АН СССР, 1959.
48. Нистратов А. Ф., Горфинкель Х. М. Динамическая прочность кольцевых пружин. Вестник машиностроения, 1971, № 10.
49. Одинц И. А., Гуревич С. Е. Циклическая прочность и чувствительность к концентрации некоторых сортов высокопрочной стали. В кн. «Прочность металлов при переменных нагрузках». Материалы III-го совещания по усталости металлов, 5—9 марта 1962. М., Изд. АН СССР, 1963.
50. Одинц И. А., Гуревич С. Е. Чувствительность к надрезу высокопрочных сталей при циклических нагрузках. В кн. «Циклическая прочность металлов». Материалы II-го совещания по усталости металлов, 24—27 мая 1960. М., Изд. АН СССР, 1962.

31. Пиковский В. А., Кустов В. Г., Леонов Е. В., Шашкин В. В., Зинковский И. В. Исследование работоспособности высокоскоростных радиальных подшипников с большими роликами. Проблемы прочности, 1971, № 10.
32. Писаренко Г. С., Самсонов Г. В., Верлотиров А. Д., Белькорной А. И., Аляленко Б. А., Ришин В. В., Шеметан Ю. М. Прочностные характеристики слоев, полученные электронно-лучевым легированием стале-титановыми металлами. Проблемы прочности, 1973, № 2.
33. Писаренко Г. С., Черненко А. Д., Грамов Б. А. Сопротивление усталости осевой стали в доле прессовых посадок при низкой температуре. Заводская лаборатория, 1965, № 7.
34. Прицесевич Р. М., Решетов Д. Н., Астахов А. С. Ударно-усталостная прочность закаленных зубчатых колес. Вестник машиностроения, 1971, № 10.
35. Ракин Р. М., Буколова Л. В. Усталостная прочность изулочно-роликковых цепей. В кн. «Усталость металлов». М., Изд. АН СССР, 1960.
36. Ратнер С. И. Разрушение при повторных нагрузках. М., Оборонгиз, 1959.
37. Руднев В. Д., Тополов Г. В. Влияние гальванического хромирования на сопротивление разрушению при циклическом и ударноциклическом нагружении. В кн. «Усталость металлов при ударных циклических нагрузках и исследование машин ударного действия». Сб. научных трудов XV, Томский инж.-строит. ин-т, 1969.
38. Рябченков А. В. Коррозионно-усталостная прочность стали. М., Mashiz, 1953.
39. Соколовский А. А., Радзиевский В. Н., Лоуцманов С. И., Арсенова И. И., Рымарь В. И. Методика испытаний на усталость плавных соединений. Заводская лаборатория, 1972, № 12.
40. Соколовский А. А., Минков Я. Л., Чижой А. И. Повышение прочности и долговечности коренных валов тяжелых газовых компрессоров. Вестник машиностроения, 1972, № 1.
41. Тополов Г. В., Тетерин Н. А. О чувствительности к надрезу стали 45 при ударном и при плавном циклических нагружениях. В кн. «Усталость металлов при ударных циклических нагрузках и исследование машин ударного действия». Сб. научных трудов XV, Томский инж.-строит. ин-т, 1969.
42. Турбило В. М., Неманов М. С., Меркушев А. А. Повышение коррозионно-усталостной прочности стали 35Х11М после алмазного выглаживания. Вестник машиностроения, 1971, № 6.
43. Усталостная прочность и долговечность самолетных конструкций. М., Оборонгиз, 1965.
44. Усталостная прочность и остаточные напряжения в стали и чугуне. М., Наука, 1955.
45. Усталость металлов и сплавов. М., Наука, 1971.
46. Филагов Э. Я., Дмитриченко С. С., Белокуров В. Н., Борисов Ю. С. Программные испытания сварных образцов на усталость. Проблемы прочности, 1972, № 3.
47. Форрест П. Усталость металлов. М., Машиностроение, 1968.
48. Хардрог Г. Ф., Наумов Ю. С. Испытания образцов Al-сплава на усталость при варьировании амплитуды нагрузки. В кн. «Усталость и выносливость металлов». Под ред. Г. В. Улика. М., ИЛ, 1963.
49. Шварин О. И., Креськин А. Г. Повышение износостойкости и контактной прочности сталей 9Х и ШХ15 термометаллической обработкой. Вестник машиностроения, 1971, № 6.
50. Школьников А. М., Стеусико Е. Г., Шатов В. И. Пути повышения эффективности поверхностного упрочнения тепловозных коленчатых валов. Вестник машиностроения, 1972, № 1.
51. Девизин Г. А. Исследование влияния пластической деформации на усталостные свойства алюминиевого сплава марки АВТ. В кн. «Прочность металлов при циклических нагрузках». М., Изд. АН СССР, 1967.

А. М. СИМОНЯН

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ ПРИ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ТРЕХСТАДИЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ ХРОМО-НИКЕЛЕВОЙ СТАЛИ

Для проведения расчетов элементов конструкций на ползучесть кроме общей информации о ползучести данного материала при постоянных напряжениях и температурах необходимо иметь достаточно надежное предсказание о деформациях ползучести при напряжениях и температурах, произвольно изменяющихся во времени. При изучении влияния истории нагружения на деформируемость металлов в работах [1—3 и др.] приведены экспериментальные данные, подтверждающие общий тезис, что скорость ползучести тела, претерпевшего некоторую необратимую деформацию, тем больше, чем при меньшем напряжении была достигнута эта деформация. Этот тезис, названный преемственностью, изучен в свете предсказаний по различным теориям ползучести в работе [4]. Подтверждения его наблюдались и в третьей стадии высокотемпературной ползучести хромо-никелевой стали [5], хотя эти эксперименты единичны.

В настоящей работе приведены экспериментальные данные, показывающие, что преемственность для ползучести в III стадии проявляется с большой контрастностью, что предопределяет учет его в соответствующих расчетах.

1. Эксперименты проведены на машине типа Zsl 502.10 Рауэнштейн с усовершенствованными термоизмерительными и терморегулирующими устройствами. В процессе испытания на ползучесть температура измерялась непосредственно у поверхности образца и регулировалась автоматически путем периодического включения и выключения печи с периодом 1.5—2 мин. В процессе опыта температура контролировалась с помощью одного и того же милливольтметра. Образцы  $\varnothing$  8 мм вытачивались из прутков  $\varnothing$  15 мм при непрерывной подаче масла на обрабатываемую поверхность с целью предотвращения нагрева в процессе изготовления.

Исследования проводились на образцах хромо-никелевой стали X18H10T при 700°C, причем изменение напряжения в образцах в процессе испытания производилось в течение нескольких секунд, но без допущения динамических воздействий. Испытания производились по программе

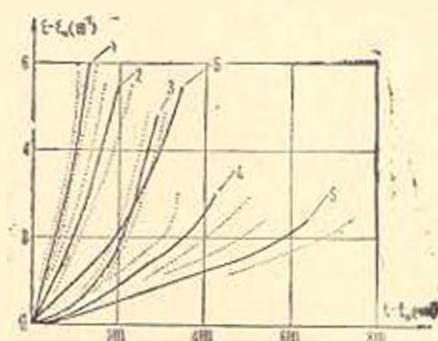
$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{при } \varepsilon_0(t) < \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 & \text{при } \varepsilon_0(t) > \varepsilon_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

где были взяты:  $\rho_0 = 0.02$ ;  $\sigma_0 = 11.15 \text{ кг/мм}^2$ , а для  $\sigma_1$  принимались значения 9.30 кг/мм<sup>2</sup>, 11.15 кг/мм<sup>2</sup>, 12.40 кг/мм<sup>2</sup>, 15.52 кг/мм<sup>2</sup> и 18.56 кг/мм<sup>2</sup>. Всего испытано по этой программе 55 образцов.

2 Как показано в работе [5], третья стадия ползучести для сплава X18H10T при указанных значениях напряжения проявляется уже задолго до достижения  $\epsilon = 0.02$ . Там же показано, что деформации с возрастающей скоростью, определяющие наступление третьей стадии, не могут быть следствием только изменения поперечного сечения и длины образцов, а следовательно, изменения напряжения и базы измерения деформации, а имеют иную природу.

Напряжения  $\sigma_n$ , при которых осуществлялось достижение деформации ползучести  $\epsilon_n$ , были взяты в большом диапазоне с точки зрения сопротивляемости ползучести. Действительно, если при  $\sigma_n = 9.30 \text{ кг/мм}^2$  деформации ползучести 0.02 у некоторых образцов достигались за время до 1000 час. то при  $\sigma_n = 18.56 \text{ кг/мм}^2$  — за время до 20 мин.

Фиг. 1. Кривые ползучести стали X18H10T при 700°C и при  $\sigma = 11.15 \text{ кг/мм}^2$  в координатах  $\epsilon - t - t_0$  после деформирования до  $\epsilon_n = 0.02$  при 1)  $\sigma_n = 9.30 \text{ кг/мм}^2$ , 2)  $\sigma_n = 11.15 \text{ кг/мм}^2$ , 3)  $\sigma_n = 12.40 \text{ кг/мм}^2$ , 4)  $\sigma_n = 15.52 \text{ кг/мм}^2$ , 5)  $\sigma_n = 18.56 \text{ кг/мм}^2$ , 6) кривые ползучести при  $\sigma = 11.15 \text{ кг/мм}^2$  от начального момента приложения нагрузки ( $t_0 = 0, \epsilon_0 = 0$ ).



На фиг. 1 сплошными линиями показаны деформационные кривые ползучести в координатах  $\epsilon - t - t_0$  ( $\epsilon(t_0) = \epsilon_0$ ), то есть продолжения кривых ползучести после достижения деформации  $\epsilon_n = 0.02$ . Все эти кривые соответствуют ползучести, протекающей при одном и том же напряжении  $\sigma_n = 11.15 \text{ кг/мм}^2$ . Рядом с каждой из сплошных линий приведены по две пунктирные линии, между которыми с вероятностью 0.9 заключается математическое ожидание соответствующей кривой ползучести согласно формуле [7]

$$m - t_p \sigma_n < m < m + t_p \sigma_n \quad (2.1)$$

где  $m$  — математическое ожидание деформации в некоторый момент времени  $t$ , то есть среднее арифметическое значение из бесчисленного множества экспериментов,  $m$  — среднее арифметическое значение деформации  $\epsilon_i$  из имеющегося количества экспериментов ( $n$ )

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\epsilon_i - m)^2}{n(n-1)}}, \quad t_p = \arg \Phi\left(\frac{1+p}{2}\right); \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Как можно заключить из фиг. 1, кривые ползучести при одном и том же напряжении  $\sigma_n$  после достижения одной и той же деформации  $\epsilon_n$  суще-

ственно зависят от того, при каком напряжении  $\sigma_0$  была достигнута деформация  $\epsilon_0$ , причем зависимость эта значительна не только в течение некоторого времени после изменения напряжения, а в течение всего дальнейшего процесса деформирования.

Ограниченные пунктирными линиями области нахождения действительных кривых ползучести (математических ожиданий) позволяют сделать вывод, что для каждой пары смежных кривых ползучести с вероятностью, большей 0.95, можно говорить об отмеченном эффекте независимо от разброса экспериментальных данных, причем вероятность 0.95 соответствовала бы случаю, когда границы отмеченных смежных областей соприкасались бы друг с другом.

Линией б представлена кривая ползучести при том же напряжении  $\sigma = 11.15 \text{ кг/мм}^2$ , но от начального момента приложения нагрузки, то есть в координатах  $t - \epsilon$ . Легко видеть, что если предварительное деформирование имело место при меньших напряжениях или при том же напряжении, то проявляется разупрочнение материала с точки зрения сопротивляемости ползучести. Если предварительное деформирование имело место при нескольких больших напряжениях ( $\sigma = 12.40 \text{ кг/мм}^2$ ), то имеет место упрочнение лишь в начальной стадии дальнейшего деформирования, после чего материал быстро разупрочняется. При более значительных напряжениях предварительного деформирования имеет место упрочнение, причем довольно устойчивое. Если же, например, предварительное деформирование было осуществлено при  $18.56 \text{ кг/мм}^2$ , то дальнейшее деформирование при  $\sigma_0 = 11.15 \text{ кг/мм}^2$  происходит вначале с возрастающей, но незначительной скоростью (до 200 час), после чего имеет место деформирование с практически постоянной скоростью  $3.33 \cdot 10^{-3} \text{ 1/час}$  в течение почти 300 час, после чего скорость вновь возрастает. При этом деформирование происходит значительно менее интенсивно, чем это имеет место во второй стадии ползучести недеформированного образца ( $\dot{\epsilon}_{II} = 7.73 \cdot 10^{-3} \text{ 1/час}$ ), то есть упрочнение распространяется не только на долю деформаций, протекающих с возрастающей скоростью, но и на деформации установившейся ползучести.

Таким образом, несмотря на то, что третья стадия ползучести обычно объясняется разупрочнением материала, деформации в этой стадии могут оказывать как разупрочняющее, так и упрочняющее действие в зависимости от того при большем или меньшем напряжении имеет место дальнейшее деформирование. Эти факты могут иметь вполне наглядную физическую интерпретацию при рассмотрении весьма общего механизма ползучести. Как известно, деформации ползучести в поликристаллах складываются из внутризеренного и межзеренного скольжений, причем межзеренные скольжения, сопровождающиеся образованием межзеренных трещин, образуются уже при незначительных деформациях задолго до разрушения [8], причем они определяют процесс разрушения при длительной ползучести, так как с увеличением зерна хромо-никелевых сталей долговечность их существенно возрастает [9].

В работе [10, стр. 154] отмечено, что при низких напряжениях основную роль в разрушении играет трещинообразование, причем, согласно [11], трещины в поликристаллах образуются между зернами и определяют основную часть увеличения скорости ползучести. Доказательство решающей роли скольжения по границам зерен в сопротивляемости хромо-никелевых сталей длительным силовым воздействиям дано в работе [12], где при прочих равных условиях образцы с непрерывной пленкой карбидов по границам зерен показали в 10 раз большую долговечность, чем образцы с массивными, но прерывистыми выделениями карбидов. В работе [13] на основе металлографических исследований также делается вывод о том, что периоды возрастающей скорости связаны со скольжением по границам зерен.

Учитывая эти факты, а также и то, что, согласно, например, [14], доля деформаций ползучести, возникающих за счет скольжений на границах, повышается в сравнении с долей деформаций, накопленных в результате внутризеренного скольжения, с увеличением полного времени ползучести или что то же с уменьшением действующего напряжения приходим к выводу о том, что одни и те же деформации ползучести должны приводить к тем большему разупрочнению с точки зрения сопротивляемости ползучести, чем при меньших напряжениях эти деформации были достигнуты, что находится в совершенном согласии с полученными здесь экспериментальными данными. Труднее дать объяснение упрочнению, причем довольно существенному и устойчивому, имеющему место после деформирования при высоких напряжениях. Вероятно, упрочнение зерен кристалла, являющееся преобладающим при деформировании в случае высоких напряжений и имеющее место, в частности, вследствие полигонизации [15, 16], настолько велико, что создает большие препятствия для межзеренного скольжения. Согласно интерпретации Мотта [17, стр. 26], процесс полигонизации может быть рассматриваем как переползание краевых дислокаций из плоскостей скольжения вследствие термической активации, связанной со временем, и, следовательно, не должен проявляться при пластическом деформировании. Действительно, в отличие от деформаций ползучести пластические деформации несущественно влияют на упрочнение металла с точки зрения его сопротивления ползучести [18, стр. 208].

Обращаясь к модели Ю. Н. Работнова [10]

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = f(\varepsilon, \omega), \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \varphi(\varepsilon, \omega) \quad (2.2)$$

где  $\omega$  — параметр поврежденности, например, в случае степенных зависимостей [10]

$$f(\varepsilon, \omega) = b\varepsilon^m (1 - \omega)^{-r}, \quad \varphi(\varepsilon, \omega) = c\varepsilon^p (1 - \omega)^{-q} \quad (2.3)$$

легко видеть, что преемственность будет соблюдаться при  $m > p$  независимо от  $r$  и  $q$ .

Действительно, из (2.2) и (2.3) получим

$$1 - \omega = \left[ 1 - \frac{c}{b} \sigma^{r-q} \varepsilon (r - q - 1) \right]^{\frac{1}{r-q-1}} \quad (2.4)$$

откуда видно, что при достижении некоторого значения деформации  $\varepsilon_0(t)$  параметр поврежденности тем больше, чем при меньшем напряжении  $\sigma$  была достигнута эта деформация. Дальнейшее же деформирование ( $t > t_0$ ), согласно (2.2), определяется лишь значением  $\omega(t_0)$  и дальнейшей историей изменения напряжения  $\sigma(t > t_0)$ .

Преемственность соблюдается и в используемой в [18] разновидности (2.2)

$$f(\sigma, \omega) = k\sigma^m \omega^n, \quad \varphi(\sigma, \omega) = \sigma^l \quad (2.5)$$

в случае  $l > \nu$ , как это было показано в [4]. Однако, согласно разновидностям модели Ю. Н. Работнова в виде (2.3) или (2.5), предварительное деформирование может привести лишь к увеличению поврежденности  $\omega$ , то есть к разупрочнению материала с точки зрения сопротивляемости его дальнейшему деформированию. Факт же упрочнения материала в результате его деформирования в третьей стадии ползучести, проявляющийся довольно контрастно в настоящих экспериментах, мог бы быть описан моделью (2.2) лишь в случае знакопеременности функции  $\varphi(\sigma, \omega)$ .

Ограниченность программ проведенных здесь экспериментов не позволяет дать какие-либо конкретные рекомендации в отношении функции  $\varphi(\sigma, \omega)$ , и решение этой проблемы требует детального изучения.

Институт механики АН  
Армянской ССР

Поступила 15 XI 1977

Ա. Մ. ՍԻՄՈՅԱՆ

ԽՐՈՒՄԱՆԿԵԼԱՅԻՆ ՊՈՂՊԱՏԻ ԺԱՄԱՆԿՈՐԴՈՒԹՅԱՆ  
ՓՈՐՁԱԿԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲԱՐՁՐՋԵՐՄԱՍԻՃԱՆԱՅԻՆ  
ԵՐԵՎ-ՓՈԻԼԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ԴԵՊՐՏԻՐ

Ա մ փ ո փ ո Վ մ

Քերված են X18H10T պողպատի երեք-փուլային սողքի փորձնական ուսումնասիրության արդյունքները այն նմուշների համար, որոնք ունեցել են միևնույն նախնական սողքի զեֆորմացիան: Ցույց է արված, որ լարման մեծացումով, որի ազդեցության տակ տեղի է ունենում նախնական սողքը, աճում է նյութի դիմադրողականությունը հետագա սողքին և այդ էֆֆեկտը բավական մեծ լարումների դեպքում կարող է բերել նյութի ամրացնողմանը:

AN EXPERIMENTAL STUDY ON SUCCESSION UNDER  
HIGH-TEMPERATURE THREE-STAGED CREEP  
OF CHROME-NICKEL STEEL

A. M. SIMONIAN

## S u m m a r y

Experimental results are presented on three-staged creep of specimens of X18H10T steel subjected to one and the same creep prestrain. It is shown that as the stress, under which a certain creep prestrain takes place, increases, the resistance of material to subsequent creep increases as well, this effect being rather evident. It is also shown that deformation at the third stage of creep, under sufficiently high stress, may result in the hardening of the material.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Наместников В. С. О ползучести алюминиевого сплава при переменных нагрузках. ПМТФ, 1964, № 2.
2. Наместников В. С., Хвостунков А. А. Ползучесть дуралюмина при постоянных и переменных нагрузках. ПМТФ, 1960, № 4.
3. Наместников В. С., Работнов Ю. Н. О гипотезе уравнивания состояния при ползучести. ПМТФ, 1961, № 3.
4. Симонян А. М. О двух вопросах в одномерной теории ползучести. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1977, т. XXX, № 2.
5. Симонян А. М. Исследование высокотемпературной ползучести хромо-никелевой стали в условиях ступенчатых изменений напряжений. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 4.
6. Nadai A. Plasticity, Mc-Graw-Hill Book Co, NY-London, 1931.
7. Вентуль Е. С. Теория вероятностей. М., Наука, 1969.
8. Fazan B., Sherby O. D., Dorn Y. E. Some Observations on Grain Boundary Shearing During Creep. Transactions, American Institute of Mining and Metallurgical Engineering, vol. 260, 1954.
9. Куров В. Д., Мельников Г. П., Соколов А. А. Влияние структуры материала на длительную прочность. Научн. тр. ин-та механики, МГУ, 1973, № 23.
10. Качанов А. М. Основы механики разрушения. М., «Наука», 1974.
11. Keown S. R. Microstructural changes occurring during the creep deformation of a simple austenitic steel at 600°C. "Creep Strength steel and High-Temperature Alloys. Proc. Meet., Univ. Sheffield, 1972". London, 1974.
12. Ohta Sadao, Akita Ken-ichi. The effect of continuous grain boundary precipitates on the creep rupture behaviour of high carbon-high chromium-high nickel stainless steels (Session IV), "Microstructure and Design Alloys. Proc. 3-rd Int. Conf. Strength Metals and Alloys", Cambridge, 1973, vol. 1.
13. Грант Н. Дж. и Чаудхури А. Р. Ползучесть и разрушение. Ползучесть и возврат. М., Металлургиядат, 1961.
14. Collins M. J. Creep of low-alloy steel. "Creep Strength Steel and High-Temp. Alloys. Proc. Meet Univ. Sheffield, 1972". London, 1974.
15. Иванова В. С. Механико-термическая обработка как средство повышения жаропрочности металлов и сплавов. М., Изд. НТО машиностроительной промышленности, 1964.

16. Максимович Г. Г. Структура деформированных металлов. Киев, «Наукова думка», 1976.
17. Иванова В. С., Гордиенко Л. К. Новые пути повышения прочности металлов. М., «Наука», 1964.
18. Работин Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
19. Симолян А. М. Исследование ползучести стали X18H10T при больших деформациях. Проблемы прочности, 1975, № 6.

А. И. ДИКАРЕВ

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ ТЕЛ С СИСТЕМОЙ УПРУГО-ПОДАТЛИВЫХ СВЯЗЕЙ

Применение упругой аналогии при экспериментальном решении задач ползучести позволяет, используя хорошо разработанный аппарат поляриционно-интерференционного метода [1], определять напряженно-деформированное состояние трехмерных тел сложной конфигурации при граничных условиях, заданных в перемещениях и в напряжениях [2, 3, 4]. При наличии упруго-податливых связей, как показано в работах [5, 6], не применимы теоремы Н. Х. Арутюняна в том виде, как их сформулировал автор. Обобщения этих теорем, сделанные в работах [3, 4] и других, открыли новые возможности при теоретическом и экспериментальном решении задач ползучести.

В настоящей статье предлагается способ экспериментального решения задачи для трехмерного упруго-ползучего тела, на которое помимо усилий и смещений, не зависящих от его деформированного состояния, действует система упруго-податливых связей, создающих усилия в заданном направлении.

Задача поставлена применительно к расчету массивных, предварительно напрягаемых бетонных конструкций, в которых усилие натяжения создается троссами при отсутствии либо пренебрежимо малом трении их о бетон.

В этом случае связь скреплена с телом только в крайних точках канала, что позволяет считать изменение ее длины ( $\Delta u_i^*$ ) равным приращению перемещений в теле по линии связи ( $\Delta u_i^*$ ). Напряженное состояние упруго-ползучего тела, нагруженного упруго-податливой связью, пропорционально изменяющемуся во времени усилию в связи.

Пусть на тело действует система из « $n$ » упругих связей, « $m$ » силовых воздействий и « $l$ » участков поверхности тела испытывают заданные смещения. Материал тела обладает свойствами ползучести и усадки, для описания которых используется линейная теория упруго-ползучего тела Г. Н. Маслова — Н. Х. Арутюняна [2]. Приращение перемещений  $\Delta u_i^*$  в этом случае выразится вектором

$$\vec{u}^* = \vec{u}^N + \vec{u}^P + \vec{u}^C + \vec{u}^Q \quad (1.1)$$

где

$$[\vec{u}^*]_i = [\Delta u_{i1}(t) \dots \Delta u_{in}(t)]$$

$$[\bar{u}^N]_l = \sum_{i=1}^n \Delta u_{li}^N(t)$$

— вектор приращения перемещений в теле по длине связи „ $l$ “ от изменения усилий в связях;

$$[\bar{u}^P]_l = \sum_{j=1}^m \Delta u_{lj}^P(t)$$

— вектор приращения перемещений в теле по длине связи „ $l$ “ от изменения во времени силовых воздействий;

$$[\bar{u}^V]_l = \sum_{q=1}^r \Delta u_{lq}^V(t)$$

— вектор приращения перемещений в теле по длине связи „ $l$ “ от изменения во времени вынужденных смещений участков поверхности;

$$[\bar{u}^O]_l = u_l^O(t - \tau_l) = \int_{\tau_l}^t S_l(x, y, z, t) dt$$

где  $u_l^O(t - \tau_l)$  — перемещение по оси связи „ $l$ “ от усадки тела за время  $(t - \tau_l)$

$$l = 1 \dots l \dots n; \quad i = 1 \dots i \dots n; \quad j = 1 \dots m; \quad q = 1 \dots r.$$

Деформация усадки, согласно [2], равна

$$S_l(x, y, z, t) = S_l^0(x, y, z) (e^{-\delta \tau_l} - e^{-\delta t}) \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{li}^N(t) = u_{li}(t) - u_{li}(\tau_i) = B_{li}^N \left[ \frac{N_i(t)}{E(t)} - \frac{N_i(\tau_i)}{E(\tau_i)} + \right. \\ \left. + \int_{\tau_i}^t N_i(\tau) \frac{L(t, \tau)}{E(\tau)} d\tau \right] \quad (1.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{lj}^P(t) = u_{lj}(t) - u_{lj}(\tau_j) = B_{lj}^P \left[ \frac{P_j(t)}{E(t)} - \frac{P_j(\tau_j)}{E(\tau_j)} + \right. \\ \left. + \int_{\tau_j}^t P_j(\tau) \frac{L(t, \tau)}{E(\tau)} d\tau \right] \quad (1.4) \end{aligned}$$

$$\Delta u_{lq}^V(t) = u_{lq}(t) - u_{lq}(\tau_q); \quad u_{lq}^V(t) = \bar{u}_{lq}^V V_q(t) \quad (1.5)$$

где  $\bar{u}_{lq}^V$  — перемещение по оси связи „ $l$ “ от единичного вынужденного смещения участка поверхности „ $q$ “.

В полученных зависимостях существенно, что коэффициенты  $E_{ij}^N$ ,  $B_{ij}^N$  и  $u_{ij}^N$  находятся из решения упруго-мгновенной задачи в перемещениях для указанных воздействий.

Для определения усилий в связях необходимо записать систему из  $n$  уравнений, которая в векторно-матричной записи имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{N}(\tau) - \bar{N}(t) + K\bar{u}^* &= 0 \\ [\bar{N}(\tau)]_i &= [N_1(\tau_1) \dots N_n(\tau_n)] \\ [\bar{N}(t)]_i &= [N_1(t) \dots N_n(t)] \end{aligned} \quad (1.6)$$

$K = \text{diag}(K_i)$  — диагональная матрица коэффициентов жесткости связей;  $\bar{u}^* = \bar{u}^*(t)$  — вектор приращения перемещений (см. зависимости (1.1) — (1.5)) за время  $t$ .

Раскрывая векторно-матричную запись и приняв, что усилие в связях нарастает по известной зависимости  $\varphi(t)$  за время натяжения от  $\tau_i^{\text{кон}}$  до  $\tau_i^{\text{кон}}$ , после которого усилие не контролируется, можно записать при

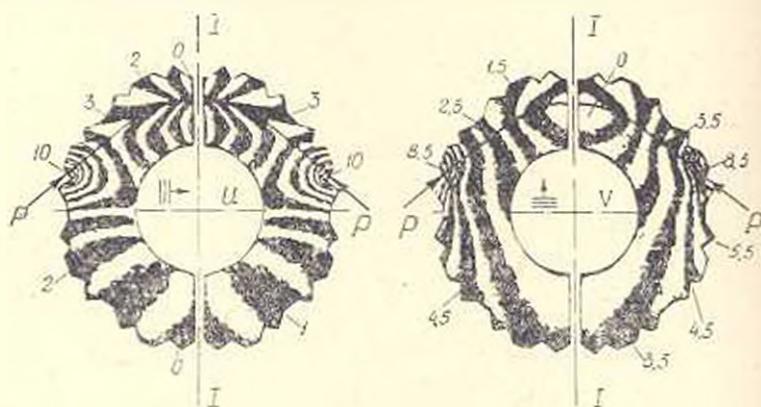
$$\begin{aligned} \tau_0 \leq t < \tau_i^{\text{кон}} & \quad N_i(t) = 0 \\ \tau_i^{\text{кон}} \leq t < \tau_i^{\text{кон}} & \quad N_i(t) = \varphi(t) \\ t > \tau_i^{\text{кон}} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_i(t) &= N_i(\tau_i^{\text{кон}}) + K \left\{ \sum_{j=1}^n B_{ij}^N \left[ \frac{N_j(t)}{E(t)} - \frac{N_j(\tau_i^{\text{кон}})}{E(\tau_i^{\text{кон}})} + \right. \right. \\ &+ \left. \int_{\tau_i^{\text{кон}}}^t N_j(\tau) \frac{L(t, \tau)}{E(\tau)} d\tau - \int_{\tau_i^{\text{кон}}}^{\tau_i^{\text{кон}}} N_j(\tau) \frac{L(\tau_i^{\text{кон}}, \tau)}{E(\tau)} d\tau \right] + \\ &+ \sum_{j=1}^m B_{ij}^P \left[ \frac{P_j(t)}{E(t)} - \frac{P_j(\tau_i^{\text{кон}})}{E(\tau_i^{\text{кон}})} + \int_{\tau_i^{\text{кон}}}^t P_j(\tau) \frac{L(t, \tau)}{E(\tau)} d\tau - \right. \\ &\left. \left. - \int_{\tau_i^{\text{кон}}}^{\tau_i^{\text{кон}}} P_j(\tau) \frac{L(\tau_i^{\text{кон}}, \tau)}{E(\tau)} d\tau \right] + \sum_{q=1}^r \bar{u}_{iq}^V [V_q(t) - V_q(\tau_i^{\text{кон}})] + u_i^Q(t - \tau_i^{\text{кон}}) \right\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Полученная система интегральных уравнений типа Вольтерра относительно усилия  $N_i(t)$  решается с применением ЭВМ. Вид ядра ползучести выбирается в зависимости от характеристик материала.

Коэффициенты  $B_{ij}^N$  и  $B_{ij}^P$  определяются на основе упругого решения в перемещениях с применением способа «замораживания» деформаций в моделях из оптически чувствительного материала. Помимо данных о на-  
 Известия АН Армянской ССР, Механика, № 6

пряженном состоянии конструкции, получаемых в результате поляризационно-оптических измерений, поля перемещений определяются на тех же моделях методом муаровых полос [7, 8]. Для этого на срез из «замороженной» модели наносится фотоспособом ортогональная сетка. Картины полей перемещений в двух направлениях получаются последовательным совмещением эталонной сетки с семействами линий на отождествленном срезе. В случаях, когда деформированное состояние на срезах не симметрично и точное совмещение с эталонной сеткой (без поворота) затруднено, может быть применен способ искусственного создания симметрии. Для этого по обе стороны вдоль исследуемого сечения вырезаются два тонких среза с минимально возможным удалением друг от друга. Картины изотет на плоскостях, обращенных к сечению, отличаются тем меньше, чем ближе расположены срезы. Искусственная ось симметрии получается зеркальным размещением срезов друг относительно друга. На зафиксированных в этом положении срезах печатается одновременно одна и та же эталонная сетка. Далее весь цикл получения картин изотет аналогичен изложенному.



Фиг. 1. Картины полей перемещений (изотет)  $u$  и  $v$  на несимметричном срезе с искусственной осью симметрии. I—I — искусственная ось симметрии.

На фиг. 1 показаны поля перемещений  $u$  и  $v$ , полученные на несимметричном горизонтальном срезе из модели корпуса энергетического реактора, спроектированного из преднапряженного бетона. В данном случае моделировалось действие единичного горизонтального пучка преднапрягающей арматуры, лежащего в плоскости среза.

Для определения коэффициентов  $B_{ii}^y$  находились приращения полного вектора смещений от точки к точке по длине преднапрягающего пучка.

Последующим суммированием проекций приращений вдоль линии  $l$  получали величину изменения длины анкера  $u_{ii}(\tau_0)$

$$u_{ii}(\tau_0) = \int_l \frac{\partial u^*}{\partial l} \cos \alpha dl \quad (1.8)$$

где  $u^*$  — полный вектор смещений;  $\alpha$  — угол между направлением полного вектора смещений и касательной к линии  $l$ .

Перемещения определялись от действия усилия в  $i$ -ом преднапрягающем пучке  $N_i(\tau_1)$  в начальный момент времени  $\tau_1$ , совпадающий с моментом приложения первого воздействия.

Тогда

$$B_{ij}^* = \frac{u_{ij}(\tau_1)}{N_i(\tau_1)} E(\tau_1) \quad (1.9)$$

Коэффициенты  $B_{ij}^*$  находились по картинкам изотет, полученных при моделировании внутреннего давления. После определения коэффициентов проводилось решение системы интегральных уравнений (1.7) относительно усилий в связях  $N_i(t)$ .

Для реализации решения на ЭВМ была составлена программа на языке «АЛГОЛ-60» для транслятора версии ГА-1М. Счет проводился на ЭВМ типа БЭСМ-4М.

Полученные величины изменения усилий в преднапрягающих пучках корпуса энергетического реактора для «старого» бетона марки 500 при температуре 20°C составляют к 160-ым суткам 1,5%, а при температуре 80°C это падение увеличивается до 17%.

Упруго-мгновенное решение в напряжениях определялось на основе поляризационно-оптических измерений. Связь между полными напряжениями и напряжениями соответствующей упруго-мгновенной задачи в данном случае, при отсутствии вынужденных смещений, осуществляется по зависимости

$$\sigma_{ij}^*(t) = \varepsilon_{ij}(t) F(t, \tau_1) \quad (1.10)$$

где  $F(t, \tau_1)$  — функция, зависящая от деформативных свойств материала

$$F(t, \tau_1) = \frac{N(t)}{N(\tau_1)}$$

Изложенная методика позволяет удачно сочетать наглядность и эффективность поляризационно-интерференционного метода и метода «муаровых полос» с использованием для учета ползучести и старения теории Г. Н. Маслова—Н. Х. Арутюняна, наиболее полно отражающей основные свойства и поведение бетона во времени под влиянием внешних воздействий.

Ա. Ի. ԴԻԿԱՐԵՎ

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՐԵՆ ԷՆԹԱՐԿՎՈՂ ԿԱՊԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳՈՎ  
ՄԱՐԻՆԵՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ՍՈՎՔԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ  
ՓՈՐՁՆԱԿԱՆ ԼՈՒՈՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Առաջարկվում է առաձգականորեն ենթարկվող կապերի համակարգով հոսաչափ մարմինների համար սողքի գծային տեսության խնդիրների փորձնական լուծման եղանակ, որը հիմնված է առաձգական առաջադիայի մեթոդի վրա բենոաշման-օպտիկական շափումների և մուարային շերտերի մեթոդի կիրառումով:

Առաջարկված եղանակի ցուցադրման համար բերվում է էներգետիկ ունակտորի բետոնյա իրանի լարված-դեֆորմացված վիճակի որոշումը, երբ այն նախապես լարված է օրթոգոնալ խարիսխների համակարգով:

AN EXPERIMENTAL SOLUTION OF CREEP PROBLEMS  
FOR BODIES WITH A SYSTEM OF ELASTO-YIELDING ANCHORS

A. I. DIKAREV

## S u m m a r y

The method of experimental solution of linear creep problems for three-dimensional bodies with a discrete system of elasto-yielding anchors is discussed. The method is based on the elastic analogy theory, using photoelastic measurements and the Moire method.

The method is illustrated by the examination of a stress-strain of the concrete casing of a power reactor prestressed by the orthogonal anchor system.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Метод фотоупругости. Под ред. Хесина Г. А., т. 1, 2, 3. М., Стройиздат, 1975.
2. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М., Гостехтеориздат, 1952.
3. Ворданын Г. С., Шеремет В. Д., Трищина Н. Е. Учет ползучести при моделировании напряженно-деформированного состояния бетонных конструкций поляризационно-оптическим методом. Проблемы ползучести и усадки бетона. Сб. трудов МИСИ, № 113, М., 1974.
4. Ворданын Г. С., Шеремет В. Д. Моделирование ползучести методом упругой аналогии. Сб. трудов МИСИ. Фотоупругость. Развитие методики. Инженерные приложения, № 125—126, М., 1975.
5. Александровский С. В. Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменение температуры и влажности с учетом ползучести. М., Стройиздат, 1975.

6. Проколович И. Е. Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние сооружений. М., Госстройиздат, 1963.
7. Савостьянов В. Н., Омеляченко Д. И., Дикарев А. Н. Определение полей перемещений при «размораживании» срезов из объемных моделей. Сб. трудов МИСИ, № 137, М., 1976.
8. Durelli A. I., Parks V. I., del Rio C. J. Experimental determination of stress and Displacements in Thickwall cylinders of complicated shape. Exp. Mech., July, 1968, v. 8.