

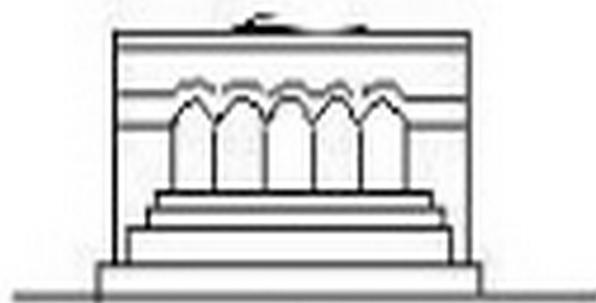
Մ Ե Ն Ա Ն Ի Կ Ա



МЕХАНИКА



MECHANICS



1978

С. М. МХИТАРЯН, К. Г. ГУЛЯН

## К РЕШЕНИЮ ДВУХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КЛИНА С УПРУГИМИ КРЕПЛЕНИЯМИ

Многие известные результаты по контактнм задачам для клина содержатся в работах [1—6], а также в коллективной монографии [7].

В настоящей работе рассматриваются две плоские контактные задачи о передаче нагрузки от упругого крепления в виде стрингера малой толщины к пластине клиновидной формы с произвольным углом раствора.

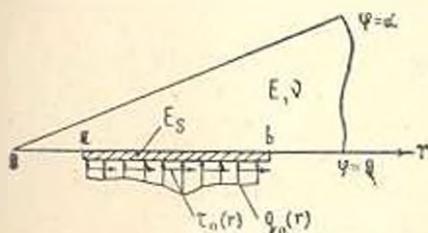
В рамках известных физических предположений указанные задачи математически формулируются в виде системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений при определенных граничных условиях.

На основе аппарата ортогональных многочленов Якоби эта система сводится к квазивполне регулярной бесконечной системе линейных уравнений. Для первой задачи получены числовые результаты и на их основе построены графики тангенциальных и нормальных контактных напряжений.

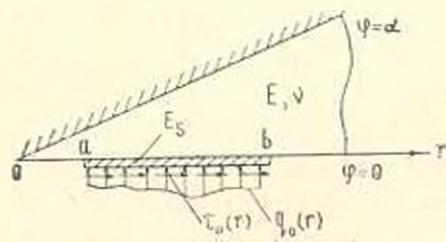
### § 1. Постановка задачи и вывод основных уравнений

Пусть клин на некоторой конечной части своей границы  $\varphi = 0$  усилен приваренным к ней упругим стрингером постоянной, достаточно малой толщины  $d$ .

В первой задаче предполагается, что другая грань  $\varphi = \alpha$  клина свободна от внешних напряжений (фиг. 1), а во второй задаче — что она заземлена (фиг. 2). Требуется определить закон распределения контактных напряжений вдоль линии крепления упругого стрингера с клином, когда стрингер одновременно нагружен горизонтальными и вертикальными силами соответственно интенсивностей  $\tau_0(r)$  и  $q_0(r)$ .



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Отметим, что главный вектор и главный момент последних сил в разбираемом случае могут быть произвольными конечными величинами, что обычно имеет место в граничных задачах теории упругости для бесконечных областей [8, § 91].

Стрингеры трактуются в рамках классической теории тонких пластин, согласно которой их изгиб в вертикальном направлении, как обычных балок, сочетается с их растяжением или сжатием в горизонтальном направлении, как обычных стержней.

Относительно же клиньев считается, что они находятся в обобщенном плоском напряженном состоянии.

При указанных предположениях выведем определяющие уравнения поставленных контактных задач.

На участке  $[a, b]$  контакта упругого стрингера с клином как в первой, так и во второй задаче должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \frac{du_r^{(2)}}{dr} &= \varepsilon_r^{(2)} \\ D \frac{d^2 u_t^{(2)}}{dr^2} &= q_0(r) - hq(r) \end{aligned} \quad (a \leq r \leq b) \quad (1.1)$$

Здесь  $u_r^{(2)}$  и  $u_t^{(2)}$  — соответственно радиальные и тангенциальные перемещения точек отрезка  $[a, b]$  границы клина,  $\varepsilon_r^{(2)}$  — осевая деформация стрингера,  $D$  — жесткость стрингера на изгиб,  $h$  — ширина стрингера.

Кроме (1.1) должны выполняться также граничные условия, которые в данном случае, вследствие отсутствия внешних нагрузок на концевых сечениях стрингера, запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} S(r)|_{r=a} = S(r)|_{r=b} = 0, \quad Q(r)|_{r=a} = Q(r)|_{r=b} = 0 \\ M(r)|_{r=a} = M(r)|_{r=b} = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $S(r)$  — продольная сила,  $Q(r)$  — поперечная сила, а  $M(r)$  — изгибающий момент в сечении  $\Gamma$  стрингера. Они будут даваться формулами

$$\begin{aligned} S(r) &= \int_a^r [h\tau(r_0) - \tau_0(r_0)] dr_0, \quad Q(r) = \int_a^r [hq(r_0) - q_0(r_0)] dr_0 \\ M(r) &= \int_a^r (r - r_0)[hq(r_0) - q_0(r_0)] dr_0 \quad (a < r < b) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $\tau(r)$  и  $q(r)$  — соответственно неизвестные тангенциальные и нормальные контактные напряжения, действующие на отрезке соединения стрингера с гранью клина и подлежащие определению.

Из (1.3) легко видеть, что условия (1.2) при  $r = b$  попросту эквивалентны обычным статическим условиям равновесия стрингера

$$h \int_a^b \tau(r) dr = \int_a^b \tau_0(r) dr = T_0, \quad h \int_a^b q(r) dr = \int_a^b q_0(r) dr = Q_0$$

$$h \int_a^b r q(r) dr - \int_a^b r q_0(r) dr = M_0 \quad (1.4)$$

Далее, из условия равновесия любой части  $(a, r)$  стрингера, учитывая закон Гука, будем иметь

$$u_r^{(2)} = \frac{1}{E_1 A_1} \left[ h \int_a^r \tau(r_0) dr_0 - \int_a^r \tau_0(r_0) dr_0 \right] \quad (1.5)$$

где  $E_1$  — модуль упругости материала стрингера, а  $A_1$  — площадь прямоугольного поперечного сечения стрингера.

Обращаясь теперь к перемещениям  $u_1^{(2)}$  и  $u_2^{(2)}$  граничных точек клина, заметим, что они на основе принципа суперпозиции будут даваться известными интегралами от соответствующих функций влияния бесконечного клина, построенных от единичных тангенциальных и нормальных сосредоточенных сил. Последние строятся при помощи интегрального преобразования Меллина при обычном [9] предположении, что напряжения при  $r \rightarrow 0$  имеют порядок  $O(r^{-\epsilon})$  ( $\epsilon < 1$ ), а при  $r \rightarrow \infty$  напряжения и вращение имеют порядок  $O(1/r)$ . Указанными условиями определяется полоса регулярности  $\epsilon - 1 < \text{Re} p < 0$  соответствующих интегралов Меллина, в которых линия интегрирования затем переносится на мнимую ось и конечные интегралы понимаются, вообще говоря, в смысле теории обобщенных функций. Опуская эти промежуточные выкладки и представляя функции влияния в виде суммы своих особых и регулярных частей, получим, что условия (1.1) задачу определения неизвестных контактных напряжений  $\tau(r)$  и  $q(r)$  сводят к решению следующих интегро-дифференциальных уравнений, относящихся соответственно к первой и второй задачам:

$$\begin{aligned} & \int_a^b K_{11}^{(k)}(t) \tau(r_0) dr_0 + \int_a^b K_{12}^{(k)}(t) \varphi'(r_0) dr_0 - i_1 r [h \varphi(r) - \varphi_0(r)] + A^{(k)}(z) \\ & \int_a^b K_{21}^{(k)}(t) \varphi'(r_0) dr_0 + \int_a^b K_{22}^{(k)}(t) \psi'(r_0) dr_0 = \\ & - i_2 r \int_a^r (r_0 - r)^2 [\psi_0(r_0) - h \psi'(r_0)] dr_0 + r c_1 + B^{(k)}(a) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь  $k = 1, 2$  соответственно первой и второй задачам, а

$$\begin{aligned} K_{11}^{(k)}(t) &= \frac{1}{t} - L_{11}^{(k)}(t) - L_{22}^{(k)}(t) \\ K_{12}^{(k)}(t) &= -\pi \frac{1-\nu}{2} \tilde{\nu}(t) - L_{12}^{(k)}(t) - L_{21}^{(k)}(t) \end{aligned}$$

$$K_{21}^{(k)}(t) = \pi \frac{1-x}{2} \varphi(t) + L_{11}^{(k)}(t) - L_{21}^{(k)}(t)$$

$$K_{22}^{(k)}(t) = \frac{1}{t} - L_{11}^{(k)}(t) + L_{22}^{(k)}(t)$$

$$A^{(k)}(\alpha) = \begin{cases} \frac{2\alpha - \sin 2\alpha - \pi T_0}{\alpha^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\pi Q_0}{2h}, & k=1 \\ 0, & k=2 \end{cases} \quad (1.7)$$

$$B^{(k)}(\alpha) = \begin{cases} -\frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\pi T_0}{2h} + \frac{2\alpha + \sin 2\alpha - \pi Q_0}{\alpha^2 - \sin^2 \alpha}, & k=1 \\ 0, & k=2 \end{cases}$$

$$L_{11}^{(1)}(t) = \int_0^{\infty} \left[ 1 - \frac{\text{sh } 2\alpha z}{2\Delta_1} \right] \sin \alpha z dz, \quad L_{12}^{(1)}(t) = \sin^2 \alpha \int_0^{\infty} \frac{z^2}{\Delta_1} \cos \alpha z dz$$

$$L_{21}^{(1)}(t) = \sin^2 \alpha \int_0^{\infty} \frac{z}{\Delta_1} \sin \alpha z dz, \quad L_{22}^{(1)}(t) = \frac{\sin 2\alpha}{2} \int_0^{\infty} \frac{z}{\Delta_1} \sin \alpha z dz$$

$$L_{11}^{(2)}(t) = \int_0^{\infty} \left[ 1 - \frac{x \text{sh } 2\alpha z}{2\Delta_2} \right] \sin \alpha z dz$$

$$L_{12}^{(2)}(t) = -\frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{4z^2 \sin^2 \alpha + z^2 - 1}{\Delta_2} \cos \alpha z dz$$

$$L_{21}^{(2)}(t) = -\sin^2 \alpha \int_0^{\infty} \frac{z}{\Delta_2} \sin \alpha z dz, \quad L_{22}^{(2)}(t) = -\frac{\sin 2\alpha}{2} \int_0^{\infty} \frac{z}{\Delta_2} \sin \alpha z dz$$

$$\Delta_1 = \text{sh}^2 \alpha z - z^2 \sin^2 \alpha, \quad \Delta_2 = x \text{sh}^2 \alpha z + z^2 \sin^2 \alpha + \left( \frac{1+x}{2} \right)^2, \quad t = \ln \frac{r_0}{r}$$

$$\varphi(r) = \int_a^r \tau(r_0) dr_0, \quad \psi(r) = \int_a^r q(r_0) dr_0, \quad \varphi_0(r) = \int_a^r \tau_0(r_0) dr_0$$

$$\psi_0(r) = \int_a^r q_0(r_0) dr_0, \quad \lambda_1 = \pi E / 2E_s A_s, \quad \lambda_2 = \pi E / 4D$$

$$c_k^* = \frac{\pi E}{2} c_k = \frac{\pi E}{2} \frac{du_{\varphi}^{(2)}}{dr} \Big|_{r=a}$$

где  $c_k$  — постоянная интегрирования, равная углу поворота стрингера в сечении  $r = a$  и подлежащая определению. Отметим, что при выводе (1.6) были существенно использованы условия (1.2).

Следует еще отметить, что функции  $L_{ij}^{(k)}(t)$  ( $i, j, k = 1, 2$ ) представляют собой непрерывные части соответствующих ядер,  $\delta(t)$  — дельта-функция Дирака,  $E$  и  $\nu$  — упругие постоянные клина,  $\alpha$  — угол раствора клина.

Система определяющих уравнений (1.6) должна рассматриваться вместе с граничными условиями (1.4), которые при помощи только что введенных функций запишутся в виде

$$\begin{aligned} h\varphi(a) = 0, \quad h\varphi(b) = T_0; \quad h\psi(a) = 0, \quad h\psi(b) = Q_0 \\ h \int_a^b r \psi'(r) dr - \int_a^b r \psi_0'(r) dr = M_0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Далее перейдем к новым переменным, положив

$$\begin{aligned} r = e^{\gamma x + \lambda s}, \quad r_0 = e^{\gamma s - \lambda}, \quad \lambda = \frac{1}{2} \ln ab, \quad \gamma = \frac{1}{2} \ln \frac{h}{a} \\ \varphi(e^{\gamma x + \lambda}) = \Phi(x), \quad \psi(e^{\gamma x + \lambda}) = \Psi(x) \\ \varphi_0(e^{\gamma s - \lambda}) = \Phi_0(x), \quad \psi_0(e^{\gamma s - \lambda}) = \Psi_0(x) \end{aligned} \quad t = \gamma(s - x) \quad (1.9)$$

После элементарных выкладок система (1.6) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{s-x} - \gamma L_{11}^{(k)}[\gamma(s-x)] - \gamma L_{22}^{(k)}[\gamma(s-x)] \right\} \Phi'(s) ds = \\ & = \frac{\pi(1-\nu)}{2} \Psi'(x) - \int_{-1}^1 \left\{ \gamma L_{12}^{(k)}[\gamma(s-x)] + \gamma L_{21}^{(k)}[\gamma(s-x)] \right\} \Psi'(s) ds = \\ & = \lambda_1 \gamma e^{\gamma x + \lambda} [h\Phi(x) - \Phi_0(x)] + \gamma A^{(k)}(a) \\ & = \frac{\pi(1-\nu)}{2} \Phi'(x) + \int_{-1}^1 \left\{ \gamma L_{12}^{(k)}[\gamma(s-x)] - \gamma L_{21}^{(k)}[\gamma(s-x)] \right\} \Phi'(s) ds + \\ & + \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{s-x} - \gamma L_{11}^{(k)}[\gamma(s-x)] + \gamma L_{22}^{(k)}[\gamma(s-x)] \right\} \Psi'(s) ds = \\ & = \lambda_2 \gamma e^{\gamma x + \lambda} \int_{-1}^1 (e^{\gamma s + \lambda} - e^{\gamma s - \lambda})^2 [\Psi_0'(s) - h\Psi'(s)] ds + \gamma e^{\gamma x + \lambda} c_k + \gamma B^{(k)}(x) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Входящие сюда интегралы от ядра Коши следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Граничные же условия (1.8) примут вид

$$h\Phi(-1) = 0, \quad h\Phi(1) = T_0; \quad h\Psi(-1) = 0, \quad h\Psi(1) = Q_0 \quad (1.11)$$

$$h \int_{-1}^1 e^{\gamma x + h} \Psi''(x) dx = \int_{-1}^1 e^{\gamma x + h} \Psi_0'(x) dx = M_0$$

Таким образом, решения поставленных задач сводятся к решению систем сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (1.10) при граничных условиях (1.11).

Умножая первое из уравнений (1.10) на мнимую единицу  $i$  и складывая со вторым, придем к уравнению

$$\begin{aligned} & -i\pi \operatorname{th} \mu\pi \lambda(x) + \int_{-1}^1 \frac{\lambda(s)}{s-x} ds - \gamma \int_{-1}^1 L_{11}^{(k)}[\gamma(s-x)] \lambda(s) ds + \\ & + \gamma \int_{-1}^1 L_{12}^{(k)}[\gamma(s-x)] \bar{\lambda}(s) ds - i\gamma \int_{-1}^1 L_{12}^{(k)}[\gamma(s-x)] \lambda(s) ds - \\ & - i\gamma \int_{-1}^1 L_{21}^{(k)}[\gamma(s-x)] \bar{\lambda}(s) ds = \frac{\lambda_1 \gamma}{2} e^{\gamma x + b} \int_{-1}^x h[\lambda(s) - \bar{\lambda}(s)] ds - \\ & - i\lambda_1 \gamma e^{\gamma x + h} \Psi_0(x) + \frac{\lambda_2 \gamma}{2} e^{\gamma x + h} \int_{-1}^x (e^{\gamma s + h} - e^{\gamma s + b})^2 [2\Psi_0'(s) - \\ & - h(\lambda(s) + \bar{\lambda}(s))] ds + \gamma e^{\gamma x + b} c_k + Q^{(k)}(x) \quad (k = 1, 2) \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$\lambda(x) = \Psi'(x) + i\Phi'(x), \quad \operatorname{th} \mu\pi = \frac{1-\gamma}{2}$$

$$Q^{(k)}(a) = \gamma [B^{(k)}(a) + iA^{(k)}(a)] \quad (k = 1, 2) \quad (1.13)$$

Граничные же условия преобразуются к виду

$$h \int_{-1}^1 [\lambda(x) - \bar{\lambda}(x)] dx = 2iT_0, \quad h \int_{-1}^1 [\lambda(x) + \bar{\lambda}(x)] dx = 2Q_0$$

$$h \int_{-1}^1 e^{\gamma x} |\lambda(x) + \bar{\lambda}(x)| dx = 2 \int_{-1}^1 e^{\gamma x} \Psi_0'(x) dx = \frac{2}{V_{ab}} M_0 \quad (1.14)$$

В дальнейшем будем исходить из интегро-дифференциальных уравнений (1.12) при граничных условиях (1.14).

§ 2. Сведение основных уравнений к бесконечной системе линейных уравнений при помощи аппарата многочленов Якоби

Исходя из известных результатов теории сингулярных интегральных уравнений [10], решение разрешающего уравнения (1.12) ищем в классе функций, представимых в виде

$$\chi(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \chi^*(x) \quad (-1 < x < 1) \quad (2.1)$$

$$\{-1 < \operatorname{Re}(\alpha, \beta) < 0\}$$

где  $\chi^*(x)$  — ограниченная на отрезке  $[-1, 1]$  функция, принадлежащая классу  $H$  в окрестностях точек  $x = \pm 1$ .

Учитывая (2.1), решение (1.12) представим в виде ряда

$$\chi(x) = \omega^{-1}(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x), \quad \omega(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \quad (2.2)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} - i\nu, \quad \beta = -\frac{1}{2} + i\nu, \quad \mu = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad (-1 < x < 1)$$

Здесь  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) — многочлены Якоби, ортогональные на отрезке  $[-1, 1]$  с весом  $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ , а  $a_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) — неизвестные комплексные коэффициенты, подлежащие определению.

В дальнейшем нам понадобятся следующие соотношения [11—13]:

$$-i\pi \operatorname{th} \mu\pi \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{\omega(x)} + \int_{-1}^1 \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(s)}{\omega(s)(s-x)} ds = \pi (2 \operatorname{ch} \mu\pi)^{-1} P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x)$$

$$- \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) \omega^{-1}(x) dx =$$

$$= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} & m = n \end{cases} \quad (2.3)$$

Теперь, из граничных условий (1.14) при помощи (2.2) и (2.3) находим

$$a_0 = \frac{2}{-h | (1+\nu)(3-\nu) |} (Q_0 + iT_0) \quad (2.4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(a_n G_n) = \frac{M_0}{h | ab |} - \operatorname{Re} \left[ a_0 \int_{-1}^1 e^{2\mu \arctan x} (x) dx \right]$$

где

$$G_n = \int_{-1}^1 e^{\gamma x} \omega^{-1}(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Используя свойства ортогональности функций Якоби и учитывая соотношения (2.2) и (2.3), по известной процедуре [14] после некоторых элементарных выкладок относительно коэффициентов  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  и  $c_2^*$  получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, эквивалентную разрешающему уравнению (1.12) при граничных условиях (1.14):

$$\begin{aligned} a_m = A_m \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n [R_{m,n}^{(1)} + R_{m,n}^{(2)} - R_{m,n}^{(3)} - R_{m,n}^{(4)}] - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n [R_{m,n}^{(5)} - \right. \\ \left. - R_{m,n}^{(6)} - R_{m,n}^{(7)} + R_{m,n}^{(8)}] + a_0 [H_m^{(1)} + H_m^{(2)} + H_m^{(3)} - H_m^{(4)}] - \right. \\ \left. - \bar{a}_0 [H_m^{(5)} - H_m^{(6)} + H_m^{(7)} + H_m^{(8)}] - H_m^{(9)} + H_m^{(10)} + c_2^* H_m^{(11)} + H_m^{(12)} \right\} \\ (m = 1, 2, 3, \dots) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(a_n G_n) = N \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ядра  $R_{m,n}^{(e)}$  ( $e = 1, 2, \dots, 8$ ) и свободные члены  $H_m^{(l)}$  ( $l = 1, 2, \dots, 12$ ) бесконечной системы выражаются формулами

$$R_{m,n}^{(1)} = \gamma \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(\alpha, -\beta)}(x) \left[ \int_{-1}^1 L_{n-1}^{(\beta)}[\gamma(s-x)] \omega^{-1}(s) P_n^{(\alpha, \beta)}(s) ds \right] dx$$

$$R_{m,n}^{(2)} = i\gamma \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(\alpha, -\beta)}(x) \left[ \int_{-1}^1 L_{n-1}^{(\beta)}[\gamma(s-x)] \omega^{-1}(s) P_n^{(\alpha, \beta)}(s) ds \right] dx$$

$$R_{m,n}^{(3)} = \frac{h\lambda_2\gamma}{4n} \int_{-1}^1 e^{\gamma x + \delta} (1-x^2) P_{m-1}^{(\alpha, -\beta)}(x) P_{n-1}^{(\alpha, -\beta)}(x) dx$$

$$R_{m,n}^{(4)} = \frac{h\lambda_2\gamma}{2} \int_{-1}^1 e^{\gamma x + \delta} \omega(x) P_{m-1}^{(\alpha, -\beta)}(x) \times$$

$$\times \left[ \int_{-1}^x (e^{\gamma s + \delta} - e^{\gamma s + \delta})^2 \omega^{-1}(s) P_n^{(\alpha, \beta)}(s) ds \right] dx$$

$$R_{m,n}^{(2)} = \gamma \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[ \int_{-1}^1 L_{22}^{(k)} [\gamma(s-x)] \overline{\omega^{-1}}(s) P_n^{(\beta, \alpha)}(s) ds \right] dx$$

$$R_{m,n}^{(6)} = i\gamma \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[ \int_{-1}^1 L_{21}^{(k)} [\gamma(s-x)] \overline{\omega^{-1}}(s) P_n^{(\beta, \alpha)}(s) ds \right] dx$$

$$R_{m,n}^{(7)} = \frac{h^2_1 \gamma}{4n} \int_{-1}^1 e^{\gamma x + 1} \omega^2(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) dx$$

$$R_{m,n}^{(8)} = \frac{h^2_2 \gamma}{2} \int_{-1}^1 e^{\gamma x + \gamma} \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \times$$

$$\times \left[ \int_{-1}^1 (e^{\gamma x + 6} - e^{\gamma x + 1})^2 \overline{\omega^{-1}}(s) P_n^{(\beta, \alpha)}(s) ds \right] dx \quad (2.6)$$

$$H_m^{(1)} = \gamma \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[ \int_{-1}^1 L_{11}^{(k)} [\gamma(s-x)] \omega^{-1}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(2)} = i\gamma \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[ \int_{-1}^1 L_{12}^{(k)} [\gamma(s-x)] \omega^{-1}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(3)} = \frac{h^2_1 \gamma}{2} \int_{-1}^1 e^{\gamma x + 1} \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[ \int_{-1}^1 \omega^{-1}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(4)} = \frac{h^2_2 \gamma}{2} \int_{-1}^1 e^{\gamma x + 6} \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[ \int_{-1}^1 (e^{\gamma x + 6} - e^{\gamma x + 1})^2 \omega^{-1}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(5)} = \gamma \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[ \int_{-1}^1 L_{22}^{(k)} [\gamma(s-x)] \overline{\omega^{-1}}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(6)} = i\gamma \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[ \int_{-1}^1 L_{21}^{(k)} [\gamma(s-x)] \overline{\omega^{-1}}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(7)} = \frac{h^2_1 \gamma}{2} \int_{-1}^1 e^{\gamma x + 1} \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[ \int_{-1}^1 \overline{\omega^{-1}}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(8)} = \frac{h^2_2 \gamma}{2} \int_{-1}^1 e^{\gamma x + 6} \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[ \int_{-1}^1 (e^{\gamma x + 6} - e^{\gamma x + 1})^2 \overline{\omega^{-1}}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(9)} = \lambda_1 \gamma \int_{-1}^1 e^{\gamma x + \delta} \Phi_0(x) \omega(x) P_{m-1}^{(\gamma, \delta)}(x) dx$$

$$H_m^{(10)} = \lambda_2 \gamma \int_{-1}^1 e^{\gamma x + \delta} \omega(x) P_{m-1}^{(\gamma, \delta)}(x) \left[ \int_{-1}^x (e^{\gamma s + \delta} - e^{\gamma s + \delta})^2 \Psi_0'(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(11)} = \gamma \int_{-1}^1 e^{\gamma x + \delta} \omega(x) P_{m-1}^{(\gamma, \delta)}(x) dx$$

$$H_m^{(12)} = \begin{cases} \frac{\pi(1+4\mu^2)}{2 \operatorname{ch} \mu\pi} Q^{(2)}(\mu), & m=1 \\ 0, & m \neq 1 \end{cases}$$

$$A_m = \frac{2^{2(2m-1)} [m!]^4}{\pi^2 (1+\nu)(3-\nu) [(2m)!]^2 \prod_{k=1}^m \left| 1 + \frac{4\mu^2}{(2k-1)^2} \right|}$$

$$N = M_0/h \sqrt{ab} - \operatorname{Re} \left[ a_0 \int_{-1}^1 e^{\gamma x + \delta} \omega^{-1}(x) dx \right]$$

### § 3. Исследование бесконечной системы

Перейдя к исследованию бесконечных систем линейных уравнений (2.5), положим

$$a_m = m^{\varepsilon_0} b_m \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.1)$$

где  $\varepsilon_0$  — фиксированное число, притом  $0 < \varepsilon_0 < 1/2$ .

Представим систему линейных уравнений (2.5) в виде

$$\begin{aligned} b_m = \frac{A_m}{m} m^{\varepsilon_0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\varepsilon_0}} n [R_{m,n}^{(1)} + R_{m,n}^{(2)} - R_{m,n}^{(3)} - R_{m,n}^{(4)}] - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{b}_n}{n^{\varepsilon_0}} n [R_{m,n}^{(5)} - R_{m,n}^{(6)} - R_{m,n}^{(7)} + R_{m,n}^{(8)}] + a_0 [H_m^{(1)} + H_m^{(2)} + H_m^{(3)} - \right. \\ \left. - H_m^{(4)}] - a_0 [H_m^{(5)} - H_m^{(6)} + H_m^{(7)} + H_m^{(8)}] - H_m^{(9)} + H_m^{(10)} + c_k H_m^{(11)} + H_m^{(12)} \right\} \\ (m = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Пользуясь известным асимптотическим представлением для многочленов Якоби [15]

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) = \frac{\cos \{ [n + (\alpha + \beta + 1)/2] \theta - (2\alpha + 1) \pi/4 \}}{\sqrt{\pi n} \left( \sin \frac{\theta}{2} \right)^{\alpha + \frac{1}{2}} \left( \cos \frac{\theta}{2} \right)^{\beta + \frac{1}{2}}} + \\ + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

пригодным также для комплексных  $\alpha$  и  $\beta$  [ $\text{Re}(\alpha, \beta) > -1$ ], известным способом [14, 16, 17] докажем, что

$$m^{\alpha} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{|K_m^{(s)}|}{n^{\alpha-1}} = O\left(m^{-\frac{1}{2} + \epsilon_0}\right), \quad (e = 1, 2, \dots, 8) \\ m^{\alpha} H_m^{(l)} = O\left(m^{-\frac{1}{2} + \epsilon_0}\right), \quad (l = 1, 2, \dots, 11) \quad m \rightarrow \infty \quad (3.4)$$

Отсюда следует, что полученная бесконечная система (3.2) квази- вполне регулярна для любых значений геометрических и физических параметров, а свободные члены этой системы довольно быстро стремятся к нулю.

Отметим, что приведенное доказательство квазиполной регулярности бесконечной системы (2.5) означает, что в полном метрическом пространстве ограниченных числовых последовательностей соответствующий оператор является сжимающим оператором [18]. Согласно принципу сжатых отображений Банаха [19] отсюда следует, что этот оператор в указанном пространстве имеет единственную неподвижную точку, то есть система (2.5) имеет единственное решение. Последнее, в свою очередь, означает, что исходное разрешающее уравнение (1.12) при граничных условиях (1.14) имеет единственное решение.

#### § 4. Некоторые числовые результаты

Несколько подробно рассмотрим первую задачу в частном случае  $\alpha = \pi$ , когда упругий клин превращается в полуплоскость. Эта задача в рамках известных предположений Мелана [20] рассмотрена во многих работах, в том числе в работе [21].

Тогда из (1.7) можем записать

$$L_{11}^{(1)}(t) = \int_0^{\infty} [1 - \text{cth} \pi z] \sin zt dz = \int_0^{\infty} \sin zt dz - \\ - \int_0^{\infty} \text{cth} \pi z \sin zt dz = \frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{2}$$

$$L_{12}^{(1)}(t) = L_{21}^{(1)}(t) = L_{22}^{(1)}(t) = 0; \quad A^{(1)}(\tau) = T_0/2h, \quad B^{(1)}(\tau) = Q_0/2h$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} K_{11}^{(1)}(t) &= \frac{1}{e^t - 1}, & K_{12}^{(1)}(t) &= -\frac{\pi(1-\nu)}{2} \delta(t) \\ K_{21}^{(1)}(t) &= \frac{\pi(1-\nu)}{2} \delta(t), & K_{22}^{(1)}(t) &= \frac{1}{e^t - 1} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Подставляя значения ядер  $K_{ij}^{(1)}(t)$  ( $i, j = 1, 2$ ) из (4.1) в (1.6), получим следующую систему сингулярных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{r_0 - r} \varphi'(r_0) dr_0 - \frac{\pi(1-\nu)}{2} \psi'(r) &= \lambda_1 [h\varphi(r) - \varphi_0(r)] \\ \frac{\pi(1-\nu)}{2} \varphi'(r) + \int_a^b \frac{1}{r_0 - r} \psi'(r_0) dr_0 &= \lambda_2 \int_a^r (r_0 - r)^2 [\psi_0'(r_0) - h\psi'(r_0)] dr_0 + c_1' \end{aligned} \quad (4.2)$$

После замены переменных

$$r = \frac{b-a}{2}(1+x) + a, \quad r_0 = \frac{b-a}{2}(1+s) + a$$

$$\varphi \left[ \frac{b-a}{2}(1+x) + a \right] = \Phi(x), \quad \psi \left[ \frac{b-a}{2}(1+x) + a \right] = \Psi(x) \quad (4.3)$$

$$\varphi_0 \left[ \frac{b-a}{2}(1+x) + a \right] = \Phi_0(x), \quad \psi_0 \left[ \frac{b-a}{2}(1+x) + a \right] = \Psi_0(x)$$

система (4.2) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\Phi'(s)}{s-x} ds - \frac{\pi(1-\nu)}{2} \Psi'(x) &= \lambda_1^* [h\Phi(x) - \Phi_0(x)] \\ \frac{\pi(1-\nu)}{2} \Phi'(x) + \int_{-1}^1 \frac{\Psi'(s)}{s-x} ds &= \lambda_2^* \int_{-1}^x (s-x)^2 [\Psi_0'(s) - \\ &- h\Psi'(s)] ds + \frac{b-a}{2} c_1' \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\lambda_1^* = \frac{b-a}{2} \lambda_1, \quad \lambda_2^* = \left( \frac{b-a}{2} \right)^2 \lambda_2$$

Граничные условия для (4.4) будут

$$h\Phi(-1) = 0, \quad h\Phi(1) = T_0; \quad h\Psi(-1) = 0, \quad h\Psi(1) = Q_0 \quad (4.5)$$

$$h \int_{-1}^1 x \Psi''(x) dx = \int_{-1}^1 x \Psi_0''(x) dx = \frac{2M_0 - (a+b)Q_0}{b-a}$$

Система сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (4.4) при граничных условиях (4.5) совершенно аналогичным способом, что и выше, сводится к следующей квазивполне регулярной бесконечной системе линейных уравнений:

$$a_m = -A_m \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n [R_{m,n}^{(1)} + R_{m,n}^{(2)}] + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n [R_{m,n}^{(3)} - R_{m,n}^{(4)}] + \right. \quad (4.6)$$

$$\left. + a_0 [H_m^{(1)} - H_m^{(2)}] - \bar{a}_0 [H_m^{(3)} + H_m^{(4)}] - H_m^{(5)} - H_m^{(6)} + c_1 H_m^{(7)} \right\}$$

$$(m = 1, 2, \dots)$$

где

$$R_{m,n}^{(1)} = \frac{\lambda_1^* h}{4n} \int_{-1}^1 (1-x^2) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x) dx$$

$$R_{m,n}^{(2)} = \frac{\lambda_2^* h}{2} \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[ \int_{-1}^x (s-x)^2 \omega^{-1}(s) P_n^{(\alpha, \beta)}(s) ds \right] dx$$

$$R_{m,n}^{(3)} = \frac{\lambda_1^* h}{4n} \int_{-1}^1 \omega^2(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x) dx$$

$$R_{m,n}^{(4)} = \frac{\lambda_2^* h}{2} \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[ \int_{-1}^x (s-x)^2 \overline{\omega^{-1}}(s) P_n^{(\beta, \alpha)}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(1)} = \frac{\lambda_1^* h}{2} \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[ \int_{-1}^x \omega^{-1}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(2)} = \frac{\lambda_2^* h}{2} \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[ \int_{-1}^x (s-x)^2 \omega^{-1}(s) ds \right] dx \quad (4.7)$$

$$H_m^{(3)} = \frac{\lambda_1^* h}{2} \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[ \int_{-1}^x \overline{\omega^{-1}}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(4)} = \frac{i_2^* h}{2} \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(\alpha; -\beta)}(x) \left[ \int_{-1}^x (s-x)^2 \overline{\omega^{-1}}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(5)} = i_2^* \int_{-1}^1 \Phi_0(x) \omega(x) P_{m-1}^{(\alpha; -\beta)}(x) dx$$

$$H_m^{(6)} = 2i_2^* \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(\alpha; -\beta)}(x) \left[ \int_{-1}^x (s-x) \Psi_0(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(7)} = \begin{cases} \frac{\pi(b-a)(1+4\mu^2)}{4 \operatorname{ch} \mu\pi}, & m=1 \\ 0, & m \neq 1 \end{cases}$$

Как и выше, здесь положено

$$\Psi'(x) + i\Phi'(x) = \omega^{-1}(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha; \beta)}(x), \quad (-1 < x < 1) \quad (4.8)$$

Из условия (4.5) непосредственно следует, что

$$a_0 = \frac{2}{\pi h \sqrt{(1+\nu)(3-\nu)}} (Q_0 + iT_0)$$

$$\operatorname{Re} a_1 = \frac{8\mu}{1+4\mu^2} \operatorname{Im} a_0 + \frac{8 \operatorname{ch} \mu\pi}{\pi h (1+4\mu^2)} \frac{2M_0 - (a-b)Q_0}{b-a}$$

Следовательно, по формулам (1.7) и (4.3) теперь можем найти выражения тангенциальных и нормальных контактных напряжений

$$\tau(r) = \frac{2}{b-a} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} \left\{ a_n \omega^{-1} \left( \frac{2r-a-b}{b-a} \right) P_n^{(\alpha; \beta)} \left( \frac{2r-a-b}{b-a} \right) \right\} \quad (a < r < b) \quad (4.9)$$

$$q(r) = \frac{2}{b-a} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ a_n \omega^{-1} \left( \frac{2r-a-b}{b-a} \right) P_n^{(\alpha; \beta)} \left( \frac{2r-a-b}{b-a} \right) \right\}$$

Для получения числовых результатов, осуществленных на ЭВМ «Нанри-2», было рассмотрено два варианта нагружения стрингера при трех различных случаях компоновки стрингера с полуплоскостью.

В первом варианте принимается, что к стрингеру приложена равномерно распределенная горизонтальная нагрузка интенсивности  $\tau_0$ , а во втором варианте — равномерно распределенная вертикальная нагрузка интенсивности  $q_0$ .

В качестве материала стрингера взята легированная сталь с упругими константами  $E_s = 2.1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ,  $\nu_s = 0.30$ , а для полуплоскости — прокатанная медь, прокатанный цинк и свинец с упругими константами со-

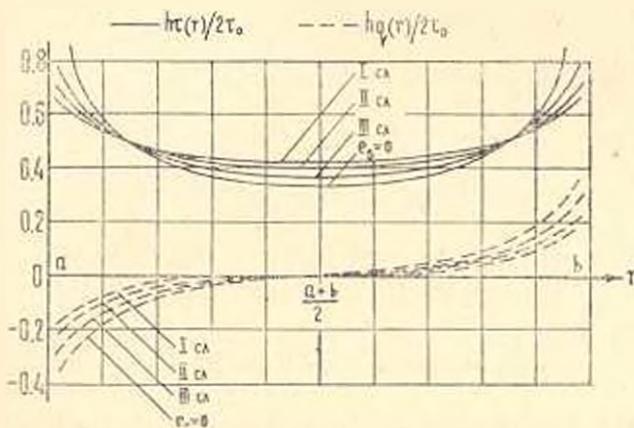
ответственно  $E = 1.1 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>;  $0.84 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>;  $0.17 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>;  $\nu = 0.34$ ;  $0.27$ ;  $0.42$ . Случаи сочетания материалов стрингера с полуплоскостью в указанной последовательности будем именовать случаями I, II, III.

Соответственно этим случаям  $e_s = \frac{E}{E_s} = 0.52$ ;  $0.4$ ;  $0.08$ . Для сравнения результатов рассмотрен также случай абсолютно жесткого стрингера, когда  $e_s = 0$  ( $E_s = \infty$ ).

Кроме того, во всех рассмотренных случаях принято, что  $\frac{b-a}{d} = 6$ .

В этих вариантах и случаях были решены соответствующие бесконечные системы и по формулам (4.9) были построены графики тангенциальных и нормальных контактных напряжений под стрингером (фиг. 3, 4), показывающие закономерности их изменения. На фиг. 3 приведены графики напряжений  $\tau(r)$  и  $q(r)$  при первом варианте. В результате сравнения этих графиков можно сделать следующие выводы:

- с уменьшением  $e_s$  ( $\tau_0 = \text{const}$ ,  $q_0 = 0$ ) коэффициенты интенсивности контактных напряжений в концах стрингера увеличиваются;
- в каждом из случаев I, II, III значения нормальных напряжений  $q(r)$  значительно меньше соответствующих значений тангенциальных напряжений  $\tau(r)$ .

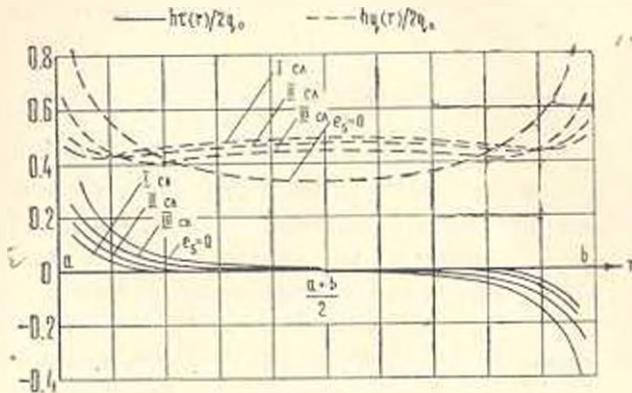


Фиг. 3.

Далее, на фиг. 4 приведены графики контактных напряжений  $\tau(r)$  и  $q(r)$  для указанных выше  $e_s$  при втором варианте. Сопоставление этих графиков показывает, что:

- с уменьшением  $e_s$  ( $\tau_0 = 0$ ,  $q_0 = \text{const}$ ) коэффициенты интенсивности напряжений в концах стрингера опять-таки увеличиваются, при этом в середине участка контакта  $q(r)$  имеет максимум;
- в каждом из случаев I, II, III значения тангенциальных напряжений  $\tau(r)$  значительно меньше соответствующих значений нормальных напряжений  $q(r)$ ;

в) по мере уменьшения  $\epsilon_2$  распределение тангенциальных контактных напряжений при первом варианте нагружения и нормальных контактных напряжений при втором варианте нагружения стрингера заметно приближается к равномерному распределению.



Фиг. 4.

Результаты работы доложены на Всесоюзной конференции по смешанным задачам механики деформируемых тел в городе Ростове-на-Дону в 1977 г.

Институт механики АН  
Армянской ССР

Поступила 15 XI 1977

И. И. ШИШУРЦАН, Ч. 7. ЧОБЭԱՆ

ԱՌՍՁԳԱԿԱՆ ԱՄՐԱՑՈՒՐՆԵՐՈՎ ՍԵՊԻ ՀԱՄԱՐ ԵՐԿՈՒ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ  
ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՎԵՐԱԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկված էն վերագրի տեսքով վերջավոր ամրացումից կամայական անկյան րացվածքով սնույածն առաձգական սալին բևոի փոխանցման երկու կոնտակտային խնդիրներու ենթադրված է, որ առաջին խնդրում սեպի մի շղբը ապաա է արտաքին յարումներից, իսկ երկրորդում՝ այն ամրացված է, Նշված խնդիրները մաթևմատիկորեն ձևակերպվածեն որոշակի եզրային պայմաններով ինտեգրո-դիֆֆերենցիալ հավասարումների սխառմաների տեսքով: Այնուհետև Ցակորիի օրթոգոնալ բազմանդամների օգնությամբ այդ սխառմաները բերված են րվաղիլիոովին ուղղույսար դծային հավասարումների անվերջ սխառմաների: Առաջին խնդրի համար ստացված են թվային արդյունքներ, որոնց հիման վրա կառուցված են շոշափող և նորմալ կոնտակտային յարումների բացատրական դծագրերը:

ON THE SOLUTION OF TWO CONTACT PROBLEMS  
FOR WEDGE WITH ELASTIC STIFFENERS

S. M. MKHITARIAN, K. G. GULIAN

## S u m m a r y

Two contact problems on the transfer of load from an elastic finite stiffener to a wedge-shaped elastic plate with an arbitrary aperture angle are considered.

These problems are mathematically formulated as a system of singular integral-differential equations in definite boundary conditions. Then with the help of the Jacobi orthogonal polynomials this system is reduced to a quasi-regular infinite system of linear equations.

For the first problem numerical results are obtained and on the basis of these results graphs of tangent and normal contact stresses are drawn.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Об одной контактной задаче для упругого клина. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1967, т. 20, № 1.
2. Александров В. М. Контактные задачи для упругого клина. Изв. АН СССР, МТТ, 1967, № 2.
3. Нуллер Б. М. Некоторые контактные задачи для упругого бесконечного клина. ПММ, 1972, т. 36, № 1.
4. Нуллер Б. М. Деформация упругого клина, подкрепленного балкой. ПММ, 1974, т. 38, № 5.
5. Нуллер Б. М. Упругий клин, подкрепленный на конечном участке стержнем переменной сечения. Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 5.
6. Нуллер Б. М. О деформации упругой клиновидной пластинки, подкрепленной стержнем переменной жесткости и об одном методе решения смешанных задач. ПММ, 1976, т. 40, № 2.
7. Развитие теории контактных задач в СССР. М., Изд-во «Наука», 1976.
8. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во «Наука», 1966.
9. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., Изд-во «Наука», 1968.
10. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Изд-во «Наука», 1968.
11. Полов Г. Я. Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. ПММ, 1966, т. 30, № 3.
12. Карпенко Л. Н. Приближенное решение одного сингулярного интегрального уравнения при помощи многочленов Якоби. ПММ, 1966, т. 30, № 3.
13. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1962.
14. Arutunian N. K., Mkhitarian S. M. Some contact problems for a semiplane with elastic stiffeners. Trends in elasticity and thermoelasticity. Witold NAWACKI Anniversary Volume. Wolters-Noordhoff Publishing, 1971, p. 3-20.
15. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. ч. 1. М., Изд-во «Наука», 1973.

16. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, т. 25, № 2.
17. Гулян К. Г. Передача нагрузки от струнгера конечной длины к двум клиновидным упругим пластинкам. Докл. АН Арм. ССР, 1974, т. 59, № 4.
18. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1969, т. 33, № 5.
19. Люстерник А. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., Изд-во «Наука», 1965.
20. Molau E. Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen. Ingr.-Arch, 1932, Bd. 3, Heft 2, S. 123.
21. Арутюнян Н. Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, 1968, т. 32, № 4.
22. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., изд-во физ.-мат. литературы, 1962.
23. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований, т. 2. М., Изд-во «Наука», 1970.

Н. О. ГУЛКАНЯН, А. М. МКРТЧЯН

## ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОГО КОЛЬЦА БЕЗ УЧЕТА ТРЕНИЯ

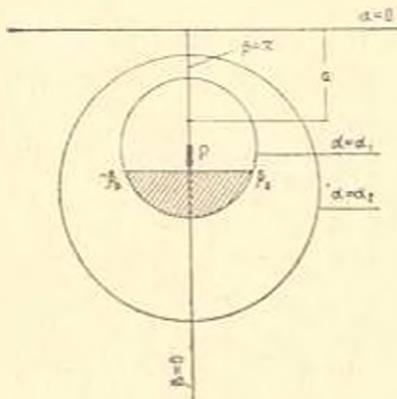
Первая основная задача для эксцентрического кольца в биполярных координатах решалась в [1, 2].

Смешанные задачи решались для частного случая эксцентрического кольца, а именно для полуплоскости с круговым отверстием [3, 4]. В обеих этих работах было принято, что штамп приложен к границе полуплоскости.

В данной статье рассматривается задача о вдавливании штампа в упругое эксцентрическое кольцо, когда между штампом и материалом кольца отсутствует трение. В частном случае получено решение для полуплоскости с круговым отверстием, внутри которого приложен штамп.

1. Задача решается в биполярной координатной системе, в которой эксцентрическое кольцо занимает область  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, -\pi \leq \beta \leq \pi$  (фиг. 1).

Вдоль дуги внутренней окружности  $\alpha = \alpha_1$ , по участку  $|\beta| \leq \beta_1$ , приложен жесткий гладкий штамп, а на остальной части контура кольца заданы нормальные напряжения. Принято, что касательные напряжения по всему контуру равны нулю.



Фиг. 1.

В силу симметрии будем рассматривать только половину основной области ( $\beta \geq 0$ ), требуя при этом выполнения следующих условий:

$$\begin{aligned}
 \tau_{\alpha\beta}(\alpha_1, \beta) - \tau_{\alpha\beta}(\alpha_2, \beta) &= 0 & (0 \leq \beta < \pi) \\
 \tau_{\alpha\beta}(\alpha, 0) = \tau_{\alpha\beta}(\alpha, \pi) &= 0 & (\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2) \\
 V(\alpha, 0) = V(\alpha, \pi) &= 0 & (\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2)
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\alpha z_0(\alpha_2, \beta) = f_2(\beta) \quad (0 \leq \beta \leq \pi) \quad (1.2)$$

$$2\gamma U(\alpha_2, \beta) = q(\beta) \quad (0 < \beta < \beta_0) \quad (1.3)$$

$$\alpha z_1(\alpha_1, \beta) = f_1(\beta) \quad (\beta_0 < \beta < \pi)$$

$a$  — половина расстояния между полюсами системы.

Функцию напряжений  $\Phi(\alpha, \beta)$ , которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left[ \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] \Phi = 0 \quad (1.4)$$

при  $ag = \text{ch } \alpha - \cos \beta$  ищем в виде

$$g\Phi(\alpha, \beta) = A\beta \sin \beta + E_0 \text{sh } \alpha + F_0 \alpha \text{sh } \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(\alpha) \cos k\beta \quad (1.5)$$

На основании (1.5), используя связи напряжений и перемещений с функцией  $g\Phi$  [1], находим

$$\begin{aligned} \alpha z_0 &= A [2 \cos \beta (\text{ch } \alpha - \cos \beta) - \sin^2 \beta] - F_0 \text{sh}^2 \alpha - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} [k^2 (\text{ch } \alpha - \cos \beta) - \text{ch } \alpha] \Psi_k(\alpha) \cos k\beta + \\ &+ \sin \beta \sum_{k=1}^{\infty} k \Psi_k(\alpha) \sin k\beta - \text{ch } \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(\alpha) \cos k\beta \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\alpha z_{0\beta} = (\text{ch } \alpha - \cos \beta) \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(\alpha) \sin k\beta \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} 2\gamma U &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left\{ A \frac{\beta \text{sh } \alpha \sin \beta}{\text{ch } \alpha - \cos \beta} + E_0 \left( \text{ch } \alpha - \frac{\text{sh}^2 \alpha}{\text{ch } \alpha - \cos \beta} \right) + \right. \\ &\quad \left. + F_0 \left( \text{sh } \alpha + \alpha \text{ch } \alpha - \frac{\alpha \text{sh}^2 \alpha}{\text{ch } \alpha - \cos \beta} \right) \right\} - \\ &- \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \left\{ A \left( \frac{\alpha \sin^2 \beta}{\text{ch } \alpha - \cos \beta} - \alpha \cos \beta \right) + F_0 \left( \text{sh } \alpha - \frac{\beta \text{sh } \alpha \sin \beta}{\text{ch } \alpha - \cos \beta} \right) \right\} + \\ &+ \frac{\mu}{\lambda + \mu} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \Psi_k(\alpha) - \frac{\text{sh } \alpha}{\text{ch } \alpha - \cos \beta} \Psi_k(\alpha) \right] \cos k\beta - \\ &- \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \Psi_k(\alpha) + (k^2 - 1) \int \Psi_k(x) dx \right] \cos k\beta - \right. \\ &\left. - \frac{\sin \beta}{\text{ch } \alpha - \cos \beta} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \Psi_k(\alpha) + (k^2 - 1) \int \Psi_k(x) dx \right] \frac{\sin k\beta}{k} \right\} \quad (1.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\mu V = & \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left[ \left( \sin \beta - \frac{\beta \sin^2 \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} + \beta \cos \beta \right) A - \right. \\
& \left. - \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} (F_0 + \alpha E_0) \right] + \\
+ & \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \left[ A \left( \frac{\alpha \operatorname{sh} \alpha \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} - \sin \beta \right) + F_0 \left( \beta \operatorname{ch} \alpha - \frac{\beta \operatorname{sh}^2 \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \right) \right] - \\
- & \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} k \Psi_k(\alpha) \sin k\beta + \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(\alpha) \cos k\beta \right] + \\
+ & \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \Psi_k'(\alpha) + \frac{k^2 - 1}{k} \Psi_k(\alpha) - \right. \\
- & \left. \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \left[ \Psi_k'(\alpha) + \frac{k^2 - 1}{k} \int_0^{\alpha} \Psi_k(x) dx \right] \right] \frac{\sin k\beta}{k} \quad (1.9)
\end{aligned}$$

$\lambda, \mu$  — постоянные Ламе.

Функцию  $\Psi_k(\alpha)$  удобно представить в виде

$$\begin{aligned}
\Psi_k(\alpha) = & E_k \operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha) \operatorname{sh} k(\alpha_1 - \alpha) + G_k \operatorname{sh} k(\alpha_1 - \alpha) \operatorname{sh}(\alpha - \alpha_2) + \\
+ & F_k \operatorname{sh} k(\alpha - \alpha_2) \operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha) + H_k \operatorname{sh} k(\alpha - \alpha_2) \operatorname{sh}(\alpha - \alpha_2) \quad k \geq 2 \quad (1.10)
\end{aligned}$$

$$\Psi_1(\alpha) = E_1 \operatorname{sh} 2(\alpha - \alpha_2) + G_1 \operatorname{ch} 2(\alpha - \alpha_2) + F_1(\alpha - \alpha_2) + H_1$$

Выбор функции  $\Psi_k(\alpha)$  в таком виде обеспечивает автоматическое удовлетворение трех условий (1.1). Из остальных условий (1.1) имеем:

$$\Psi_k'(\alpha_1) = 0, \quad \Psi_k'(\alpha_2) = 0, \quad F_0 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} A \quad (1.11)$$

что равносильно

$$\begin{aligned}
H_k = E_k = 0 \quad \text{при } k \geq 2 \\
2E_1 = -F_1, \quad F_1 = G_1 \operatorname{cth}(\alpha_1 - \alpha_2) \quad (1.12)
\end{aligned}$$

С учетом (1.11) условие (1.2) принимает вид

$$\begin{aligned}
- (\operatorname{ch} \alpha_2 - \cos \beta) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \Psi_k(\alpha_2) \cos k\beta + \sin \beta \sum_{k=1}^{\infty} k \Psi_k'(\alpha_2) \sin k\beta + \\
+ \operatorname{ch} \alpha_2 \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(\alpha_2) \cos k\beta = f_2(\beta) - Q_2(\beta) \quad (0 < \beta < \pi) \quad (1.13)
\end{aligned}$$

где

$$Q_2(\beta) = A \left[ 2 \cos \beta (\operatorname{ch} \alpha_2 - \cos \beta) - \sin^2 \beta - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \operatorname{sh}^2 \alpha_2 \right] \quad (1.14)$$

Рассматривая (1.13) как интегральное уравнение относительно

$$\varphi(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \Psi_k(z_2) \cos k\beta$$

находим решение этого уравнения

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \Psi_k(z_2) \cos k\beta = \frac{\cos \beta \operatorname{ch} z_2}{\operatorname{ch} z_2 - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(z_2) - \frac{R(\beta)}{\operatorname{ch} z_2 - \cos \beta} - \int_0^{\beta} \frac{R(y) dy}{(\operatorname{ch} z_2 - \cos y)^2} [\sin y \operatorname{ch} z_2 \cos \beta + \sin \beta (1 - \operatorname{ch} z_2 \cos y)] \quad (1.15)$$

$$(0 < \beta < \pi)$$

где

$$R(y) = f_2(y) - Q_2(\beta) \quad (1.16)$$

Из (1.15) с учетом (1.16) получим

$$A = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f_2(y) (1 - \operatorname{ch} z_2 \cos y) dy}{(\operatorname{ch} z_2 - \cos y)^2} \quad (1.17)$$

$$\Psi_k(z_2) = -\frac{2}{\pi k (k^2 - 1)} \int_0^{\pi} \frac{f_2(\beta) [k (\operatorname{ch} z_2 - \cos \beta) \cos k\beta - \sin \beta \sin k\beta] d\beta}{(\operatorname{ch} z_2 - \cos \beta)^2} \quad (k \geq 2)$$

$$\Psi_1(z_2) = \frac{1 - \operatorname{ch} z_2}{2} A + \frac{\operatorname{ch} z_2 - 1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f_2(\beta) Z(\beta) d\beta}{(\operatorname{ch} z_2 - \cos \beta)^2} \quad (1.18)$$

$$Z(\beta) = (\pi - \beta) \operatorname{ch} z_2 \sin \beta + \frac{\pi (1 + \operatorname{ch} z_2)}{\pi + 2\pi} (\operatorname{ch} z_2 - \cos \beta)$$

Постоянные  $G_1$ ,  $H_1$ ,  $F_k$  и  $G_k$  выражаем через функции  $\Psi_1(z_1)$  и  $\Psi_1(z_2)$

$$G_1 = \frac{\Psi_1(z_1) - \Psi_1(z_2)}{\Delta_1}, \quad H_1 = \frac{\Psi_1(z_2) [1 + 2(\alpha_1 - z_2) \operatorname{cth}(\alpha_1 - z_2)] - \Psi_1(z_1)}{\Delta_1}$$

$$G_k = \frac{k^2 - 1}{\Delta_k} [-\Psi_k(z_2) \operatorname{sh} k(\alpha_1 - z_2) + \Psi_k(z_1) k \operatorname{sh}(z_1 - z_2)] \quad (1.19)$$

$$F_k = \frac{k^2 - 1}{\Delta_k} [\Psi_k(z_1) \operatorname{sh} k(\alpha_1 - z_2) - \Psi_k(z_2) k \operatorname{sh}(\alpha_1 - z_2)]$$

где

$$\Delta_1 = 2[(\alpha_1 - z_2) \operatorname{cth}(\alpha_1 - z_2) - 1], \quad \Delta_k = \operatorname{sh}^2 k(\alpha_1 - z_2) - k^2 \operatorname{sh}^2(z_1 - z_2) \quad (k > 1)$$

Смешанные условия (1.13) приводят к парным уравнениям ( $k \geq 0$ )

$$-\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} E_0 \operatorname{ch} \alpha_1 + \sum_{k=1}^{\infty} k \Psi_k(\alpha_1) \cos k\beta = G(\beta) - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} q(\beta) \quad (0 < \beta < \beta_0) \quad (1.20)$$

$$2A \operatorname{ch} \alpha_1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \Psi_k(\alpha_1) \cos k\beta = \frac{T(\beta)}{\operatorname{ch} \alpha_1 - \cos \beta} - \frac{f_1(\beta)}{\operatorname{ch} \alpha_1 - \cos \beta} \quad (\beta_0 < \beta < \pi)$$

где  $q(\beta)$  и  $f_1(\beta)$  — заданные граничные функции, а  $G(\beta)$ ,  $T(\beta)$  — регулярные части в выражениях перемещения  $U(\alpha, \beta)$  и напряжения  $\sigma_r(\alpha_1, \beta)$ .

Для дальнейшего удобно пользоваться разложениями

$$G(\beta) = \frac{\bar{G}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{G}_k \cos k\beta, \quad \frac{T(\beta)}{\operatorname{ch} \alpha_1 - \cos \beta} = \frac{T_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} T_k \cos k\beta \quad (1.21)$$

$\bar{G}_k$  и  $T_k$  легко вычисляются при помощи интегралов [1]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta d\beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} = \frac{2\pi}{\operatorname{sh} \alpha} e^{-n\alpha} \quad (1.22)$$

и имеют вид

$$\begin{aligned} G_0 &= -2\lambda \left[ \delta \operatorname{sh} \alpha_1 E_0 + \frac{\mu \operatorname{sh} \alpha_1}{\lambda + 2\mu} A + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(\alpha_1) e^{-k\alpha_1} \right] \\ &\quad + 2 \sum_{k=2}^{\infty} [(1 - N_k) \Psi_k(\alpha_1) - M_k \Psi_k(\alpha_2)] e^{-k\alpha_1}, \\ \bar{G}_1 &= \Psi_1(\alpha_1) - 2\lambda \left[ \delta \operatorname{sh} \alpha_1 e^{-\alpha_1} E_0 - \frac{\alpha_1 (\lambda + 3\mu) e^{-\alpha_1} \operatorname{sh} \alpha_1}{\lambda + 2\mu} A + \right. \\ &\quad \left. + \delta \operatorname{ch} \alpha_1 \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(\alpha_1) e^{-k\alpha_1} \right] + 2 \operatorname{ch} \alpha_1 \sum_{k=2}^{\infty} [(1 - N_k) \Psi_k(\alpha_1) - M_k \Psi_k(\alpha_2)] e^{-k\alpha_1}, \\ \bar{G}_n &= -2\lambda \delta \operatorname{sh} \alpha_1 e^{-n\alpha_1} E_0 + \frac{2\lambda \alpha_1 (\lambda + 3\mu)}{\lambda + 2\mu} \operatorname{sh} \alpha_1 e^{-n\alpha_1} A + \\ &\quad + \delta \alpha_1 \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k} \Psi_k(\alpha_1) + n [\Psi_n(\alpha_1) N_n + M_n \Psi_n(\alpha_2)] + [(1 - N_n) \Psi_n(\alpha_1) - \\ &\quad - M_n \Psi_n(\alpha_2)] e^{-2n\alpha_1} + \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq n}}^{\infty} [(1 - N_k) \Psi_k(\alpha_1) - M_k \Psi_k(\alpha_2)] b_{n,k} \quad (1.23) \end{aligned}$$

( $n \geq 2$ )

$$\begin{aligned}
 T_0 &= 2 \left[ e^{-z_1} + \left( 2 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right) \operatorname{sh} z_1 \right] A + \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} (k + \operatorname{cth} z_1) \Psi_k(z_1) e^{-kz_1}, \\
 T_1 &= \left[ e^{-2z_1} + 2 \left( 2 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right) \operatorname{sh} z_1 e^{-z_1} \right] A + \\
 &\quad + 2 \operatorname{ch} z_1 \sum_{k=2}^{\infty} k \Psi_k(z_1) e^{-kz_1} + \Psi_1(z_1) e^{-2z_1} + \operatorname{cth} z_1 \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(z_1) b_{k1} \quad (1.24) \\
 T_n &= 2 \left( 1 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right) \operatorname{sh} z_1 e^{-nz_1} A + n \Psi_n(z_1) e^{-2nz_1} + \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} k \Psi_k(z_1) b_{kn} + \operatorname{cth} z_1 \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(z_1) b_{kn} \quad (n \geq 2)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 2\Delta_k N_k &= -2k^2 \operatorname{sh}^2 z + 2k \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z - 1 + e^{-2kz} \\
 b_{kn} &= e^{-(n+k)z_1} + e^{-(k-n)z_1}, \quad z = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \\
 \xi &= \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad \Delta_k M_k = \operatorname{ch} z \operatorname{sh} kz + k \operatorname{sh} z \operatorname{ch} kz
 \end{aligned} \quad (1.25)$$

Используя результаты [5], решение уравнений (1.20), с учетом разложений (1.21), получим в виде

$$\begin{aligned}
 p \Psi_p(z_1) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k \bar{G}_k J_{pk}(\cos \beta_0) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} T_k I_{pk}(\cos \beta_0) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\beta_0} F(\cos \theta) z_p(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\beta_0} Q(\cos \theta) z_p(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta + \\
 &\quad + \frac{1}{2p} (4 \operatorname{ch} z_1 A - T_0) y_p(\cos \beta_0) \quad (1.26)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$J_{pk}(\cos \beta_0) = \int_0^{\beta_0} z_p(\cos \theta) z_k(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$F(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\beta_0} \frac{f(\beta) \sin \frac{\beta}{2} d\beta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \beta}}, \quad Q(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\beta_0} \frac{g(\beta) \sin \frac{\beta}{2} d\beta}{\sqrt{\cos \beta - \cos \theta}}$$

$$I_{pk}(\cos \beta_0) = \int_{\beta_0}^{\pi} z_p(\cos \theta) z_k(\cos \beta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta, \quad f(\beta) = \frac{f_1(\beta)}{\operatorname{ch} z_1 - \cos \beta} \quad (1.27)$$

$$z_p(x) = P_{k-1}(x) - P_k(x), \quad y_k(x) = P_{k-1}(x) + P_k(x)$$

а  $P_k(x)$  — полиномы Лежандра.

Подставляя (1.26) в первое уравнение (1.20), определим постоянную  $E_0$ .

$$\frac{\mu \operatorname{ch} z_1}{\lambda + 2\mu} E_0 = (T_0 - 4A \operatorname{ch} z_1) \ln \sin \frac{\beta_0}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \bar{G}_k - \frac{T_k}{k} \right) y_k(\cos \beta_0) -$$

$$- \frac{G_0}{2} + g(0) + \frac{1}{2} \int_{\beta_0}^{\pi} F(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\beta_0} Q(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta \quad (1.28)$$

Как видно из (1.23–1.25),  $\bar{G}_k$  и  $T_k$  выражаются через  $\Psi_p(z_1)$ , следовательно, (1.26) и (1.28) можно рассматривать как бесконечную систему относительно  $p \Psi_p(z_1)$  и  $E_0$ . Сумма модулей коэффициентов при  $p \Psi_p(z_1)$  в (1.26) стремится к нулю, как  $\frac{\ln p}{V p}$ , а свободные члены

бесконечной системы ограничены и стремятся к нулю как  $O\left(\frac{1}{V k}\right)$ .

Следовательно, система (1.26) квазивполне регулярна.

Подставляя (1.26) в (1.6) при  $\alpha = \alpha_1$  с использованием значения ряда

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k(\cos \theta) \cos k\beta = \begin{cases} \sqrt{2} \cos \frac{\beta}{2} (\cos \beta - \cos \varphi)^{-\frac{1}{2}} & (\varphi > \beta) \\ 0 & (\varphi < \beta) \end{cases} \quad (1.29)$$

получим

$$a z_k(z_1, \beta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\beta}{2} (\operatorname{ch} z_1 - \cos \beta) \left[ \frac{R}{\sqrt{\cos \beta - \cos \beta_0}} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\beta_0} \frac{Q(\cos \theta) \sin \theta d\theta}{\sqrt{\cos \beta - \cos \theta}} + \sum_{k=1}^{\infty} k [k \bar{G}_k - T_k] \int_0^{\beta_0} \frac{y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{(\cos \beta - \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\beta_0} \frac{F(\cos \theta) \sin \theta d\theta}{\sqrt{\cos \beta - \cos \theta}} \right] + \frac{F(-1)}{2} (\operatorname{ch} z_1 - \cos \beta) \quad (0 < \beta < \beta_0) \quad (1.30)$$

$R$  — постоянная, входящая в коэффициент особенности контактного напряжения при  $\beta = \beta_0$ , которая определяется формулой

$$R = 4A \operatorname{ch} \alpha_1 - T_0 + F(\cos \beta_0) - Q(\cos \beta_0) - \sum_{k=1}^{\infty} [kG_k - T_k] z_k(\cos \beta_0) \quad (1.31)$$

## 2. Численный пример.

Рассматривается случай, когда фиксированы параметры:

$$\alpha_1 = 1.009, \quad \alpha = 1, \quad f_1(\beta) = 0, \quad \nu = 0.35, \quad E = 2 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2, \quad g(\beta) = 0$$

$$f_2(\beta) = \begin{cases} -q_0 & 0 < \beta < \beta_2 \\ 0 & \beta_2 < \beta < \pi \end{cases}$$

и варьируются геометрические параметры: внешний радиус  $\alpha_1$ , область задания равномерно распределенной нагрузки на внешнем контуре  $\beta_1$ , область приложения гладкого штампа на внутреннем контуре  $\beta_2$ .

В табл. 1—3 приведены значения коэффициента при особенности  $(\cos \beta - \cos \beta_0)^{-1/2}$

$$R^*/q_0 = \frac{1.2}{2} \cos \frac{\beta_2}{2} (\operatorname{ch} \alpha_1 - \cos \beta_0) R$$

причем в табл. 1 и 2 фиксировано  $\alpha_1$ , а в табл. 3 фиксировано  $\beta_0$ .

Таблица 1

$\beta_1 \backslash \beta_2$		$\alpha_1 = 0.25$		
		$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/10$
$\pi/10$	$\pi/10$	1.2394	0.3325	0.2974
$\pi/10$	$\pi/2$	-1.3521	0.7203	-0.2107

Таблица 2

$\beta_1 \backslash \beta_2$		$\alpha_1 = 0.5$		
		$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/10$
$\pi/20$	$\pi/20$	1.3961	0.3631	0.2632
$\pi/20$	$\pi/4$	1.04762	0.7044	0.5737
$\pi/20$	$\pi/10$	1.7916	1.4957	1.3639

Таблица 3

$\beta_1 \backslash \beta_2$		$\alpha_1 = \pi/10$		
		$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/10$
0.5	0.5	1.0475	0.7043	0.5737
0.8	0.8	-0.8491	-0.3679	-0.2997

## 3. Частные случаи.

а) Подставляя в решение задачи  $\alpha_1 = 0$ , получим решение контактной задачи для полуплоскости, ослабленной круговым отверстием, на границе которой действует гладкий жесткий штамп. При этом  $f_2(\beta)$  при  $\beta \rightarrow 0$  должно стремиться к нулю как  $\beta$ . Иными словами, граница полуплоскости ( $\alpha_1 = 0$ ) на бесконечности должна быть свободна от нагрузок.

6) Из решения данной задачи можно получить решение задачи, когда штамп приложен к внешнему контуру кольца. Для этого достаточно в соответствующих формулах поменять местами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Если, кроме этого, принять радиус внешней окружности равным бесконечности (то есть принять  $\alpha_1 = 0$ ), то получаем решение для полуплоскости с круговой полостью, когда на границе полуплоскости приложено два симметрично расположенных полубесконечных штампа. Решение такой задачи ранее было получено в работе [4].

Институт механики АН  
Армянской ССР

Поступила 17 III 1978

Ն. Օ. ԳՈՒԼԿԱՆՅԱՆ, Ա. Մ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՍՐՏԱԿՆԵՏՐՈՆ ՈՂԱԿԻ ՀԱՄԱՐ ՀԱՐԹ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԵՆԴԻՐ  
ԱՌԱՆՑ ՇՓՄԱՆ ՀԱՇՎԱՌՄԱՆ

Ա մ փ ո թ ո մ

Գիտարկված է արտակենտրոն օղակի համար հարթ կոնտակտային խընդիր, երբ ներքին (արտաքին) հղրագծի վրա ազդում է կոշտ ուղորկ զրոշմ:

Երկրենև կոսրգինատային սիստեմում, ֆուրլերի շարքերի օղնությամբ, խնդրի լուծումը բերվում է նախ դույզ շարքեր հավասարումների, այնուհետև բվազի լիովին սեզուլյար հանրահաշվական հավասարումների սիստեմի:

Մասնավոր դեպքում ստացվում է կլոր անցրով թուլացված կիսահարթության համար կոնտակտային խնդրի լուծումը, երբ անցրի ներսում ազդում է զրոշմ:

Գիտարկված է Բվալին օրինակ:

A PLANE CONTACT PROBLEM FOR AN ECCENTRIC RING  
TAKING NO ACCOUNT OF FRICTION

N. O. GULKANIAN, A. M. MKRTCHIAN

S u m m a r y

A problem on pressing a punch into an elastic eccentric ring with no friction between the punch and the ring's material is considered. In the particular case a solution is obtained for a semi-plane with a circular hole to which the punch is applied. The problem is reduced to dual series-equations which in their turn are reduced to a quasi-regular infinite system of linear equations.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. М.—Л., 1950.
2. Езян В. В. Плоская задача теории упругости для эксцентричного кольца. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. н., 1964, т. 17, № 1.
3. Араманович И. Г. Задача о давлении штампа на упругую полуплоскость с круговым отверстием. Докл. АН СССР, 1957, т. 112, № 4.
4. Александриян М. А. Контактная задача для полуплоскости, ослабленной круговой полостью. Докл. АН Арм. ССР, 1968, т. XVI, № 5.
5. Баблюк А. А. Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, 1967, т. 31, в. 4.

А. О. ВАТУЛЯН

О ДЕЙСТВИИ ЖЕСТКОГО ШТАМПА  
 НА ОРТОТРОПНЫЙ СЛОЙ

Рассмотрены задачи сжатия и изгиба ортотропного слоя толщины  $2h$  двумя симметрично приложенными к его плоскостям круглыми в плане жесткими штампами. Трение в области контакта отсутствует. Каждая из краевых задач сведена к двумерному интегральному уравнению 1-го рода относительно контактных давлений. Доказана однозначная разрешимость интегрального уравнения в весовом пространстве. Построено приближенное решение и доказана его сходимость к точному.

§ 1. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям. Существование обобщенных решений и их единственность

Рассматриваемые краевые задачи описываются уравнениями Коши, определяющими уравнениями вида (1.1) [1], [2]

$$\sigma_{j1} = c_{jk} \varepsilon_{kk}, \quad j = 1, 2, 3; \quad \sigma_{23} = 2c_{31} \varepsilon_{23}, \quad \sigma_{13} = 2c_{23} \varepsilon_{13}, \quad \sigma_{12} = 2c_{46} \varepsilon_{12} \quad (1.1)$$

и следующими граничными условиями:

задача (А) (сжатие)

$$\begin{aligned} x_3 = \pm h, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{33} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad u_3 = \pm f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\Omega$  — односвязная область с гладкой границей,  $c_{jk} = c_{kj}$  — упругие постоянные.

В случае задачи (Б) (изгиб) последнее из условий (1.2) заменяется следующим:

$$u_3 = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega \quad (1.3)$$

Следует отметить, что задача о действии штампа на изотропный слой наиболее полно исследована в [3]. В случае, когда слой ортотропен и на  $c_{46}$  наложен ряд связей типа равенств, решение получено в [4].

В настоящей работе предлагается метод, позволяющий строить решения краевой задачи для произвольного ортотропного материала.

Каждая из краевых задач (А), (Б) с помощью интегрального преобразования Фурье сводится к двумерному интегральному уравнению 1-го рода с разностным ядром относительно контактных давлений

$$\iint_{\Omega} k(\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2) q(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = 4\pi^2 f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega \quad (1.4)$$

$$k(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x_1, x_2) e^{i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)} dx_1 dx_2 \quad (1.5)$$

причем в задаче (А)

$$K(x_1, x_2) = \frac{\hbar}{c_{33}} \frac{L(u_1, u_2)}{u}, \quad \alpha_j \hbar = u_j = u s_j, \quad u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad (1.6)$$

$$L(u_1, u_2) = a_0 \frac{(p_2^2 - p_1^2)(p_1^2 - p_3^2)(p_2^2 - u_1^2)}{\sum_{k=1}^3 \mu_k^{-1} R_k \operatorname{cth} u \mu_k}$$

$$R_1 = (u_2^2 - u_1^2)(p_1 p_2^2 + p_1), \quad p_2 = a_0 [\Delta_1 s_1^4 + 2(2\gamma_6 + \gamma_1 - \gamma_7 \gamma_8) s_1^2 s_2^2 + \Delta_2 s_2^4]$$

$$p_1 = -(\gamma_5 s_1^2 + \gamma_4 s_2^2) \left[ \gamma_6 \Delta_1 s_1^4 + 2 \left( \frac{\Delta}{2} - \gamma_3 \gamma_6 + \gamma_4 \gamma_7 \gamma_8 \right) s_1^2 s_2^2 + \gamma_6 \Delta_2 s_2^4 \right]$$

$R_k$  ( $k = 2, 3$ ) получаются из  $R_1$  циклической заменой,  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  — корни характеристического уравнения

$$a_0 \mu^4 + a_2 \mu^2 + a_1 \mu + a_0 = 0, \quad \operatorname{Re} \mu_k > 0$$

$$a_0 = \gamma_4 \gamma_5$$

$$a_2 = -[\gamma_4 (\Delta_1 - 2\gamma_5 \gamma_7) + \gamma_7 \gamma_8] s_1^2 - [\gamma_5 (\Delta_2 - 2\gamma_4 \gamma_6) + \gamma_4 \gamma_6] s_2^2$$

$$a_1 = [\gamma_6 (\Delta_1 - 2\gamma_5 \gamma_7) + \gamma_1 \gamma_5 \gamma_4] s_1^4 + [\gamma_6 (\Delta_2 - 2\gamma_4 \gamma_6) + \gamma_2 \gamma_5 \gamma_4] s_2^4 +$$

$$+ 2s_1^2 s_2^2 \left[ \frac{\Delta}{2} + \gamma_6 (\gamma_4 + \gamma_5) (\gamma_3 + \gamma_7) + \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6 - \gamma_3 \gamma_7 \gamma_6 - \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 - \gamma_2 \gamma_5 \gamma_7 - \gamma_3 \gamma_6 \right]$$

$$a_0 = -(\gamma_5 s_1^2 + \gamma_4 s_2^2) [\gamma_1 \gamma_6 s_1^4 + (\gamma_1 \gamma_6 - 2\gamma_3 \gamma_6 - \gamma_3^2) s_1^2 s_2^2 + \gamma_2 \gamma_4 s_2^4] \quad (1.7)$$

и введены следующие безразмерные параметры:

$$\gamma_j = c_{jj} c_{33}^{-1}, \quad j = 1, 2, 4, 5, 6, \quad \gamma_3 = c_{12} c_{33}^{-1}, \quad \gamma_7 = c_{13} c_{33}^{-1}, \quad \gamma_8 = c_{23} c_{33}^{-1}$$

$$\Delta_1 = \gamma_1 - \gamma_7^2, \quad \Delta_2 = \gamma_2 - \gamma_8^2, \quad \Delta = c_{33}^3 \det \|c_{jj}\|, \quad \gamma_9 = \gamma_3 + \gamma_6$$

Функция  $L(u_1, u_2)$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $L(u_1, u_2) > 0$  по крайней мере при  $p_1 > 0$ ,  $p_1 < 0$  и вещественных  $u_1, u_2$ ;
- 2) четна по  $u_1, u_2$ ;
- 3) обладает следующими предельными значениями:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} L(u_1, u_2) u^{-1} = a_0 p_4^{-1} > 0$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} L(u_1, u_2) = a_0 \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3 (p_1 + \mu_2)(p_2 + \mu_3)(p_3 + \mu_1)}{p_2 \mu_1 \mu_2 \mu_3 - p_4 (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)} > 0 \quad (1.8)$$

Нетрудно убедиться предельным переходом к изотропному случаю, что  $L(u, \kappa_2)$  стремится к функции  $L(u)$ , которая совпадает с аналогичной функцией задачи IV [3].

Введем в рассмотрение функциональное пространство  $\bar{H}(K, \Omega)$  [5] с нормой

$$\|q\|_{\bar{H}(K, \Omega)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x_1, x_2) |Q(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2$$

$$Q(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \iint q(\xi_1, \xi_2) e^{i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \quad (1.9)$$

Лемма. Пространство  $L_p(\Omega)$  ( $4/3 \leq p < 2$ ) вложено в  $\bar{H}(K, \Omega)$ . Лемма доказывается применением неравенств Хаусдорфа-Юнга и Гельдера и свойств функции  $K(x_1, x_2)$ .

Теорема 1. В пространстве  $L_p(\Omega)$  ( $4/3 \leq p < 2$ ) уравнение (1.4) не может иметь более 1-го решения.

Умножая (1.4) на  $\bar{q}(x_1, x_2) \in L_p(\Omega)$  и интегрируя, имеем

$$\|q\|_{\bar{H}(K, \Omega)}^2 = \iint \bar{q}(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (1.10)$$

В силу леммы соотношение (1.10) корректно и из  $f(x_1, x_2) \equiv 0$ ,  $(x_1, x_2) \in \Omega$  следует  $q(x_1, x_2) \equiv 0$ ,  $(x_1, x_2) \in R_2$ .

Теорема 2. Если  $f(x_1, x_2) \in H(K^{-1}, \Omega)$ , то (1.4) разрешимо в  $\bar{H}(K, \Omega)$ , где  $H(K^{-1}, \Omega)$  — пространство, сопряженное  $\bar{H}(K, \Omega)$  [5].

Умножим (1.4) на  $\bar{\varphi}(x_1, x_2) \in H(K, \Omega)$  и проинтегрируем. Используя определения соответствующих норм и неравенство Шварца, легко показать, что

$$|(q, \bar{\varphi})_{\bar{H}(K, \Omega)}| \leq \|f\|_{H(K^{-1}, \Omega)} \| \bar{\varphi} \|_{\bar{H}(K, \Omega)}$$

Таким образом, слева стоит линейный и ограниченный в  $\bar{H}(K, \Omega)$  функционал, что и доказывает в силу теоремы Рисса утверждение теоремы.

Замечание 1. Все изложенное выше относится к задаче (А). Функция  $K(x_1, x_2)$  в случае задачи (Б) получается из (1.6) заменой  $ct_{11}$  на  $th_{11}$ . Кроме того, для разрешимости интегрального уравнения (1.4) в случае (Б) необходимо потребовать выполнения условия статик

$$\iint_{\Omega} q(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0$$

## § 2. Построение приближенного решения интегрального уравнения

Осуществим в (1.4)–(1.5) замены  $x_1 + ix_2 = ae^{i\varphi}$ ,  $x_1 - ix_2 = re^{i\psi}$ , считая  $\Omega$  кругом радиуса „ $a$ “ и допуская возможное представление функций их рядами Фурье

$$f(x_1, x_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) e^{in\varphi}, \quad q(z_1, z_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q_m(\psi) e^{im\psi}$$

$$K(z_1, z_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k(a) e^{ik\varphi} \quad (2)$$

внесем (2.1) в (1.4)–(1.5) и произведем интегрирование. Получим бесконечную систему интегральных уравнений

$$Kq = \int_0^a \int_0^{2\pi} S(ar) L(z) S(z\rho) q(z) \rho d\psi d\rho = f(r), \quad 0 \leq r \leq a \quad (2)$$

причем

$$S(z) = \{J_n(z) \delta_{nk}\}_{n, k=-\infty}^{\infty}, \quad L(z) = \{h_n(z)\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

— бесконечномерные матрицы ( $J_n(z)$  — функции Бесселя), а

$$q(z) = \{q_n(\psi)\}_{n=-\infty}^{\infty}, \quad f(r) = \{f_n(r)\}_{n=-\infty}^{\infty} \quad (2)$$

— бесконечномерные векторы.

Произведем редукцию системы (2.2), считая в (2.3)  $|n| \leq N$ ,  $|k| \leq N$ , в результате чего придем к системе  $2N+1$  интегральных уравнений с  $2N+1$  неизвестными

$$K^N q^N = \int_0^a \int_0^{2\pi} S^{(N)}(zr) L^{(N)}(z) S^{(N)}(z\rho) q^{(N)}(\psi) \rho d\psi d\rho = f^{(N)}(r), \quad 0 \leq r \leq a \quad (2)$$

где индекс  $N$  сверху означает, что в (2.3)  $|n|, |k| \leq N$  (в дальнейшем везде опускаем).

При построении решения (2.4) будем следовать методике [6].

Используя свойства функций Бесселя и Ханкеля, преобразуем систему к виду

$$-k(r, \psi) = \int_{\Gamma} S(zr) L(z) S(z\rho) z dt = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} H(t\rho) \\ S(t\rho) \end{pmatrix} L(t) \begin{pmatrix} S(tz) \\ H(tz) \end{pmatrix} z dt \quad \begin{matrix} r > \rho \\ r < \rho \end{matrix}$$

где  $H(z) = \{H_n^{(1)}(z) \delta_{nk}\}_{n, k=-\infty}^{\infty}$ ,  $H_n^{(2)}(z)$  — функция Ханкеля 2-го рода. Контур  $\Gamma$  располагается в нижней полуплоскости и области регуля-

ности  $s^*$  элементов матрицы  $L(t)$ . Далее построим общее представление решения системы (2.2). Для этого доопределим правую часть (1.4) функцией  $g(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_2) \in \Omega$ . Применим затем к обеим частям (1.4) преобразование Фурье по  $x_1, x_2$  и, обратив его, разложим все функции в ряды согласно (2.1). Вводя затем вектор  $Z(t)$  с компонентами, аналитически продолжимыми в нижнюю полуплоскость и убывающими там, как  $e^{-t\alpha}$

$$Z(t) = \frac{t}{2} [L_-(t)]^{-1} \int_0^{\infty} H(tr) g(r) r dr, \quad Z(t) = \{Z_n(t)\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

$$g(x_1, x_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(r)^{e^{in}}, \quad g(r) = \{g_n(r)\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

получим окончательно

$$q(t) = \int_0^{\infty} S(\tau) [L_-(\tau)]^{-1} F(\tau) \tau d\tau + \int_{\Gamma_1} S(t) [L_+(t)]^{-1} Z(t) dt$$

$$F(\tau) = \int_0^{\infty} S(\tau r) f(r) r dr \quad (2.6)$$

где  $L_+(t)$ ,  $L_-(t)$  — результат факторизации матрицы  $L(t)$  относительно контура  $\Gamma$ . Контур  $\Gamma_1$  расположен в  $s^*$  ниже  $\Gamma$ .

Внося (2.5) и (2.6) в (2.4), интегрируя и используя обращение преобразования Мейера [7], приходим к системе

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\Theta(t_2, t_1, a)}{t_2^2 - t_1^2} [L_-(t_1)]^{-1} Z(t_1) dt_1 + E(t_2, a) = 0 \quad (2.7)$$

$t_2$  — выше контура  $\Gamma_1$ ,

$$E(t_2, a) = \int_0^{\infty} \frac{\Theta(t_2, \tau, a)}{t_2^2 - \tau^2} [L_-(\tau)]^{-1} F(\tau) \tau d\tau$$

$$\Theta(t, \tau, a) = \{\Theta(t, \tau, a, n) \delta_{nk}\}_{n, k=-N}^N$$

$$\Theta(t, \tau, a, n) = a [t H_n^{(2)}(ta) J_n(-a) - \tau H_n^{(2)}(ta) J_{n+1}(-a)]$$

Введем в рассмотрение диагональные матрицы  $\chi_1(\tau, a)$ ,  $\chi_2(\tau, a)$  с элементами, регулярными и не обращающимися в нуль в нижней полуплоскости и обладающими там следующим асимптотическим поведением:

$$\sqrt{a} \chi_2(\tau, a, n) J_0(-a) \rightarrow 1 \quad \text{Im } \tau \rightarrow -\infty$$

$$i \sqrt{a} \chi_1(\tau, a, n) H_0^{(2)}(-a) \rightarrow 1 \quad (2.8)$$

для всех  $|n| \leq N$ . Полагая  $Z(t_1) = x_2(t_1, a) X(t_1)$ , умножая (2.7) слева на  $L_-(t_2) x_1(t_2, a)$  и проецируя на  $\Gamma_2 > \Gamma_1$  ( $\Gamma_2$  выше  $\Gamma_1$ ), получим

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1}^{\infty} \int_{\Gamma_1}^{\infty} \frac{L_-(t_2) x_1(t_2, a) \Theta(t_2, t_1, a) [L_-(t_1)]^{-1} x_2(t_1, a) X(t_1)}{(t_2 - z)(t_2^2 - t_1^2)} dt_1 dt_2 + \\ + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1}^{\infty} \frac{L_-(t_2) x_1(t_2, a) E(t_2, a)}{t_2 - z} dt_2 = 0, \quad z > \Gamma_2 \quad (2.9)$$

Представим

$$\frac{x_2(t_2, a, n) \Theta(t_2, t_1, a, n) x_2(t_1, a, n)}{t_2^2 - t_1^2} = \frac{1}{t_1 - t_2} \frac{M(t_2, t_1, a, n)}{t_2^2 - t_1^2}$$

причем  $M(t_2, t_1, a, n) = c + O(|t_2^{-1}|, |t_1^{-1}|)$  при  $|t_j| \rightarrow \infty$ ,  $t_j \in \Gamma_j$ ,  $j = 1, 2$  для всех  $|n| \leq N$ .

Аналогично [6], обращая бисингулярный оператор

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1}^{\infty} \int_{\Gamma_1}^{\infty} \frac{L_-(t_2) [L_-(t_1)]^{-1} X(t_1)}{(t_2 - z)(t_1 - t_2)} dt_1 dt_2 \quad (2.10)$$

приведем (2.9) к операторному уравнению 2-го рода

$$X(z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1}^{\infty} \int_{\Gamma_1}^{\infty} \frac{L_-(t_2) M(t_2, t_1, a) [L_-(t_1)]^{-1} X(t_1)}{(t_2 - z)(t_2^2 - t_1^2)} dt_1 dt_2 - \\ - \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1}^{\infty} \frac{L_-(t_2) x_1(t_2, a) E(t_2, a)}{t_2 - z} dt_2 \quad (2.11)$$

которое несложным приемом приводится к уравнению с вполне непрерывным оператором в пространстве  $c_n(\lambda)$  векторных функций с компонентами непрерывными и убывающими на контуре  $\Gamma_1$  с весом  $z^\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ). В силу полной непрерывности оператор расщепляется на конечномерный и малый, и решение (2.11) сводится к решению конечной алгебраической системы. Практическая реализация вышеизложенного базируется на аппроксимации

$$h_k(x) = (x^2 + b^2)^{-0.5} h_k^*(x), \quad k = 0, 1, \dots, N$$

где  $h_k^*(x)$  — четные по  $x$  рациональные функции,  $h_k^*(x) = O(1)$ ,  $x \rightarrow \infty$ , которые могут быть построены, например, при помощи полиномов С. Н. Бернштейна. Далее факторизация матрицы  $L^*(x)$  осуществляется на основе факторизации полиномиальной матрицы  $R(x)$  и полинома  $P(x)$ , которая выполняется точно

$$L(x) \sim L^*(x) = (x^2 + b^2)^{-0.5} P^{-1}(x) R(x) \\ L_-(x) = (b - ia)^{-0.5} P^{-1}(x) R_-(x) \quad (2.12)$$

Совершенно аналогично

$$[L_-(\alpha)]^{-1} = (b \mp i\alpha)^{1.0.5} [P_+^{(1)}(\alpha)]^{-1} R_+^{(1)}(\alpha) \quad (2.13)$$

Пусть  $-z_k, k=1, 2, \dots, l$  — нули полинома  $P^{(1)}(\alpha)$ , лежащие ниже контура  $\Gamma_1$ . Деформируя в (2.11) контура  $\Gamma_0, \Gamma_1$  в нижнюю полуплоскость, пренебрегая интегральными членами порядка  $O(|ba|^{-2})$ , которые могут быть сделаны сколь угодно малыми за счет выбора параметра аппроксимации „ $b$ “ достаточно большим, и полагая  $z = -z_k$ , получим конечную алгебраическую систему

$$X(-z_s) - \sum_{k=1}^l B_{ks} X(-z_k) + C_s, \quad s = 1, 2, \dots, l$$

$$B_{ks} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{t_2 + z_s, t_1 - z_k} \operatorname{res} \left( \frac{L_+(t_2) M(t_2, t_1, \alpha) [L_+(t_1)]^{-1}}{t_2 - t_1} \right) dt_2 \quad (2.14)$$

$$C_s = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \frac{L_+(t_2) x_1(t_2, \alpha) E(t_2, \alpha)}{t_2 + z_s} dt_2$$

при достаточно больших  $l$  эта система оказывается однозначно разрешимой. Разрешив ее, получим приближенные формулы для контактных напряжений в виде

$$q(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \simeq \sum_{m=-N}^N q_m(\rho) e^{im\theta} = \sum_{m=-N}^N e^{im(\theta - \frac{\pi}{2})} \times$$

$$\times \left| \sum_{n=-N}^N \left\langle \int_0^\infty J_n(\tau \rho) d_{n-k}(\tau) F_n(\tau) \tau d\tau - 2\pi i \sum_{k=1}^l J_n(-z_k \rho) \times \right. \right. \quad (2.15)$$

$$\left. \left. \times \operatorname{res}_{z=-z_k} d_{n-k}^*(z) x_2(-z_k, \alpha, s) X_s(-z_k) \right\rangle \right|$$

где

$$[L(\alpha)]^{-1} = \{d_{k-n}(\alpha)\}_{n, k=-N}^N, \quad [L_+(\alpha)]^{-1} = \{d_{k-n}^+(\alpha)\}_{n, k=-N}^N$$

Используя асимптотики для функций Бесселя, нетрудно показать, что при  $\rho \rightarrow a$

$$q(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \sim \frac{C(\theta)}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}$$

### § 3. Оценка погрешности приближенного решения

Для простоты ограничимся доказательством при  $f(x_1, x_2) = f(r)$ . Введем обозначение  $K^{**}q^{**} = f$ , что соответствует (2.4) с заменой матрицы  $L(\alpha)$  на  $L^*(\alpha)$ .

Теорема 3. Если ряд из  $h_k(z)$  сходится абсолютно и

$$\left| h_k(z) - \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} h_k^*(z) \right| |h_k^{-1}(z)| < \varepsilon \text{ для всех } k=0, 1, \dots, N, 0 \leq z < \infty,$$

то справедлива оценка

$$\|q - q^{**}\|_{H(K, \nu)} < \delta \|q\|_{H(K, \nu)} \quad (3.1)$$

причем  $\delta \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ .

Докажем первую часть теоремы, то есть покажем, что

$$\|q - q^*\|_{H(K, \nu)} < \delta_1 \|q\|_{H(K, \nu)} \text{ и } \delta_1 \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty$$

Предварительно преобразуем (1.9) к виду

$$\|q\|_{H(K, \nu)}^2 = \int_0^\infty \sum_{s=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty h_{s-n}(z) Q_n(z) \bar{Q}_s(z) z dz$$

$$Q_m(z) = i^m \int_0^z q_m(t) J_m(2t) t dt \quad (3.2)$$

Из равенства  $Kq = K^*q^*$  (3.2) и неравенства Шварца получим

$$\|q - q^*\|_{H(K, \nu)} \leq \|(K^* - K)q^*\|_{H(K, \nu)} =$$

$$= \int_0^\infty \sum_{m, p=-N}^N a_{mp}(z) Q_m(z) \bar{Q}_p(z) z dz \quad (3.3)$$

$$a_{mp}(z) = \sum_{|s|, |n| \leq N} h_{s-m}(z) h_{n-m}(z) h_{s-p}(-)$$

Введем в рассмотрение регулярный пучок эрмитовых форм

$$A_1(Q, \bar{Q}) + \nu A_2(Q, \bar{Q}) \quad 0 \leq z < \infty$$

$$A_1(Q, \bar{Q}) = \sum_{m, p=-N}^N a_{mp}(z) Q_m(z) \bar{Q}_p(z) \quad (3.4)$$

$$A_2(Q, \bar{Q}) = \sum_{m, p=-N}^N h_{m-p}(z) Q_m(z) \bar{Q}_p(z)$$

Из свойств  $K(x_1, x_2)$  вытекает что  $A_2(Q, \bar{Q})$  — положительно определенная эрмитова форма

$$(0 \leq z < \infty)$$

Поэтому [8]

$$A_1(Q, \bar{Q}) \leq \nu_{\max}(z) A_2(Q, \bar{Q})$$

где  $\nu_{max}(z)$  — наибольшее характеристическое число пучка (3.4). Покажем, что

$$\sup | \nu_{max}(z) | = \delta_1 \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty$$

В самом деле,

$$\left| \sum_{s, n=-\infty}^{\infty} h_{s-n}(z) h_{n-m}(z) h_{s-p}(z) \right| \leq h_0(z) \left( \sum_{l=-\infty}^{\infty} |h_l(z)| \right)^2$$

для всех  $m, p, 0 \leq z \leq x$  и в силу абсолютной сходимости ряда из  $h_l(z)$  следует сходимость ряда слева.

Следовательно,  $a_{m,p}(z) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ , а отсюда вытекает, что все характеристические числа пучка (3.4) стремятся к нулю при  $N \rightarrow \infty$ .

Таким образом, учитывая, что  $\sum_{s, n=-\infty}^{\infty} h_{s-n}(z) Q_s(z) \bar{Q}_n(z) > 0$  для всех ненулевых векторов  $Q$ , имеем

$$|q - q^*|_{H(K, \varepsilon)} < \delta_1 |q|_{H(K, \varepsilon)} \quad (3.5)$$

Аналогично доказывается вторая часть теоремы

$$|q^* - q^{**}|_{H(K, \varepsilon)} < \delta_2 |q|_{H(K, \varepsilon)} \quad (3.6)$$

причем  $\delta_j \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Из (3.5) и (3.6) и следует (3.1).

#### § 4. Численный пример

Построим приближенное решение уравнения (1.4) для задачи сжатия, используя следующую аппроксимацию его символа:

$$\frac{L(u \cos \varphi, u \sin \varphi)}{u} = h_0^*(u) + 2h_2^*(u) \cos 2\varphi \quad (4.1)$$

где

$$h_{2n}^*(u) = \frac{1}{1 + u^2 + b^2(u^2 + A^2)} (k_{2n} u^2 + bA^2 z_{2n})$$

$$k_{2n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \lim_{u \rightarrow 0} L(u \cos \varphi, u \sin \varphi) \cos 2n\varphi d\varphi$$

$$z_{2n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \lim_{u \rightarrow 0} u^{-1} L(u \cos \varphi, u \sin \varphi) \cos 2n\varphi d\varphi \quad n = 0, 1 \quad (4.2)$$

«b», «A» — параметры аппроксимации.

Аппроксимация вида (4.1) и последующая редукция порождает матрицу

$$L^{\circ}(u) = \begin{vmatrix} h_0^{\circ}(u) & h_2^{\circ}(u) \\ h_2^{\circ}(u) & h_0^{\circ}(u) \end{vmatrix} \quad (4.3)$$

факторизация которой легко строится

$$L^{\circ}(u) = \frac{1}{\sqrt{b \pm iu}} \frac{1}{u \pm iA} \begin{vmatrix} z_+(u \pm z_+) & \pm z_-(u \pm z_+) \\ \mp z_-(u \pm z_+) & z_+(u \pm z_+) \end{vmatrix} \quad (4.4)$$

$$z_{\pm} = \sqrt{\frac{k_0 \pm k_2}{2}}; \quad z^2 = -bA^2 \frac{z_0 \pm z_2}{k_1 \pm k_2}, \quad L^{\circ}(u) = L_-(u) L_+(u)$$

Конкретные численные расчеты проводились для следующих значений упругих постоянных [9]:

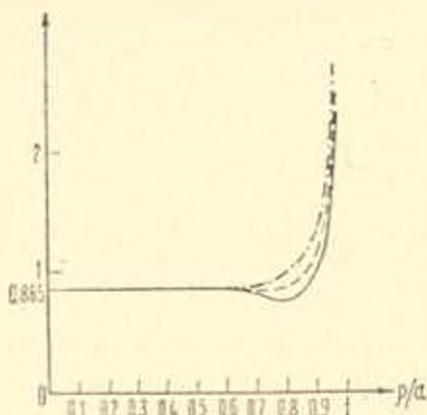
$$c_{11} = 2.55, \quad c_{22} = 3.81, \quad c_{33} = 3.71, \quad c_{44} = 1.34, \quad c_{55} = 0.321, \quad c_{66} = 0.979, \\ c_{12} = 1.41, \quad c_{13} = 1.16, \quad c_{23} = 1.46 (\times 10^{11} \text{ дн/см}^2) \text{ (сегнетова соль).}$$

Для этого материала по формулам (4.2) на ЭВМ ОДРА-1204 найдены значения  $k_0 = 2.96026$ ,  $k_2 = 0.40658$ ,  $z_0 = 1.1684$ ;  $z_2 = -0.03179$ , причем постоянные  $k_{2n}$  и  $z_{2n}$  быстро убывают ( $k_4 = 0.082$ ,  $z_4 = 0.0169$ ), что позволяет достаточно эффективно использовать аппроксимацию (4.1). Относительная погрешность (4.1) при  $b = 7.5$ ,  $A = 3.9$  не превосходит 15% во всей плоскости.

Считая далее  $f(x_1, x_2) = \delta$  и полагая  $a = 5$ ,  $h = 1$ , решаем алгебраическую систему вида (2.14) 4-го порядка и находим контактные напряжения под штампом

$$q(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = q_0(\rho) - 2q_2(\rho) \cos 2\theta$$

На фиг. 1 приведены значения контактных напряжений  $\frac{q(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)}{c_{44} \delta}$



Фиг. 1

для различных углов  $\theta$ , причем штриховая линия соответствует  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , штрих-пунктирная —  $\theta = 0$ , а сплошная —  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Видно, что несимметрия контактных напряжений возрастает по мере приближения к краю штампа.

*Замечание 2.* Изложенный выше прием решения системы (2.1) можно перенести и на случай контакта с греннем. Однако, факторизация матрицы  $L(\alpha)$  в этом случае производится гораздо сложнее.

Автор выражает глубокую благодарность В. А. Бабешко за руководство работой.

НИИ механики и прикладной математики  
Ростовского государственного университета

Поступила 21 II 1977

Ա. Ո. ՎԱՏՈՒՅԱՆ

ՕՐՏՌՈՏՐՈՊ ԾԵՐՏԻ ՎՐԱ ԿՈՇՏ ԴՐՈՇՄԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ,

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Ուսումնասիրվում է օրթոտրոպ շերտի վրա կոշտ և հատակագծով կլոր զրոշմի ազդեցությունը կոնտակտի արտոյթում շփման բացակայության դեպքում:

Յզրային խնդիրը բերվել է տարբերական կորիզով առաջին սեռի երկշափանի ինտեգրալ հավասարման:

Ցույց է տրված, որ այդ հավասարումն ունի միակ լուծում: Առաջարկվել է հավասարման լուծման մոտավոր եղանակ, որը հիմնված է ֆակտորիզացիայի մեթոդի վրա:

ON THE ACTION OF A PUNCH ON AN ORTHOTROPIC LAYER

A. O. VATUIJAN

S u m m a r y

A problem on the action of a rigid punch on an orthotropic layer with no friction in the contact area is studied. The boundary problem is reduced to a two-dimensional equation of the first kind with a difference kernel which in its turn is reduced to an infinite system of integral equations. A method of approximate solution for the latter is suggested in terms of the  $\mathfrak{L}$ factorisation method. An unambiguous solution for the initial equation in a weighted space as well as the convergence of the approximation methods are proved.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М., изд. ГИТТЛ, 1950.
2. Саркисян В. С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван, изд. Ереванского ун-та, 1976.
3. Ворович Н. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., изд. «Наука», 1974.
4. Кохиани О. И. О действии штампа на ортотропный слой конечной толщины. Тр. Груз. Политехнического института, 1975, № 3.
5. Волевич А. Р., Панелях Б. И. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения. УМН, 1965, т. XX, вып. 1.
6. Бабешко В. А. Вибрация двух круглых штампов на слоистой среде. ПММ, 1976, т. 40, вып. 6.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. т. 2, М., изд. «Наука», 1974.
8. Гантмахер Ф. Г. Теория матриц. М., «Наука», 1967.
9. Хантингтон Г. Уругие постоянные кристаллов. УФН, 1961, т. 74, вып. 2, 3.

Ю. М. МАМЕДОВ

КРУЧЕНИЕ БРУСА ДВУСВЯЗНОГО ПОПЕРЕЧНОГО  
СЕЧЕНИЯ. ОБЛАДАЮЩЕГО ОСЯМИ СИММЕТРИИ

## § 1. Постановка задачи

Рассмотрим однородный изотропный брус, ограниченный произвольной боковой поверхностью и двумя основаниями, перпендикулярными к боковой поверхности.

Пусть усилия, приложенные к основаниям, статически эквивалентны закручивающим парам, действующим в плоскостях оснований. Боковую поверхность бруса будем считать свободной от внешних усилий.

Поперечное сечение бруса представляет собой двусвязную область  $S$ , ограниченную изнутри окружностью  $L_1$  радиуса  $R$ , а извне — гладким контуром  $L_2$  произвольного очертания.

Возьмем одно из поперечных сечений бруса за плоскость комплексного переменного  $z = x + iy$  и поместим начало координат в центре окружности  $L_1$ .

За положительное направление обхода контуров  $L_1$  и  $L_2$  принимается такое направление, при котором ограниченная ими область  $S$  остается слева.

Как известно [1], задача определения напряжений в такой упругой среде сводится к нахождению функции  $\varphi(z)$  регулярной в области  $S$  по переменной  $z$  из следующих краевых условий:

$$\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(\bar{t})} = \bar{t}\bar{t} + 2C_1 \quad \text{на } L_1 \quad (1.1)$$

$$\varphi_2(t) + \overline{\varphi_2(\bar{t})} = \bar{t}\bar{t} + 2C_2 \quad \text{на } L_2 \quad (1.2)$$

где  $t$  — аффикс точки кривой  $L_1$  или  $L_2$ , а  $C_1$  и  $C_2$  — некоторые постоянные; одна из них выбирается произвольно, а вторая определяется в процессе решения задачи.

Поскольку внутренним контуром является окружность, центр которой совпадает с началом координат, то на ней  $\bar{t} = R^2/t$ .

Учитывая это и принимая  $2C_1 = -R^2$ , приводим граничное условие (1.1) к следующему виду:

$$\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(\bar{t})} = 0 \quad \text{на } L_1 \quad (1.3)$$

§ 2. Приведение задачи к интегральному уравнению Фредгольма  
второго рода

Следуя Д. И. Шерману [2—5], введем на кривой  $L_1$  неизвестную чисто мнимую функцию  $g(t)$  согласно равенству

$$\varphi_1(t) - \overline{\varphi_1(t)} = 2g(t) \quad \text{на } L_1 \quad (2.1)$$

Сложив почленно равенства (1.2) и (2.1), получим

$$\varphi_1(t) = g(t) + \frac{1}{2} t\bar{t} + C_2 \quad (2.2)$$

Введем теперь наряду с имеющейся  $\varphi_1(z)$  новую функцию  $\varphi(z)$ , также регулярную в области  $S$  и определяемую в ней равенством

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{g(t) + \frac{1}{2} t\bar{t}}{t-z} dt - C_2 \quad (2.3)$$

Функция  $\varphi(z)$  в действительности регулярна не только в области  $S$ , но всюду вне (внутреннего) контура  $L_1$  и, кроме того, исчезает на бесконечности, это следует из соблюдавшегося вне  $L_2$  равенства, которое сопутствует (2.3)

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{g(t) + \frac{1}{2} t\bar{t}}{t-z} dt \quad (2.4)$$

Выражение для  $\varphi_1(z)$  в области  $S$ , как следует из (2.3), будет таким:

$$\varphi_1(z) = \varphi(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{g(t) + \frac{1}{2} t\bar{t}}{t-z} dt + C_2 \quad (2.5)$$

На основании теоремы Сохоцкого—Племеля последняя формула при  $z \rightarrow t_0$  на  $L_2$  записывается следующим образом:

$$\varphi_1(t_0) = \varphi(t_0) + \frac{g(t_0)}{2} + \frac{1}{4} t_0 \bar{t}_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{g(t) + \frac{1}{2} t\bar{t}}{t-t_0} dt + C_2 \quad \text{на } L_2 \quad (2.6)$$

Учитывая, что

$$\overline{g(t)} = -g(t) \quad (2.7)$$

выпишем выражение, сопряженное с (2.6). Будем иметь

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_1(t_0)} &= \overline{\varphi(t_0)} - \frac{g(t_0)}{2} + \frac{1}{4} t_0 \bar{t}_0 - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{-g(t) + \frac{1}{2} t\bar{t}}{t-t_0} dt + C_2 \quad \text{на } L_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Вычитая почленно равенство (2.8) из (2.6) и выполнив, учитывая (2.1), необходимые преобразования, получим для определения неизвестной функции уравнение Фредгольма II рода (в нем функция  $\varphi(z)$  предполагается условно известной)

$$g(t_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} g(t) d \ln \frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} - [\bar{\varphi}(t_0) - \overline{\varphi(t_0)}] = \\ = \frac{1}{4\pi i} \int_{L_2} t \bar{t} \left( \frac{dt}{t-t_0} + \frac{d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{t}_0} \right) \quad (2.9)$$

Займемся решением уравнения (2.9) в предположении, что известна функция, конформно отображающая внешность единичного круга на внешность области, ограниченной контуром  $L_2$ ; приближенное выражение для нее имеет вид следующего приведенного полинома [6]:

$$z = A \sum_{k=0}^q a_{kq} z^{-kq} \quad (2.10)$$

где

$$A = C_{-1}; \quad a_{kq} = C_{kq-1} / C_{-1}; \quad s = 2m_q - 1$$

Здесь  $C_{-1}$ ,  $C_{kq-1}$  — коэффициенты отображающего полинома;  $m_q$  — число „узловых“ точек в секторе  $0 < \theta < \frac{\pi}{q}$ ;  $q$  — число осей симметрии.

### § 3. Преобразование выведенного интегрального уравнения в бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

Функцию  $g(t) = g^*(\tau)$ , где  $\tau$  — аффикс точки единичной окружности, отображающей  $L_2$ , назовем ее  $\gamma$ , разложим в комплексный ряд Фурье на окружности  $\gamma$ . Для упрощения примем условно

$$g^*(\tau) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (\tau^k - \tau^{-k}) \quad (3.1)$$

где  $\alpha_0$  — чисто мнимая, а  $\alpha_k$  — действительные величины (ниже станет ясно, что это допущение в последующем не приводит к противоречию).

Для определения неизвестных  $\alpha_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) построим, исходя из интегрального уравнения (2.9), бесконечную систему линейных алгебраических уравнений.

Вычислим, используя (3.1), интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{g(t)}{t-z} dt \quad (3.2)$$

в котором точка  $z$  лежит внутри  $L_2$ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{g(t)}{t-z} dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\alpha_0}{t-z} dt + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\tau^k}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\tau^k}{t-z} dt \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

На основании свойств интегралов типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\alpha_0}{t-z} dt = \alpha_0 \quad (3.4)$$

Для вычисления интегралов, содержащихся под знаком суммы, обратим формулу (2.10) относительно переменной  $\zeta$ ; при этом будем считать, что переменная  $z$  изменяется вне окружности наименьшего радиуса  $\Gamma$ , описанной вокруг  $L_2$ . Это обращение может быть представлено в виде ряда

$$\zeta = \frac{z}{A} \sum_{k=0}^{\infty} C_{qk} \left( \frac{A}{z} \right)^{qk} \quad (3.5)$$

где постоянные  $C_{qk}$  однозначно определяются по заданным величинам. Возведем обе части равенства (3.5) в некую целую положительную степень  $\nu$ . Найдем

$$\zeta^{(\nu)} = \left( \frac{z}{A} \right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} C_{qk}^{(\nu)} \left( \frac{A}{z} \right)^{qk} \quad (3.6)$$

Здесь  $C_{qk}^{(\nu)}$  — некие новые постоянные; для их определения воспользуемся известной рекуррентной формулой [6]

$$C_{qk}^{(\nu)} = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k [(1+\nu)m - k] C_{qm} C_{q(k-m)}^{(\nu)} \quad (3.7)$$

После некоторых вычислений, сходных с выполненными в работах [4] и [6], получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\tau^k}{t-z} dt &= \sum_{n=k-qE(k/q)}^k C_{k-n}^{(k)} \left( \frac{z}{A} \right)^n \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\tau^k}{t-z} dt &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $E\left(\frac{k}{q}\right)$  — целая часть  $\frac{k}{q}$ . Учитывая совместно равенства (3.8) и (3.4), преобразуем соотношение (3.3) к форме

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{g(t)}{t-z} dt = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{n=k-qE(k/q)}^k C_{k-n}^{(k)} \left(\frac{z}{A}\right)^n \quad (3.9)$$

Перейдем теперь к вычислению содержащегося (справа) в уравнении (2.7) (и уже не зависящего от  $g(t)$ ) интеграла. Имеем [6]

$$t\bar{t} = D_0 + \sum_{k=q}^{sq} D_k (\tau^k + \tau^{-k}) \quad (3.10)$$

где

$$D_0 = A^2 \sum_{m=0}^s a_{qm}^2 \quad (3.11)$$

$$D_k = A^2 \sum_{m=0}^{s-k/q} a_{qm} a_{q(m-k/q)}$$

Умножив почленно формулу (3.10) на ядро Коши и затем проинтегрировав по кривой  $L_1$ , найдем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{t\bar{t}}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{D_0}{t-z} dt + \sum_{k=q}^{sq} D_k \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\tau^k}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\tau^{-k}}{t-z} dt \right] \quad (3.12)$$

Рассуждая аналогично тому, как прежде, и учитывая выражение (3.8), получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{t\bar{t}}{t-z} dt = \frac{1}{2} \left[ D_0 + \sum_{k=q}^{sq} D_k \sum_{n=k-qE(k/q)}^k C_{k-n}^{(k)} \left(\frac{z}{A}\right)^n \right] \quad (3.13)$$

Беря во внимание формулы (3.9) и (3.13), преобразуем равенство (2.5) к следующему:

$$\varphi_1(z) = \varphi(z) + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{n=k-qE(k/q)}^k C_{k-n}^{(k)} \left(\frac{z}{A}\right)^n + \frac{1}{2} \left[ D_0 + \sum_{k=q}^{sq} D_k \sum_{n=k-qE(k/q)}^k C_{k-n}^{(k)} \left(\frac{z}{A}\right)^n \right] + C_2 \quad (3.14)$$

Далее подставим это значение  $\varphi_1(z)$  в краевое условие (1.3) и выполним ряд преобразований, в итоге приводящих к равенству, которому удовлетворяет функция  $\varphi(z)$  на внутреннем контуре  $L_1$ .

Оно выглядит так:

$$\begin{aligned} \varphi(t) + \overline{\varphi(t)} = & - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{t}{A} \right)^n + \left( \frac{\bar{t}}{A} \right)^n \right] P_n - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{n=q}^{sq} \left[ \left( \frac{t}{A} \right)^n + \left( \frac{\bar{t}}{A} \right)^n \right] L_n - 2 \sum_{k=q}^{\infty} \alpha_k C_k^{(k)} - \\ & - \sum_{k=q}^{sq} D_k C_k^{(k)} - D_0 - 2C_2 \text{ на } L_1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

где

$$\begin{aligned} P_n &= \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k C_k^{(k)} \\ L_n &= \sum_{k=n}^{sq} D_k C_k^{(k)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из граничного условия (3.15) вытекает, что

$$\varphi(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R}{z} \right)^n \left( \frac{R}{A} \right)^n P_n - \frac{1}{2} \sum_{n=q}^{sq} \left( \frac{R}{z} \right)^n \left( \frac{R}{A} \right)^n L_n \quad (3.17)$$

при обязательном дополнительном соотношении

$$C_2 = - \sum_{k=q}^{\infty} \alpha_k C_k^{(k)} - \frac{1}{2} \sum_{k=q}^{sq} D_k C_k^{(k)} - \frac{1}{2} D_0 \quad (3.18)$$

Преобразуем равенство (3.17) к переменной  $\tau$ . Для этого используем формулу (2.10), предварительно сделав в ней соответствующую замену переменных (то есть, перейдя от точки  $z$  и  $\xi$  соответственно к  $t$  и  $\tau$ ); проделаем дополнительно некоторые вычисления, в результате получим

$$\varphi^*(\tau) = - \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} M_k^{(1)} - \frac{1}{2} \sum_{k=q}^{\infty} \tau^{-k} M_k^{(2)} \quad (3.19)$$

где

$$\begin{aligned} M_k^{(1)} &= \sum_{n=k-qE\left(\frac{k-1}{q}\right)}^k P_n \left( \frac{R}{A} \right)^{2n} \alpha_{k-n}^{(-n)} \\ M_k^{(2)} &= \sum_{n=q}^{sq} L_n \left( \frac{R}{A} \right)^{2n} \alpha_{k-n}^{(-n)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Выпишем теперь равенство, сопряженное с (3.19). При этом

$$\overline{\varphi^n(\tau)} = - \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} M_k^{(1)} - \frac{1}{2} \sum_{k=q}^{\infty} \tau^{-k} M_k^{(2)} \quad (3.21)$$

Вычитая равенства (3.19) и (3.21) почленно одно из другого, находим

$$\varphi^n(\tau) - \overline{\varphi^n(\tau)} = \sum_{k=1}^{\infty} (\tau^{-k} - \tau^{-k}) M_k^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{k=q}^{\infty} (\tau^{-k} - \tau^{-k}) M_k^{(2)} \quad (3.22)$$

Вернемся сейчас к соотношению (3.9). Выполним в нем необходимые преобразования, связанные с переходом в правой части к переменной  $\tau$ . Кроме того, примем во внимание равенство Сохоцкого-Племеля. Тогда найдем

$$\frac{g(t_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g(t)}{t-t_0} dt = \Pi_n^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} \Pi_k^{(3)} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} \Pi_k^{(4)} \quad (3.23)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_n^{(2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n a_n^{(n)} \\ \Pi_k^{(3)} &= \sum_{n=k}^{\infty} P_n a_{n-k}^{(n)} \\ \Pi_k^{(4)} &= \sum_{n=G(k)}^{\infty} P_n a_{n+k}^{(n)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Здесь  $G(k) = \frac{k+sq}{sq-1}$  и  $s$  — наименьшее целое положительное число, которое придает нижнему пределу суммы целое значение. Нижний предел суммирования для значений  $k$ , кратных  $q$ , обозначается через  $G^*(k)$ . При всех значениях  $k$ , кратных  $q$ , соблюдается неравенство  $G^*(k) \leq k$  (в нем знак равенства имеет место лишь при  $k=q$ ).

Далее приведем еще равенство, сопряженное с (3.23), помня, что в нем все коэффициенты — вещественные величины,  $\overline{\tau} = \frac{1}{\tau}$  и  $g(t)$  — чисто мнимая функция. Оно имеет вид

$$-\frac{g(t_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g(t)}{t-t_0} d\overline{t} = \Pi_n^{(3)} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} \Pi_k^{(3)} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} \Pi_k^{(4)} \quad (3.25)$$

Вычитая же формулы (3.23) и (3.25) почленно одну из другой, получим

$$g(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} g(t) d \ln \frac{t-t_0}{t-t_0} = \sum_{k=1}^{\infty} (\tau^k - \tau^{-k})(\Pi_k^{(3)} - \Pi_k^{(4)}) \quad (3.26)$$

Рассуждая аналогично тому, как выше, из выражения (3.13) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi i} \int_{L_2} t \bar{t} \left[ \frac{dt}{t-t_0} + \frac{d\bar{t}}{\bar{t}-t_0} \right] &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\tau^k - \tau^{-k}) (M_k^{(2)} - M_k^{(4)}) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k=2q, 4q}^{\infty} (\tau^k - \tau^{-k}) M_k^{(4)} \end{aligned} \quad (3.27)$$

причем

$$\begin{aligned} M_k^{(3)} &= \sum_{n=G^*(k)}^{2q} L_n a_{n-k}^{(3)} \\ M_k^{(4)} &= \sum_{n=G^*(k)}^{2q} L_n a_{n-k}^{(4)} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Наконец, в интегральном уравнении (2.9) учтем формулы (3.1), (3.22), (3.26), (3.27); проделав затем необходимые преобразования, получим бесконечную систему линейных уравнений для искоемых неизвестных  $\alpha_k$  с индексом, кратным  $q$ . Эта система достаточно проста и выглядит так:

$$4\alpha_k - 2 \sum_{p=q}^{\infty} a_p \Omega_{k,p} = T_k(G^*) - F_k(G^*) \quad (3.29)$$

При этом содержащиеся в ней коэффициенты находятся из равенств

$$\begin{aligned} \Omega_{k,p} &= \Omega_{k,p}^{(1)} + \Omega_{k,p}^{(2)} = \sum_{n=q}^{M(p,k)} \left( \frac{R}{A} \right)^{2n} a_{k-n}^{(p)} C_{p-n}^{(p)} + \\ &+ \sum_{n=G^*(k)}^p C_{p-n}^{(p)} [a_{n+k}^{(n)} - a_{n-k}^{(n)}] \\ T_k(G^*) &= M_k^{(3)} - M_k^{(4)} \\ F_k(G^*) &= M_k^{(2)} - M_k^{(4)} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Omega_{k,p}^{(2)} &= 0 \text{ для } p < G^*(k) \\ M(p,k) &= p \text{ для } p \leq k \\ M(p,k) &= k \text{ для } p > k \end{aligned}$$

Другие  $\alpha_k$  (с индексами, не кратными  $q$ ), как вытекает из (3.29), равны нулю.

Укоротим систему (3.29), сохранив в ней первые  $N$  уравнений. Решив так укороченную систему, можно определить первые  $N$  коэффициентов  $\alpha_k$ . Вообще говоря, входящие в укороченную систему  $\alpha_k$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ) отличны от нуля:  $\alpha_k = 0$  для  $k > Nq$ .

В формуле (2.5) учтем значение функции  $\varphi(z)$ , а также интегралов, входящих в ее правую часть. Будем иметь

$$\varphi_1(z) = \sum_{n=q}^{Nq} \left(\frac{z}{A}\right)^n P_n \left[1 - \left(\frac{R}{z}\right)^{2n}\right] + \frac{1}{2} \sum_{n=q}^{2q} \left(\frac{z}{A}\right)^n L_n \left[1 - \left(\frac{R}{z}\right)^{2n}\right] + \alpha_0 \quad (3.31)$$

#### § 4. Вычисление жесткости при кручении

Для вычисления жесткости при кручении имеем [1]

$$D = \mu \int_{L_1} \int_{L_2} \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x}\right) dx dy \quad (4.1)$$

Применяя формулу Остроградского—Грина, получим

$$D = -\mu \int_{L_1, L_2} [\varphi(x, y)(x dx + y dy) + xy(x dx - y dy)] \quad (4.2)$$

Имея в виду, что

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad \varphi(x, y) = -\frac{\varphi_1(z) - \overline{\varphi_1(z)}}{2i} \quad (4.3)$$

придадим формуле (4.2) следующий вид:

$$D = \mu \left\{ \frac{1}{4i} \int_{L_1, L_2} z \bar{z} dz + \frac{1}{4i} \int_{L_1, L_2} [\varphi_1(z) - \overline{\varphi_1(z)}] d(z\bar{z}) \right\} \quad (4.4)$$

Переходя в ней от переменного  $z$  к  $t$  и беря в расчет, что на  $L_2$  произведе-ние  $t\bar{t} = R^2$ , найдем

$$D = \mu \left\{ \frac{1}{4i} \oint_{L_1} [\varphi_1(t) - \overline{\varphi_1(t)}] d(t\bar{t}) + \frac{1}{4i} \oint_{L_2} t^{-2} t dt + \frac{1}{4i} \oint_{L_1} \bar{t}^{-2} t dt \right\} \quad (4.5)$$

Так как

$$\frac{1}{4i} \oint_{L_1} \bar{t}^{-2} t dt = -\frac{\pi R^2}{2} \quad (4.6)$$

то выражение для жесткости принимает вид

<sup>1</sup> Заметим, что интегрирование по контуру  $L_2$  производится против часовой стрелки, а по контуру  $L_1$  — по часовой стрелке.

$$D = \mu \left\{ \frac{1}{4} \oint_{\Gamma} [\varphi_1^*(z) - \overline{\varphi_1^*(z)}] d[\omega(z) \overline{\omega(z)}] + \right. \\ \left. + \frac{1}{4i} \oint_{\Gamma} \overline{\omega^2(z)} \omega(z) d\omega(z) - \frac{\pi R^4}{2} \right\} \quad (4.7)$$

Здесь интегрирование производится против часовой стрелки.

С другой стороны, обратившись к формуле (3.31) и выполняя очевидные вычисления, придем к соотношению, справедливому на окружности  $\gamma$  (отображающей кривую  $L_*$ )

$$\varphi_1^*(z) - \overline{\varphi_1^*(z)} = \sum_{k=p}^{P_q(N, s)} (z^k - \overline{z^{-k}}) \times \\ \times \left[ E_k(G^*) + \frac{1}{2} T_k(G^*) \right] - \frac{1}{2} \sum_{k=2s_q+1}^{s_q(s_q-1)} (z^k - \overline{z^{-k}}) M_k^{(4)} + 2\alpha_0 \quad (4.8)$$

где введенные величины

$$E_k(G^*) = M_k^{(1)} + \frac{1}{2} M_k^{(2)} + \Pi_k^{(3)} - \Pi_k^{(4)} \quad (4.9)$$

причем верхние пределы суммирования в первой сумме таковы:

$$P_q(N, s) = Nq, \text{ если } N \geq s \\ P_q(N, s) = Sq, \text{ если } N < s \quad (4.10)$$

Взяв во внимание формулы (2.10) и (4.8), придадим равенству (4.7) после несложных промежуточных преобразований более удобную форму.

Окончательное выражение для жесткости при кручении примет вид

$$D = -\mu \pi \left\{ \frac{R^4}{2} + \frac{A^4}{4} \sum_{k=0}^{2s} (qk - 2) [\alpha_{qk}^{(2)}]^2 + \right. \\ \left. + \sum_{k=q}^{s_q} k D_k \left[ E_k(G^*) + \frac{1}{2} T_k(G^*) \right] \right\} \quad (4.11)$$

### § 5. Вычисление касательных напряжений при кручении

Согласно работе [1] имеем

$$X_s - iY_s = i\mu \frac{M}{D} [\varphi'(z) - \overline{z}] \quad (5.1)$$

Воспользовавшись формулой (3.31), вычислим производную функцию  $\varphi_1(z)$ . Найдем

$$\varphi_1'(z) = \sum_{n=q}^{P_q(N, s)} \frac{n}{A^n} (z^{n-1} + R^{2n} z^{-(n+1)}) \left( P_n + \frac{1}{2} L_n \right) \quad (5.2)$$

Переходя здесь к полярным координатам  $z = re^{i\varphi}$ , получим

$$\varphi_1'(z) = \sum_{n=q}^{P_q(N, s)} \left( P_n + \frac{1}{2} L_n \right) \frac{n}{A^n} \left\{ \left[ r^{n-1} \cos(n-1)\varphi + \frac{R^{2n}}{r^{n+1}} \cos(n+1)\varphi \right] + i \left[ r^{n-1} \sin(n-1)\varphi - \frac{R^{2n}}{r^{n+1}} \sin(n+1)\varphi \right] \right\} \quad (5.3)$$

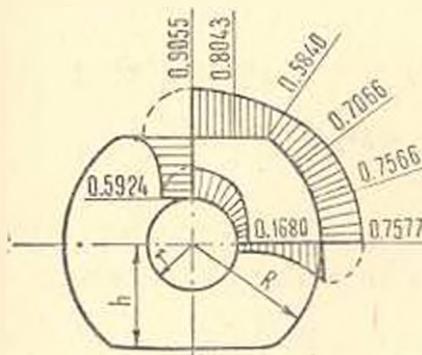
Подставляя значение  $\varphi_1'(z)$  из формулы (5.3) в равенство (5.1) и отделяя в нем действительную и мнимую части, приходим к требуемым формулам для компонент касательных напряжений

$$X_z = -\mu \frac{M}{D} \left\{ r \sin \varphi + \sum_{n=q}^{P_q(N, s)} \frac{n}{A^n} \left( P_n + \frac{1}{2} L_n \right) \times \right. \\ \left. \times \left[ r^{n-1} \sin(n-1)\varphi - \frac{R^{2n}}{r^{n+1}} \sin(n+1)\varphi \right] \right\} \quad (5.4)$$

$$Y_z = -\mu \frac{M}{D} \left\{ -r \cos \varphi + \sum_{n=q}^{P_q(N, s)} \frac{n}{A^n} \times \right. \\ \left. \times \left[ r^{n-1} \cos(n-1)\varphi + \frac{R^{2n}}{r^{n+1}} \cos(n+1)\varphi \right] \right\} \quad (5.5)$$

здесь  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\varphi = \arctg \frac{x}{y}$ .

По формулам (5.4) и (5.5) могут быть вычислены составляющие напряжений в любой точке области, занимаемой поперечным сечением бруса.



Фиг. 1.

Вектор напряжения в точках контура области направлен по касательной к нему, и его величина дается формулой

$$T = \sqrt{X_z^2 + Y_z^2} \quad (5.6)$$

Для решения задач кручения сплошных и полых призматических тел составлена программа на языке АЛГОЛ-60.

В качестве примера рассматривается кручение двувальцового вала с центральным круговым отверстием.

Геометрические параметры поперечного сечения вала

$$\frac{r}{R} = 0.4, \quad \frac{h}{R} = 0.7$$

Коэффициенты отображающего полинома при указанных геометрических размерах сечения содержатся в работе [6].

Жесткость при кручении  $D/\mu R^3 = 1.156$ .

Эпюра касательных напряжений, приведенных к единичному крутящему моменту ( $M = 1 \text{ кг} \cdot \text{см}$ ), представлена на фиг. 1.

Автор благодарит Д. И. Шермана за внимание, проявленное к настоящей работе.

Ждановский металлургический институт

Поступила 20 VI 1977

ՅՈՒ. Մ. ՄԱՄԵԴՈՎ

ՍԻՄՄԵՏՐԻԱՅԻ ԱՌՈՆՑՔՆԵՐ ՈՒՆՆՑՈՂ ԵՐԿԿԱՊԱՆԻ ՀԱՅՆԱԿԱՆ  
ԿՏՐՎԱՆՔԻ ՋՈՂԻ ՈՒՐՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո մ

Տրվում է բարդ ձևի երկկապանի լայնական կտրվածքով սնամեջ սյրիգ-մասիկ ձողերի սրոշ դասի խնդիրների լուծումը:

Փնտրվող ոլորման կոմպլեքս ֆունկցիան կառուցվում է Գ. Ի. Շերմանի եղանակով:

Ինժեներական կոնկրետ խնդիրների լուծման համար Ալգոլ—60-ի լեզվով կազմվել է ծրագիր:

Ինքվում է թվային օրինակ:

TORSION OF THE BEAM OF DOUBLY-CONNECTED  
CROSS-SECTION HAVING SYMMETRY AXES

Yu. M. MAMEDOV

S u m m a r y

The paper deals with the solution of a number of problems on torsion of hollow prismatic beams of doubly-connected cross-section of an intricate shape, the region occupied by the beam cross-section possessing symmetry axes.

The complex function of torsion sought for is found in terms of D. I. Sherman's method and represented as a transformed polynomial.

For solving particular engineering problems a program in the Algol-60 language is worked out providing a simple and universal method for numerical analysis of problems on torsion of solid and prismatic bodies with a specified form of cross-section.

A numerical example is given.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Михелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966, стр. 496—504.
2. Шерман Д. И. Об одном методе решения некоторых задач теории упругости для двусвязанных областей. Докл. АН СССР, 1947, т. V, № 8.
3. Шерман Д. И. Об одной задаче кручения. Докл. АН СССР, 1948, т. XIII, № 5.
4. Шерман Д. И. Про один метод розв'язання деяких задач кручення згнутої плоскої теорії пружності для неоднотіпних областей. Прикл. механіка. В-во АН УССР, 1957, т. III, в. 4.
5. Шерман Д. И. Про напружений стан скручуваного квадратного бруса з симетричною круговою поперечною. Прикл. механіка. В-во АН УССР, 1958, т. IV, в. 3.
6. Обладовский Б. А., Урбанская В. С., Урбанский Р. Е. Кручение некруглых валов. М., «Высшая школа», 1974, стр. 112—168.

В. Г. АВАНЯН

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ НА ЗАДАННОМ ИНТЕРВАЛЕ  
 ВРЕМЕНИ (НЕАВТОНОМНАЯ СИСТЕМА)

1. В работе рассматривается задача об устойчивости неавтономной системы в следующей постановке [1].

*Определение 1.1.* Систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) \tag{1.1}$$

где

$$X(t, x) \in C_{t,x}^{(0,1)} (a \leq t < \infty, \|x\| < L < \infty); \quad X(t, 0) = 0$$

назовем устойчивой, если в заданном классе  $K_{\Delta}^{\omega} \ni G(t)$  — матрица такая, что при достаточно малом  $\rho > 0$  любое решение  $x(t)$ , начальное значение  $x(t_0) = x_0$  которого удовлетворяет условию

$$(G^{-1}(t_0) x_0, G^{-1}(t_0) x_0) \leq \rho^2 \tag{1.2}$$

для всех  $t > t_0$  удовлетворяет условию

$$(G^{-1}(t) x(t), G^{-1}(t) x(t)) \leq \rho^2 \tag{1.3}$$

Под классом  $K_{\Delta}^{\omega}$  подразумевается совокупность  $n \times n$ -матриц  $G(t) = (G_1(t), \dots, G_n(t))$  над полем комплексных чисел, удовлетворяющих на  $\Delta = [t_0, \infty)$  условиям: а)  $|\det G(t)| \neq 0$ ; б) эрмитова норма столбцов  $G_1(t), \dots, G_n(t)$  совпадает с заданной положительной функцией  $\omega(t) : |\bar{G}_j(t)| = \omega(t) (j = 1, \dots, n)$ .

*Определение 1.2.* Система дифференциальных уравнений (1.1) называется асимптотически устойчивой на  $(a, \infty)$ , если: а) она устойчива на  $[a, \infty)$ ; б)  $\forall t_0 \in (a, \infty) \exists \rho(t_0) > 0$ , такое, что все ее решения  $x(t)$ , удовлетворяющие условию (1.2), обладают свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$$

*Определение 1.3.* Систему (1.1) назовем неустойчивой на  $(a, \infty)$ , если  $\forall G(t) \in K_{\Delta}^{\omega}, \rho > 0$ , и для некоторого  $t_0 \in (a, \infty) \exists x_1(t)$  решение (хотя бы одно) и момент  $t_1 > t_0$  такие, что

$$(G^{-1}(t_0) x_1(t_0), G^{-1}(t_0) x_1(t_0)) \leq \rho^2$$

и

$$(G^{-1}(t_1) x_1(t_1), G^{-1}(t_1) x_1(t_1)) > \rho^2$$

Ниже приводятся некоторые условия устойчивости, неустойчивости и асимптотической устойчивости неавтономных систем в данной постановке, когда  $\omega(t) = \text{const}$ .

2. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (2.1)$$

где  $A(t) \in C[a, \infty)$  — ограниченная  $n \times n$ -матрица, такая, что каждое решение системы (2.1) ограничено на  $[a, \infty)$ . Построим матрицу  $K(t) = X(t)CZ(t)$ , где  $X(t)$  — единственное решение матричного уравнения

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X \quad X(t_0) = E$$

( $E$  — единичная матрица),  $C = (c_1, \dots, c_n)$  — постоянная  $n \times n$ -матрица,

$$Z(t) = \omega \text{diag} \left( \frac{e^{\theta_1(t)}}{\|X_{c_1}\|}, \dots, \frac{e^{\theta_n(t)}}{\|X_{c_n}\|} \right)$$

непрерывно дифференцируемая на  $[a, \infty)$  диагональная матрица,  $\theta_1(t), \dots, \theta_n(t)$  — непрерывно дифференцируемые на  $[a, \infty)$  вещественные скалярные функции). При этом столбцы  $K_1(t), \dots, K_n(t)$  матрицы  $K(t)$  удовлетворяют условию  $\|K_i(t)\| = \omega$  на  $[a, \infty)$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Если обозначить через  $\Lambda(t) = -Z^{-1} \frac{dZ}{dt}$ , то преобразование

$$x = K(t)y \quad (2.2)$$

приводит уравнение (2.1) к диагональному виду

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda(t)y \quad (\Lambda(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))) \quad (2.3)$$

В соответствии с (2.2) и (2.3) имеем

$$x(t) = K(t) \exp \int_{t_0}^t \Lambda(\tau) d\tau y_0 \quad (y_0 = y(t_0)) \quad (2.4)$$

Построим пучок решений уравнения (2.1), берущих начало внутри и на поверхности эллипсоида

$$(H_0^{-1}x_0, H_0^{-1}x_0) \leq \rho^2 \quad (2.5)$$

где  $H_0$  — постоянная невырожденная  $n \times n$ -матрица, столбцы которой имеют эрмитову норму, равную  $\omega$ .

Совокупность вектор-функций (2.4), ограниченная условием

$$(y, y_0) \leq \rho^2 \quad (2.6)$$

и определяет вышеуказанный пучок решений уравнения (2.1).

Подставляя значение  $y_0$  из (2.4) в (2.6), получим

$$x^*(t) B^{-1}(t) x(t) \leq \rho^2 \quad (2.7)$$

где

$$B(t) = K(t) \exp \left[ 2 \int_{t_0}^t \operatorname{Re} \lambda(\tau) d\tau \right] K^*(t)$$

Матрицу  $B(t)$  представим в виде [2]:

$$H H^* = B \quad (2.8)$$

где все столбцы  $h_1(t), \dots, h_n(t)$  матрицы  $H(t)$  имеют одну и ту же эрмитову норму  $\forall t \in [t_0, \infty)$ .

Полагая, что  $|h_j(t)| = \omega_j(t)$  ( $j = 1, \dots, n$ ), получим

$$\omega_0^2(t) = \frac{m^2}{n} \sum_{s=1}^n \exp [2\mu_s(t)(t - t_0)] \quad (2.9)$$

Здесь

$$\mu_s(t) = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} \lambda_s d\tau$$

Легко видеть, что  $\omega_0(t_0) = m$ ,  $H(t_0) = K(t_0) = H_0$ .

Таким образом, вышеуказанный пучок решений уравнения (2.1) представляется соотношением

$$(H^{-1}(t) x(t), H^{-1}(t) x(t)) \leq \rho^2 \quad (t \in [t_0, \infty)) \quad (2.10)$$

Из вышеизложенного вытекает

Теорема 2.1. Если для всех  $t \geq t_0$

$$\frac{1}{m} \sum_{s=1}^n \exp [2\mu_s(t)(t - t_0)] < 1 \quad (2.11)$$

то система (2.1) устойчива.

Доказательство. Пусть для всех  $t > t_0$  выполняется соотношение (2.11). Рассмотрим  $\rho$ -трубку

$$(G^{-1}(t) x, G^{-1}(t) x) \leq \rho^2 \quad (2.12)$$

где  $G(t) = \frac{m}{\omega_0(t)} H(t)$ , а  $H(t)$  — матрица, определенная на (2.8). Оче-

видно  $G(t) \in K_{\omega}$ . Пусть  $x^0(t) \neq 0$  — какое-нибудь решение уравнения (2.1), принадлежащее пучку (2.10). Тогда на  $[t_0, \infty)$  имеем, что

$$(G^{-1}(t)x^0(t), G^{-1}(t)x^0(t)) \leq \frac{\omega_0^2(t)}{\omega^2} \rho^2$$

Отсюда, так как в силу (2.11) из (2.9) следует неравенство  $\omega_0(t) \leq \omega$  для всех  $t > t_0$ , то на  $[t_0, \infty)$  выполняется условие

$$(G^{-1}(t)x^0(t), G^{-1}(t)x^0(t)) \leq \rho^2$$

а это означает, что решение  $x^0(t)$  для всех  $t > t_0$  не покидает  $\rho_{\omega}$ -трубку (2.12), то есть система (2.1) устойчива.

**Теорема 2.2.** Если в какой-нибудь точке  $t_1 \in (t_0, \infty)$  выполняется неравенство

$$\frac{1}{n} \sum_{s=1}^n \exp [2\mu_s(t_1)(t_1 - t_0)] > 1 \quad (2.13)$$

то система (2.1) неустойчива.

**Доказательство.** Пусть в некоторой точке  $t_1 \in (t_0, \infty)$  выполняется соотношение (2.13), тогда из (2.9) следует, что  $\omega_0(t_1) > \omega$ , а при этом [3] какую бы  $\rho_{\omega}$ -трубку (2.12) ни взяли бы, всегда вне этой трубки в момент  $t_1$  окажутся некоторые из тех решений  $x^0(t)$  системы (2.1), которые в начальный момент  $t_0$  находились внутри или на поверхности эллипсоида, то есть

$$(G^{-1}(t_0)x^0(t_0), G^{-1}(t_0)x^0(t_0)) \leq \rho^2$$

а в  $t_1$

$$(G^{-1}(t_1)x^0(t_1), G^{-1}(t_1)x^0(t_1)) > \rho^2$$

что и доказывает неустойчивость системы (2.1).

**Теорема 2.3.** Если на  $[t_0, \infty)$

$$\mu(t) \leq -b < 0 \quad (\mu(t) = \max \mu_s) \quad (2.14)$$

где  $b$  — положительная постоянная, то система (2.1) асимптотически устойчива.

**Доказательство.** Так как при (2.14) выполняется неравенство (2.11), то система (2.1) устойчива.

Пусть теперь  $x^0(t) \neq 0$  — произвольное решение уравнения (2.1) из пучка (2.10), которое удовлетворяет неравенству

$$(G^{-1}(t_0)x^0(t_0), G^{-1}(t_0)x^0(t_0)) \leq \rho^2$$

где  $\bar{G}(t)$  — некоторая матрица из класса  $K_{\omega}$ .

Докажем, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x^0(t)\| = 0 \quad (2.15)$$

В самом деле, из (2.4) имеем, что

$$\|x^0(t)\| \leq \|K(t)\| \cdot \left\| \exp \int_{t_0}^t \Lambda(\tau) d\tau \right\| \cdot \|y_0\| \quad (2.16)$$

где

$$\|K(t)\| = \omega \sqrt{n}$$

$$\left\| \exp \int_{t_0}^t \Lambda(\tau) d\tau \right\| \leq \sqrt{n} \exp[-b(t-t_0)]$$

В силу этого из (2.16) для всех  $t \geq t_0$  имеем:

$$\|x^0(t)\| \leq \omega n \exp[-b(t-t_0)] \|y_0\|$$

откуда и следует (2.15).

**Теорема 2.4.** Если на  $[a, \infty)$  выполняются неравенства

$$\left| \exp \int_a^t \operatorname{Sp} A(\tau) d\tau \right| > m_1 > 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{1}{t - a_i} \int_a^t \mu_i(\tau) d\tau \leq -b < 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.18)$$

где  $\mu_i(t)$  — все собственные значения эрмитово-симметризованной матрицы

$$A^H(t) = \frac{1}{2} [A(t) + A^*(t)]$$

(матрица  $A^*(t)$  — эрмитово-сопряженная матрица  $A(t)$ ), то система (2.1) асимптотически устойчива.

**Доказательство.** В (2.2), где  $K(t) = X(t)CZ(t)$ , выберем

$$Z(t) = \omega \operatorname{diag} \left( \frac{1}{\|Xc_1\|}, \dots, \frac{1}{\|Xc_n\|} \right)$$

Тогда  $\lambda_{\sigma}(t)$  — элемент диагональной матрицы  $\Lambda$  в (2.3) определяется по формуле

$$\lambda_{\sigma}(t) = \frac{d}{dt} \ln \|Xc_{\sigma}\| \quad (\sigma = 1, \dots, n) \quad (2.19)$$

В соответствии с (2.2) и (2.3) имеем, что

$$x(t) = K(t) \exp \int_a^t \Lambda(\tau) d\tau y(a) \quad (2.20)$$

Матрицы  $X^{-1}$  и  $Z^{-1}$  существуют на  $[a, \infty)$ .

Существование первого следует из формулы Остроградского—Лиувилля в силу (2.17), второго — из ограниченности на  $[a, \infty)$  каждого решения системы (2.1).

Значит, на  $[a, \infty)$  матрица  $K^{-1}(t)$  также существует, а функция

$$V(t, x) = (K^{-1}(t)x, K^{-1}(t)x) = \|y\|^2$$

является положительно определенной. Ее производная по  $t$  представляется в виде

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{\sigma=1}^n 2\lambda_{\sigma} |y_{\sigma}|^2 \quad (2.21)$$

( $y_{\sigma}$  — элемент столбцовой матрицы  $y$ ).

Интегрируя (2.21) вдоль решения уравнения (2.1), получим

$$V(t, x) = V(a, x(a)) + \int_a^t \sum_{\sigma=1}^n 2\lambda_{\sigma} |y_{\sigma}|^2 dt$$

Из уравнения (2.3) имеем, что

$$\frac{dy_{\sigma}}{dt} = \lambda_{\sigma} y_{\sigma} \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

откуда получим

$$|y_{\sigma}|^2 = \exp \int_a^t 2\lambda_{\sigma} d\tau |y_{\sigma}(a)|^2$$

Поэтому

$$V(t, x) = V(a, x(a)) \left[ 1 + \sum_{\sigma=1}^n \left( \exp \int_a^t 2\lambda_{\sigma} d\tau - 1 \right) \frac{|y_{\sigma}(a)|^2}{\|y(a)\|^2} \right] \quad (2.22)$$

Из (2.19)  $\forall t \in [a, \infty)$  следует неравенство

$$\mu_{\min}^{\sigma}(t) \leq \lambda_{\sigma}(t) \leq \mu_{\max}^{\sigma}(t) \quad (\sigma = 1, \dots, n) \quad (2.23)$$

где  $\mu_{\min}^{\sigma}(t)$  и  $\mu_{\max}^{\sigma}(t)$  — соответственно минимальные и максимальные собственные значения матрицы  $A''(t)$ .

На основании условия (2.18) из (2.23) следует, что на  $[a, \infty)$  выполняется неравенство

$$\frac{1}{t-a} \int_a^t \lambda_\nu(z) dz \leq -b < 0 \quad (\nu = 1, \dots, n) \quad (2.24)$$

в силу которого из (2.22) следует, что на  $[a, \infty)$  выполняется неравенство  $V(t, x(t)) \leq V(a, x(a))$ , то есть система (2.1) устойчива.

Остается доказать, что любое решение  $x(t)$  системы (2.1), для которого  $V(t_0, x(t_0)) \leq \rho^2$ , обладает следующим свойством:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0 \quad (2.25)$$

Из (2.20) имеем, что

$$\|x(t)\| \leq \sqrt[n]{V} \|y(a)\| \left( \sum_{\nu=1}^n \exp \int_a^t 2\lambda_\nu dz \right)^{\frac{1}{2}}$$

Отсюда в силу неравенства (2.24) следует (2.25). Теорема доказана.

3. Рассмотрим действительную дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varphi(t, x) \quad (3.1)$$

где  $A$  — постоянная  $n \times n$ -матрица, а

$$\varphi(t, x) \in C(0 \leq t < \infty, \|x\| < L)$$

(для простоты принимаем  $t_0 = 0$ ), причем

$$\frac{\varphi(t, x)}{\|x\|} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

( $\|x\|$  — евклидова норма вектора  $x$ ). Очевидно, что система (3.1) допускает тривиальное решение.

**Теорема 3.1.** Если все собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  матрицы  $A$  имеют отрицательные вещественные части

$$\operatorname{Re} \lambda_j < 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (3.3)$$

то система (3.1) асимптотически устойчива на  $[0, \infty)$ .

**Доказательство.** Пусть выполняется неравенство (3.3), тогда нетрудно показать, что уравнение первого приближения

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (3.4)$$

системы (3.1) асимптотически устойчиво на  $[0, \infty)$  и существует постоянная матрица  $G \in K_n$  такая, что производная по  $t$  формы

$$V(x) = (G^{-1}x, G^{-1}x) = (Hx, x) \quad (H = G^{-1}G^{-1}) \quad (3.5)$$

составленная в силу системы (3.4), является отрицательно определенной эрмитовой формой, то есть

$$\dot{V}(x) = ((A^*H + HA)x, x) < 0 \text{ при } |x| \neq 0$$

Составляя производную по  $t$  формы (3.5) в силу системы (3.1), имеем

$$\dot{V}(x, t) = (Bx, x) + (Hx, \varphi) + (H\varphi, x) \quad (3.6)$$

где постоянная матрица  $B = A^*H + HA$  — отрицательно определенная.

Из (3.2) следует неравенство  $\|\varphi(t, x)\| \leq \varepsilon \|x\|$  для достаточно малых  $\|x\|: \|x\| < l_\varepsilon < L$ , где  $\varepsilon$  произвольно мало.

Поэтому из (3.6) имеем неравенство

$$\dot{V}(t, x) < [l_{\max}(B) + 2\varepsilon \|H\|] \|x\|^2$$

откуда следует, что  $\dot{V}(t, x) < 0$  для всех  $t > 0$ , если только выполняются неравенства

$$0 < \varepsilon < -l_{\max}(B)/2\|H\| \text{ и } 0 < \|x\| < l_\varepsilon$$

Из (3.6) имеем еще  $\dot{V}(t, x)|_{x=0} = 0$ .

Таким образом, для системы (3.1) в некоторой окрестности  $O$  существует положительно определенная эрмитова форма  $V(x)$ , явно независимая от  $t$  и допускающая отрицательно определенную производную по  $t$  в силу второй системы

$$\dot{V}(t, x(t)) < 0 \text{ при } |x(t)| \neq 0 \quad (0 \leq t < \infty) \quad (3.7)$$

Значит система (3.1) устойчива на  $[0, \infty)$  [2].

Теперь покажем, что если  $\|x(0)\| \leq l_\varepsilon < L$ , то при выполнении неравенства  $\dot{V}(x(0)) < \eta^2$  выполняется равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0 \quad (3.8)$$

то есть система (3.1) асимптотически устойчива.

В самом деле, по неравенству (3.7) функция  $v(t) = V(x(t))$  монотонно убывающая и поэтому она при  $t \rightarrow \infty$  будет монотонно стремиться к некоторому пределу  $\alpha$ , оставаясь все время больше этого предела, так что для всех  $t > 0$

$$V(x(t)) > \alpha \quad (3.9)$$

Докажем, что  $\alpha = 0$ . Пусть  $\alpha \neq 0$ , следовательно,  $\alpha > 0$ . Так как  $V(x(t))$  есть функция непрерывная, то из (3.9) вытекает, что решение  $x(t)$  удовлетворяет неравенству

$$\|x(t)\| > a > 0 \text{ на } [0, \infty) \quad (3.10)$$

В силу (3.10) получим, что  $\dot{V}(t, x(t)) \leq -b < 0$  для всех  $t > 0$ . Следовательно, при всех  $t > 0$  будет выполняться неравенство  $V(x(t)) < V(x(0)) - bt$ , что, очевидно, невозможно.

Таким образом, мы приходим к заключению, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = 0$$

Откуда, вследствие знакоопределенности  $V(x(t))$ , вытекает (3.8), что и доказывает теорему.

**Теорема 3.2.** Если хотя бы одно собственное значение матрицы  $A$  обладает положительной вещественной частью, то система (3.1) неустойчива.

**Доказательство.** Система (3.1) не может быть устойчивой, так как легко показать, что при ограниченном  $\omega(t)$  из устойчивости в смысле определения 1.1 следовала бы устойчивость по Ляпунову, а по условиям теоремы система (3.1) неустойчива по Ляпунову [4]. Теорема доказана.

4. Ниже доказывается теорема об устойчивости векторно-матричного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = U(t)x + h(t, x) \quad (4.1)$$

где  $U(t)$  —  $n \times n$ -матрица, непрерывная и ограниченная по норме ( $\|U(t)\| \leq U_0 < \infty$ , где  $U_0 > 0$  — некоторое число) на  $[a, \infty)$  и такая, что каждое решение  $x(t)$  системы

$$\frac{dx}{dt} = U(t)x \quad (4.2)$$

ограничено на  $[a, \infty)$ ;  $h(t, x)$  —  $n \times 1$ -матрица, элементы которой — нелинейные функции отклонений  $x$ , таковы, что равномерно по  $t$  на  $[a, \infty)$  выполняется соотношение

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{h(t, x)}{\|x\|} = 0 \quad (4.3)$$

**Теорема 4.1.** Если на  $[t_0, \infty)$

$$\left| \exp \int_{t_0}^t \text{Sp } U(\tau) d\tau \right| > m_1 > 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \mu_i(\tau) d\tau \leq -b < 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.5)$$

где  $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t)$  — собственные значения матрицы

$$U''(t) = \frac{1}{2} [U^*(t) + U(t)]$$

то система (4.1) устойчива.

**Доказательство.** Пусть преобразование  $x = K(t)y$  приводит уравнение (4.2) к диагональному виду

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda(t)y \quad (4.6)$$

Тогда, как следует из [1],

$$K(t) = X(t)CZ(t) \quad (4.7)$$

где столбцы  $K_s(t)$  матрицы  $K(t)$  удовлетворяют условию

$$\|K_s(t)\| = \omega \quad \text{на } [t_0, \infty) \quad (s = 1, \dots, n) \quad (4.8)$$

а матрица  $\Lambda(t)$  имеет вид

$$\Lambda(t) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \text{причем } \lambda_s = \frac{d}{dt} \ln \|K_s(t)\| \quad (4.9)$$

В (4.7) матрицы  $X(t)$ ,  $C$ ,  $Z(t)$  построены таким же образом, как при доказательстве теоремы 2.4.

Из (4.8) следует, что  $K(t) \in K_s$ . Следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что все решения  $x(t) \neq 0$  уравнения (4.1), удовлетворяющие условию

$$(K^{-1}(t_0)x(t_0), K^{-1}(t_0)x(t_0)) \leq \rho^2 \quad (a \leq t_0 < \infty) \quad (4.10)$$

для всех  $t > t_0$ , удовлетворяют условию

$$(K^{-1}(t)x(t), K^{-1}(t)x(t)) \leq \rho^2 \quad (4.11)$$

Преобразование  $x = K(t)y$  приводит уравнение (4.1) к виду

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda(t)y + M(t)h(t, Ky) \quad (M = K^{-1}) \quad (4.12)$$

Производная по  $t$  положительно определенной эрмитовой формы

$$V(t, x) = (K^{-1}(t)x, K^{-1}(t)x) = |y|^2$$

вычисленная в силу (4.12), представляется в виде

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^n 2i_s |y_s|^2 + 2 \text{Re}(y^* M h) \quad (4.13)$$

где  $y_s$  ( $s = 1, \dots, n$ ) — элементы столбцовой матрицы  $y$ .

Интегрируя (4.13), получим

$$V(t, x) = V(t_0, x_0) \left[ 1 + \sum_{s=1}^n \left( \exp \int_{t_0}^t 2\lambda_s d\tau - 1 \right) \frac{|y_s(t_0)|^2}{\|y(t_0)\|^2} + (t - t_0) \psi(t, y) \right] \quad (4.14)$$

где

$$\psi(t, y) = \frac{2}{(t - t_0) \|y(t_0)\|^2} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} \left[ y^* \exp \left( \int_{t_0}^t 2\Lambda(z) d\tau \right) M h \right] dt'$$

Покажем, что на  $[t_0, \infty)$  равномерно по  $t$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \psi(t, y) = 0 \quad (4.15)$$

Действительно,

$$|\psi(t, y)| \leq \frac{2}{t - t_0} \int_{t_0}^t \left( \sum_{s=1}^n \exp \int_{t_0}^t 4\lambda_s d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \|M\| \frac{\|y\|^2}{\|y_0\|^2} dt' \operatorname{Sup}_{|x|=|y|} \frac{\|h\|}{\|y\|} \quad (4.16)$$

С другой стороны,

$$\frac{\|y\|^2}{\|y_0\|^2} \leq \exp \left[ \int_{t_0}^t \sum_{s=1}^n 2\lambda_s dt' + \int_{t_0}^t 2 \|M\| \frac{\|h\|}{\|y\|} dt' \right]$$

В силу (4.8) имеем

$$\|K(t)\| = \sqrt{n} u_0 < \infty \quad \text{на } [t_0, \infty) \quad (4.17)$$

Для матрицы  $K(t)$  имеем

$$\|K(t)\| = \sqrt{n} u_0 (\|U\| + \|\Lambda\|)$$

Из (4.9) имеем

$$\mu_{\min}^i(t) \leq \lambda_i(t) \leq \mu_{\max}^i(t) \quad (t_0 \leq t < \infty; i = 1, \dots, n) \quad (4.18)$$

где  $\mu_{\min}^i(t)$  и  $\mu_{\max}^i(t)$  — соответственно минимальные и максимальные собственные значения матрицы  $U^{ii}(t)$ . Но так как  $\lambda_i(t) \leq \|U^{ii}(t)\| \leq \|U(t)\|$  на  $[t_0, \infty)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), то из (4.9) в силу (4.18) получаем неравенство  $\|\Lambda(t)\| \leq \sqrt{n} u_0$  на  $[t_0, \infty)$ . Поэтому в силу (4.18) имеем, что

$$\|K(t)\| \leq (\sqrt{n} + n) u_0 < \infty \quad \text{на } [t_0, \infty) \quad (4.19)$$

На основании (4.4) имеем  $|\det X(t)| \geq m_1 > 0$  на  $[a, \infty)$ . Для постоянной невырожденной матрицы  $C: |\det C| \geq m_2 > 0$ , а так как каждое решение системы (4.2) ограничено на  $[a, \infty)$ , то  $|\det Z(t)| \geq m_3 > 0$  на  $[a, \infty)$ . Следовательно, на  $[a, \infty)$

$$|\det K(t)| > m > 0 \quad (m = m_1 m_2 m_3) \quad (4.20)$$

Из (4.17), (4.19) и (4.20) следует, что в (4.7)  $K(t)$  есть матрица Ляпунова. Но так как  $M(t) = K^{-1}(t)$  также есть матрица Ляпунова, следовательно, она ограничена по норме на  $[a, \infty)$ . Кроме того, в силу (4.3) равномерно по  $t$  на  $[a, \infty)$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{h(t, Ky)}{\|y\|} = 0$$

В этих условиях  $\|y\|/\|y_0\|$  — ограниченная величина, и так как ограничены и все другие множители подинтегрального выражения в (4.16), то

$$\int_{t_0}^t \left( \sum_{i=1}^n \exp \int_{t_0}^{\tau} 4\lambda_i d\tau \right)^{\frac{1}{2}} |M| \frac{|y|^2}{\|y_0\|^2} dt' < \frac{r}{2} (t - t_0)$$

где  $r$  — некоторая положительная постоянная.

Итак,

$$|\psi(t, y)| \leq r \sup_{[a, \infty)} \frac{|h|}{\|y\|}$$

откуда и следует (4.15).

На основании (4.5) и (4.18) следует, что на  $[a, \infty)$

$$\frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \lambda_i(\tau) d\tau \leq -b < 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

Тогда существует такое  $\delta > 0$ , что

$$\sum_i \left( \exp \int_{t_0}^t 2\lambda_i d\tau - 1 \right) \frac{|y_0|^2}{\|y_0\|^2} \leq -2\delta (t - t_0)$$

С другой стороны, учитывая (4.15), можно указать такое  $\rho_0 > 0$ , что для всех  $y$ , удовлетворяющих неравенству  $\|y\| < \rho_0$ , будем иметь  $|\psi(t, y)| < 2\delta$ , и тогда согласно (4.14)  $V(t, x) \leq V(t_0, x(t_0))$  на  $[t_0, \infty)$ , а это означает, что любое решение  $x(t)$  уравнения (4.1), удовлетворяющее условию (4.10), где  $0 < \rho \leq \rho_0$ , для всех  $t > t_0$  удовлетворяет неравенству (4.11).

Теорема доказана.

В заключение автор приносит глубокую благодарность своему научному руководителю К. А. Абгаряну за постановку задачи и за постоянное внимание к работе.

Վ. Տ. ԱՎԱՆՅԱՆ

ԺԱՄԱՆԱԿԻ ՏՎԱՆ ԻՆՏԵՐՎԱԼԻՄ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՏԻԹՅԱՆ  
ՎԵՐՈՒԹՅԱՆ (ՈՋ ԱՎՏՈՆՈՒՄ ՄԻՍՏԵՄԵՐ)

Ա մ փ ո փ ու մ

Ուսումնասիրվում է ժամանակի անվերջ ինտերվալում ոչ ավտոնոմ սխառնանքի կայունությունը ըստ Կ. Ա. Աբգարյանի դրվածքի, որը կիրառելի է նաև ժամանակի վերջավոր ինտերվալի համար որոշ լրացումից հետո:

Առաջուցվում են թևորեմներ՝ զծային համասեռ սխառնմի կայունության, անկայունության և ասիմպտոտորեն կայունության համար, բիլադիզծային սխառնմի ասիմպտոտորեն կայունության և անկայունության համար և ոչ զծային սխառնմի կայունության համար:

ON THE THEORY OF STABILITY FOR A SPECIFIED  
INTERVAL OF TIME (NONAUTONOMOUS SYSTEM)

V. T. AVANIAN

S u m m a r y

The stability of a nonautonomous system for an infinite interval of time is studied according to K. A. Abkarian's definition which can also be applied to a finite interval of time.

The theorems for stability, instability, and asymptotic stability of a homogeneous linear system as well as for asymptotic stability and instability of a quasi-linear system and stability of a nonlinear system are proved.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Аванян К. А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. М., «Наука», 1973, 364—367, 376—380.
2. Аванян К. А., Аванян В. Т. К теории устойчивости процессов на заданном промежутке времени. М., «Методы теории дифференциальных уравнений и их приложения. Тематический сб. научн. тр. МАИ», 1975, вып. 339.
3. Аванян К. А. К теории устойчивости процессов на заданном промежутке времени. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
4. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967, 262—264.

А. А. БАГДАСАРЬЯН, И. С. МАЛЮТИН

### СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СКЛЕЕННОЙ С ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ

Исследуются свободные колебания ортотропной цилиндрической оболочки, соединенной клеем с дискретно расположенными продольными ребрами жесткости. Задача рассматривается как контактная, учитываются все силовые факторы взаимодействия оболочки и ребер. На основе точного решения дифференциальных уравнений колебаний в общем случае произвольного подкрепления задача приводится к однородной алгебраической системе уравнений, число которых равно учетверенному количеству ребер. Для одинаковых, равномерно расположенных ребер получено характеристическое уравнение в явном виде. Решение для оболочки, жестко соединенной с ребрами, вытекает из рассмотренного как частный случай. Приводятся числовые результаты.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку с приклеенными продольными ребрами. Клеевой слой считается тонким, так что его деформация по толщине принимается однородной. Распределенная контактная нагрузка заменяется погонной, приведенной к средней линии полосы контакта. В общем случае оболочка считается нагруженной внешним давлением и осевыми силами.

Запишем уравнения колебаний для гладкой оболочки, считая усилия и момент взаимодействия ее с ребрами в качестве внешней погонной нагрузки (аналогично [1])

$$\begin{aligned}
 L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w = & - (1 - \delta_{k3}) \sum_{j=1}^m q_{kj} \delta(y - y_j) + \\
 & \delta_{k3} \left\{ \sum_{j=1}^m \left[ \varepsilon_j \frac{h}{2R} \left( \frac{\partial q_{1j}}{\partial x} + \frac{\partial q_{2j}}{\partial y} \right) + q_{3j} - \frac{1}{R} \frac{\partial q_{4j}}{\partial y} \right] \delta(y - y_j) + \right. \\
 & \left. + \sum_{j=1}^m \left( \varepsilon_j \frac{h}{2R} q_{2j} - \frac{1}{R} q_{4j} \right) \delta'(y - y_j) \right\} \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

(k = 1, 2, 3)

Здесь  $L_k$  — дифференциальные операторы в частных производных по переменным  $x$ ,  $y$  и  $z$ , содержащие члены с величинами внешнего давления и осевого усилия;  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — компоненты перемещений точек срединной поверхности;  $R_x$ ,  $R_y$  — координаты в осевом и окружном направлениях;  $\delta_{kr}$  — символ Кронекера;  $y = y_j$  — линия контакта ребра

и оболочки;  $q_{kj}$  — составляющие усилия и момент взаимодействия оболочки и  $j$ -го ребра;  $\delta(\dots)$  — дельта-функция;  $m$  — количество ребер;  $R$ ,  $h$  — радиус и толщина оболочки;  $\nu_j = 1$  и  $\nu_j = -1$  соответственно при внутреннем и внешнем расположении ребра;  $t$  — время.

В случае использования теории пологих оболочек для ортотропной оболочки операторы  $L_{kj}$  имеют вид

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{Bh}{R} \rho \frac{\partial^2}{\partial z^2}, & L_{12} &= L_{21} = (K + \nu_2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ L_{13} &= L_{31} = \nu_2 \frac{\partial}{\partial x}, & L_{22} &= K \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\nu_2}{\nu_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{Bh}{R} \rho \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ L_{23} &= L_{32} = \frac{\nu_2}{\nu_1} \frac{\partial}{\partial y} \\ L_{33} &= c^2 \left[ \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(2K + \nu_2) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\nu_2}{\nu_1} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] + \\ &+ \frac{\nu_2}{\nu_1} + \frac{Bh}{R} \rho \frac{\partial^2}{\partial z^2} + pB \frac{\partial^2}{\partial y^2} + q \frac{Bh}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ K &= \frac{GBh}{R}, & B &= \frac{(1 - \nu_1 \nu_2) R}{E_1 h}, & c^2 &= \frac{h^2}{12 R^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\rho$  — плотность материала оболочки;  $G$  — модуль сдвига;  $E_1$  — модуль упругости в осевом направлении;  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  — коэффициенты Пуассона в осевом и окружном направлениях;  $p$  — внешнее давление;  $q$  — осевое сжимающее напряжение.

Уравнения колебаний  $j$ -го ребра, имеющего поперечное сечение с осью симметрии, которая проходит по нормали к оболочке через приведенную точку контакта, запишем в форме

$$q_{Lj} = I_0^{(j)} U_j + I_2^{(j)} V_j + I_3^{(j)} w_j + I_4^{(j)} \theta_j, \quad w_j = w(x, y) \quad (1.3)$$

Здесь  $U_j$ ,  $V_j$  и  $w_j$  — перемещения точек, лежащих на осевой линии  $j$ -го ребра в направлениях осей  $x$ ,  $y$  и в радиальном направлении;  $\theta_j$  — угол поворота сечения ребра относительно продольной оси ребра;  $I_i^{(j)}$  — обыкновенные дифференциальные операторы по переменным  $x$  и  $z$ , содержащие члены с начальным усилием  $T_j$  в ребре.

Операторы  $I_i^{(j)}$  имеют вид

$$\begin{aligned} I_0^{(j)} &= B \left( \frac{E_1 F_j}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \nu_j^2 F_j \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \\ I_2^{(j)} &= -B \left( \frac{E_1 I_2}{R^4} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \nu_j^2 F_j \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{T_j}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \\ I_3^{(j)} &= -\partial z_j \frac{r_j}{R} \left( \frac{E_1 F_j}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \nu_j^2 F_j \frac{\partial^2}{\partial x \partial z^2} \right) \end{aligned}$$

$$L_{33}^{(j)} = -B \left( \frac{E_j^* I_{1j}}{R^4} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \rho_j^* F_j \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\gamma_j}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)$$

$$L_{34}^{(j)} = B \rho_j^* r_j \left( \frac{E_j^* I_{2j}}{R^4} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \rho_j^* F_j \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right)$$

$$L_{44}^{(j)} = B \left( \frac{G_j^* J_j}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho_j^* J_j \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right)$$

Здесь  $F_j$  — площадь сечения ребра;  $E_j^* I_{1j}$ ,  $E_j^* I_{2j}$  — изгибные жесткости ребра соответственно в радиальной и касательной плоскостях;  $G_j^* J_j$  — жесткость ребра на кручение;  $E_j^*$ ,  $G_j^*$  — модуль упругости и модуль сдвига;  $r_j$  — расстояние между осевой линией ребра и клеевым слоем (толщина слоя считается пренебрежимо малой по сравнению с этой величиной);  $\rho_j^*$  — плотность материала ребра.

Соотношения упругости для клеевого слоя будут

$$q_{1j} = b_{1j} \left[ U_j - u_j + \varepsilon_j b_{2j} \frac{dw_j}{dx} \right]$$

$$q_{2j} = b_{1j} \{ V_j - v_j + \varepsilon_j R [b_{2j} \theta_j - b_{3j} (\theta_j + \gamma_j)] \}$$

$$q_{3j} = b_{4j} (\theta_j + \gamma_j), \quad \gamma_j = \frac{dw_j}{R dy} \Big|_{y=y_j}, \quad u = u(x, y_j), \quad v_j = v(x, y_j) \quad (1.4)$$

где коэффициенты  $b_{kj}$  имеют вид

$$b_{1j} = \frac{H_j G_{kj}}{l_j}, \quad b_{2j} = \frac{1}{R} \left( r_j + \frac{h}{2} \right), \quad b_{3j} = \frac{h}{2R}, \quad b_{4j} = \frac{E_{kj} H_j^2}{12 l_j}$$

Здесь  $H_j$ ,  $l_j$  — ширина и толщина клеевого слоя;  $E_{kj}$ ,  $G_{kj}$  — модуль упругости и модуль сдвига клея.

Уравнения (1.1), (1.3), (1.4) являются разрешающими уравнениями задачи. Решение системы уравнений (1.1), (1.3), (1.4) для случая шарнирно опертых краев оболочки ищем в виде

$$u = f_1(y) \cos \gamma x \sin \omega \tau, \quad v = f_2(y) \sin \gamma x \sin \omega \tau, \quad w = f_3(y) \sin \gamma x \sin \omega \tau$$

$$U_j = A_{1j} \cos \gamma x \sin \omega \tau, \quad V_j = A_{2j} \sin \gamma x \sin \omega \tau, \quad \theta_j = A_{3j} \sin \gamma x \sin \omega \tau$$

$$\gamma = \frac{\pi N}{l} \quad (1.5)$$

где  $N$  — целое число, характеризующее форму колебаний;  $l$  — длина оболочки;  $\omega$  — круговая частота собственных колебаний. Исключая из (1.1), (1.3), (1.4) после подстановки в них (1.5) величины  $q_{kj}$  и  $A_{kj}$ , получаем уравнения для амплитудных функций перемещений  $f_1, f_2, f_3$

$$\sum_{j=1}^3 L_{ij} f_i = \sum_{i=1}^3 \hat{c}_{ki} \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^4 a_{il}^{(j)} f_{ij} \delta^k (y - y_j) + \hat{c}_{k3} \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^4 a_{il}^{(j)} f_{ij} \delta^k (y - y_j) \quad (1.6)$$

Здесь  $L_{kr}$  — обыкновенные дифференциальные операторы по переменным  $y$  и  $\tau$ ,  $a_{kl}^{(j)}$  — постоянные

$$f_{1j} = f_j(y_j), \quad (j = 1, 2, 3); \quad f_{4j} = f_j^*(y_j)$$

Постоянные  $a_{kl}^{(j)}$  имеют вид

$$a_{11}^{(j)} = -B \frac{E_j^* F_j}{R^2} (M_j - \gamma^2) z_j, \quad a_{13}^{(j)} = a_{11}^{(j)} \gamma \varepsilon_j b_{2j}, \quad a_{22}^{(j)} = -B \nu_{1j} \nu_{2j} \nu_{3j}$$

$$a_{33}^{(j)} = -B \nu_{2j} \nu_{3j} (\nu_{1j} + \nu_{2j} \nu_{3j}), \quad a_{31}^{(j)} = B \varepsilon_j b_{2j} (M_j - \gamma^2) \frac{E_j^* F_j}{R^2} \gamma z_j$$

$$a_{32}^{(j)} = B \left\{ \frac{E_j^* F_j}{R^2} \gamma^2 b_{2j}^2 (M_j - \gamma^2) z_j + \frac{E_j^* F_j}{R^2} M_j - \frac{E_j^* I_{1j}}{R^4} \gamma^4 + \frac{T_j}{R^2} \gamma^2 \right\}$$

$$a_{42}^{(j)} = B \nu_{3j} \nu_{3j} (\nu_{1j} x_{2j} - \varepsilon_j b_{2j} x_{2j})$$

$$a_{44}^{(j)} = B [(\nu_{1j} + \nu_{2j} \nu_{3j}) x_{2j} - \varepsilon_j b_{2j} x_{1j} (\nu_{4j} + \nu_{1j} \nu_{3j})]$$

где

$$M_j = \frac{E_j^* \rho_j}{E_j} \frac{\Omega^2}{1 - \nu_{1j} \nu_{2j}}, \quad \Omega^2 = B h R \rho \omega^2, \quad z_j = \frac{G_{0j}}{G_{0j} + \gamma^2 - M_j}$$

$$G_{0j} = \frac{b_{1j} R^2}{E_j F_j}, \quad x_{1j} = \frac{E_j^*}{R^2} \left( F_j M_j - \frac{I_{2j} \gamma^4}{R^2} \right) + \frac{T_j}{R^2} \gamma^2$$

$$x_{2j} = \frac{J_j}{R^2} (E_j^* M_j - G_j^* \gamma^2), \quad \nu_{1j} = -\frac{b_{4j}}{b_{4j} - x_{2j}}, \quad \nu_{2j} = \frac{\varepsilon_j (b_{2j} - b_{3j}) x_{1j}}{b_{4j} - x_{2j}}$$

$$\nu_{3j} = \frac{G_{0j}}{G_{0j} - \frac{R^2 x_{1j}}{E_j^* F_j}}, \quad \nu_{4j} = \varepsilon_j b_{3j} \nu_{3j}$$

$$\nu_{5j} = \varepsilon_j (b_{3j} - b_{2j}) \nu_{3j}, \quad \nu_{6j} = \frac{1}{1 - \nu_{2j} \nu_{3j}}$$

Так как оболочка замкнута в окружном направлении, функции  $f_r(y)$  ( $r = 1, 2, 3$ ) должны быть периодическими с периодом  $2\pi$ . Решение уравнений (1.6), полученное операционным методом [2], имеет вид:

$$f_r(y) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{l=1}^4 \sum_{s=1}^6 \frac{f_{rl}}{\Delta'(s_q)} \left| \sum_{k=1}^3 a_{kl}^{(j)} \Delta_{kr}(s_q) + a_{4l} s_q \Delta_{4r}(s_q) \right| \tau_0(y - y_l) - \frac{1}{1 - e^{-2\pi s_q}} \left| e^{s_q(y - y_l)} \right|, \quad (r = 1, 2, 3) \quad (1.7)$$

Здесь  $\Delta(s)$  — определитель, элементы которого  $c_{kr}$  получаются из операторов  $L_{kr}$  путем замены операции дифференцирования на пара-

метр преобразования  $s$ ;  $\Delta_{\nu}(s)$  — алгебраическое дополнение элемента  $c_{\nu, \nu}$ ;  $x_{\nu}$  — корни уравнения  $\Delta(s) = 0$ ;  $e_{\nu}(y)$  — единичная функция.

Согласно (1.2) выражения для  $c_{\nu, \nu}$  имеют вид

$$c_{11} = Ks^2 - \gamma_1^2 + \Omega^2, \quad c_{12} = -c_{21} = (K + \nu_2)\gamma_1 s, \quad c_{13} = -c_{31} = \nu_2 \gamma_1$$

$$c_{22} = \frac{\gamma_2}{\nu_1} s^2 + K\gamma_1^2 + \Omega^2, \quad c_{23} = c_{32} = \frac{\gamma_2}{\nu_1} s$$

$$c_{33} = \nu^2 \left[ \gamma_1^4 - 2(\nu_2 + 2K)\gamma_1^2 s^2 + \frac{\gamma_2}{\nu_1} s^4 \right] + \frac{\gamma_2}{\nu_1} - s^2 Bp - B \frac{h}{K} \nu_1^2 - \Omega^4$$

Полгая и (1.7) и в выражении для  $f_j(y)$  последовательно  $y = y_1, y_2, \dots, y_m$ , получаем систему  $4m$  однородных алгебраических уравнений относительно  $f_{\nu j}$  ( $\nu = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, \dots, m$ ). Равенство нулю определителя этой системы является характеристическим уравнением задачи.

Для одинаковых ( $a_{\nu j}^{(n)} = a_{\nu j}$ ), равномерно расположенных ( $y_j = \frac{2\pi}{m} j$ ) ребер решение алгебраической системы может быть пред-

ставлено в виде  $f_{\nu j} = a_{\nu} e^{i \frac{2\pi n}{m} j}$ , где  $n$  — целое число ( $0 \leq n \leq \frac{m}{2}$ ,

если  $m$  — четное число,  $0 \leq n < \frac{m-1}{2}$ , если  $m$  — нечетное число),

$i = \sqrt{-1}$ , (представление решения в комплексной форме означает, что решениями будут действительная и мнимая части). Для коэффициентов  $a_{\nu}$  получаем систему четырех алгебраических уравнений

$$a_{\nu} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^4 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{a_{\nu}}{\Delta'(s_q)} \left[ \sum_{s=1}^3 a_{\nu s} \Delta_{\nu s}(s_q) + a_{\nu 4} x_q \Delta_{\nu 4}(s_q) \right] \operatorname{cth} \frac{\pi}{m} (in - s_q)$$

$$a_{\nu} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^4 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{a_{\nu}}{\Delta'(s_q)} \left[ \sum_{s=1}^3 a_{\nu s} x_q \Delta_{\nu s}(s_q) + a_{\nu 4} s_q^2 \Delta_{\nu 4}(s_q) \right] \operatorname{cth} \frac{\pi}{m} (in - s_q)$$

$$(r = 1, 2, 3)$$

Характеристическое уравнение получим, приравняв нулю определитель этой системы

$$\det [\Lambda_{r, k} - \delta_{r, k}] = 0 \quad (r = 1, 2, 3, 4; k = 1, 2, 3, 4) \quad (1.9)$$

Здесь

$$\Lambda_{r, 1} = a_{11} \Phi_{1r}^{(0)} + a_{21} \Phi_{2r}^{(0)}, \quad \Lambda_{r, 2} = a_{22} \Phi_{1r}^{(0)} + a_{41} \Phi_{2r}^{(1)}, \quad \Lambda_{r, 3} = a_{12} \Phi_{1r}^{(0)} + a_{21} \Phi_{2r}^{(0)}$$

$$\Lambda_{r, 4} = a_{21} \Phi_{1r}^{(2)} + a_{41} \Phi_{2r}^{(1)}, \quad \Lambda_{r, 1} = a_{11} \Phi_{1r}^{(1)} + a_{21} \Phi_{2r}^{(0)}, \quad \Lambda_{r, 2} = a_{22} \Phi_{1r}^{(1)} + a_{41} \Phi_{2r}^{(2)}$$

$$\Lambda_{33} = a_{13}\Phi_{13}^{(0)} + a_{33}\Phi_{33}^{(1)}, \quad \Lambda_{44} = a_{24}\Phi_{23}^{(1)} + a_{44}\Phi_{33}^{(2)}$$

$$\Phi_{kr}^{(j)} = \sum_{q=1}^8 \frac{s_q^2 \Delta_{kr}(s_q)}{\Delta'(s_q)} \operatorname{cth} \frac{\pi}{m} (in - s_q)$$

Характеристическое уравнение, разрешенное относительно изгибной жесткости ребра в радиальной плоскости, примет вид

$$E^* I_1 = \frac{R^4}{\gamma^4} \left\{ \frac{T\gamma^2}{R^2} + \frac{E^* F}{R^2} [M + \gamma^2 b_2^2 z (M - \gamma^2)] - \right. \\ \left. - \frac{1}{B} \frac{e_{33} - a_{13} \left( \sum_{r=1}^3 \Phi_{1r}^{(0)} e_{r3} + \Phi_{13}^{(1)} e_{43} \right)}{\sum_{r=1}^3 (1 - \delta_{1r}) \Phi_{r3}^{(0)} e_{r3} + \Phi_{33}^{(1)} e_{43}} \right\} \quad (1.10)$$

Здесь  $e_{rk}$  — алгебраическое дополнение элемента  $\Lambda_{rk} - \delta_{rk}$  определителя (1.9).

Заметим, что при  $G_0 \rightarrow \infty$  и  $b_1 \rightarrow \infty$  будем иметь случай жесткого соединения оболочки и ребер. Если величину  $\Omega$  положить равной нулю, получим уравнения устойчивости.

Характеристическое уравнение упрощается в случае учета не всех факторов взаимодействия оболочки и ребер. Так, в случае взаимодействия оболочки и ребер по нормали и в продольном направлении, характеристическое уравнение в безразмерном виде принимает форму

$$\frac{E^* I_1}{DR} = \frac{TR}{D\gamma^2} - \frac{1}{\gamma^4 C^2} \frac{1 - E_0 F_0 (1 - \nu_1 \nu_2) [M\Phi_{33} + (M - \gamma^2) Qz]}{z E_0 F_0 (1 - \nu_1 \nu_2) (M - \gamma^2) (\Phi_{13}^2 + \Phi_{11}\Phi_{33}) + \Phi_{33}}$$

где

$$Q = \Phi_{11} + 2\gamma^2 b_2^2 \Phi_{13} - \gamma^2 b_2^2 \Phi_{31} - E_0 F_0 M (1 - \nu_1 \nu_2) (\Phi_{13}^2 + \Phi_{11}\Phi_{33})$$

$$E_0 = \frac{E^*}{E_1}, \quad F_0 = \frac{F}{Rh}, \quad D = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}$$

$$\Phi_{kr} = \sum_{q=1}^4 \frac{\Delta_{kr}(s_q)}{\Delta'(s_q)} \frac{\operatorname{sh} \frac{2\pi}{m} s_q}{\cos \frac{2\pi}{m} n - \operatorname{ch} \frac{2\pi}{m} s_q}$$

На основании (1.10) был проведен расчет для двух изотропных оболочек, одна из которых имела внутреннее подкрепление, другая — наружное. Исходные параметры для оболочки и подкрепляющих ее ребер принимались такими же, как в работах [3, 4], где рассматривалось жесткое соединение оболочки и ребер:  $q = p = 0$ .

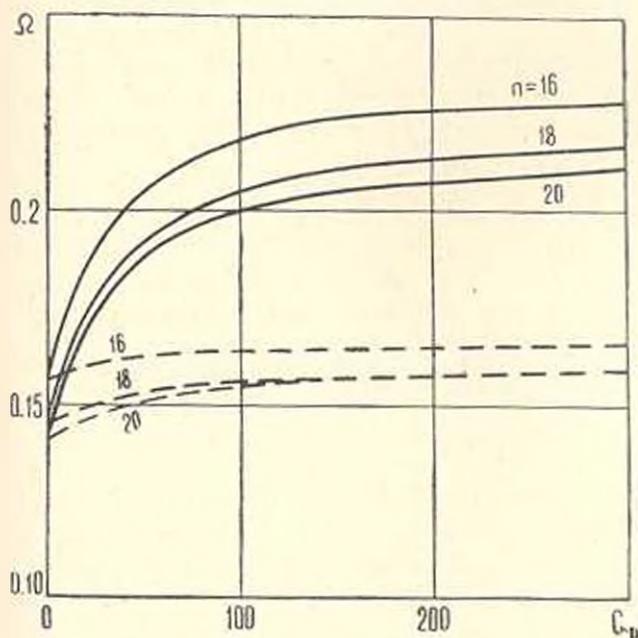
$$b_2 = 5.13 \cdot 10^{-3}, \quad b_3 = 4.11 \cdot 10^{-4}, \quad l = 0.453, \quad m = 200, \quad E_0 = 1, \quad F_0 = 1.28 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{I_1}{FR^2} = 7.43 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{I_2}{FR^2} = 1.03 \cdot 10^{-7}, \quad \frac{J}{FR^2} = 3.83 \cdot 10^{-7}$$

$$\frac{E_1}{G} = \frac{E^*}{G^*} = 2.6, \quad \nu_1 = \nu_2 = 0.3$$

Для клевого слоя принималось:

$$\frac{E_k}{G_k} = 2.7, \quad \frac{H}{R} = 1.99 \cdot 10^{-3}$$



Фиг. 1.

На фиг. 1 показано изменение безразмерной частоты свободных колебаний  $\Omega$  в зависимости от безразмерного параметра  $G_0$ , характеризующего жесткость клевого слоя, для различных значений параметра волнообразования в окружном направлении  $n$ , соответствующих нижним частотам. Число полуволн в продольном направлении  $N = 1$ . Пунктирные кривые относятся к оболочке с внутренними ребрами, сплошные — к оболочке с наружными ребрами. Точкам пересечения кривых с осью ординат соответствуют частоты, когда отсутствует касательное взаимодействие оболочки и ребер. При увеличении жесткости клевого слоя кривые асимптотически приближаются к значениям частот, соответствующим жесткому соединению оболочки и ребер. Для этого предельного случая результаты практически совпадают с решениями [3, 4].

Ա. Ա. ԲԱԳԴԱՏԱՐՅԱՆ, Ի. Ս. ՄԱԼՅՈՒՏԻՆ

ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ԿՈՂԵՐԻ ՀԵՏ ՍՈՍՆՁՎԱՅ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԴՆԱՆԱՅԻՆ  
ԹԱՂԱՆԹԻ ԱԶԱՏ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո մ

Գիտարկվում են բաժանված մասերով երկայնական կոշտության կողերի հետ սոսնձով միացված օրթոտրոպ դնանային թաղանթի ազատ տատանումները: Ընդհանուր դեպքում թաղանթը համարվում է բեռնազրկված արտարին ձնշումով և առանցքային ուժերով: Խնդիրը համարվում է կոնտակտային և հաշվի են առնվում թաղանթի և կողերի փոխազդեցության բոլոր ուժային գործոնները:

Խնդրի լուծումը բերվում է հանրահաշվական հավասարումների սխեմի, որում հավասարումների թիվը հավասար է կողերի քանակության քառապատիկին: Միատեսակ և հավասարաչափ դասավորված կողերի համար ստացվել է բնութագրիչ հավասարումը:

Բերվում են թվային օրինակներ:

FREE VIBRATION OF AN ORTHOTROPIC CYLINDRICAL  
SHELL GLUED TO LONGITUDINAL RIBS

A. A. BAGDASARIAN, I. S. MALYUTIN

## S u m m a r y

The problem of free vibration of an orthotropic cylindrical shell glued to longitudinal ribs is solved considering the discrete nature of rib arrangement. The characteristic equation is obtained.

The effect of a glue on the frequency of free vibration of the shell is shown.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарյан А. А., Малютин И. С. Свободные колебания цилиндрической оболочки, соединенной клеем с кольцевыми ребрами. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т. XXIX, № 4.
2. Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложение к задачам механики. М.—Л., Строиниздат, 1950.
3. Mc Elman J. A., Mikulas M. M., Jr., Stein M. Static and Dynamic Effects of Eccentric Stiffening of Plates and Shells. AIAA Journal, May 1966, vol. 4, No. 5.
4. Mc Donald D. A Problem in the Free Vibration of Stiffened Cylindrical Shells. AIAA Journal, February 1970, vol. 8, No. 2.

И. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ

УРАВНЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ  
 ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ СИСТЕМ СО СКАЧКООБРАЗНО  
 ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

1. Уравнения Лагранжа для случая  $m = m(t)$

Будем рассматривать сначала случай, когда изменение массы системы зависит от времени  $t$ .

Рассматриваем систему  $p$  материальных точек  $m_p$ , имеющих  $r$  степеней свободы.

Вводим независимые друг от друга обобщенные координаты  $q_1, q_2, \dots, q_r$  в смысле Лагранжа, которые определяют положение точек, принадлежащих объему, занятому скачкообразно изменяющейся массой, связанные с декартовыми координатами соотношениями

$$\vec{r}_p = r_p(q_1, q_2, \dots, q_r), \quad (p = 1, 2, \dots, m) \quad (1.1)$$

Напишем общее уравнение для тела со скачкообразно изменяющейся массой (путем отщепления) в таком виде:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left[ m_{0p} - \sum_{j=1}^n v_{jp}(z_j) H(t - \tau_j) \right] \vec{v}_{jp} \right\} = \vec{R}_{jp} - \vec{K}_{jp} + \vec{F}_{jp}^v + \sum_{j=1}^n \vec{v}_{jp} v_{jp}(z_j) \delta(t - \tau_j) \quad (p = 1, 2, \dots, m) \quad (1.2)$$

где  $m_{0p}$  — масса,  $H(t - \tau_j)$  — функция Хелисайда,  $\vec{R}_{jp}$  — равнодействующая (результатирующая) внутренних сил,  $\vec{K}_{jp}$  — равнодействующая (результатирующая) внешних сил,  $\vec{F}_{jp}^v$  — равнодействующая (результатирующая) скачкообразно изменяющихся массовых сил,  $\delta(t - \tau_j)$  — функция распределения Дирака.

Умножая скалярно соотношение (1.2) на виртуальное смещение  $\Delta \vec{r}_p$  и суммируя, получаем

$$\sum_{p=1}^m \frac{d}{dt} \left\{ \left[ m_{0p} - \sum_{j=1}^n v_{jp}(z_j) H(t - \tau_j) \right] \vec{v}_{jp} \right\} \Delta \vec{r}_p = \sum_{p=1}^m \vec{K}_{jp} \Delta \vec{r}_p + \sum_{p=1}^m \vec{R}_{jp} \Delta \vec{r}_p + \sum_{p=1}^m \vec{F}_{jp}^v \Delta \vec{r}_p + \sum_{p=1}^m \sum_{j=1}^n \vec{v}_{jp} v_{jp}(z_j) \delta(t - \tau_j) \Delta \vec{r}_p \quad (1.3)$$

Положим, что частицы, принадлежащие телу, не перемещаются одна по отношению к другой и, следовательно,

$$\sum_{p=1}^m \bar{R}_{jp} \Delta \bar{r}_p = 0 \quad (1.1)$$

Имея в виду соотношение (1.1), можно записать

$$\Delta \bar{r}_p = \sum_{k=1}^r \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} \Delta q_k, \quad (p = 1, 2, \dots, m)$$

Подставляя это выражение в (1.3), получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^m \frac{d}{dt} \left\{ \left[ m_{0p} - \sum_{j=1}^n v_{jp}(\tau_j) H(t - \tau_j) \right] \bar{v}_{jp} \right\} \sum_{k=1}^r \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} \Delta q_k = \\ & = \sum_{p=1}^m \bar{R}_{jp} \sum_{k=1}^r \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} \Delta q_k + \sum_{p=1}^m \bar{F}_{jp} \sum_{k=1}^r \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} \Delta q_k + \sum_{p=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{v}_{jp} v_{jp}(\tau_j) + \\ & + \sum_{p=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{v}_{jp} v_{jp}(\tau_j) \delta(t - \tau_j) \sum_{k=1}^r \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} \Delta q_k, \quad \text{или} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^r \left\{ \sum_{p=1}^m \frac{d}{dt} \left[ \left( m_{0p} - \sum_{j=1}^n v_{jp}(\tau_j) H(t - \tau_j) \right) \bar{v}_{jp} \right] \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} \right\} \Delta q_k = \\ & = \sum_{k=1}^r \left[ \sum_{p=1}^m \bar{R}_{jp} \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} + \sum_{p=1}^m \bar{F}_{jp} \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} \right] \Delta q_k + \\ & + \sum_{k=1}^r \left[ \sum_{p=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{v}_{jp} v_{jp}(\tau_j) \delta(t - \tau_j) \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} \right] \Delta q_k \end{aligned}$$

Аналогичным путем, как для случая непрерывно изменяющейся массы, можем написать

$$\frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} = \frac{\partial \bar{v}_p}{\partial q_k}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \bar{v}_p}{\partial q_k}$$

причем производные понимаются в смысле теории распределения.

Обозначаем обобщенные силы через

$$Q_k = \sum_{p=1}^m \bar{R}_{jp} \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} \quad \text{и} \quad Q_{k*} = \sum_{p=1}^m \bar{F}_{jp} \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} \quad (1.6)$$

Предполагая, что  $m_p$  зависит только от времени  $t$ , имеем

$$\sum_{p=1}^m \frac{d}{dt} \left\{ \left[ m_{0p} - \sum_{j=1}^n v_{jp}(\tau_j) H(t - \tau_j) \right] \bar{v}_{jp} \right\} \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{p=1}^m \left[ m_{0p} - \sum_{j=1}^n v_{jp}(\tau_j) H(t - \tau_j) \right] \bar{v}_{jp} \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} \right\} - \\
 &\quad - \sum_{p=1}^m \left[ m_{0p} - \sum_{j=1}^n v_{jp}(\tau_j) H(t - \tau_j) \right] \bar{v}_{jp} \frac{\partial \bar{v}_p}{\partial q_k} = \\
 &\quad - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{p=1}^m \frac{1}{2} \left[ m_{0p} - \sum_{j=1}^n v_{jp}(\tau_j) H(t - \tau_j) \right] \bar{v}_{jp}^2 \right\} - \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{p=1}^m \frac{1}{2} \left[ m_{0p} - \sum_{j=1}^n v_{jp}(\tau_j) H(t - \tau_j) \right] \bar{v}_{jp}^2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}
 \end{aligned}$$

где  $T$  — кинетическая энергия системы.

Обозначим

$$\sum_{p=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{v}_{jp} v_{jp}(\tau_j) \delta(t - \tau_j) \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} = \sum_{p=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{v}_{jp} v_{jp}(\tau_j) \delta(t - \tau_j) \frac{\partial \bar{v}_p}{\partial q_k} = F_{ak} \quad (1.7)$$

где  $F_{ak}$  — обобщенная реактивная сила.

Тогда уравнение (1.5) примет вид

$$\sum_{k=1}^r \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_{kc} - Q_{kv} - F_{ak} \right] \Delta q_k = 0$$

Так как параметры  $q_k$  являются независимыми друг от друга, то из вышеприведенного соотношения получается система уравнений Лагранжа для  $r$  степеней свободы системы

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_{kc} + Q_{kv} + F_{ak}, \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (1.8)$$

где обобщенные силы  $Q_{kc}$ ,  $Q_{kv}$  и  $F_{ak}$  определяются соотношениями (1.6) и (1.7).

## 2. Уравнения Гамильтона

Для того чтобы вывести канонические уравнения Гамильтона, введем обобщенные импульсы соотношениями

$$p_k = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left\{ \frac{1}{2} \left[ m_{0p} - \sum_{j=1}^n v_{jp}(\tau_j) H(t - \tau_j) \right] v_{jp}^2 \right\} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}; \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (2.1)$$

Считая, что выражение кинетической энергии зависит от  $q_k$  и  $\dot{q}_k$ , имеем:

$$\Delta T(q_k, \dot{q}_k) = \frac{\partial T}{\partial q_k} \Delta q_k + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \Delta \dot{q}_k = \frac{\partial T}{\partial q_k} \Delta q_k + \Delta \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) - \dot{q}_k \Delta \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

откуда получается

$$\Delta \left( -T + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) = \dot{q}_k \Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \Delta q_k$$

Вводим функцию Гамильтона, которую рассматриваем как функцию от  $q_k$  и  $p_k$ :

$$H(q_k, p_k) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - T = p_k \dot{q}_k - T \quad (2.2)$$

Вариация этой функции будет

$$\Delta H = \dot{q}_k \Delta p_k - \frac{\partial T}{\partial q_k} \Delta q_k \quad (2.3)$$

С другой стороны, из (1.8) получаем

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - Q_k - F_{nk} = p_k - Q_k - F_{nk}$$

и, следовательно,

$$\Delta H = \dot{q}_k \Delta p_k - (p_k - Q_k - F_{nk}) \Delta q_k \quad (2.4)$$

Однако вариация функции Гамильтона может быть написана так:

$$\Delta H = \frac{\partial H}{\partial q_k} \Delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \Delta p_k \quad (2.5)$$

Сравнивая соотношения (2.3) и (2.5), получаем обобщенные канонические уравнения для тела со скачкообразно изменяющейся массой

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \quad \dot{p}_k = - \left[ \frac{\partial H}{\partial q_k} + Q_k + F_{nk} \right] \quad (2.6)$$

где

$$F_{nk} = \sum_{p=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{v}_{jp} v_{jp}(\tau_j) \delta(t - \tau_j) \frac{\partial v_p}{\partial q_k}$$

Напомним, что все производные в соотношении (2.6) понимаются в смысле теории распределения.

### 3. Уравнения Лагранжа для случая $m = m(t, q, \dot{q})$

Будем изучать далее более общий случай, когда масса тела изменяется в зависимости от координат, скоростей и времени.

Возьмем снова систему  $p$  материальных точек  $m_p$ , имеющих  $r$  степеней свободы. Положение какой-либо точки определяется соотношением:

$$\bar{r}_p = \bar{r}_p(q_1, q_2, \dots, q_r), \quad (p = 1, 2, \dots, m) \quad (3.1)$$

Для упрощения будем подразумевать, что масса системы изменяется только примаыканием. Имея в виду, что

$$m_p = m_p(q_k, q_k, t), \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

можем написать для массы

$$m_p = m_{p0} + \sum_{i=1}^n \bar{r}_{ip}(\tau_i) H(t - \tau_i) + \sum_{j=1}^m \bar{r}_{jp}(q_j) H(q - q_j) + \sum_{s=1}^r \bar{r}_{sp}(q_s) H(q - q_{0s}) \quad (3.2)$$

а для скорости

$$\bar{v}_p = \bar{v}_{p0} + \sum_{i=1}^n \bar{s}_{ip}(\tau_i) H(t - \tau_i) + \sum_{j=1}^m \bar{s}_{jp}(q_j) H(q - q_j) + \sum_{s=1}^r \bar{s}_{sp}(q_s) H(q - q_{0s}) \quad (3.3)$$

Уравнение движения точки системы по отношению к определенной системе отсчета имеет вид

$$m_p \frac{d\bar{v}_p}{dt} = \bar{R}_p + \bar{R}_p + \bar{R}_p + \bar{N}_p, \quad (p = 1, 2, \dots, m) \quad (3.4)$$

где  $m_p$  и  $\bar{v}_p$  заданы соотношениями (3.2) и (3.3), а  $\bar{R}_p$  является результирующей внешних сил,  $\bar{R}_p$  является результирующей внутренних сил,  $\bar{R}_p$  — результирующая реактивных сил,  $\bar{N}_p$  — результирующая связывающих сил.

Умножая скалярно соотношение (3.4) на виртуальное смещение  $\Delta \bar{r}_p$  и суммируя, получаем

$$\sum_{p=1}^m \left[ m_p \frac{d\bar{v}_p}{dt} - \bar{R}_p - \bar{R}_p - \bar{R}_p - \bar{N}_p \right] \Delta \bar{r}_p = 0$$

Однако

$$\sum_{p=1}^m \bar{R}_p \Delta \bar{r}_p = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{p=1}^m \bar{N}_p \Delta \bar{r}_p = 0$$

$$\Delta \bar{r}_p = \sum_{k=1}^r \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} \Delta q_k$$

Поэтому можно написать

$$\sum_{p=1}^m \left[ m_p \frac{d\bar{v}_p}{dt} \bar{R}_p + \bar{R}_p \right] \sum_{k=1}^r \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} \Delta q_k = 0 \quad (3.5)$$

Первый член выражения (3.5) можно записать и так:

$$\sum_{p=1}^m m_p \frac{\partial \bar{v}_p}{dt} \sum_{k=1}^r \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} \Delta q_k = \sum_{k=1}^r \Delta q_k \sum_{p=1}^m m_p \frac{d\bar{v}_p}{dt} \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k}$$

Далее преобразуем вторую сумму соответствующим образом

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^m m_p \frac{d\bar{v}_p}{dt} \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} &= \sum_{p=1}^m \left[ \frac{d}{dt} \left( m_p \bar{v}_p \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} \right) - \frac{dm_p}{dt} \bar{v}_p \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} - m_p \bar{v}_p \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} \right) \right] = \\ &= \sum_{p=1}^m \left[ \frac{d}{dt} \left( m_p \frac{\partial \frac{1}{2} \bar{v}_p^2}{\partial q_k} \right) - \frac{dm_p}{dt} \bar{v}_p \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} - m_p \frac{\partial \frac{1}{2} \bar{v}_p^2}{\partial q_k} \right] = \\ &= \sum_{p=1}^m \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \frac{1}{2} m_p \bar{v}_p^2}{\partial q_k} \right) - \frac{\partial \frac{1}{2} m_p \bar{v}_p^2}{\partial q_k} - \frac{dm_p}{dt} \bar{v}_p \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial m_p \bar{v}_p^2}{\partial q_k} \frac{1}{2} \right) - \frac{dm_p}{\partial q_k} \frac{\bar{v}_p^2}{2} \right] - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \\ &\quad - \sum_{p=1}^m \left[ \frac{dm_p}{dt} \bar{v}_p \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial m_p \bar{v}_p^2}{\partial q_k} \frac{1}{2} \right) - \frac{\partial m_p \bar{v}_p^2}{\partial q_k} \frac{1}{2} \right] \quad (3.6) \end{aligned}$$

В соотношении (3.6)  $T = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m m_p \bar{v}_p^2$  является суммарной кинетической энергией системы со скачкообразно изменяющейся массой.

Второй член соотношения (3.5)

$$\sum_{p=1}^m \bar{R}_p \sum_{k=1}^r \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} \Delta q_k = \sum_{k=1}^r \Delta q_k \sum_{p=1}^m \bar{R}_p \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} = \sum_{k=1}^r \Delta q_k Q_k \quad (3.7)$$

где  $Q_k = \sum_{p=1}^m \bar{R}_p \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k}$  — внешняя обобщенная сила.

Аналогичным образом третий член

$$\sum_{p=1}^m \bar{R}_p \sum_{k=1}^r \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} \Delta q_k = \sum_{k=1}^r \Delta q_k \sum_{p=1}^m \bar{R}_p \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} = \sum_{k=1}^r \Delta q_k p_k \quad (3.8)$$

где  $p_k = \sum_{p=1}^m \bar{R}_p \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k}$  — реактивная обобщенная сила.

Если учесть соотношения (3.6), (3.7) и (3.8), соотношение (3.5) примет вид

$$\sum_{k=1}^r \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - \sum_{p=1}^m \left[ \frac{dm_p}{dt} \bar{v}_p \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial m_p \bar{v}_p^2}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial m_p \bar{v}_p^2}{\partial q_k} \right] - \right. \\ \left. - \sum_{p=1}^m \bar{F}_{cp} \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} - \sum_{p=1}^m R_p \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} \right\} \Delta q_k = 0 \quad (3.9)$$

Так как параметры  $q$  независимы друг от друга, из соотношения (3.9) получается система уравнений Лагранжа для  $r$  степеней свободы системы

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k - p_k - \sum_{p=1}^m \left[ \frac{dm_p}{dt} \bar{v}_p \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} + \right. \\ \left. + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial m_p \bar{v}_p^2}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial m_p \bar{v}_p^2}{\partial q_k} \right] = 0 \quad (3.10)$$

Принимая во внимание соотношение (3.2), можно написать

$$\frac{dm_p}{dt} = \sum_{i=1}^n v_{ip}(\tau_i) \delta(t - \tau_i); \quad \frac{\partial m_p}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n v_{ip}(q_i) \delta(q - q_i) \\ \frac{\partial m_p}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^m v_{jp}(q_j) \delta(q - q_j)$$

Последний член соотношения (3.10)

$$\sum_{p=1}^m \left[ \frac{dm_p}{dt} \bar{v}_p \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial m_p \bar{v}_p^2}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial m_p \bar{v}_p^2}{\partial q_k} \right] = \\ = \sum_{p=1}^m \left\{ \bar{v}_p \frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k} \sum_{i=1}^n v_{ip}(\tau_i) \delta(t - \tau_i) + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\bar{v}_p^2}{2} \sum_{i=1}^n v_{ip}(q_i) \delta(q - q_i) \right] - \right. \\ \left. - \frac{\bar{v}_p^2}{2} \sum_{j=1}^m v_{jp}(q_j) \delta(q - q_j) \right\} = D_k \quad (3.11)$$

Следовательно, система уравнений Лагранжа для материальных систем со скачкообразно изменяющейся массой будет

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k - p_k - D_k = 0; \quad (k = 1, \dots, r) \quad (3.12)$$

Вышеприведенный метод имеет тот недостаток, что член  $D_k$  требует довольно сложного вычисления. В некоторых случаях, для упрощения вычислений можно применять метод «солидификации», предложенный

И. И. Артоболговским [5] для изучения плоских механизмов со скачкообразно изменяющейся массой.

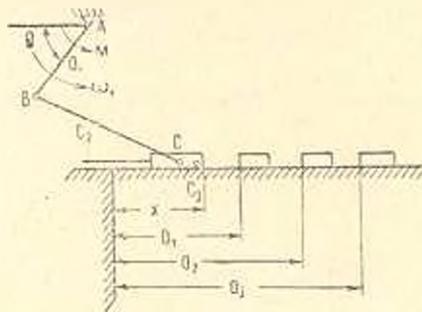
В этом случае уравнения Лагранжа будут иметь такой вид

$$\frac{d^*}{dt} \left( \frac{\partial^* T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial^* T}{\partial q_k} - Q_k - P_k = 0; \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (3.13)$$

где операторы  $\frac{d^*}{dt}$ ,  $\frac{\partial^*}{\partial \dot{q}_k}$  и  $\frac{\partial^*}{\partial q_k}$  относятся к случаю, когда система считается «солидифицированной», то есть имеет постоянную массу.

В уравнениях (3.13) эффект «вариации массы» учитывается обобщенной реактивной силой  $P_k$ .

*Пример.* Рассматриваем механизм на фиг. 1, где обобщенной координатой считается угол вращения ведущего элемента, а обобщенная скорость  $\dot{q} = \dot{\theta} = \omega_1$ .



Фиг. 1.

Обозначим через  $M$  и через  $M$  сокращенные обобщенные моменты активных и реактивных сил соответственно.

Кинетическая энергия всего механизма будет выражаться формулой

$$T = \frac{1}{2} J^* \omega_1^2 \quad (3.14)$$

где  $J^*$  является сокращенным инерционным моментом механизма с переменной массой, а  $\omega_1$  — угловой скоростью ведущего элемента.

Так как механизм имеет только одну степень свободы, уравнение Лагранжа будет иметь вид:

$$\frac{d^*}{dt} \left( \frac{\partial^* T}{\partial \dot{\omega}_1} \right) - \frac{\partial^* T}{\partial \omega_1} = M - M \quad (3.15)$$

Имея в виду тот факт, что принята гипотеза о том, что масса механизма является постоянной и что сокращенный инерционный момент зависит только от обобщенной координаты  $\theta$ , уравнению движения придадим вид

$$J^* \frac{d\omega_1}{dt} - \frac{dJ^*}{dt} \frac{\omega_1^2}{2} = M - M \quad (3.16)$$

Для вычисления элементов, входящих в уравнение (3.16), для упрощения будем подразумевать, что угловая скорость  $\omega$ , изменяется непрерывно и что центр масс  $C_1$  с переменным положением достаточно близок к  $C$  для того, чтобы пренебрегать расстоянием между ними.

Сокращенный момент активных сил есть

$$M = M_1 - F_r \frac{v_c}{\omega_1} \quad (3.17)$$

где  $v_c$  — скорость центра массы  $C$ .

Сокращенный момент реактивных сил есть:  $M - F_r \frac{v_c}{\omega_1}$ , где реактивная сила  $F_r$ , имея в виду, что масса изменяется в зависимости от координаты  $x$ , выражается соотношением

$$F_r = \frac{dm_3 v^2}{dx} \frac{1}{2}$$

Имея в виду фиг. 1, получаем, что масса элемента 3 механизма изменяется по закону:  $m_3 = m_{30} + \sum_{j=1}^m \mu(a_j) H(x - a_j)$ , где  $m_{30}$  — масса в исходный момент, а  $\mu(a_j)$  — скачок массы, примерно масса тел перед элементом 3.

Имея в виду изложенное выше, для сокращенного момента реактивных сил будем иметь

$$M = \frac{v_r^2}{2\omega_1} \sum \mu(a_j) \delta(x - a_j) \quad (3.18)$$

Для того, чтобы вычислить суммарную кинетическую энергию «солидифицированного» механизма, определим сокращенный инерционный момент

$$\frac{J^* \omega_1^2}{2} = \frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{J_{c2} v_2^2}{2} + \frac{m_2 v_{c2}^2}{2} + \frac{m_3 v_c^2}{2}$$

или

$$J^* = J_1 + J_{c2} \left( \frac{v_2}{\omega_1} \right)^2 + m_2 \left( \frac{v_{c2}}{\omega_1} \right)^2 + m_3 \left( \frac{v_c}{\omega_1} \right)^2$$

и

$$\frac{dJ^*}{dV} = J_{c2} \frac{d}{dV} \left( \frac{v_2}{\omega_1} \right)^2 + m_2 \frac{d}{dV} \left( \frac{v_{c2}}{v_1} \right)^2 + m_3 \frac{d}{dV} \left( \frac{v_c}{\omega_1} \right)^2$$

Теперь, считая массу механизма переменной, запишем

$$J^* = J_1 + J_{c2} \left( \frac{v_2}{\omega_1} \right)^2 + m_2 \left( \frac{v_{c2}}{\omega_1} \right)^2 + \left[ m_{30} + \sum_{j=1}^m \mu(a_j) H(x - a_j) \right] \left( \frac{v_c}{\omega_1} \right)^2 \quad (3.19)$$

$$\frac{dJ^*}{d\theta} = J_{c2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_2 \frac{d}{d\theta} \left( \frac{v_{c2}}{\omega_1} \right)^2 + \left[ m_{03} + \sum_{j=1}^m \mu(a_j) H(x - a_j) \right] \frac{d}{d\theta} \left( \frac{v_c}{\omega_1} \right)^2 \quad (3.20)$$

Подставляя соотношения (3.17), (3.18) и (3.19) в дифференциальное уравнение, получаем

$$\begin{aligned} J^* \frac{d\omega_1}{dt} - \left\{ J_{c2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_2 \frac{d}{dt} \left( \frac{v_{c2}}{\omega_1} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left[ m_{03} + \sum_{j=1}^m \mu(a_j) H(x - a_j) \right] \frac{d}{dt} \left( \frac{v_c}{\omega_1} \right)^2 \right\} \frac{\omega_1^2}{2} = \\ = M_1 - F \frac{v_c}{\omega_1} - \frac{v_c^3}{2\omega_1} \sum_{j=1}^m \mu(a_j) \delta(x - a_j) \end{aligned}$$

Заменяя переменную внутри скобок, будем иметь

$$\begin{aligned} J^* \frac{d\omega_1}{dt} - \left\{ J_{c2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_2 \frac{d}{dt} \left( \frac{v_{c2}}{\omega_1} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left[ m_{03} + \sum_{j=1}^m \mu(a_j) H(x - a_j) \right] \frac{d}{dt} \left( \frac{v_c}{\omega_1} \right)^2 \right\} \frac{\omega_1}{2} = \\ = M_1 - F \frac{v_c}{\omega_1} - \frac{v_c^3}{2\omega_1} \sum_{j=1}^m \mu(a_j) \delta(x - a_j) \quad (3.21) \end{aligned}$$

Введем переменную  $t$  в выражения, которые содержат уже функции  $H(x - a_j)$  и  $\delta(x - a_j)$ .

Исходим из равенства

$$m_{03} + \sum_{j=1}^m \mu(a_j) H(x - a_j) = m_{03} + \sum_{j=1}^m \mu(\tau_j) H(t - \tau_j) \quad (3.22)$$

Дифференцируя здесь оба члена по времени в смысле теории распределения, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ m_{03} + \sum_{j=1}^m \mu(a_j) H(x - a_j) \right] &= \frac{dx}{dt} \frac{1d}{dx} \left[ m_{03} + \sum_{j=1}^m \mu(a_j) H(x - a_j) \right] = \\ &= \bar{v}_c \frac{d}{dx} \left[ \sum_{j=1}^m \mu(a_j) H(x - a_j) \right] = \bar{v}_c \sum_{j=1}^m \mu(a_j) \delta(x - a_j) \\ \frac{d}{dt} \left[ m_{03} + \sum_{j=1}^m \mu(\tau_j) H(t - \tau_j) \right] &= \sum_{j=1}^m \mu(\tau_j) \delta(t - \tau_j) \end{aligned}$$

Следовательно, можем писать

$$\sum_{j=1}^m \mu(a_j) \delta(x - a_j) = \frac{1}{v_c} \sum_{j=1}^m \mu(\tau_j) \delta(t - \tau_j) \quad (3.23)$$

С учетом соотношений (3.22) и (3.23) уравнение (3.21) примет вид

$$\begin{aligned} J^* \frac{d\omega_1}{dt} - \left\{ J_{c2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_2 \frac{d}{dt} \left( \frac{v_{c2}}{\omega_1} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left[ m_{03} + \sum_{j=1}^m \mu(\tau_j) H(t - \tau_j) \right] \frac{d}{dt} \left( \frac{v_c}{\omega_1} \right)^2 \right\} \frac{\omega_1}{2} = \\ = M_1 - \frac{F v_c}{\omega_1} - \frac{v_c^2}{2\omega_1} \sum_{j=1}^m \mu(\tau_j) \delta(t - \tau_j) \end{aligned}$$

где

$$J^* = J_1 + J_{c2} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_2 \left( \frac{v_{c2}}{\omega_1} \right)^2 + \left[ m_{03} + \sum_{j=1}^m \mu(\tau_j) H(t - \tau_j) \right] \left( \frac{v_c}{\omega_1} \right)^2$$

Петрошанский горный институт  
(Румыния)

Поступила 2 XII 1977

Ի. Ն. ԿՈՆՍԱՆՏԻՆԵՍՅԱՆ

ԹԻՌԶԲԱԶԵՎ ՓՈՓՈԽՎՈՂ ԲՆՈՒԹԱԻՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ՆՅՈՒԹԱԿԱՆ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԱՆԱՎԻՏԻԿ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Դիտարկվում են հոյունոմ սխառեմի Հազրանժի երկրորդ սեռի և Համիլ-  
տոնի համասարտումների կառուցման հարցերը, երբ սխառեմում մասնակցող  
ուժեղացան կետերի զանդվածները փոփոխվում են թոիչըններով:

Ուսումնասիրվում են երկու դեպքեր՝

1. երբ զանդվածները փոփոխվում են թոիչբաձև միայն ժամանակից  
խված:

2. երբ զանդվածները փոփոխվում են ընդհանրացված կոորդինատներից,  
ադոթյուններից և ժամանակից կախված:

Օգտագործվում են Մեշչերսկու մեթոդը և ընդհանրացված ֆունկցիաների  
սությունը:

Բերվում է կոնկրետ օրինակ:

## EQUATIONS OF ANALYTICAL MECHANICS FOR MATERIAL SYSTEMS WITH VARIABLE DISCONTINUOUS CHARACTERISTICS

I. N. CONSTANTINESCU

## S u m m a r y

In the paper the equation of analytical mechanics for material systems with variable discontinuous characteristics are studied, that is in the case in which the mass varies discontinuously and discontinuous variable forces are applied to the system.

The Lagrange equations are approached for the case in which  $m = m(t)$  and  $m = m(t, q, \dot{q})$  as well as the canonical equations of Hamilton and the equations of Appell.

A numerical example is presented.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Kecs W., Teodorescu P. P. Aplicatii ale teoriei distributiilor in mecanica. Edit. Academiei R. S. R. Bucuresti, 1970.
2. Tocaci E. Aspecte ale utilizarii teoriei distributiilor in mecanica, Studii si cercetari de mecanica aplicata, 29. 1, 27-45. 1970.
3. Nowacki W. Dinamica sistemelor elastice. (Trad. din limba poloneza). Edit. Tehnica, Bucuresti, 1969.
4. Бабаков И. М. Теория колебания. М., Изд. Наука, 1968.
5. Артоболеский И. И. Динамика машин. Сб. статей. М., Машгиз. 1963.

А. Н. КАГРАМАНЯН, М. М. МАРТИРОСЯН

## ВЛИЯНИЕ УСКОРЕННЫХ КЛИМАТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ (УКИ) НА ПРОЧНОСТЬ И ДЕФОРМАТИВНОСТЬ СТЕКЛОТЕКСТОЛИТА

Применение современных композиционных материалов в конструкциях, работающих в среде повышенной влажности, высоких и низких температур, вызывает большой интерес к исследованиям их механических свойств в различных условиях воздействия многочисленных факторов [1, 2, 3, 4 и др.].

Особый практический интерес, очевидно, будут представлять исследования, включающие и учитывающие влияние комплекса климатических или других факторов, действующих как в процессе испытаний, так и до испытаний.

Настоящая статья посвящена экспериментальному исследованию анизотропии механических свойств стеклотекстолита при кратковременном и длительном статическом растяжении (прочность и ползучесть) с учетом комплекса ускоренных климатических испытаний (УКИ). В качестве материала для исследования служил стеклотекстолит, изготовленный на основе ткани ТСУ 8/3-ВМ-78 и связующего ЭДТ-10Т.

### 1. Методика исследования

Все испытания, результаты которых обсуждаются в данной работе, были проведены на плоских образцах, вырезанных из листов стеклотекстолита толщиной 3,5—4,5 мм. Образцы имели форму двухсторонней лопатки с радиусом закругления галтелей  $R = 75$  мм<sup>2</sup>. Ширина и длина рабочего участка образца составляли соответственно 15 мм и 50 мм. В рассматриваемых здесь опытах испытывались образцы, вырезанные вдоль основы ткани ( $\varphi = 0^\circ$ ), в направлении под углом  $\varphi = 45^\circ$  и вдоль утка ткани ( $\varphi = 90^\circ$ ).

Кратковременное растяжение проводилось на испытательной машине марки ZDM-10 при температуре среды  $22 \pm 2^\circ\text{C}$  и относительной влажности  $67 \pm 3\%$ . Деформации измерялись на базе 40 мм механическими тензодатчиками часового типа МК-3. Поперечные деформации измерялись тензометрическими датчиками сопротивления посредством электронного преобразователя АИД-1М. Испытания на длительную прочность проводились на установках рычажного типа с одновременным измерением деформации ползучести.

В комплекс ускоренных климатических испытаний<sup>1</sup> (УКИ), которым подвергались образцы-близнецы испытуемой серии, включены следующие этапы воздействия:

<sup>1</sup> См. ГОСТ 4649—55.

<sup>11</sup> УКИ были проведены предприятием-изготовителем образцов.

— тепловое воздействие при температуре  $80 \pm 2^\circ\text{C}$  и относительной влажности до 80% в течение 30 сут;

— выдержка при температуре  $30 \pm 2^\circ\text{C}$  и относительной влажности 96—98% в течение 15 сут;

— тепловое воздействие при температуре  $40 \pm 2^\circ\text{C}$  в течение 83 час;

— циклическое суточное изменение температуры при температуре от  $-15 \pm 2^\circ\text{C}$  до  $+15 \pm 2^\circ\text{C}$  и относительной влажности 96—98% при положительной температуре. Время выдержки при каждой температуре — 4 часа, количество циклов — 23;

— циклические сезонные изменения температуры от  $-40 \pm 2^\circ\text{C}$  до  $+80 \pm 20^\circ\text{C}$ . Время выдержки при каждой температуре — 4 часа, количество циклов — 1.

## 2. Кратковременное растяжение

По экспериментальным данным кратковременного статического растяжения были определены пределы прочности, модули упругости и коэффициенты Пуассона контрольных и рабочих образцов\*. Средне-арифметические опытные значения механических характеристик материала и их статистическая оценка приведены в табл. 1. Графические зависимости «напряжение-деформация» ( $\sigma$ — $\epsilon$ ) показаны на фиг. 1.

Таблица 1

Сводные данные испытаний на кратковременное растяжение

№№ п/п	Ориент. град.	Число образ- цов	Состояние образца	По прочности		По модулю упругости		По коэффициенту Пуассона	
				$\sigma_1$ , кг/см <sup>2</sup>	$\nu$ , %	$E$ , кг/мм <sup>2</sup>	$\nu$ , %	$\mu$	$\nu$ , %
1	0	7	контр.	5050	3.6	2620	4.52	0.136	2.90
				5270 5620		2720 2830			
2	0	14	рабоч.	5100	6.8	2600	3.80	0.050	10.10
				5560 6170		2760 2900			
3	90	7	контр.	3630	2.2	2220	2.62	0.071	7.04
				3740 3880		2300* 2360			
4	90	9	рабоч.	2500	10.3	1990	7.95	0.087	12.29
				3090 3340		2260* 2530			
5	45	18	контр.	1660	18.5	1490	6.60	0.642	6.67
				2085 2700		1570** 1710			
6	45	9	рабоч.	1580	15.0	1300	12.20	0.312	16.12
				2030 2380		1490** 1770			

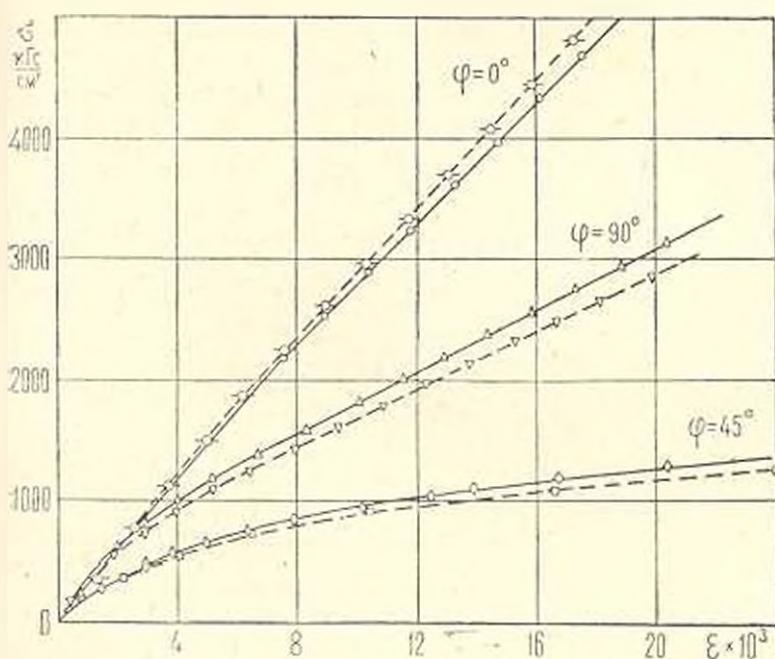
В числителе показано наименьшее значение, в знаменателе — наибольшее.

\* Секундные модули упругости при  $\nu=0.32$ .

\*\* Секундные модули упругости при  $\nu=0.22$ .

\* Рабочими названы образцы, прошедшие УКИ.

Исследования показывают, что для ориентации  $\varphi = 0^\circ$  на диаграмме растяжения можно выделить точку перегиба, которая делит кривую на два прямолинейных участка. Слом диаграммы соответствует нагрузкам около 40% от  $\sigma_a$ , а именно, находится в интервале напряжений, обычных для многих стеклопластиков (0,3—0,5  $\sigma_a$ ). После ускоренного климатического испытания образцов характер  $\sigma$ — $\varepsilon$  не меняется (пунктирная линия на фиг. 1), однако точка перегиба на кривой перемещается в сторону низких напряжений (0,28  $\sigma_a$ ). Наличие таких сломов свидетельствует о скачкообразном изменении повреждаемости материала по мере накопления повреждений в процессе нагружения. Положение точек перегибов («порогов трещинообразования») на диаграмме  $\sigma$ — $\varepsilon$  обусловлено рядом факторов [5, 6] (температура испытания, скорость нагружения и т. д.). К числу этих факторов, несомненно, следует также отнести и предисторию материала, в данном случае УКИ. Из диаграммы и табл. 1 видно также, что УКИ совершенно или почти совершенно не влияет на изменение предела прочности ( $\sigma_a$ ) и модуля упругости материала, однако наблюдается чувствительное (примерно в 2,5 раза) понижение значения коэффициента Пуассона, что, по-видимому, можно объяснить охрупчиванием материала в процессе термических испытаний.



Фиг. 1. Диаграммы растяжения стеклотекстолита. Сплошные линии — контрольные образцы; пунктирные линии — рабочие образцы.

Диаграмма  $\sigma$ — $\varepsilon$  для образцов, вырезанных по утку ткани ( $\varphi = 90^\circ$ ), также состоит из 2 частей: нелинейного и прямолинейного участков. Для нелинейного участка определен секущий модуль упругости (соответствующий

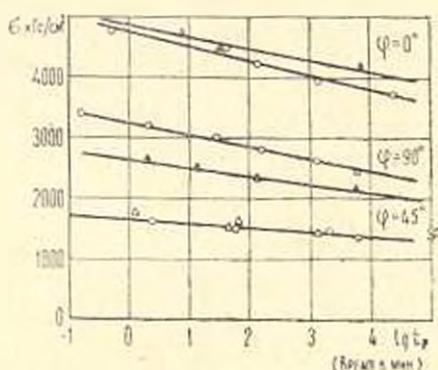
ший напряжению  $1050 \text{ кг/см}^2$ ) и коэффициент Пуассона  $\mu$ . Здесь наблюдается заметное снижение кратковременной прочности у рабочих образцов порядка 17,5%.

Следует особо отметить значительный разброс данных, относящихся к пределу прочности ( $\sigma_n$ ) образцов, вырезанных в направлении  $\varphi = 45^\circ$ . По-видимому, следует заметить, что многочисленные экспериментальные исследования, проведенные ранее на других стеклопластиках, показывали совершенно иную картину. Во всех случаях большой разброс данных наблюдался при испытаниях образцов, вырезанных по направлению волокон или ближе к этому направлению, и наоборот, в данных, полученных при испытании образцов  $\varphi = 45^\circ$ , разброс был незначителен. Трудно дать объяснение такому рассеиванию, однако заметим, что увеличение числа испытанных образцов в 2 раза не внесло никаких изменений. Как видно из табл. 1, ускоренные климатические испытания практически не вызывают изменения механических характеристик при кратковременных испытаниях.

### 3. Длительная прочность и ползучесть

В рассматриваемой работе испытания проводились до разрушения образцов под данной статической нагрузкой. База испытаний была принята равной  $2 \cdot 10^6$  мин. На фиг. 2 приведены кривые длительной прочности стеклотекстолита для упомянутых выше трех ориентаций, построенные по экспериментальным данным. Для построения каждой кривой были испытаны 11—27 образцов. Многими авторами показано, что зависимость между действующим напряжением и логарифмом долговечности хорошо аппроксимируется линейной корреляцией, которая имеет общий вид

$$\sigma = A - B \lg t_p$$



Фиг. 2. Кривые длительной прочности. ○ — контрольные образцы, △ — рабочие образцы.

Параметр  $B$  показывает наклон графика  $\sigma - \lg t_p$  по отношению к оси долговечности. Очевидно, чем слабее сопротивляется данный материал при воздействии статического нагружения, тем больше значение  $B$ . Параметры корреляционного уравнения со статистическими характеристиками приводятся в табл. 2.

Таблица 2

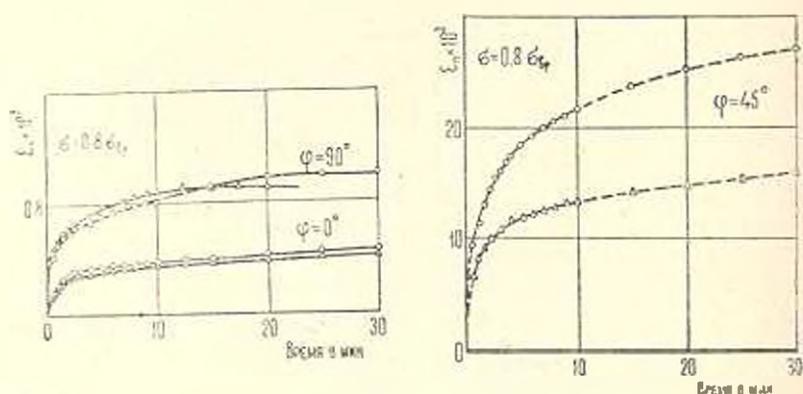
№ п/п	Ориент. φ град.	Состояние образца	Параметры корреляционного уравнения $\sigma = A - B \lg t_p$					Дангевская прочность на базе $t = 10^4$ мин		
			A	B	коэфф. корреляции $r_{\sigma, t}$	Критерий Аншей- ности	довер. интервал		абсолютное значение $\pm$ кгс/см <sup>2</sup>	относитель- ное значе- ние $\sigma/\sigma_B$
							по $\sigma$ кгс/см <sup>2</sup>	по $\lg t_p$		
1	0	контр.	4746.0	237.7	-0.9463	1.290	189.0	0.8419	3795	0.72
2	0	рабоч.	4848.5	194.2	-0.9190	1.306	148.4	0.8314	4070	0.73
3	45	контр.	1666.4	74.6	-0.8298	1.850	64.8	1.0461	1370	0.66
4	45	рабоч.	—	—	—	—	—	—	—	—
5	90	контр.	3238.6	200.8	-0.9558	1.527	121.2	0.6310	2435	0.65
6	90	рабоч.	2643.7	135.7	-0.9350	1.228	109.7	0.8652	2100	0.68

Как показывают экспериментальные данные, независимо от анизотропии материала, УКИ практически не влияет на длительную прочность. Как было показано выше, влияние УКИ может сказываться лишь на предел прочности материала.

Для наглядности в табл. 2 приводятся абсолютные и относительные значения разрушающего напряжения на базе времени  $t = 10^5$  мин. Как это видно, относительные значения длительной прочности контрольных и рабочих образцов практически не отличаются.

Следует отметить, что для рабочих образцов, имеющих ориентацию продольной оси  $\varphi = 45^\circ$ , разброс экспериментальных данных по долговечности  $t$  оказался настолько большим, что практически невозможно было отыскать какую-либо корреляционную связь между  $\sigma$  и  $t$ . Но с учетом их разброса из экспериментальных точек на фиг. 2 видно, что долговечность остается неизменной.

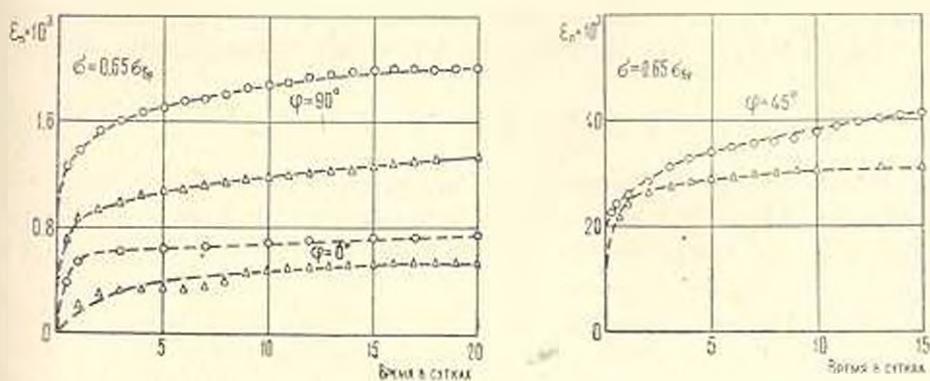
Известен ряд работ, посвященных экспериментальному исследованию влияния влажности и температуры среды на ползучесть полимерных материалов [1, 3 и др.]. Довольно глубоко изучена [4] температурно-влажностно-временная аналогия при исследованиях ползучести полимерных материалов, которая позволяет прогнозировать длительную ползучесть по данным экспресс-испытаний. Показано, что, вследствие воздействия указанных выше факторов окружающей среды на материал, ползучесть существенно увеличивается. В связи с этим представляет определенный интерес вопрос экспериментального исследования влияния ускоренных климатических испытаний (УКИ) на ползучесть стеклотекстолита при испытаниях длительной прочности. На фиг. 3 и 4 приведены кривые ползучести данного мате-



Фиг. 3. Кривые ползучести стеклотекстолита под  $\sigma = 0.8 \sigma_0$ : а) при  $\varphi = 0^\circ$  и  $90^\circ$ ; б) при  $\varphi = 45^\circ$ .  $\circ$  — контрольные образцы;  $\Delta$  — рабочие образцы.

риала с ориентациями  $\varphi = 0^\circ$ ;  $45^\circ$  и  $90^\circ$  при одноосном растяжении. Величины напряжений и длительности нагружения, при которых исследовалась ползучесть, соответствовали условиям исследования длительной прочности материала. Этим объясняется то, что с увеличением уровня напряжения сокращается длительность нахождения образцов под нагрузкой. Наблюда-

ния показывают, что во всех случаях кривые ползучести рабочих образцов, независимо от уровня напряжения, длительности нагружения и ориентации, проходят ниже контрольных кривых. Уменьшение величины деформации ползучести при значении напряжения 0.8 от кратковременной прочности у рабочих образцов с ориентациями  $\varphi = 0^\circ$  и  $90^\circ$  составляет соответственно 9 и 6%, тогда как у образцов, вырезанных в направлении  $45^\circ$ , оно достигает 41%. Как известно, в композиционных материалах с ориентациями  $\varphi = 45^\circ$  действующие напряжения, главным образом, приходится на долю связующего и частично монолитности системы волокно-связующее. Следовательно, в процессе ускоренных климатических испытаний (УКИ) термический режим, по-видимому, приводит к дальнейшему отверждению связующего ЭДТ-107 (увеличивается число пространственно сшитых полимерных цепей, что приводит к уменьшению подвижности этих цепей при растяжении). Вследствие этого снижаются деформации материала [7].



Фиг. 4. Кривые ползучести стеклотекстолита под  $\sigma = 0.65 \sigma_b$ : а) при  $\varphi = 0$  и  $90^\circ$ ; б) при  $\varphi = 45^\circ$ . O — контрольные образцы; Δ — рабочие образцы.

Однако, снижения деформации ползучести при более длительном воздействии напряжения ( $0.65 \sigma_b$ ), независимо от ориентации образца, выражаются примерно одинаковыми процентными соотношениями по сравнению с контрольными (27, 34 и 25%). Но, как показывают испытания на кратковременную и длительную прочность, повышение жесткости связующего еще не означает упрочнение самого стеклопластика в целом, так как при разрушении образцов определяющими являются, главным образом, армирующие волокна и частично монолитность системы волокно-связующее. Полученные данные подтверждают, что УКИ не оказывает влияния на механические свойства волокна, а действует на связующее и на систему волокно-связующее.

**Выводы.** Исследовано влияние комплекса ускоренных климатических испытаний (УКИ) на прочностные и деформативные свойства стеклотекстолита при кратковременном и длительном воздействии растягивающей нагрузки. Установлено, что заданный комплекс УКИ:

1. Практически не влияет на кратковременную прочность стеклотекстолита при ориентациях  $\varphi = 0^\circ$  и  $45^\circ$ , однако приводит к значительному его уменьшению при  $\varphi = 90^\circ$ .

2. Независимо от анизотропии материала, не влияет на длительную прочность (относительные значения длительной прочности контрольных и рабочих образцов практически не отличаются).

3. Приводит к изменению деформативных свойств, в частности, коэффициента Пуассона и деформации ползучести (в зависимости от уровня напряжения и ориентации образца).

Институт механики  
АН Армянской ССР

Поступила 18 VII 1977

Ա. Ն. ԿԱՐԱՄԱՆՅԱՆ, Մ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՅԱՆ

ԱՐԱԳԱՅՎԱՆ ԿԼԻՄԱՅԱԿԱՆ ՓՈՐՉԱՐԿՈՒՄՆԵՐԻ (ՄԿՄ) ԱԶԿՆՑՈՒԹՅՈՒՆԸ  
ԱՊՍԿԵՏԵՔՍՏՈՒՅԻ ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԴԵՖՈՐՄԱՏԻՎՈՒԹՅԱՆ ԿՐԱ

Ա մ փ ո լ ի ո ս մ

Ուսումնասիրված է արագացված կլիմայական փորձարկումների (ՄԿՄ) կոմպլեքսի ազդեցությունը ապակետերատուիտի ամրության և դեֆորմատիվության վրա հաշվի առնելով նրա մեխանիկական հատկությունների անիզոտրոպիան (անհամասեռությունը):

Փորձնականորեն հաստատված է, որ կիրառված ՄԿՄ կոմպլեքսը, որն ընդգրկում է ինչպես ջերմային, այնպես էլ միջավայրի խոնավության ազդեցությունը նյութի վրա, գործնականորեն չի ազդում նրա ամրության վրա ինչպես բնական պայմաններում, այնպես էլ երկարատև ազդեցության դեպքում: Մյուս կողմից, ՄԿՄ-ն բերում է դեֆորմացիոն հատկությունների մասնավորապես՝ Պուասոնի գործակցի և սողքի դեֆորմացիաների (կախված նմուշների անիզոտրոպության կողմնորոշումից և լարումների մակարդակից) նշմարելի փոփոխության:

THE INFLUENCE OF ACCELERATED CLIMATIC TESTS ON THE  
STRENGTH AND DEFORMATION OF FIBRE-GLASS  
REINFORCED PLASTIC

A. N. KAGRAMANIAN, M. M. MARTIROSIAN

S u m m a r y

The effect of the accelerated climatic tests complex (ACT) on the properties of strength and deformation of fibre-glass reinforced plastic, taking account of the anisotropy of its mechanical properties, is investigated.

It is established experimentally that the given ACT complex, including both temperature and damping influences of the environment on the material, has practically no effect on its strength properties either under momentary or prolonged load. ACT gives rise to changes in deformation properties, in Poisson's coefficient and creep deformation in particular (depending on the specimen's orientation and the level of stress).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнова М. К., Соколов Б. П., Сидорин Я. С., Иванов А. П. Прочность корпуса судна из стеклопластика. Л., изд. «Судостроение», 1965, с. 332.
2. Смирнов В. Н., Междеряков В. В., Иванов Н. С. Изменение физико-механических характеристик полиэфирного стеклопластика после четырехлетнего пребывания в морской воде, топливе, масле и атмосферных условиях. В сб. «Свойства полиэфирных стеклопластиков и методы их контроля», вып. 2. Л., изд. «Судостроение», 1970, с. 15—29.
3. Перлин С. М., Борисенко Л. А., Обищенко Л. Н., Ломакин А. Т. Влияние сред и температуры на остаточные напряжения в стеклопластиках. ФХММ, 1969, № 5, с. 638—639.
4. Уржумиса Ю. С., Максимов Р. Д. Прогностика деформативности полимерных материалов. Ригл. изд. «Зинатне», 1975, с. 416.
5. Каргин В. А., Малинский Ю. М., Рабинович А. А., Трифель Б. Ю. О прочности модельных образцов однонаправленных структур. Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 6.
6. Шлица Р. П. Особенности деформирования стеклопластиков при растяжении. Механика полимеров, 1966, № 2.
7. Мартиросян М. М. Влияние старения на ползучесть стеклопластика СВАН при растяжении с учетом ориентации волокон. Механика полимеров, 1965, № 6.