ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1978

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXI, № 5, 1978 Механика

С. М. МХИТАРЯН, Ф. С. ТОРОСЯН

О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ КРУГОВОГО ДИСКА И БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ, ПОДКРЕПЛЕННЫМ ТОНКИМ КОЛЬЦЕВЫМ ПОКРЫТИЕМ

Контактные задачи о вдавливании кругового упругого диска в бесконечную плоскость с круговым отверстием близких радиусов, когда контакт осуществляется через их контуры, ввиду их важного прикладного значения стали предметом исследования многих авторов [1—6]. Характерной особенностью постановки этого класса задач является то, что к ним не применимы классические гипотезы Герца. Последнее вносит определенные коррективы в структуру разрешающего интегрального уравнения, усложняя ее, и в конечном итоге приводит к некоторым трудностям при построении его эффективного решения.

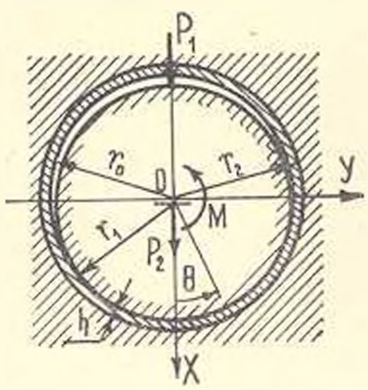
В настоящей работе рассматривается контактная задача о давлении кругового упругого диска на контур бесконечной пластины с круговым отверстием, когда ее граница усилена тонкостенным элементом в виде приваренного или приклеенного к ней кольцевого упругого покрытия. Усиливающее тонкое покрытие трактуется в рамках теории тонких цилиндрических оболочек, основанной на известных гипотезах Кирхгофа-Лява, не учитывающих поперечное обжатие материала. Определение законов распределения контактных напряжений под диском сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода. При помощи известного аппарата ортогональных многочленов Якоби это уравнение сводится к эквивалентной квазивполне регулярной бесконечной системе линейных уравнений. Получены числовые результаты. В определенной мере выяснен эффект подкрепляющего тонкого кольца.

Обсуждаемая здесь задача в известном смысле представляет аналог задачи из [2], встречающейся в вопросах трения и износа.

§ 1. Постановка задачи и вывод основных уравнений. Пусть в круговой вырез радиуса r_2 упругой бесконечной пластины, усиленный тонким кольцевым покрытием малой толщины h, вставлен диск радиуса r_1. Диск прижимается к пластине силами P_1, P_2 и скручивается моментом M (фиг. 1). Считается, что механическое поведение этих тел описывается уравнениями теории плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния. Разность $\varepsilon = r_2 - h - r_1$ предполагается величиной порядка упругих перемещений. Требуется определить законы распределения контактных напряжений под диском и размеры области контакта.

В качестве физической модели усиливающего покрытия принимается, как уже говорилось, геометрическая гипотеза Кирхгофа-Лява теории тонких оболочек [7].

Обозначим через $q_1(\theta)$ и $\tau_1(\theta)$ соответственно нормальные и тангенциальные контактные напряжения под диском, а через $q_2(\theta)$ и $\tau_2(\theta)$—контактные напряжения, действующие на границе бесконечной пластины, то есть на линии соединения усиливающего кольца с основанием. Участком контакта под диском пусть будет $[-\theta_1, \theta_2]$. Далее, через $v_r^{(1)}$, $v_\theta^{(1)}$ и $v_r^{(2)}$, $v_\theta^{(2)}$ обозначим соответственно радиальные и тангенциальные компоненты упругих перемещений граничных точек диска и бесконечной пластины от внешних и указанных нагрузок. Через v_r^+, v_θ^+ и v_r^-, v_θ^- обозначим компоненты перемещения граничных точек усиливающего кольца, где индексы „$+$" и „$-$" соответствуют точкам, находящимся на окружностях с радиусами r_2 и $r_0 = r_2 - h$.



Фиг. 1.

Теперь перейдем к выводу основных разрешающих уравнений поставленной задачи.

На линии соединения усиливающего кольца с основанием можем записать условия

$$v_r^+ = v_r^{(2)}, \quad v_\theta^+ = v_\theta^{(2)} \quad (-\pi < \theta \leqslant \pi)$$

Но поскольку толщина h усиливающего кольца предполагается малой ($h/r_2 \leqslant 1/20$ [7]), то пренебрегая его поперечной деформацией и принимая $v_r^+ \approx v_r^-$, будем иметь

$$v_r^- \approx v_r^{(2)}, \quad v_\theta^- \approx v_\theta^{(2)} \quad (-\pi < \theta \leqslant \pi)$$

Учитывая эти соотношения и предполагая, что во всей зоне контакта действуют только силы сцепления, легко показать, что там должны выполняться следующие условия [1, 2]:

$$\begin{aligned} -v_r^{(1)} + v_r^{(2)} &= \delta\cos\theta - r_1\psi\sin\theta - \varepsilon(1-\cos\theta) \\ v_\theta^{(1)} - v_\theta^{(2)} &= \delta\sin\theta - 2r_1\psi\sin^2\frac{\theta}{2} \end{aligned} \qquad (-\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2) \qquad (1.1)$$

Здесь δ— жесткое смещение диска в направлении оси oX, а ψ — угол поворота диска относительно первоначальной точки касания, возникающего из-за наличия скручивающего момента M, вследствие чего область контакта становится несимметричной относительно указанной точки.

Далее, на основании известного комплексного представления плоской задачи теории упругости [8] легко получить, что компоненты перемещений $v_r^{(1)}$, $v_\theta^{(1)}$, $v_r^{(2)}$ и $v_\theta^{(2)}$ выражаются формулами:

$$v_r^{(1)} = \frac{(\varkappa_1+1)\, r_1}{4\pi\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} q_1(\xi) \ln 2 \left| \sin \frac{\theta-\xi}{2} \right| d\xi +$$

$$+ \frac{(\varkappa_1-1)\, r_1}{8\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \tau_1(\xi) \operatorname{sign}(\theta-\xi)\, d\xi - \int_{-\theta_1}^{\theta_2} q_1(\xi) K^{(1)}(\theta-\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \tau_1(\xi) K^{(2)}(\theta-\xi)\, d\xi + \frac{r_1}{2\pi\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} q_1(\xi) \cos(\theta-\xi)\, d\xi + f_1(\theta)$$

$$v_\theta^{(1)} = \frac{(\varkappa_1+1)\, r_1}{4\pi\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \tau_1(\xi) \ln 2 \left| \sin \frac{\theta-\xi}{2} \right| d\xi -$$

$$- \frac{(\varkappa_1-1)\, r_1}{8\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} q_1(\xi) \operatorname{sign}(\theta-\xi)\, d\xi - \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \tau_1(\xi) K^{(1)}(\theta-\xi)\, d\xi -$$

$$- \int_{-\theta_1}^{\theta_2} q_1(\xi) K^{(2)}(\theta-\xi)\, d\xi - \frac{r_1}{2\pi\mu_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \tau_1(\xi) \cos(\theta-\xi)\, d\xi + f_2(\theta) \qquad (1.2)$$

$$(-\pi < \theta \leqslant \pi)$$

$$2\mu_2 \left(v_r^{(2)} + i v_\theta^{(2)}\right) = -\varkappa_2 r_2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\overline{B}_k}{k-1} e^{-ik\theta} - r_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{B}_{-k}}{k+1} e^{ik\theta} \qquad (1.3)$$

где

$$B_k = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[q_2(\xi) - i\tau_2(\xi)\right] e^{-ik\xi} d\xi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

При этом имеют место условия равновесия диска

$$r_1 \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \left[q_1(\xi) - i\tau_1(\xi)\right] e^{-i\xi} d\xi = P_1 + P_2, \quad r_1^2 \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \tau_1(\xi)\, d\xi = M \qquad (1.4)$$

Здесь $\varkappa_j = 3 - 4\nu_j$ $(j = 1, 2)$ для плоской деформации и $\varkappa_j = (3-\nu_j)/(1+\nu_j)$ для случая плоского напряженного состояния; $\mu_j = E_j/2(1+\nu_j)$, а E_j и ν_j — соответственно модули упругости и коэффициенты Пуассона для материалов диска $(j=1)$ и бесконечной пластины $(j=2)$. Кроме того, введены обозначения

$$K^{(1)}(\theta-\xi) = \frac{(\varkappa_1+1)\, r_1}{4\pi\mu_1} R_{11}(\theta-\xi) + \frac{(\varkappa_1-1)\, r_1}{8\pi\mu_1} R_{12}(\theta-\xi)$$

$$K^{(2)}(\theta-\xi)=\frac{(\varkappa_1+1)\,r_1}{4\pi\mu_1}R_{11}(\theta-\xi)+$$

$$+\frac{(\varkappa_1-1)\,r_1}{8\pi\mu_1}R_{22}(\theta-\xi)-\frac{(\varkappa_1-1)\,r_1}{8\pi\mu_1}(\theta-\xi)$$

где

$$R_{11}(\theta-\xi)=2\sin^2\frac{\theta-\xi}{2}\ln 2\left|\sin\frac{\theta-\xi}{2}\right|$$

$$R_{12}(\theta-\xi)=[\pi-|\theta-\xi|]\sin(\theta-\xi)\,\mathrm{sign}\,(\theta-\xi)$$

$$R_{21}(\theta-\xi)=\sin(\theta-\xi)\ln 2\left|\sin\frac{\theta-\xi}{2}\right|$$

$$R_{22}(\theta-\xi)=-2\,[\pi-|\theta-\xi|]\sin^2\frac{\theta-\xi}{2}\,\mathrm{sign}\,(\theta-\xi)$$

$$f_1(\theta)=\frac{(\varkappa_1+1)\,r_1}{8\pi\mu_1}\int\limits_{-\theta_1}^{\theta}q_1(\xi)\,d\xi+\frac{\varkappa_1+1}{8\pi\mu_1}P_1-\frac{1}{2\pi\mu_1}P_1\cos\theta-$$

$$-\frac{\varkappa_1-1}{8\pi\mu_1}P_1\theta\sin\theta-\frac{\varkappa_1+1}{4\pi\mu_1}P_1\cos\theta\ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)-\frac{1}{2\pi\mu_1(1+\varkappa_1)}P_2\cos\theta$$

$$f_2(\theta)=\frac{\varkappa_1+1}{4\pi\mu_1 r_1}M+\frac{\varkappa_1+1}{4\pi\mu_1}P_1\sin\theta\ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)-$$

$$-\frac{\varkappa_1-1}{8\pi\mu_1}P_1\theta\cos\theta+\frac{1}{2\pi\mu_1(1+\varkappa_1)}P_2\sin\theta\qquad(-\pi<\theta<\pi)$$

Легко видеть, что функции $K^{(j)}(\theta-\xi)$ $(j=1,\,2)$ непрерывны в области $-\theta_1\leqslant\theta,\ \xi\leqslant\theta_2$ и имеют квадратично суммируемые частные производные первого порядка.

Теперь, рассматривая усиливающее кольцо как цилиндрическую тонкую оболочку, запишем уравнения его равновесия в перемещениях

$$\begin{aligned}&\frac{D}{r_2^4}\left(\frac{d^4v_r^{(2)}}{d\theta^4}-\frac{d^3v_\theta^{(2)}}{d\theta^3}\right)+\frac{h}{r_2^2}(2\mu_0+\lambda_0)\left(\frac{dv_\theta^{(2)}}{d\theta}+v_r^{(2)}\right)=q_1(\theta)-q_2(\theta)\\&\frac{D}{r_2^4}\left(\frac{d^3v_r^{(2)}}{d\theta^3}-\frac{d^2v_\theta^{(2)}}{d\theta^2}\right)-\frac{h}{r_2^2}(2\mu_0+\lambda_0)\left(\frac{d^2v_\theta^{(2)}}{d\theta^2}+\frac{dv_r^{(2)}}{d\theta}\right)=\tau_1(\theta)-\tau_2(\theta)\end{aligned}\qquad(1.5)$$

Здесь $D=E_0h^3/12$ — жесткость усиливающего кольца на изгиб; $2\mu_0+\lambda_0=E_0(1-\nu_0)/(1+\nu_0)(1-2\nu_0)$ для плоской деформации и $2\mu_0+$ $+\lambda_0=E_0/(1-\nu_0^2)$ для плоского напряженного состояния, а E_0 и ν_0 — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона для материала усиливающего кольца.

Отметим, что при выводе уравнений (1.5) за перемещения срединной линии оболочки приняты перемещения линии соединения усиливающего кольца с основанием, поперечная деформация тонкого кольца взята равной нулю, а для выражения поперечной силы через перемещения использованы известные формулы сопротивления материалов для кривого бруса. Следует еще отметить, что уравнения (1.5) с точностью коэффициентов совпадают с соответствующими уравнениями цилиндрической оболочки, выведенными в [7] на основе классических гипотез Кирхгофа-Лява. Однако, указанные предположения, лежащие в основе (1.5) и являющиеся модификацией этих гипотез, для обсуждаемой задачи представляются более естественными и, поэтому, в дальнейшем будут использованы именно они.

Поскольку требуется определить только законы распределения контактных напряжений под диском $q_1(\theta)$ и $\tau_1(\theta)$, то система уравнений (1.5) будет использована для исключения $q_2(\theta)$ и $\tau_2(\theta)$. Для этого достаточно подставить в правую часть (1.5) разложения функций $q_j(\theta)$, $\tau_j(\theta)$ $(j=1, 2)$ в ряд Фурье, в левую часть выражения $v_r^{(2)}$ и $v_\theta^{(2)}$ из (1.3), а затем приравнивать коэффициенты при $e^{ik\theta}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Упомянутые разложения имеют вид

$$-q_1(\theta) + i\tau_1(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\theta}, \qquad A_k = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\theta_0}^{\theta_0} [q_1(\xi) - i\tau_1(\xi)]\, e^{-ik\xi} d\xi$$

$$-q_2(\theta) + i\tau_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k e^{ik\theta}, \qquad B_k = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [q_2(\xi) - i\tau_2(\xi)]\, e^{-ik\xi} d\xi$$

Выполняя поочередно указанные операции, получим

$$\begin{gathered}\operatorname{Re} B_0 = \frac{1}{1+b}\operatorname{Re} A_0, \quad \operatorname{Im} B_0 = \operatorname{Im} A_0, \quad B_1 = A_1, \quad B_{-1} = A_{-1}/(1+a+b) \\ B_k = \frac{d_k^{(1)}}{d_k} A_k + \frac{d_k^{(2)}}{d_k}\overline{A}_{-k}, \qquad B_{-k} = \frac{d_k^{(3)}}{d_k}\overline{A}_k + \frac{d_k^{(4)}}{d_k} A_{-k}, \quad (k = 2, 3, \ldots)\end{gathered} \tag{1.6}$$

где

$$a = D/2r_2^3\mu_2, \quad b = (2\mu_0 + \lambda_0)\, h/2r_2\mu_2, \quad d_k^{(1)} = ak^3 + ak^2 + bk + b + 2$$

$$d_k^{(2)} = -ak^3 + ak^2 + bk - b, \qquad d_k^{(3)} = -\varkappa_2 ak^3 - \varkappa_2 ak^2 + \varkappa_2 bk + \varkappa_2 b$$

$$d_k^{(4)} = \varkappa_2 ak^3 - \varkappa_3 ak^2 + \varkappa_2 bk - \varkappa_2 b + 2$$

$$d_k = 2\varkappa_2 abk^2(k^2-1) + \varkappa_2 ak^2(k-1) + ak^2(k+1) +$$

$$+ \varkappa_2 b(k-1) + b(k+1) + 2$$

Подставляя выражения $v_r^{(j)}$, $v_\theta^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ из (1.2) и (1.3) с учетом (1.6) в систему (1.1), затем умножая второе из уравнений (1.1) на отрицательную мнимую единицу — i и складывая с первым, после некоторых элементарных выкладок придем к интегральному уравнению

$$\frac{(x_1+1)r_1}{4\pi\mu_1}\int_{-\theta_1}^{\theta_2}\left[\ln\frac{1}{2\left|\sin\frac{\theta-\xi}{2}\right|}+i\frac{\pi}{2}\frac{x_1-1}{x_1+1}\operatorname{sign}(\theta-\xi)\right]\chi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\int_{-\theta_1}^{\theta_2}G_1(\theta-\xi)\chi(\xi)\,d\xi+\int_{-\theta_1}^{\theta_2}G_2(\theta-\xi)\overline{\chi(\xi)}\,d\xi=f(\theta),\quad(-\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2)$$

Перейдем к новым переменным

$$t=\theta+\beta,\quad s=\xi+\beta,\quad \beta=(\theta_1-\theta_2)/2,\quad (\theta_1+\theta_2)/2=\alpha$$

Считая, что диск упругий и отличен от жесткой шайбы, предыдущее уравнение запишем в виде

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\frac{1}{2\left|\sin\frac{t-s}{2}\right|}-i\frac{\pi}{2}\operatorname{th}\pi\mu\operatorname{sign}(t-s)\right]\chi_0(s)\,ds+$$

$$+\int_{-\alpha}^{\alpha}K_1(t-s)\chi_0(s)\,ds+\int_{-\alpha}^{\alpha}K_2(t-s)\overline{\chi_0(s)}\,ds=f_0(t) \tag{1.7}$$

где

$$\operatorname{th}\pi\mu=-(x_1-1)/(x_1+1)$$

В ядре уравнения (1.7) выделены его главная (сингулярная) часть в виде ядра

$$\ln\frac{1}{2\left|\sin\frac{t-s}{2}\right|}-i\frac{\pi}{2}\operatorname{th}\pi\mu\operatorname{sign}(t-s)$$

и регулярная часть в виде непрерывных функций

$$K_1(t-s)=4\pi\mu_1G_1(t-s)/(x_1+1)r_1,\quad K_2(t-s)=4\pi\mu_1G_2(t-s)/(x_1+1)r_1$$

где

$$G_1(t-s)=K^{(1)}(t-s)+\frac{r_2}{4\pi\mu_2}\sum_{k=2}^{\infty}a_k^{(1)}\cos k(t-s)+$$

$$+\frac{r_2}{4\pi\mu_2(1+a+b)}\cos(t-s)+$$

$$+i\left[K^{(2)}(t-s)+\frac{r_2}{4\pi\mu_2}\sum_{k=2}^{\infty}a_k^{(2)}\sin k(t-s)\right]$$

$$G_2(t-s)=\frac{r_2}{4\pi\mu_2}\sum_{k=2}^{\infty}a_k^{(3)}\cos k(t-s)-\frac{r_1}{2\pi\mu_1}\cos(t-s)$$

$$(-\alpha\leqslant t,\quad s\leqslant\alpha)$$

Здесь

$$a_k^{(1)}=[2\varkappa_2ak^4+2\varkappa_2ak^2+2\varkappa_2bk^2+2\varkappa_2(k+1)+$$

$$+2(k-1)+2\varkappa_2b]/(k^2-1)\,d_k$$

$$a_k^{(2)}=-[4\varkappa_2ak^3+4\varkappa_2bk+2\varkappa_2(k+1)-2(k-1)]/(k^2-1)\,d_k$$

$$a_k^{(3)}=-2(\varkappa_2ak^2-\varkappa_2b)/d_k\quad(k=2,\ 3,\ \dots)$$

Через $\chi_0(t)$ обозначена комбинация компонентов неизвестных контактных напряжений в комплексной форме, приведенных к безразмерному виду

$$\chi_0(t)=r_2\chi(t)/4\pi\mu_2\varepsilon=p_0(t)+i\tau_0(t)$$

$$p_0(t)=r_2p(t)/4\pi\mu_2\varepsilon=r_2q_1(t-\beta)/4\pi\mu_2\varepsilon$$

$$\tau_0(t)=r_2\tau(t)/4\pi\mu_2\varepsilon=r_2\tau_1(t-\beta)/4\pi\mu_2\varepsilon$$

Функция $f_0(t)$ имеет вид

$$f_0(t)=\mu_1r_1f(t-\beta)/(\varkappa_1+1)\,\mu_2r_1\varepsilon=f_0^{(1)}(t)+if_0^{(2)}(t)$$

$$f_0^{(1)}(t)=P_{10}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{g_0}{2(1+a+b)}-\frac{2}{1+\varkappa_1}\right)\cos(t-\beta)-\right.$$

$$\left.-\cos(t-\beta)\ln\left(2\cos\frac{t-\beta}{2}\right)-\frac{1}{2}\frac{\varkappa_1-1}{\varkappa_1+1}(t-\beta)\sin(t-\beta)\right]+$$

$$+P_{20}\left(\frac{g_0}{2(1+a+b)}-\frac{1}{(1+\varkappa_1)^2}\right)\cos(t-\beta)+(\delta_0+1)\,g_0\cos(t-\beta)-$$

$$-\gamma_0g_0\sin(t-\beta)+\left[\frac{1}{2}-g_0/(1+b)\right]\int_{-\alpha}^{\alpha}p_0(t)\,dt-g_0$$

$$f_0^{(2)}(t)=M_0(1-g_0)-P_{10}\left[\frac{g_0}{2(1+a+b)}\sin(t-\beta)-\right.$$

$$\left.-\sin(t-\beta)\ln\left(2\cos\frac{t-\beta}{2}\right)+\frac{1}{2}\frac{\varkappa_1-1}{\varkappa_1+1}(t-\beta)\cos(t-\beta)\right]-$$

$$-P_{20}\left(\frac{g_0}{2(1+a+b)}-\frac{2}{(1+\varkappa_1)^2}\right)\sin(t-\beta)-$$

$$-\delta_0g_0\sin(t-\beta)+\gamma_0g_0[1-\cos(t-\beta)]$$

Здесь введены также безразмерные величины:

$$P_{10} = r_2 P_1 / 4\pi\mu_2 r_1 \varepsilon, \quad P_{20} = r_2 P_2 / 4\pi\mu_2 r_1 \varepsilon, \quad M_0 = r_2 M / 4\pi\mu_2 r_1^2 \varepsilon$$

$$\delta_0 = \delta/\varepsilon, \quad \gamma_0 = r_1 \psi/\varepsilon, \quad g_0 = r_2 \mu_1 / r_1 \mu_2 (1 + \varkappa_1)$$

Ядра $K_j(t-s)$ $(j = 1, 2)$ непрерывны в квадрате $-\alpha \leqslant t, s \leqslant \alpha$ и имеют квадратично суммируемые первые частные производные.

В частном случае, когда усиливающее покрытие отсутствует $(h = 0)$, будем иметь следующее интегральное уравнение:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\ln \frac{1}{2\left|\sin \frac{t-s}{2}\right|} - i\frac{\pi}{2} \operatorname{th} \pi\gamma_1 \operatorname{sign}(t-s) \right] \chi_0(s)\, ds +$$

$$+ \int_{-\alpha}^{\alpha} K_0(t-s)\, \chi_0(s)\, ds -$$

$$- \frac{2}{(1+\varkappa_1)[1+(1+\varkappa_2) g_0]} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos(t-s)\, \overline{\chi_0(s)}\, ds = f^{(0)}(t)$$

имеющее вполне аналогичную к (1.7) структуру. Здесь

$$\operatorname{th} \pi\gamma_1 = (\varkappa_1 - 1)[(\varkappa_2 - 1) r_2\mu_1/(\varkappa_1 - 1) r_1\mu_2 - 1]/[1 + (1+\varkappa_2) g_0](1+\varkappa_1) = \beta_0$$

$$2K_0(t-s) = 2R_{12}(t-s) - \beta_0 R_{22}(t-s) +$$
$$+ i\,[2R_{21}(t-s) - \beta_0 R_{20}(t-s) + (t-s)\beta_0]$$

$$f^{(0)}(t) = [f_0^{(1)}(t) + i f_0^{(2)}(t) - 1/2\,(P_{10} + P_{20})\, g_0 \cos(t-\beta) +$$

$$+ g_0 \int_{-\alpha}^{t} F_0(t)\, dt + i[M_0 g_0 + 1/2\,(P_{10} + P_{20})\, g_0 \sin(t-\beta)]]/[1 + (1+\varkappa_2) g_0]$$

В заключение приведем определяющие уравнения также в том случае, когда при контактном взаимодействии указанных тел возникают силы кулоновского трения, то есть когда $\tau(t) = \lambda p(t)$ [8], где λ — коэффициент трения. Эти уравнения будут иметь вид

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\ln \frac{1}{2\left|\sin \frac{t-s}{2}\right|} + \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \pi\gamma^{(j)} \operatorname{sign}(t-s) \right] p_0(s)\, ds +$$

$$+ \int_{-\alpha}^{\alpha} K_j^*(t-s)\, p_0(s)\, ds = f_j^*(t) \qquad (1.8)$$

Здесь $j = 1$ — для общего случая, а $j = 2$ — для случая $h = 0$. Кроме того,

$$K_1^*(t-s) = \mathrm{Re}\,[K_1(t-s)] + K_2(t-s) - \lambda\,\mathrm{Im}\,[K_1(t-s)]$$

$$K_2^*(t-s) = \mathrm{Re}\,[K_0(t-s)] - 2\cos(t-s)/[1+(1+\varkappa_2)g_0](1+\varkappa_1) -$$

$$-\lambda\,\mathrm{Im}\,[K_0(t-s)]$$

$$f_1^*(t) = \mathrm{Re}\,[f_0(t)], \quad f_2^*(t) = \mathrm{Re}\,[f^{(0)}(t)]$$

$$\mathrm{tg}\,\pi\nu^{(1)} = -\lambda(\varkappa_2-1)/(\varkappa_1+1), \quad \mathrm{tg}\,\pi\nu^{(2)} = i\beta_0$$

Легко заметить, что формальной заменой μ на $i\mu$ главная часть уравнения (1.7) перейдет в главную часть уравнения (1.8). Последнее дает возможность их решение построить единым аналитическим методом.

Таким образом, решение рассматриваемой задачи свелось к решению интегрального уравнения (1.7), откуда определятся законы распределения неизвестных контактных напряжений $\rho_0(t)$ и $\tau_0(t)$. Подлежат определению также размеры области контакта α, β, жесткое смещение δ и угол относительного поворота ψ диска. Поэтому к уравнению (1.7) должны быть добавлены условия равновесия диска (1.4) и условия ограниченности контактных напряжений на концах зоны контакта [1, 3, 9].

$$\chi_0(\pm\alpha) = 0 \tag{1.9}$$

§ 2. Сведение интегрального уравнения (1.7) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений и ее исследование. Возможные особенности контактных напряжений на концах зоны контакта должны иметь вид [5, 10—12]

$$\chi_0(t) = O[(\alpha-t)^{\sigma_0}(\alpha+t)^{\gamma_0}] \quad \text{при} \quad t \to \pm\alpha$$

Следовательно, $\chi_0(t)$ можно представить в виде

$$\chi_0(t) = (\alpha-t)^{\sigma}(\alpha+t)^{\gamma}\chi_0^*(t) = \left(\sin\frac{\alpha-t}{2}\right)^{\sigma}\left(\sin\frac{\alpha+t}{2}\right)^{\gamma}\chi_0^{**}(t) \tag{2.1}$$

где $\sigma = \sigma_0 - 1 = -1/2 - i\mu$, $\gamma = \gamma_0 - 1 = -1/2 + i\mu$, а $\chi_0^*(t)$, $\chi_0^{**}(t)$ — регулярные функции на отрезке $[-\alpha, \alpha]$, притом $\chi_0^{**}(t) = O(\alpha^2 - t^2)$ при $t \to \pm\alpha$.

Исходя из формулы (2.1), решение уравнения (1.7) представим рядом

$$\chi_0(t) = w(t)\sum_{m=0}^{\infty} Z_m P_m^{(\sigma,\gamma)}(x) \tag{2.2}$$

с неизвестными коэффициентами $\{Z_m\}_{m=0}^{\infty}$. При этом, ввиду (1.9), должны иметь место условия

$$\sum_{m=0}^{\infty} Z_m P_m^{(\sigma,\gamma)}(\pm 1) = 0$$

Здесь

$$w(t)=\frac{1}{2}\left(\sec\frac{t}{2}\right)^{2+\sigma+\rho}\left(\sin\frac{\alpha-t}{2}\right)^{\sigma}\left(\sin\frac{\alpha+t}{2}\right)^{\rho}, \qquad x=\operatorname{tg}\frac{t}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$\{P_m^{(\sigma,\rho)}(x)\}_{m=0}^{\infty}$ ($\mathrm{Re}(\sigma,\rho)>-1$) — многочлены Якоби, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1-x)^{\sigma}(1+x)^{\rho}$.

При сведении задачи к бесконечной системе нам понадобится соотношение

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left|\ln\frac{1}{2\left|\sin\frac{t-s}{2}\right|}-i\frac{\pi}{2}\operatorname{th}\pi\mu\operatorname{sign}(t-s)\right|w(s)P_m^{(\sigma,\rho)}(y)\,ds=$$

$$=\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{1+\sigma+\rho}\sec\frac{\alpha}{2}\left[\gamma_m P_m^{(\rho,\sigma)}(x)-\eta_m\ln\left(2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{t}{2}\right)-J_m^{\sigma,\rho}\right] \qquad (2.3)$$

$$(m=0,1,2,\ldots)$$

которое следует из результатов работы [13].

Здесь

$$y=\operatorname{tg}\frac{s}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \qquad 2\gamma_0=-i\pi^2\operatorname{th}\pi\mu\operatorname{sech}\pi\mu-$$

$$-2\pi\operatorname{sech}\pi\mu\left[\ln 2+\psi(0.5-i\mu)-\psi(1)\right]$$

$$\gamma_m=\pi m^{-1}\operatorname{sech}\pi\mu, \quad (m=1,2,\ldots)$$

$$\eta_m=\begin{cases}h_0 & \text{при } m=0\\ 0 & \text{при } m=1,2,\ldots\end{cases}; \qquad h_0=\frac{2^{1+\sigma+\rho}\Gamma(1+\sigma)\Gamma(1+\rho)}{(1+\sigma+\rho)\Gamma(1+\sigma+\rho)}=\pi\operatorname{sech}\pi\mu$$

$$J_m^{\sigma,\rho}=\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{-1-\sigma-\rho}\cos\frac{\alpha}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln\left(\cos\frac{t}{2}\right)w(t)P_m^{(\sigma,\rho)}(x)\,dt$$

$$(m=0,1,2,\ldots)$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция, $\psi(z)$ — пси-функция Эйлера.

Подставляя (2.2) в (1.7) и учитывая (2.3), уравнение (1.7) известным способом сведем к бесконечной системе линейных уравнений

$$Z_n+H_n\sum_{m=1}^{\infty}m^{-1}Z_mK_{n,m}^{(1)}+H_n\sum_{m=1}^{\infty}m^{-1}\overline{Z}_mK_{n,m}^{(2)}=H_nn^{-1}b_n \qquad (2.4)$$

$$(n=1,2,\ldots)$$

Кроме того, получим соотношение

$$Z_0\left[1-\gamma_0^{-1}h_0\ln\left(2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)-\gamma_0^{-1}J_0^{\rho,\sigma}\right]-$$

$$-\gamma_0^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}Z_m J_m^{\sigma,\rho}+\sum_{m=0}^{\infty}Z_m K_{0,m}^{(1)}+\sum_{m=0}^{\infty}\overline{Z}_m K_{0,m}^{(2)}=b_0$$

откуда можем определить коэффициент Z_0.

Здесь введены следующие обозначения:

$$K_{n,m}^{(1)}=\int_{-\alpha}^{\alpha}\overline{w(t)}\,P_n^{(\rho,\sigma)}(x)\,dt\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial s}[K_1(t-s)]\,w_0(s)\,P_{m-1}^{(\sigma+1,\rho+1)}(y)\,ds$$

$$K_{n,m}^{(2)}=\int_{-\alpha}^{\alpha}\overline{w(t)}\,P_n^{(\rho,\sigma)}(x)\,dt\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial s}[K_2(t-s)]\,\overline{w_0(s)}\,P_{m-1}^{(\rho+1,\sigma+1)}(y)\,ds$$

$$(n,\ m=1,\ 2,\ \ldots)$$

$$b_n=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{d}{dt}[f_0(t)]\,\overline{w_0(t)}\,P_{n-1}^{(\rho+1,\sigma+1)}(x)\,dt-Z_0K_{n,0}^{(1)}-\overline{Z}_0\overline{K}_{n,0}^{(2)}-$$

$$-Z_0h_0\sec\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{1+\sigma+\rho}\frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\operatorname{tg}\frac{t}{2}\,\overline{w_0(t)}\,P_{n-1}^{(\sigma+1,\sigma+1)}(x)\,dt$$

$$(n=1,\ 2,\ \ldots)$$

$$H_n=n\pi^{-1}\operatorname{ch}\pi\mu\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{-3-2\sigma-2\rho}(h_n)^{-1},\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

$$K_{0,m}^{(1)}=H_0\int_{-\alpha}^{\alpha}\overline{w(t)}\,dt\int_{-\alpha}^{\alpha}K_1(t-s)\,w(s)\,P_m^{(\sigma,\rho)}(y)\,ds$$

$$K_{0,m}^{(2)}=H_0\int_{-\alpha}^{\alpha}\overline{w(t)}\,dt\int_{-\alpha}^{\alpha}K_2(t-s)\overline{w(s)}\,P_m^{(\rho,\sigma)}(y)\,ds,\quad (m=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

$$b_0=H_0\int_{-\alpha}^{\alpha}f_0(t)\overline{w(t)}\,dt$$

где

$$K_{n,0}^{(1)}=\int_{-\alpha}^{\alpha}\overline{w_0(t)}\,P_{n-1}^{(\rho+1,\sigma+1)}(x)\,dt\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}[K_1(t-s)]\,w(s)\,ds$$

$$K_{n,0}^{(2)} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{w_0(t)}\, P_{n-1}^{(\sigma+1,\,\rho+1)}(x)\,dt \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial t}\left[K_2(t-s)\right]\sqrt{w(s)}\,ds, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$w_0(t) = \frac{1}{2}(\cos t - \cos\alpha)\, w(t), \qquad H_0 = \cos^{\rho}\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{-2(1+\sigma+\rho)}(\gamma_0 h_0)^{-1}$$

$$h_n = \frac{2^{1+\sigma+\rho}\,\Gamma(n+1+\sigma)\,\Gamma(n+1+\rho)}{n!\,(2n+1+\sigma+\rho)\,\Gamma(n+1+\sigma+\rho)}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$x = \operatorname{tg}\frac{t}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \qquad y = \operatorname{tg}\frac{s}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

Исследуем систему (2.4) на регулярность. С этой целью введем новые неизвестные по формуле

$$Z_n = n^{1-\varepsilon_1} z_n, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

где ε_1 — сколь угодно малое положительное фиксированное число. Тогда придем к бесконечной системе

$$z_n + \frac{H_n}{n} n^{\varepsilon_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z_m}{m^{\varepsilon_1}} K_{n,m}^{(1)} + \frac{H_n}{n} n^{\varepsilon_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_m}{m^{\varepsilon_1}} K_{n,m}^{(2)} = \frac{H_n}{n^2} n^{\varepsilon_1} b_n, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

которая квазивполнерегулярна, то есть $S_n^{(1)}, S_n^{(2)} \to 0$ при $n \to \infty$, где

$$S_n^{(1)} = \frac{H_n}{n} n^{\varepsilon_1} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\varepsilon_1} |K_{n,m}^{(1)}|, \qquad S_n^{(2)} = \frac{H_n}{n} n^{\varepsilon_1} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\varepsilon_1} |K_{n,m}^{(2)}|$$

Действительно, пользуясь известным асимптотическим представлением для функции $\Gamma(z)$ [14], легко показать, что

$$H_n/n = 2\pi^{-1} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{ch}\pi\mu n\,[1 + O(n^{-1})] \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{2.5}$$

С другой стороны, следуя [12, 15], на основе асимптотического представления многочленов Якоби [16]

$$P_n^{(\sigma,\rho)}(\cos\varphi) \approx \frac{\cos\{[n + (1+\sigma+\rho)/2]\varphi - (1+2\sigma)\pi/4\}}{\sqrt{\pi n}\,(\sin 1/2\,\varphi)^{1/2+\sigma}\,(\cos 1/2\,\varphi)^{1/2+\rho}} + O(n^{-3/2})$$

$$(n \to \infty)$$

$$\operatorname{Re}(\sigma, \rho) > -1, \quad 0 < \varphi < \pi$$

и с учетом (2.5) для достаточно больших n, m будем иметь

$$S_n^{(1)} = N_1 n^{1/2+\varepsilon_1} \sum_{m}^{\infty} \frac{1}{m^{1/2+\varepsilon_1}} |K_{n,m}^{(1)*}| \leqslant N_2 n^{1/2+\varepsilon_1} \sum_{j=1}^{4} \left[\sum_{m}^{\infty} (A_{n,m}^{(j)})^2\right]^{1/2}$$

Здесь N_1, N_2 — некоторые постоянные, а через $K_{n,m}^{(1)\infty}$ обозначены значения $K_{n,m}^{(1)}$ для больших n и m, которые здесь в явном виде не приводятся. Отметим лишь, что их можно представить формулой

$$K_{n,m}^{(1)\infty} = \sum_{j=1}^{4} A_{n,m}^{(j)}$$

где $A_{n,m}^{(j)}$ — коэффициенты Фурье некоторых квадратично суммируемых функций $f_j(t, s)$ $(j = 1 - 4)$ $(-\alpha \leqslant t,\ s \leqslant \alpha)$ по полным ортогональным системам многочленов

$$\{U_n(x)\, U_m(y);\quad U_n(x)\, T_m(y);\quad T_n(x)\, U_m(y);\quad T_n(x)\, T_m(y)\}_{n,\ m=0}^{\infty}$$

где $T_n(x)$ и $U_n(x)$ — соответственно многочлены Чебышева первого и второго рода. Следовательно, для каждого разложения будет иметь место равенство Парсеваля, откуда будет вытекать сходимость рядов

$$\sum_{n,\ m}^{\infty} (A_{n,m}^{(j)})^2, \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

Тогда сходятся и ряды [17]

$$\sum_{n}^{\infty} \left| \sum_{m}^{\infty} (A_{n,m}^{(j)})^2 \right]$$

Следовательно, по крайней мере,

$$\sum_{m}^{\infty} (A_{n,m}^{(j)})^2 = O[n^{-(1+2\varepsilon_j)}], \quad n \to \infty$$

где ε_j — малое положительное, но фиксированное число. Отсюда следует, что

$$S_n^{(1)} = O(n^{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}), \quad n \to \infty$$

Выбрав $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, будем иметь $S_n^{(1)} \to 0$ при $n \to \infty$. Аналогичным образом можно показать, что $S_n^{(2)} \to 0$ при $n \to \infty$, а

$$H_n n^{\varepsilon_1} b_n / n^{\varepsilon} = O(n^{-1+\varepsilon_1-\varepsilon_2}) \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

§ 3. *Конкретный пример.* В качестве конкретного примера рассмотрим два случая:

1) когда усиливающее покрытие настолько гибкое, что можно пренебречь его изгибной жесткостью ($D = 0$);

2) когда толщина усиливающего покрытия $h = 0$, то есть граница бесконечной пластины не усилена покрытием.

В обоих случаях считается, что отсутствуют тангенциальные контактные напряжения, вследствие чего следует принять $M = 0$. Тогда в зоне контакта будет действовать только нормальное контактное давление $p(t)$, притом $p(-t) = p(t)$, и область контакта становится симметричной относительно оси oX ($\beta = 0$, $\psi = 0$). Условие равновесия диска (при $P_1 = 0$) примет вид

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} p_0(s) \cos s \, ds = P_{20}$$

В обоих случаях задача сводится к следующему интегральному уравнению:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\ln \frac{1}{2\left|\sin \frac{t-s}{2}\right|} + K_0^{(j)}(t-s) \right] p_0(s)\, ds = f^{(j)}(t), \quad (-\alpha \leqslant t \leqslant \alpha) \qquad (3.1)$$

где $j = 1, 2$ соответственно случаям 1) и 2), а

$$K_0^{(1)}(t-s) = R_{11}(t-s) + \beta_1 R_{12}(t-s) + \beta_2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cos k(t-s)$$

$$2K_0^{2}(t-s) = 2R_{11}(t-s) - \beta_0 R_{12}(t-s)$$

$$A^{(1)} f^{(1)}(t) = P_{20}[g_0/2(1+b) - 2/(1+x_1)^2 + 2/(1+x_1) -$$

$$- x_2 g_0/(1+x_2)] \cos t + (\delta_0 + 1) g_0 \cos t +$$

$$+ [1/2 - g_0/(1+b) + 2x_2 g_0/(1+x_2)] \int_{-\alpha}^{\alpha} p_0(t)\, dt - g_0$$

$$A^{(2)} f^{(2)}(t) = P_{20}[2/(1+x_1) - 2/(1+x_1)^2] \cos t +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} p_0(t)\, dt - g_0 + (\delta_0 + 1) g_0 \cos t$$

$$a_k = (2x_2^2 bk - 2x_2 bk + x_2^2 k - 2x_2 k + k + x_2^2 - 1)/(k^2 - 1) d_{k0}$$

Здесь

$$\beta_1 = (x_1 - 1)/2(1 + x_1) A^{(1)}, \quad \beta_2 = 2g_0/(1 + x_1) A^{(1)}, \quad A^{(1)} = 1 + 4x_2 g_0/(1 + x_2)$$

$$A^{(2)} = 1 + (1 + x_2) g_0, \quad d_{k0} = x_2 b(k-1) + b(k+1) + 2$$

Решение интегрального уравнения (3.1), к которому сводится рассматриваемая задача при отсутствии тангенциальных контактных напряжений, и схема получения численных результатов даны в статье [6], поэтому на этих вопросах здесь не будем останавливаться.

В обсуждаемых случаях 1) и 2) числовые расчеты для различных значений α были проведены при плоской деформации, когда упругие постоянные диска и бесконечной пластины одинаковы $E_1 = E_2$. Затем было принято $E/E_2 = 1/2$, $h/r_2 = 0.05$, а коэффициент Пуассона $\nu_0 = \nu_1 = \nu_2 = 0.3$. Кроме того, положено $r_1 \approx r_0$, в то время как принимается $\varepsilon \neq 0$.

При указанных значениях параметров вычисления проводились на ЭМВ «Наири-2». Бесконечные системы решались методом редукции, притом, чтобы получить максимальные контактные напряжения с тремя верными знаками, достаточно было, как выяснилось, брать четыре уравнения из бесконечной системы.

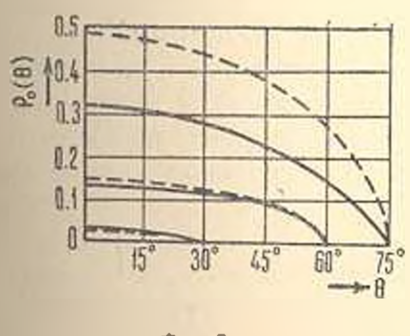
Таблица 1

	Случай 1) ($h \neq 0$)			Случай 2) ($h = 0$)		
	$\alpha = 30°$	$\alpha = 60°$	$\alpha = 75°$	$\alpha = 30°$	$\alpha = 60°$	$\alpha = 75°$
P_{2a}	0.0295	0.2003	0.4972	0.0281	0.2110	0.7778
δ_a	0.2144	0.7686	1.5370	0.1938	0.8904	2.6330
X_0	0.0097	0.0730	0.1911	0.0093	0.0770	0.3057
X_1	−0.0096	−0.0710	−0.1966	−0.0093	−0.0750	−0.2965
X_2	−0.0001	−0.0018	0.0060	0	−0.0020	−0.0084
X_3	0	−0.0002	−0.0005	0	0	−0.0008
$p_0(\theta)_{max}$	0.0371	0.1420	0.3225	0.0359	0.1500	0.4865

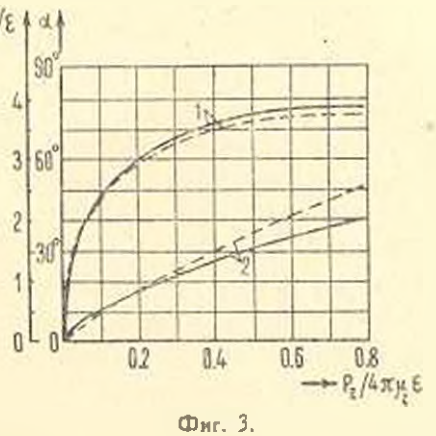
Значения постоянных P_{2a}, δ_a, коэффициентов $X_n (n = 0, 1, 2, 3)$ и максимальных контактных напряжений $p_0(\theta)_{max}$ при $\alpha = 30°, 60°$ и $75°$ приведены в табл. 1, а на графиках фиг. 2 показано влияние изменения длины участка контакта на закон распределения нормального контактного давления $p_n(\theta)$ (сплошные и пунктирные линии соответствуют случаям 1) и 2)).

При больших значениях α контактные напряжения резко возрастают, то есть существует критическое значение $\alpha < 90°$ [5].

На фиг. 3 приведены зависимости длины участка контакта 2α и величины жесткого смещения диска δ от прижимающей силы P_2. Эти зависимости на фиг. 3 даны соответственно кривыми 1 и 2.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

При отсутствии тангенциальных контактных напряжений результаты работы [5] в основном совпадают с изложенными здесь применительно к случаю 2).

Институт механики АН Армянской ССР
Ленинаканский филиал ЕрПИ им. К. Маркса

Поступила 23 IX 1977

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, Ֆ. Ս. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՍԿԱՎԱՌԱԿԻ ԵՎ ԲԱՐԱԿ ՕՂԱԿԱՅԻՆ ԾԱԾԿՈՒՅԹՈՎ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ ԿԼՈՐ ԱՆՑՔՈՎ ԱՆՎԵՐՋ ՍԱԼԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքում դիտարկվում է շրջանային առաձգական սկավառակի և կլոր անցքով անվերջ սալի կոնտակտային փոխազդեցության խնդիրը, երբ սալի եզրագիծը ուժեղացված է օղակային բարակ առաձգական ծածկույթով։ Առաձգական ծածկույթի համար օգտագործվում են գլանային թաղանթների տեսության որոշիչ հավասարումները՝ Կիրխոֆ-Լյավի հայտնի հիպոթեզների շրջանակներում։

Նշված խնդրի լուծումը բերված է Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը։ Յակոբիի օրթոգոնալ բազմանդամների մաթեմատիկական ապարատի օգնությամբ այդ հավասարման համար ստացված է էֆեկտիվ լուծում։ Թվային արդյունքները ներկայացված են աղյուսակով և գծագրերով։

ON CONTACT INTERACTION OF A ROUND DISK AND AN INFINITE PLATE WITH A CIRCULAR HOLE SUPPORTED BY A THIN CIRCULAR SURFACE

S. M. MKHITARIAN, F. S. TOROSSIAN

Summary

A contact problem on the pressure of an elastic round disk on the contour of an infinite plate with a circular hole where its boundary is supported by a thin element in the shape of an elastic circular surface attached to it, is considered. The supporting thin surface is interpreted in terms of the theory of thin cylindrical shells based on the well-known Kirchhoff-Love hypothesis.

The solution of the above problem is reduced to that of the first kind Fredholm integral equation. Its effective solution is presented. The numerical results are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
2. *Коровчинский М. В.* О некоторых вопросах эласторeологии, имеющих приложение в теории трения. Сб. «Трение и износ в машинах», XV. М., ин-т. Машиноведения, 1962.
3. *Кочанов Ф. П.* Решение обобщенной задачи И. Я. Штаермана. Докл. АН СССР, 1967, т. 173, № 5.
4. *Панасюк В. В., Теплый М. И.* Об одной контактной задаче с учетом сил трения. Прикл. механика, 1972, т. 8, вып. 7.
5. *Моравь Г. А., Попов Г. Я.* К теории контактных задач для цилиндрических тел с учетом сил трения. МТТ, 1976, № 2.
6. *Тоносян Ф. С.* Об одной контактной задаче для цилиндрических тел. Уч. записки ЕрГУ, сер. естественных наук, 1977, № 1.
7. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1951.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
9. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
10. *Arutunian N. Kh. and Mkhitarian S. M.* Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners. Trends in elasticity and termoelasticity. Witold Nowacki Anniversary Volume, Groningen, Wolters-Noordhoff Publ., 1971, p. 3—20.
11. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, т. 25, № 2.
12. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Контактная задача о вдавливании штампа в упругую полуплоскость с тонким усиливающим покрытием. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
13. *Попов Г. Я.* Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
14. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1, М., «Наука», 1973.
15. *Гулян К. Г.* Передача нагрузки от стрингера конечной длины к двум клиновидным упругим пластинам. Докл. АН Арм. ССР, 1974, т. 59, № 4.
16. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1962.
17. *Уиттекер Э., Ватсон Г.* Курс современного анализа, т. 3. М., Физматгиз, 1963.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXI, № 5, 1978 Механика

В. А. БАБЕШКО, В. Е. ВЕКСЛЕР

О НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

1. *Описание системы интегральных уравнений.* Некоторые краевые задачи теории упругости и математической физики со смешанными граничными условиями сводятся к системе интегральных уравнений первого рода на отрезке

$$\int_a^b k(x, y)\sigma(y)\,dy = u(x), \quad B \leqslant a \leqslant x \leqslant b \leqslant T \tag{1.1}$$

где

$$k(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} S(\eta_n, x) K(\eta_n) S(\eta_n, y) G^{-1}(\eta_n) \tag{1.2}$$

$$K(x) = \begin{pmatrix} K_{11}(x) & K_{12}(x) \\ K_{21}(x) & K_{22}(x) \end{pmatrix}, \qquad S(\eta, x) = \begin{pmatrix} \theta(\eta, x) & 0 \\ 0 & h(\eta, x) \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Здесь $\sigma(y)$ — неизвестная вектор-функция, как правило, линейно связанная с контактными напряжениями, $u(y)$ — известная на (a, b) вектор-функция, характеризующая перемещения в области контакта.

Случай одного интегрального уравнения подобного рода исследовался в работах [1—3].

Предполагается, что функции $\theta(\eta_n, x)$ и $h(\eta_n, x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ являются собственными функциями соответственно следующих задач Штурма-Лиувилля:

$$1) \qquad -\left\{a(x)\frac{d\theta(\eta, x)}{dx}\right\}' + b(x)\theta(\eta, x) = n^2(\eta)\theta(\eta, x) \tag{1.4}$$

$$\alpha_B^{(1)}\theta(\eta, B) + \alpha_B^{(2)}\theta'(\eta, B) = 0 \tag{1.5}$$

$$\alpha_T^{(1)}\theta(\eta, T) + \alpha_T^{(2)}\theta'(\eta, T) = 0, \; n^2(\eta) = \eta^2 - C^2 \tag{1.6}$$

$$2) \qquad -\left\{a(x)\frac{dh(\eta, x)}{dx}\right\}' + q(x)h(\eta, x) = n^2(\eta)h(\eta, x) \tag{1.7}$$

$$\beta_B^{(1)}h(\eta, B) + \beta_B^{(2)}h'(\eta, B) = 0 \tag{1.8}$$

$$\beta_T^{(1)}h(\eta, T) + \beta_T^{(2)}h'(\eta, T) = 0 \tag{1.9}$$

Пусть спектры обеих задач дискретны, совпадают и состоят из точек η_n ($n = 1, 2, \ldots$) и пусть имеют место следующие соотношения:

$$\int_B^T \theta(\eta_K, x)\,\theta(\eta_n, x)\,dx = \delta_{nK}, \quad \int_B^T h(\eta_K, x)\,h(\eta_n, x)\,dx = n^2(\eta_K)\,\delta_{nK} \qquad (1.10)$$

Здесь δ_{nK} — символ Кронекера.

Различные условия, при которых имеют место вышеприведенные свойства функций $\theta(\eta_K, x)$ и $h(\eta_K, x)$, рассмотрены, например, в [4, 5].

Предполагается, что $c(x)$ принадлежит классу вектор-функций таких, что их компоненты допускают разложения в ряды соответственно по $\theta(\eta_K, x)$ и $h(\eta_K, x)$.

Пусть существуют функции $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ такие, что

$$a(x) = \mu^2(x), \quad q(x) = \lambda^2(x) - \mu'(x)\,\lambda(x) - \mu(x)\,\lambda'(x)$$

$$b(x) = \lambda^2(x) - \lambda(x)\,\mu'(x) + \mu(x)\,\lambda'(x) - \mu(x)\,\mu''(x) \qquad (1.11)$$

$$h(\eta, x) = \lambda(x)\,\theta(\eta, x) - [\mu(x)\,\theta(\eta, x)]'$$

$$n^2(\eta)\,\theta(\eta, x) = \lambda(x)\,h(\eta, x) + \mu(x)\,h'(\eta, x) \qquad (1.12)$$

Обозначим $\chi(\eta, x)$ и $m(\eta, x)$ соответственно решения уравнений (1.4) и (1.7), линейно независимые с $\theta(\eta, x)$ и $h(\eta, x)$ и связанные теми же рекуррентными соотношениями (1.12), что и $\theta(\eta, x)$ с $h(\eta, x)$.

Относительно функций $K_{11}(u)$, $K_{12}(u)$, $K_{21}(u)$, $n^2(u)\,K_{22}(u)$, $G(u)$ предположим, что они целые, четные или нечетные одновременно.

Введем функцию

$$\Delta(u) = n^2(u) \det K(u)$$

Пусть на вещественной оси имеет место асимптотика

$$K_{11}(u)\,G^{-1}(u) = n^2(u)\,K_{22}(u)\,G^{-1}(u) = C|u|^{-1} + O(|u|^{-1-\varepsilon})$$

$$K_{ij}(u)\,G^{-1}(u) = B|u|^{-2} + O(|u|^{-2-\varepsilon}) \ (i \neq j), \ C^2 - B^2 > 0, \ \varepsilon > 0 \qquad (1.13)$$

$$u \to \pm\infty$$

а в комплексной плоскости существуют правильные системы контуров $\{C_n\}$ и $\{C_n'\}$ [6], на которых выполняются оценки

$$|K_{ij}(u)\,G^{-1}(u)| \leqslant M|u|^{-\gamma}, \quad u \in C_n, \quad M = \text{const}$$

$$\gamma = 1 \text{ при } i = j = 1; \ \gamma = 2 \text{ при } i \neq j; \ \gamma = 3 \text{ при } i = j = 2$$

$$|K_{ij}(u')\,G(u')\,\Delta^{-1}(u')| \leqslant M|u'|^{\varkappa}, \quad u' \in C_n'$$

$$\varkappa = 1 \text{ при } i = j = 1; \ \varkappa = 0 \text{ при } i \neq j; \ \varkappa = -1 \text{ при } i = j = 2 \qquad (1.14)$$

Тогда оцененные функции допускают разложения в ряды по простейшим дробям [6]. Предположим, что эти ряды сходятся абсолютно.

Пусть нули функций $G(u)$ и $\Delta(u)$ простые. Ввиду (1.13) на действительной оси их число может быть лишь конечным. Обозначим λ_K и μ_K $(K = 1, 2, \ldots)$ нули соответственно $\Delta(u)$ и $G(u)$, лежащие в верхней полуплоскости или на положительной полуоси.

2. *Разрешимость и единственность.* Определим пространство $H_\lambda(B, T)$ как множество вектор-функций $q(u)$ таких, что

$$\|q\|^2_{H_\lambda(B,T)} = \sum_{n=1}^{\infty} |M_n^{-\lambda} q_n^*|^2 < \infty$$

$$q_n^* = \int_B^T R_n(x)\, q(x)\, dx \qquad (2.1)$$

где

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{u^2 + D^2}} \begin{pmatrix} C & B \\ B & C \end{pmatrix}, \qquad R_K(x) = \begin{pmatrix} \theta(\tau_K, x) & 0 \\ 0 & n(\tau_K)\, h(\tau_K, x) \end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

$$D = \text{const}$$

Введем пространство $H_\lambda(a, b)$ как совокупность сужений на (a, b) обобщенных вектор-функций из $H_\lambda(B, T)$. В пространстве $H_\lambda(a, b)$ вводится норма

$$\|q\|_{H_\lambda(a,b)} = \inf \|q^c\|_{H_\lambda(B,T)} \qquad (2.3)$$

inf берется по всем вектор-функциям $q^c \in H_\lambda(B, T)$, сужение которых на (a, b) совпадает с q.

Обозначим через $C_0^\infty(a, b)$ множество всех бесконечно дифференцируемых вектор-функций, равных нулю вне компактных подмножеств в (a, b).

Пространство $\mathring{H}_\lambda(a, b)$ определим как замыкание множества $C_0^\infty(a, b)$ в норме $\|\cdot\|_{H_\lambda(B,T)}$.

Норма элемента $q \in \mathring{H}_\lambda(a, b)$ совпадает с его нормой в $H_\lambda(B, T)$. Введенные пространства заимствованы из [7], где изучены их свойства.

Указанные в пункте 1 свойства системы интегральных уравнений обеспечивают выполнение следующих теорем.

Теорема 2.1. Пусть $K_{11}(\eta_n)\, G^{-1}(\eta_n) > 0$, $\Delta(\eta_n)\, G^{-1}(\eta_n) > 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда система (1.1) однозначно разрешима в $\mathring{H}_{-0.5}(a, b)$ при любой правой части, принадлежащей $H_{0.5}(a, b)$.

3. *Преобразование ядра системы.* Преобразуем ядро системы интегральных уравнений. Для этого разложим функции $K_{ij}(z)\, G^{-1}(z)$ $(i = 1, j = 1;\ i = 1, j = 2;\ i = 2, j = 1)$, $K_{22}(z)\, n^2(z)\, G^{-1}(z)$ на простейшие дроби [6] и подставим в (1.1). Поменяв местами порядок суммирования и вычислив внутренние ряды, получаем

$$k(x, y) = -2 \sum_{K=1}^{\infty} \mu_K \begin{pmatrix} W_{11}^K \varphi_{11}(\mu_K, x, y) & W_{12}^K \varphi_{12}(\mu_K, x, y) \\ W_{21}^K \varphi_{12}(\mu_K, y, x) & W_{22}^K \varphi_{22}(\mu_K, x, y) \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

$$W_{ij}^K = K_{ij}(\mu_K)[G'(\mu_K)]^{-1} \quad (i = j = 1 \text{ или } i \neq j) \tag{3.2}$$

$$W_{22}^K = K_{22}(\mu_K)\, n^2(\mu_K)[G'(\mu_K)]^{-1} \tag{3.3}$$

$$\varphi_{11}(\gamma, x, y) = \begin{cases} \varphi(\gamma, x)\psi(\gamma, y), & x > y \\ \varphi(\gamma, y)\psi(\gamma, x), & x < y \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\varphi_{12}(\gamma, x, y) = \begin{cases} n^2(\gamma)\varphi(\gamma, x)g(\gamma, y), & x > y \\ \psi(\gamma, x)f(\gamma, y), & x < y \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\varphi_{22}(\gamma, x, y) = \begin{cases} f(\gamma, x)g(\gamma, y), & x > y \\ f(\gamma, y)g(\gamma, x), & x < y \end{cases}$$

Здесь

$$\varphi(\lambda, x) = A[\chi(\lambda, x) - \varkappa(T)\theta(\lambda, x)]$$

$$\psi(\lambda, x) = A^{-1}C_3[\chi(\lambda, x) - \varkappa(B)\theta(\lambda, x)]$$

$$f(\lambda, x) = A[m(\lambda, x) - s(T)h(\lambda, x)]$$

$$g(\lambda, x) = A^{-1}[m(\lambda, x) - s(B)h(\lambda, x)]$$

где A — произвольная постоянная.

$$\varkappa(t) = [\alpha_t^{(1)}\chi(\lambda, t) + \alpha_t^{(2)}\chi'(\lambda, t)][\alpha_t^{(1)}\theta(\lambda, t) + \alpha_t^{(2)}\theta'(\lambda, t)]^{-1}$$

$$s(t) = [\beta_t^{(1)}m(\lambda, t) + \beta_t^{(2)}m'(\lambda, t)][\beta_t^{(1)}h(\lambda, t) + \beta_t^{(2)}h'(\lambda, t)]^{-1}$$

$$C_3 = \{a(x)W\langle\chi(\lambda, x), \theta(\lambda, x)\rangle[\varkappa(B) - \varkappa(T)]\}^{-1}$$

$$C_5 = \{a(x)W\langle m(\lambda, x), h(\lambda, x)\rangle[s(B) - s(T)]\}^{-1}$$

Здесь $W <\ldots>$ означает вронскиан, в котором дифференцирование проводится по второму параметру. Ввиду известных свойств вронскиана C_3 и C_5 — постоянные.

$$\frac{s(B)}{\varkappa(B)} = \frac{\varkappa(T)}{s(T)} = 1, \quad C_5 = C_3 n^2(\lambda)$$

4. Сведение системы интегральных уравнений к бесконечной алгебраической системе. Пусть элементы вектор-функции $u(x)$ допускают представление в виде рядов соответственно по $\theta(\eta_K, x)$ и $h(\eta_K, x)$. Тогда достаточно ограничиться правой частью системы (1.1) вида

$$u(x) = \begin{pmatrix} \theta(\eta, x) \\ h(\eta, x) \end{pmatrix}, \quad x \in (a, b) \tag{4.1}$$

Продолжим правую часть системы (1.1) на весь отрезок (B, T) некоторой неизвестной вектор-функцией. Тогда, обращая уравнение (1.1) и используя преобразование, аналогичное описанному в пункте 3, получим следующее представление решения системы (1.1):

$$c(x) = \begin{pmatrix} \alpha(\gamma)\,\theta(\gamma,\, x) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^{(1)} \varphi(\lambda_n,\, x) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n^{(1)} \psi(\lambda_n,\, x) \\ \\ \beta(\gamma)\, h(\gamma,\, x) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^{(2)} f(\lambda_n,\, x) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n^{(2)} g(\lambda_n,\, x) \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} \alpha(\gamma) &= G(\gamma)\,\Delta^{-1}(\gamma)\, n^2(\gamma)\,[K_{22}(\gamma) - K_{12}(\gamma)] \\ \beta(\gamma) &= G(\gamma)\,\Delta^{-1}(\gamma)\,[K_{11}(\gamma) - K_{21}(\gamma)] \end{aligned} \tag{4.3}$$

$x_n^{(1)}$, $x_n^{(2)}$, $y_n^{(1)}$, $y_n^{(2)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — неизвестные постоянные, между которыми имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} K_{21}(\lambda_n)\, x_n^{(1)} + n^2(\lambda_n)\, K_{22}(\lambda_n)\, x_n^{(2)} &= 0 \\ K_{21}(\lambda_n)\, y_n^{(1)} + K_{22}(\lambda_n)\, y_n^{(2)} &= 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Подставим (4.2) в уравнение (1.1) с ядром (3.1) и произведем интегрирование. После приравнивания коэффициентов при $\varphi(\lambda_n, x)$, $\psi(\lambda_n, x)$, $f(\lambda_n, x)$, $g(\lambda_n, x)$ с учетом (4.4) получаем следующие равенства, выполнение которых является достаточным условием того, что вектор-функция (4.2) является решением уравнения (1.1)

$$\begin{gathered} \sum_{s=1}^{\infty} \Bigg[\frac{K_{i1}(\mu_K)}{K_{i2}(\mu_K)} \langle \varphi(\lambda_s,\, b),\, \varphi(\mu_K,\, b) \rangle - \\ - \frac{K_{21}(\lambda_S)}{n^2(\lambda_S)\, K_{22}(\lambda_S)} \langle f(\lambda_S,\, b),\, f(\mu_K,\, b) \rangle \Bigg] x_S^{(1)} + \\ + \sum_{S=1}^{\infty} \Bigg[\frac{K_{i1}(\mu_K)}{K_{i2}(\mu_K)} \langle \psi(\lambda_S,\, b),\, \varphi(\mu_K,\, b) \rangle - \\ - \frac{K_{21}(\lambda_S)}{K_{22}(\lambda_S)} \langle g(\lambda_S,\, b),\, f(\mu_K,\, b) \rangle \Bigg] y_S^{(1)} = \\ = - \frac{K_{i1}(\mu_K)}{K_{i2}(\mu_K)}\, \alpha(\gamma) \langle \theta(\gamma,\, b),\, \varphi(\mu_K,\, b) \rangle - \beta(\gamma) \langle h(\gamma,\, b),\, f(\mu_K,\, b) \rangle \end{gathered} \tag{4.5}$$

$$\begin{gathered} \sum_{S=1}^{\infty} \Bigg[\frac{K_{i1}(\mu_K)}{n^2(\mu_K)\, K_{i2}(\mu_K)} \langle \varphi(\lambda_S,\, a),\, \psi(\mu_K,\, a) \rangle - \\ - \frac{K_{21}(\lambda_S)}{n^2(\lambda_S)\, K_{22}(\lambda_S)} \langle f(\lambda_S,\, a),\, g(\mu_K,\, a) \rangle \Bigg] x_S^{(1)} + \end{gathered}$$

$$+\sum_{S=1}^{\infty}\left[\frac{K_{11}(\mu_K)}{n^2(\mu_K)K_{12}(\mu_K)}\langle\psi(\lambda_S, a), \psi(\mu_K, a)\rangle -\right.$$

$$\left.-\frac{K_{21}(\lambda_S)}{K_{22}(\lambda_S)}\langle g(\lambda_S, a), g(\mu_K, a)\rangle\right]y_S^{(1)}=$$

$$=-\frac{K_{11}(\mu_K)\alpha(\eta)}{K_{12}(\mu_K)n^2(\mu_K)}\langle\theta(\eta, a), \varphi(\mu_K, a)\rangle-\beta(\eta)\langle h(\eta, a), g(\mu_K, a)\rangle \quad (4.6)$$

$$\langle f(\gamma, a), h(\beta, a)\rangle=(\gamma^2-\beta^2)^{-1}\mu^2(a)\left[f(\gamma, a)\frac{\partial h(\beta, a)}{\partial a}-\right.$$

$$\left.-h(\beta, a)\frac{\partial f(\gamma, a)}{\partial a}\right] \qquad i=1, 2;\quad K=1, 2, 3,\ldots \quad (4.7)$$

Будем рассматривать равенства (4.5) — (4.6) как бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения $x_i^{(1)}$ и $y_i^{(1)}$. С помощью бесконечных матриц и векторов система (4.5) — (4.6) записывается в виде

$$B_{11}^{*}y+B_{12}^{*}x=D_1^{*} \quad (4.8)$$

$$B_{21}^{*}y+B_{22}^{*}x=D_2^{*} \quad (4.9)$$

Элементы строк матриц B_{11}^{*}, B_{21}^{*} совпадают с коэффициентами при $y_K^{(1)}$ соответственно в (4.5) и (4.6), причем для нечетных строк $i=1$, для четных $i=2$. Аналогично определяются и матрицы B_{12}^{*} и B_{22}^{*}.

Предположим, что имеет место асимптотика

$$\frac{\partial\varphi(\mu_S, x)}{\partial x}=p\frac{\mu_S\varphi(\mu_S, x)}{\mu(x)}[1+O(S^{-1})]$$

$$\frac{\partial\psi(\lambda_K, x)}{\partial x}=-p\frac{\lambda_K\psi(\lambda_K, x)}{\mu(x)}[1+O(K^{-1})]$$

$$p=\mathrm{const};\quad S, K\gg 1 \quad (4.10)$$

Разделим строки системы (4.8) на $p(\mu_K-C)\mu(b)\varphi(\mu_K, b)$, а строки системы (4.9) на $-p(\mu_K-C)^{-1}\mu(a)\psi(\mu_K, a)$ и сделаем замену

$$X_S=\varphi(\lambda_S, a)x_S^{(1)},\quad Y_S=\psi(\lambda_S, b)y_S^{(1)} \quad (4.11)$$

Преобразованную систему обозначим

$$B_{11}Y+B_{12}X=d_1 \quad (4.12)$$

$$B_{21}Y+B_{22}X=d_2 \quad (4.13)$$

Исследование асимптотики элементов матриц B_{11} и B_{22} при $S, K\to\infty$ позволяет расщепить каждую из матриц B_{11} и B_{22} на две

$$B_{11}=A+C_{11},\quad B_{22}=A+C_{22} \quad (4.14)$$

где матрица $A=(a_{KS})$ имеет элементы

$$a_{2K-1,\,S}=\left(\frac{K_{11}(\mu_K)}{(\mu_K-C)K_{12}(\mu_K)}-\frac{K_{21}(\lambda_S)}{(\lambda_S-C)K_{22}(\lambda_S)}\right)(\lambda_S-\mu_K)^{-1} \tag{4.15}$$

$$a_{2K,\,S}=\left(\frac{K_{21}(\mu_K)}{(\mu_K-C)K_{22}(\mu_K)}-\frac{K_{21}(\lambda_S)}{(\lambda_S-C)K_{22}(\lambda_S)}\right)(\lambda_S-\mu_K)^{-1} \tag{4.16}$$

5. *Обращение матрицы* A. Построим матрицу $A^{-1}=(\tau_{lS})$ такую, что $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$ (I — единичная матрица). Для построения матрицы A^{-1} в случае отсутствия действительных λ_S и μ_S рассмотрим следующую систему интегральных уравнений на полуоси:

$$\int_0^\infty h(x-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi=f(x), \quad 0\leqslant x<\infty \tag{5.1}$$

где

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}H(u)\,G^{-1}(u)\,e^{iux}du \tag{5.2}$$

$$H(u)=\begin{pmatrix}K_{12}(u) & (u-C)K_{12}(u)\\ (u+C)K_{21}(u) & n^2(u)K_{22}(u)\end{pmatrix}, \quad f(x)=\begin{pmatrix}\lambda e^{i\mu_l x}\\ \mu e^{i\mu_l x}\end{pmatrix} \tag{5.3}$$

$\varphi(x)$ — неизвестная на $(0,\infty)$ вектор-функция.

Решая (5.1) методом Винера-Хопфа [5] и заменяя все входящие в решение интегралы рядами по теории вычетов, получаем

$$\varphi(x)=\sum_{K=1}^{\infty}C_K(l)\,e^{i\mu_K x} \tag{5.4}$$

где вектор $C_K(l)$ имеет вид

$$C_K(l)=\frac{1}{2\pi i}\,\frac{G_-(\lambda_K)\,G_+(\mu_l)}{\Delta_-'(\lambda_K)\,\Delta_+(\mu_l)}\,a_-(\lambda_K)\,a_+(\mu_l)\,F(\lambda_K) \tag{5.5}$$

где

$$F(u)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}\,(\mu_l-u)}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}, \quad C_K(l)=\begin{pmatrix}C_K^{(1)}(l)\\ C_K^{(2)}(l)\end{pmatrix}$$

причем

$$K_{21}(\lambda_K)\,C_K^{(1)}(l)+(\lambda_K-C)\,K_{22}(\lambda_K)\,C_K^{(2)}(l)=0 \tag{5.6}$$

Здесь

$$a_{\pm}(u) = \Delta_{\pm}(u)\,H_{\pm}^{-1}(u) = \begin{pmatrix} a_{11}^{\pm}(u) & a_{12}^{\pm}(u) \\ a_{21}^{\pm}(u) & a_{22}^{\pm}(u) \end{pmatrix}$$
$$H(u) = H_{+}(u)\cdot H_{-}(u) \tag{5.7}$$

$G_{\pm}(u)$, $\Delta_{\pm}(u)$, $H_{\pm}(u)$ — результаты факторизации функций $G(u)$, $\Delta(u)$ и матрицы $H(u)$ относительно вещественной оси [6].

Подставим решение в виде (5.4) в (5.1). Разложим ядро $H(u)$ в ряд по вычетам и произведем интегрирование. После приравнивания коэффициентов при экспонентах, получаем следующие соотношения:

$$-2\pi[G'(\mu_S)]^{-1}H(\mu_S)\sum_{K=1}^{\infty} C_K(l)\frac{1}{\lambda_K-\mu_S} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}\delta_{lS}, \quad S = 1, 2,\ldots \tag{5.8}$$

Заменив $C_K^{(1)}(l)$ через $C_K^{(1)}(l)$ по формуле (5.6) и положив один раз

$$\lambda = -\frac{2\pi(\mu_l - C)\,K_{12}(\mu_l)}{G'(\mu_l)}, \quad \mu = 0$$

другой раз

$$\lambda = 0, \qquad \mu = -\frac{2\pi n^2(\mu_l)\,K_{22}(\mu_l)}{G'(\mu_l)}$$

получаем, что элементы обратной справа к A матрицы A^{-1} $(A\cdot A^{-1} = I)$ имеют вид

$$\alpha_{lK} = \frac{G_{-}(\lambda_S)(\mu_l - C)[G'_{-}(\mu_l)]^{-1}}{\Delta'_{-}(\lambda_S)\,\Delta_{+}(\mu_l)(\lambda_K-\mu_l)}\times$$
$$\times\begin{cases} K_{12}(\mu_l)[a_{11}^{-}(\lambda_S)\,a_{11}^{+}(\mu_l) + a_{12}^{-}(\lambda_S)\,a_{21}^{+}(\mu_l)], & K = 2S-1 \\ (\mu_l + C)\,K_{22}(\mu_l)[a_{11}^{-}(\lambda_S)\,a_{12}^{+}(\mu_l) + a_{12}^{-}(\lambda_S)\,a_{22}^{+}(\mu_l)], & K = 2S \end{cases} \tag{5.9}$$

Равенство $A^{-1}\cdot A = I$ проверяется непосредственно. Также непосредственной проверкой можно убедиться в том, что $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I$ и в случае наличия действительных μ_K и λ_K, если факторизация проводилась относительно контура σ, совпадающего с вещественной осью всюду, за исключением окрестностей действительных μ_K и λ_K, причем μ_K и λ_K обходятся снизу, а $-\mu_K$ и $-\lambda_K$ — сверху.

6. Вырожденный случай. Некоторого упрощения удается добиться, если множество нулей функции $G(u)$ содержится в множестве нулей функции $\Delta(u)$. Подобное распределение нулей $G(u)$ и $\Delta(u)$ характерно для систем интегральных уравнений, к которым сводятся задачи, допускающие разделение переменных.

Будем в дальнейшем под λ_K подразумевать лишь те нули $\Delta(u)$, которые не совпадают с нулями $G(u)$.

Общий вид решения (4.2), (4.3) и системы (4.5) и (4.6) остаются прежними, но в каждой из систем (4.5), (4.6) K-ое уравнение для $l = 1$ эквивалентно K-тому уравнению для $l = 2$.

Таким образом, для определения $x_S^{(1)}$ и $y_K^{(1)}$ служат системы (4.5), (4.6) для $l = 1$.

Дальнейшие преобразования и замена (4.11) сохраняются. В итоге приходим к необходимости обратить матрицу

$$a_{SK} = \left(\frac{K_{11}(\nu_K)}{(\nu_K - C) K_{12}(\nu_K)} - \frac{K_{21}(\lambda_S)}{(\lambda_S - C) K_{22}(\lambda_S)} \right) (\lambda_S - \nu_K)^{-1} \quad (6.1)$$

Так же, как в предыдущем пункте, но с учетом условия, наложенного на нули функции $G(u)$, получаем двустороннюю обратную к A матрицу A^{-1}, положив в (5.8)

$$\lambda = -\frac{2\pi(\nu_l - C) K_{12}(\nu_l)}{G'(\nu_l)}, \qquad \mu = -\frac{2\pi n^2(\mu_l) K_{22}(\mu_l)}{G'(\mu_l)}$$

Тогда, использовав матричное равенство

$$\Delta_+(u) H_-(u) = a_+(u) H(u)$$

получаем

$$\tau_{lK} = \frac{G_-(\lambda_K)\left[a_{12}^-(\nu_K)\, a_{21}^-(\lambda_l) - a_{11}^-(\nu_K)\, a_{22}^-(\lambda_l)\right]}{\Delta_-'(\lambda_l)(\lambda_l - \nu_K)\, G_-'(\nu_K)}$$

7. *Переход к операторным уравнениям второго рода.* Построив матрицу A^{-1}, умножим уравнения (4.14) слева на матрицу A^{-1}. В результате приходим к уравнениям второго рода в пространствах числовых последовательностей

$$Y + A^{-1}C_{11}Y + A^{-1}B_{12}X = A^{-1}d_1, \quad X + A^{-1}B_{21}Y + A^{-1}C_{22}X = A^{-1}d_2 \quad (7.1)$$

Свойства уравнений (7.1) зависят от свойств матриц $G^{-1}(u) H(u)$ и $G_+^{-1}(u) H_-(u)$.

Введем пространство числовых последовательностей, убывающих с весом K^λ. Обозначим его $C(\lambda)$. После введения нормы

$$\|x\|_{C(\lambda)} = \sup_K K^\lambda |x_K|$$

$C(\lambda)$ превращается в банахово пространство [10].

Теорема 7.1. *Пусть в условиях вырожденного случая имеют место оценки (4.10) и пусть, кроме того, выполняются следующие асимптотические оценки при $S, K \to \infty$:*

a)

$$\lambda_S = aSi + b_1 + \underline{O}(S^{-1}), \quad \nu_K = aKi + b_2 + \underline{O}(K^{-1})$$

б)

$$\frac{a_{ij}^{-}(\mu_K)}{G_{-}(\mu_K)} = K^{-\gamma}(1+\overline{O}(1)), \qquad \frac{G_{-}(\lambda_S)\,a_{ij}^{-}(\lambda_S)}{\Delta_{-}(\lambda_S)} = S^{\gamma}(1+\overline{O}(1))$$

в)

$$K_{11}(x_S)\left[(x_S - C)\,K_{12}(x_S)\right]^{-1} = O(1), \quad \operatorname{Im} x_S \gg 1, \quad x_1 = \lambda_S, \quad x_2 = \mu_l$$

Тогда матрицы $A^{-1}C_{11}$, $A^{-1}C_{22}$, $A^{-1}B_{12}$, $A^{-1}B_{21}$ порождают вполне непрерывные операторы в пространствах $C(\sigma)$ $(0<\sigma<0.5)$.

8. *Примеры*

а) Симметричные или антисимметричные колебания двух штампов на параллельных поверхностях упругого прямоугольника. В этом случае

$$\varphi(\gamma, x) = l(\gamma)\cos\gamma x, \quad f(\gamma, x) = m(\gamma)\sin\gamma x$$

η_K, $l(\gamma)$, $m(\gamma)$ определяются из граничных условий на торцах.

б) Осесимметричная задача о колебаниях штампов, приклеенных к противоположным основаниям упругого цилиндра конечной длины. Здесь

$$\varphi(\gamma, x) = l(\gamma)\,J_0(\gamma x), \quad f(\gamma, x) = m(\gamma)\,J_1(\gamma, x)$$

η_K, $l(\gamma)$, $m(\gamma)$ определяются из граничных условий на боковой поверхности.

в) Осесимметричная задача о вибрации штампа на поверхности упругой сферы со свободной или закрепленной внутренней поверхностью

$$\varphi(\eta_n, x) = \sqrt{n+0.5}\;P_n(x), \qquad f(\eta_n, x) = \sqrt{n+0.5}\;P_n^{(1)}(x)$$

Во всех приведенных примерах распределение нулей функции $G(u)$ и $\Delta(u)$ удовлетворяет условиям вырожденного случая.

НИИ механики и прикладной математики
Ростовского государственного университета
Ростовский инженерно-строительный институт

Поступила 20 VII 1977

Վ. Ա. ԲԱԲԵՇԿՈ, Վ. Ի. ՎՈՐՈՎԻՉ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱՅՈՒՄ ՀԱՆԴԻՊՈՂ ԱՌԱՋԻՆ ՍԵՌԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է Շտուրմ-Լիուվիլի որոշ խնդիրների լուծումներով ներկայացվող կորիզներով հատվածի վրա առաջին սեռի երկու ինտեգրալ հավասարումներից կազմված սիստեմ. Նման սիստեմները բնորոշ են առաձգականության տեսության և մաթեմատիկական ֆիզիկայի մի շարք խառը խնդիրների համար։ Սահմանված են միակության և լուծելիության որոշ պայ-

մաններ։ Ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի լուծումը բերվել է հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի։ Այդ սիստեմը ֆակտորիզացիայի մեթոդի օգնությամբ ռեգուլյարացվում է։

ON SOME SYSTEMS OF INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND OCCURRING IN THE THEORY OF ELASTICITY AND IN MATHEMATICAL PHYSICS

V. A. BABESHKO, V. E. VEXLER

Summary

A system of two integral equations of the first kind on the length with kernels, described in the solutions for some problems of Sturm-Liouville, is dealt with in the paper. Such systems are characteristic of a number of mixed problems in mathematical physics and the theory of elasticity in the case of complete separation of boundary conditions. Some conditions of solvability and uniqueness are given. The general type of solution is found. The solution to the system of integral equations is reduced to that for an infinite system of linear algebraic equations. The latter is regularized by the factorization method. A special case of distribution of kernel peculiarities in the system of integral equations is singled out permitting a substantial simplification of the infinite system.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабешко В. А.* К теории и приложениям некоторых интегральных уравнений первого рода. Докл. АН СССР, 1972, т. 204, № 2.
2. *Александров В. М.* О решении одного класса парных уравнений. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 1.
3. *Александров В. М.* Об одном методе сведения парных интегральных уравнений и парных рядов-уравнений к бесконечным алгебраическим системам. ПММ, 1975, т. 39, вып. 2.
4. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, ч. 1. М., Изд. ИЛ, 1960.
5. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., «Наука», 1969.
6. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.
7. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения. УМН, 1965, т. 20, вып. 1.
8. *Нобл Б.* Метод Винера-Хопфа. М., Изд. ИЛ, 1962.
9. *Бабешко В. А.* Факторизация одного класса матриц-функций и ее приложения. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 5.
10. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXI, №5, 1978 Механика

В. С. ПРОЦЕНКО, Е. Д. ФЕСЕНКО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ В ОБЛАСТИ КОНТАКТА И ОБЛАСТИ КОНТАКТА В СЛУЧАЕ СЖАТИЯ ДВУХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ, РАДИУСЫ КОТОРЫХ ПОЧТИ РАВНЫ

Задача определения давления $P(\varphi')$ в области контакта и области контакта $[-\varphi_0, \varphi_0]$ в случае сжатия двух круговых цилиндров, радиусы которых почти равны, была впервые поставлена И. Я. Штаерманом [1]. Эта задача в настоящее время вызывает особый интерес в связи со строительством магистральных трубопроводов.

Известно, что сохранение целостности изоляционного покрытия труб при транспортировании, хранении и укладке их в траншеи — одно из условий качества строительных работ, в значительной степени определяющее функционирование трубопроводов. Рассматриваемая задача дает возможность определить напряжения, развиваемые в изоляционном слое трубы, лежащей в траншее, а также напряжения, развивающиеся при транспортировке труб на плетевозе.

Сжатие упругих тел, ограниченных цилиндрическими поверхностями, радиусы которых почти равны, описывается системой интегральных уравнений вида [1]

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} P(\varphi')\left\{A\cos(\varphi-\varphi')\ln \operatorname{tg}\frac{|\varphi-\varphi'|}{2} - B\sin|\varphi-\varphi'| + C\right\}d\varphi' =$$

$$= (r_2 - r_1)(1-\cos\varphi) - \alpha\cos\varphi \tag{1.1}$$

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} P(\varphi')\cos\varphi' d\varphi' = P^*/r_1 \tag{1.2}$$

где

$$-\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0, \quad -\varphi_0 \leqslant \varphi' \leqslant \varphi_0$$

$$A = 2(\nu_1 r_1 + \nu_2 r_2), \quad B = \varkappa_1 r_1 + \varkappa_2 r_2, \quad C = 2\nu_1 r_1$$

$$\varkappa_1 = [4(\lambda_1+\mu_1)]^{-1}, \quad \varkappa_2 = [4(\lambda_2+\mu_2)]^{-1}$$

$$\nu_1 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{4\pi\mu_1(\lambda_1+\mu_1)}, \quad \nu_2 = \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{4\pi\mu_2(\lambda_2+\mu_2)}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ — упругие постоянные сжимаемых тел, P^* — сжимающая сила, α — сближение цилиндров при сжатии.

Величина α — неизвестная постоянная величина.

Чтобы определить функцию $P(\varphi')$ и угол φ_0 из системы (1.1), (1.2), необходимо, прежде всего, определить постоянную величину α, $\alpha < r_2 - r_1$.

Для определения $P(\varphi')$, φ_0, α из системы уравнений (1.1), (1.2) используем дополнительное условие, что функция давления $P(\varphi')$ в граничных точках области контакта обращается в нуль*

$$P(-\varphi_0) = 0, \quad P(\varphi_0) = 0 \tag{1.3}$$

и рассмотрим краевую контактную задачу.

При решении краевой контактной задачи (1.1), (1.2), (1.3) воспользуемся методом решения, рекомендованным в [1]. Предположим, что искомая функция $P(\varphi')$ изменяется не непрерывно, а скачками. Функция $P(\varphi')$ является четной функцией и, следовательно, в области контакта $[-\varphi_0, 0]$ ее значения в соответствующих точках равны значениям функции $P(\varphi')$ области $[0, \varphi_0]$. Интервал $[-\varphi_0, \varphi_0]$, в котором изменяется функция $P(\varphi')$, разобьем на $2n$ частей и предположим, что в каждом из $2n$ подинтервалов функция $P(\varphi')$ постоянна. Надлежащим выбором дискретных значений $P(\varphi')$, а именно P_l, $l = \pm 1, \ldots, \pm n$, и значения угла φ_0 мы можем добиться того, чтобы интегральные уравнения (1.1), (1.2) удовлетворялись в $2n$ точках интервала $[-\varphi_0, \varphi_0]$. Тогда систему интегральных уравнений (1.1), (1.2) и краевое условие (1.3) преобразуем в систему вида

$$\sum_{k=1}^{n-1} P_k \left\{ A \left[\sin(l-k+1)\frac{\varphi_0}{n} \ln \operatorname{tg} \frac{|l-k+1|}{2}\frac{\varphi_0}{n} - \right.\right.$$

$$- \sin(l-k)\frac{\varphi_0}{n} \ln \operatorname{tg} \frac{|l-k|}{2}\frac{\varphi_0}{n} + \sin(l+k)\frac{\varphi_0}{n} \ln \operatorname{tg} \frac{(l+k)}{2}\frac{\varphi_0}{n} -$$

$$\left. - \sin(l+k-1)\frac{\varphi_0}{n} \ln \operatorname{tg} \frac{(l+k-1)}{2}\frac{\varphi_0}{n} - 2\frac{\varphi_0}{n} \right] +$$

$$+ B \left[\delta(l-k)\left(\cos(l-k+1)\frac{\varphi_0}{n} - \cos(l-k)\frac{\varphi_0}{n}\right) + \right.$$

$$\left.\left. + \cos(l+k)\frac{\varphi_0}{n} - \cos(l+k-1)\frac{\varphi_0}{n} \right] + 2C\frac{\varphi_0}{n} \right\} +$$

$$+ \alpha \cos l \frac{\varphi_0}{n} = (r_2 - r_1)\left(1 - \cos l \frac{\varphi_0}{n}\right) \tag{1.4}$$

при $l = 1, 2, \ldots, n$.

$$2\sum_{k=1}^{n-1} P_k \left[\sin k\frac{\varphi_0}{n} - \sin(k-1)\frac{\varphi_0}{n} \right] - \frac{P^*}{r_1} = 0 \tag{1.5}$$

$$P_n = 0 \tag{1.6}$$

* В монографии [1] условие (1.3) для определения φ_0 не используется, что приводит к существенной погрешности вычисления $P(\varphi)$.

где

$$\delta(l-k)=1 \quad \text{при} \quad l-k \geqslant 0$$

$$\delta(l-k)=-1 \quad \text{при} \quad l-k<0$$

$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ — дискретные постоянные значения искомой функции контактного давления $P(\varphi')$ в области контакта $[0, \varphi_0]$.

Имеем систему $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными. Искомыми величинами системы (1.4), (1.5), (1.6) являются величины $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, величина α и угол φ_0.

При решении системы (1.4), (1.5), (1.6) применим метод итерации.

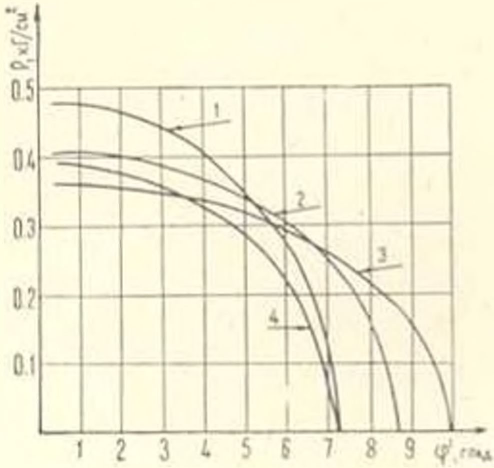
Пусть нам известно некоторое приближенное значение угла φ_0 ($\varphi_0 = \varphi_0^*$). При значении угла φ_0^* переменные коэффициенты при искомых величинах α и P_k, $k=1, \ldots, n-1$ системы (1.4) преобразуются в постоянные коэффициенты. И, следовательно, система n трансцендентных уравнений преобразуется в этом случае в систему n линейных уравнений. При решении системы n линейных уравнений применим метод Гаусса [2] и определим значения величин $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, \alpha$. А затем значения $\varphi_0^*, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n$ подставим в уравнение (1.5) (условно считаем это уравнение контрольным уравнением). Если при этом уравнение (1.5) преобразуется в тождество, то это значит, что значения $\varphi_0^*, P_1, \ldots, P_{n-1}, \alpha$ являются решением системы (1.4), (1.5), (1.6). В противном случае счет продолжается до тех пор, пока будет найдено такое значение угла φ_0^* и значения $P_1, \ldots, P_{n-1}$, при которых уравнение (1.5) превратится в тождество. В результате решения системы (1.4), (1.5), (1.6) получим значение области контакта $[-\varphi_0, \varphi_0]$, значение сближения цилиндров при сжатии α и кусочно-постоянную функцию $P(\varphi')$, меняющуюся скачками. Построив график значений $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, 0$ и сгладив скачки, получим кривую, изображающую приближенное решение системы интегральных уравнений (1.1), (1.2).

С помощью ЭВМ мы решили систему (1.1), (1.2) для пяти вариантов исходных данных $r_1, r_2, P^*, \varkappa_1, \varkappa_2, \nu_1, \nu_2$ (табл. 1). Решение системы (1.1), (1.2) мы получим при разбиении интервала $[0, \varphi_0]$ на 20 подынтервалов и при разбиении $[0, \varphi_0]$ на 50 подынтервалов. При решении системы (1.4), (1.5), (1.6) мы поставили условие, чтобы при подстановке полученных значений $\varphi_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n$ в контрольное уравнение (1.5) его левая часть отличалась от правой части в седьмом знаке после запятой. В результате по-

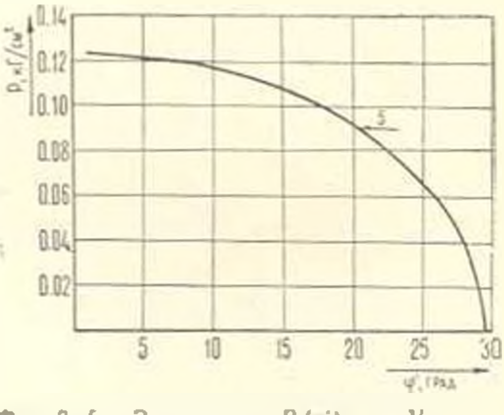
Таблица 1

№ п/п	r_1, *см*	r_2, *см*	P^*, *кГ/см*	$\varkappa_1$, *см²/кГ*	$\varkappa_2$, *см²/кГ*	ν_1, *см²/кГ*	ν_2, *см²/кГ*
1	71	72	6.9	$1.24\cdot10^{-7}$	$5.2\cdot10^{-4}$	$1.45\cdot10^{-7}$	$5.8\cdot10^{-4}$
2	71	72	6.9	$1.24\cdot10^{-7}$	$5.77\cdot10^{-4}$	$1.45\cdot10^{-7}$	$8.1\cdot10^{-4}$
3	71	72	6.9	$1.24\cdot10^{-7}$	$4.4\cdot10^{-4}$	$1.45\cdot10^{-7}$	$1.04\cdot10^{-3}$
4	61	62	4.46	$1.24\cdot10^{-7}$	$5.77\cdot10^{-4}$	$1.45\cdot10^{-7}$	$8.1\cdot10^{-4}$
5	71	71.1	6.9	$1.24\cdot10^{-7}$	$5.2\cdot10^{-4}$	$1.45\cdot10^{-7}$	$5.8\cdot10^{-4}$

лучим, что решение системы (1.1), (1.2) при $n=20$ и $n=50$ практически совпадают. Полученные зависимости функции давления $P(\varphi')$ и углы контакта φ_0 представлены на фиг. 1, 2.



Фиг. 1. 1 — Зависимость $P(\varphi')$ для I варианта начальных данных; угол контакта $\varphi_0 = 7°17'$; 2 — Зависимость $P(\varphi')$ для II варианта начальных данных; $\varphi_0 = 8°16'$; 3 — Зависимость $P(\varphi')$ для III варианта начальных данных; $\varphi_0 = 9°55'$; 4 — Зависимость $P(\varphi')$ для IV варианта начальных данных; $\varphi_0 = 7°13'$



Фиг. 2. 5 — Зависимость $P(\varphi')$ для V варианта начальных данных; $\varphi_0 = 29°33'$

В расчетах на прочность покрытия труб при их транспортировании, когда имеют место динамические нагрузки, следует учитывать увеличение величины P^*. Представляет интерес определение такой предельной величины P^*, при которой начинает разрушаться изоляционный слой трубы, с целью наложения определенных ограничений на условие транспортирования труб.

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступила 7 VI 1977

Վ. Ս. ՊՐՈՑԵՆԿՈ, Ե. Դ. ՖԵՍԵՆԿՈ

ՃՆՇՄԱՆ ՈՐՈՇԱԿԻ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ՏԻՐՈՒՅԹՈՒՄ ԵՎ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ՏԻՐՈՒՅԹԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԵՐԿՈՒ ԿԼՈՐ ԳԼԱՆՆԵՐԻ ՍԵՂՄՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ, ՈՐՈՆՑ ՇԱՌԱՎԻՂՆԵՐԸ ՀԱՄԱՐՅԱ ՀԱՎԱՍԱՐ ԵՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Լարումների որոշման խնդիրը խողովակի մեկուսացման շերտում հանգում է առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդրի լուծմանը։

Խնդրի լուծումը ստացվել է հետևյալ եզրային պայմանից՝ ճնշումը կոնտակտի սահմանային կետերում հավասար է զրոյի։

DETERMINATION OF PRESSURE IN THE CONTACT AREA AND OF THE CONTACT AREA PROPER FOR THE CASE OF COMPRESSION OF TWO CIRCULAR CYLINDERS WHOSE RADII ARE ALMOST EQUAL

V. S. PROTSENKO, E. D. FESENKO

S u m m a r y

The problem of determining the stresses in the pipe insulation layer is reduced to solving the contact problem in the elasticity theory (to determining the pressure in the contact area and the contact area proper). The solution is obtained, using a boundary condition: the pressure at the boundary points of contact vanishes.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949, с. 270.
2. *Корн Г. и Корн Т.* Справочник по математике. Изд-во «Наука», 1974.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXI, № 5, 1978 Механика

З. А. МАРТИРОСЯН

О ДВУХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ КРУГЛЫХ УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Осесимметричные контактные задачи с определением площади контакта для однородного цилиндра и жестких штампов исследовались в работах [5—7] и др. Контактные задачи с определением области контакта для случаев двух контактируемых тел, когда одно из них или оба имеют неограниченные размеры, рассмотрены в работах [8—22] и др. Определение области контакта между двумя упругими конечными телами из различных материалов исследовано в работах [23, 24] и др. Контактная задача для двух цилиндров при учете переменного коэффициента сцепления рассмотрена в работе [25], где изучен характер распределения контактных напряжений.

В настоящей работе рассматриваются две осесимметричные задачи теории упругости для двух цилиндров с различными упругими свойствами, имеющих конечные длины и одинаковые диаметры, которые контактированы между собой торцами при сжимающей внешней торцевой нагрузке. На боковых поверхностях цилиндров нормальные перемещения и касательные напряжения равны нулю. Контакт между цилиндрами принимается гладким, то есть без сцепления, а зона контакта двух цилиндров считается неизвестной и определяется в процессе решения задачи. Осесимметричная сжимающая нагрузка берется таким образом, что образуется контактная область в виде круга. Решения рассматриваемых задач представляются в виде рядов Фурье-Дини, при этом для коэффициентов этих рядов получены парные ряды-уравнения, содержащие функции Бесселя. Далее, следуя [4, 5], определение искомых коэффициентов сводится к решению квази-вполне регулярных бесконечных систем, свободные члены которых стремятся к нулю. Окончательные выражения для контактных напряжений получены с выделенной особенностью. Для конкретных внешней нагрузки и размеров составляющих цилиндров вычислены размеры контакта и напряжения на контактных и боковых поверхностях цилиндров.

1. Пусть два цилиндра конечной длины и одинакового диаметра, изготовленные из различных материалов, прижимаются по торцам друг к другу (фиг. 1). На других торцах цилиндров приложена осесимметричная сжимающая нагрузка таким образом, что образуется контактная область в виде круга. Сцепление на поверхности контакта отсутствует. На боковой поверхности цилиндров нормальные перемещения и касательные напряжения равны нулю.

В дальнейшем все величины, относящиеся к левому цилиндру, будем отмечать индексом 1, а к правому — индексом 2.

Граничные условия рассматриваемой осесимметричной задачи имеют вид

$$\sigma_z^{(i)}(r, l_i) = \begin{cases} -p_i & 0 \leqslant r < a \\ 0 & a < r < R \end{cases} = a_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(i)} J_0(\beta_k r) \tag{1.1}$$

$$\tau_{rz}^{(i)}(r, l_i) = 0 \tag{1.2}$$

$$\tau_{rz}^{(i)}(R, z) = 0 \quad u_r^{(i)}(R, z) = 0 \tag{1.3}$$

Из условия контакта имеем

$$\sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0) \quad \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = \tau_{rz}^{(2)}(r, 0) \tag{1.4}$$

$$u_z^{(1)}(r, 0) = -u_z^{(2)}(r, 0) \quad 0 \leqslant r < c \tag{1.5}$$

$$\sigma_z^{(1)}(r, 0) = 0 \quad c < r < R \tag{1.6}$$

где l_i — длины, R — радиус цилиндров, $J_n(x)$ — функция Бесселя действительного аргумента первого рода, а β_k — положительные корни уравнения $J_1(\beta_k R) = 0$, расположенные в порядке возрастания ($i = 1, 2$).

Решение задачи сводится к нахождению функций Лява $\Phi^{(i)}(r, z)$, которые удовлетворяют бигармоническому уравнению [2]

$$\Delta^2\Phi^{(i)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi^{(i)}(r, z) = 0 \tag{1.7}$$

граничным условиям (1.1 — 1.3) и условиям контакта (1.4 — 1.6).

Напряжения и перемещения выражаются через функцию $\Phi^{(i)}(r, z)$ следующим образом [2]:

$$\sigma_r^{(i)} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_i \Delta\Phi^{(i)} - \frac{\partial^2\Phi^{(i)}}{\partial r^2}\right)$$

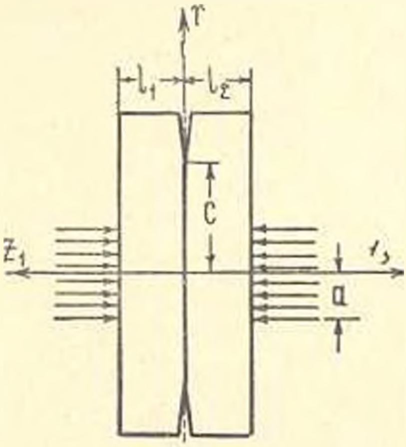
$$\sigma_\theta^{(i)} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_i \Delta\Phi^{(i)} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial r}\right)$$

$$\sigma_z^{(i)} = \frac{\partial}{\partial z}\left[(2 - \nu_i)\Delta\Phi^{(i)} - \frac{\partial^2\Phi^{(i)}}{\partial z^2}\right]$$

$$\tau_{rz}^{(i)} = \frac{\partial}{\partial r}\left[(1 - \nu_i)\Delta\Phi^{(i)} - \frac{\partial^2\Phi^{(i)}}{\partial z^2}\right]$$

$$u_z^{(i)} = \frac{1}{2G_i}\left[2(1 - \nu_i)\Delta\Phi^{(i)} - \frac{\partial^2\Phi^{(i)}}{\partial z^2}\right]$$

$$u_r^{(i)} = -\frac{1}{2G_i}\frac{\partial^2\Phi^{(i)}}{\partial r\partial z} \tag{1.8}$$



Фиг. 1.

где G_i — модули сдвига, а ν_i — коэффициенты Пуассона.

Решения уравнений (1.7) ищем в следующем виде [1]:

$$\Phi^{(i)}(r, z) = z(B_i z^2 + C_i z) + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k^{(i)} \operatorname{sh}\beta_k z + B_k^{(i)} \operatorname{ch}\beta_k z +$$
$$+ C_k^{(i)}\beta_k z \operatorname{sh}\beta_k z + D_k^{(i)}\beta_k z \operatorname{ch}\beta_k z) J_0(\beta_k r) \tag{1.9}$$

Удовлетворяя условиям (1.1—1.6), согласно (1.8) получаем

$$B_i = \frac{a_0^{(i)}}{6(1-\nu_i)}$$

$$B_2^{(i)} = -2\nu_i C_k^{(i)}$$

$$A_k^{(i)} = (1-2\nu_i) D_k^{(i)} - \frac{X_k}{\beta_k^3}$$

$$C_k^{(i)} = -\frac{\operatorname{sh}\beta_k l_i \operatorname{ch}\beta_k l_i + \beta_k l_i}{\beta_k^3[\operatorname{sh}^2\beta_k l_i - \beta_k^2 l_i^2]} X_k + \frac{\operatorname{sh}\beta_k l_i + \beta_k l_i \operatorname{ch}\beta_k l_i}{\beta_k^3(\operatorname{sh}^2\beta_k l_i - \beta_k^2 l_i^2)} a_k^{(i)} \tag{1.10}$$

$$D_k^{(i)} = \frac{\operatorname{sh}^2\beta_k l_i}{\beta_k^3(\operatorname{sh}^2\beta_k l_i - \beta_k^2 l_i^2)} X_k - \frac{\beta_k l_i \operatorname{sh}\beta_k l_i}{\beta_k^3(\operatorname{sh}^2\beta_k l_i - \beta_k^2 l_i^2)} a_k^{(i)}$$

Здесь неизвестные коэффициенты X_k определяются из следующих парных рядов-уравнений по функциям Бесселя:

$$y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (1+M_k)\frac{X_k}{\beta_k} J_0(\beta_k r) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k J_0(\beta_k r) \quad 0 \leqslant r < c$$

$$a_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k J_0(\beta_k r) = 0 \quad c < r < R \tag{1.11}$$

где введены обозначения

$$y_0 = -\frac{(1-2\nu_1)C_1 + G(1-2\nu_2)C_2}{1-\nu_1+G(1-\nu_2)} \tag{1.12}$$

$$M_k = \alpha M_k^{(1)} + (1-\alpha) M_k^{(2)} \qquad Q_k = \alpha P_k^{(1)} a_k^{(1)} + (1-\alpha) P_k^{(2)} a_k^{(2)}$$

$$M_k^{(i)} = \frac{\operatorname{sh}\beta_k l_i(\operatorname{ch}\beta_k l_i - \operatorname{sh}\beta_k l_i) + \beta_k l_i(1+\beta_k l_i)}{\operatorname{sh}^2\beta_k l_i - \beta_k^2 l_i^2}$$

$$P_k^{(i)} = \frac{\operatorname{sh}\beta_k l_i + \beta_k l_i \operatorname{ch}\beta_k l_i}{\beta_k(\operatorname{sh}^2\beta_k l_i - \beta_k^2 l_i^2)} \tag{1.13}$$

$$\alpha = \frac{1-\nu_1}{1-\nu_1+G(1-\nu_2)} \qquad \frac{G_1}{G_2} = G \qquad 0 < \alpha < 1$$

Приведем парные ряды-уравнения к бесконечной системе [4, 5]. Неизвестные X_k ищем в виде

$$X_k = \frac{1}{(\beta_k c)^{1/2} J_0^2(\beta_k R)} \sum_{m=0}^{\infty} b_m J_{2m+1/2}(\beta_k c) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.14}$$

Подставляя (1.14) во второе уравнение (1.11) и пользуясь разложением

$$f(r)=\begin{cases}(c^2-r^2)^{-1/2}F\left(-s,\ s+\dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{r^2}{c^2}\right) & 0<r<c\\ 0 & c<r<R\end{cases}$$

$$f(r)=\frac{(2c)^{1/2}\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{R^2\Gamma(s+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J_{2s+1/2}(\beta_k c)\,J_0(\beta_k r)}{\beta_k^{1/2}J_0^2(\beta_k R)}\qquad(s=1,\ 2,\dots)\qquad(1.15)$$

получим

$$a_0-b_0\lim_{k\to 0}\frac{J_{1/2}(\beta_k c)}{(\beta_k c)^{1/2}}=0\qquad(\beta_0=0)$$

$$b_0=\sqrt{2}\,\Gamma(3/2)\,a_0^{(1)}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,a_0^{(1)}\qquad(1.16)$$

Подставляя (1.14) в первое уравнение (1.11), затем умножая полученное соотношение на $r\,(c^2-r^2)^{-1/2}F\left(-s,\ s+\dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{r^2}{c^2}\right)$, далее интегрируя по r в пределах от 0 до c и используя значение интеграла

$$\int_0^c r^{\nu+1}(c^2-r^2)^{p/2}F\left(-s,\ 1+\frac{p}{2}+s+\nu,\ \nu+1,\ \frac{r^2}{c^2}\right)J_\nu(\beta_k r)\,dr=$$

$$=\left(\frac{2}{\beta_k}\right)^{1+\frac{p}{2}}c^{1+\frac{p}{2}+\nu}\,\frac{\Gamma(1+\nu)\,\Gamma\left(1+\frac{p}{2}+s\right)}{2\Gamma(1+s+\nu)}\,J_{\nu+2s+\frac{p}{2}+1}(\beta_k c)\quad(s=1,2,\dots)\qquad(1.17)$$

получим

$$\sum_{m=0}^{\infty}b_m\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+M_k}{\beta_k^2J_0^2(\beta_k R)}\,J_{2m+1/2}(\beta_k c)\,J_{2s+1/2}(\beta_k c)=\sqrt{c}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Q_k}{\sqrt{\beta_k}}\,J_{2s+1/2}(\beta_k c)\qquad(1.18)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)$ — гипергеометрический ряд.

Выражение (1.18) представляет собой бесконечную систему алгебраических уравнений первого рода относительно b_m.

Пользуясь значением ряда

$$\frac{2}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{\nu+2m+1/2}(\beta_k c)\,J_{\nu+2s+1/2}(\beta_k c)}{\beta_k^2J_0^2(\beta_k R)}=\frac{\delta_{ms}}{2\nu+4s+1}+$$

$$+\frac{2}{\pi}(-1)^{m-s}\int_0^{\infty}\frac{K_1(y)\,I_{\nu+2s+1/2}(cy)\,I_{\nu+2m+1/2}(cy)}{yI_1(y)}\,dy\qquad(1.19)$$

бесконечную систему (1.18) приводим к виду

$$b_s = \sum_{m=0}^{\infty} a_{sm} b_m + d_s \tag{1.20}$$

где введены обозначения

$$a_{sm} = -\frac{(-1)^{m+s} 2(4s+1)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y) I_{2m+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right) I_{2s+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right)}{y I_1(y)} dy -$$

$$- 2(4s+1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k J_{2s+1/2}(\beta_k c) J_{2m+1/2}(\beta_k c)}{\beta_k^2 J_0^2(\beta_k R)} \tag{1.21}$$

$$d_s = 2(4s+1)\sqrt{c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k}{\sqrt{\beta_k}} J_{2s+1/2}(\beta_k c) \tag{1.22}$$

δ_{ms} — символ Кронекера, $I_n(x)$, $K_n(x)$ — функции Бесселя от мнимого аргумента соответственно первого и второго рода.

Покажем, что сумма модулей коэффициентов бесконечной системы (1.20) при возрастании s стремится к нулю, то есть

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{sm}| = \lim_{s\to\infty} \frac{2(4s+1)}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y) I_{2s+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right) I_{2m+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right)}{y I_1(y)} +$$

$$+ \lim_{s\to\infty} 2(4s+1) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k^*}{\beta_k^2 J_0^2(\beta_k R)} |J_{2s+1/2}(\beta_k c) J_{2m+1/2}(\beta_k c)| = 0 \tag{1.23}$$

Для первого члена (1.23) получим оценку

$$\frac{2(4s+1)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{y I_1(y)} I_{2s+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right) \Bigg| \sum_{m=0}^{\infty} I_{2m+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right) dy <$$

$$< \frac{2(4s+1)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{y I_1(y)} I_{2s+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right) \sum_{m=0}^{\infty} I_{2m-1}\left(\frac{cy}{R}\right) dy =$$

$$= \frac{2(4s+1)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{y I_1(y)} I_{2s+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right) \left| I_{-1}\left(\frac{cy}{R}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{cy}{R} \right| dy \tag{1.24}$$

Интеграл (1.24) сходится абсолютно и равномерно по параметру s и, следовательно, выражение (1.24) является ограниченной функцией от s.

Для больших значений s имеем [3]

$$I_{2s+1/2}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+1/2}}{\Gamma\left(2s+\frac{1}{2}\right)} \tag{1.25}$$

следовательно, интеграл, входящий в (1.24), при возрастании s стремится к нулю.

Аналогично можно доказать, что второй член выражения (1.23) стремится к нулю при возрастании s, откуда следует, что система (1.20) квазивполне регулярна.

Из (1.22) видно, что свободные члены d_s также стремятся к нулю при $s \to \infty$.

После решения бесконечной системы (1.20) из первого уравнения (1.11) при фиксированном l определяется y_0.

Значение второго ряда системы (1.11) в области $0 \leqslant r < c$ представляет собой контактное напряжение, а значение первого ряда в области $c < r < R$ — перемещение вне контакта.

Подставив значение X_k по формуле (1.14) во второй ряд (1.11) и пользуясь формулой (1.15), для контактного нормального напряжения получим следующее выражение:

$$\sigma_z(r,0) = \begin{cases} 0 & c < r < R \\ \dfrac{R^2(c^2-r^2)^{-1/2}}{\sqrt{2}\,c} \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m \dfrac{m!F\left(-m,\ m+1/2,\ 1,\ \dfrac{r^2}{c^2}\right)}{\Gamma(m+1/2)} & 0 \leqslant r < c \end{cases} \tag{1.26}$$

Коэффициент при особенности $\sqrt{c^2-r^2}$ в формуле (1.26) в окрестности $r = c$ имеет вид

$$\frac{R^2}{\sqrt{2\pi c}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m b_m \tag{1.27}$$

Вопрос определения размера площади контакта связан с исследованием нормального контактного напряжения с определением его величины и знака.

На основании (1.26) ,(1.20) и (1.13) приходим к выводам, что если $a_k^{(1)} = a_k^{(2)}$ и $l_1 = l_2$, то размеры области контакта не зависят от интенсивности внешней нагрузки и от свойств материалов.

2. Рассмотрим теперь аналогичную задачу, когда нормальные перемещения на одном из торцов цилиндра равны нулю, а остальные граничные условия контакта остаются без изменений. Принимается, что нулевые нормальные перемещения относятся к левому цилиндру, то есть отмечаются индексом 1.

Граничные условия задачи имеют вид

$$\sigma_z^{(2)}(r,\ l_2)=a_0^{(2)}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{(2)}J_0(\beta_k r) \tag{2.1}$$

$$\tau_{rz}^{(i)}(r,\ l_i)=0 \tag{2.2}$$

$$u_z^{(1)}(r,\ l_1)=0 \tag{2.3}$$

$$\tau_{rz}^{(i)}(R,\ z)=0,\quad u_r^{(i)}(R,\ z)=0 \tag{2.4}$$

Условия контакта (1.4 — 1.6) остаются без изменения.

Напряжения и перемещения представляются в виде (1.8), а функции Лява — в виде (1.9).

Удовлетворяя условиям (2.1 — 2.4) и (1.4 — 1.6), при помощи (1.8) получаем

$$C_1=-3l_1B_1 \tag{2.5}$$

$$C_k^{(1)}=-\frac{\operatorname{sh}^2\beta_k l_1}{\operatorname{sh}\beta_k l_1\operatorname{ch}\beta_k l_1+\beta_k l_1}\frac{X_k}{\beta_k^3}$$

$$D_k^{(1)}=\frac{\operatorname{sh}\beta_k l_1\operatorname{ch}\beta_k l_1}{\operatorname{sh}\beta_k l_1\operatorname{ch}\beta_k l_1+\beta_k l_1}\frac{X_k}{\beta_k^3} \tag{2.6}$$

Коэффициенты B_i, $A_k^{(2)}$, $B_k^{(2)}$, $C_k^{(2)}$, $D_k^{(2)}$, $A_k^{(1)}$, $B_k^{(1)}$ находим из соотношений (1.10). Неизвестные коэффициенты X_k определяются из решения парных рядов (1.11), где

$$M_k^{(1)}=-\frac{\operatorname{sh}\beta_k l_1(\operatorname{ch}\beta_k l_1-\operatorname{sh}\beta_k l_1)+\beta_k l_1}{\operatorname{sh}\beta_k l_1\operatorname{ch}\beta_k l_1+\beta_k l_1}\qquad P_k^{(1)}=0 \tag{2.7}$$

а $M_k^{(2)}$, $P_k^{(2)}$, y_2 и α даны формулами (1.13).

Представляя выражение X_k в виде (1.14), аналогичным образом получаем для определения коэффициентов b_m квази-вполне регулярную систему бесконечных линейных алгебраических уравнений типа (1.20), где

$$a_{sm}=-2(4s+1)\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\alpha\frac{\operatorname{sh}\beta_k l_1(\operatorname{ch}\beta_k l_1-\operatorname{sh}\beta_k l_1)+\beta_k l_1}{\operatorname{sh}\beta_k l_1\operatorname{ch}\beta_k l_1+\beta_k l_1}+\right.$$

$$\left.+(1-\alpha)\frac{\operatorname{sh}\beta_k l_2(\operatorname{ch}\beta_k l_2-\operatorname{sh}\beta_k l_2)+\beta_k l_2(1+\beta_k l_2)}{\operatorname{sh}^2\beta_k l_2-\beta_k^2 l_2^2}\right]\times$$

$$\times\frac{J_{2s+1/2}(\beta_k c)\,J_{2m+1/2}(\beta_k c)}{\beta_k^2 J_0^2(\beta_k R)}-$$

$$-\frac{(-1)^{m+s}2(4s+1)}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{K_1(y)\,I_{2m+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right)I_{2s+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right)}{yI_1(y)}dy \tag{2.8}$$

$$d_s = 2\sqrt{c}\,(4s+1)\sum_{k=1}^{\infty}(1-\alpha)\frac{\operatorname{sh}\beta_k l_2 + \beta_k l_2 \operatorname{ch}\beta_k l_2}{\beta_k^{3/2}(\operatorname{sh}^2\beta_k l_2 - \beta_k^2 l_2^2)}a_k^{(2)} J_{2s+1/2}(\beta_k c) \qquad (2.9)$$

После решения бесконечной системы аналогичным образом определим y_s, а при помощи (2.5) — C_s.

Контактное нормальное напряжение определится по формуле (1.26), а коэффициент особенности — по (1.27).

3. *Численные примеры.*

а) В качестве примера рассмотрим два цилиндра одинаковой длины и одинакового диаметра, которые прижимаются по торцам друг к другу без сцепления. На торцах цилиндров приложены равномерно распределенные нормальные нагрузки (фиг. 1)

$$\sigma_z^{(i)}(r, l_i) = \begin{cases} -p & \text{при} \quad 0 < r < a \\ 0 & \text{при} \quad a < r < R \end{cases} \qquad (3.1)$$

В этом случае размеры контакта не зависят от свойств материалов.

При этих условиях имеем

$$a_0^{(1)} = a_0^{(2)} = a_0 = -\frac{a^2}{R^2}p, \qquad a_k^{(1)} = a_k^{(2)} = a_k = -\frac{2a\,J_1(\beta_k a)}{R^2\beta_k J_0^2(\beta_k R)}p \qquad (3.2)$$

После удовлетворения граничных условий и условий контакта для определения коэффициентов b_m получим систему бесконечных линейных алгебраических уравнений типа (1.20), где

$$M_k = \frac{\operatorname{sh}\beta_k l(\operatorname{ch}\beta_k l - \operatorname{sh}\beta_k l) + \beta_k l(1+\beta_k l)}{\operatorname{sh}^2\beta_k l - \beta_k^2 l^2} \qquad (3.3)$$

$$Q_k = \frac{\operatorname{sh}\beta_k l + \beta_k l \operatorname{ch}\beta_k l}{\beta_k(\operatorname{sh}^2\beta_k l - \beta_k^2 l^2)}a_k \qquad (3.4)$$

График зависимости площади контакта от длины цилиндров для значений $\frac{a}{R} = 0.125$ и 0.25 показан на фиг. 2.

Распределение нормального контактного напряжения при различных значениях l и a показано на фиг. 3 и 4.

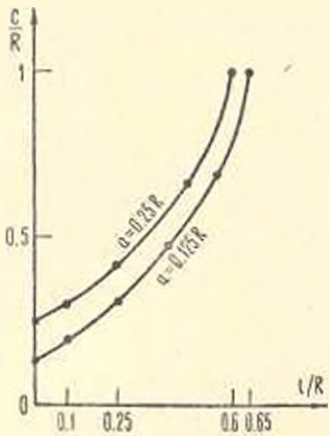
Зависимость длины цилиндров (l) от размера участка приложения нагрузки (a) при условии, что цилиндры остаются в контакте по всей площади ($c = R$), приведена на фиг. 5.

б) Рассмотрим теперь случай, когда нормальные перемещения на одном из цилиндров равны нулю, а остальные граничные условия и условия контакта совпадают с условиями первой задачи.

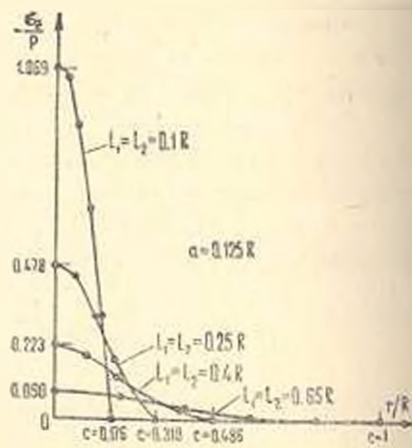
При этих условиях имеем

$$a_0^{(1)} = a_k^{(1)} = 0, \qquad a_0^{(2)} = -\frac{a^2}{R^2}p, \qquad a_k^{(2)} = a_k = -\frac{2a\,J_1(\beta_k a)}{R^2\beta_k J_0^2(\beta_k R)} \qquad (3.5)$$

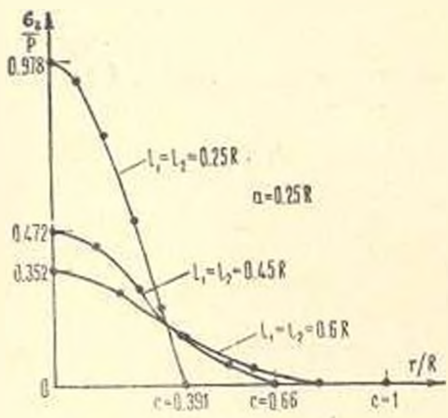
Для определения коэффициентов b_m аналогичным образом получим систему бесконечных линейных алгебраических уравнений типа (1.20), где M_k и Q_k определяются по формуле (1.13).



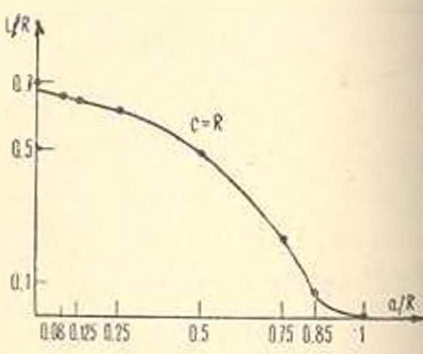
Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

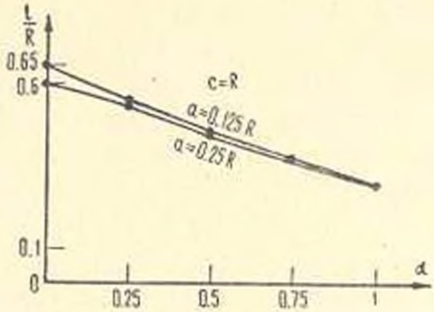
В этом случае при $l_1 = l_2$ размеры контакта зависят от свойств материалов.

График зависимости площади контакта от длины цилиндров ($l_1 = l_2$) для значений $\frac{a}{R} = 0.125$ при $\alpha = 0$; 0.25; 0.5; 0.75; 1 показан на фиг. 6.

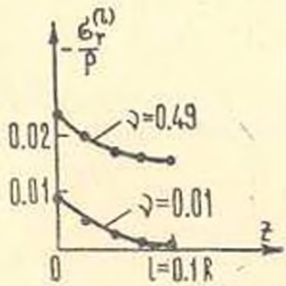
Если $\alpha = 0$, то напряженное состояние в двух задачах совпадает.

При полном контакте ($c = R$) и отсутствии особенности напряжений на крае контакта зависимости между длиной цилиндров и α при $\frac{a}{R} = 0.125$; 0.25 показаны на фиг. 7.

Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Распределение нормального напряжения $\sigma_r^{(1)}$ на боковой поверхности $r = R$ при значениях $l = 0.1\,R$, $a = 0.125\,R$, $\nu = 0.01$; 0.49 показаны на фиг. 8.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 24 XI 1977

Գ. Ա. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԳԼԱՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԵՐԿՈՒ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է ճակատներով հպված, տարբեր առաձգական հատկություններ և միևնույն տրամագծեր ունեցող երկու շրջանային գլանների առաձգականության տեսության երկու առանցքասիմետրիկ խնդիրներ։ Նորմալ տեղափոխումները և շոշափող լարումները գլանային մակերևույթների վրա հավասար են զրոյի։ Գլանների կոնտակտի տիրույթը ընդունվում է անհայտ և որոշվում է խնդիրների լուծման ընթացքում։

խնդիրների լուծումները ներկայացվում են Ֆուրյե-Դինիի շարքերի միջոցով։ Այդ շարքերի գործակիցների որոշման համար ստացված են զույգ շարքեր-հավասարումներ, որոնք պարունակում են Բեսսելի ֆունկցիաներ։ Զույգ շարքեր-հավասարումների լուծումները հանգեցված են քվազի-լիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմների լուծմանը, որոնց ազատ անդամները ձգտում են զրոյի։ Բերված թվային օրինակներում որոշված են կոնտակտի տիրույթի չափերը և հաշված են նորմալ լարումները կոնտակտի տիրույթում և գլանային մակերևույթների վրա։

ON TWO CONTACT PROBLEMS FOR CIRCULAR ELASTIC CYLINDERS OF FINITE LENGTH

Z. A. MARTIROSIAN

Summary

Two axisymmetric problems is the elasticity theory for two cylinders of finite length and equal diameters, with different elastic properties contacted to each other on the butts under external compressive butt loads are considered. On the lateral surfaces of the cylinders the normal displacements and shear stresses are equal to zero. The contact between the cylinders is assumed to be smooth. The contact zone is unknown and is to be determined in solving the problems. The solutions are presented as Fourier-Dini's series. To determine the coefficients of these series the dual series-equations, containing Bessel's functions, are obtained. The dual series-equations are reduced to the solution of a quasi-quite regular infinite system of linear equations with free terms tending to zero. For the specified external load and dimensions of the cylinders the contact dimensions and stresses on the contact and cylindrical surfaces are calculated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л.* К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. Докл. АН Арм. ССР, 1954, т. XIX, № 1.
2. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. М., ОНТИ, 1937.
3. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М., Гостехиздат, 1953.
4. *Cooke J. C., Tranter C. J.* Dual Fourier-Bessel Series. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, August 1959, vol. XII, part 2, Oxford.
5. *Баблоян А. А., Мелконян А. П.* О двух смешанных осесимметричных задачах теории упругости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1969, т. XXII, № 5.
6. *Мелконян А. П.* Об одной смешанной осесимметричной задаче теории упругости для цилиндра конечной длины. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1971, т. XXIV, № 2.
7. *Баблоян А. А., Мелконян А. П.* Об одной осесимметричной контактной задаче для цилиндра конечной длины. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1973, т. XXVI, № 5.
8. *Stippes M., Wilson H. B., Jr. Krull F. N.* A contact Stress Problem for a Smooth Disk in an Infinite Plate. Proceedings of the 4-th U. S. National Congress of Applied Mechanics, ASME, 1962.

9. *Наумов Ю. А., Шевляков Ю. А.* Изгиб балочных плит на упругом основании при неполном контакте. Сб. «Гидроаэромеханика и теория упругости». Изд. Харьковского университета. 1968, вып. 9.

10. *Noble B., Hussain M.* Exact Solution of Certain Dual Series for Indentation and Inclusion Problem. Intern. J. Eng. Sci. 1969, vol. 7, No. 11.

11. *Вейцман.* О контакте без сцепления между пластиной и упругим полупространством. Прикл. мех. (Труды ASME, сер. E), 1969, т. 36.

12. *Pu S. L., Hussain M. A., Anderson G.* Lifing of a Plate from the Foundation due to Axisymmetric Pressure. Developments in Mechanics Proceedings of the 11-th Midwestern Mechanics Conference. 1969, vol. 5.

13. *Пу Хуссейн.* К вопросу о контакте без сцепления между пластиной и упругим полупространством. Прикл. мех. (Труды ASME, сер. E), 1970, т. 37, № 3.

14. *Наумов Ю. А., Никифорова В. Д.* Об отставании упругого слоя. Прикл. мех. Журнал АН УССР, 1971, т. 7, № 11.

15. *Кир, Дандерс.* Издат. Контактная задача для слоя, лежащего на полупространстве. Прикл. мех. (Труды ASME, сер. E), 1972, т. 39, № 4.

16. *Кир, Сильва.* Две смешанные задачи для полуполосы. Прикл. мех. (Труды ASME, сер. E), 1972, т. 39, № 4.

17. *Weitsman Y.* A Tensionless Contact between a Beam and an Elastic Half-Space. Intern. J. End. Sci., 1972, vol. 10, No. 1.

18. *Erdogan F., Ratwani M.* The Contact Problem for an Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes. J. Appl. Mech. (Trans. ASME, ser. E), 1974, 41, No. 3.

19. *Gladwell G. M. L., Iyer K. R. P.* On the Unbounded Contact between a Circular Plate and an Elastic Foundation. Journal Elasticity, 1974, vol. 4.

20. *Tsai K. C., Dunders J., Keer L. M.* Elastic Layer Pressed against a Half Space. J. Appl. Mech. (Trans. ASME, ser. E), 1974, 41, No. 3.

21. *Dunders J.* Properties of Elastic Bodies in Contact. Proceedings of the IUTAM Simposium on the Mechanics of the Contact between Deformable Bodies, University Press, 1975.

22. *Абрамян Б. Л., Макарян В. С.* Осесимметричная задача о контакте между двумя слоями из различных материалов с учетом трения между слоями. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т. XXIX, № 5.

23. *Баблоян А. А., Мелконян М. Г.* О контакте двух прямоугольников без сцепления с определением области контакта. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1974, т. XXVII, № 5.

24. *Мелконян М. Г., Мкртчян А. М.* Об одной контактной задаче для двух прямоугольников. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1975, т. XXIII, № 3.

25. *Pytko Stanislaw, Wierzcholski Kizysztof.* Wytezenie materialu w obszarze styku dwoch walcow przy uwzglednieniu zmiennego wspolczynnika sczepienia. „Zag. eksploat. maszyn", 1976, 11, No. 2.

26. *Янке Э. и Эмде Ф.* Таблицы функций. М., Физматгиз, 1959.

27. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций, ч. 1 и 2. М., ИЛ, 1949.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXI, № 5, 1978 Механика

Э. Х. ГРИГОРЯН

О КОЛЕБАНИИ МАГНИТОУПРУГОЙ СРЕДЫ, ВОЗБУЖДАЕМОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ СИЛОЙ

В работе рассматриваются колебания изотропной безграничной среды под действием сосредоточенной гармонической силы и при наличии однородного магнитного поля, параллельного плоскости движения среды.

С помощью преобразования Фурье строится решение, характеризующее колебания магнитоупругой среды под действием сосредоточенной гармонической силы. Далее при помощи метода Лайтхилла [1] при больших расстояниях от точки приложения силы получены асимптотические формулы для перемещений в зависимости от интенсивности внешнего магнитного поля. Кроме того, из рассматриваемой стационарной задачи, отличным от традиционного образом, получено решение нестационарной задачи о сосредоточенном импульсе.

Задачи о движении безграничной магнитоупругой среды, когда в ней действуют объемные силы типа сосредоточенных импульсов, рассмотрены в работе [2].

Аналогичные нестационарные задачи для анизотропных тел при отсутствии магнитного поля исследованы в работах [3—5].

1. Отнесем прямоугольную систему координат к идеально проводящей упругой среде и рассмотрим движение данной среды при наличии однородного магнитного поля $\vec{H}(H_0, 0, 0)$.

Линеаризованные уравнения, описывающие движение указанной магнито-упругой среды, когда в ней действуют объемные силы, не зависящие от z и имеющие нулевую составляющую по оси z, в случае пренебрежения токами смещения имеют вид [6, 2]

$$\begin{aligned} c_1^2\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2}+c_2^2\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial y^2}+(c_1^2-c_2^2)\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x\partial y}+\frac{1}{\rho}X(x, y, t)=\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \\ c_4^2\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2}+c_3^2\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial y^2}+(c_1^2-c_2^2)\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x\partial y}+\frac{1}{\rho}Y(x, y, t)=\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{1.1}$$

где

$$c_1^2=\frac{\lambda+2G}{\rho}, \quad c_2^2=\frac{G}{\rho}, \quad c_3^2=c_1^2+a^2, \quad c_4^2=c_2^2+a^2, \quad a^2=\frac{\mu H_0^2}{4\pi\rho}$$

λ и G — постоянные Ламэ, ρ — плотность упругой среды, μ — магнитная проницаемость среды, c_1 и c_2 — скорости распространения волн расширения и искажения в среде, a — скорость Альфвена.

Пусть $X=0$, $Y(x, y, t)=\delta(x)\delta(y)e^{-i\omega t}$. В таком случае $u^{(n)}(x, y, t)$ $(n=1, 2)$ можно искать в виде

$$u^{(n)}(x, y, t)=u_n(x, y)e^{-i\omega t}, \quad 0<\omega$$

Подставляя выражения $u^{(n)}(x, y, t)$ в (1.1), для определения $u_n(x, y)$ получим

$$\begin{gathered}
c_1^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+c_2^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+(c_1^2-c_2^2)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial y}+\omega^2 u_1=0\\
c_4^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+c_3^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+(c_1^2-c_2^2)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}+\omega^2 u_2+\frac{1}{\rho}\delta(x)\delta(y)=0
\end{gathered}\tag{1.2}$$

Построим то решение уравнения (1.1), которое при $x^2+y^2\to\infty$ представляет уходящую волну. С этой целью применим к обеим частям дифференциальных уравнений (1.2) преобразование Фурье по переменной x. В результате придем к системе из двух обыкновенных дифференциальных уравнений, общее решение которой при $y\neq 0$ имеет вид

$$\begin{gathered}
\bar{u}_1=-\frac{i(c_1^2-c_2^2)\sigma}{2\mu c_3^2(\gamma_1^2-\gamma_2^2)}\operatorname{sgn} y\,(Ae^{-\gamma_1|y|}+Be^{-\gamma_2|y|}+Ce^{\gamma_1|y|}+De^{\gamma_2|y|})\\
\bar{u}_2=\frac{1}{2\mu c_3^2}\left[\frac{c_1^2(\sigma^2-k_1^2)-c_2^2\gamma_1^2}{\gamma_1^2-\gamma_2^2}(Ae^{-\gamma_1|y|}+Ce^{\gamma_1|y|})+\right.\\
\left.+\frac{c_1^2(\sigma^2-k_1^2)-c_2^2\gamma_2^2}{\gamma_1^2-\gamma_2^2}(Be^{-\gamma_2|y|}+De^{\gamma_2|y|})\right]
\end{gathered}\tag{1.3}$$

Здесь

$$\bar{u}_1=\int_{-\infty}^{\infty}u_1(x, y)e^{i\sigma x}dx, \quad \bar{u}_2=\int_{-\infty}^{\infty}u_2(x, y)e^{i\sigma x}dx, \quad -\infty<\sigma<\infty$$

$$\gamma_n(\sigma)=\sqrt{\frac{Z(\sigma)+(-1)^{n-1}\sqrt{U(\sigma)}}{2c_3^2c_2^2}}, \quad (n=1, 2)$$

$$U(\sigma)=Z^2(\sigma)-4c_1^2c_2^2c_3^2c_4^2(\sigma^2-k_1^2)(\sigma^2-k_2^2) \qquad k_2=\frac{\omega}{c_4}, \quad k_1=\frac{\omega}{c_1}$$

$$Z(\sigma)=-(c_3^2+c_2^2)\omega^2+(c_1^2c_4^2+c_2^2c_3^2)\sigma^2$$

Теперь для получения нужного решения однозначные ветви функций $\gamma_1(\sigma)$, $\gamma_2(\sigma)$ выберем таким образом, чтобы $\gamma_n(\sigma)\to|\sigma|$ $(n=1, 2)$ при $\sigma\to\pm\infty$. Отметим, что точки $\pm k_1$, $\pm k_2$, $\pm k_3=\pm\omega(c_3-c_2)/a(c_1^2-c_2^2)^{1/2}$, $\pm k_4=\pm\omega(c_3+c_2)/a(c_1^2-c_2^2)^{1/2}$ являются точками ветвления для функций $\gamma_n(\sigma)$, причем $\pm k_2$, $\pm k_4$ являются точками ветвления второго порядка для внутреннего радикала в выражениях функций $\gamma_n(\sigma)$. На этом вопросе мы подробно остановимся в дальнейшем. Аналогично, как в [7], разрезы, выделяющие однозначные ветви этих функций, должны быть проведены так, чтобы вещественная ось обходила точки ветвления k_1, k_2, k_3, k_4 снизу, а точки $-k_1, -k_2, -k_3, -k_4$ — сверху.

На основании вышесказанного для определения нужного решения надо в формулах (1.3) подставить $C=D=0$. Остальные постоянные определяются при удовлетворении соответствующим уравнениям при $y=0$. Окончательно для $u_n(x, y)$ получаем следующие выражения:

$$u_1(x, y) = \frac{i}{2\pi\mu}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{2}(-1)^n\frac{(c_1^2-c_2^2)\sigma}{2c_2^2(\gamma_1^2-\gamma_2^2)}\exp[-i(\sigma x-i\gamma_n(\sigma)|y|)]\,d\sigma\,\mathrm{sgn}\,y$$

$$u_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\mu}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{2}(-1)^n\frac{c_1^2(\sigma^2-k_1^2)-c_2^2\gamma_n^2}{2c_2^2\gamma_n(\gamma_1^2-\gamma_2^2)}\exp[-i(\sigma x-i\gamma_n(\sigma)|y|)]\,d\sigma$$

Теперь приступим к исследованию функций $\gamma_n(\sigma)$ $(n=1, 2)$, обладающих вышеуказанными свойствами.

Очевидно, что точки $\pm k_1, \pm k_2$ являются точками ветвления внутреннего радикала в выражениях функций $\gamma_n(\sigma)$ $(n=1, 2)$. При достаточно малых a $Z(\pm k_1)<0$, $Z(\pm k_2)>0$. Отсюда следует, что при достаточно малых a точки $\pm k_1$, $\pm k_2$ будут соответственно точками ветвления второго порядка для внешнего радикала [8] функций $\gamma_1(\sigma)$, $\gamma_2(\sigma)$. Следовательно, имеют место разложения

$$\gamma_n(\sigma) = a_n^{\pm}\sqrt{\sigma\pm k_n}+\cdots,\quad \sqrt{\sigma-k_n} = -i\sqrt{k_n-\sigma}$$

$$\sqrt{-\sigma-k_n} = -i\sqrt{\sigma+k_n}$$

$$a_n^{-} = \sqrt{(-1)^n\frac{2\omega^2(c_1^2-c_2^2)}{Z(k_n)}},\qquad a_n^{+} = -ia_n^{-},\quad (n=1, 2)$$

$$Z(k_2) = \omega^2[c_2^2(c_1^2-c_2^2)-a^2c_2^2-a^4]$$

$$Z(k_1) = \omega^2[c_2^2a^2-c_1^2(c_1^2-c_2^2)]$$

Очевидно, что эти разложения верны только при тех значениях a, которые находятся в интервале $0\leqslant a<a_1$, где $a_1<a_2$ определяется из уравнения

$$Z(k_2)=0,\qquad a_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{c_2(\sqrt{4c_1^2-3c_2^2}-c_2)}$$

а a_2 — из уравнения

$$Z(k_1)=0,\ a_2=\frac{c_1}{c_2}\sqrt{c_1^2-c_2^2} \tag{1.4}$$

Отсюда непосредственно следует, что при $a = a_1$ точки $\pm k_2 = \pm k_3$ являются точками ветвления четвертого порядка для $\gamma_n(\sigma)$, а точки $\pm k_1$ остаются точками ветвления второго порядка для $\gamma_1(\sigma)$. Значит,

$$\gamma_n(\sigma) = b_n^{\pm}\sqrt[4]{\sigma \pm k_2} + \cdots, \quad \sqrt[4]{\sigma - k_2} = e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt[4]{k_2 - \sigma}$$

$$\sqrt[4]{-\sigma - k_2} = e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt[4]{k_2 + \sigma}$$

$$b_2^- = e^{-i\frac{\pi}{4}} b_1^+, \quad b_2^+ = -ib_1^+, \quad b_1^- = e^{i\frac{\pi}{4}} b_1^+$$

$$b_1^+ = \sqrt[4]{\frac{\omega^3[a^4 + 2c_2(c_1 + c_2)a^2 + (c_3 + c_2)^2 c_2^2]}{2c_4^3}}$$

Так как при $a = a_1$ $Z = 0$, то отсюда следует, что при $a_1 < a < a_3$ $(a_3 = \sqrt{c_1^2 - c_2^2})$, $Z(k_2) < 0$ и $Z(k_1) < 0$, следовательно, $\gamma_2(\sigma)$ точек ветвления не имеет, а для функции $\gamma_1(\sigma)$ точки $\pm k_1$, $\pm k_2$ будут точками ветвления второго порядка. Следовательно,

$$\gamma_1(\sigma) = d_n \sqrt{\sigma \pm k_n} + \cdots$$

$$d_1^- = \sqrt{\frac{2\omega^3(c_1^2 - c_4^2)}{c_2 Z(k_2)}}, \quad d_2^- = \sqrt{\frac{2\omega^3(c_1^2 - c_4^2)}{c_4 Z(k_1)}}, \quad d_n^- = -id_n^- \quad (n = 1,\ 2)$$

При $a = \sqrt{c_1^2 - c_2^2}$ точки $\pm k_1 = \pm k_2$ уже не будут точками ветвления для $\gamma_1(\sigma)$. В этом случае $\gamma_1(\sigma)$ в окрестности точек $\pm k_1$ имеет разложение следующего вида:

$$\gamma_1(\sigma) = e|\sigma \pm k_2| + \cdots, \quad e = -i\frac{8\omega^2 a^2}{c_1^2 - c_2^2}$$

В случае $a = a_2$ (из 1.4) следует, что точки $\pm k_1 = \pm k_3$ будут точками ветвления четвертого порядка для функций $\gamma_n(\sigma)$ $(n = 1,\ 2)$, кроме того, точки $\pm k_2$ опять будут точками ветвления второго порядка для $\gamma_1(\sigma)$. Таким образом,

$$\gamma_n(\sigma) = e_n^{\pm}\sqrt[4]{\sigma \pm k_1} + \cdots, \quad \sqrt[4]{\sigma - k_1} = e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt[4]{k_1 - \sigma}$$

$$\sqrt[4]{-\sigma - k_1} = e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt[4]{k_1 + \sigma}$$

$$e_2^+ = \sqrt[4]{2k_1^3[a^4 + 2c_2(c_2 + c_3)a^2 + (c_2 + c_3)^2 c_2^2]}$$

$$e_2^- = e^{i\frac{\pi}{4}} e_2^+, \quad e_1^- = e^{-i\frac{\pi}{4}} e_2^+, \quad e_1^+ = -ie_2^+$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что при $a_3 < a < \infty$ точки $\pm k_1, \pm k_2$ являются соответственно точками ветвления второго порядка для функций $\gamma_2(\sigma), \gamma_1(\sigma)$.

Зная особые точки функций $\gamma_n(\sigma)$ при разных значениях a, методой Лайтхилла можно получить асимптотические выражения для $u^{(2)}(x, 0, t)$, поскольку $u^{(1)}(x, 0, t) \approx 0$ при $|x| \to \infty$

1. $0 \leqslant a < a_1$

$$u^{(2)}(x, 0, t) = \frac{c_2^2 a_2^-}{4\sqrt{\pi} G\omega c_4 |x|^{1/2}} \exp\left[-i\left(\omega t - k_2|x| - \frac{\pi}{4}\right)\right] +$$

$$+ \frac{A_2}{2\sqrt{\pi}|x|^{3/2}} \exp\left[-i\left(\omega t - k_2|x| - \frac{\pi}{4}\right)\right] +$$

$$+ B\frac{i}{2\sqrt{\pi}|x|^{3/2}} \exp\left[-i\left(\omega t - k_1|x| - \frac{\pi}{4}\right)\right] + 0(|x|^{-5/2})$$

$$B = -\frac{c_1^2 c_2^2 (c_1^2 - c_2^2) a_1^-}{2G\omega^2 (c_1^2 - c_3^2)\left[(c_1^2 - c_2^2) c_1^2 - c_2^2 a^2\right]}$$

$$A_2 = \lim_{\sigma \to k_2} 2\sqrt{\sigma - k_2}\, \frac{d}{d\sigma}\left[\sqrt{\sigma - k_2}\, \frac{d}{d\sigma}\sqrt{\sigma - k_2}\, \bar{u}_2(\sigma)\right]$$

2. $a = a_1$

$$u^{(2)}(x, 0, t) = \frac{A_1 \Gamma(1/4)}{\sqrt{2\pi}|x|^{1/4}} \exp\left[-i\left(\omega t - k_2|x| - \frac{3\pi}{8}\right)\right] +$$

$$+ \frac{A_2\sqrt{\pi}}{|x|^{1/2}} \exp\left[-i\left(\omega t - k_2|x| - \frac{\pi}{4}\right)\right] +$$

$$+ \frac{A_3 \Gamma(3/4)}{\sqrt{2\pi}|x|^{3/4}} \exp\left[-i\left(\omega t - k_2|x| - \frac{\pi}{8}\right)\right] -$$

$$- \frac{A_4 i\Gamma(1/4)}{4\sqrt{2\pi}|x|^{5/4}} \exp\left[-i\left(\omega t - k_2|x| - \frac{3\pi}{8}\right)\right] +$$

$$+ \frac{A_5 i}{2\sqrt{\pi}|x|^{3/2}} \exp\left[-i\left(\omega t - k_2|x| - \frac{\pi}{4}\right)\right] -$$

$$- \frac{3A_6 i\Gamma(3/4)}{4\sqrt{2\pi}|x|^{7/4}} \exp\left[-i\left(\omega t - k_2|x| - \frac{\pi}{8}\right)\right] +$$

$$+ B\frac{i}{2\sqrt{\pi}|x|^{3/2}} \exp\left[-i\left(\omega t - k_1|x| - \frac{\pi}{4}\right)\right] + 0(|x|^{-9/4})$$

$$A_1 = \frac{\omega^2\sqrt{2}\,(c_1^2 - c_4^2)}{2Gc_4^2 c_3^2 (b_1^+)^3}, \qquad \Gamma(z) \text{ — гамма-функция}$$

Остальные коэффициенты не приводятся ввиду их громоздкости.

3. $a_1 < a < a_3$, но $a \neq a_2$

$$u^{(2)}(x, 0, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{A_1}{|x|^{1/2}} + \frac{A_2}{|x|^{3/2}}\right)\exp\left[-i\left(\omega t - k_2|x| - \frac{\pi}{4}\right)\right] + \frac{Bi}{2\sqrt{\pi}\,|x|^{3/2}}\exp\left[-i\left(\omega t - k_1|x| - \frac{\pi}{4}\right)\right] + 0\left(|x|^{-5/2}\right)$$

$$A_1 = \frac{c_2^2 d_1^-}{4G\omega c_4}; \qquad B = -\frac{c_1^2 c_2^2 (c_1^2 - c_2^2)\, d_1^-}{2GZ(k_1)(c_1^2 - c_4^2)}$$

$$A_2 = \lim_{\sigma \to k_2} 2\sqrt{\sigma - k_2}\,\frac{d}{d\sigma}\left[\sqrt{\sigma - k_2}\,\frac{d}{d\sigma}\sqrt{\sigma - k_2}\,\bar{u}_2(\sigma)\right]$$

4. $a = a_2$

$$u^{(2)}(x, 0, t) = \frac{c_1^2 c_2^2}{2G\omega (c_2^2 - c_3^2)\pi |x|}\exp\left[-i\left(\omega t - k_1|x|\right)\right] + 0\left(|x|^{-2}\right)$$

5. $a = a_3$

$$u^{(2)}(x, 0, t) = \frac{A_1 \Gamma(3/4)}{\sqrt{2}\,\pi |x|^{3/4}}\exp\left[-i\left(\omega t - k_1|x| - \frac{\pi}{8}\right)\right] - \frac{A_2 i\,\Gamma(1/4)}{4\sqrt{2}\,\pi|x|^{5/4}}\exp\left[-i\left(\omega t - k_1|x| - \frac{3\pi}{8}\right)\right] + \frac{B}{\sqrt{\pi}\,|x|^{1/2}}\exp\left[-i\left(\omega t - k_2|x| - \frac{\pi}{4}\right)\right] + 0\left(|x|^{-3/2}\right)$$

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{c_2^2}{Gc_3^2 (e_2^+)^3}; \quad \Gamma(z) \text{ — гамма-функция.}$$

Остальные коэффициенты не приводятся ввиду их громоздкости.

Случай $a_3 < a < \infty$ аналогичен случаю $0 \leqslant a < a_1$ и поэтому не обсуждается.

2. Представляет интерес также получение асимптотических формул для случая $y \neq 0$. Для этого случая, причем без ограничения общности, можно считать $y > 0$, $x > 0$. Приступим к исследованию функций

$$\lambda_n(\alpha_n) = \sigma_n \cos\theta - i\gamma_n(\alpha_n)\sin\theta, \quad \alpha_n = \sigma_n + i\tau_n, \quad (n = 1, 2) \qquad (2.1)$$
$$(0 < \theta < \pi/2)$$

Функции $\lambda_n(\alpha_n)$ являются регулярными функциями комплексного переменного α_n, в соответствующим образом разрезанной комплексной плоскости α_n, отмеченной выше. Заметим также, что функции $\alpha_n(\lambda_n)$ — обратные к $\lambda_n(\alpha_n)$ алгебраические функции, поскольку они удовлетворяют алгебраическому уравнению четвертого порядка с полиномиальными коэффициентами, получающемуся из (2.1) простыми выкладами [8, 9].

Исследуем критические точки функций $\lambda_n(\alpha_n)$, то есть нули функций $\lambda_n'(\alpha_n)$. Легко видеть, что нули функций $\lambda_n'(\alpha_n)$ должны удовлетворять при каждом θ уравнению

$$\operatorname{tg}\theta = \left(i\frac{d\gamma_n}{d\alpha_n}\right)^{-1}, \quad (n = 1, 2)$$

где

$$i\frac{d\gamma_n}{d\alpha_n} = (-1)^n \frac{\alpha_n[(c_1^2 c_4^2 + c_2^2 c_3^2)\gamma_n^2 - c_1^2 c_4^2 (2\alpha_n^2 - k_1^2 - k_2^2)]}{i\gamma_n \sqrt{U(\alpha_n)}}, \quad (n = 1, 2)$$

Отсюда следует, что рассматриваемые уравнения будут иметь решения только в том случае, если $i\frac{d\gamma_n}{d\alpha_n}$ будут вещественны. В зависимости от значения a рассмотрим следующие случаи.

1. $0 \leqslant a \leqslant a_1$. В этом случае числитель при $-k_2 < \alpha_2 < 0$ в выражении $i\frac{d\gamma_2}{d\alpha_2}$ — положительный, а $\gamma_2(\alpha_2)$ — отрицательно мнимый. Отсюда следует, что точки $\alpha_2 = \alpha_{20}$ из интервала $(-k_2, 0)$ являются нулями первого порядка функции $\lambda_2'(\alpha_2)$, поскольку, как легко видеть, $\lambda_2''(\alpha_{20}) \neq 0$, и им соответствуют значения $\theta \in (0, \pi/2)$. Аналогично при $0 < \theta < \pi/2$ точки $-k_1 < \alpha_{10} < 0$ будут нулями первого порядка функции $\lambda_1'(\alpha_1)$. Тогда, в силу известной теоремы об обратной функции из теории аналитических функций [8], точки $\lambda_{20} = \alpha_{20}\cos\theta - i\gamma_2(\alpha_{20})\sin\theta$ будут точками ветвления второго порядка функции $\alpha_2(\lambda_2)$, где $\alpha_2(\lambda_2)$ является решением уравнения (2.1), а точки $\lambda_{10} = \alpha_{10}\cos\theta - i\gamma_1(\alpha_{10})\sin\theta$ — точками ветвления второго порядка для $\alpha_1(\lambda_1)$.

2. $a_1 < a < a_2$. Так как числитель в выражении $i\frac{d\gamma_2}{d\alpha_2}$ при $-k_2 < \alpha_{20} < 0$ положителен, то отсюда следует, что $i\frac{d\gamma_2}{d\alpha_2} > 0$ и, следовательно, в силу вышесказанного точки $\lambda_{20} = \alpha_{20}\cos\theta - i\gamma_2(\alpha_{20})\sin\theta$ будут точками ветвления второго порядка для функции $\alpha_2(\lambda_2)$. Поступая аналогичным образом, можно показать, что точки $\lambda_{10} = \alpha_{10}\cos\theta - i\gamma_1(\alpha_{10})\sin\theta$ при $-k_1 < \alpha_{10} < 0$ будут точками ветвления второго порядка для $\alpha_1(\lambda_1)$. Помимо этого, точками ветвления для $\alpha_1(\lambda_1)$ будут и точки $\lambda_{10} = \alpha_{10}\cos\theta - i\gamma_1(\alpha_{10})\sin\theta$, где $-k_3 < \alpha_{10} < -k_2$, причем в этом интервале значений $\gamma_1(\alpha_1)$ положительно мнима. Отметим, что в этом случае точкам $-k_3$ и $-k_2$ соответствует одно и то же значение $\theta = 0$. Отсюда следует, что при некотором значении α_{10}^* из интервала $(-k_3, -k_2)$ функция $i\frac{d\gamma_1}{d\alpha_1}$ достигает своего минимума и, следовательно, $tg\theta$ — своего максимума. Значит, при изменении α_{10} от $-k_3$ до значения α_{10}^* θ изменяется от нуля до $\theta^* = \operatorname{arctg}(i d\gamma_1/d\alpha_1)^{-1}|_{\alpha_1 = \alpha_{10}^*}$, а при изменении α_{10} от α_{10}^* до $-k_2$, θ изменяется от θ^* до нуля. Кроме

того, отсюда следует, что $d^2\gamma_1(\alpha_1)/d\alpha_1^2 = 0$ при $\alpha_1 = \alpha_{10}^*$, указывающее на то, что точка $\lambda_{10}^* = \alpha_{10}^* \cos\theta^* - i\gamma_1(\alpha_{10}^*)\sin\theta^*$ будет точкой ветвления третьего порядка для $\alpha_1(\lambda_1)$. Единственность нуля $d^2\gamma_1(\alpha_1)/d\alpha_1^2$ следует из того, что $d^3\gamma_1(\alpha_1)/d\alpha_1^3 \neq 0$ при $-k_3 < \alpha_1 < -k_2$, в чем нетрудно убедиться. Значит, каждому значению θ из интервала $(0, \theta^*)$ соответствуют три точки ветвления второго порядка функции $\alpha_1(\lambda_1)$.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что для остальных значений a $\alpha_n(\lambda_n)$ $(n = 1, 2)$ имеют следующие точки ветвления:

$$\lambda_{10} = \alpha_{10}\cos\theta - i\gamma_1(\alpha_{10})\sin\theta,\ \alpha_{10} \in (-k_2, 0),\ \alpha_{10} \in (-k_1, -k_3)$$

$$\text{для } \alpha_1(\lambda_1),\ a_1 < a < a_2$$

$$\lambda_{10} = \alpha_{10}\cos\theta - i\gamma_1(\alpha_{10})\sin\theta,\ -k_1 = -k_2 < \alpha_{10} < 0 \ \text{для}\ \alpha_1(\lambda_1)\ \text{при}\ a = a_2$$

$$\lambda_{10} = \alpha_{10}\cos\theta - i\gamma_1(\alpha_{10})\sin\theta,\ -k_2 < \alpha_{10} < 0 \ \text{для}\ \alpha_1(\lambda_1)\ \text{при}\ a_2 < a < \infty$$

$$\lambda_{20} = \alpha_{20}\cos\theta - i\gamma_2(\alpha_{20})\sin\theta,\ -k_1 < \alpha_{20} < 0 \ \text{для}\ \alpha_2(\lambda_2)\ \text{при}\ a_2 < a < a_3$$

$$\lambda_{20} = \alpha_{20}\cos\theta - i\gamma_2(\alpha_{20})\sin\theta,\ -k_1 < \alpha_{20} < 0 \ \text{для}\ \alpha_2(\lambda_2)\ \text{при}\ a_3 < a < \infty$$

причем при некотором $\alpha_{10}^{**} \in (-k_1, -k_3)$ точка $\lambda_{10}^{**} = \alpha_{10}^{**}\cos\theta^{**} - i\gamma_1(\alpha_{10}^{**})\sin\theta^{**}$, где $\theta^{**} = \operatorname{arctg}(id\gamma_1/d\alpha_1)^{-1}\ \alpha_1 = \alpha_{10}^{**}$, будет точкой ветвления третьего порядка в отличие от остальных точек, которые являются точками ветвления второго порядка. Нетрудно заметить также, что во всех случаях $\lambda_{10} < 0$, $\lambda_{20} < 0$.

Подробнее исследование функций, аналогичных $\gamma_n(\alpha_n)$, с другой точки зрения, приводится в работе [5].

Имея в виду эти свойства функций $\alpha_n(\lambda_n)$, $(n = 1, 2)$, функции $u_n(x, y)$ можно представить в виде

$$u_1(r, \theta) = \frac{i}{2\pi G}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{2}(-1)^n \frac{(c_1^2 - c_2^2)\alpha_n}{2c_3^2(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)}\frac{d\alpha_n}{d\lambda}e^{-i\lambda r}d\lambda$$

$$u_2(r, \theta) = \frac{1}{2\pi G}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{2}(-1)^n \frac{c_1^2(\alpha_n^2 - k_1^2) - c_2^2\gamma_n^2}{2c_3^2\gamma_n(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)}\frac{d\alpha_n}{d\lambda}e^{-i\lambda r}d\lambda \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha_n\cos\theta - i\gamma_n(\alpha_n)\sin\theta, \quad 0 < \theta < \pi/2 \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \end{aligned} \quad (n = 1, 2)$$

причем контуры интегрирования обходят точки ветвления $-\lambda_{n0}$ снизу, а λ_{n0}—сверху. Эти представления функций $u_n(r, \theta)$ позволяют по методам Лайтхилла получить асимптотические формулы этих функций $y = 0$ и $r \to \infty$.

Для доказательства возможности такого представления функций $u_1(r, 0)$, $u_2(r, 0)$ ограничимся рассмотрением одного из интегралов, входящих в выражение $u_2(r, 0)$ (2.2), так как остальные получаются аналогичным образом. Рассмотрим случай $0 \leqslant a < a_1$, $0 < \theta < \pi/2$. После замены переменной $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ этот интеграл представляется в виде

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} A(\sigma) \exp[-i(\sigma\cos\theta - i\gamma_1(\sigma)\sin\theta) r] \, d\sigma$$

$$A(\sigma) = \frac{c_1^2(\sigma^2 - k_1^2) - c_2^2\gamma_2^2}{2c_3^2 G\gamma_2(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)}$$

Рассматриваемый интеграл представим в виде суммы интегралов

$$I = I_1 + I_2 + I_3, \quad I_1 = \int_{-\infty}^{-k_1} A(\sigma)\exp[-i(\sigma\cos\theta - i\gamma_2(\sigma)\sin\theta) r] \, d\sigma$$

$$I_2 = \int_{-k_1}^{k_1} A(\sigma)\exp[-i(\sigma\cos\theta - i\gamma_2(\sigma)\sin\theta)] \, d\sigma$$

$$\overline{I_3} = \int_{k_1}^{\infty} \overline{A(\sigma)}\exp[i(\sigma\cos\theta + i\overline{\gamma_2(\sigma)}\sin\theta) r] \, d\sigma$$

и каждый из этих интегралов в отдельности приведем к искомому виду.

Рассмотрим сначала интеграл I_1. После замены

$$\lambda = \sigma\cos\theta - i\gamma_2(\sigma)\sin\theta \tag{2.3}$$

этот интеграл преобразуется к виду

$$I_1 = \int_L A(\sigma) e^{-i\lambda r} \frac{d\sigma}{d\lambda} d\lambda$$

причем контур L (фиг. 1) обходит точки k_1', k_3', соответствующие точкам k_1, k_3 на плоскости λ, указанным образом.

Теперь заметим, что функция $\alpha_2(\lambda_2)$, как решение уравнения (2.1), аналитична в области D, ограниченной контуром L и отрицательной полуосью $-\infty < \lambda_2 < -k_2\cos\theta$, за исключением точки λ_{20}, которая, как показано выше, является точкой ветвления второго порядка для $\alpha_2(\lambda_2)$.

Очевидно, что значения $\sigma_2(\lambda_2) = \sigma(\lambda)$ являются значениями функции $\alpha_2(\lambda_2)$ на L.

Рассмотрим функцию $A(\alpha_2)\, d\alpha_2/d\lambda_2$. Эта функция аналитична в области D, за исключением точки λ_{20} и совпадает со значениями $A(\sigma)\, d\sigma/d\lambda$ на L. Следовательно, независимо от того, какую именно ветвь функции $\alpha_2(\lambda_2)$ мы выбираем, интеграл от $A(\alpha_2)\, d\alpha_2/d\lambda_2$ по любому замкнутому контуру, не содержащему точки λ_{20}, равен нулю. Значит

$$\left\{ \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} \right\} A(\alpha_2) \frac{d\alpha_2}{d\lambda_2} e^{-i\lambda_2 r} d\lambda_2 = 0$$

$$\text{Здесь} \int\limits_{CA} A(\alpha_2) \frac{d\alpha_2}{d\lambda_2} e^{-i\lambda_2 r} d\lambda_2 \to 0 \text{ при } \sigma_2 \to -\infty$$

Действительно,

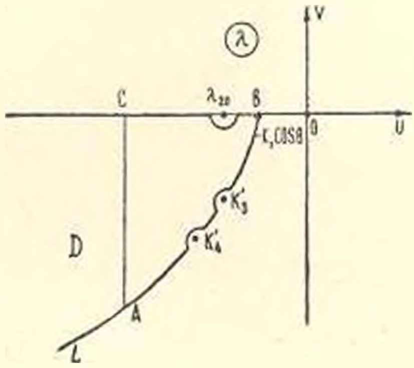
$$\left| \int\limits_{CA} A(\alpha_2) \frac{d\alpha_2}{d\lambda_2} e^{-i\lambda_2 r} d\lambda_2 \right| \leqslant \frac{1}{|\sigma_2 \cos\theta|} \int\limits_{v_0}^{0} \left| \sigma_2 A(\alpha_2) \frac{d\alpha_2}{d\lambda_2} \right| e^{vr} dv$$

$$\lambda_2 = u + iv, \quad v_0 = -\gamma_2(\alpha_2)\sin\theta, \quad u = \alpha_2\cos\theta = \sigma\cos\theta$$

Поскольку интеграл, стоящий в правой части неравенства, ограничен при $|\sigma_2| \to \infty$ ввиду наличия экспоненциального члена в подынтегральном выражении, то отсюда следует наше утверждение.

Но, с другой стороны, при $\sigma_2 = \sigma \to -\infty$ точка A стремится к бесконечности по линии L, а точка C — к бесконечности по отрицательной полуоси. Отсюда следует, что

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{-k_2\cos\theta} A(\alpha_2) \frac{d\alpha_2}{d\lambda_2} e^{-i\lambda_2 r} d\lambda_2 \qquad (2.4)$$



Фиг. 1.

где контур интегрирования обходит точку λ_{20} снизу, а $\alpha_2(\lambda_2)$ определяется из уравнения

$$\lambda_2 = \alpha_2(\lambda_2)\cos\theta - i\gamma_2(\alpha_2)\sin\theta$$

Функция $\alpha_2(\lambda_2)$, определяющаяся из этого уравнения, характеризуется тем, что в окрестности λ_{20} имеет разложение

$$\alpha_2(\lambda_2) = \alpha_{20} - if\sqrt{\lambda_{20} - \lambda_2} + \ldots, \qquad f > 0$$

Действительно, поскольку каждому значению λ_2 из интервала $\lambda_{20} \leqslant \lambda_2 \leqslant -k_2\cos\theta$ соответствуют два значения α_2, то $\alpha_2(\lambda_2)$ получает значения $-k_2 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_{20}$ в точках $\lambda_{20} \leqslant \lambda_2 \leqslant -k_2\cos\theta$, для которых $\sqrt{\lambda_{20} - \lambda_2} = -i\sqrt{\lambda_2 - \lambda_{20}}$, то есть при обходе точки λ_{20} снизу, а остальные значения в тех точках, для которых $\sqrt{\lambda_{20} - \lambda_2} = i\sqrt{\lambda_2 - \lambda_{20}}$, то есть при обходе точки λ_{20} сверху.

Далее, сделав аналогичную замену (2.3) в интеграле I_2, получим

$$I_2 = \int\limits_{-k_2\cos\theta}^{\lambda_{20}} A(\alpha_2) \frac{d\alpha_2}{d\lambda_2} e^{-i\lambda_2 r} d\lambda_2 + \int\limits_{\lambda_{20}}^{k_2\cos\theta} A(\alpha_2) \frac{d\alpha_2}{d\lambda_2} e^{-i\lambda_2 r} d\lambda_2$$

Здесь $\alpha_2(\lambda_2)$ — вышеупомянутая функция. Теперь, имея в виду вышесказанное относительно $\alpha_2(\lambda_2)$, получаем

$$I_1 + I_2 = \int\limits_{-\infty}^{k_2 \cos\theta} A(\alpha_2) \frac{d\alpha_2}{d\lambda_2} e^{-i\lambda_2 r} d\lambda_2 \tag{2.5}$$

причем контур интегрирования обходит точку ветвления λ_{20} сверху.

Поступая аналогичным образом, как и выше, получим

$$\int\limits_{k_1}^{\infty} \overline{A(\alpha)} \exp\left[i\left(\alpha \cos\theta + i\overline{\gamma_2(\alpha)} \sin\theta\right) r\right] d\alpha = \int\limits_{k_1 \cos\theta}^{\infty} A(\alpha_2) \frac{d\alpha_2}{d\lambda_2} e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 \tag{2.6}$$

где $\alpha_2(\lambda_2)$ определяется из уравнения

$$\lambda_2 = \alpha_2 \cos\theta + i\gamma_2(\alpha_2) \sin\theta$$

а контур интегрирования обходит точку ветвления $-\lambda_{20}$ функции $\alpha_2(\lambda_2)$ сверху.

После применения операции сопряжения в равенстве (2.6) окончательно получим

$$I_3 = \int\limits_{k_1 \cos\theta}^{\infty} A(\alpha_2) \frac{d\alpha_2}{d\lambda_2} e^{-i\lambda_2 r} d\lambda_2 \tag{2.7}$$

где $\alpha_2(\lambda_2)$ определяется из уравнения

$$\lambda_2 = \alpha_2(\lambda_2) \cos\theta - i\gamma_2(\alpha_2) \sin\theta$$

Здесь $\gamma_2(\alpha_2)$ положительно мнима при $-k_2 < \alpha_2 < k_2$, а контур интегрирования обходит точку ветвления $-\lambda_{20}$ уже снизу.

Таким образом, из (2.5), (2.7) следует, что

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\alpha_2) \frac{d\alpha_2}{d\lambda_2} e^{-i\lambda_2 r} d\lambda_2$$

где

$$\lambda_2 = \alpha_2(\lambda_2) \cos\theta - i\gamma_2(\alpha_2) \sin\theta \tag{2.8}$$

Определяемая из (2.8) функция $\alpha_2(\lambda_2)$ характеризуется тем, что в окрестности точек ветвления $\pm\alpha_{20}$ она имеет разложения

$$\alpha_2(\lambda_2) = \alpha_{20} - if\sqrt{\lambda_{20} - \lambda_2} + \ldots, \quad \sqrt{\lambda_{20} - \lambda_2} = -i\sqrt{\lambda_2 - \lambda_{20}}$$

$$\alpha_2(\lambda_2) = -\alpha_{20} - if\sqrt{\lambda_{20} + \lambda_2} + \ldots, \quad \sqrt{\lambda_{20} + \lambda_2} = -i\sqrt{-\lambda_{20} - \lambda_2}$$

Представления функций $u_1(r, \theta)$, $u_2(r, \theta)$ в виде (1.6) для остальных значений a получаются аналогичным образом.

Приступим к получению асимптотических формул для рассматриваемых функций при $0 < \theta < \pi/2$ и $r \to \infty$. При выводе этих формул ограничимся случаем $a_1 < a < a_3$, поскольку для других значений a эти формулы имеют тот же вид, что и при отсутствии магнитного поля.

В рассматриваемом случае, например, при $a_1 < a < a_2$ функция $u_1(\lambda_1)$ при каждом фиксированном θ из интервала $0 < \theta < \theta^*$ имеет три точки ветвления второго порядка

$$\lambda_{10}^{(1)} = \alpha_{10}^{(1)} \cos\theta - i\gamma_1(\alpha_{10}^{(1)}) \sin\theta \quad \text{при} \quad \alpha_{10}^{(1)} \in (-k_1,\ 0)$$

$$\lambda_{10}^{(2)} = \alpha_{10}^{(2)} \cos\theta - i\gamma_1(\alpha_{10}^{(2)}) \sin\theta \quad \text{при} \quad \alpha_{10}^{(2)} \in (-k_2,\ \alpha_{10}^{*})$$

$$\lambda_{10}^{(3)} = \alpha_{10}^{(3)} \cos\theta - i\gamma_1(\alpha_{10}^{(3)}) \sin\theta \quad \text{при} \quad \alpha_{10}^{(3)} \in (\alpha_{10}^{*},\ -k_2)$$

а $u_2(\lambda_2)$ — точку ветвления второго порядка λ_{20}. При $\theta=\theta^*$ точка λ_{10}^{*} является точкой ветвления третьего порядка для $u_1(\lambda_1)$, а λ_{20} — точкой ветвления второго порядка для $u_2(\lambda_2)$. Имея в виду вышесказанное, методом Лайтхилла получим следующие асимптотические формулы для $u^{(n)}(r,\ \theta,\ t)$ $(n=1,\ 2)$

а) $0 < \theta < \theta^*$

$$u^{(n)}(r,\theta,t) = -\frac{i}{\sqrt{\pi r}} \sum_{k=1}^{3} A_n^{(k)} \exp\left[-i\left(\omega t - |\lambda_{10}^{(k)}| r - \frac{\pi}{4}\right)\right] -$$

$$-\frac{iB_n}{\sqrt{\pi r}} \exp\left[-i\left(\omega t - |\lambda_{20}| r - \frac{\pi}{4}\right)\right] + 0(r^{-3/2}); \quad (n=1,\ 2)$$

где

$$A_1^{(k)} = -\frac{i}{2\pi G} \frac{(c_1^2 - c_2^2)\alpha_{10}^{(k)}}{2c_3^2[\gamma_1^2(\alpha_{10}^{(k)}) - \gamma_2^2(\alpha_{10}^{(k)})]\sqrt{\lambda_1''(\alpha_{10}^{(k)})}}$$

$$A_2^{(k)} = -\frac{1}{4\pi G c_3^2} \frac{c_1^2(\alpha_{10}^{2(k)} - k_1^2) - c_2^2\gamma_1^2(\alpha_{10}^{(k)})}{\gamma_1[\gamma_1^2(\alpha_{10}^{(k)}) - \gamma_2^2(\alpha_{10}^{(k)})]\sqrt{\lambda_1''(\alpha_{10}^{(k)})}}$$

б) Случай $\theta = \theta^*$

$$u^{(n)}(r,\theta,t) = \frac{A_n\Gamma(1/3)\sqrt{3}}{2\pi\sqrt[3]{r}} \exp[-i(\omega t - |\lambda_{10}^{*}| r - \pi/3] +$$

$$+ \frac{B_n\Gamma(2/3)}{2\pi r^{3/2}} \exp[-i(\omega t - |\lambda_{10}^{*}| r - \pi/6] -$$

$$-\frac{C_n i}{\sqrt{\pi r}} \exp[-i(\omega t - |\lambda_{20}| r - \pi/4)] + 0(r^{-4/3}), \quad (n=1,\ 2)$$

где

$$A_1 = -\frac{i\sqrt[3]{6}(c_1^2 - c_2^2)}{6Gc_3^2} \frac{\alpha_{10}^{*}}{\gamma_1^2(\alpha_{10}^{*}) - \gamma_2^2(\alpha_{10}^{*})} \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda_1'''(\alpha_{10}^{*})}}$$

$$A_2 = \frac{\sqrt[3]{6}}{6c_3^2 G} \frac{c_2^2\gamma_1^2(\alpha_{10}^{*}) - c_1^2(\alpha_{10}^{*2} - k_1^2)}{\gamma_1(\alpha_{10}^{*})[\gamma_1^2(\alpha_{10}^{*}) - \gamma_2^2(\alpha_{10}^{*})]} \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda_1'''(\alpha_{10}^{*})}}$$

Ввиду громоздкости формул выражения коэффициентов B_n и C_n не приводятся.

Отметим, что в случае $a_2 < a < a_3$ асимптотические формулы имеют почти аналогичный вид. Случаи $a = a_2$ и $0 < \theta < \pi/2$ не рассматриваются, поскольку вид асимптотических формул в этих случаях такой же, как и при отсутствии магнитного поля.

Далее отметим, что из решения рассматриваемой стационарной задачи нетрудно получить решение нестационарной задачи, когда в магнитоупругой среде действует сила $У(x, y, t) = \delta(x)\delta(y)\delta(t)$.

Действительно, введем преобразование в виде

$$u_n(x, y, \omega) = \int_0^\infty u^{(n)}(x, y, t)\, e^{-i\omega t}\, dt, \qquad 0 < \omega < \infty, \qquad (n = 1, 2) \quad (2.9)$$

Тогда $u_n(x, y, \omega)$, являющиеся решениями уравнений (1.2), будут выражаться формулами (2.2), которые, как можно убедиться, представляются в виде

$$u_1(r, \theta, \omega) = \frac{1}{2\pi G} \int_0^\infty \mathrm{Re} \sum_{n=1}^{2} (-1)^n \frac{i(c_1^2 - c_2^2)\, s_n}{c_3^2(\gamma_1^{*2} - \gamma_2^{*2})} \frac{ds_n}{d\lambda_*} \cos(\omega\lambda_* r)\, d\lambda_* +$$

$$+ \frac{1}{4\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im} \sum_{n=1}^{2} (-1)^n \frac{i(c_1^2 - c_2^2)\, s_n}{c_3^2(\gamma_1^{*2} - \gamma_2^{*2})} \frac{ds_n}{d\lambda_*} \sin(\omega\lambda_* r)\, d\lambda_* +$$

$$+ \frac{i}{4\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im} \sum_{n=1}^{2} (-1)^n \frac{i(c_1^2 - c_2^2)\, s_n}{c_3^2(\gamma_1^{*2} - \gamma_2^{*2})} \frac{ds_n}{d\lambda_*} \cos(\omega\lambda_* r)\, d\lambda_* \qquad (2.10)$$

$$u_2(r, \theta, \omega) = \frac{1}{2\pi G} \int_0^\infty \mathrm{Re} \sum_{n=1}^{2} (-1)^n \frac{c_1^2(s_n^2 - c_1^{-2}) - c_2^2 \gamma_2^{*2}}{c_3^2 \gamma_n^*(\gamma_1^{*2} - \gamma_2^{*2})} \frac{ds_n}{d\lambda_*} \cos(\omega\lambda_* r)\, d\lambda_* +$$

$$+ \frac{1}{4\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im} \sum_{n=1}^{2} (-1)^n \frac{c_1^2(s_n^3 - c_1^{-2}) - c_2^2 \gamma_n^{*2}}{c_3^2 \gamma_n^*(\gamma_1^{*2} - \gamma_2^{*2})} \frac{ds_n}{d\lambda_*} \sin(\omega\lambda_* r)\, d\lambda_* +$$

$$+ \frac{i}{4\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im} \sum_{n=1}^{2} (-1)^n \frac{c_1^2(s_n^2 - c_1^{-2}) - c_2^2 \gamma_n^{*2}}{c_3^2 \gamma_n^*(\gamma_1^{*2} - \gamma_2^{*2})} \frac{ds_n}{d\lambda_*} \cos(\omega\lambda_* r)\, d\lambda_*$$

Здесь произведена замена $\lambda_* = \omega\lambda^{-1}$, $s_n = \omega\alpha_n^{-1}$, $s_n(\lambda_*)$ определяется из уравнения

$$\lambda_* = s_n \cos\theta - i\gamma_n^*(s_n) \sin\theta$$

где

$$\gamma_n^*(s_n) = \gamma_n(s_n^{-1}\omega)\,\omega^{-1}$$

Теперь после замены $k_* r = t$, сопоставления формул (2.9) и (2.10) и при учете четности функций $u_n(r, \theta, \omega)$ по переменной ω, получим искомое решение рассматриваемой задачи в виде

$$u^{(1)}(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi G r} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{2} (-1)^n \frac{i(c_1^2 - c_2^2)\, s_n}{c_3^2(\gamma_1^{*2} - \gamma_2^{*2})} \frac{ds_n}{dt_*}$$

$$u^{(2)}(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi G r} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{2} (-1)^n \frac{c_1^2(s_n^2 - c_1^{-2}) - c_2^2\gamma_n^{*2}}{c_3^2\gamma_n^*(\gamma_1^{*2} - \gamma_2^{*2})} \frac{ds_n}{dt_*}$$

В частности, при $y = 0$ получим

$$u^{(1)}(x, 0, t) = 0$$

$$u^{(2)}(x, 0, t) = \frac{1}{2\pi G|x|} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{2} (-1)^n \frac{c_1^2(s_n^2 - c_1^{-2}) - c_2^2\gamma_n^{*2}}{c_3^{(2)}\gamma_n^*(\gamma_1^{*2} - \gamma_2^{*2})}, \qquad s_n = \frac{t}{|x|}$$

Решение обсуждаемой нестационарной задачи при другом подходе получено в работе [2].

Отметим, что вышеуказанным образом можно получить подобные результаты для анизотропной среды. Кроме того, аналогичным подходом можно провести исследование задачи Ламба для анизотропных и магнитоупругих сред.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила 23 I 1978

Է. Խ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ԿԵՆՏՐՈՆԱՑԱԾ ՀԱՐՄՈՆԻԿ ՈՒԺՈՎ ԳՐԳՌՎՈՂ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՏԱՏԱՆՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում դիտարկվում է կենտրոնացած հարմոնիկ ուժի ազդեցության տակ անվերջ իզոտրոպ առաձգական միջավայրի տատանումները, այդ միջավայրի շարժման հարթությանը ուղղահայաց մագնիսական դաշտի առկայության դեպքում։ Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության միջոցով կառուցվում է մագնիսաառաձգական միջավայրի տատանումները բնութագրող դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը Լայտխիլի մեթոդով, ուժի կիրառման կետից մեծ հեռավորությունների վրա գտնվող կետերի համար, կախված մագնիսական դաշտի ինտենսիվությունից, ստացված են տեղափոխությունների համար ասիմպտոտիկ բանաձևեր։ Բացի դրանից դիտարկվող ստացիոնար խնդրից ստացված է կենտրոնացած իմպուլսի վերաբերյալ ոչ ստացիոնար խնդրի լուծումը։

ON THE VIBRATION OF MAGNETOELASTIC MEDIUM EXCITED BY A CONCENTRATED HARMONIC FORCE

Ed. Kh. GRIGORIAN

Summary

The vibration of an isotropic infinite medium under the effect of a concentrated harmonic force, in the presence of a homogeneous magnetic field parallel to the plane of the medium motion, is considered. The solution characterizing the vibration of a magnetoelastic medium is obtained by Fourier's transformation.

Further, by Latchill's method the asimptotic formulas for displacements at large distances from the point of the force application, depending on the intensity of an external magnetic field, are derived. The solution for a nonstationary problem on concentrated impulse is obtained as well from the above stationary problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lighthill M. J.* An introduction to Fourier analysis and generalized functions. Cambridge Univ. Press, 1959.
2. *Багдоев А. Г.* Определение фундаментальных решении для уравнений магнитоупругости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, № 2.
3. *Свекло В. А.* Упругие колебания анизотропного тела. Уч. зап. ЛГУ, 1949, в. 17.
4. *Осипов И. О.* К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника. ПММ, 1969, т. 36, вып. 3.
5. *Осипов И. О.* О волновых полях и остроугольных кромках на волновых фронтах к анизотропной среде от точечного источника. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
6. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. М., изд-во «Наука», 1973.
7. *Нобл Б.* Метод Винера-Хопфа. М., изд. ИЛ, 1962.
8. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М., изд. «Наука», 1968.
9. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций, т. 2. М., изд. «Наука», 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXI, № 5, 1978 Механика

А. Н. ГУЗЬ, А. В. НАВОЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСЖИМАЕМОГО СТЕРЖНЯ ПРИ РАВНОМЕРНОМ БОКОВОМ ДАВЛЕНИИ

Введение. Вопрос об устойчивости упругого тела, которое помещено без трения между двумя абсолютно жесткими стенками и загружено по боковой поверхности равномерным давлением, рассматривался в [1, 2]. В этих работах указанный вопрос исследован на примере задачи об устойчивости полосы из сжимаемого и несжимаемого материалов и получен следующий вывод. Состояние равновесия является устойчивым, если к боковой поверхности давление приложено в виде «следящей» нагрузки, и неустойчивым, если к боковой поверхности давление приложено в виде «мертвой» нагрузки. В последнем случае критическая нагрузка для тонкой полосы приблизительно в два раза меньше эйлеровой силы при осевом сжатии. Эти результаты получены только для одной задачи (об устойчивости полосы), поэтому представляется целесообразным исследовать задачи для тел другой формы с целью проверки общности вышеизложенных выводов.

В настоящей статье исследуем задачу об устойчивости цилиндрического стержня произвольного поперечного сечения, который помещен без трения между двумя абсолютно жесткими стенками и к боковой поверхности которого приложено давление в виде «следящей» или «мертвой» нагрузки. Материал стержня будем считать несжимаемым, изотропным с произвольной формой упругого потенциала, а стержень будем считать сплошным, что обеспечивает существование однородного докритического состояния. Как и в [3—5], исследование проведем в общей форме для трехмерных линеаризованных теорий упругой устойчивости при конечных и малых докритических деформациях [6, 7]. Будем применять лагранжевы системы координат, которые в недеформированном состоянии совпадают с декартовыми (x_1, x_2, x_3) или круговыми цилиндрическими (r, θ, x_3) системами координат. Все величины, относящиеся к докритическому состоянию, отметим индексом «ноль».

Заметим, что в силу условия несжимаемости для докритического состояния при его определении приходим к задаче о всестороннем равномерном сжатии, следовательно, можно использовать основные уравнения и соотношения [3—5]. В случае же сжимаемых материалов [1] уже не приходим к задаче о всестороннем равномерном сжатии.

§ 1. Основные соотношения. Линеаризованные уравнения движения при отсутствии возмущений объемных сил, согласно [4, 5], можно представить в следующем виде:

$$\mu_0' \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \mu_0 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + \operatorname{grad} p - \rho \ddot{\vec{u}} = 0 \qquad (1.1)$$

Линеаризированное условие несжимаемости запишем в таком виде:

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \tag{1.2}$$

Линеаризированные граничные условия в напряжениях на части S_1 поверхности запишем в форме

$$\vec{Q}\big|_{S_1} = \vec{P}; \quad \vec{Q} = (2\mu_0 - \sigma_0)\, \vec{N} \cdot \vec{\nabla}\, \vec{u} + (\mu_0 - \sigma_0)\, \vec{N} \times \operatorname{rot} \vec{u} + \vec{N} p \tag{1.3}$$

В выражениях (1.1) — (1.3) введены следующие обозначения: μ_0—величина, которая определяется через упругий потенциал, $\vec{u}$ — возмущение вектора перемещений; ρ — плотность материала в естественном состоянии; $\vec{N}$ — орт нормали к поверхности тела в естественном (недеформированном) состоянии; $\vec{P}$ — возмущения внешних нагрузок, действующих на S_1, p — возмущение величины, связанной с гидростатическим давлением; σ_0 — напряжение, соответствующее всестороннему равномерному сжатию. Заметим, что напряжение σ_0 является истинным и для теории конечных докритических деформаций, поскольку в силу условий несжимаемости при всестороннем равномерном сжатии площадь поверхности стержня не изменяется.

В случае, когда давление к боковой поверхности стержня приложено в виде «мертвой» нагрузки, $\vec{P} = 0$. Если давление к боковой поверхности приложено в виде «следящей» нагрузки, то для определения $\vec{P}$ в [3] получено следующее выражение (более точное, чем в других работах по теории малых докритических деформаций)

$$\vec{P} = -\sigma_0 (\vec{N} \cdot \vec{\nabla}\, \vec{u} + \vec{N} \times \operatorname{rot} \vec{u})\big|_{S_1} \tag{1.4}$$

Совместим ось стержня с осью $0x_3$ $(0 \leqslant x_3 \leqslant l)$, где l — длина стержня. Учитывая, что по постановке задачи стержень при $x_3 = 0$ и $x_3 = l$ соприкасается без трения с абсолютно жесткими стенками, из выражений (1.3) получаем следующие граничные условия при $x_3 = 0$ и $x_3 = l$:

$$u_3 = 0; \quad Q_1 = 0; \quad Q_2 = 0 \tag{1.5}$$

Учитывая (1.3), граничные условия (1.5) можно сформулировать и через перемещения

$$\begin{gathered} u_3 = 0; \quad (2\mu_0 - \sigma_0) \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + (\mu_0 - \sigma_0) \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = 0 \\ (2\mu_0 - \sigma_0) \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + (\mu_0 - \sigma_0) \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = 0 \end{gathered} \tag{1.6}$$

На боковой поверхности в случае действия «следящей» нагрузки согласно (1.3) и (1.4) должны выполняться следующие граничные условия:

$$2\mu_0 \vec{N} \cdot \vec{\nabla}\, \vec{u} + \mu_0 \vec{N} \times \operatorname{rot} \vec{u} + \vec{N} p = 0 \tag{1.7}$$

В случае действия «мертвой» нагрузки, согласно (1.3), при $\vec{P}=0$ на боковой поверхности получаем следующие граничные условия:

$$(2\mu_0-\sigma_0)\,\vec{N}\cdot\nabla\vec{u}+(\mu_0-\sigma_0)\,\vec{N}\times\operatorname{rot}\vec{u}+\vec{N}p=0 \tag{1.8}$$

Необходимо отметить, что изложенная выше задача сформулирована относительно вектора $\vec{u}$ и скаляра p. Следуя [4], приведем выражения для вычисления величины μ_0 через упругий потенциал, считая последний функцией A_i^0 — алгебраических инвариантов тензора деформаций Грина. В этом случае для теории конечных докритических деформаций имеет место выражение

$$\mu_0=\left(\frac{\partial}{\partial A_1^0}+\frac{\partial}{\partial A_2^0}\right)\Phi^0\Big|_{A_i^0=0}; \qquad \Phi^0=\Phi^0(A_1^0,\ A_2^0) \tag{1.9}$$

а в случае первого и второго вариантов теории малых докритических деформаций — следующее выражение:

$$\mu_0=\frac{\partial}{\partial A_2^0}\Phi^0\Big|_{A_i^0=0}+\sigma_0; \quad \Phi^0=\Phi^0(A_2^0,\ A_3^0) \tag{1.10}$$

Рассмотрим вопрос о применимости статического метода (метода Эйлера) к рассматриваемой задаче.

Когда на боковую поверхность S_1 действует «мертвая» нагрузка ($\vec{P}=0$), как известно [7], статический метод исследования можно применять. Рассмотрим случай действия «следящей» нагрузки на боковую поверхность. Будем считать, что боковая поверхность пересекается с плоскостями $x_3=0$ и $x_3=l$ по кривым L. В этом случае в [8] доказано, что достаточные условия применимости метода Эйлера выполняются, если на L обращается в нуль одна из величин u_3 или u_N (через u_N обозначено перемещение, направленное по нормали к поверхности S_1). Первое условие (1.6) обеспечивает выполнение следующего условия:

$$u_3\big|_L=0 \tag{1.11}$$

Таким образом, как при действии «мертвой» нагрузки на боковую поверхность, так и при действии «следящей» нагрузки на боковую поверхность выполняются достаточные условия применимости метода Эйлера. В связи с этим будем применять уравнение (1.1) без инерционных членов в виде

$$\mu_0\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}-\mu_0\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u}+\operatorname{grad}p=0 \tag{1.12}$$

Таким образом, при изложенной постановке приходим к задаче на собственные значения: в случае действия «следящей» нагрузки на боковую поверхность — к уравнениям (1.12) и (1.2), к граничным условиям на торцах

(1.6) и граничным условиям (1.7) на боковой поверхности; в случае действия «мертвой» нагрузки на боковую поверхность — к уравнениям (1.12) и (1.2), к граничным условиям на торцах (1.6) и граничным условиям (1.8) на боквой поверхности.

§ 2. *Исследование устойчивости.* При исследовании устойчивости необходимо учесть, что уравнения (1.12) и (1.2), граничные условия (1.7) полностью переходят в соответствующие выражения линейной классической теории упругости, если вместо постоянной Ляме μ ввести величину μ_0. Относительно величины μ_0, как и в [2—5], будем предполагать, что выполняется следующее неравенство:

$$\mu_0 > 0 \tag{2.1}$$

которое обеспечивает устойчивость состояния равновесия упругого тела при всестороннем равномерном сжатии «следящей» нагрузкой, приложенной ко всей поверхности тела.

«Следящая нагрузка». В этом случае, как отмечалось выше, приходим к задаче на собственные значения (1.12), (1.2), (1.6) и (1.7), которая не совпадает с соответствующей линейной задачей классической теории упругости в силу структуры граничных условий (1.6). Представим решение уравнений (1.12) и (1.2) в следующем виде:

$$\begin{gathered} u_1 = w_1(x_1, x_2)\cos\pi\frac{m}{l}x_3; \quad u_2 = w_2(x_1, x_2)\cos\pi\frac{m}{l}x_3 \\ u_3 = w_3(x_1, x_2)\sin\pi\frac{m}{l}x_3; \quad p = w_4(x_1, x_2)\cos\pi\frac{m}{l}x_3 \end{gathered} \tag{2.2}$$

Выражения в виде (2.2) удовлетворяют граничным условиям (1.6) на торцах при $x_3=0$ и $x_3=l$.

Подставляя (2.2) в (1.12), (1.2) и (1.7), получаем двумерную однородную задачу относительно $w_i(x_1, x_2)$ $(i=1, 2, 3, 4)$, которая полностью совпадает с соответствующей однородной задачей линейной классической теории упругости, если в последней параметр Ляме μ заменить величиной μ_0.

Последняя задача, как известно, имеет единственное тривиальное решение, если выполняются условия (2.1). Поскольку принимаем, что условия (2.1) должны выполняться всегда, то в данном случае состояние равновесия будет устойчивым независимо от формы поперечного сечения стержня.

Таким образом, пришли к выводу, что состояние равновесия стержня произвольного поперечного сечения, который помещен без трения между двумя абсолютно жесткими стенками, будет устойчивым, если к боковой поверхности давление приложено в виде «следящей» нагрузки. Заметим, что этот вывод получен для материала с произвольным упругим потенциалом.

«Мертвая» нагрузка. В этом случае рассмотрим стержень кругового поперечного сечения ($0 \leqslant r \leqslant R$; $0 \leqslant x_3 \leqslant l$). Общее решение уравнений (1.12) и (1.2), следуя [7], в данном случае представим в виде

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial x_3}; \qquad u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta\partial x_3}$$
$$u_3 = \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\chi; \qquad p_0 = \Delta\frac{\partial}{\partial x_3}\chi \tag{2.3}$$

где ψ — гармоническая, а χ — бигармоническая функции,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Из выражения (1.8) получаем граничные условия на боковой поверхности при $r=R$ в виде

$$\left[(2\mu_0 - \sigma_0)\frac{\partial u_r}{\partial r} - p\right] = 0$$
$$\left[(2\mu_0 - \sigma_0)\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + (\mu_0 - \sigma_0)\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial r}ru_\theta\right)\right] = 0 \tag{2.4}$$
$$\left[(2\mu_0 - \sigma_0)\frac{\partial u_3}{\partial r} + (\mu_0 - \sigma_0)\left(\frac{\partial u_r}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial r}\right)\right] = 0$$

Функции ψ и χ, удовлетворяющие граничным условиям (1.6) на торцах, выберем в следующей форме:

$$\psi = \cos m\frac{\pi}{l}x_3 AI_n\left(m\frac{\pi}{l}r\right)\sin n\theta$$
$$\chi = \sin m\frac{\pi}{l}x_3\left[BI_n\left(m\frac{\pi}{l}r\right) + Cm\frac{\pi}{l}rI_{n+1}\left(m\frac{\pi}{l}r\right)\right]\cos n\theta \tag{2.5}$$

В (2.5) и ниже через $I_n(z)$ обозначена функция Бесселя первого рода n-ого порядка от чисто мнимого аргумента, через A, B, и C обозначены произвольные постоянные.

Подставляя решение в форме (2.5) в граничные условия (2.4) и учитывая (2.3), в результате обычной процедуры получаем характеристический определитель, который по форме совпадает с характеристическим определителем задачи, рассмотренной в работе [9].

По аналогии с [9] рассмотрим «стержневую» форму потери устойчивости ($m=n=1$) и для длинного стержня $\left(\alpha = \pi\frac{R}{l} < 1\right)$ вычислим характеристический определитель с точностью до двух членов разложения по параметру α. Как и в [9], в результате вычислений получаем следующее выражение для характеристического уравнения:

$$\xi = \frac{2\mu_0 - \sigma_0}{16}\frac{\alpha^4}{R^2}\left\{[\mu_0(2\mu_0 + 3\sigma_0) - (\mu_0 + \sigma_0)(2\mu_0 - \sigma_0)] + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha^2}{8}[2\mu_0(7\mu_0 + 6\sigma_0) - (2\mu_0 - \sigma_0)(4\mu_0 + 3\sigma_0)]\right\} \tag{2.6}$$

Как следует из граничных условий (1.7) и (1.8), граничные условия для «следящей» нагрузки (1.7) можно получить из граничных условий для «мертвой» нагрузки (1.8), если в последнем выражении формально положить $\sigma_0=0$, которое входит явно. Аналогичным образом из (2.6) получаем характеристический определитель для случая «следящей» нагрузки в следующем виде:

$$\delta=\frac{3\mu_0^3\alpha^{11}}{32R^3} \tag{2.7}$$

В силу (2.1) из (2.7) следует, что $\delta>0$, то есть $\delta\neq0$. Следовательно, при действии «следящей» нагрузки состояние равновесия является устойчивым. Это обстоятельство является иллюстрацией вышеизложенного результата для стержня произвольного поперечного сечения при действии «следящей» нагрузки.

§ 3. *Пример.* Рассмотрим в рамках теории конечных докритических деформаций пример для тела с потенциалом Трелоара (неогуковского типа) при действии «мертвой» нагрузки. В принятых здесь обозначениях потенциал для неогуковского тела представим [7] в следующей форме:

$$\Phi^0=2C_{10}A_1^0 \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в (1.8), получаем следующее выражение для определения μ_0:

$$\mu_0=2C_{10} \tag{3.2}$$

Для тонкого стержня $\left(\alpha=\pi\dfrac{R}{l}<1\right)$ при „стержневой" форме потери устойчивости ($m=n=1$) представим σ_0 в следующем виде:

$$\sigma_0\approx\sigma_0^{(0)}+\alpha^2\sigma_0^{(1)} \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (2.6), с точностью до α^2 получаем следующее выражение:

$$(\sigma_0)_{кр}\approx-\frac{1}{2}p_{эл};\qquad p_{эл}=\frac{3}{2}C_{10}\alpha^2 \tag{3.4}$$

В (3.4) через $p_{эл}$ обозначена эйлерова сила при осевом сжатии. Следовательно, в случае действия «мертвой» нагрузки состояние равновесия является неустойчивым.

Вывод. Вышеизложенные результаты дают возможность сделать следующий вывод, относящийся к устойчивости несжимаемого стержня, который помещен без трения между двумя абсолютно жесткими стенками и к боковой поверхности которого приложено равномерное давление. Вывод заключается в том, что состояние равновесия будет устойчивым, если к боковой поверхности давление приложено в виде «следящей» нагрузки, и неустойчивым, если к боковой поверхности давление приложено в виде «мертвой- нагрузки. В последнем случае для тонкого стержня критическая нагрузка приблизительно в два раза меньше эйлеровой силы при осевом сжатии.

Институт механики АН УССР
Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 19 XII 1977

Ա. Ն. ԳՈՒԶ, Ա. Վ. ՆԱՎՈՅԱՆ

ՉՍԵՂՄՎՈՂ ՁՈՂԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԿՈՂՄՆԱՅԻՆ ՃՆՇՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Աշխատանքում հետազոտված է չսեղմվող ձողի կայունությունը, երբ ձողը առանց շփման տեղավորված է երկու բացարձակ կոշտ պատերի միջև և նրա կողմնային մակերևույթին կիրառված է հավասարաչափ ճնշում։ Արդյունքները ստացված են ընդհանուր տեսքով եռաչափ գծայնացված կայունության տեսությունների համար վերջավոր և փոքր նախակրիտիկական դեֆորմացիաների դեպքում։ Ապացուցված է, որ հավասարակշռության վիճակը կլինի կայուն, երբ կողմնային մակերևույթի վրա կիրառված ճնշումը լինի «հետևող» բեռնավորման տեսքով, և անկայուն, եթե կողմնային մակերևույթի վրա կիրառված ճնշումը լինի «մեռած» բեռնավորման տեսքով։ Վերջին դեպքում ցույց է տրված, որ բարակ ձողի համար, կրիտիկական բեռնավորումը մոտավորապես երկու անգամ փոքր է էյլերյան ուժից առանցքային սեղման դեպքում։

ON STABILITY OF AN INCOMPRESSIBLE BAR UNDER UNIFORM LATERAL PRESSURE

A. N. GOOZ, A. V. NAVOYAN

Summary

The stability of an incompressible bar placed between two absolutely rigid walls, its lateral surface being under uniform pressure, is examined. The results are obtained in general form for three-dimensional linearized theories of stability for finite and small critical deformations. It is proved that the equilibrium is stable when compressive forces are of „following" type and is unstable when the forces are of „nonfollowing" (dead) type. In the latter case for a slender bar the value of critical forces are about twice as lower comparing to Eyler's forces in the axial compression.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих сжимаемых тел при равномерном боковом давлении. Прикл. механика, 1977, т. 13, № 10.
2. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих несжимлемых тел при равномерном боковом давлении. Прикл. механика, 1977, т. 13, № 11.
3. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. Прикл. механика, 1976, т. 12, № 6.
4. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих несжимаемых тел при всестороннем сжатии. Прикл. механика, 1976, т. 12, № 11.
5. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии «мертвой» нагрузкой. Прикл. механика, 1976, т. 12, № 12.
6. *Гузь А. Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. К., «Наукова думка», 1971. 276 с.
7. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. К., «Наукова думка», 1973. 270 с.
8. *Гузь А. Н.* Достаточные условия применимости метода Эйлера для случая «следящей» нагрузки, заданной на части поверхности тела. Докл. АН УССР, сер. А, 1977, № 10.
9. *Гузь А. Н.* Устойчивость несжимаемых цилиндров при всестороннем сжатии. Докл. АН УССР, сер. А, 1978, № 2.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXI, № 5, 1978 Механика

С. Н. КУКУДЖАНОВ

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ НЕРАВНОМЕРНО НАГРУЖЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Приводится путь решения задач устойчивости цилиндрических оболочек переменной толщины, находящихся под действием переменного внешнего давления на основании метода последовательных приближений, который дает возможность провести двусторонние оценки приближений наименьшего собственного числа. В отличие от известных работ [4] — [9] наряду с оболочками средней длины рассмотрены длинные оболочки, когда края оболочки закреплены в продольном направлении. Получены простые формулы и построены соответствующие кривые зависимости критической нагрузки от амплитуды толщины. Приведены двусторонние оценки полученных результатов. Показана различная степень влияния переменной толщины на критическую нагрузку для длинных оболочек и оболочек средней длины, а также существенное увеличение критической нагрузки при закреплении краев в осевом направлении.

1. Учитывая слабовыраженное волнообразование в продольном направлении в сравнении с окружным, для определения критического давления использовалась полубезмоментная теория [1, 2]. Уравнение устойчивости для оболочки переменной (вдоль образующей) толщины относительно радиального перемещения w имеет вид

$$\varepsilon(\alpha)\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)^2 w+\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left[h(\alpha)\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\right]+\frac{T^0(\alpha)}{E}\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)w=0$$

$$\varepsilon(\alpha)=\frac{h^3(\alpha)}{12R^2(1-\nu^2)},\qquad h(\alpha)=hf_1(\alpha),\qquad T^0(\alpha)=qf_2(\alpha)R \tag{1.1}$$

$R\alpha$, $R\beta$ — координаты в осевом и окружном направлениях; R, l — радиус и длина оболочки; E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона; $f_1(\alpha)$— функция изменения толщины; $f_2(\alpha)$ — функция изменения внешнего давления.

Для решения уравнения (1.1) в случае замкнутой оболочки необходимо удовлетворить четырем граничным условиям в продольном направлении (по два на каждом краю) и условию периодичности в окружном направлении. Поэтому решение уравнения ищем в следующем виде:

$$w=X(\alpha)\cos n\beta \tag{1.2}$$

Подставляя это выражение в (1.1), получаем

$$[f_1(\alpha) X^{(2)}]^{(2)} + f_1^3(\alpha)\gamma(n) X = \lambda f_2(\alpha) X, \qquad \varepsilon = \frac{h^2}{12R^2(1-\nu^2)} \tag{1.3}$$

$$\lambda = t\omega(n), \quad \omega(n) = n^4(n^2-1), \quad \gamma(n) = \varepsilon n^4(n^2-1)^2, \qquad t = \frac{qR}{Eh} \tag{1.4}$$

Граничные условия при $\alpha = \mathrm{const}$ на основании гипотез полубезмоментной теории и выражения (1.2) принимают вид

$$v = 0\,(X = 0), \quad u = 0\,(X' = 0), \quad T_1 = 0\,(X'' = 0), \quad S = 0\,(X''' = 0) \tag{1.5}$$

u, v — осевое и окружные смещения: T_1, S — нормальное и сдвигающее усилия. Таким образом, приходим к задаче на собственные значения для уравнения (1.3) с граничными условиями типа (1.5).

2. Поставленная задача решалась методом последовательных приближений с использованием постоянных Шварца [4]. Для краткости записи представим уравнение (1.3) и граничные условия типа (1.5) в операторном виде

$$M[X] = \lambda f_2(\alpha) X, \quad U_L[X] = 0 \tag{2.1}$$

Как известно, в методе последовательных приближений исходят из выбранной функции X_0 и каждую последующую функцию X_1, X_2, ..., получают, решая краевую задачу (при этом для задачи на собственные значения λX заменяют на X). Далее определяют, так называемые, постоянные Шварца:

$$a_k = \int_0^L X_i X_{k-i}\, d\alpha, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad 0 < i < k \tag{2.2}$$

(O, L) — интервал определения дифференциального уравнения. Затем находят отношение Шварца $\mu_k = a_k a_{k-1}^{-1}$. Существует теорема [4], на основании которой следует, что если задача на собственные значения является самосопряженной, полностью определенной и собственные значения не входят в краевые условия, то отношения Шварца μ_k образуют монотонно убывающую сходящуюся последовательность, ограниченную снизу первым собственным значением λ_1. При этом для первого собственного значения справедлива оценка

$$\mu_{k+1} - \delta \le \lambda_1 \le \mu_{k+1}, \qquad \delta = \frac{\mu_k - \mu_{k+1}}{\rho_2 \mu_{k+1}^{-1} - 1}, \qquad \mu_{k+1} < \rho_2 < \lambda_2 \tag{2.3}$$

Таким образом, чтобы найти нижнюю границу для λ_1, необходимо знать нижнюю границу ρ_2 для второго собственного числа λ_2. Нижнюю границу ρ_2 нетрудно установить путем сравнения с задачей на собственные значения, коэффициенты которой постоянны.

Для сложных задач на собственные значения, к которым относится и вышеприведенная задача устойчивости, повторное решение часто наталкивается на определенные трудности. Поэтому важно выбрать достаточно хорошо начальную функцию, чтобы уже в начальном приближении получить достаточно точные результаты. Для этого класса задач можно исходить из функции X_1 (которая удовлетворяет всем краевым условиям), а X_0 определять на основании равенства $M[X_1]=f_2(\alpha)X_0$. При этом, чтобы начальная функция была достаточно хорошей, к функции X_1 прибавим удовлетворяющие краевым условиям функции φ_i, умноженные на константы C_i, выбрав последние так, чтобы функция X_0 так же удовлетворяла краевым условиям, то есть возьмем

$$X_1^* = X_1 + \sum_i C_i \varphi_i \tag{2.4}$$

и определим X_0 из вышеотмеченного равенства

$$X_0 = M[X_1^*] f_2^{-1}(\alpha) \tag{2.5}$$

где $f_2(\alpha) \neq 0$ в рассматриваемом интервале. Далее определяем постоянные Шварца и соответствующие отношения. Для уравнения (1.3) они являются функциями параметра n

$$a_0(n) = \int_0^L X_0^2 d\alpha, \quad a_1(n) = \int_0^L X_0 X_1^* d\alpha, \quad a_2(n) = \int_0^L (X_1^*)^2 d\alpha$$
$$\mu_1(n) = a_0(n)\, a_1^{-1}(n), \qquad \mu_2(n) = a_1(n)\, a_2^{-1}(n) \tag{2.6}$$

Если ограничиться вторым приближением, тогда получаем

$$\mu_2(n) \approx \lambda_2(n) = t n^4 (n^2 - 1), \quad t \approx \mu_2(n)/n^4 (n^2 - 1) \tag{2.7}$$

Соответствующая критическая нагрузка t_* будет при $n = n_*$, реализующем минимум выражения (2.7). При этом оценка (2.3) примет вид

$$\frac{\mu_2(n_*) - \lambda(n_*)}{n_*^4 (n_*^2 - 1)} \leq t_* \leq \frac{\mu_2(n_*)}{n_*^4 (n_*^2 - 1)}, \quad \lambda(n_*) = \frac{\mu_1(n_*) - \mu_2(n_*)}{\mu_2(n_*)\mu_2(n_*) - 1} \tag{2.8}$$

Далее были рассмотрены две задачи, представляющие определенный практический интерес. Во-первых, была рассмотрена задача устойчивости цилиндрической оболочки переменной толщины (синусоидального типа), находящейся под действием равномерного внешнего давления. При этом исследовалась степень влияния как утолщения, так и утоньшения центральной части оболочки (наиболее чувствительной) на величину критической нагрузки. Во-вторых, рассматривался случай действия переменного давления на оболочку переменной толщины, изменяющихся по степенному закону. При этом, как было отмечено, края оболочки считались закрепленными в тангенциальном направлении $v = u = 0$ и, следовательно,

$$X(0) = X(L) = X'(0) = X'(L) = 0, \quad L = l/R \tag{2.9}$$

3. Рассмотрим случай синусоидального изменения толщины

$$f_1(\alpha) = 1 - a \sin \pi \alpha L^{-1}, \quad 0 < \alpha < 0, \quad |a| < 1, \quad f_2(\alpha) = 1 \tag{3.1}$$

Нижнюю границу λ_2 найдем, решив вспомогательную задачу с постоянными коэффициентами. Для этого в исходном уравнении (1.3) заменим функцию $(1-a\sin \pi L^{-1}\alpha)$ постоянной величиной и притом наименьшим ее значением в интервале $0\leqslant\alpha\leqslant L$. При $a>0$ наименьшее значение будет $(1-a)$, а при $a<0$ это 1. Обозначим собственное значение полученного таким образом уравнения с постоянными коэффициентами через ρ. При этом имеем $X^{(4)}=\Lambda X$, где введено обозначение (при $a>0$) $\Lambda=\rho(1-a)^{-1}-\gamma(n)(1-a)^2$, (при $a<0$) $\Lambda=\rho-\gamma(n)$.

Второе собственное значение этого уравнения для краевых условий (2.9), как известно, будет $\Lambda_2=(7.853\,L^{-1})^4$, следовательно,

$$\rho_2=(7.853\,L^{-1})^4(1-a)+\gamma(n)(1-a)^3,\quad (a>0) \tag{3.2}$$

$$\rho_2=(7.853\,L^{-1})^4+\gamma(n),\quad (a<0) \tag{3.3}$$

На основании теоремы сравнения [4] для всех собственных значений ρ_k и λ_k имеем $\rho_k<\lambda_k$.

Далее нетрудно показать, что поставленная задача на собственные значения (1.3), (2.9), (3.1) является самосопряженной и полностью определенной при $|a|<1$.

Перейдем к непосредственному решению задачи (1.3), (2.9), (3.1). На основании вышесказанного будем исходить из функции X_1, которая удовлетворяет граничным условиям (2.9) и имеет вид (3.4). Константа C_2 определяется из условия, чтобы функция $X_0(\alpha)$ удовлетворяла одному из главных граничных условий. Итак, введя обозначение $\alpha_1=\alpha L^{-1}$, имеем

$$X_1=C_1\alpha_1^2(\alpha_1^2-1)^2+2C_2\sin^5\pi\alpha_1 \tag{3.4}$$

$$X_0=[(1-a\sin\pi\alpha_1)X_1^{(2)}]^{(2)}+\gamma(n)(1-a\sin\pi\alpha_1)^3X_1 \tag{3.5}$$

Подставляя выражение $X_1(\alpha_1)$ в (3.5) и удовлетворяя условию $X_0(0)=0$, либо $X_0(1)=0$, получаем в силу симметрии одно и то же соотношение

$$C_2=4!\,(1+a\pi)\left(\frac{L}{2\pi}\right)^4C_1 \tag{3.6}$$

Следовательно, после подстановки выражений (3.4), (3.6) в (3.5) получаем функцию $X_0(\alpha_1)$, которая удовлетворяет условиям $X_0(0)=X_0(L)=0$.

Далее на основании (2.6) нетрудно определить $a_0(n)$, $a_1(n)$, $a_2(n)$, вычислив соответствующие интегралы. В качестве примера приведем случай, когда $a=-0.5$. При этом получаем

$$\mu_1(n)=\gamma(n)\cdot 3.07665+L^{-4}\cdot 544.1816+\frac{107.1217\,L^{-4}}{\gamma(n)\,L^{-4}\cdot 2.5604\cdot 10^{-3}+0.5271}$$

$$\mu_2(n)=\gamma(n)\cdot 3.0244+L^{-4}\cdot 622.6567$$

тогда, согласно соотношению (2.7), имеем

$$t=3.0244\,\varepsilon\,(n^2-1)+622.6567\,L^{-4}n^{-4}(n^2-1)^{-1} \tag{3.7}$$

Первоначально рассмотрим оболочки средней длины, для которых $(\pi R l^{-1})^{1/2}\varepsilon^{-1/2}\gg 1$. При этом будем считать, что $n^2\gg 1$. Отметим, что это допущение не существенно для критической нагрузки оболочки средней длины. Тогда соотношение (3.7) примет вид

$$t = 3.0244\,\varepsilon n^2 + 622.6567\,L^{-1} n^{-6}$$

Отсюда получаем следующие критические значения для n_* и t_*:

$$n_*^2 = 1.05395\,\varepsilon^{-1/4}\theta,\quad t_* = 4.25015\,\varepsilon^{3/4}\theta,\quad \theta = 4.73\,L^{-1} \tag{3.8}$$

Оценим точность полученного значения. Обратимся к оценке (2.8), где n_* определяется выражением (3.8), тогда получаем

$$4.24016\,\varepsilon^{3/4}\theta \leqslant t_* \leqslant 4.25015\,\varepsilon^{3/4}\theta,\quad t_* = \frac{q^*R}{Eh} \tag{3.9}$$

Отсюда нетрудно видеть, что расхождение между нижним и верхним пределами будет менее 0.24%. Следовательно, во втором приближении мы получаем значение критической нагрузки (3.8), которое отличается от точного значения менее, чем на 0.24%. Это расхождение можно уменьшить за счет оценки (3.9), если взять среднее значение между нижним и верхним пределами, при этом $t_* = 4.2452\,\varepsilon^{3/4}\theta$.

Полученное выражение отличается от точного на величину менее 0.12%. Под точным значением здесь имеется в виду точное решение задачи (1.3), (2.9).

Исследуем теперь длинные оболочки ($a=-0.5$). Рассмотрим, например, оболочки, для которых выполняется условие $(\pi R l^{-1})^2 = 10\,\varepsilon^{1/2}$. Тогда выражение (3.7) примет вид

$$t = [3.0244\,(n^2-1) + 639.2182\,n^{-4}(n^2-1)^{-1}]\,\varepsilon$$

Наименьшее значение t реализуется при $n_* = 2$. Подставляя это значение n_* в (3.10), получаем $t_* = 22.3902\,\varepsilon$. Оценим точность этого значения. Обращаясь к оценке (2.8), при $n_* = 2$ получаем

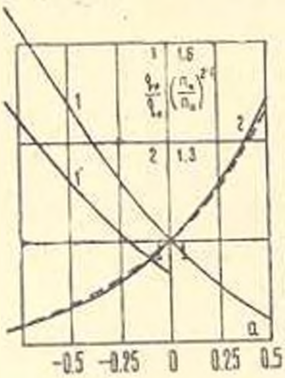
$$22.0058\,\varepsilon \leqslant t_* \leqslant 22.3902\,\varepsilon$$

Отсюда нетрудно видеть, что расхождение между верхним и нижним пределами будет менее 1.72%. Уточним полученный результат, беря среднее значение. При этом получаем

$$t_* = 22.198\,\varepsilon \tag{3.10}$$

Это значение отличается от точного на величину менее 0.86%. Аналогичным путем нетрудно определить критические нагрузки и для иных значений a, однако надо заметить, что приведенное решение практически приемлемо только для интервала $-1\leqslant a\leqslant 0.5$, если мы ограничимся точностью не более 2%. При меньшей точности этот интервал можно расширить.

На фиг. 1 для оболочек средней длины приведена кривая 1, зависимость q^*/q_0^* от параметра a и кривая 2 зависимости n_*^2/n_0^2 от a (характеризующего амплитуду изменения толщины); q^*, q_0^* — критическое давление для оболочек переменной и постоянной толщины; n_*, n_0 — соответственно критическое число волн; $n_0^2 = \sqrt[4]{3}\,\varepsilon^{-1/4}\theta$, $q_0^* R/Eh = 1.755\,\varepsilon^{3/4}\theta$. Кривую 2 в интервале $(-1 \leqslant a \leqslant 0.5)$ с достаточной для практики точностью можно аппроксимировать кривой (пунктирная кривая фиг. 1)



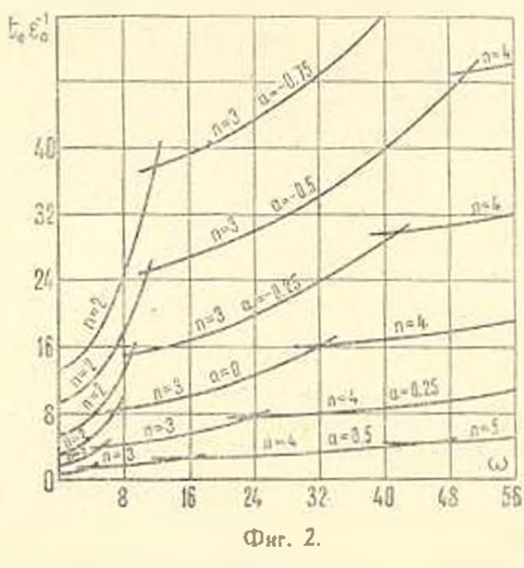
Фиг. 1.

$$(n_*/n_0)^2 = (1-a)^{-1/3} \tag{3.11}$$

В работе [7] для оболочек средней длины исследована такая же задача в случае $a < 0$, когда края оболочки шарнирно оперты (фиг. 1, кривая 1'). При сравнении кривых 1 и 1', нетрудно видеть, что критическая нагрузка существенно увеличивается при закреплении краев в продольном направлении. При выводе формул критической нагрузки для оболочек средней длины было сделано допущение $n_*^2 \gg 1$. Предполагаем, как обычно, что это условие выполняется при $n_* \geqslant 4$ [3]. Тогда, подставляя в выражение (3.11) $n_* \geqslant 4$, получаем следующее неравенство:

$$\frac{l}{R} < 0.5k\left(\frac{\sqrt{1-\nu^2}}{1-a}\right)^{1/2}\left(\frac{R}{h}\right)^{1/2}, \quad k = 1.5 \tag{3.12}$$

ограничивающее l сверху для оболочек средней длины. Условие (3.12) эквивалентно условию $(\pi R l^{-1})^2 \varepsilon^{-1/2} \geqslant 60(1-a)$. На фиг. 2 для длинных



Фиг. 2.

оболочек приведены кривые изменения безразмерной критической нагрузки $f_* \varepsilon^{-1}$ в зависимости от безразмерного геометрического параметра

$\omega = (\pi R l^{-1})^{2} \varepsilon^{1/2}$ для фиксированных значений a. При $\omega \geqslant 60(1-a)$ приведенные кривые дают значения $l_{*}\varepsilon^{-1}$, которые стремятся к значениям $l_{*}\varepsilon^{-1}$, полученным на основании формул для оболочек средней длины, тем самым соотношение (3.12) подтверждается также графически.

Условием применимости полубезмоментной теории для цилиндрических оболочек переменной в осевом направлении толщины являются соотношения [2]

$$\left|\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right| \ll \left|\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\left(D(\alpha)\frac{\partial^4 w}{\partial \beta^2}\right)\right| \ll \left|D(\alpha)\frac{\partial^6 w}{\partial \beta^6}\right|, \quad D(\alpha) = \frac{h^3(\alpha)}{12R^2(1-\nu^2)}$$

которые на основании выражения (1.3) сводятся к следующим:

$$X^{(2)} \ll n_*^2 X, \quad (DX)^{(2)} \ll n_*^2 (DX) \tag{3.13}$$

где n_* определяется равенством (3.11). Учитывая приближенное решение (3.4), а также выражение $D(\alpha)$, для вышерассмотренного интервала $-1 < a \leqslant 0.5$ на основании расчетов получаем

$$X^{(2)}/X < 2\delta^2, \qquad (DX)^{(2)}/(DX) \leq 2\delta^2 \tag{3.14}$$

за исключением малых зон, примыкающих к краям оболочки. Тогда соотношения (3.13) сводятся к условию $2\delta^2 \ll n_*^2$. Подставляя сюда выражения δ и n_*, на основании (3.8), (3.11) получаем

$$\frac{l}{R} > M_0 k \left(\frac{1-a}{\sqrt{1-\nu^2}}\right)^{1/2} \left(\frac{h}{R}\right)^{1/2}, \quad k = 1.5 \tag{3.15}$$

В работе [10] в случае шарнирного закрепления краев оболочки постоянной толщины ($k = 1$, $a = 0$) получена аналогичная оценка, при этом $M_0 = 15$. Используя это значение M_0 для неравенства (3.15), получаем условия применимости полубезмоментной теории оболочек переменной толщины, ограничивающее l снизу.

4. Поместив начало координат в середине образующей оболочки, рассмотрим следующий случай изменения толщины и давления (симметричные относительно середины оболочки)

$$h(\alpha_1) = h[1 + a(1-\alpha_1^2)], \quad q(\alpha_1) = q[1 - b(1-\alpha_1^2)]^{-1}, \quad \alpha_1 = \alpha L \tag{4.1}$$

L — половина длины оболочки. Поставленная задача на собственные значения является самосопряженной и полностью определенной при $a \geqslant 0$, $0 \leqslant b < 1$.

Удовлетворяя граничным условиям (2.9), будем искать $X_1(\alpha_1)$ в следующем виде:

$$X_1 = C_1 L^4 (\alpha_1^2 - 1)^2 + C_2 L^6 (\alpha_1^2 - 1)^3 \tag{4.2}$$

Тогда на основании равенства (2.5) получаем следующее выражение для X_0, (где $a_1 = 1 + a$, $b_1 = 1 - b$):

$$X_0 = \{[(a_1 - a\alpha_1^2)^3 X_1^{(2)}]^{(2)} + \gamma(n)(a_1 - a\alpha_1^2)^3 X_1\}(b_1 + b\alpha_1^2) \tag{4.3}$$

Подставляя выражения (4.2) в (4.3) и удовлетворяя условиям $X_0(1)=0$, либо $X_0(-1)=0$, получаем

$$C_3=gL^{-2}C_1, \qquad g=-\frac{24-112a}{288-192a} \tag{4.4}$$

Следовательно, после подстановки выражений (4.2), (4.4) в соотношение (4.3) имеем функцию $X_0(\alpha_1)$, которая в силу симметрии удовлетворяет условиям $X_0(1) = X_0(-1) = 0$. Далее на основании (2.6) легко определить соответствующие отношения Шварца. Полученные таким образом выражения, в общем виде, приводить не будем, ввиду их громоздкости.

Рассмотрим первоначально оболочку постоянной толщины, находящуюся под действием переменного давления ($a=0$, $b\neq 0$), например, случай $b=0.5$ (при этом наибольшее значение давления в середине оболочки в два раза больше, чем у края)

$$\mu_1(n)=\gamma(n)\cdot 0.550121+L_1^{-4}18.36829+\frac{9.8731\,L^{-8}}{\gamma(n)\cdot 0.25606+L^{-4}\cdot 8.17315}$$

$$\mu_2(n)=\gamma(n)\cdot 0.544477+L^{-4}\cdot 17.37904$$

Тогда, на основании (2.7)

$$t(n)=0.544477\,\varepsilon\,(n^2-1)+278.0646\,n^{-4}(n^2-1)^{-1}L^{-4} \tag{4.5}$$

Отсюда, подобно предыдущему случаю, для оболочек средней длины имеем

$$n_*^2=1.32269\,\varepsilon^{-1/4}\theta, \qquad 0.94214\,\varepsilon^{3/4}\theta\leqslant t_*\leqslant 0.96023\,\varepsilon^{3/4}\theta$$

Если взять среднее значение между верхним и нижним пределами, то получим следующее выражение:

$$t_*=0.95119\,\varepsilon^{3/4}\theta, \qquad t_*=\frac{q^*R}{Eh} \tag{4.6}$$

которое отличается от точного значения на величину менее 1%.

В рассматриваемом случае $b=0.5$ наибольшее значение давления $\max q(0)=2q$, следовательно, безразмерная амплитуда $\max t_*$ будет $\max t_*=2t_*=1.90238\,\varepsilon^{3/4}\Gamma$. Сравним это значение с критическим значением равномерно распределенного давления $(t_*)_0$ [3]

$$\max t_*/(t_*)_0=1.084, \quad (t_*)_0=1.755\,\varepsilon^{3/4}\theta \tag{4.7}$$

В то же время практический интерес представляет сравнение полученного критического значения (4.6) с критическим значением осредненного давления $(t_*)_s$. На основании (4.1) получаем

$$(t_*)_s/(t_*)_0=\sqrt{bb_1}\,(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{bb_1^{-1}}\,)^{-1} \tag{4.8}$$

Для $b=0.5$ отсюда имеем $(t_*)_s = 0.6366\,(t_*)_0$, тогда как из выражения (4.6) получаем $t_* = 0.54199\,(t_*)_0$. Следовательно, значение $(t_*)_s$ больше t_* на 17.5%, то есть осреднение давления приводит к сравнительно ощутимому завышению критического значения t.

Рассмотрим теперь длинные оболочки ($a=0$, $b=0.5$) с вышеприведенными размерами $(\pi R l^{-1})^2 = 10\,\varepsilon^{1/2}$. В данном случае на основании (4.5), (2.6) получаем $4.6383\,\varepsilon \leqslant t_*(3) \leqslant 4.7963\,\varepsilon$. Отсюда имеем $t_* = 4.7173\,\varepsilon$, которое отличается от точного значения на величину менее 0.6%.

Сравним критическую амплитуду давления $\max t_*$ с критическим значением равномерно распределенного давления (для оболочки с вышеприведенными размерами) $(t_*)_{00}$

$$\max t_* = 2t_* = 9.4346\,\varepsilon, \quad (t_*)_{00} = 8.793\,\varepsilon, \quad \max t_*/(t_*)_{00} = 1.076$$

Далее, рассмотрим случай оболочки переменной толщины $a \neq 0$, находящейся под действием постоянного давления $b=0$. Например, рассмотрим случай $a=0.5$. При этом для оболочек средней длины имеем

$$n_*^2 = 1.05261\,\varepsilon^{-1/4}\,\theta, \quad 4.2865\,\varepsilon^{3/4}\,\theta \leqslant t_* \leqslant 4.3170\,\varepsilon^{3/4}\,\theta$$

Взяв среднее значение между нижним и верхним пределами, получаем следующую формулу для критической нагрузки:

$$t_* = 4.3017\,\varepsilon^{3/4}\,\theta \tag{4.9}$$

которая отличается от точной на величину менее 0.35%. Полученное значение (4.9) сравним с значением критической нагрузки оболочки осредненной толщины. Формула для критической нагрузки оболочки осредненной толщины на основании (4.1) будет

$$(t_*)_c = \left(1 + a\frac{2}{3}\right)^{3/2} (t_*)_0, \quad (t_*)_0 = 1.755\,\varepsilon^{3/4}\,\theta \tag{4.10}$$

Для нашего случая $a=0.5$, $(t_*)_c = 2.053\,(t_*)_0$. Из формулы же (4.9) имеем $t_* = 2.4512\,(t_*)_0$. Отсюда получаем, что $(t_*)_c$ меньше t_* на 19.4%. Следовательно, осреднение толщины приводит к ощутимому занижению критической нагрузки.

Рассмотрим теперь для этого случая ($a=0.5$, $b=0$) длинные оболочки с вышеприведенными размерами $(\pi R l^{-1})^2 = 10\,\varepsilon^{1/2}$. При этом имеем $n_*=2$, $t_* = 22.2925\,\varepsilon$. Полученное значение отличается от точного на основании оценки (2.8) на величину менее 1.6%. Формула для критической нагрузки длинной оболочки осредненной толщины имеет вид $(t_*)_c = \left(1 + a\dfrac{2}{3}\right)^3 (t_*)_{00}$, $(t_*)_{00} = 8.793\,\varepsilon$. Следовательно, при $a=0.5$ $(t_*)_c = 20.8426\,\varepsilon$. Если сравнить это значение с полученным значением $t_* = 22.2925\,\varepsilon$, то нетрудно видеть, что оно меньше на 6.5%, тогда как для оболочек средней длины мы получили расхождение более, чем на 19.4%. Следовательно, по мере увеличения длины оболочка переменной толщины становится менее жесткой в смысле устойчивости.

Далее, исследуем случай оболочки переменной толщины, находящейся под действием переменного давления $a \neq 0$, $b \neq 0$. Рассмотрим, например, случай $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$, то есть, когда толщина и давление в середине оболочки увеличиваются в 1.5 раза в сравнении со значением у края. При этом для оболочки средней длины, подобно вышерассмотренным случаям, получаем

$$n_*^2 = 1.0625\,\varepsilon^{-1/4}\theta, \quad t_* = 2.9923\,\varepsilon^{-3/4}\theta \tag{4.11}$$

Полученное выражение критической нагрузки на основании оценки (2.8) отличается от точного на величину менее 1.1%. Сравним полученное значение (4.11) с критическим осредненным давлением оболочки осредненной толщины $(t_*)_{s.c}$ для $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$. При этом получаем $t_*/(t_*)_{s.c} =$ $= 1.08$.

Рассмотрим теперь длинные оболочки с вышеприведенной зависимостью $(\pi R l^{-1})^2 = 10\,\varepsilon^{1/2}$. При этом имеем $n_* = 2$, $t_* = 15.6754\,\varepsilon$.

Приведенное выражение критической нагрузки на основании оценки (2.8) отличается от точного на величину менее 2.2%. При этом получаем $t_*/(t_*)_{s.c} = 0.98$.

Аналогичным путем нетрудно определить критические нагрузки для иных a и b, однако надо заметить, что если мы ограничиваемся точностью не более 3%, то приведенное решение приемлемо только для интервала $0 \leqslant a, b \leqslant 0.5$.

Отметим, что, с другой стороны, сама полубезмоментная теория справедлива для сравнительно небольших показателей изменяемости толщины и внешней нагрузки. Поэтому для случаев, когда мы с успехом можем ограничиться начальными приближениями и привести оценку полученного результата, такой путь решения представляет определенный интерес.

Тбилисский математический институт им. А. М. Размадзе
АН Грузинской ССР

Поступила 1 IX 1977

Ս. Ն. ԿՈՒԿՈՒՋԱՆՈՎ

ԱՆՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԲԵՌՆԱՎՈՐՎԱԾ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՀԱՍՏՈՒԹՅԱՄԲ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ԲԵՌԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԻ ԿԻՐԱՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ցույց է տրվում փոփոխական հաստությամբ գլանային թաղանթների կայունության խնդիրների լուծման ճանապարհը, երբ թաղանթները գտնվում են փոփոխական արտաքին ճնշման ազդեցության տակ։

Օգտագործվում է հաջորդական մոտավորությունների մեթոդը, որը հնարավորություն է տալիս կրիտիկական բեռի որոշման համար բերել երկկողմանի գնահատականներ։

Դիտարկվել են մասնակի խնդիրներ։

ON THE METHOD OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS FOR DETERMINING CRITICAL VARIABLE LOADS, ACTING ON SHELLS OF VARIABLE THICKNESS

S. N. KUKUJANOV

S u m m a r y

The way for solving problems on stability of cylindrical shells of variable thickness, acted upon by a variable load (in the axial direction), is given on the basis of the method of successive approximations. The estimates of upper and lower bounds for the critical load are presented. Some particular examples are considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов В. З.* Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек. ПММ, 1944, т. 8, № 2.
2. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1967.
3. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М., Физматгиз, 1967.
4. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М., Изд. «Наука», 1968.
5. *Андреев Л. В., Ободан Н. И.* Устойчивость цилиндрических оболочек переменной толщины. Прикл. мех., 1968, т. 4, в. 5.
6. *Андреев Л. В., Ободан Н. И.* Применение метода теории возмущений для определения критических нагрузок неравномерно нагруженных цилиндрических оболочек переменной толщины. Тр. VIII Всесоюзн. конф. по теории об. и пл., 1971.
7. *Ершов В. В., Рябцев В. А., Шалиткин В. А.* Об устойчивости оболочек вращения переменной толщины. Тр. X Всесоюзн. конф. по теории об. и пл., 1975.
8. *Даревский В. М.* Устойчивость подкрепленной цилиндрической оболочки переменной толщины при переменном внешнем давлении. Тр. X Всесоюзн. конф. по теории об. и пл., 1975.
9. *Мочалин А. А.* Устойчивость полубезмоментной цилиндрической оболочки переменной толщины. Изв. высших учебн. завед., Машиностр., 1975, № 11.
10. *Зюзин В. А.* Влияние условий закрепления торцов оболочки на величину критического внешнего давления. Тр. VI Всесоюзн. конф. по теории об. и пл., 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXI, № 5, 1978 Механика

В. И. МАЛЫЙ

ОБ УСКОРЕННЫХ УСТАЛОСТНЫХ ИСПЫТАНИЯХ КОНСТРУКЦИЙ

Натурные усталостные испытания в настоящее время являются единственно достоверным способом определения усталостной прочности изделий машиностроения, так как в них воспроизводятся без искажений все разнообразные факторы, существенно влияющие на выносливость. Серьезные трудности при расширении объема таких испытаний возникают в связи с их технической сложностью и большой продолжительностью, которая часто соизмерима с ожидаемым временем эксплуатации создаваемой конструкции, что заметно обесценивает получаемую информацию. Поэтому большие усилия направлены на создание надежных ускоренных методов испытаний [1—3]. Однако необходимо иметь в виду, что эти методы создавались и отрабатывались применительно к испытаниям лабораторных образцов материалов, и поэтому при формальном применении их к испытаниям конструкций, как будет показано ниже, могут возникать как принципиальные, так и технические трудности.

Но прежде, чем приступить к их анализу, введем некоторые понятия.

Большинство ускоренных методов основано на использовании информации об усталостном разрушении, получаемой при более высоких амплитудах нагрузок, чем в нормальном режиме. Если в нормальном режиме в точках $p = 1, 2, \ldots$ конструкции создаются циклические усилия или перемещения с амплитудами A_p^0, то режим нагружения будем называть пропорциональным, когда в точках p конструкции соответствующие амплитуды имеют значения $A_p = fA_p^0$. Функция $f(N)$, определяющая параметр пропорциональности f в зависимости от долговечности N в пропорциональном режиме, является естественным при многокомпонентном нагружении конструкции обобщением кривой Велера.

Параметр f в случае, когда $f > 1$, будем называть параметром форсирования, так как соответствующее ему значение долговечности N всегда оказывается ниже долговечности N_0 в нормальном режиме при $f = 1$. Соответственно, пропорциональный режим нагружения при $f > 1$ будем называть пропорционально форсированным.

Об особенностях формы кривой Велера $f(N)$ конструкции, в сравнении с кривыми Велера лабораторных образцов материалов, можно сделать достаточно определенные для целей дальнейшего анализа выводы, если ограничиться рассмотрением конструкций, обладающих двумя свойствами.

Они должны быть, во-первых, линейными в том смысле, что при пропорциональном изменении режима циклического нагружения амплитуды напряжений во всех элементах конструкции должны изменяться пропорционально параметру l, а во-вторых, простыми в том смысле, что и в нормальном, и в пропорциональном режимах не возникает других видов разрушения конструкции, кроме усталостного.

Основными видами нелинейности являются физическая нелинейность и геометрическая. Заметная физическая нелинейность в металлических конструкциях связана с появлением пластических деформаций. Существенно поэтому отметить, что упругость, как правило, с достаточной точностью, соблюдается, когда есть потребность в использовании ускоренных методов, то есть когда длительность испытания в нормальном режиме превышает одну рабочую смену. Действительно, так как типичные частоты испытаний обычно превышают 5 *Гц*, в этом случае долговечность конструкции как в нормальном режиме, так и в форсированном режиме должна быть больше 10^4 *циклов*.

В то же время известно, что при появлении заметных циклических пластических деформаций долговечность во всех случаях меньше 10^3—10^4 *циклов*.

Геометрическая нелинейность обычно связана с проявлением больших прогибов, потери устойчивости или контактных явлений, когда при изменении нагрузки заметно изменяются размеры областей контакта, и даже вообще исчезают старые и появляются новые контакты.

Наличие или отсутствие геометрической нелинейности, как правило, легко установить визуальным осмотром, по харатерному звуку при появлении новых контактов или другими видами контроля смещений и деформаций за значительно более короткое время, чем длительность усталостного испытания в нормальном режиме.

Выполнение законов упругости в ускоренных испытаниях и при параметре форсирования $l > 1$ проверяется в ходе самого ускоренного испытания, если долговечность N_l в пропорционально форсированном режиме окажется не меньше 10^4 *циклов*.

Поэтому проверка условия линейности не является обременительной при проведении ускоренных испытаний.

Необходимо отметить, что класс линейных и простых конструкций достаточно интересен с точки зрения практики, так как сюда входят, например, конструкции типа ферм, корпуса кораблей, фюзеляжи и крылья самолетов, конструкции радиоэлектронной аппаратуры, газгольдеры и т. д.

Пусть в нормальном режиме распределение амплитуд напряжений по конструкции есть $\sigma_{ij}^0(r)$ с интенсивностью $\sigma^0(r)$.

Усталостное разрушение в каждой точке r конструкции описывается некоторой кривой Велера

$$\sigma^0(r) = \sigma_r^*(N)$$

где функция $\sigma_r^*(N)$, естественно, зависит от вида тензора амплитуд $\sigma_{ij}^0(r)$ и статического напряженного состояния и от других факторов, влияющих на разрушение, таких, например, как неоднородность напряженного состояния в точке r, состояние поверхности материала, условия фреттинга и т. п.

По определению кривой Велера $f(N)$ конструкции можно утверждать, что для линейной и простой конструкции

$$f = f(N) = \min_r \frac{\sigma^*_r(N)}{\sigma^0(r)} \tag{1.1}$$

и разрушение происходит именно в той точке r, где при данном N достигается минимум. Очевидно, в общем случае кривая Велера $f(N)$ конструкции, в отличие от кривых Велера лабораторных образцов материалов, не может описываться единым гладким аналитическим выражением, а является кусочно-гладкой функцией, при этом точки излома $f(N)$ соответствуют тем значениям параметра f, при которых происходит изменение локализации разрушения.

Для конструкций нелинейных или непростых на простейших примерах легко показать, что вид кривой Велера может существенно зависеть от индивидуальных особенностей перераспределения напряжений при $f \neq 1$ из-за нелинейности или от закономерностей появляющихся при $f \neq 1$ видов разрушения, отличных от усталостного. Поэтому для таких конструкций излагаемые ниже общие соображения явно недостаточны и, по-видимому, вообще не может быть общих методик ускоренных испытаний рассматриваемых ниже видов.

Во многих ускоренных методах используются предположения о представимости кривой Велера в виде некоторых конкретных аналитических выражений. Оказалось, что при использовании одной только общей структуры (1.1) кривых Велера конструкций уже возможна определенная оценка применимости таких методов к испытаниям линейных и простых конструкций. Действительно, каждый из группы ускоренных методов экстраполяционного типа [4—7] основывается на единственном предположении, что аналитическое выражение кривых Велера $\sigma^*(N)$ имеет одну из следующих форм:

$$\sigma^* = \sigma_r + K(N + N_0)^{-m} \tag{1.2}$$

$$\sigma^* = \sigma_r + KN^{-m} \tag{1.3}$$

$$\sigma^* = a - b \lg N \tag{1.4}$$

$$\sigma^* = KN^{-m} \tag{1.5}$$

$$\sigma^* = \frac{\sigma_r N + \sigma_t K}{N + K} \tag{1.6}$$

где σ_r — предел усталости, σ_t — предел текучести, N_0, K и m — эмпирические константы.

Экономия времени здесь достигается за счет того, что экспериментальные константы в (1.2 — 1.6) определяются в сравнительно кратковременных экспериментах при больших амплитудах σ, после чего значения больших долговечностей получаются экстраполяцией по формулам (1.2 — 1.6) к малым амплитудам σ.

Но кривая Велера конструкции (1.1), в общем случае, не описывается единым аналитическим выражением. Как следует из (1.1), в диапазоне значений f, при которых разрушение происходит в точке x, кривая Велера $f(N)$ описывается простым выражением

$$f(N)=\frac{\sigma_x^*(N)}{\sigma^0(x)} \tag{1.7}$$

Если же при $f<f_1$ разрушение переходит в другую точку y, то при $f<f_1$, согласно (1.1), имеем

$$f(N)=\frac{\sigma_y^*(N)}{\sigma^0(y)}<\frac{\sigma_x^*(N)}{\sigma^0(x)}$$

В таком случае определяемая экспериментально в области $f>f_1$ кривая Велера конструкции (1.7) при экстраполировании в область $f<f_1$ приводит к опасному завышению усталостной прочности. Описанная здесь теоретически возможность, по-видимому, наблюдалась [8] при испытаниях заклепочных соединений с раззенкованными отверстиями. Кривая Велера имела обычный вид при малых долговечностях, но при больших долговечностях имела крутой падающий участок. В такой ситуации, экстраполируя $\sigma'(N)$ из области малых в область больших долговечностей, по любой из формул (1.2—1.6), получим опасное завышение ожидаемой долговечности по отношению к реальной.

Таким образом, ни один из ускоренных методов экстраполяционного типа [4—7] в применении к испытаниям конструкций не может давать надежных результатов, хотя и имеются удачные примеры их использования [9].

Большая группа ускоренных методов [10—14] для определения предела усталости лабораторных образцов предполагает проведение испытаний при линейно или ступенчато возрастающих амплитудах. Не будем останавливаться на анализе возможностей этих методов в применении к испытаниям конструкций, так как они не дают информации об ограниченной долговечности, когда предела усталости вообще не существует (например, при использовании в конструкции легких сплавов), или при амплитудах, превышающих предел усталости, в тех случаях, когда он существует.

В методе Кордонского [15] для определения долговечности $N(\sigma_n)$ при амплитуде σ_n предлагается: 1) определить долговечность $N(\sigma_k)$ при более высоких амплитудах σ_k, так что $N(\sigma_k) \ll N(\sigma_n)$, 2) осуществить две одноступенчатые программы циклических нагружений, в которых образец подвергается действию различного числа N_n циклов при амплитуде σ_n и доводится до разрушения при σ_k с определением средней длины $\overline{N}_k$ второго блока программы, 3) обработать результаты с помощью некоторого соотношения, которое нам удобнее преобразовать к виду

$$\overline{N}_k=\mu(\sigma_n,\sigma_k)\,N_n\left[N(\sigma_k)\,N_n^{-\frac{\lg N(\sigma_k)}{\lg N(\sigma_n)}}-1\right] \tag{1.8}$$

Однако экспериментальная проверка [3, 16] показала, что коэффициент $\gamma(\sigma_n, \sigma_k)$ нельзя считать независимым от N_n, то есть экспериментально определенная зависимость $\overline{N}_k = \overline{N}_k(\sigma_n, \sigma_k, N_n)$ не описывается выражением вида (1.8).

Что это действительно так, видно и из самых общих соображений, так как величина $\overline{N}_k(\sigma_n, \sigma_k, N_n)$, по ее определению, должна при уменьшении N_n стремиться к $N(\sigma_k)$, а не к нулю, как это получается для (1.8). Но применению этого метода в испытаниях конструкций мешает еще одно не менее существенное обстоятельство, которое не было помехой при испытаниях лабораторных образцов: при определении одного значения $N(\sigma_n)$ необходимо довести до разрушения большое количество образцов [16], тогда как в практике испытаний конструкции часто приходится иметь дело с единственным опытным экземпляром создаваемой конструкции.

В таких областях техники, как автомобилестроение, тракторостроение и т. п., где тип конструкции, используемые материалы и уровень технологии мало изменяются при переходе к новой серии изделий, используется методика форсированных испытаний [1], по которой определяют долговечность N_1 изделия в форсированном режиме и пересчитывают ее в долговечность N для нормального режима по эмпирическим зависимостям, основанным на опыте эксплуатации и испытаний предыдущих серий изделий такого типа. Более широкому использованию этой методики препятствует отсутствие рекомендаций по следующим вопросам:

1. В каких пределах можно выбирать параметр форсирования?

2. По каким соотношениям можно определять долговечность N в нормальном режиме, если известна долговечность N_1 для параметра форсирования f?

3. Как интерпретировать результаты форсированных испытаний при малом числе и, в особенности, при одном экземпляре испытываемых изделий с учетом того, что из-за большого статистического разброса долговечность N_1 в форсированном режиме нередко может оказываться даже превышающей среднюю долговечность $\overline{N}$ в нормальном режиме?

Ниже предлагается общая методика, дающая ответы на эти вопросы и позволяющая, в случае положительного результата форсированных испытаний, гарантировать, что долговечность конструкции в нормальном режиме будет не ниже заданного числа N циклов.

Будем считать допустимыми значения параметра форсирования f, при которых поведение конструкции остается линейным. Выполнение этого условия, как указывалось выше, может быть проверено в ходе самого ускоренного испытания. Этим условие линейности принципиально отличается от считавшегося необходимым требования неизменяемости при форсировании места локализации в конструкции усталостного разрушения [1], так как место разрушения в нормальном режиме, в общем случае, не может быть установлено в ходе испытаний в форсированных режимах или из каких-либо соображений.

Независимо от специфики распределения напряжений $\sigma^0(r)$ и усталостной прочности материалов $\sigma_r^*(N)$ по элементам линейной конструкции из определения (1.1) получаем оценку

$$f(N_1) = \min_r \frac{\sigma_r^*(N_1)}{\sigma_r^*(N)} \frac{\sigma_r^*(N)}{\sigma^0(r)} \leqslant f(N) \max_r \frac{\sigma_r^*(N_1)}{\sigma_r^*(N)} \leqslant f(N) F(N_1, N) \quad (1.9)$$

$$F(N_1, N) = \max_q k_q(N_1, N)$$

$$k_q(N_1, N) = \frac{\sigma_q^*(N_1)}{\sigma_q^*(N)}$$

Здесь корреляционное отношение $k_q(N_1, N)$ характеризует крутизну кривой Велера $\sigma^*(N)$ на интервале $[N_1, N]$, а значение максимума определяется для набора кривых Велера $\sigma_q^*(N)$, $q = 1, 2, \ldots$, достаточно полного, чтобы охарактеризовать все ожидаемые случаи усталостного разрушения в элементах испытываемых конструкций, например, в стержнях, пластинах, болтовых, клепаных и сварных соединениях и т. п.

Практически, функция $F(N_1, N)$ должна определяться при обработке, согласно соотношениям (1.9), известных литературных данных о всевозможных кривых Велера $\sigma_q^*(N)$.

Существенно, что в общем случае линейной конструкции неравенство (1.9) нельзя усилить, так как знак равенства в нем реализуется в случае конструкции, разрушающейся при обоих значениях параметра форсирования $f(N_1)$ и $f(N)$ в одном и том же месте x, где материал и условия его работы таковы, что корреляционное отношение $k_x(N_1, N)$ кривой Велера $\sigma_x^*(N)$ совпадает с максимально возможным значением $F(N_1, N)$.

Теперь можно утверждать, что если долговечность конструкции при испытании в форсированном режиме с параметром $f = F(N_1, N)$ окажется не ниже N_1, то ее долговечность в нормальном режиме $f = 1$ будет не ниже N. В этом убеждаемся, исходя из того, что при $F(N_1, N) \leqslant f(N_1)$ из (1.9) следует оценка $1 \leqslant f(N)$.

С учетом статистического разброса усталостная прочность в точках r конструкции описывается семейством кривых $\sigma_r^*(N, P)$ равной вероятности разрушения P.

Для набора всевозможных кривых равной вероятности разрушения $\sigma_q^*(N, P)$, включающего, конечно, и кривые $\sigma_r^*(N, P)$, определим корреляционные отношения $k_q(N_1, N, P)$ и функцию $F(N_1, N)$ согласно соотношениям:

$$k_q(N_1, N, P) = \frac{\sigma_q^*(N_1, P)}{\sigma_q^*(N, P)}$$

$$F(N_1, N) = \max_{q, P} k_q(N_1, N, P)$$

Тогда можно утверждать, что если в форсированном режиме с параметром $f = F(N_1, N)$ разрушение в какой-либо точке r конструкции происходит с вероятностью P_1 при N_1 циклах, то при $\bar{I} = 1$ в нормальном режиме вероятность разрушения P в точке r при N циклах будет меньше P_1. Справедливость этого утверждения вытекает из того, что при

$$F(N_1, N)\,\sigma^0(r) = \sigma_r^*(N_1, P_1)$$

выполняется неравенство

$$\sigma^0(r) = \left|\max_{r,P} \frac{\sigma_r^*(N_1, P)}{\sigma_r^*(N, P)}\right|^{-1} \sigma_r^*(N_1, P_1) < \sigma_r^*(N, P_1)$$

В указанном смысле и необходимо понимать результаты форсировочных испытаний при малом числе и, в особенности, при одном экземпляре испытываемых изделий.

Прямых данных об усталостных испытаниях конструкций имеется весьма мало и их в настоящее время недостаточно для установления каких-либо надежных количественных закономерностей, позволяющих разработать общие методики ускоренных натурных испытаний.

В данной работе сформулирована и обоснована простая и достаточно общая методика ускоренных натурных испытаний, для которой необходимую количественную информацию об усталостной прочности конструкций можно получить, проанализировав по указанной методике имеющиеся в достаточном количестве литературные данные об усталостной прочности различных материалов в разнообразных условиях их эксплуатации, а также отдельных узлов и элементов конструкции.

Автор выражает благодарность О. М. Кочину за полезные дискуссии.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
Физико-технических и радиотехнических измерений Поступила 12 XII 1977

Վ. Ի. ՄԱԼԻՅ

ԿՈՆՍՏՐՈՒԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՐԱԳԱՑՎԱԾ ՀՈԳՆԱԾԱՅԻՆ ՓՈՐՁԱՐԿՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Առաջարկվում է տրված բեռնավորման լայնույթի ժամանակ կոնստրուկցիաների դոյատևության հուսալի գնահատման համար արագացված փորձարկումների մեթոդ։

Ցույց է տրվում, որ այդ մեթոդի համար շահագործման զանազան պայմաններում գտնվող տարբեր նյութերի հոգնածային ամրության մասին անհրաժեշտ քանակական ինֆորմացիա կարելի է ստանալ գրականության մեջ բավականաչափ քանակությամբ եղած տվյալներից։

ON ACCELARATED FATIGUE CONSTRUCTION TESTS

V. I. MALY

Summary

A reliable method of the forced test for the construction durability estimation under specified load amplitudes has been suggested. It has been proved that the necessary quantitative information for this method can be obtained from a large number of publications on fatigue strength of various materials under different operating conditions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кугель Р. В.* Долговечность автомобилей. М., «Машгиз», 1961.
2. Методы ускоренных испытаний на надежность и долговечность деталей, узлов машин. М., НИИМАШ, 1967.
3. Ускоренные испытания изделий машиностроения на надежность, вып. 2, М., Изд-во стандартов, 1969.
4. *Вейбулл В.* Усталостные испытания и анализ их результатов. М., «Машгиз», 1964.
5. *Одинг И. А.* Допускаемые напряжения в машиностроении и циклическая прочность металлов. М., «Машгиз», 1962.
6. *Иванова В. С.* Структурно-энергетическая теория усталости металлов. Сб. «Циклическая прочность металлов», М., Изд-во АН СССР, 1962.
7. *Муратов Л. В.* Аналитическое выражение кривой усталости. Сб. «Научн. тр. Куйбышевского индустриального ин-та», 1958, вып. VII.
8. *Локати Л.* Дискуссия по сообщению Дж. Шайве «Выносливость заклепочных соединений». Сб. «Усталостная прочность и долговечность самолетных конструкций. М., «Машиностроение», 1965.
9. *Трофимов О. Ф.* О применении ускоренных методов испытаний деталей машин на выносливость. Вестник машиностроения. 1965, № 2.
10. *Prot M.* L'essai de fatique sous charge progressive une nouvelle technique d'essai des matériaux. Revue de metallurgie. 1948, YLV, No. 12.
11. *Corten H. T., Dimoff T., Dolan M. J.* An appraisal of the Prot method of fatique testing. Proc. Amer. Soc. Test Mat., 1954, 54.
12. *Hijab W. A.* A Statistical Appraisal of the Prot Method for Determination of Fatique Endurance Limit. J. Appl. Mech., 1957, 24, No. 2.
13. *Enomoto N.* A Method for determining the fatique limit of metals by means of stepwise load increas test. Proc. Amer. Soc. Test Mater., 1959, 59.
14. *Locati L.* Le prove di fatica come ausilio alla progettazione ed alla produzione. La metallurgia italiana, 1955, No. 9.
15. *Кордонский Х. Б., Корсаков Б. Е., Парамонов Ю. М.* Приложение логарифмически-нормального распределения к расчетам и испытаниям усталостной долговечности. Изв. ВУЗов «Авиационная техника», 1964, № 1.
16. *Соболев В. Л., Евстратова С. П.* Экспериментальная оценка точности некоторых методов ускоренных испытаний на усталость. Заводская лаборатория, 1968, № 7.