ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1978

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXI, № 3, 1978 Механика

С. М. МХИТАРЯН, К. Л. АГАЯН

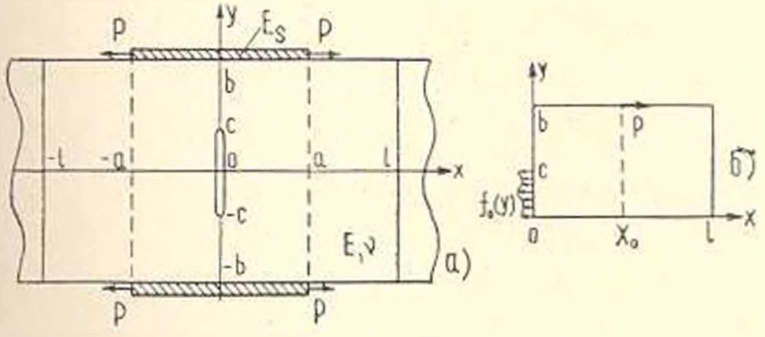
ОБ ОДНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ, РАССЛАБЛЕННОЙ ТРЕЩИНАМИ И УСИЛЕННОЙ УПРУГИМИ НАКЛАДКАМИ

Задачи для полосы и прямоугольной области с отдельными типами концентраторов напряжений (штамп, трещина, стрингер) рассматривались многими авторами. Не останавливаясь подробно на отдельных работах, отметим, что достаточно полная библиография таких работ содержится в [1—4].

В работах [5—7] исследовано влияние стрингеров на поле напряжений в пластинах, расслабленных трещиной конечной длины.

В настоящей работе исследуется контактная задача о передаче нагрузки от периодической системы стрингеров к полосе, когда последняя расслаблена периодически повторяющимися с тем же периодом центральными трещинами. Определяющие интегральные уравнения решены методом ортогональных многочленов. Обсуждены некоторые частные случаи и приведен численный пример.

1. Пусть упругая полоса шириной $2b$ расслаблена периодической системой с периодом $2l$ симметрично расположенных центральных трещин длиной $2c(0\leqslant c<b)$. Оба края полосы усилены периодически повторяющимися с тем же периодом, симметрично расположенными упругими стрингерами малой толщины h и длины $2a(0\leqslant a<l)$. Пусть, далее, стрингеры на своих концах нагружены растягивающими силами P, а на берегах трещины действует только нормальная нагрузка интенсивностью $f_0(y)$ (фиг. 1а).



Фиг. 1.

Предполагая, как обычно [8, 9], что стрингеры находятся в одноосном напряженном состоянии, требуется определить законы распределения тангенциальных контактных напряжений под стрингерами, а также коэффициенты интенсивности нормальных напряжений на концах трещин и, в конечном итоге ,выявить эффект взаимодействия стрингеров и трещин.

С целью формулировки поставленной задачи в виде определенного уравнения построим сначала функцию влияния для соответствующей плоской задачи. Последнее означает построить решение для расслабленной указанным способом полосы, предполагая, что стрингеры отсутствуют, а на ее краях непосредственно приложены растягивающие сосредоточенные силы p.

Ввиду периодичности и симметричности задачи рассмотрим только четвертую часть основного периода (фиг. 1б). Соответствующие граничные условия для нее будут

$$\begin{aligned} &\tau_{xy}(x, 0) = \tau_{xy}(0, y) = \tau_{xy}(l, y) = 0, \\ &u(a, y) = v(x, 0) = 0, \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant l \\ 0 \leqslant y \leqslant b \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} &\tau_{xy}(x, b) = p\delta(x - x_0), \\ &\sigma_y(x, b) = 0, \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 0 < x_0 < l \\ 0 \leqslant x \leqslant l \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_x(0, y) = f_0(y), \qquad &(0 \leqslant y < c) \\ &u(0, y) = 0, \qquad &(c \leqslant y \leqslant b) \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\delta(x)$ — известная дельта-функция Дирака.

Решение задачи представим при помощи функции напряжения Эри $F(x, y)$, связанной напряжениями и перемещениями при помощи известных формул

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

$$E^* u = \int \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\, dx - \nu^* \frac{\partial F}{\partial x} + e_0 y + u_0 \tag{1.4}$$

$$E^* v = \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\, dy - \nu^* \frac{\partial F}{\partial y} - e_0 x + v_0, \quad (e_0,\ u_0,\ v_0 = \text{const})$$

Здесь $E^* = E$, $\nu^* = \nu$ при обобщенном плоском напряженном состоянии и $E^* = \dfrac{E}{1-\nu^2}$, $\nu^* = \dfrac{\nu}{1-\nu}$ при плоской деформации полосы, где E — ее модуль упругости, а ν — коэффициент Пуассона.

Функцию $F(x, y)$ представим в виде разложения

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos \lambda_k x \left(A_k \operatorname{ch} \lambda_k y + B_k \lambda_k y \operatorname{sh} \lambda_k y\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \cos \mu_k y \left[\frac{\operatorname{ch} \mu_k (l - x)}{\operatorname{sh} \mu_k l} - \mu_k l \frac{\operatorname{ch} \mu_k x}{\operatorname{sh}^2 \mu_k l} + \mu_k x \frac{\operatorname{sh} \mu_k (l - x)}{\operatorname{sh} \mu_k l}\right] E_k -$$

$$- \frac{u_0}{2l} y^2; \qquad \lambda_k = \pi k / l, \qquad \mu_k = \pi k / b \tag{1.5}$$

с неизвестными коэффициентами u_0, A_k, B_k и $E_k (k = 1, 2, \ldots)$. Приняя $l_0 = v_0 = 0$ и используя (1.4) и (1.5), нетрудно убедиться, что условия симметрии (1.1) удовлетворяются тождественно.

Далее, используя разложение

$$\delta (x - x_0) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \lambda_k x_0 \sin \lambda_k x, \quad (0 < x, \ x_0 < l)$$

и известные разложения функций $\operatorname{ch} \mu_k x$, $\operatorname{sh} \mu_k x$, $x \operatorname{ch} \mu_k x$, $x \operatorname{sh} \mu_k x$ и ряды Фурье [10] по $\cos \lambda_k x$ в интервале $(0, l)$, при удовлетворении граничных условий (1.2) придём к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2p \sin \lambda_k x_0}{\lambda_k l} \frac{\operatorname{sh} \lambda_k b}{\Delta(\lambda_k b)} - \frac{4}{l} \frac{\operatorname{sh} \lambda_k b + \lambda_k b \operatorname{ch} \lambda_k b}{\Delta(\lambda_k b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \mu_n^3 E_n}{(\lambda_k^2 + \mu_n^2)^2} \\ B_k &= -\frac{2p \sin \lambda_k x_0}{\lambda_k l} \frac{\operatorname{ch} \lambda_k b}{\Delta(\lambda_k b)} + \frac{4 \operatorname{sh} \lambda_k b}{l \Delta(\lambda_k b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \mu_n^3 E_n}{(\lambda_k^2 + \mu_n^2)^2} \end{aligned} \tag{1.6}$$

где

$$\Delta (x) = (\operatorname{sh} 2x + 2x)/2$$

а из (1.4) при помощи (1.5) находим

$$u(0, y) = -\frac{2}{E^*} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k E_k \cos \mu_k y + \frac{u_0}{E^*}, \qquad (0 \leqslant y < b) \tag{1.7}$$

Положив

$$\frac{u_0 b}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} k E_k \cos kt = \begin{cases} g(t), & (0 \leqslant t \leqslant \beta) \\ 0, & (\beta \leqslant t < \pi) \end{cases} \tag{1.8}$$

будем иметь

$$u_0 = -\frac{2}{b} \int_0^{\beta} t g'(t) \, dt, \qquad E_k = -\frac{2}{\pi k^2} \int_0^{\beta} g'(t) \sin kt \, dt \tag{1.9}$$

где $g(t)$ — неизвестная функция, $\beta = \pi c/b$; а $t = \dfrac{\pi y}{b}$.

Обращаясь теперь ко второму из граничных условий (1.3), при помощи (1.7) и (1.8) легко видеть, что оно удовлетворяется тождественно. Удовлетворяя же первому из граничных условий (1.3), на основе (1.6) и (1.9) после некоторых, но довольно громоздких выкладок, для определения неизвестной функции $g'(t)$ получим следующее сингулярное интегральное уравнение с ядром Гильберта:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\beta}\left[\operatorname{ctg}\frac{t-\xi}{2}+\operatorname{ctg}\frac{t+\xi}{2}+K_{22}(t,\xi)\right]g'(t)\,dt=$$

$$=-pK_{21}^{*}(x_0,\xi)+2f_0^{*}(\xi),\quad (0\leqslant\xi<\beta) \tag{1.10}$$

где

$$K_{22}(t,\xi)=\frac{4b}{\pi l}t+4\sum_{k=1}^{\infty}M_k\cos k\xi\sin kt-$$

$$-\frac{4b}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k\vartheta_k(t)}{\Delta(\gamma_k\pi)}\left[(1-\gamma_k\pi\operatorname{cth}\gamma_k\pi)\operatorname{ch}\gamma_k\xi+\gamma_k\xi\operatorname{sh}\gamma_k\xi\right]$$

$$K_{21}^{*}(x_0,\xi)=\frac{4b^2}{\pi^2 l}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\gamma_k x_0\frac{\operatorname{ch}\gamma_k\pi}{\Delta(\gamma_k\pi)}\left[(\gamma_k\pi\operatorname{th}\gamma_k\pi-2)\operatorname{ch}\gamma_k\xi-\gamma_k\xi\operatorname{sh}\gamma_k\xi\right]$$

$$M_k=\frac{\Delta(q_k\pi)}{\operatorname{sh}^2 q_k\pi}-1,\qquad \vartheta_k(t)=t\operatorname{ch}\gamma_k t-\pi\operatorname{cth}\gamma_k\pi\operatorname{sh}\gamma_k t$$

$$f_0^{*}(\xi)=\frac{b^2}{\pi^2}f_0\left(\frac{b\xi}{\pi}\right),\qquad \gamma_k=kb/l,\qquad q_k=kl/b \tag{1.11}$$

Отметим, что первый интеграл в (1.10) следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Очевидно, что решение уравнения (1.10) должно удовлетворять условиям

$$g'(t)=-g'(-t),\quad g'(0)=0$$

Не останавливаясь здесь на решении уравнения (1.10), оно будет дано ниже, отметим лишь, что из физического смысла функции $g'(t)$ и из уравнения (1.10) следует, что она должна иметь особенность порядка 1/2 в точке $t=\beta$, то есть на конце трещины.

Но так как

$$\frac{b^2}{\pi^2}\sigma_x\left(0,\frac{b\xi}{\pi}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\beta}\left[\operatorname{ctg}\frac{t-\xi}{2}+\operatorname{ctg}\frac{t+\xi}{2}+\right.$$

$$\left.+K_{22}(t,\xi)\right]g'(t)\,dt-\frac{p}{2}K_{21}^{*}(x_0,\xi)\quad (\beta<\xi\leqslant\pi) \tag{1.12}$$

где $K_{22}(t,\xi)$ и $K_{21}^{*}(x_0,\xi)$ даются формулами (1.11), то, как известно [11], и $\sigma_x(0,b\xi/\pi)$ имеет особенность порядка 1/2 при $\xi\to\beta+0$, что согласуется с известными асимптотическими формулами в окрестности конца трещины [2].

Имея функцию $g'(t)$, из (1.9) и (1.5) можем определить u_0, E_k, A_k и B_k, а по формулам (1.4) — поле напряжений и перемещений. В частности, для перемещения точек края полосы будем иметь формулу

$$E^*u(x, b) = \frac{2p}{\pi}\ln\left|\frac{\sin\frac{\pi}{2l}(x+x_0)}{\sin\frac{\pi}{2l}(x-x_0)}\right| - \frac{4p}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} N_k\frac{\sin\lambda_k x_0 \sin\lambda_k x}{k} -$$

$$-\int_0^b\left\{\frac{4\pi}{b^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \sin kt\left[x\frac{e^{-q_k\pi}\operatorname{ch}\mu_k x}{\operatorname{sh} q_k\pi} - \frac{e^{-q_k\pi}\operatorname{sh}\mu_k x}{\mu_k\operatorname{sh} q_k\pi} -\right.\right.$$

$$\left.-\frac{l\operatorname{sh}\mu_k x}{\operatorname{sh}^2 q_k\pi}\right] - \frac{4b}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k\vartheta_k(t)\sin\lambda_k x}{\Delta(\gamma_k\pi)\operatorname{sh}\gamma_k\pi} - \frac{4}{b}\operatorname{arctg}\frac{\sin t}{e^{\pi x/b}-\cos t} -$$

$$\left.-\frac{2\pi x}{b^2}\frac{\sin t}{\operatorname{ch}\frac{\pi x}{b}+\cos t} + \frac{2(l-x)t}{lb}\right\}g'(t)\,dt \qquad (1.13)$$

$$(0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 < x_0 < l)$$

где

$$N_k = 1 - \operatorname{ch}^2\gamma_k\pi/\Delta(\gamma_k\pi)$$

Отметим, что при получении (1.10) и (1.13) были использованы разложения [12]

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k} = -\ln 2\left|\sin\frac{x}{2}\right|, \qquad (0 < x < 2\pi)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\sin kx}{k^2+a^2} = -\frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} a\pi}, \qquad (0 < x < \pi)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p^k \sin kx = \frac{p\sin x}{1-2p\cos x+p^2}, \qquad (|p| < 1)$$

2. Возвращаясь теперь к решению основной контактной задачи (фиг. 1а), еще раз отметим, что вследствие малости толщины h жесткость стрингера на изгиб пренебрежимо мала, вследствие чего его нормальным давлением на полосу можно пренебречь [8, 9].

Обозначим через $\tau(x)$ подлежащее определению тангенциальное контактное напряжение, возникающее под стрингерами. Тогда из уравнения равновесия элемента стрингера и на основании закона Гука будем иметь

$$\varepsilon_x^{(s)} = \frac{du^{(s)}(x)}{dx} = \frac{1}{hE_s}\left[P - \int_0^x \tau(s)\,ds\right], \qquad (0 \leqslant x \leqslant a) \qquad (2.1)$$

Здесь E_s — модуль упругости материала стрингера, $u^{(s)}(x)$ — горизонтальное перемещение его точек.

С другой стороны, на основании принципа наложения из (1.13) получим

$$\frac{du(x,b)}{dx}=\frac{1}{E^*l}\int_0^a\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l}(x_0-x)+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l}(x_0+x)+K_{11}^*(x_0,x)\right]\times$$

$$\times\tau(x_0)\,dx_0+\frac{1}{E^*l}\int_0^\beta K_{12}^*(t,x)\,g'(t)\,dt,\quad (0\leqslant x<a)\tag{2.2}$$

где

$$K_{11}^*(x_0,x)=-4\sum_{k=1}^{\infty}N_k\sin\lambda_k x_0\cos\lambda_k x$$

$$K_{12}^*(t,x)=\frac{2t}{b}+\frac{4\pi l^2}{b^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k\sin kt}{\operatorname{sh}q_k\pi}\left[\frac{\pi\operatorname{ch}\mu_k x}{\operatorname{sh}q_k\pi}-\frac{\pi x}{l}\frac{\operatorname{sh}\mu_k x}{e^{q_k\pi}}\right]+$$

$$+\frac{4b\pi^2}{l^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2\cos\lambda_k x}{\Delta(\gamma_k\pi)}\frac{\theta_k(t)}{\operatorname{sh}\gamma_k\pi}-\frac{2\pi l}{b^2}\frac{\frac{\pi x}{b}\operatorname{sh}\frac{\pi x}{b}\sin t}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi x}{b}+\cos t\right)^2}\tag{2.3}$$

Подставляя (2.1) и (2.2) в условие контакта

$$\frac{du(x,b)}{dx}=\frac{du^{(s)}(x)}{dx},\qquad (0\leqslant x<a)$$

после некоторых элементарных выкладок относительно контактных напряжений получим следующее сингулярное интегро-дифференциальное уравнение с ядром Гильберта:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\alpha\left[\operatorname{ctg}\frac{t-y}{2}+\operatorname{ctg}\frac{t+y}{2}+K_{11}(t,y)\right]\varphi'(t)\,dt+$$

$$+\int_0^\beta K_{12}(t,y)\,\psi(t)\,dt=\frac{\lambda}{\pi}\varphi(y),\qquad (0\leqslant y<\alpha)\tag{2.4}$$

где

$$K_{11}(t,y)=K_{11}^*\left(\frac{b}{\pi}t,\ \frac{l}{\pi}y\right),\qquad K_{12}(t,y)=\frac{b}{\pi}K_{12}^*\left(t,\ \frac{l}{\pi}y\right)$$

$$\varphi(y)=P-\int_y^\alpha\tau^*(t)\,dt,\qquad \alpha=\pi a/l,\quad \tau^*(t)=\frac{l}{\pi}\tau\left(\frac{l}{\pi}t\right)\tag{2.5}$$

$$\psi(t)=g'(t)/b,\quad \lambda=E^*l/hE,$$

при граничном условии

$$\varphi(\alpha) = P$$

Отметим, что первый интеграл в (2.4) понимается в смысле главного значения по Коши.

Следует еще отметить, что истинное распределение тангенциальных контактных напряжений теперь дается формулой

$$\tau(x) = \frac{\pi}{l}\varphi'\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

Уравнение (2.4) с уравнением (1.10), которое в обозначениях (2.5) имеет вид

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\beta\left[\operatorname{ctg}\frac{t-\xi}{2}+\operatorname{ctg}\frac{t+\xi}{2}+K_{22}(t, \xi)\right]\psi(t)\,dt+$$

$$+\int_0^\alpha K_{21}(t, \xi)\,\varphi'(t)\,dt=\frac{2}{b}f^*(\xi), \qquad (0\leqslant\xi<\beta)$$

где

$$K_{21}(t, \xi) = -\frac{1}{b}K_{21}^*\left(\frac{lt}{\pi}, \xi\right)$$

а K_{21}^* и K_{22} даются формулами (1.11), образуют систему двух сингулярных интегральных уравнений для определения нужных функций $\varphi'(t)$ и $\psi(t)$.

Следует отметить, что при $\beta = 0$ и $b\to\infty$ уравнение (2.4) переходит в известное уравнение, рассмотренное в работах [13, 14].

3. Вследствие симметричности задачи, решение системы сингулярных уравнений (2.4) и (2.6) представим формулами [14, 15]

$$\varphi'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \frac{T_{2n+1}\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{t}{2}\sqrt{2(\cos t-\cos\alpha)}} \tag{3.1}$$

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \frac{T_{2n+1}\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\frac{t}{2}\sqrt{2(\cos t-\cos\beta)}} \tag{3.2}$$

где $T_{2n+1}(x)$ $(n = 0, 1, 2,\ldots)$ — многочлены Чебышева первого рода, $\{X_n, Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставляя (3.1) и (3.2) в (2.4) и (2.6) и имея в виду следующее функциональное соотношение между многочленами Чебышева первого и второго рода [14, 15]:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha}\left[\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}+\operatorname{ctg}\frac{t+s}{2}\right]\frac{T_{2k+1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)dt}{\cos\dfrac{t}{2}\sqrt{2(\cos t-\cos\alpha)}}=$$

$$=\frac{U_{2k}\left(\operatorname{tg}\dfrac{s}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{s}{2}},\qquad \left(\begin{matrix}k=0,\ 1,\ 2,\dots\\ \alpha<\pi\end{matrix}\right)$$

где $U_{2k}(x)$ — многочлены Чебышева второго рода, по известной процедуре для определения неизвестных коэффициентов $\{X_n,\ Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ получим следующую систему бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}X_m+\sum_{n=0}^{\infty}A_{m,n}X_n+\sum_{n=0}^{\infty}B_{m,n}Y_n&=a_m\\ Y_m+\sum_{n=0}^{\infty}C_{m,n}X_n+\sum_{n=0}^{\infty}D_{m,n}Y_n&=b_m\end{aligned}\qquad (m=0,\ 1,\ 2,\dots)\qquad (3.3)$$

где

$$A_{m,n}=A_{m,n}^{(1)}+A_{m,n}^{(2)}$$

$$A_{m,n}^{(1)}=-\frac{8}{\pi^2}(2m+1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{N_k}{k}f_m^{(k)}(\alpha)f_n^{(k)}(\beta)$$

$$A_{m,n}^{(2)}=\frac{4\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\pi^2(2n+1)}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x\sin(2m+1)x\sin(2n+1)x}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2 x}\,dx$$

$$B_{m,n}=B_{m,n}^{(1)}+B_{m,n}^{(2)}+B_{m,n}^{(3)}$$

$$B_{m,n}^{(1)}=\frac{4\cos\dfrac{\alpha}{2}}{(2n+1)\cos\dfrac{\beta}{2}}(-1)^{m+n}\left[\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\right]^{2m+1}\left[\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}\right]^{2n+1}$$

$$B_{m,n}^{(2)}=-\frac{8b^2}{l^2}(2m+1)\cos\frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{\Delta(\gamma_k\pi)\operatorname{sh}\gamma_k\pi}f_m^{(k)}(\alpha)\,T_n(\beta,\ \vartheta_k(l))+$$

$$+\frac{4l^2}{\pi b^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{\operatorname{sh} q_k\pi} J_n^{(k)}(\beta)\left[\frac{U_m(\alpha, i\operatorname{sh} q_k l)}{e^{q_k\pi}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi U_m(\alpha, \operatorname{ch} q_k l)}{\operatorname{sh} q_k\pi}\right]$$

$$B_{m,n}^{(2)}=-\frac{2l^2}{\pi b^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\int_0^{\alpha}\frac{y \operatorname{sh} q_1 y\, U_{2m}\left(\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)dy}{\cos\frac{t}{2}\sqrt{2}(\cos t-\cos\alpha)^{-1/2}}\times$$

$$\times\int_0^{\beta}\frac{\sin t\, T_{2n-1}\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)dt}{(\operatorname{ch} q_1 y+\cos t)^2\cos\frac{t}{2}\sqrt{2(\cos t-\cos\alpha)}}$$

$$a_m=\frac{2\lambda P}{\pi}\cos\frac{\alpha}{2}(-1)^m\left[\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\right]^{2m-1}$$

$$C_{m,n}=-\frac{4b}{\pi^2 l \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\gamma_k\pi}{\Delta(\gamma_k\pi)}J_n^{(k)}[\gamma_k U_m(\beta, i\operatorname{sh}\gamma_k l)+$$

$$+(2-\gamma_k\pi\operatorname{th}\gamma_k\pi)\,U_m(\beta, \operatorname{ch}\gamma_k l)]$$

$$D_{m,n}=D_{m,n}^{(1)}+D_{m,n}^{(2)}+D_{m,n}^{(3)}$$

$$D_{m,n}^{(1)}=\frac{8b}{\pi l(2n+1)}(-1)^{m+n}\left[\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}\right]^{2(m+n+1)}$$

$$D_{m,n}^{(2)}=\frac{8(2m+1)}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}M_k J_m^{(k)}(\beta)\,J_n^{(k)}(\beta)$$

$$D_{m,n}^{(3)}=-\frac{4b^2}{\pi^2 l^2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{\Delta(\gamma_k\pi)}T_n(\beta, \vartheta_k(t))[\gamma_k U_m(\beta, i\operatorname{sh}\gamma_k l)+$$

$$+(1-\pi\gamma_k\operatorname{cth}\gamma_k\pi)\,U_m(\beta, \operatorname{ch}\gamma_k l)]$$

$$b_m=\frac{2b}{\pi^3\operatorname{tg}\beta/2}U_m\left(\beta, f_0\left(\frac{b}{\pi}t\right)\right)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$J_p^{(q)}(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\cos(2p+1)x\sin 2q\left[\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos x\right)\right]dx$$

$$T_p(\alpha, f(t)) = \int_0^{\alpha} f(t) \frac{T_{2p+1}\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) dt}{\cos\frac{t}{2}\sqrt{2(\cos t - \cos\alpha)}}$$

$$U_p(\alpha, f(t)) = \int_0^{\alpha} f(t) \frac{U_{2p}\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{2(\cos t - \cos\alpha)}}{\cos\frac{t}{2}} dt$$

Следует отметить, что ядра бесконечных систем (3.3) зависят лишь от отношений b/l, c/b, a/l.

Легко заметить, что регулярные части ядер интегральных уравнений (2.4) и (2.6) и их частные производные, как нетрудно убедиться,— квадратично интегрируемые функции. Тогда можно доказать [16, 17], что при любом значении $\lambda (0 \leqslant \lambda < \infty)$ система бесконечных систем линейных уравнений (3.3) квазивполне регулярна. При этом сумма модулей ядер бесконечных систем (3.3) при $m \to \infty$ стремится к нулю, по крайней мере, как $m^{-1/2-\varepsilon}$, где ε — малое положительное число.

Определив из (3.3) коэффициенты $\{X_n, Y_n\}_{n=0}^{\infty}$, по формулам (3.1) и (3.2) будем иметь функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$.

Напряжение $\sigma_x(0, y)$ на продолжении линий трещины определяется формулой (1.12). Опираясь на результаты [11] о поведении интеграла типа Коши вблизи концов линий интегрирования, для определения коэффициента интенсивности нормальных напряжений на конце трещины будем иметь формулу

$$K = \lim_{y \to c} \sqrt{2\pi(y - c)}\, \sigma_x(0, y) = \frac{-\pi^3}{\cos\frac{\beta}{2}\sqrt{b\sin\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \qquad (3.4)$$

4. Рассмотрим теперь следующую задачу. Упругая полоса шириной $2b$ расслаблена центральной трещиной длины $2c$, перпендикулярной к краям полосы. Одновременно полоса по своим краям усилена упругими стрингерами длиной $2a$, симметрично расположенными относительно линий трещины. На обоих концах стрингеров приложены растягивающие силы P, а на берегах трещины действует нормальное давление $\sigma_x(0, y) = f_1(y)$. $(|y| < c)$. Кроме того, предполагается, что полоса на бесконечности растягивается однородным полем напряжений p_0.

Заметим, что эта задача при отсутствии стрингеров рассматривалась во многих работах, из которых укажем [18].

Отметим, что решение этой задачи можно получить из решения рассмотренной выше задачи при помощи предельного перехода $l \to \infty$ в интегральных уравнениях (2.4) и (2.6), добавляя при этом, конечно, соответствующие члены, зависящие от p_0. Но проще разбираемую задачу решить заново, представляя функцию напряжения Эри в виде

$$F(x, y) = \int\limits_0^\infty [A(\lambda) \operatorname{ch} \lambda y + B(\lambda) \lambda y \operatorname{sh} \lambda y] \cos \lambda x d\lambda +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} E_k e^{-\mu_k x} (1 - \mu_k x) \cos \mu_k y + \frac{p_0}{2} y^2, \qquad \mu_k = \pi k / b$$

Тогда совершенно аналогичным образом, как это сделано выше, решение этой задачи можно привести к решению следующей системы сингулярных интегральных уравнений:

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{t - x} + \frac{1}{t + x} + K_{11}(t, x) \right] \varphi'(t) \, dt +$$

$$+ \int\limits_0^\beta K_{12}(t, x) \psi(t) \, dt = \frac{1}{2} [\lambda^* \varphi(x) - a p_0], \quad (0 \leqslant x < 1) \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^\beta \left[\operatorname{ctg} \frac{t - y}{2} + \operatorname{ctg} \frac{t + y}{2} + K_{22}(t, y) \right] \psi(t) \, dt +$$

$$+ \int\limits_0^1 K_{21}(t, y) \varphi'(t) \, dt = g^*(y) \qquad (0 \leqslant y < \beta)$$

где введены следующие обозначения:

$$K_{11}(t, x) = 2\alpha \int\limits_0^\infty N(\lambda\pi) \sin(\lambda\alpha t) \cos(\lambda\alpha x) \, d\lambda$$

$$K_{12} = \alpha \int\limits_0^\infty \lambda M(\lambda\pi) \frac{t \operatorname{ch} \lambda t - \pi \operatorname{cth} \lambda\pi \operatorname{sh} \lambda t}{\operatorname{sh} \lambda\pi} \cos(\lambda\alpha x) \, d\lambda -$$

$$- \frac{\alpha^2 x \operatorname{sh} \alpha x \sin t}{[\operatorname{ch} \alpha x + \cos t]^2}$$

$$K_{22}(t, y) = -4 \int\limits_0^\infty \frac{(1 - \lambda\pi \operatorname{cth} \lambda\pi) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{sh} \lambda y}{\Delta(\lambda\pi)} (t \operatorname{ch} \lambda t -$$

$$- \pi \operatorname{cth} \lambda\pi \operatorname{sh} \lambda t) \lambda d\lambda$$

$$K_{21}(t, y) = \frac{4}{\pi^2} \int\limits_0^\infty \frac{(2 - \lambda\pi \operatorname{th} \lambda\pi) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{sh} \lambda y}{\Delta(\lambda\pi)} \operatorname{ch} \lambda\pi \sin(\lambda\alpha t) \, d\lambda$$

$$g^*(y)=\frac{2b}{\pi^2}\left[-p_0+f_0\left(\frac{by}{\pi}\right)\right], \qquad \varphi(x)=P-\int_x^1 \tau^*(s)\,ds$$

$$\alpha=\frac{\pi a}{b}, \qquad \tau^*(s)=a\tau(as), \qquad N(\lambda\pi)=\frac{\mathrm{ch}^2\lambda\pi}{\Delta(\lambda\pi)}-1$$

$$M(\lambda\pi)=2\lambda\pi/\Delta(\lambda\pi), \quad \lambda^*=E^*a/hE,$$

Остальные обозначения соответствуют обозначениям первой задачи. Решение системы (4.1) представим в виде разложения

$$\varphi'(t)=\sum_{n=0}^{\infty} Z_n^{(1)}\frac{T_{2n+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad \psi(t)=\sum_{n=0}^{\infty} Z_n^{(2)}\frac{T_{2n+1}\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\frac{t}{2}\sqrt{2(\cos t-\cos\beta)}} \qquad (4.2)$$

Подставляя (4.2) в (4.1), для определения неизвестных коэффициентов $\{Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$ получим квазивполне регулярную систему бесконечных систем линейных уравнений, имеющую совершенно аналогичную с (3.3) структуру.

5. Численные результаты получены для первой задачи на ЭВМ «Наири-2» при следующих значениях параметров задачи: $l=b$, $\lambda=1$, $f_0(y)=-q_0=\mathrm{const}$. Различным значениям $\beta(0;\ \pi/4;\ \pi/2;\ 3\pi/4)$ соответствуют трещины разных длин, а значениям $\alpha(0;\ \pi/4;\ \pi/2;\ 3\pi/4)$ — стрингеры различных длин.

Для таких значений параметров были вычислены контактные напряжения под стрингерами, а также коэффициенты интенсивности разрывающего напряжения. При этом бесконечные системы (3.3) решены методом редукции (16 уравнений), а соответствующие коэффициенты бесконечных систем вычислены с точностью 0.0001. Некоторые результаты этих вычислений приведены в виде графиков (фиг. 2) и таблиц. В табл. 1 приведены значения отношения коэффициентов интенсивности напряжений K/K_s, где K_s — коэффициент интенсивности разрывающих напряжений в конце трещины при наличии стрингеров, когда растягивающие силы P приложены к их концам, а K — тот же самый коэффициент интенсивности напряжений, но при отсутствии стрингеров, когда силы P в соответствующих точках непосредственно приложены к полосе. Оба они определяются формулой (3.4), где коэффициенты $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ соответственно указанным случаям определяются при помощи бесконечной системы (3.3).

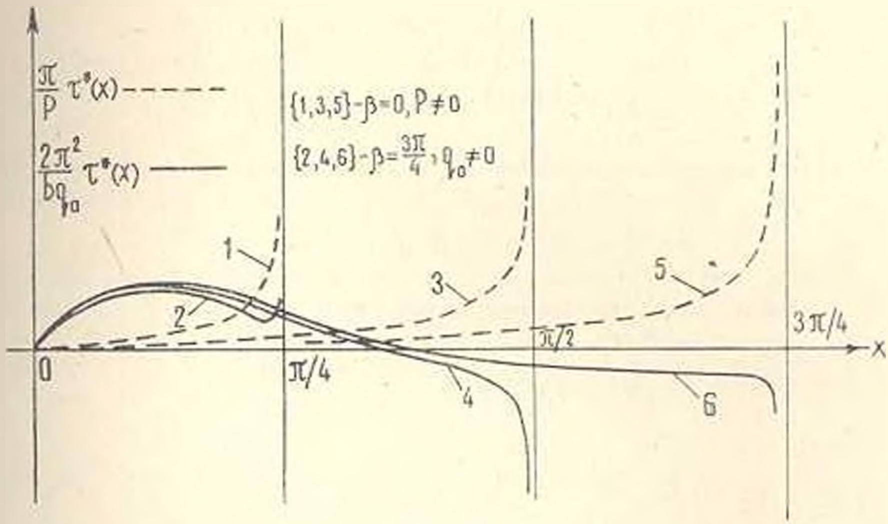
Таблица 1

	$\beta=3\pi/4$					
	$P\neq0,\ q_0=0$			$P=0,\ q_0\neq0$		
α	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
K/K_s	16.1980	4.9837	1.3203	1.0010	1.0182	1.1713

В табл. 2 приведены значения осевых напряжений $\sigma_x^{(s)}(0)$ в стрингерах.

Таблица 2

β	0			$\pi/4$	$3\pi/4$		
α	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
$\frac{h}{P}\sigma_x^{(s)}(0)$	0.8847	0.7739	0.6446	0.8852	0.8851	0.7814	0.6568
$\frac{\pi h}{b q_0}\sigma_x^{(s)}(0)$	—	—	—	—	−0.1079	−0.0840	−0.0516



Фиг. 2.

Сопоставление графиков показывает, что:

а) при $\beta = 0$ (трещина отсутствует) коэффициент интенсивности тангенциальных напряжений при возрастании α увеличивается;

б) при $\beta \neq 0$, $P = 0$ с изменением α контактные напряжения резко изменяются, становясь даже знакопеременными. В обоснование этого утверждения можно привести следующее соображение. Под внутренним давлением q_0 берега трещины расходятся, вследствие чего ее конец c опускается. Последнее в свою очередь приводит к тому, что горизонтальные перемещения точек края полосы в полупериоде $(0, l)$ становятся знакопеременными, чем и обусловлена знакопеременность контактных напряжений;

в) если $q_0 = 0$, $P \neq 0$, то при малых β трещина фактически не влияет на распределение контактных напряжений (эти графики не показаны). При $\beta = 3\pi/4$ присутствие трещины влияет, хотя и мало, на распределение контактных напряжений, увеличивая их в средних участках контакта и уменьшая у концов стрингеров.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 17 XI 1977

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, Կ. Լ. ԱՂԱՅԱՆ

ՃԱՔԵՐՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ԵՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՎԵՐԱԴԻՐՆԵՐՈՎ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՇԵՐՏԻ ՄԻ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է առաձգական վերադիրների և առաձգական շերտի կոնտակտային փոխազդեցության պարբերական խնդիրը, երբ շերտը թուլացված է վերադիրների նկատմամբ սիմետրիկ դասավորված կենտրոնական ճաքերով։

Ենթադրելով, որ վերադիրները գտնվում են միառանցք լարվածային վիճակում, խնդրի լուծումը ձևակերպվում է Հիլբերտի կորիզով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի տեսքով։

Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդի օգնությամբ ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի լուծումը բերվում է քվազի լիովին ռեգուլյար գծային հավասարումների անվերջ սիստեմի։

Դիտարկվում է թվային օրինակ։

ON A PERIODIC CONTACT PROBLEM FOR AN ELASTIC STRIP WEAKENED BY CRACKS AND REINFORCED BY ELASTIC STIFFENERS

S. M. MCHITARIAN, K. L. AGAYAN

S u m m a r y

A periodic contact problem on interaction of thin elements in the shape of stiffeners with an elastic strip, where the latter is weakened by central cracks periodically repeating with the same period, is considered.

Assuming the stiffeners to be in a single — axis strained state, the solution to the problem is formulated as a system of singular integral equations with Hilbert's kernel.

By means of Chebishev's orthogonal polynomials, the solution to the integral equation system is reduced to a solution of a quasi-quite regular system of infinite systems of linear equations.

A numerical example is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР. М., «Наука», 1976.
2. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
3. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Доцышин.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. К., «Наукова думка», 1976.
4. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упруго-пластического разрушения. М., «Наука», 1974.
5. *Калындия А. И.* О применении метода функции влияния в плоской теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. 29, № 4.
6. *Грейф Р., Сэндерс мл.* Влияние стрингера на распределение напряжений в листе с трещиной. Прикл. мех., Тр. Америк. о-ва инж. мех., сер. Е, 1965, т. 32, № 1.
7. *Агаян К. Л.* Об одной контактной задаче для бесконечной пластины с трещиной, усиленной упругими накладками. Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. 29, № 4.
8. *Арутюнян Н. Х.* Контактная задача для полуплоскости с креплением. ПММ, 1968, т. 32, № 4.
9. *Муки Р., Стернберг Е.* Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. Прикл. мех., Тр. Америк. о-ва инж.-мех., сер. Е, 1968, т. 35, № 4.
10. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
11. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
12. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений М., Физматгиз, 1962.
13. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Периодическая контактная задача полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1969, т. 33, № 5.
14. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. ПММ, 1970, т. 34, № 3.
15. *Шагинян С. С.* Некоторые контактные задачи для бесконечной пластины с круговым отверстием, усиленной упругими накладками. Докл. АН АрмССР, 1974, т. 59, № 3.
16. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками. ПММ, 1972, т. 36, № 5.
17. *Агаян К. Л.* Некоторые контактные задачи для бесконечной пластины с упругими накладками. МТТ, 1972, № 5.
18. *Isida M.* Stress intensity factors for the tension of an eccentrically cracked strip. J. appl. Mech., ser. E., 1966, v. 33, No. 3.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

Մեխանիկա XXXI, № 3, 1978 Механика

А. С. ЗИЛЬБЕРГЛЕЙТ, И. Н. ЗЛАТИНА

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ И ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Динамические контактные задачи для упругого полупространства при отсутствии сцепления между штампом и основанием рассматривались ранее в работах Н. М. Бородачева, В. Г. Буряка, A. O. Awojobi and P. Grootenhuis; Karasudhi et al. [1—5]. Для решения этих задач использовались, как правило, два метода: сведение поставленной задачи к интегральному уравнению Фредгольма I рода [1, 2] или к парным интегральным уравнениям [3—5].

В работе [2], где решается плоская задача, было построено приближенное решение, основанное на аппроксимации ядра уравнения Фредгольма. В статье [1] то же интегральное уравнение Фредгольма I рода исследовалось методом, восходящим к Зоммерфельду [6]. Полученная при помощи этого метода двучленная низкочастотная асимптотика не может быть, по-видимому, улучшена при помощи регулярной процедуры.

В работах [1, 4, 5] поставленные динамические задачи для полупространства сводились к парным интегральным уравнениям, решение которых строилось с помощью известного метода [7, 8], развитого применительно к статическим проблемам. В работе [4] авторы используют низкочастотное разложение весовой функции, входящей в парные уравнения задачи, и строят два первых члена разложения. Этот метод вряд ли корректен, так как используемые приближения не являются равномерными, о чем свидетельствует, например, тот факт, что слагаемые, содержащие логарифмы частоты, в плоском случае отсутствуют. Кроме того, заметим, что интегральные уравнения Фредгольма II рода, к которым сводятся парные интегральные уравнения в [3, 5], не допускают эффективного асимптотического решения для низких частот.

В связи с этим представляется интересным рассмотрение решения плоской и осесимметричной контактной задачи, которое основано на сведении парных интегральных уравнений к интегральному уравнению Фредгольма II рода. Последнее, в свою очередь, решается для случая малого параметра ka (k — одно из волновых чисел, a — характерный параметр штампа в плане).

Ряд родственных задач о динамическом контакте полуплоскости с упругими накладками изучен в работах [9, 10].

1. Рассмотрим сначала случай, когда на упругом полупространстве расположен жесткий ленточный штамп под действием силы $Pe^{-i\omega t}$, направленной вдоль оси z. В предположении, что трение между штампом и основа-

нием отсутствует, для амплитудных значений вектора перемещений и тензора напряжений имеем следующие граничные условия:

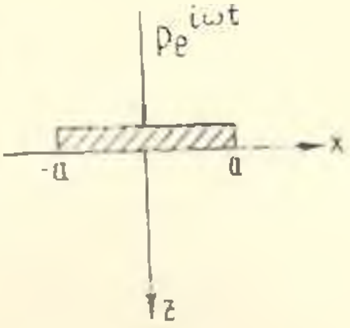
$$w|_{z=0} = \delta, \qquad 0 < x < a \tag{1.1}$$

$$\sigma_z|_{z=0} = 0, \qquad a < x < \infty \tag{1.2}$$

$$\tau_{xz}|_{z=0} = 0, \qquad 0 < x < \infty \tag{1.3}$$

Здесь δ—неизвестная амплитуда колебаний штампа.

Решение динамических уравнений будем искать согласно [11] в потенциалах Гельмгольца—Ламэ F и Φ, которые связаны с u и w с помощью соотношений



Фиг. 1.

$$u = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{1.4}$$

$$w = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{1.5}$$

и удовлетворяют уравнениям Гельмгольца с волновыми числами k_1 и k_2:

$$\Delta F + k_1^2 F = 0 \tag{1.6}$$

$$\Delta \Phi + k_2^2 \Phi = 0 \tag{1.7}$$

Здесь $k_1^2 = \dfrac{\omega^2 d}{G}\dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$; $k_2^2 = \dfrac{\omega^2 d}{G}$; ν — коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига, d — плотность.

Решение уравнений (1.6), (1.7) представим в виде интегралов

$$F = \int_{\Gamma_+} \gamma_1^{-1} A_1(\lambda) e^{-\gamma_1 z} \cos \lambda x \, d\lambda \tag{1.8}$$

$$\Phi = \int_{\Gamma_+} A_2(\lambda) e^{-\gamma_2 z} \sin \lambda x \, d\lambda \tag{1.9}$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$$

$A_1(\lambda)$, $A_2(\lambda)$ — неизвестные функции, имеющие особенности: точки ветвления при $\lambda = k_1, k_2$ и рэлеевский полюс $\lambda = k_R$; контур Γ_+ (фиг. 2) выбран с учетом этих особенностей и условия Зоммерфельда [6].

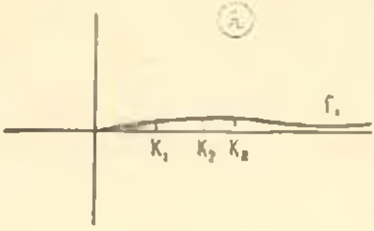
Подставляя (1.8) и (1.9) в граничные условия (1.1)—(1.3), приходим к следующим парным уравнениям:

$$\int_{\Gamma_+} C(\lambda)[1 + \rho(\lambda)] \cos \lambda x \, d\lambda = -\delta^{-1}_{2}, \qquad 0 < x < a \tag{1.10}$$

$$\int_{\Gamma_1} \gamma_1(\lambda)\, C(\lambda) \cos \lambda x\, d\lambda = 0, \qquad a < x < \infty \tag{1.11}$$

где $\varphi(\lambda) = \dfrac{2k_2^2 \gamma_1^2 - \theta\left[(2\lambda^2 - k_2^2)^2 - 4\lambda^2 \gamma_1 \gamma_2\right]}{\theta\left[(2\lambda^2 - k_2^2)^2 - 4\lambda^2 \gamma_1 \gamma_2\right]}$, причем $\varphi = O(\lambda^{-2})$ при $\lambda \to \infty$.

Кроме того,



Фиг. 2.

$$\theta = -2(1-\nu) \tag{1.12}$$

$$A_1(\lambda) = -\frac{2\lambda^2 - k_2^2}{k_2^2}\, \theta \left[1 + \varphi(\lambda)\right] C(\lambda)$$

$$A_2(\lambda) = \frac{2\lambda}{k_2^2}\, \theta \left[1 + \varphi(\lambda)\right] C(\lambda) \tag{1.13}$$

Здесь важно отметить одну существенную особенность плоской динамической задачи: при построении решения парных интегральных уравнений необходимо учитывать, что в плоской статической задаче перемещения, возникающие в полуплоскости под действием неуравновешенной нагрузки на границе, имеют логарифмическую особенность на бесконечности [12]. Эту логарифмическую часть следует выделить особо в решении динамической задачи, если частоты колебаний невелики.

Согласно методу, развитому для аналогичного электродинамического случая в работе [13], будем искать решение уравнений (1.10), (1.11) в виде

$$C(\lambda) = \varkappa \gamma_1^{-1} J_0(a\gamma_1) + ik_1 \int_0^a t\psi(t)\, J_1(t\gamma_1)\, dt \tag{1.14}$$

Здесь $\varkappa$ — неизвестная пока постоянная, $J_0(z)$, $J_1(z)$ — функции Бесселя.

Не останавливаясь на подробностях решения парных уравнений, которые хорошо известны [13, 14], отметим лишь разрывные интегралы, лежащие в основе решения:

$$\int_0^\infty J_0\left(t\sqrt{\lambda^2 - k^2}\right) \cos \lambda x\, d\lambda = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch} k\sqrt{t^2 - x^2}}{\sqrt{t^2 - x^2}}, & x < t \\ 0, & x > t \end{cases} \tag{1.15}$$

$$t \int_k^\infty \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\, J_1\left(t\sqrt{\lambda^2 - k^2}\right) \cos \lambda x\, d\lambda =$$

$$= \begin{cases} \cos kx, & x < t \\ \cos kx - \dfrac{x \cos k\sqrt{x^2 - t^2}}{\sqrt{x^2 - t^2}}, & x > t \end{cases} \tag{1.16}$$

Эти формулы позволяют свести парные уравнения к двум интегральным уравнениям Фредгольма II рода для $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, с которыми $\varphi(t)$ связана соотношением

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varkappa\varphi_2(t) \tag{1.17}$$

Итак,

$$\varphi_n(t) = f_n(t) - \int_0^a K(s, t)\, s\varphi_n(s)\, ds, \quad 0 \leq t \leq a, \quad n = 1, 2 \tag{1.18}$$

$$f_1(t) = -G^{-1}\delta J_1(ik_1 t), \quad f_2(t) = -\frac{1}{ik_1}\int_{\Gamma}[1 + \rho(\lambda)]\, J_0(a\gamma_1)\, J_1(t\gamma_1)\, d\lambda \tag{1.19}$$

$$K(s, t) = \int_0^{k_1} \gamma_1 J_1(s\gamma_1)\, J_1(t\gamma_1)\, d\lambda + \int_{k_1}^{\infty} (\gamma_1 - \lambda)\, J_1(s\gamma_1)\, J_1(t\gamma_1)\, d\lambda +$$

$$+ \int_{\Gamma_+} \gamma_1\rho(\lambda)\, J_1(s\gamma_1)\, J_1(t\gamma_1)\, d\lambda \tag{1.20}$$

Для окончательного определения $\varphi(t)$ остается найти постоянную $\varkappa$. Полагая $z = 0$ в уравнении (1.10) и подставляя туда выражение для $C(\lambda)$, получим

$$\varkappa = -\frac{G^{-1}\delta - ik_1 \int_0^a \varphi_1(t)\, X dt}{Z + ik_1 \int_0^a \varphi_2(t)\, X dt} \tag{1.21}$$

$$Z = \int_{\Gamma_+} [1 + \rho(\lambda)]\, \gamma_1^{-1} J_0(a\gamma_1)\, d\lambda \tag{1.22}$$

$$X = \int_{\Gamma} [1 + \rho(\lambda)]\, J_1(t\gamma_1)\, d\lambda \tag{1.23}$$

Ряд величин, представляющих особый интерес, можно выразить непосредственно через функцию $\varphi(t)$. Так, из (1.8), (1.9), (1.3), (1.4) при помощи (1.15) получаем формулу для контактного напряжения

$$\sigma_z(x, 0) = -2G\left\{[\varkappa - ik_1 a\varphi(a)]\frac{\operatorname{ch} k_1\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \right.$$

$$\left. + k_1 \int_x^a [t\varphi(t)]' \frac{\operatorname{ch} k_1\sqrt{t^2 - x^2}}{\sqrt{t^2 - x^2}}\, dt\right\}, \quad 0 < x < a \tag{1.24}$$

откуда следует выражение для коэффициента интенсивности напряжений

$$K_I = \lim_{x \to a-0} \sqrt{2(a-x)}\,\sigma_z(x, 0) = \frac{2G\,[ik_1 a\varphi(a) - \varkappa]}{\sqrt{a}} \tag{1.25}$$

Выражение (1.24) позволяет также замкнуть решение, исключив неизвестное смещение штампа δ, для которого из уравнения движения штампа получаем следующее выражение:

$$Q - \omega^2 M\delta = P$$

$$Q = -2\pi G\left\{[\varkappa - ik_1 a\varphi(a)]\,I_0(k_1 a) + k_1\int_0^a [t\varphi(t)]'\,I_1(k_1 t)\,dt\right\} \tag{1.26}$$

где M — масса штампа, приходящаяся на единицу его длины, Q — реакция полуплоскости, $I_0(z)$, $I_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

2. Полученное решение позволяет эффективно построить асимптотические разложения искомых величин в случае низких частот ($k_1 a \to 0$). Интегралы, входящие в (1.18)—(1.21) и имеющие бесконечный предел интегрирования, необходимо преобразовать к конечному промежутку интегрирования, чтобы найти их асимптотику. Эта трудность преодолевается использованием методики [13], модифицированной подходящим для нашего случая образом.

Так, например,

$$\int_\Gamma \varphi(\lambda)\,\gamma_1\,J_1(s\gamma_1)\,J_1(t\gamma_1)\,d\lambda =$$

$$= \int_0^{k_1} \frac{\bar\gamma_1}{\bar\gamma_2}\,\frac{-2\bar\gamma_1^2 k_2^2 - \theta[(2\lambda^2 - k_2^2)^2 + 4\lambda^2\bar\gamma_1\bar\gamma_2]}{\theta[(2\lambda^2 - k_2^2)^2 + 4\lambda^2\bar\gamma_1\bar\gamma_2]}\,J_1(is\bar\gamma_1)\,Y_1(it\bar\gamma_1)\,d\lambda +$$

$$+ 8i\int_{k_1}^{k_2} \frac{k_2^2\lambda^2\bar\gamma_1^4\bar\gamma_2\,J_1(s\bar\gamma_1)\,J_1(t\gamma_1)\,d\lambda}{\theta[(2\lambda^2 - k_2^2)^4 + 16\lambda^2\gamma_1^2\gamma_2^2]} + 8\int_{k_1}^{k_2} \frac{k_2^2\lambda^2\gamma_2\gamma_1^4\,J_1(s\gamma_1)\,Y_1(t\gamma_1)}{\theta[(2\lambda^2 - k_1^2)^4 + 16\lambda^2\gamma_1^2\gamma_2^2]}\,d\lambda -$$

$$-\pi i\,\mathrm{Res}\,[\gamma_2\varphi(\lambda)\,J_1(s\gamma_1)\,J_1(t\gamma_1)]\big|_{\lambda = k_R}$$

$$0 \leqslant s < t \leqslant a; \quad \bar\gamma_n = \sqrt{k_n^2 - \lambda^2}, \quad n = 1, 2$$

k_R — решение уравнения Релея и определяется по формуле [16]

$$k_R = \frac{1+\nu}{0.862 + 1.14\nu}\sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}}\,k_1$$

В дальнейшем для удобства перейдем к безразмерным переменным

$$
\begin{gathered}
\lambda = k_1 u, \quad s = a\sigma, \quad t = a\tau, \quad \varphi(t) = \tilde{\varphi}(\tau) \\
\varphi_n(t) = \tilde{\varphi}_n(\tau), \quad n = 1, 2; \quad \varepsilon = k_1 a
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Необходимые разложения цилиндрических функций получаются при помощи интегрального представления

$$
J_1(i\varepsilon\sigma\gamma_1)\, Y_1(i\varepsilon\tau\gamma_1) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} Y_0\left[i\varepsilon\gamma_1(\sigma^2 + \tau^2 - 2\sigma\tau\cos\theta)^{1/2}\right]\cos\theta\, d\theta
$$

и разложения в ряд $Y_0(z)$.

В результате ядро интегральных уравнений (1.18) представляется рядом:

$$
K(s, t) = \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n(\sigma, \tau) + b_n(\sigma, \tau)\varepsilon^2 \ln\varepsilon\right]\varepsilon^{2n} \tag{2.2}
$$

где коэффициенты определяются непосредственно из (1.19).

Опуская, ввиду громоздкости, их общие выражения, приведем значения первых трех:

$$
\begin{gathered}
a_0(\sigma, \tau) = -\alpha_0\sigma\tau^{-1}; \quad a_1(\sigma, \tau) = \sigma\tau\left[\alpha_1 + \alpha_2 \ln\tau\right] + \alpha_3\sigma^3\tau \\
b_0(\sigma, \tau) = \beta_0\sigma\tau; \quad 0 \leq \sigma < \tau \leq 1; \quad a_n, b_n(\sigma, \tau) = b_n, b_n(\tau, \sigma)
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

причем постоянные α_n, β_n являются квадратурами от весовой функции $\rho(\lambda)$ (1.12) и зависят лишь от коэффициента Пуассона ν. Для случая $\nu = 0.3$ имеем:

$$
\begin{gathered}
\alpha_0 = 0.0519; \quad \beta_0 = -1.3510; \quad \alpha_1 = 0.0162 + i0.7273; \\
\alpha_2 = -0.0658; \quad \alpha_3 = 0.1061
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

причем и далее все числовые выражения относятся к случаю $\nu = 0.3$.

Свободные члены уравнения (1.20) также представляются рядами по параметру ε:

$$
f_1(t) = i\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\tau)\varepsilon^{2n}; \qquad C_n(\tau) = \frac{(-i\tau)^{n+1}}{i2^{n+1}\, n!\,(n+1)!} \tag{2.5}
$$

$$
f_2(t) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left[p_n(\tau) + q_n(\tau)\ln\varepsilon\right]\varepsilon^{2n}
$$

$$
p_0(\tau) = l_1\tau; \quad q_0(\tau) = l_0\tau; \quad l_0 = -i0.1886; \quad l_1 = 0.2316 - i1.1980
$$

$$
p_1(\tau) = l_3\tau^3; \quad q_1(\tau) = l_2\tau^3
$$

Разыскивая, наконец, $\tilde{\varphi}_n(\tau)$, $n = 1, 2$, в виде разложений

$$
\begin{aligned}
\bar{\varphi}_1(\tau) &= \varepsilon \left[\Phi_{0,0}(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} \sum_{m=0}^{n-1} \Phi_{m,n}(\tau) \ln^m \varepsilon \right] \\
\bar{\varphi}_2(\tau) &= \varepsilon \left[\psi_{1,0}(\tau) \ln \varepsilon + \psi_{0,0}(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} \sum_{m=0}^{n-1} \psi_{m,n}(\tau) \ln^m \varepsilon \right]
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

и подставляя (2.2)—(2.6) в уравнения Фредгольма (1.18), определяем искомые коэффициенты (2.6) через известные величины, входящие в (2.2)—(2.5):

$$
\Phi_{0,0}(\tau) = C_0(\tau); \quad \Phi_{0,n}(\tau) = C_n(\tau) - \int_0^1 \sigma d\sigma \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_{0,k}(\sigma)\, a_{n-k-1}(\sigma, \tau)\, d\sigma
$$

$$
n = 1, 2, \ldots
$$

$$
\Phi_{m,n}(\tau) = -\int_0^1 \sigma d\sigma \left[\sum_{k=m+1}^{n-1} \Phi_{m,k}(\sigma)\, a_{n-k-1}(\sigma, \tau) + \sum_{k=m}^{n-2} \Phi_{m-1,k}(\sigma)\, b_{n-k-2}(\sigma, \tau)\, d\sigma \right]
$$

$$
n = 1, 2, \ldots; \quad m = 1, 2, \ldots, n-1
$$

$$
\psi_{1,0}(\tau) = q_0(\tau); \quad \psi_{0,0}(\tau) = p_0(\tau) \tag{2.7}
$$

$$
\psi_{0,n}(\tau) = p_n(\tau) - \int_0^1 \sigma d\sigma \sum_{k=0}^{n-1} \psi_{0,k}(\sigma)\, a_{n-k-1}(\sigma, \tau); \quad n = 1, 2, \ldots
$$

$$
\psi_{1,n}(\tau) = q_n(\tau) - \int_0^1 \sigma d\sigma \left[\psi_{1,0}(\sigma)\, a_{n-1}(\sigma, \tau) + \sum_{k=2}^{n-1} \psi_{1,k}(\sigma)\, a_{n-k-1}(\sigma, \tau) + \sum_{k=0}^{n-2} \psi_{0,k}(\sigma)\, b_{n-k-2}(\sigma, \tau) \right]; \quad n = 1, 2, \ldots
$$

$$
\psi_{2,n}(\tau) = -\int_0^1 \sigma d\sigma \left[\sum_{k=3}^{n-1} \psi_{2,k}(\sigma)\, a_{n-k-1}(\sigma, \tau) + \sum_{k=2}^{n-2} \psi_{1,k}(\sigma)\, b_{n-k-2}(\sigma, \tau) + \psi_{1,0}\, b_{n-2}(\sigma, \tau) \right]; \quad n = 3, 4, \ldots
$$

$$
\psi_{m,n}(\tau) = -\int_0^1 \sigma d\sigma \left[\sum_{k=m+1}^{n-1} \psi_{m,k}(\sigma)\, a_{n-k-1}(\sigma, \tau) + \sum_{k=m}^{n-2} \psi_{m-1,k}(\sigma)\, b_{n-k-2}(\sigma, \tau) \right]
$$

$$
n = 4, 5, \ldots; \quad m = 3, 4, \ldots, n-1;
$$

причем пустые суммы и величины с отрицательными индексами принимаются равными нулю.

В частности, имеем

$$\bar{\varphi}_1(\tau) = -\frac{\beta}{2\theta}\,\varepsilon\tau\left[1 - \frac{1}{4}(\gamma_0\tau^2 + i\tau - 2\alpha_0)\,\varepsilon^2 - \frac{1}{5}\beta_0\tau^2\varepsilon^3\ln\varepsilon + O(\varepsilon^4)\right]$$

$$\bar{\varphi}_2(\tau) = \varepsilon\tau\left\{l_0\ln\varepsilon + l_1 + \left(l_2\tau^2 + \frac{1}{4}l_0\beta_0\right)\varepsilon^2\ln\varepsilon + \right.$$

$$\left. + \left[\left(l_1 - \frac{1}{4}\alpha_0 l_2\right)\tau^2 + \frac{1}{2}\alpha_0 l_1\right]\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4\ln\varepsilon)\right\} \qquad (2.8)$$

Найденные формулы позволяют установить вид разложений для всех искомых величин. Так, комплексная амплитуда колебаний штампа представляется разложением

$$\delta = \frac{P\beta}{2\pi G}\,[d_0\ln\varepsilon + d_1 - C_1 d_0\varepsilon^2\ln^2\varepsilon + (d_2 - C_1 d_1 - C_2 d_0)\,\varepsilon^2\ln\varepsilon +$$

$$+ d_3\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4\ln\varepsilon)] \qquad (2.9)$$

а постоянная $\varkappa$ имеет вид

$$\varkappa = -\frac{P}{2\pi G}\left[1 - d_0 C_1\frac{\varepsilon^2\ln^2\varepsilon}{p} - (d_1C_1 + d_0C_2)\frac{\varepsilon^2\ln\varepsilon}{p} + O\left(\frac{\varepsilon^4\ln^2\varepsilon}{p^2}\right)\right] \qquad (2.10)$$

$$p = d_0\ln\varepsilon + d_1$$

Коэффициенты d_n находятся из (1.22), а коэффициенты C_n — из (1.26)

$d_0 = -0.1224;$	$C_1 = -0.0381 - i\,0.0843 - 0.1224\,T$
$d_1 = 0.3678 - i\,0.3377;$	$C_2 = 1.0990 + i\,0.2990 + (0.3678 - i\,0.3377)\,T$
$d_2 = 0.0189;$	$C_3 = 0.2645 - i\,0.2411 + (0.0234 - i\,0.5057)\,T$
$d_3 = 0.0234 + i\,0.5057;$	$T = \theta\dfrac{M}{2\pi a^2 d};\quad \nu = 0.3$

Окончательно для контактного напряжения имеем

$$\sigma_y(x, 0) = \mathrm{Re}\left\{-\frac{Pa e^{i\omega t}}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}\left[1 + j_1\varepsilon^2\ln\varepsilon + \left(j_2 + j_3\frac{x^2}{a^2}\right)\varepsilon^2 + \right.\right.$$

$$\left. + j_4\frac{\varepsilon^2\ln\varepsilon}{p} + O\left(\frac{\varepsilon^4\ln^2\varepsilon}{p}\right)\right] +$$

$$\left. + \frac{Pe^{i\omega t}}{\pi}\,\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\,[j_1'\varepsilon^2\ln\varepsilon + j_2'\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4\ln^2\varepsilon)]\right\} \qquad (2.11)$$

$j_1 = -0.1886;$ $\qquad j_4 = 0.4300 + i\,0.5050 + (0.0450 - i\,0.0433)\,\theta \dfrac{M}{2\pi a^2 d}$

$j_2 = -0.6980 - i\,0.2316;$ $\quad j_1' = -i\,0.3108$

$j_3 = 0.5$ $\qquad j_2' = 0.3377 + i\,0.3678$

3. Рассмотрим теперь осесимметричный случай, когда на полупространство действует жесткий круглый в плане штамп радиуса a, совершающий гармонические колебания с неизвестной комплексной амплитудой δ под вертикальной нагрузкой P.

$$\int_{\Gamma} [1 + \varphi(\lambda)]\, C(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, d\lambda = \delta, \qquad 0 < r < a \tag{3.1}$$

$$\int_{\Gamma} \gamma_1(\lambda)\, C(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, d\lambda = 0, \qquad a < r < \infty \tag{3.2}$$

$$\varphi(\lambda) = \frac{2k_2^2 \gamma_1^2 - \theta\left[(2\lambda^2 - k_2^2)^2 - 4\lambda^2\gamma_1\gamma_2\right]}{\theta\left[(2\lambda^2 - k_2^2)^2 - 4\lambda^2\gamma_1\gamma_2\right]}, \qquad \theta = -2(1-\nu) \tag{3.3}$$

Следуя подходу работы [15], положим

$$C(\lambda) = \frac{\lambda}{\gamma_1} \int_0^a \varphi(t) \cos t\gamma_1\, dt \tag{3.4}$$

где $\varphi(t)$ подлежит определению, $\varphi(t) \in C^1[0, a]$.
Принимая во внимание разрывные интегралы:

$$\int_0^\infty \frac{\lambda \sin t\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\, J_0(\lambda r)\, d\lambda = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch} k\sqrt{t^2 - r^2}}{\sqrt{t^2 - r^2}}, & r < t \\ 0, & r > t \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{\lambda \cos t\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\, J_0(\lambda r)\, d\lambda = -\frac{i \sin k\sqrt{r^2 - t^2}}{\sqrt{r^2 - t^2}} + \tag{3.5}$$

$$+ \begin{cases} 0, & r < t \\ \dfrac{\cos k\sqrt{r^2 - t^2}}{\sqrt{r^2 - t^2}}, & r > t \end{cases}$$

из (3.1)—(3.3) получаем интегральное уравнение Фредгольма II рода относительно $\varphi(t)$

$$\psi(t)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^a \psi(s)\left[G(s+t)+G(s-t)+\right.$$

$$\left.+\frac{\operatorname{sh}k_1(s+t)}{i(s+t)}+\frac{\operatorname{sh}k_1(s-t)}{i(s-t)}\right]ds=\frac{2\delta}{\theta\pi}\operatorname{ch}k_1t,\quad 0\leqslant t\leqslant a \qquad (3.6)$$

причем

$$G(u)=\int\limits_{\Gamma_+}\lambda\gamma_1^{-1}\varphi(\lambda)\cos u\gamma_1 d\lambda$$

Выражение для контактного напряжения $\sigma_z(r, 0)$ имеет вид

$$\sigma_z(r,0)=2G\left[\psi(a)\frac{\operatorname{ch}k_1\sqrt{a^2-r^2}}{\sqrt{a^2-r^2}}-\int\limits_r^a\psi'(t)\frac{\operatorname{ch}k_1\sqrt{t^2-r^2}}{\sqrt{t^2-r^2}}dt\right] \qquad (3.7)$$

$$0<r<a$$

откуда для коэффициента интенсивности следует выражение

$$K_I=\frac{2G\psi(a)}{\sqrt{a}}$$

Амплитуда колебаний штампа δ определяется из уравнения движения штампа согласно формулам

$$(Q-M\omega^2\delta)=P$$

$$Q=-2\pi\int\limits_0^a\sigma_z(r,0)\,rdr=\frac{4\pi G}{k_1}\left[\psi(a)\operatorname{sh}k_1a-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^a\psi'(t)\operatorname{sh}k_1t\,dt\right]=4\pi G\int\limits_0^a\psi(t)\operatorname{ch}k_1t\,dt \qquad (3.8)$$

4. Низкочастотное асимптотическое разложение решения строится в данном случае значительно проще, чем в плоской задаче, ибо не содержит логарифмических членов, так как предельная статическая задача не имеет особенностей.

Переходя к безразмерным переменным (2.1), из (3.7) при помощи контурного интегрирования получаем разложение ядра интегрального уравнения (3.6)

$$K(\sigma,\tau)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\varepsilon^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\varepsilon^{2n+1}\right] \qquad (4.1)$$

$$\alpha_n(\sigma,\tau)=\alpha_n\left[(\sigma+\tau)^{2n}+(\sigma-\tau)^{2n}\right];\quad \beta_n(\sigma,\tau)=\beta_n\left[(\sigma+\tau)^{2n+1}+(\sigma-\tau)^{2n+1}\right]$$

$$\alpha_n,\ \beta_n=\mathrm{const}$$

здесь

$$\alpha_0 = -i\,0.8957; \quad \alpha_1 = i\,0.7301; \quad \beta_0 = 0.2991 + i\,0.1609$$

при

$$\nu = 0.3$$

поэтому

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^+(\tau)\,\varepsilon^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^-(\tau)\,\varepsilon^{2n+1}$$

и

$$\varphi_n^+(\tau) = \frac{2\delta}{\pi\theta}\,\frac{\tau^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{\pi}\int_0^1 d\sigma \sum_{k=0}^{n-1}\left(i\varphi_k^- \alpha_{n-k-1} + \varphi_k^+ \beta_{n-k-1}\right)$$

$$\varphi_n^-(\tau) = -\frac{1}{\pi}\int_0^1 d\sigma \sum_{k=0}^{n}\left(i\varphi_k^+ \alpha_{n-k} + \varphi_k^- \beta_{n-k-1}\right) \tag{4.2}$$

$$n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

На основе (4.2) получаются разложения для искомых величин

$$\sigma_z(r,\,0) = \mathrm{Re}\left\{-\frac{Pe^{i\omega t}}{2\pi\sqrt{a^2-r^2}}\left[1 + \left(j_1 + j_2\frac{r^2}{a^2}\right)\varepsilon^2 + \left(j_3 + j_4\frac{r^2}{a^2}\right)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)\right] - \frac{Pe^{i\omega t}}{2\pi}\,\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{a}\left[j_1'\varepsilon^2 + j_2'\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)\right]\right\} \tag{4.3}$$

$$j_1 = 0.4048 + i\,0.4488; \quad j_3 = -0.2267 - i\,0.8140; \quad j_1' = 1$$

$$j_2 = -0.5; \quad j_4 = -i\,0.2851; \quad j_2' = -i\,1.500$$

Сходимость этих рядов для достаточно малых ε может быть легко обоснована методом мажорант. Подобное обоснование проводится и в плоском случае, хотя и несколько сложнее.

Авторы выражают признательность А. Н. Златину за помощь в вычислениях.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе

Поступила 6 IV 1977

Ա. Ս. ԶԻԼԲԵՐԳԼԵՅՏ, Ի. Ն. ԶԼԱՏԻՆԱ

ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Ամփոփում

Զույգ ինտեգրալ հավասարումների մեթոդով կառուցվել է կոշտ դրոշմի ազդեցության տակ գտնվող կիսահարթության և կիսատարածության կայունացված տատանումների խնդրի լուծումը։ Խնդրի լուծումը բերվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարմանը, որը թույլ է տալիս ցածր հաճախականության դեպքում ստանալ արդյունավետ ասիմպտոտական լուծում։ Ստացվել են կոնտակտային լարման, դրոշմի տատանումների ամպլիտուդայի և լարումների ինտենսիվության գործակցի համար արտահայտությունները։

DYNAMIC CONTACT PROBLEM FOR THE HALF-PLANE AND HALF-SPACE

A. S. SILBERGLEIT, I. N. ZLATINA

Summary

The stationary vibration problem for a rigid stamp placed on the elastic half-plane or half-space is solved by the method of dual integral equations. The problem is reduced to Fredholm integral equation of the second kind, its effective asymptotic low-frequency solution is obtained. The expressions for the contact stress, the amplitude of the stamp vibration and the stress intencity factor are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бороздчев Н. М.* Об определении напряжений под колеблющимся фундаментом. Основания, фундаменты и механика грунтов, 1962, 3.
2. *Бурях В. Г.* Динамическая контактная задача для упругой полуплоскости МТТ, Изв. АН СССР, 1972, № 6.
3. *Бороздчев Н. М.* О решении динамической контактной задачи для полупространства в случае осевой симметрии. Изв. АН СССР, ОТН, сер. мех. и машиностроение 1960, № 4.
4. *Awojobi, Grootenhuis P.* Vibration of rigid bodies on semiinfinite elastic media. Proc. of the Royal Society, Ser. A., Math. and Phys. Scien., 1965, vol. 287, No. 1408.
5. *Karasudhi P., Keer L. M., Lee S. L.* Vibratory motion of a body on an elastic half plane. J. Appl. Mech., 1968, 35, 4.
6. *Зоммерфельд А.* Оптика. М., Изд. «Иностранная литература», 1953.
7. *Cooke J.* A solution of Tranters dual integral equations problem. Quart. Journ. of Mech. and Appl. Math., 1955, 9, 1.
8. *Лебедев Н. Н.* Распределение электричества на тонком параболоидальном сегменте. Докл. АН СССР, 1957, 114, 3.

9. *Григорян Э. Х.* О двух динамических контактных задачах для полуплоскости с упругими накладками. МТТ, Изв. АН СССР, 1975, 5.

10. *Григорян Э. Х.* О динамической задаче для полуплоскости, усиленной упругой накладкой конечной длины. ПММ, 1974, 38, 2.

11. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М., ОНТИ, 1937.

12. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., Изд. «Наука», 1968.

13. *Лебедев Н. Н., Скальская И. П.* Применение парных интегральных уравнений к задаче дифракции электромагнитных волн на тонкой проводящей ленте. ЖТФ, 1972, XLII, 4.

14. *Лебедев Н. Н., Скальская И. П.* Применение парных интегральных уравнений к электростатическим задачам для полого проводящего цилиндра конечной длины. ЖТФ, 1973, XLIII, 1.

15. *Ахиезер Н. И., Ахиезер А. Н.* К задаче о дифракции электромагнитных волн у кругового отверстия в плоском экране. Докл. АН СССР, 1956, 109, 1.

16. *Achenbach J. D.* Wave propagation in elastic solids. North-Holland Publishing Company, 1976.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXI, №3, 1978 Механика

Р. М. КИРАКОСЯН

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОДНОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НАИМЕНЬШЕГО ОБЪЕМА

Задачи проектирования трехслойных конструкций наименьшего объема в рамках теории идеально-пластического материала при кусочно-линейных поверхностях текучести рассматривались во многих работах (например, [1]—[5] и др.). Проектированию однослойных конструкций наименьшего объема посвящено сравнительно мало исследований ([6]—[8] и др.). Наиболее полное представление о современном состоянии оптимального проектирования тонкостенных конструкций можно составить с помощью работ [9]—[11].

В настоящей статье в рамках теории идеальной пластичности рассматриваются задачи проектирования однослойных круговых цилиндрических оболочек наименьшего объема при гладкой и кусочно-линейных поверхностях текучести. Следуя [12], полученные краевые задачи сводятся к задачам Коши относительно обобщенных функций. Приводятся результаты численного решения, которые в силу независимости от физико-механических характеристик материала и габаритных размеров оболочки носят общий характер.

1. Рассмотрим шарнирно опертую по торцам круговую цилиндрическую оболочку длиной $2l$ и радиусом R, несущую внешнее давление интенсивности p. Ось x направим по образующей срединной поверхности, ось φ — по окружности, а z — по радиусу внутрь цилиндра. В предположении об отсутствии осевой силы T_x, для скоростей осевой и кольцевой деформаций оболочки ε_x и ε_φ имеем следующие выражения через скорость прогиба w [12]:

$$\varepsilon_x = \frac{w}{2R} - z\frac{d^2 w}{dx^2}, \qquad \varepsilon_\varphi = -\frac{w}{R} \tag{1.1}$$

Уравнение равновесия дифференциального элемента оболочки имеет вид

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{T_\varphi}{R} + p = 0 \tag{1.2}$$

где T_φ — кольцевое усилие, M_x — изгибающий момент в поперечных сечениях оболочки.

Известно [3], что если при заданных нагрузках оболочка находится в предельном состоянии и существует такое поле виртуальных скоростей деформаций, при котором скорость диссипации удельной энергии принимает постоянное значение во всей оболочке, то такая оболочка имеет наименьший объем.

Условие постоянства скорости диссипации удельной энергии в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$\frac{D}{h} = -\frac{T_\varphi \dfrac{w}{R} + M_x \dfrac{d^2 w}{dx^2}}{h} = \alpha = \mathrm{const} > 0 \qquad (1.3)$$

где D — скорость диссипации энергии единичной площади срединной поверхности, h — искомая толщина оболочки, α — положительная постоянная. В состоянии предельного равновесия усилия и моменты оболочки должны удовлетворять уравнению поверхности текучести.

Известно [12], что поверхность текучести оболочки $F = 0$, соответствующая условию постоянства интенсивности касательных напряжений, является гладкой поверхностью, параметрические уравнения которой в рассматриваемом случае

$$T_\varphi < 0, \qquad M_x \geqslant 0, \qquad M_\varphi = \frac{1}{2} M_x \qquad (1.4)$$

имеют вид

$$\begin{gathered} t_\varphi = \frac{T_\varphi}{T_s} = -\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \ln \frac{1+\sqrt{1-\mu^2}}{\mu} < 0 \\ m_x = \frac{M_x}{M_s} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} - \frac{\mu^2}{1-\mu^2} \ln \frac{1+\sqrt{1-\mu^2}}{\mu} \right] > 0 \end{gathered} \qquad (1.5)$$

где

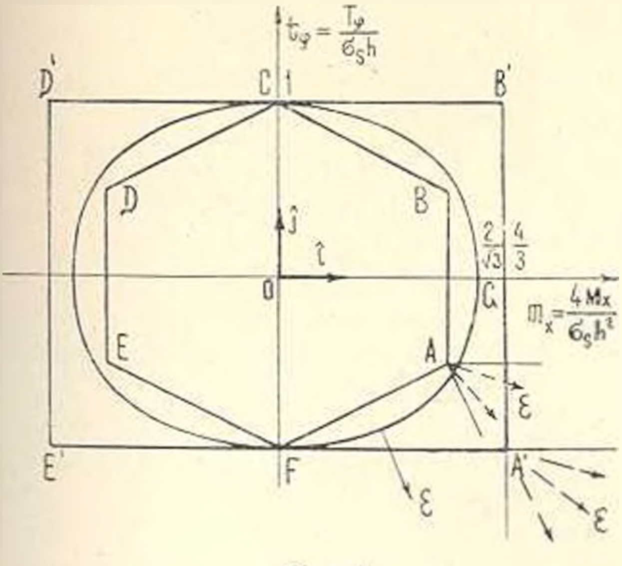
$$1 > \mu = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_H} = \frac{\sqrt{3}w}{\sqrt{3w^2 + R^2 h^2 (d^2 w/dx^2)^2}} > 0 \qquad (1.6)$$

ε_0 и ε_H — значения интенсивности скоростей деформаций сдвига, соответственно в срединной поверхности оболочки и на ее внешней и внутренней поверхностях, $T_s = \sigma_s h$ и $M_s = \sigma_s h^2/4$ — полная пластическая мембранная сила и полный пластический изгибающий момент сечения оболочки, σ_s — предел упругости материала. Уравнениям (1.5) на фиг. 1 соответствует та часть кривой L, которая находится в четвертом квадранте координатной плоскости t_φ, m_x (дуга GAF).

Конечные соотношения между усилием и моментами (1.5) получены из уравнений теории малых упруго-пластических деформаций, в предположении об отсутствии упрочнения материала. Поэтому соотношения (1.5) обеспечивают автоматическое выполнение ассоциированного закона течения.

Кроме гладкой поверхности (1.5) в настоящей работе будут рассмотрены две ее кусочно-линейные аппроксимации, соответствующие условиям постоянства: 1) максимального касательного напряжения (шестиугольник

$ABCDEFA$, фиг. 1) и 2) максимального приведенного напряжения (прямоугольник $A'B'D'E'A'$). Эти поверхности обычно используют с целью получения верхней и нижней оценок для объема оболочки [4], [13].



Фиг. 1.

Нетрудно убедиться в том, что условие наименьшего объема (1.3) можно удовлетворить только в угловых точках поверхностей текучести A (случай 1) и A' (случай 2). В силу этого

$$T_\varphi = -aT_s = -a\sigma_s h, \qquad M_x = bM_s = b\frac{\sigma_s h^2}{4} \tag{1.7}$$

где для коэффициентов a и b следует брать

$$\text{в случае 1)} \qquad a = \frac{1}{2}, \qquad b = 1 \qquad (\text{точка } A) \tag{1.8}$$

$$\text{в случае 2)} \qquad a = 1, \qquad b = \frac{4}{3} \qquad (\text{точка } A') \tag{1.9}$$

2. Рассмотрим случай кусочно-линейных поверхностей текучести. Определив толщину оболочки из (1.3) и подставив ее в уравнение равновесия (1.2), с учетом обозначений

$$w = \frac{\sigma R}{\sigma_s}\bar{w}, \qquad \frac{x}{l} = c\bar{x} \tag{2.1}$$

где c — неизвестная безразмерная постоянная, приходим к линейной системе дифференциальных уравнений относительно четырех функций $\bar{w}$, u, v, t

$$\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = u, \quad \frac{du}{d\bar{x}} = v, \quad \frac{dv}{d\bar{x}} = t$$

$$\frac{dt}{d\bar{x}} = \frac{v^3}{(a\bar{w}-1)^2}\bar{p} + \frac{av^2}{2(a\bar{w}-1)} + \frac{a^2u^2v}{(a\bar{w}-1)^2} + \frac{3t^2}{v} -$$

$$- \frac{4aut}{a\bar{w}-1} = f(\bar{w}, u, v, t) \qquad (2.2)$$

Здесь

$$\bar{p} = \frac{b}{8\varepsilon_1 c^2}\frac{R^2}{l^2}p \qquad (2.3)$$

В качестве граничных условий используем условия симметрии задачи относительно середины пролета $x = 0$ и условия шарнирного опирания оболочки на одном из ее торцов $x = \pm l$.

Условия симметрии с учетом (2.1) и (2.2) запишем в виде

$$u\Big|_{\bar{x}=0} = 0 \quad \left(\frac{dw}{dx}\Big|_{x=0} = 0\right)$$

$$t\Big|_{\bar{x}=0} = 0 \quad \left(\frac{dk}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{4lc}{bKv^2}[auv - t(a\bar{w}-1)]\Big|_{\bar{x}=0} = 0\right) \qquad (2.4)$$

Условия же шарнирного опирания ($w = M_x = 0$) на торце оболочки $x = l$ $(\bar{x} = \bar{x}_l)$ будут

$$\bar{w}\Big|_{\bar{x}=\bar{x}_l} = 0 \quad (w|_{x=l} = 0)$$

$$\frac{(a\bar{w}-1)^2}{v^2}\Big|_{\bar{x}=\bar{x}_l} = 0, \quad \left(M_x|_{x=l} = \frac{4\varepsilon_1 l^3c^4}{bR^2}\frac{(a\bar{w}-1)^2}{v^2}\Big|_{\bar{x}=\bar{x}_l} = 0\right) \qquad (2.5)$$

С целью формального приведения рассматриваемой краевой задачи к задаче Коши, условия срединного сечения оболочки (2.4) дополним, задаваясь некоторыми значениями безразмерных скоростей прогиба и изменения кривизны оболочки в этом сечении. После этого условия в сечении $\bar{x} = 0$ примут вид

$$u = 0, \quad t = 0, \quad \bar{w} = \bar{w}_0, \quad v = v_0^* \quad (\bar{x} = 0) \qquad (2.6)$$

Если путем численного интегрирования системы (2.2) при начальных условиях (2.6) условия шарнирного опирания оболочки (2.5) при некотором $\bar{x} = \bar{x}_l$ удовлетворяются одновременно, то, очевидно, выбранные значения $\bar{w}_0$ и v_0^* истинны и задача решена. В противном случае необходимо варьировать значения $\bar{w}_0$ и v_0^* до одновременного удовлетворения условий (2.5). Причем достаточно варьировать лишь значение безразмерной скорости изменения кривизны v_0^*, а значение безразмерной скорости прогиба $\bar{w}_0$ можно оставить неизменным. Дело в том, что безразмерная скорость прогиба срединного сечения $\bar{w}_0$ не зависит от неизвестной постоянной c и поставленная задача имеет смысл при любом ее значении

$$0 < \bar{w}_0 < \frac{1}{a} \tag{2.7}$$

Следует, однако, заметить, что задание конкретного значения $\bar{w}_0$ для данного материала накладывает ограничение на нагрузку и габаритные размеры оболочки.

Имея в виду вышесказанное, численное интегрирование системы (2.2) можно реализовать по следующей схеме.

Задаются некоторые значения безразмерных величин $\bar{p}$ и $\bar{w}_0$, которые в дальнейшем остаются неизменными. Для данного значения $v_0^* < 0$ проводится численное интегрирование системы (2.2) до тех пор, пока не удовлетворится одно из граничных условий (2.5). Допустим, при $\bar{x} = \bar{x}_1^*$ удовлетворяется первое условие, а второе — нет, то есть

при

$$\bar{x} = \bar{x}_1^*, \quad \bar{w} = 0, \qquad \frac{(a\bar{w} - 1)^2}{v^2} - \bar{M}^* \neq 0 \tag{2.8}$$

Это соответствует случаю шарнирно опертой оболочки, в опорных сечениях которой приложены равномерно распределенные по окружности изгибающие моменты

$$M_*^{**} = \frac{4\sigma_*}{h}\frac{c^4 l^4}{R^2}\bar{M}^* \tag{2.9}$$

Повторяя численное интегрирование системы, для различных v_0^* добиваются одновременного выполнения двух граничных условий (2.5). После этого решение задачи фактически завершается, так как, имея действительные значения $\bar{w}_0$, v_0^*, а следовательно, и v, $\bar{w}$ можно вычислить все необходимые величины, в частности, толщину h и объем оболочки V

$$h = \frac{4l^2}{bR\bar{x}_1^2}\frac{a\bar{w} - 1}{v}, \qquad V = \frac{16\pi c l^3}{b\bar{x}_1}\int_0^{\bar{x}_1}\frac{a\bar{w} - 1}{v}\,d\bar{x} \tag{2.10}$$

Следует заметить, что система дифференциальных уравнений (2.2) и граничные условия (2.5), (2.6) не содержат геометрических и физико-механических параметров оболочки. В силу этого задача в рассмотренном виде носит общий характер. Достаточно эту задачу решить только один раз. Результаты же в каждом конкретном случае можно получить с помощью формул пересчета (2.1), (2.10), которые уже содержат параметры оболочки.

Так как значения нагрузки и скорости изменения кривизны оболочки в конечном счете не зависят от выбора $\bar{p}$ и $\bar{v}_0$ (то есть от значения неизвестной постоянной), то с помощью масштабного изменения

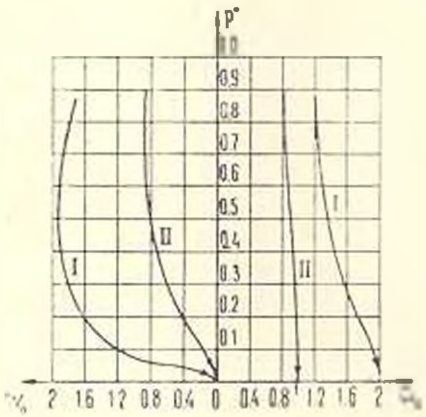
$$\bar{p}_1 = \frac{\bar{p}}{x_i^*}, \qquad v_{0,1} = v_0 \bar{x}_i^* \tag{2.11}$$

приходим к единичной безразмерной длине

$$\bar{x}_{i,1} = 1, \quad c = 1 \tag{2.12}$$

Заметим, что применяемый метод значительно прост по сравнению с прямыми методами решения краевых задач. В силу введения неизвестной постоянной второй край становится неизвестным. Достаточно проинтегрировать уравнение только один раз до того значения нового аргумента $x_{i,1}$ при котором удовлетворяется второе краевое условие. Принимая $x = x_i$ в качестве второго края, определяем неизвестную постоянную и задача решена. Если же эту задачу решить прямыми методами, то для удовлетворения второго краевого условия, как известно, машина должна осуществить многократное интегрирование.

В нижеприведенной табл. 1 представлены некоторые результаты решения задачи, когда в качестве поверхности текучести принята поверхность (1.9), соответствующая условию постоянства максимального приведенного напряжения. Имея в виду исключительную важность значений $\bar{w}_0$ и $\bar{v}_0$ (они составляют нехватающие начальные условия задачи Коши), на фиг. 2 приведены графики их зависимости от давления p^*.



Фиг. 2.

Так как напряженные состояния оболочки характеризуются угловыми точками на поверхностях текучести, то согласно с ассоциированным законом течения векторы обобщенных скоростей пластических деформаций*

$$\bar{\xi} = -\frac{\varepsilon_s h^2}{4}\frac{d^2 w}{dx^2}\bar{i} - \varepsilon_s h \frac{w}{R}\bar{j} \tag{2.13}$$

где $\bar{i}$ и $\bar{j}$ — единичные векторы вдоль осей обобщенных усилий m_x и t_y соответственно, должны лежать в пучках, ограниченных нормалями к поверхности текучести в примыкающих точках. Эти ограничения с учетом (2.1) и (2.2) примут вид

* Если не учитывать изменения геометрии, то при пластическом разрушении оболочки под действием постоянных нагрузок упругие деформации будут оставаться постоянными [3], поэтому скорости деформации при разрушении будут чисто пластическими.

Таблица 1

$a=1,\quad b=\frac{4}{3},\quad M^*=\frac{3R^2}{\sigma_s l^4}M\cdot 10^4,\quad p^*=\frac{8p}{b}=\frac{pR^2}{\sigma_s l^2},\quad \dot{v}_0=v_0\cdot 10^4,\quad V^*=\frac{V}{16\pi l^3}$

	$p^*=0.892;$ $\dot{v}_0=-9150.08;$ $V^*=0.01328$			$p^*=0.471;$ $\dot{v}_0=-7564.05;$ $V^*=0.00832$			$p^*=0.286;$ $\dot{v}_0=-5729.45;$ $V^*=0.005729$		
$\bar{x}$	$\bar{w}$	$\frac{hR}{l^2}$	M^*	$\bar{w}$	$\frac{hR}{l^2}$	M^*	$\bar{w}$	$\frac{hR}{l^2}$	M^*
0	0.800	0.656	477.8	0.900	0.397	174.8	0.950	0.262	76.16
0.2	0.781	0.645	461.9	0.884	0.391	169.7	0.938	0.259	74.28
0.4	0.721	0.610	412.8	0.832	0.372	153.9	0.896	0.248	68.21
0.6	0.605	0.541	325.8	0.724	0.335	124.6	0.801	0.225	56.45
0.8	0.397	0.415	191.4	0.511	0.263	76.75	0.592	0.180	35.92
0.9	0.233	0.302	101.5	0.329	0.197	43.04	0.396	0.135	20.57
0.92	0.192	0.270	81.30	0.282	0.178	35.28	0.344	0.124	16.93
0.94	0.148	0.233	60.23	0.230	0.156	27.13	0.285	0.109	13.08
0.96	0.099	0.186	38.31	0.172	0.129	18.56	0.218	0.090	8.988
0.98	0.044	0.118	15.45	0.106	0.093	9.539	0.140	0.064	4.627
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$p^*=0.128;$ $\dot{v}_0=-2416.15;$ $V^*=0.00269$			$p^*=0.058;$ $\dot{v}_0=-521.105;$ $V^*=0.00129$			$p^*=0.033;$ $\dot{v}_0=-90.5148;$ $V^*=0.000778$		
0	0.990	0.124	17.13	0.999	0.058	3.682	0.9999	0.035	1.220
0.2	0.985	0.123	16.87	0.998	0.057	3.658	0.9997	0.033	1.217
0.4	0.963	0.120	15.94	0.991	0.057	3.559	0.9977	0.033	1.203
0.6	0.902	0.112	13.87	0.961	0.054	3.270	0.9847	0.032	1.147
0.8	0.721	0.092	9.512	0.825	0.047	2.443	0.8924	0.029	0.927
0.9	0.510	0.072	5.729	0.610	0.037	1.543	0.6991	0.024	0.629
0.92	0.448	0.065	4.773	0.537	0.034	1.292	0.6265	0.022	0.539
0.94	0.376	0.058	3.734	0.449	0.030	1.010	0.5332	0.020	0.434
0.96	0.290	0.048	2.602	0.338	0.024	0.6910	0.4112	0.016	0.311
0.98	0.187	0.035	1.362	0.194	0.017	0.3270	0.2457	0.012	0.166
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

случай 1)

$$0 \leqslant \bar{w} \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \approx 0.93 \tag{2.14}$$

случай 2)

$$\bar{w} \geqslant 0, \quad v \leqslant 0 \tag{2.15}$$

Очевидно, что при условии текучести, соответствующем условию постоянства максимального приведенного напряжения (условие (1.9)), ограничения ассоциированного закона течения (2.15) удовлетворяются автоматически и решение задачи по этой схеме справедливо всегда. Оно дает нижнюю оценку для объема оболочки.

Решения же по схеме, соответствующей постоянству максимального касательного напряжения (условие (1.8)), как показывают вычисления, для оболочек практических габаритных размеров не удовлетворяют ограничениям ассоциированного закона (2.14). Например, при $\bar{w}_0 = 0.93$ толщина оболочки в ее срединном сечении составляет $h_0 \approx 1.6\frac{l^2}{R}$. Если полагать $h_0 = 0.3\,R$, то даже для такой толстой оболочки получится ничтожная длина $l \approx 0.43\,R$. Следовательно, решения по этой схеме нельзя использовать в качестве верхней оценки объема оболочки практических габаритов. В настоящей работе эти решения не приводятся.

3. Рассмотрим случай гладкой поверхности текучести. Продифференцировав два раза условие наименьшего объема (1.3), использовав дифференциальное уравнение равновесия оболочки (1.2) и имея в виду обозначения

$$\bar{w} = \frac{\sigma_s}{qR}w, \qquad H = \frac{hR}{c^2l^2}, \qquad \bar{x} = \frac{x}{lc} \tag{3.1}$$

с учетом параметрических уравнений гладкой поверхности текучести (1.5), (1.6) получим

$$\begin{gathered}
\frac{d\bar{w}}{dx} = u, \quad \frac{du}{dx} = v, \quad \frac{dv}{dx} = t, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = F_1(\bar{w}, u, v, t, z, H) \\
\frac{dH}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = F_2(\bar{w}, u, v, t, z, H)
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Здесь приняты обозначения

$$a_1 = \frac{H}{3\bar{w}^3}(3\bar{w}^2A_0^2A_1 - A_2H^2\mu^4v^2), \qquad b_1 = -\frac{A_2\mu^4H^4}{3\bar{w}^2}v$$

$$a_2 = \frac{v}{H}\left(\frac{A_2H\mu^3}{3\bar{w}}v + \frac{A_0A_1}{2\sqrt{3}}\right), \qquad b_2 = \frac{A_2H\mu^3}{3\bar{w}}v - \frac{A_0A_1}{2\sqrt{3}}$$

$$
\begin{aligned}
c_1 = \sqrt{3}\, A_0^2 p - \sqrt{3}\, \mu H A_0^2 (A_0 + A_2) - A_0^2 A_1 z^2 - \\
- 4 A_2 A_3 \mu H z - A_0 A_1 \mu H - \\
- \frac{H^2 A_3^2}{A_0^2} \left[(1 + 3\mu^2)(A_0 - A_2) - 2A_0 (1 + \mu^2) \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_2 = \frac{A_0^3 w}{H^2} \bar{p} + \frac{2t}{\sqrt{3} A_0 H} (A_0^2 A_1 z + A_2 A_3 \mu H) + \frac{2u}{H^2} \left[A_0^2 v z (A_0 - A_2) + \right. \\
\left. + A_0 A_3 H \right] + \frac{\bar{w}}{A_0^2 H^2} \Big\{ 2A_0^2 A_2 A_3 z + A_2 A_0^2 A_4 + \\
+ H A_3^2 \left[3\mu (A_0 + A_2) - \frac{1 + 2\mu^2}{\mu} A_0 \right] \Big\}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

$$
\mu = \frac{\sqrt{3}\, \bar{w}}{\sqrt{3\bar{w}^2 + H^2 v^2}}, \quad A_0 = \sqrt{1 - \mu^2}, \quad A_1 = -A_0 + \mu^2 \ln \frac{1 + A_0}{\mu}
$$

$$
A_2 = -A_0 + \ln \frac{1 + A_0}{\mu}, \quad A_3 = \frac{H \mu^2 v}{3\bar{w}^3} [H(uv - \bar{w}t) - \bar{w} v z]
$$

$$
\begin{aligned}
A_4 = \frac{\mu^2 H}{9\bar{w}^4} [2\mu^2 v H (\bar{w} z t - H u t - z u v)(H^2 v^2 - 6\bar{w}^2) + \\
+ 3\bar{w}^2 H^2 v^3 - 9\mu^2 H^3 \bar{w} u^2 v^2 - \bar{w} \mu^2 (3\bar{w}^2 - 2H^2 v^2)(H^2 t^2 + z^2 v^2)]
\end{aligned}
$$

Заметим, что и здесь неизвестная постоянная c входит только в выражение нагрузки оболочки

$$
\bar{p} = \frac{p}{\sigma_s c^3} \frac{R^2}{l^2} \tag{3.4}
$$

Таким образом, задача проектирования оболочки наименьшего объема при гладкой поверхности текучести (1.5), (1.6), соответствующей постоянству интенсивности касательных напряжений, сводится к линейной системе дифференциальных уравнений (3.2) относительно шести функций $\bar{w}$, u, v, t, H, z.

Условия симметрии относительно середины пролета оболочки имеют вид

$$
u\Big|_{\bar{x}=0} = 0 \quad \left(\frac{dw}{dx}\Big|_{x=0} = 0 \right), \qquad z\Big|_{\bar{x}=0} = 0 \quad \left(\frac{dh}{dx}\Big|_{x=0} = 0 \right)
$$

$$
t\Big|_{\bar{x}=0} = 0 \quad \left(\frac{dM_x}{dx}\Big|_{x=0} = 0 \right) \tag{3.5}
$$

Значения величин $\bar{w}$, v, H должны удовлетворять достаточному условию наименьшего объема (1.3), которое с учетом (3.1)—(3.3) примет вид

$$2\sqrt{3}\,A_0 u\bar{w}(A_0 + A_u) + A_1 Hv - 2\sqrt{3}\,A_0^2 = 0 \qquad (3.6)$$

Это трансцендентное уравнение при $\bar{w} \to 1$ имеет только нулевое решени относительно Hv, в силу чего поставленная задача имеет смысл тольк при $0 \leqslant \bar{w} < 1$.

Безразмерные величины нагрузки $\bar{p}$, толщины h и кривизны оболоч ки v выражаются через соответствующие размерные величины с участие неизвестной постоянной c. Поэтому значения этих величин не могут быт произвольными. Для данного значения $\bar{p}$ действительные значения v_0 и H должны удовлетворять условию (3.6) и при решении задачи Коши отно сительно системы (3.2) обеспечить одновременное выполнение услови шарнирного опирания оболочки

$$\bar{w}\Big|_{\bar{x}=\bar{x}_l} = 0 \quad (w\big|_{x=l}=0), \qquad \frac{H^2A_1}{A_0^2}\Big|_{\bar{x}\to\bar{x}_l} \to 0 \quad (M_1\big|_{x=l}=0) \qquad (3.7)$$

На основе вышесказанного следует, что численное решение задачи мож реализовать по той же схеме, что и при кусочно-линейных поверхностях т кучести, которая была рассмотрена в предыдущем пункте. Единственна разница заключается в том, что с целью нахождения начального значен безразмерной толщины оболочки срединного ее сечения H_0^* необходи каждый раз для выбранных значений $\bar{w}_0$ и v_0^* решить трансцендентн уравнение (3.6).

В табл. 2 представлены некоторые результаты решения задачи по сх ме гладкой поверхности текучести.

Таблиц

$$M^* = \frac{2\sqrt{3}}{\tau_s}\,\frac{R^2}{l^3}\,M\cdot 10^4, \quad p^* = \frac{p}{\tau_s}\,\frac{R^2}{l^2}, \qquad v_0^* = v_0\cdot 10^4, \qquad V^* = \frac{V}{16\pi l^3}$$

$p^* = 0.552, \quad v_0^* = -1158.99, \quad V^* = 0.0102$

$\bar{x}$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.92	0.94	0.96	0.98	1
$\bar{w}$	0.9995	0.9961	0.9733	0.8904	0.6564	0.4242	0.3626	0.2941	0.2174	0.1300	[illegible]
$\frac{hR}{l^2}$	0.8185	0.7198	0.4899	0.3912	0.2826	0.2038	0.1826	0.1579	0.1274	0.0848	[illegible]
M^*	244.18	284.93	625.38	761.96	616.96	374.72	308.81	236.41	157.24	70.99	[illegible]

Вычисления показывают, что значение объема оболочки V гл., соотве ствующее гладкой поверхности текучести, как и следовало ожидать [13 находится между значениями объемов, полученными при кусочно-лине ных поверхностях текучести. Причем нижнее значение V_{II} соответству условию 2, верхнее V_I — условию 1. Например, при $\frac{pR^2}{\tau_s l^2} = 0.55$

$$\frac{V_{II}}{16\pi l^3} = 0.008 < \frac{V_{\text{гл.}}}{16\pi l^3} = 0.010 < \frac{V_I}{16\pi l^3} = 0.012$$

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 16 IV 19

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ԱՄԵՆԱՓՈՔՐ ԾԱՎԱԼԻ ՄԻԱՇԵՐՏ ՊԼԱՍՏԻԿ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՆԱԽԱԳԾՈՒՄԸ

Ամփոփում

Իդեալական պլաստիկության տեսության շրջանակներում դիտարկվում է եզրերով հոդակապորեն հենված ամենափոքր ծավալ ունեցող կլոր գլանային թաղանթի նախագծման խնդիրը, երբ թաղանթի վրա ազդում է հավասարաչափ բաշխված արտաքին բեռ: Ստացված են խնդրի դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմները՝ թաղանթի հոսունության կոտր առ կոտր գծային և ողորկ մակերևույթների դեպքերի համար: Անհայտ հաստատունի ներմուծման միջոցով եզրային խնդիրը բերված է նյութի հատկություններից և թաղանթի եզրաչափերից անկախ, չափում չունեցող մեծությունների նկատմամբ Կոշու խնդրի: Ընդհանուր լուծման արդյունքներն ամփոփված են 1 և 2 աղյուսակների մեջ: Բերված են գրաֆիկներ:

ON DESIGNING A SINGLE-LAYER PLASTIC CYLINDRICAL SHELL OF THE SMALLEST VOLUME

R. M. KIRAKOSIAN

Summary

The problem of designing a circular cylindrical shell of the smallest volume under uniformly distributed external load is considered in terms of the theory of ideal plasticity. The systems of differential equations of the problem for the case of smooth and break-linear surfaces of the shell's fluidity are obtained. By introducing an unknown constant the boundary problem is reduced to the Cauchy problem relative to dimensionless quantities independent of characteristics of the material and overall dimensions of the shell. The results of the general solution are shown in tables.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Друккер Д., Шилд Р.* Границы для проектирования конструкций минимального веса. Сб. Механика, 1958, 3 (49).
2. *Фрайбергер В.* О проектировании цилиндрических слоистых оболочек минимального веса. Сб. Механика, 1958, 3 (49).
3. *Шилд Р.* Методы оптимального проектирования конструкций. Сб. Механика, 1962, 2 (72).
4. *Шамиев Ф. Г.* О проектировании оболочек минимального веса. Изв. АН АзССР, сер.физ.-мат. и техн. наук, 1963, № 5.
5. *Шилд Р.* Методы оптимального проектирования при действии ряда независимых систем нагрузок. Сб. Механика, 1964, 2 (84).
6. *Прагер В.* Проектирование пластинок наименьшего веса. Сб. Механика, 1956, 6 (40).

7. *Микеладзе М. Ш.* Введение в техническую теорию идеально пластических тонких оболочек. Тбилиси, «Мецниереба», 1969.
8. *Дехтярь А. С., Варвак М. Ш.* Оптимизационная задача для пластинки переменной толщины. Изв. высш. учебн. завед., Стр-во и архит., 1974, № 9.
9. *Рейтман М. И., Шапиро Г. С.* Методы оптимального проектирования деформируемых тел». М., «Наука», 1976.
10. *Чжу С. Я., Прагер В.* Последние достижения в оптимальном проектировании конструкций. Сб. Механика, 1969, 6 (118).
11. *Чирас А. А., Баркаускас Э., Каркаускас Р. П.* Теория и методы оптимизации упруго-пластических систем. Стройиздат, 1974.
12. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
13. *Немировский Ю. В.* Об оценках веса пластических оптимальных конструкций. МТТ, 1968, № 4.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXI, №3, 1978 Механика

Г. П. ЧЕРЕПАНОВ, В. М. СМОЛЬСКИЙ

К ОПТИМАЛЬНОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ МНОГОСЛОЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ

Задачу об оптимальном проектировании конструкций рассматривали многие исследователи. В обзорных статьях [1, 2] подробно изложено состояние вопроса вплоть до 1968 г. (в основном, по иностранным источникам). Хорошим обзором работ отечественных исследователей является доклад [3]. Исследования последних лет отражены в работах [4, 5].

В работе [6] была применена механика разрушения при оптимальном конструировании многослойных панелей. Было показано, что оптимальные по критерию удельной вязкости разрушения панели отличаются от панелей, оптимальных по критерию удельной прочности. Используя критерии механики разрушения, удается полнее учесть способность поверхности раздела удерживать развитие трещины в отдельном слое многослойной конструкции.

В данной работе решена задача оптимального проектирования многослойной панели по критерию вязкости разрушения. Существенным отличием этой задачи от задач оптимизации по другим критериям прочности является зависимость вязкости разрушения каждого листа многослойной панели от его толщины.

В настоящей работе считаются заданными набор материалов и толщина панели; с помощью принципа равнопрочности задача сводится к нелинейной задаче оптимизации с одним ограничением. Записывая необходимые условия экстремума в форме Лагранжа и разрешая численно систему полученных уравнений, получаем зависимость всех характеристик оптимальной панели (вязкости разрушения и толщины панели, толщины каждого слоя панели) от множителя Лагранжа λ, введенного ограничением. Ввиду монотонности всех этих характеристик по λ нетрудно при фиксированном значении одной из них определить оптимальные значения других.

Основой постановки задачи оптимального проектирования конструкции по критерию вязкости разрушения является решение задачи об определении коэффициента интенсивности напряжений в окрестности кончика трещины, наиболее опасной для данной конструкции. Для многослойной панели такой трещиной является поперечная сквозная трещина, пересекающая все слои панели.

В наиболее общей постановке расчет многослойной пластины с поперечной трещиной проведен Бадальянсом и Си [7]. Вычисленный ими коэффициент интенсивности напряжений можно использовать в рамках механики разрушения [8].

Однако, этот прямой расчет трудно применить для оптимального проектирования многослойных панелей по следующим причинам:

а) в момент начала неустойчивого развития фронт трещины является криволинейным, в то время как в указанном расчете решается задача страгивания прямолинейного фронта трещины;

б) результаты расчета представлены в виде графических зависимостей коэффициента интенсивности напряжений от упругих постоянных и толщины отдельного слоя пластины, которые практически невозможно использовать при оптимальном проектировании.

В работе [6] для симметричной панели с непроскальзывающими слоями на основе принципа равнопрочности была выведена формула

$$K_C = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{n} K_C^{(i)} h_i \qquad \left(h = \sum_{i=1}^{n} h_i \right) \tag{1}$$

где $K_C^{(i)}$, h_i, K_C, h — вязкость разрушения и толщина i-ого слоя и всей панели соответственно. Как уже отмечалось, для каждого слоя вязкость разрушения $K_C^{(i)}$ зависит от его толщины h_i. Эту зависимость можно определить из эксперимента на отдельном слое, ее можно достаточно точно аппроксимировать выражением [9]

$$K_C^{(i)} = \left[c_i + d_i \frac{1}{1 + 2\left(\frac{h_i}{h_{i0}} - 1\right)^2} \right]^{1/2}, \qquad h_i \geqslant h_{i0}$$

$$(c_i = [K_{IC}^{(i)}]^2, \qquad d_i = [K_{C0}^{(i)}]^2 - c_i \tag{2}$$

$$K_{IC}^{(i)} = \lim_{h_i \to \infty} K_C^{(i)}(h_i), \qquad K_{C0}^{(i)} = K_C^{(i)}(h_0) = \max_{h_i} K_C^{(i)}(h_i))$$

Заметим, что аналитическое выражение (2) недостаточно точно приближает реальную кривую при $h \leqslant h_{i0}$ (в этой области не имеется достаточного количества экспериментов для ее аналитического описания); однако, это для нас несущественно, поскольку мы будем считать, что $h \geqslant \sum_{i=1}^{n} h_{i0}$. Важно лишь, чтобы это выражение было возрастающим в области $h_i < h_{i0}$.

Требуется максимизировать выражение (1) по переменным h_i и n ($i = 1, 2, \ldots, n$). Однако среди всех многослойных панелей решением этой задачи является однослойная панель из материала, у которого величина $K_{C0}^{(i)}$ наибольшая и оптимальной ее толщиной является h_{i0} [6]. Задача оптимального проектирования возникает тогда, когда один параметр задан или ограничен. Наиболее простым представляется ввести ограничение типа равенства на толщину панели. Чтобы выделить задачу по непрерывным переменным (которая нас в дальнейшем и будет интересовать, так как дискретная задача решена в [6]), будем дополнительно считать, что для каждого слоя $h_i < 2h_{i0}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Эти ограничения не будем вводить в список ограничений задачи с целью ее упрощения; их нетрудно проверить после определения решения. Общее решение задачи можно получить объединением дискретного решения и локального непрерывного решения, построенного ниже. В результате приходим к следующей задаче:

$$\max_{h_i} \sum_{i=1}^{n} K_c^{(i)}(h_i)\, h_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} h_i - h > \sum_{i=1}^{n} h_{i0} \tag{3}$$

Составим функцию Лагранжа

$$F(h_i, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[c_i + d_i \frac{1}{1 + 2\left(\frac{h_i}{h_{i0}} - 1\right)^2} \right]^{1/2} - \lambda \right\} h_i$$

$$(\lambda > 0)$$

и, переходя к новым безразмерным переменным

$$x_i = \frac{h_i}{h_{i0}} - 1 \qquad (x_i \geqslant 0)$$

запишем систему необходимых условий для определения x_i и λ

$$c_i + \frac{d_i(1 - 2x_i)}{(1 + 2x_i^2)^2} = \lambda \left(c_i + \frac{d_i}{1 + 2x_i^2} \right)^{1/2} \tag{4}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} h_{i0}(1 + x_i) = h \tag{5}$$

Рассмотрим уравнение относительно x при постоянных c, d, λ

$$c + \frac{d(1 - 2x)}{(1 + 2x^2)^2} = \lambda \left(c + \frac{d}{1 + 2x^2} \right)^{1/2} \tag{6}$$

Поскольку производная левой части при $x = 0$ отрицательна, а правой — равна нулю, то для существования близкого к нулю положительного корня левая часть уравнения (6) должна быть больше правой при $x = 0$, то есть при $\lambda < \sqrt{c + d}$. При $x = 1$ правая часть уравнения (6) больше левой, если выполняется следующее неравенство:

$$\lambda \sqrt{c + \frac{d}{3}} > c - \frac{d}{9}$$

Применяя эти рассуждения к системе (4), получаем следующую оценку:

$$\lambda_0 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{c_i - \dfrac{d_i}{9}}{\sqrt{c_i + \dfrac{d_i}{3}}} \leqslant \lambda \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \sqrt{c_i + d_i} = \lambda_1 \tag{7}$$

Заметим, что при λ, приближающемся к λ_m, в оптимальной панели начинает резко расти толщина того слоя, у которого величина $K_{IC}^{(i)}$ наибольшая, а толщины остальных слоев примерно не меняются. Поэтому оптимальное решение для $\lambda \leq \lambda_0$ можно построить по решению для $\lambda = \lambda_0$.

Все x_i и h являются монотонными функциями λ, поэтому поиск набора неизвестных x_i, соответствующих заданному λ, можно проводить итерациями, начиная с оптимального набора значений x_i, полученных по предыдущему λ. Общая схема получения зависимостей $x_i(\lambda)$, $h(\lambda)$, $K_C(\lambda)$ такова:

1. Уменьшаем λ на постоянную величину $\Delta\lambda$, начиная со значения $\lambda = \lambda_0$;

2. Для всех i, начиная со значения x_i, соответствующего предыдущему значению λ (перед началом расчета все $x_i = 0$), определяем такое значение x_i, при котором меняет знак следующее выражение:

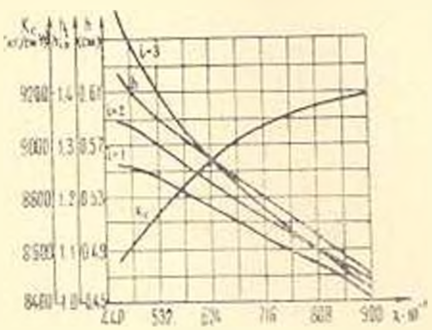
$$f(x_i) = c_i + \frac{d_i(1-2x_i)}{(1+2x_i^2)^2} - \lambda\left(c_i + \frac{d_i}{1+2x_i^2}\right)^{1/2}$$

3. По формуле (5) и видоизмененной формуле (3)

$$K_C = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\left(c_i + \frac{d_i}{1+2x_i^2}\right)^{1/2} h_{i0}(1+x_i)$$

определяем K_C и h для заданного λ; затем вся процедура повторяется до тех пор, пока величина λ не станет равной λ_0.

На фиг. 1 представлены графики расчета оптимальных размеров симметричной шестислойной панели (по два одинаковых слоя одного материала; все величины приводятся для половины панели) из материалов: алюминиевый сплав 7075 Т6 ($h_0 = 0.26$ *см*, $K_{IC} = 4200$ *кг/см*$^{3/2}$, $K_{C0} = 9165$ *кг/см*$^{3/2}$); титановый сплав ВТ14 ($h_0 = 0.1$ *см*, $K_{IC} = 5495$ *кг/см*$^{3/2}$, $K_{C0} = 9420$ *кг/см*$^{3/2}$); сталь ВКС-1 ($h_0 = 0.1$ *см*, $K_{IC} = 6300$ *кг/см*$^{3/2}$, $K_{C0} = 9030$ *кг/см*$^{3/2}$). Из графиков видно, что при $\lambda < \lambda_0$ действительно растет толщина только слоя из третьего материала.



Фиг. 1.

Чтобы определить оптимальные толщины каждого слоя при заданной общей толщине, по графику $h(\lambda)$ определяем соответствующее λ, затем толщины каждого слоя и K_C.

Полученное решение является хорошим приближением к решению задачи проектирования многослойной панели заданного веса максимальной вязкости разрушения. Для этого в перечисленные характеристики надо включить функцию

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i h_{i0}(1 - x_i)$$

и определять λ по заданному P.

Заметим, что преимущество многослойных панелей перед однослойными, прежде всего, сказывается в достижении большой величины вязкости разрушения по отношению к внутренним трещинам даже при относительно хрупких составляющих. Различие между поверхностной и сквозной трещиной в многослойных материалах весьма существенно, что подтверждается, в частности, экспериментами Гайлора [10].

Московский авиационный
институт

Поступила 27 IV 1977

Գ. Պ. ՉԵՐԵՊԱՆՈՎ, Վ. Մ. ՍՄՈԼՍԿԻ

ԲԱԶՄԱՇԵՐՏ ՊԱՆԵԼՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՆԱԽԱԳԾՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Քայքայման մածուցիկության կրիտերիայով լուծված է բազմաշերտ պանելի օպտիմալ նախագծման խնդիրը: Համարվում են տրված նյութերի հավաքածուն և պանելի հաստությունը: Հավասար ամրության սկզբունքի օգնությամբ խնդիրը բերվել է մի սահմանափակումով օպտիմիզացիայի ոչ գծային խնդրին:

Էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմաններից ստացվել են օպտիմալ պանելի հաստությունից առանձին շերտերի հաստությունների կապակցությունները:

ON OPTIMAL DESIGN OF A MULTILAYERED PANEL

G. P. CHEREPANOV, V. M. SMOLSKY

S u m m a r y

In this paper, on the basis of the uniform strength principle, the problem of optimal design of a multilayered panel is reduced to that of a conventional extremum; the latter being solved by the method of Lagrange's multiplier.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wasutynski Z., Brandt A.* The present State os Knowledge in the Field of Optimum Design of Structures. Applied Mechanics Reviews. 1963, vol. 10, No. 5, pp. 341—350.
2. *Sheu C. Y., Prager W.* Resent Developments in Optimal Structural Design. Applied Mechanics Reviews. 1968, vol. 21, No. 10, pp. 985—9

3. *Васильев В. В.* Оптимальное проектирование пластинок и оболочек. Тр. VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок, Днепропетровск. М., «Наука», 1970.

4. Second National Symposium on Computerized Structural Analysis and Design. Washington, G. Washington Univ., 1976.

5. *Рейтман М. И., Шапиро Г. С.* Методы оптимального проектирования деформируемых тел. М., «Наука», 1976, 267 с.

6. *Черепанов Г. П., Смольский В. М., Таги-Заде А. Г.* Об оптимальном проектировании некоторых инженерных материалов. Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, XXIX, № 3, 51—62.

7. *Badaliance R., Sih G. C.* An Approximate Three-Dimantional Theory of Layered Plates Containing Through Thickness Cracks. Engineering Fracture Mechanics, 1975, vol. 7, No. 1, pp. 1—22.

8. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974, 640 с.

9. *Черепанов Г. П., Смольский В. М.* К расчету толщины панели максимальной долговечности. Изв. ВУЗов. Авиационная техника, 1977, № 4.

10. *Taylor L. G., Ryder D. A.* The Fatigue and Fracture Toughness of Laminated Composites Based on 7075—T6 Aluminium Alloy. Composites, 1976, vol. 7, No. 1, pp. 27—33.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXI, № 3, 1978 Механика

Г. Г. ОГАНЯН

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОЙ ЖИДКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПУЗЫРЬКИ ГАЗА

Рассматривается задача о распространении слабых ударных волн в химически активной жидкости, содержащей пузырьки инертного газа, причем изменение состава смеси определяется протеканием одной химической реакции. В зависимости от отношения времени протекания реакции к макроскопическому времени различают квазизамороженный и квазиравновесный предельные процессы распространения возмущений [1]. Ударные волны в химически инертных газожидкостных смесях рассматривались в [2—5].

В настоящей работе для предельных процессов методом коротких волн выводятся нелинейные уравнения, описывающие течение смеси в окрестности ударных волн. В линейной постановке формулируются и решаются задачи о поршне, вдвигаемом в смесь с постоянной скоростью, а затем исследуются асимптотические поведения решений вдали от фронта волны.

Отдельному рассмотрению подвергаются среды, в которых предельные скорости распространения возмущений по величине близки друг к другу. Выводится нелинейное уравнение, описывающее распределение скорости частиц смеси в окрестности ударной волны.

1. Предположим, что в потоке химически активной многокомпонентной смеси вязких жидкостей с газовыми включениями (пузырьками) происходит только одна химическая реакция типа

$$\sum_{k=1}^{n} \nu_k A_k = \sum_{k=1}^{n} \nu'_k A_k$$

где слева стоят реагенты, а справа — продукты реакции, ν_k, ν'_k — стехиометрические коэффициенты, A_k — символы химических элементов. Допустим, что газ и жидкость движутся с одинаковой скоростью, так что распределение пузырьков можно не детализировать. Считая, что расстояние между пузырьками намного больше радиуса R пузырька, можно пренебречь взаимодействием между пузырьками, и пульсации одиночного пузырька описать уравнением Херринга-Флинна, учитывающим сжимаемость жидкой фазы, причем газовая фаза рассматриваемой газожидкостной смеси химически инертна и изотермична. Тогда изменение состава газожидкостной смеси будет обусловлено изменением состава жидкой фазы посредством параметра q, называемым полнотой химической реакции.

Систему уравнений, описывающую движение смеси, возьмем в виде [3, 6], причем параметры течения, отнесенные к жидкой фазе, обозначены индексом «1», к газовой фазе, — индексом «2», а ко всей смеси — без индекса

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \rho\frac{du}{dt}+\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{4}{3}\lambda_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad (1.1)$$

$$\rho\left(T\frac{ds}{dt}+Q\frac{dq}{dt}\right)=\frac{4}{3}\lambda_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,\quad \frac{dq}{dt}=-\frac{1}{\tau_*}H_1Q \qquad (1.2)$$

$$P_2-P=\rho_1R\left(1-\frac{2}{a_{10}}\frac{dR}{dt}\right)\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}\rho_1\left(1-\frac{4}{3}\frac{1}{a_{10}}\frac{dR}{dt}\right)\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+$$

$$+\frac{4\lambda_1}{R}\frac{dR}{dt}-\frac{R}{a_{10}}\left(1-\frac{1}{a_{10}}\frac{dR}{dt}\right)\frac{d}{dt}\left(P_2-\frac{4\lambda_1}{R}\frac{dR}{dt}\right) \qquad (1.3)$$

$$\frac{P_2\beta}{\rho_1(1-\beta)}=\text{const},\quad \rho=\rho_1(1-\beta),\quad P_2R^3=\text{const} \qquad (1.4)$$

Здесь t—время, x—координата, u—скорость частиц смеси, ρ—плотность, P—давление, T—температура, s—энтропия, λ_1—динамический коэффициент вязкости, Q—сродство химической реакции, a_{10}—невозмущенная скорость звука в жидкой фазе, β—объем газа в единице объема смеси, τ_* — время протекания химической реакции, феноменологический коэффициент $H_1>0$ согласно второму закону термодинамики для необратимых процессов.

Предположим, что в любой момент времени и в каждой точке пространства параметры течения мало отклоняются от соответствующих параметров в состоянии покоя, представляющего собой состояние полного термодинамического равновесия

$$P_2=P_0+\varepsilon P',\ \rho=\rho_0+\varepsilon\rho',\ \rho_1=\rho_{10}+\varepsilon\rho_1',\ \beta=\beta_0+\varepsilon\beta',\ R=\varepsilon^{1/2}(R_0+\varepsilon R')$$
$$q=q_0+\varepsilon q',\ s=s_0+\varepsilon s',\ T=T_0+\varepsilon T',\ Q=\varepsilon Q',\ u=\varepsilon u',\ \lambda_1=\varepsilon^2\lambda_1' \qquad (1.5)$$

Здесь ε — безразмерный малый параметр, индекс «0» относится к невозмущенным величинам.

Рассматриваемую область течения релаксирующей газожидкостной смеси будем считать областью коротких волн. Поэтому за независимые переменные принимаются

$$t=t',\quad x=a_0t+\varepsilon r \qquad (1.6)$$

где a_0 — независящая от процесса распространения возмущений невозмущенная скорость звука в смеси.

В дальнейшем при упрощении исходных уравнений (1.1)—(1.4) будут удержаны лишь главные члены, причем штрихи над возмущениями характеристик течения опускаются.

Упрощая первое и второе уравнения из (1.4) и комбинируя их друг с другом, в основном порядке получаем

$$\beta = \frac{\beta_0}{\rho_0}\rho + \frac{\beta_0}{P_0}P, \qquad \rho_1 = \frac{1}{(1-\beta_0)^2}\left(\rho - \frac{\beta_0\rho_0}{P_0}P\right) \qquad (1.7)$$

Аналогичное упрощение третьего уравнения (1.4) даст

$$R = -\frac{R_0}{3P_0}P \qquad (1.8)$$

Теперь преобразуем уравнение неразрывности из (1.1). С помощью уравнений (1.4) легко показать [3], что рассматриваемое уравнение приводится к виду

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} + u\frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{P_2}{\beta}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{P_2(1-\beta)^2}{\beta\rho}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + u\frac{\partial\rho_1}{\partial x}\right) = 0 \qquad (1.9)$$

В случае несжимаемой жидкости ($\rho_1 = \mathrm{const}$) уравнение (1.9) совпадает с уравнением, полученным в [4].

Из первых двух уравнений (1.4) нетрудно получить связь между скоростью звука в смеси a_0 и скоростью звука a_{10} в жидкой фазе [3]

$$\frac{1}{a_0^2} = \frac{\beta_0\rho_0}{P_0} + \frac{(1-\beta_0)^2}{a_{10}^2} \qquad (1.10)$$

2. *Квазиравновесный процесс*

Ввиду того, что вид процесса распространения возмущений определяется химической реакцией, протекающей в жидкой фазе, примем за независимые термодинамические переменные давление P_1, плотность ρ_1, сродство Q. Из самой постановки задачи следует, что $P_1 = P(\rho, Q, s)$, $s_1 = s$, поэтому приращение удельной энтропии можно записать в виде

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial\rho_1}\right)_{PQ}\left[d\rho_1 - \frac{1}{a_{1e}^2}dP - \left(\frac{\partial\rho_1}{\partial Q}\right)_{Ps}dQ\right], \qquad a_{1e}^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_{Qs} \qquad (2.1)$$

где a_{1e} — равновесная скорость звука в жидкой фазе. Имея в виду соотношение (2.1), преобразованное уравнение неразрывности (1.9) можно записать как

$$\frac{dP_2}{dt} + \frac{P_2}{\beta}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{P_2(1-\beta)^2}{\beta\rho a_{1e}^2}\frac{dP_2}{dt} =$$

$$= -\frac{P_2(1-\beta)^2}{\beta\rho}\left[\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial s}\right)_{PQ}\frac{ds}{dt} + \left(\frac{\partial\rho_1}{\partial Q}\right)_{Ps}\frac{dQ}{dt}\right]$$

Комбинирование полученного соотношения с уравнениями потока тепла (1.2) и пульсации пузырька (1.3) дает

$$\left[1 + \frac{P_2(1-\beta)^2}{\beta\rho a_{1e}^2}\right]\frac{dP_2}{dt} + \frac{P_2}{\beta}\frac{\partial u}{\partial x} -$$

$$-\frac{P_2(1-\beta)^2}{\beta\rho a_{1e}^2}\frac{d}{dt}\left[\rho_1 R\left(1 + \frac{2}{a_{1e0}}\frac{dR}{dt}\right)\frac{d^2R}{dt^2} + \right.$$

$$+\frac{3}{2}\rho_1\left(1-\frac{4}{3a_{1e0}}\frac{dR}{dt}\right)\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+\frac{4\nu_1}{R}\frac{dR}{dt}-$$

$$-\frac{R}{a_{1e0}}\left(1-\frac{1}{a_{1e0}}\frac{dR}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(P_2-\frac{4\nu_1}{R}\frac{dR}{dt}\right)\Bigg]=$$

$$=\frac{P_2(1-\beta)^2}{\rho\rho}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial s}\right)_{PQ}\left[\frac{Q}{T}\frac{dq}{dt}-\frac{1}{\rho T}\frac{4}{3}\nu_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]+$$

$$+\frac{P_2(1-\beta)^2}{\rho\rho}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial Q}\right)_{Ps}\frac{dQ}{dt} \qquad (2.2)$$

Комбинируя уравнение движения (1.1) с (1.3), находим

$$\rho\frac{du}{dt}+\frac{\partial P_2}{\partial x}=\frac{4}{3}\nu_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\Bigg[\rho_1 R\left(1-\frac{2}{a_{1e0}}\frac{dR}{dt}\right)\frac{d^2R}{dt^2}+$$

$$+\frac{3}{2}\rho_1\left(1-\frac{4}{3}\frac{1}{a_{1e0}}\frac{dR}{dt}\right)\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+\frac{4\nu_1}{R}\frac{dR}{dt}-$$

$$-\frac{R}{a_{1e0}}\left(1-\frac{1}{a_{1e0}}\frac{dR}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(P_2-\frac{4\nu_1}{R}\frac{dR}{dt}\right)\Bigg] \qquad (2.3)$$

Таким образом, исходная система уравнений (1.1)—(1.4) свелась к двум уравнениям (2.2) и (2.3).

Пусть рассматриваемая короткая волна с узкой возмущенной зоной движется с равновесной скоростью звука в покоящейся смеси, то есть $a_0 = a_{e0}$ и $a_{10} = a_{1e0}$. Примем

$$a_e = a_{e0} + \varepsilon a'_e, \quad a_{1e} = a_{1e0} + \varepsilon a'_{1e} \qquad (2.4)$$

Применяя преобразования (1.5) и (1.6) к уравнениям (1.1), получим в порядке $\varepsilon^0 = 1$

$$\rho = \rho_0 u/a_{e0}, \; P = \rho_0 a_{e0} u \qquad (2.5)$$

Аналогичное преобразование над первым уравнением из (1.2) в порядке ε дает $s=0$. Разлагая $P=P(\rho, Q, s)$ вблизи положения равновесия в ряд Тейлора и сравнивая его со вторым соотношением в (2.5), в порядке ε получим

$$s = 0, \quad Q = 0 \qquad (2.6)$$

Соотношения (2.5) и (2.6) показывают, что в рассматриваемом приближении сжатие газожидкостной смеси происходит обратимо. Согласно (2.5) соотношения (1.7) и (1.8) запишутся в виде

$$R = -\frac{R_0\rho_0 a_{e0}}{3P_0}u, \qquad \beta = \frac{\beta_0}{a_{e0}}\left(1-\frac{\rho_0 a_{e0}^2}{P_0}\right)u$$

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{a_{e0}(1-\beta_0)^2}\left(1-\frac{\beta_0\rho_0 a_{e0}^2}{P_0}\right)u \qquad (2.7)$$

В дальнейшем нам понадобится зависимость возмущения скорости a_{1e} в жидкой фазе от возмущенной скорости u смеси. Поэтому, разлагая $a_{1e} = a_{1e}(P, s, Q)$ вблизи положения равновесия в ряд Тейлора и учитывая (2.6), получим

$$a_{1e} = \frac{(1-\beta_0)\, a_{e0}}{a_{1e0}} (\alpha_{1e} - 1) u, \qquad \alpha_{1e} = \frac{1}{a_{1e0}} \left| \frac{\partial}{\partial \rho_1} (\rho_1 a_{1e}) \right|_0 \tag{2.8}$$

Аналогичное разложение $q = q(\rho_1, Q, s)$ дает

$$q = \left(\frac{\partial q}{\partial \rho_{10}} \right)_{Qs} \rho_1 = \left(\frac{\partial q}{\partial \rho_{10}} \right)_{Qs} \frac{\rho_0}{a_{e0}(1-\beta_0)^2} \left(1 - \frac{\beta_0 \rho_0 a_{e0}^2}{P_0} \right) u \tag{2.9}$$

Применяя преобразования (1.5) и (1.6) ко второму уравнению из (1.2) и удерживая главные члены, находим в порядке ε

$$\frac{\partial q}{\partial r} = -\frac{H_{10}}{\tau_0 a_{e0}} Q \tag{2.10}$$

Если ввести размерную величину $L(|L| \sim \varepsilon)$, например, ширину волновой области, то из (2.10) следует, что при квазиравновесном процессе распространения возмущений время протекания химической реакции τ_0 намного меньше макроскопического времени L/a_{e0}, то есть $|\tau_0| \sim \varepsilon$.

Преобразуем посредством (1.5) и (1.6) уравнения (2.2) и (2.3) и удержим главные члены порядка ε, причем в первом из них будут содержаться также члены порядка $\varepsilon^0 = 1$. Комбинируя друг с другом полученные упрощенные уравнения с целью исключения членов порядка $\varepsilon^0 = 1$ и имея в виду соотношения (1.10), (2.5)—(2.10), получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_e a_{e0}^2 u \frac{\partial u}{\partial r} - (\delta_e + m_e + \varepsilon^{1/2} \chi_e) \frac{a_{e0}^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{a_{e0}^4}{\varepsilon^3} \tau_e \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} = 0 \tag{2.11}$$

где введены коэффициенты

$$\alpha_e = \frac{\beta_0}{a_{e0}^2} \left(\frac{\rho_0 a_{e0}^2}{P_0} \right)^2 + \frac{\alpha_{1e}}{a_{e0}^2 (1-\beta_0)} \left(1 - \frac{\beta_0 \rho_0 a_{e0}^2}{P_0} \right)^2$$

$$\tau_e = \frac{\beta_0 R_0^2 \rho_0^2 a_{e0}}{6(1-\beta_0) P_0^2}, \qquad \delta_e = \frac{2}{3} \lambda_1 \frac{1}{\rho_0 a_{e0}^2} \left[1 + \beta_0 \left(\frac{\rho_0 a_{e0}^2}{P_0} \right)^2 \right]$$

$$\chi_e = \frac{\beta_0 R_0 \rho_0 a_{e0}}{2 P_0 a_{1e0}}, \qquad m_e = \frac{\tau_*}{H_{10}} \left(\frac{\partial q}{\partial Q_s} \right)_{\rho s} \frac{a_{f0}^2 - a_{1e0}^2}{2 a_{e0}^2 (1-\beta_0)^2} \left(1 - \frac{\beta_0 \rho_0 a_{e0}^2}{P_0} \right)^2 \tag{2.12}$$

В случае релаксационных явлений в потоках газов и жидкостей различают четыре времени протекания химической реакции: $\tau_{\rho s}, \tau_{ps}, \tau_{\rho T}, \tau_{pT}$, где индексы показывают, какие характеристики течения фиксированы. Можно показать, что [12]

$$\tau_{\rho s} = -\frac{\tau_*}{H_{10}} \left(\frac{\partial q}{\partial Q_s} \right)_{\rho s}$$

и тогда коэффициент m_e можно записать в виде

$$m_e = \frac{\tau v_e}{2a_{e0}^3(1-\beta_0)^2}\left(a_{1f0}^2 - a_{1e0}^2\right)\left(1 - \frac{\beta_0\rho_0 a_{e0}^2}{P_0}\right)^2$$

Полученное уравнение (2.11) удобно при решении задачи с начальными условиями. При постановке граничной задачи перейдем от переменных (r, t') к (x, τ), где $\tau = t - x/a_e$ есть время пробега частицы до фронта волны. Согласно известным формулам перехода [7], уравнение (2.11) примет окончательный вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha_e u\frac{\partial u}{\partial \tau} - (\delta_e + \varkappa_e + m_e)\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \gamma_e\frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} = 0 \tag{2.13}$$

Таким образом, учет релаксации и сжимаемости жидкой фазы приводит к увеличению коэффициента диссипации в уравнении Бюргерса—Кортевега-де Вриза (2.13). Без учета названных эффектов уравнение при начальном условии в виде гауссового распределения интегрировалось численно в [4], а в случае отсутствия пузырьков рассматривалось в [7].

а) Рассмотрим линейное приближение уравнения (2.13). Для него сформулируем задачу о поршне, вдвигаемом в смесь с постоянной скоростью

$$\text{при } x = 0 \quad u(\tau, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ v_0 & \text{при } t > 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

Так как в волновой зоне внутренняя переменная τ при переходе к внешней переменной t меняется от $-\infty$ до ∞, то, применяя к линейному варианту уравнения (2.13) преобразование Фурье по τ, приведем его к виду

$$\frac{d\bar{u}}{dx} + \left[(\delta_e + \varkappa_e + m_e)\omega^2 - i\gamma_e\omega^3\right]\bar{u} = 0$$

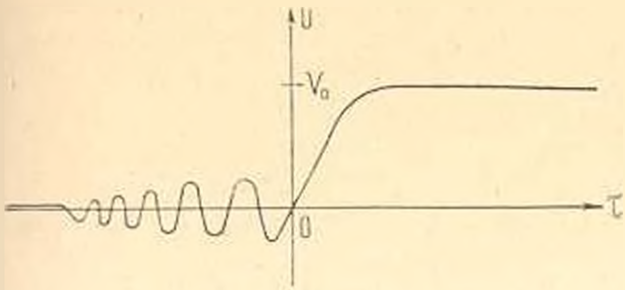
где $\bar{u}$ — Фурье-образ u, ω — параметр преобразования Фурье. Решая полученное уравнение, определяя постоянную интегрирования с помощью преобразованного граничного условия (2.14) и затем совершая обратное преобразование Фурье, получим

$$u(\tau, x) = \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i(\omega\tau + \omega^3\gamma_e x + i\omega^2\delta x)\right]\frac{d\omega}{\omega} \tag{2.15}$$

Преобразуя интеграл в (2.15), окончательное решение линейной задачи можно записать как

$$u(\tau, x) = \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{\pi}\int_0^{\infty}\exp\left[-(\delta_e + \varkappa_e + m_e)x\omega^2\right]\sin(\omega\tau + \omega^3\gamma_e x)\frac{d\omega}{\omega}$$

В случае отсутствия релаксационного процесса и пузырьков $(\varkappa_e = m_e = \gamma_e = 0)$ полученное решение переходит в известное решение для чисто вязкой жидкости [8, 9]. Из решения видно, что оно имеет осциллирующий характер, причем осцилляции определяются наличием дисперсионного члена в (2.13). На фиг. 1 показан результат численного расчета для среды: глицерин-пузырьки газа ($\beta_0=0.05$, $R_0=0.001$ *м*):



Фиг. 1.

б) Теперь изучим асимптотику полученного решения при больших значениях τ. Для этого удобнее всего обратиться к виду (2.15). Продифференцируем это решение по τ

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{v_0}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp[-(\delta_e+\varkappa_e+m_e)\,x\omega^2]\exp[i(\omega\tau-\omega^3\gamma_e x)]\,d\omega$$

Данное выражение можно записать в виде свертки от двух функций [10]

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{v_0}{4\pi}\left(\frac{1}{\delta x}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{3\gamma_e x}\right)^{1/3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{4\delta x}\xi^2}\operatorname{Ai}[\alpha(\tau-\xi)]\,d\xi$$

где $\delta=\delta_e+\varkappa_e+m_e$, $\operatorname{Ai}(z)$ — функция Эйри, $\alpha=(1/3\gamma_e x)^{1/3}$

$$\operatorname{Ai}(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\left(z\zeta+\frac{1}{3}\zeta^3\right)\right]d\zeta$$

Разлагая функцию $\operatorname{Ai}[\alpha(\tau-\xi)]$ в ряд по степеням ξ и преобразуя интеграл к Г-функции, можно получить

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{v_0}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4\delta x)^n}{(2n)!}\left(\frac{1}{3\gamma_e x}\right)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}n}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Ai}^{(2n)}(\alpha\tau) \qquad (2.16)$$

Далеко вниз по течению (позади волны) $\tau\to\infty$, поэтому, используя асимптотическое представление производных функции Эйри [11], (2.16) запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{v_0}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4\delta x)^n}{(2n)!}\left(\frac{1}{3\gamma_e x}\right)^{n+\frac{1}{4}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau^{n-\frac{1}{4}}e^{-\frac{2}{3}\left(\frac{\tau^3}{3\gamma_e x}\right)^{1/2}}$$

Рассматриваемый ряд, как нетрудно убедиться, при условии

$$(3\gamma_e x)^{1/3} < |\tau| < 3\gamma_e\beta \tag{2.17}$$

абсолютно сходится, причем при выполнении (2.17) можно ограничиться первым членом разложения, так как сумма, начиная со второго члена, намного меньше первого члена. После интегрирования и очевидных приведений решение далеко позади фронта волны запишется как [9]

$$u = v_0 - \frac{v_0}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}\left\{1 - \Phi\left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3\gamma_e x}\right)^{1/2}\tau^{3/2}\right]\right\}$$

где $\Phi(z)$ — интеграл вероятности. Из найденного решения видно, что распределение скорости имеет монотонный профиль, причем при

$$\tau \to \infty \quad u(\tau, x) \to v_0$$

Далеко вверх по течению (впереди фронта волны) $\tau \to -\infty$, поэтому используя асимптотику производной функции Эйри [11], (2.16) напишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{v_0}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4\delta x)^n}{(2n)!}\left(\frac{1}{3\gamma_e x}\right)^{n+\frac{1}{4}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)|\tau|^{n+\frac{1}{4}} \times$$

$$\times \cos\left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3\gamma_e x}\right)^{1/2}|\tau|^{3/2} + \frac{\pi}{2}\left(2m - \frac{1}{2}\right)\right]$$

Легко показать, что при выполнении условия (2.17) полученный ряд снова абсолютно сходится и можно ограничиться первым членом в разложении. Интегрируя полученное выражение, решение далеко впереди фронта волны запишем как [9]

$$u(\tau, x) = \frac{v_0}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}\left\{1 - C\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}\left(\frac{|\tau|^3}{3\gamma_e x}\right)^{1/4}\right] - \right.$$

$$\left. - S\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}\left(\frac{|\tau|^3}{3\gamma_e x}\right)^{1/4}\right]\right\}$$

где функции $C(z)$ и $S(z)$ — интегралы Френеля. Из полученного решения видно, впереди волны имеют место затухающие осцилляции, так как при $\tau \to -\infty$ $u(\tau, x) \to 0$.

3. *Квазизамороженный процесс*

За независимые термодинамические переменные примем давление P, плотность ρ_1, полноту химической реакции q. Тогда приращение удельной энтропии можно записать в виде

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial \rho_1}\right)_{Pq}\left[d\rho_1 - \frac{1}{a_{1f}^2}dP - \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial q}\right)_{Ps}dq\right], \quad a_{1f}^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho_1}\right)_{qs} \tag{3.1}$$

Здесь a_{1f} — замороженная скорость звука в жидкой фазе. Согласно (3.1), преобразованное уравнение неразрывности (1.9) можно записать как

$$\frac{dP_2}{dt}+\frac{P_2}{\beta}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{P_2(1-\beta)^2}{\beta\rho a_{1f}^2}\frac{d\rho}{dt}=$$

$$=-\frac{P_2(1-\beta)^2}{\beta\rho}\left[\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial q}\right)_{p_1}\frac{dq}{dt}+\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial s}\right)_{p_q}\frac{ds}{dt}\right]$$

Комбинируя данное уравнение с уравнениями потока тепла (1.2) и пульсации пузырька (1.4), получим

$$\left[1+\frac{P_2(1-\beta)^2}{\beta\rho a_{1f}^2}\right]\frac{dP_2}{dt}+\frac{P_2}{\beta}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{P_2(1-\beta)^2}{\beta\rho a_{1f}^2}\frac{d}{dt}\left[\rho_1 R\left(1-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{2}{a_{1f0}}\frac{dR}{dt}\right)\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}\rho_1\left(1-\frac{4}{3a_{1f0}}\frac{dR}{dt}\right)\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+$$

$$\left.+\frac{4\mu_1}{R}\frac{dR}{dt}-\frac{R}{a_{1f0}}\left(1-\frac{1}{a_{1f0}}\frac{dR}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(P_2-\frac{4\mu_1}{R}\frac{dR}{dt}\right)\right]=$$

$$=-\frac{P_2(1-\beta)^2}{\beta\rho}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial q}\right)_{p_s}\left[\frac{dq}{dt}+\left(\frac{dq}{ds}\right)_{p}\frac{Q}{T}\frac{ds}{dt}\right] \tag{3.2}$$

Аналогично выводу (2.3) находим

$$\rho\frac{du}{dt}+\frac{\partial P_2}{dx}=\frac{4}{3}\mu_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1 R\left(1-\frac{2}{a_{1f0}}\frac{dR}{dt}\right)\frac{d^2R}{dt^2}+\right.$$

$$+\frac{3}{2}\rho_1\left(1-\frac{1}{3a_{1f0}}\frac{dR}{dt}\right)\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+\frac{4\mu_1}{R}\frac{dR}{dt}-$$

$$\left.-\frac{R}{a_{1f0}}\left(1-\frac{1}{a_{1f0}}\frac{dR}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(P_2-\frac{4\mu_1}{R}\frac{dR}{dt}\right)\right] \tag{3.3}$$

В рассматриваемом процессе распространения возмущений имеют место соотношения (2.5), (2.8) с заменой a_{e0} на a_{f0}, a_{1e0} на a_{1f0}. Из разложения $P=P(\rho_1, q, s)$ в ряд Тейлора вблизи положения полного термодинамического равновесия нетрудно заметить, что

$$s'=0,\qquad q'=0 \tag{3.4}$$

Таким образом, и в данном процессе в принятом приближении сжатие газа происходит обратимо. Применяя преобразования (1.5) и (1.6) ко второму уравнению из (1.2) и удерживая главные члены порядка ε, получим

$$\frac{\partial q}{\partial\tau}=\frac{H_{10}}{\rho_* a_{f0}}Q \tag{3.5}$$

Из (3.4) видно, что возмущенные энтропия и полнота химической реакции — малые более высокого порядка, чем остальные возмущенные параметры течения ($s' \sim q' \sim \varepsilon$). Если ввести характерную длину L, то из (3.5) следует, что время протекания химической реакции τ_q намного больше L/a_{f0} — времени пробега частицей волновой зоны, то есть $|\tau_0| \sim 1$.

Можно показать, что в рассматриваемом приближении [1]

$$Q = \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho_{1}}\right)_{qs} \rho_1 = \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho_{10}}\right)_{s0} \frac{\rho_0}{a_{f0}^2(1-\beta_0)}\left(1-\frac{\beta_0 \rho_0 a_{f0}^2}{P_0}\right)u \qquad (3.6)$$

Аналогично выводу (2.13), преобразуем посредством (1.5) и (1.6) уравнения (3.2), (3.3) и удержим лишь главные члены порядка ε. Далее, исключая из получаемых соотношений члены нулевого порядка малости и имея в виду соотношения (2.5), (2.7), (2.8), (3.5) и (3.6), после перехода от (r, t') к (x, τ) получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha_f u \frac{\partial u}{\partial \tau} - (\delta_f + \varkappa_f)\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \gamma_f \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} + g u = 0 \qquad (3.7)$$

где коэффициенты $\alpha_f, \delta_f, \varkappa_f, \gamma_f$ идентичны коэффициентам в (2.13) с заменой a_{e0} на a_{f0}, a_{1e0} на a_{1f0}

$$g = m_f \tau^{-2}_{q0}$$

где m_f задается соотношением (2.12) с заменой a_{e0} на a_{f0}.

Пренебрегая нелинейным членом в уравнении (3.7) и переходя к новой функции $v = ue^{gx}$, получим относительно v линейный вариант уравнения *БКВ*, для которого при формулировке задачи о поршне (2.14) применимы все результаты, полученные в п. 2. Далее, переходя от v к истинной скорости u, убеждаемся, что при квазизамороженном процессе распространения возмущений в окрестности волны величина скорости убывает с течением времени по экспоненциальному закону.

4. *Специальные среды*

Между замороженной и равновесной скоростями звука в жидкой фазе существует связь [1, 6, 7]

$$\begin{gathered} a_{1f}^2 - a_{1e}^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial Q}\right)_{\rho_1 s} \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho_1}\right)_{qs} = \frac{1}{\rho_1^2}\frac{e_{12}^2}{e_{11}} \\ e_{12} = \left(\frac{\partial^2 e}{\partial V_1 \partial q}\right)_s, \quad e_{11} = \left(\frac{\partial^2 e}{\partial q^2}\right)_{V_1 s} \end{gathered} \qquad (4.1)$$

Если предположить, что скорости a_{1e0} и a_{1f0} в состоянии термодинамического равновесия имеют близкие значения, то из (1.10) следует, что скорости a_{e0} и a_{f0} в газожидкостной смеси также близки друг к другу. Из (4.1) видно, что в этом случае величина $e_{12} = e_{120}$ в покоящейся жидкой фазе мала. Примем

$$e_{120} = \varepsilon_* e_{120} \tag{4.2}$$

где ε_* — новый малый параметр порядка $\varepsilon^{1/2}$, и в (1.5) сделаем следующие замены:

$$q \to \varepsilon_* q', \quad Q \to \varepsilon_* Q' \tag{4.3}$$

Пусть рассматриваемая короткая волна движется со скоростью a_0, не совпадающей обязательно ни с одной из предельных скоростей звука. Положим

$$a_0 - a_{f0} = \varepsilon_*^2 a_0 \alpha_{f0}, \quad a_0 - a_{e0} = \varepsilon_*^2 a_0 \alpha_{e0} \tag{4.4}$$

Очевидно, что постоянные α_{f0} и α_{e0} — порядка единицы.

Разлагая давление всей смеси $P = P(\rho, q, s) = P(\rho, Q, s)$ в ряд Тейлора вблизи положения термодинамического равновесия, получим

$$\begin{aligned} P &= a_{f0}^2 \rho + \varepsilon_* \left(\frac{\partial P}{\partial q_0}\right)_{\rho s} q = a_{f0}^2 \rho - \varepsilon_*^2 \frac{\rho_0^2}{\rho_{10}^2} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial \rho}\right)_0 e_{120} q \\ P &= a_{e0}^2 \rho + \varepsilon_* \left(\frac{\partial P}{\partial Q_0}\right)_{\rho s} Q = a_{e0}^2 \rho - \varepsilon_*^2 \frac{\rho_0^2}{\rho_{10}^2} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial \rho}\right)_0 \frac{e_{120}}{e_{110}} Q \end{aligned} \tag{4.5}$$

откуда видно, что в порядке до ε_*^2 полученные разложения совпадают с (2.5). Аналогичным образом отклонение сродства химической реакции $Q = Q(\rho_1, q, s)$ можно представить в виде

$$Q = e_{110} q - \frac{e_{120}}{\rho_{10}^2} \rho_1 \tag{4.6}$$

Для рассматриваемых сред снова можно получить соотношения (2.5), (2.7) и (2.10) с заменой a_{e0} на a_0, причем комбинирование последнего из них с (4.6) дает

$$\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{H_{10}}{\varepsilon_* a_0} \left[e_{110} q - \frac{e_{120}}{\rho_0 a_0} \left(1 - \frac{\beta_0 \rho_0 a_0^2}{P_0}\right) \right] u \tag{4.7}$$

Применяя преобразования (1.5), (1.6) и (4.3) к уравнениям (2.2) и (2.3), учитывая (4.4) и затем удерживая главные члены порядка ε, после исключения друг из друга членов нулевого порядка получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + a_0^2 \left(\gamma_* u - \frac{\alpha_{e0}}{a_0}\right) \frac{\partial u}{\partial r} - a_0^2 (\zeta + \varkappa) \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \\ &\qquad + a_0^4 \tau \frac{1}{\varepsilon^3} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} = \frac{e_{120}}{\rho_0} \left(1 - \frac{\beta_0 \rho_0 a_0^2}{P_0}\right) \frac{\partial q}{\partial r} \end{aligned} \tag{4.8}$$

где коэффициенты ζ, $\varkappa$, τ задаются соотношениями (2.13) с заменой a_{e0} на a_0 и a_{1e0} на a_{10}.

Аналогичное упрощение уравнений (3.2) и (3.3) и их комбинация друг с другом дают

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a_0^2\left(\alpha_j u-\frac{\sigma_{j0}}{a_0}\right)\frac{\partial u}{\partial r}-a_0^3(\delta+\varkappa)\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+a_0^5\frac{1}{\varepsilon^3}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}=$$

$$=-\frac{e_{120}}{2\rho_0 e_{110}}\left(1-\frac{\beta_0\rho_0 a_0^2}{P_0}\right)\frac{\partial q}{\partial r} \tag{4.9}$$

Покажем, что уравнения (4.8) и (4.9) совпадают друг с другом. Действительно, в принятом приближении $\alpha_e=\alpha_j$, а из соотношений (4.4) и (4.5) можно найти связь между σ_{e0} и σ_{j0} [1, 7]

$$\sigma_{e0}=\sigma_{j0}+\frac{e_{120}^2}{2\rho_0^2 a_0^2 e_{110}}\left(1-\frac{\beta_0\rho_0 a_0^2}{P_0}\right)^2 \tag{4.10}$$

Подставляя (4.10) и (4.6) в уравнение (4.8), приведем его к виду, полностью совпадающему с (4.9).

Исключим из уравнения (4.9) параметр q. Для этого скомбинируем (4.7) с (4.9), продифференцируем по r и снова, используя (4.7), исключим q. Далее, подставим вместо σ_{j0} его выражение через σ_{e0} в полученное уравнение и перейдем к переменным (x, τ) и истинной скорости u

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\left(\alpha_1 u-\varepsilon_a^2\frac{\sigma_{e0}}{a_1}\right)\frac{\partial u}{\partial \tau}-(\delta+\varkappa+m)\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}-\gamma\frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3}=$$

$$=-\frac{l}{a_0}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\left(\alpha_1 u-\varepsilon_a^2\frac{\sigma_{e0}}{a_0}\right)\frac{\partial u}{\partial \tau}-(\delta+\varkappa)\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}-\gamma\frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3}\right] \tag{4.11}$$

Здесь коэффициенты α_1, m те же, что и в (2.13), с заменой a_{e0} на a_0, $l=a_0^2\nu_s$.

Если предположить, что предельные скорости распространения возмущений в жидкости a_{1j0} и a_{1e0} почти совпадают друг с другом, то есть $m \ll (\delta+\varkappa)$, то уравнение (4.11) один раз интегрируется, причем из условия впереди волны, где возмущения отсутствуют, постоянная интегрирования равна нулю и получаемое уравнение есть уравнение *БКВ*, описывающее течение химически инертной газожидкостной смеси.

Автор искренне признателен А. Г. Багдоеву за обсуждение и внимание к работе.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 15 XI 1977

Գ. Գ. ՕՀԱՆՅԱՆ

ԳԱԶԱՅԻՆ ՊՂՊՋԱԿՆԵՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՔԻՄԻԱՊԵՍ ԱԿՏԻՎ ՀԵՂՈՒԿՈՒՄ ԳՐԳՌՈՒՄՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է պղպջակներ պարունակող քիմիական ակտիվ հեղուկների խառնուրդում, որտեղ տեղի է ունենում միայն մեկ ռեակցիա, թույլ հարվածային ալիքի տարածման վերաբերյալ խնդիրը։

Կարճ ալիքների տեսության մեթոդով դուրս են բերված հարվածային ալիքի շրջակայքում խառնուրդի շարժումը նկարագրող ոչ գծային հավասարումները։

Քվազի-հավասարակշռված և քվազի-սառեցված պրոցեսների համար գծային դրվածքով լուծվել է հաստատուն արագությամբ շարժվող մխոցի խնդիրը։

Ցույց է տրվում, որ ալիքի ճակատի առջևում տեղի ունեն օսցիլյացիաներ։

ON PROPAGATION OF DISTURBANCES IN A CHEMICALLY ACTIVE FLUID CONTAINING GAS BUBBLES

G. G. OHANIAN

Summary

The problem on propagation of weak shock waves in a mixture of chemically active fluids containing gas bubbles is considered. The non-linear equations describing the mixture flow in the neighbourhood of a shock wave are derived by the method of short waves. For quasi-equilibrium and quasi-frozen processes in linear statement the problem on a piston moving with a constant velocity is solved. The oscillations of motion parameters are shown to occure ahead of the wave front.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыжов О. С.* О нелинейной акустике химически активных сред. ПММ, 1971, т. 35, № 6.
2. *Нигматулин Р. И., Шагапов В. Ш.* Структура ударных волн в жидкости, содержащей пузырьки газа. МЖГ, 1974, № 6.
3. *Ван-Вейнгарден Л.* Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа. Сб. «Реология суспензий». М., «Мир», 1975.
4. *Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р.* Длинноволновые возмущения в газожидкостной смеси. МЖГ, 1972, № 5.
5. *Бэтчелор Г. К.* Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости. Механика, сб. переводов иностр. статей. М., «Мир», 1968.

6. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.
7. *Оганян Г. Г.* Распространение слабых волн в химически активной среде в нелинейной постановке. Изв. АН АрмССР, Механика, 1973, т. XXVI, № 6.
8. *Островмов Г. А.* Основы нелинейной акустики. Л., Изд. ЛГУ, 1967.
9. *Градштейн И. С. и Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
10. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1967.
11. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
12. *Бауэр Г.* Феноменологическая теория релаксационных явлений в газах. Сб. «Физическая акустика» под ред. У. Мезона, т. II, ч. А. М., «Мир», 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXI, № 3, 1978 Механика

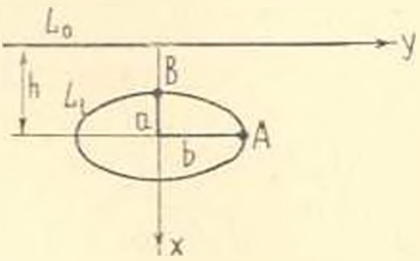
Т. И. БУГАСОВА, С. А. КАЛОЕРОВ, А. С. КОСМОДАМИАНСКИЙ

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

В работах [6, 7] даны основные соотношения для определения температурных напряжений в анизотропных пластинах. В работе [3] получен общий вид комплексных потенциалов в случае многосвязных сред. В данной статье приводится решение термоупругой задачи для полуплоскости с эллиптическим отверстием.

§ 1. Рассмотрим анизотропную полуплоскость, ослабленную эллиптическим отверстием L_1, полуоси которого равны a и b. Границу полуплоскости обозначим через L_0, расстояние между центром отверстия и границей полуплоскости — через h (фиг. 1).

Пусть на границе полуплоскости температура равна нулю, а на контуре отверстия температура $T_1 =$ const. Внешние силовые факторы на полуплоскость не действуют.



Фиг. 1.

Определение температурного поля в такой пластинке сводится к нахождению аналитической функции $F_0(z_3)$ из граничных условий [6, 7]

$$2\operatorname{Re} F_0(t_3) = 0 \quad \text{на} \quad L_0 \tag{1.1}$$

$$2\operatorname{Re} F_0(t_3) = T_1 \quad \text{на} \quad L_1 \tag{1.2}$$

Определение напряженного состояния полуплоскости приводится к нахождению комплексных потенциалов $\Phi_j(z_j)$ из следующих граничных условий:

$$2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{3}\Phi_j(z_j) = 0; \qquad 2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\Phi_j(z_j) = 0 \tag{1.3}$$

$$\text{на } L_0,\ L_1$$

где μ_j — комплексные параметры, зависящие от термоупругих свойств материала пластинки. Для простоты в дальнейшем будем считать их чисто мнимыми: $\mu_j = i\beta_j$.

Функции $\Phi_j(z_j)$ являются аналитическими в областях S_j, получаемых из заданной полуплоскости S аффинными преобразованиями $z_j = x + i\beta_j y$. В областях S_j контурам L_n $(n = 0, 1)$ будут соответствовать контуры L_{jn}.

Функция $\Phi_3(z_3)$ выражается через $F_0(z_3)$ по формуле [7]

$$\Phi_3(z_3) = r_3 \int F_0(z_3)\, dz_3 \tag{1.4}$$

Здесь

$$r_3 = \frac{\alpha_1 \beta_3^2 - \alpha_2}{a_{11}(\beta_3^2 - \beta_1^2)(\beta_3^2 - \beta_2^2)} \tag{1.5}$$

a_{11} — коэффициент деформации материала пластинки; α_1, α_2 — температурные коэффициенты линейного расширения для направления осей x и y.

§ 2. Общее представление комплексного потенциала $F_0(z_3)$ в рассматриваемом случае имеет вид [3]

$$F_0(z_3) = A_0 \ln(z_3 - h) + F_0^*(z_3) \tag{2.1}$$

где A_0 — неизвестный коэффициент, определяемый с помощью потока тепла в область S через контур отверстия; $F_0^*(z_3)$ — функция, голоморфная в нижней полуплоскости области S_3 за исключением бесконечно удаленной точки. Последнюю функцию выберем в виде:

$$F_0^*(z_3) = B_0 \ln(z_3 - h) + F_{30}^*(z_3)$$

где $F_{30}^*(z_3)$ — функция, голоморфная в области S_3, включая и бесконечно удаленную точку.

Из граничного условия (1.1), сравнивая коэффициенты при одинаковых логарифмах, получим $B_0 = -A_0$.

Функцию $F_{30}^*(z_3)$ представим в виде

$$F_{30}^*(z_3) = F_{30}(z_3) + F_{31}(z_3)$$

Здесь $F_{31}(z_3)$ — функция, голоморфная вне контура L_{31}; $F_{30}(z_3)$ — функция, голоморфная в нижней полуплоскости области S_3.

Отобразим конформно внешность единичного круга области изменения переменной ζ_3 на внешность эллипса L_{31}. Отображающая функция имеет вид

$$z_3 - h = R_3\left(\zeta_3 + \frac{m_3}{\zeta_3}\right) \tag{2.2}$$

$$R_3 = \frac{a + \beta_3 b}{2}; \qquad m_3 = \frac{a - \beta_3 b}{a + \beta_3 b} \tag{2.3}$$

В отображенной области

$$F_{31}(z_3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{3k}}{[\zeta_3(z_3)]^k}$$

В рассматриваемом случае коэффициенты c_{3k} получаются вещественными.

Применяя метод интегралов типа Коши [5], из граничных условий (1.1) на L_0 находим [2]

$$F_{30}(z_3) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_{3k}}{[\bar{\zeta}_3(z_3)]^k}$$

Здесь $\bar{\zeta}_3$ связаны с z_3 следующей неявной зависимостью:

$$-z_3 - h = R_3\left(\bar{\zeta}_3 + \frac{m_3}{\bar{\zeta}_3}\right) \qquad (2.4)$$

Окончательно имеем

$$F_0(z_1) = A_0 \ln \zeta_3(z_3) - A_0 \ln \bar{\zeta}_3(z_3) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{3k}\left\{\frac{1}{[\zeta_3(z_3)]^k} - \frac{1}{[\bar{\zeta}_3(z_3)]^k}\right\} \qquad (2.5)$$

где

$$c_{3,2n-1} = e_{3,2n-1}; \qquad c_{3,2n} = e_{3,2n} + \frac{(-1)^{n-1} m_3^n}{n} A_0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Функции $\ln \bar{\zeta}_3$ и $\dfrac{1}{\bar{\zeta}_3^k}$ являются голоморфными в нижней полуплоскости S_3, а, следовательно, и внутри эллипса L_{11}. Поэтому эти функции можно разложить в ряды по полиномам Фабера для эллипса L_{11} [2]. Будем иметь

$$\ln \bar{\zeta}_3(z_3) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{3n} P_n(z_3); \qquad \frac{1}{[\bar{\zeta}_3(z_3)]^k} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{3kn} P_n(z_3)$$

Полиномы Фабера $P_n(z_3)$ через переменные ζ_3 выражаются так

$$P_0(z_3) = 1; \quad P_n(z_3) = \zeta_3^n + \frac{m_3^n}{\zeta_3^n}$$

Из граничных условий (1.2) на контуре отверстия методом рядов получим бесконечную алгебраическую систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов c_{3k}:

$$d_{3k} c_{3k} + \sum_{n=1}^{\infty} (d_{3n} A_{3n0} - d_{30} A_{3nk})(1 + m_3^k)\, c_{3n} = -\frac{T_1}{2}(1 + m_3^k)\, d_{3k} \qquad (2.6)$$

$$(k = 1, 2, \ldots)$$

$$A_0 = -\frac{1}{d_{30}}\left(\frac{T_1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{3n0} c_{3n}\right) \qquad (2.7)$$

После решения системы уравнений (2.6) и нахождения коэффициента A_0 по формуле (2.7) функция $F_0(z_3)$ будет полностью определена, что позволяет найти распределение температуры в рассматриваемой полуплоскости по формуле [6]

$$T(x, y) = 2\,\mathrm{Re}\,F_0(z_3) \tag{2.8}$$

§ 3. Зная функцию $F_0(z_3)$, по формуле (1.4) находим

$$\Phi_3(z_3) = [A_3(z_3 - h) + B_3]\ln(z_3 - h) + A_3 z_3 \pi i - $$
$$- [A_3(z_3 + h) - B_3]\ln(z_3 + h) + \sum_{k=1}^{\infty} b_{3k}\left(\frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\bar\sigma_3^k}\right) \tag{3.1}$$

где

$$A_3 = r_3 A_0;\ B_3 = r_3 R_3 c_{31};\ b_{31} = -r_3 R_3 c_{32} + A_3 R_3 m_3$$

$$b_{3,2n} = \frac{r_3 R_3}{2n}(m_3 c_{3,2n-1} - c_{3,2n+1}) + \frac{(-1)^n}{n} m_3^n B_3$$

$$b_{3,2n+1} = \frac{r_3 R_3}{2n+1}(m_3 c_{3,2n} - c_{3,2n+2}) + \frac{(-1)^n}{n(n+1)} m_3^n A_3$$

Функции $\Phi_j(z_j)$ $(j = 1, 2)$ имеют вид [3]

$$\Phi_j(z_j) = [A_j(z_j - h) + B_j]\ln(z_j - h) + \Phi_j^0(z_j) \tag{3.2}$$

Здесь $\Phi_j^0(z_j)$ — функции, голоморфные в S_j за исключением бесконечно удаленной точки; A_j, B_j — коэффициенты, имеющие вид [3]

$$A_j = \frac{\beta_j[a_{22} r_3(\beta_{j+1}^2 - \beta_3^2) + a_{12}\beta_{j+1}^2]}{a_{22} r_3 \beta_3(\beta_j^2 - \beta_{j+1}^2)} A_3$$

$$B_j = \frac{\beta_j[a_{22} r_3(\beta_{j+1}^2 - \beta_3^2) + a_{12}\beta_{j+1}^2]}{a_{22} r_3 \beta_3(\beta_j^2 - \beta_{j+1}^2)} B_3$$

a_{22} — коэффициент деформации для материала пластинки; значение индекса $(j+1)$ равняется единице при $j = 2$.

Функции $\Phi_j^0(z_j)$ представим в виде

$$\Phi_j^0(z_j) = [D_{1j}(s_{1j} z_j - h) + Q_{1j}]\ln(s_{1j} z_j - h) + $$
$$+ [D_{2j}(s_{2j} z_j - h) + Q_{2j}]\ln(s_{2j} z_j - h) + $$
$$+ [D_{3j}(s_{3j} z_j - h) + Q_{3j}]\ln(s_{3j} z_j - h) + \Phi_{j1}(z_j) + \Phi_{j1}^*(z_j) \tag{3.3}$$

Здесь D_{nj}, Q_{nj}, s_{nj} $(n = 1, 3)$ — неизвестные постоянные; $\Phi_{j1}(z_j)$ — функции, голоморфные вне отверстий L_{j1} областей S_j, $\Phi_{j1}^*(z_j)$ — в нижних полуплоскостях областей S_j.

Граничные условия (1.3) можно записать так:

$$\Phi_j(t_j) = l_j\overline{\Phi_1(t_1)} + n_j\overline{\Phi_2(t_2)} + r_j\Phi_3(t_3) + k_j\overline{\Phi_3(t_3)} \tag{3.4}$$

где

$$l_j = \frac{\beta_{j+1} + \beta_1}{\beta_j - \beta_{j+1}}; \qquad n_j = \frac{\beta_{j+1} + \beta_2}{\beta_j - \beta_{j+1}}$$

$$r_j = \frac{\beta_{j+1} - \beta_3}{\beta_j - \beta_{j+1}}; \qquad k_j = \frac{\beta_{j+1} + \beta_3}{\beta_j - \beta_{j+1}}$$

На контуре L_0

$$t_n = i\beta_n y; \qquad \bar{t}_n = k_{nj}t_j; \qquad k_{nj} = -\frac{\beta_n}{\beta_j} \quad (n = \overline{1, 3};\ j = 1, 2)$$

При этом

$$k_{mj}k_{np} = -k_{mp}; \quad k_{jm}k_{pn} = -k_{pm}; \quad k_{mn}k_{nm} = 1 \tag{3.5}$$

Полагая в формулах (3.3) $s_{nj} = k_{nj}$ и учитывая соотношения (3.5), из граничных условий (3.4) на контуре L_0, приравнивая коэффициенты при одинаковых логарифмах, получим

$$\begin{gathered} D_{1j} = l_jA_1;\ D_{2j} = n_jA_2;\ D_{3j} = c_jA_3 \\ Q_{1j} = l_jB_1;\ Q_{2j} = n_jB_2;\ Q_{3j} = c_jB_3 \end{gathered} \tag{3.6}$$

При выполнении этих соотношений имеют место и следующие равенства:

$$\begin{gathered} l_jD_{n1} + n_jD_{n2} = \delta_j^nA_j; \qquad l_jQ_{n1} + n_jQ_{n2} = \delta_j^nB_j \\ l_jD_{31} + n_jD_{32} + c_jA_3 = 0;\ \ l_jQ_{31} + n_jQ_{32} + c_jB_3 = 0 \\ (n,\ j = 1, 2) \end{gathered} \tag{3.7}$$

где δ_j^n — символ Кронекера; $c_j = k_j + r_j$.

Учитывая соотношения (3.3), (3.6), (3.7), из условий (3.4) на контуре L_0 методом интегралов типа Коши найдем

$$\Phi_{j1}^{*}(z_j) = l_j\overline{\Phi}_{11}(z_j) + n_j\overline{\Phi}_{21}(z_j) + c_j\overline{\Phi}_{31}(z_j)$$

С учетом того, что

$$A_j + l_jA_1k_{1j} + n_jA_2k_{2j} + c_jA_3k_{3j} = 0$$

для функций $\Phi_j(z_j)$ окончательно получим

$$\begin{aligned} \Phi_j(z_j) = {} & [A_j(z_j - h) + B_j]\ln(z_j - h) + l_j[A_1(k_{1j}z_j - h) + \\ & + B_1]\ln(-k_{1j}z_j + h) + n_j[A_2(k_{2j}z_j - h) + B_2]\ln(-k_{2j}z_j + h) + \\ & + c_j[A_3(k_{3j}z_j - h) + B_3]\ln(-k_{3j}z_j + h) + A_jz_ji + \Phi_{j1}(z_j) + \\ & + l_j\overline{\Phi}_{11}(z_j) + n_j\overline{\Phi}_{21}(z_j) + c_j\overline{\Phi}_{31}(z_j) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Как и в формулах (2.2) и (2.4), введем переменные ζ_j и $\bar\zeta_{nj}$, которые связаны с z_j следующими неявными зависимостями:

$$z_j - h = R_j\left(\zeta_j + \frac{m_j}{\zeta_j}\right); \quad k_{nj} z_j - h = R_n\left(\zeta_{nj} + \frac{m_n}{\zeta_{nj}}\right)$$

$$R_j = \frac{a+\beta_j b}{2}; \quad m_j = \frac{a-\beta_j b}{a+\beta_j b} \quad (n = \overline{1, 3};\ j = 1, 2) \tag{3.9}$$

Функции $\Phi_{j1}(z_j)$ разложим в ряды Лорана

$$\Phi_{j1}(z_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{jk}}{[\zeta_j(z_j)]^k} \tag{3.10}$$

Тогда, как следует из равенств (2.2), (2.4), (3.1), (3.8), (3.9) и (3.10), функции $\Phi_n(z_n)$ примут вид

$$\Phi_j(z_j) = \left[A_j^0\left(\zeta_j + \frac{m_j}{\zeta_j}\right) + B_j\right] \ln \zeta_j + l_j\left[A_1^0\left(\bar\zeta_{1j} + \frac{m_1}{\bar\zeta_{1j}}\right) + B_1\right] \ln(-\bar\zeta_{1j}) +$$
$$+ n_j\left[A_2^0\left(\bar\zeta_{2j} + \frac{m_2}{\bar\zeta_{2j}}\right) + B_2\right] \ln(-\bar\zeta_{2j}) + c_j\left[A_3^0\left(\bar\zeta_{3j} + \frac{m_3}{\bar\zeta_{3j}}\right) +\right.$$
$$\left. + B_3\right] \ln(-\bar\zeta_{3j}) + A_j^0 \ln R_j \zeta_j + l_j A_1^0 \ln R_1 \bar\zeta_{1j} - n_j A_2^0 \ln R_2 \bar\zeta_{2j} +$$
$$+ c_j A_3^0 \ln R_3 \bar\zeta_{3j} + A_j^0\left(\zeta_j - \frac{m_j}{\zeta_j}\right)\pi i +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_{jk}}{\zeta_j^k} + \frac{l_j a_{1k}}{\bar\zeta_{1j}^k} + \frac{n_j a_{2k}}{\bar\zeta_{2j}^k} + \frac{c_j a_{3k}}{\bar\zeta_{3j}^k}\right); \quad (j = 1, 2) \tag{3.11}$$

$$\Phi_3(z_3) = \left[A_3^0\left(\zeta_3 + \frac{m_3}{\zeta_3}\right) + B_3\right] \ln \zeta_3 + \left[A_3^0\left(\bar\zeta_3 + \frac{m_3}{\bar\zeta_3}\right) +\right.$$
$$\left. + B_3\right] \ln(-\bar\zeta_3) + A_3^0 \ln R_3 \zeta_3 + A_3^0 \ln R_3 \bar\zeta_3 +$$
$$+ A_3^0\left(\zeta_3 + \frac{m_3}{\zeta_3}\right)\pi i + \sum_{k=1}^{\infty} a_{3k}\left(\frac{1}{\zeta_3^k} + \frac{1}{\bar\zeta_3^k}\right)$$

Здесь a_{1k}, a_{2k} — неизвестные коэффициенты, выражающиеся через b_{1k} и b_{2k}; $A_n^0 = A_n R_n$:

$$a_{31} = -r_3 R_3 c_{32} + A_3^0 m_3 (\ln R_3 + 2)$$

$$a_{3,2k} = \frac{r_3 R_3}{2k}(m_3 c_{3,2k-1} - c_{3,2k+1})$$

$$a_{3,2k+1} = \frac{r_3 R_3}{2k+1}(m_3 c_{3,2k} - c_{3,2k+2})$$

Разложим следующие функции, голоморфные внутри эллипсов L_{nj}, в ряды по полиномам Фабера:

$$\left[\bar{\zeta}_{nj}(z_j) + \frac{m_n}{\zeta_{nj}(z_j)}\right] \ln\left[-\bar{\zeta}_{nj}(z_j)\right] = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_{jr}^{(n)} P_r(z_j)$$

$$\ln\left[-\bar{\zeta}_{nj}(z_j)\right] = \sum_{r=0}^{\infty} \beta_{jr}^{(n)} P_r(z_j); \quad \bar{\zeta}_{nj}(z_j) = \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_{jr}^{(n)} P_r(z_j) \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{[\bar{\zeta}_{nj}(z_j)]^k} = \sum_{r=0}^{\infty} A_{jkr}^{(n)} P_r(z_j)$$

$$\left[\bar{\zeta}_3(z_3) + \frac{m_3}{\zeta_3(z_3)}\right] \ln\left[-\bar{\zeta}_3(z_3)\right] = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_{3r} P_r(z_3)$$

$$\ln\left[-\bar{\zeta}_3(z_3)\right] = \sum_{r=0}^{\infty} \beta_{3r} P_r(z_3)$$

$$\bar{\zeta}_3(z_3) = \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_{3r} P_r(z_3)$$

Учитывая представления (3.11) и разложения (3.12), из граничных условий (3.4) на контуре отверстия методом рядов получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$a_{jk} + \sum_{n=1}^{\infty} (L_{jnk} a_{1n} + N_{jnk} a_{2n}) = M_{jk} \tag{3.13}$$

$$(j = 1, 2; \quad k = 1, 2, \ldots)$$

Здесь

$$L_{jnk} = m_j^k l_j A_{jnk}^{(1)} - l_j l_1 A_{1nk}^{(1)} - n_j l_2 A_{2nk}^{(1)}$$

$$N_{jnk} = m_j^k n_j A_{jnk}^{(2)} - l_j n_1 A_{1nk}^{(2)} - n_j n_2 A_{2nk}^{(2)}$$

$$M_{jk} = l_j R_{1k} + n_j R_{2k} + (r_j m_3^k + k_j) R_{3k} + r_j a_{3k} - m_j^k R_{jk} +$$

$$+ \delta_k^1 (l_j A_1^0 \ln R_1 + n_j A_2^0 \ln R_2 + k_j A_3^0 \ln R_3)$$

$$R_{jk} = l_j (A_1^0 \alpha_{jk}^{(1)} + B_1 \beta_{jk}^{(1)} + A_1^0 \gamma_{jk}^{(1)} \ln R_1) +$$

$$+ n_j (A_2^0 \alpha_{jk}^{(2)} + B_2 \beta_{jk}^{(2)} + A_2^0 \gamma_{jk}^{(2)} \ln R_2) +$$

$$+ c_j \left(A_3^0 \alpha_{jk}^{(3)} + B_3 \beta_{jk}^{(3)} + A_3^0 \gamma_{jk}^{(3)} \ln R_3 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{3n} A_{jnk}^{(3)}\right)$$

$$R_{3k} = A_3^0 \alpha_{3k} + B_3 \beta_{3k} + A_3^0 \gamma_{3k} \ln R_3 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{3n} A_{3nk}$$

После решения систем уравнений (2.6) и (3.13) комплексные потенциалы (3.11) станут известными, что позволяет найти напряжения в полуплоскости по следующим формулам [4, 7]:

$$\sigma_x = -2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\beta_j^2\Phi_j(z_j)$$

$$\sigma_y = 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\Phi_j(z_j) \tag{3.14}$$

$$\tau_{xy} = -2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} i\beta_j\Phi_j(z_j)$$

§ 4. На ЭВМ ЕС-1020 были проведены численные исследования напряженного состояния полуплоскости, изготовленной из стеклотекстолита КАСТ-В [1], для которого

$$a_{11} = 0.508\cdot 10^{-5}\ см^2/кг; \qquad \alpha_1 = 3\cdot 10^{-5}; \quad \alpha_2 = 4\cdot 10^{-5}$$

$$a_{22} = 0.735\cdot 10^{-5}\ см^2/кг; \qquad \beta_1 = 1.20443$$

$$a_{12} = -0.0882\cdot 10^{-5}\ см^2/кг; \quad \beta_2 = 0.99869$$

$$a_{66} = 1.42\cdot 10^{-5}\ см^2/кг; \qquad \beta_3 = 0.79101$$

Температура на контуре отверстия T_1 считалась равной единице.

В полученном решении граничные условия на границе полуплоскости удовлетворяются точно, а на контуре отверстия — приближенно. Степень точности удовлетворения последним зависит от количества уравнений оставляемых в системе (3.13) при численном решении задачи. Это количество варьировалось от 10 до 28, что позволяло удовлетворить граничным условиям с точностью до 1%.

Таблица 1

h/a	y/a					
	0	1	2	3	4	5
10	−0.133	−0.272	−0.382	−0.548	−0.750	−0.967
3	−1.457	−2.291	−4.463	−6.609	−7.121	−6.925
2	−3.236	−5.949	−11.75	−15.24	−12.41	−9.823
1.5	−5.725	−14.93	−27.73	−27.97	−26.64	−22.70
1.25	−8.571	−37.76	−55.83	−51.02	−38.99	−26.12

Для случая, когда $b = 3a$, в табл. 1 приведены значения напряжений σ_x вблизи прямолинейной границы, а в табл. 2 — значения напряжений τ_θ, действующих вблизи контура отверстия на площадках, перпендикулярных к нему. В табл. 3 даны значения максимальных напряжений в точках контура отверстия (фиг. 1), когда $h = 2a$.

Таблица 2

θ°	h/a					
	100	10	3	2	1.5	1.25
0	−6.135	−9.184	−15.52	−21.88	−32.29	−48.63
30	−6.189	−9.036	−15.14	−21.38	−31.67	−48.04
60	−6.474	−7.915	−12.17	−17.34	−26.55	−42.22
90	−7.852	−1.171	9.41	16.67	23.76	28.68
120	−6.446	−7.413	−7.31	−4.147	3.783	16.02
150	−6.178	−8.964	−14.59	−19.21	−22.79	−37.59
180	−6.147	−9.259	−17.61	−29.04	−52.66	−100.1

Таблица 3

Точки	b/a						
	10	5	3	2	0.5	0.2	0.1
A	48.30	25.26	16.67	12.64	7.232	6.436	6.231
B	−53.15	−35.68	−29.04	−26.49	−35.94	−68.96	−126.2

Из табл. 1, 2 видно, что при сближении отверстия с границей полуплоскости значения напряжений вблизи контуров и в зоне между ними возрастают. Изменяется также характер их распределения. Наибольшая концентрация напряжений наблюдается вблизи точки перемычки, лежащей на контуре отверстия. Из табл. 3 следует, что характер распределения напряжений и их концентрации изменяются также с изменением величины отношения полуосей b/a. Если это отношение мало или велико по сравнению с единицей, то наблюдается резкое повышение концентрации напряжений вблизи точки B.

Донецкий государственный
университет

Поступила 9 III 1977

Տ. Ի. ԲՈՒԴԱՌՈՎԱ, Ռ. Ա. ԿԱԼՈՒՐՈՎ, Ա. Ս. ԿՈՍՄՈԴԱՄԻԱՆՍԿԻ

ԷԼԻՊՍԱՁԵՎ ԱՆՑՔՈՎ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Ամփոփում

Դիտարկվում է էլիպսաձև անցքով անիզոտրոպ կիսահարթության համար ջերմա-առաձգականության հարթ խնդիրը:

Խնդրի լուծումը բերվում է գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմների: Բերվում են թվային ուսումնասիրությունների արդյունքները:

THERMAL STRESSES IN AN ANISOTROPIC SEMI-INFINITE PLATE WITH AN ELLIPTICAL HOLE

T. I. BUGASOVA, S. A. KALOEROV, A. S KOSMODAMIANSKY

Summary

A plane problem of thermoelasticity for an anisotropic semi-infinite plate with an elliptical hole is considered. The solution of the problem is reduced to the infinite systems of linear algebraic equations. Numerical calculations are performed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Дургарьян С. М.* Некоторые нестационарные температурные задачи для ортотропной пластинки. Изв. АН СССР, ОТН, «Механика и машиностроение», 1962, 3.
2. *Калоеров С. А., Космодамианский А. С.* Действие сосредоточенной силы в анизотропной полуплоскости с эллиптическим отверстием. «Прикладная механика», 1969, т. V, вып. 11.
3. *Калоеров С. А., Космодамианский А. С.* Представление комплексных потенциалов в задачах термоупругости многосвязных анизотропных пластин. Сб. «Теоретическая и прикладная механика», вып. 8. Киев—Донецк, «Вища школа», Головное издательство, 1977.
4. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
6. *Прусов И. А.* Некоторые задачи термоупругости. Минск, изд. БГУ, 1972.
7. *Уздалев А. И.* Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Саратов, изд. СГУ, 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXI, № 3, 1978 Механика

Т. А. МАРТЫНОВИЧ, В. Е. ЮРИНЕЦ

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С НЕСИММЕТРИЧНО ПОДКРЕПЛЯЮЩИМ УПРУГИМ ЭЛЕМЕНТОМ

1. Рассмотрим неоднородную ортотропную полубесконечную пластину, прямолинейный край которой по всей длине несимметрично подкреплен упругим элементом постоянного сечения. Подкрепляющий элемент спаян с пластиной до деформации таким образом, что ось упругого элемента параллельно смещена от срединной плоскости пластины на некоторую величину ζ_0 (аксцентриситет подкрепления). Сопряжение пластины с подкрепляющим элементом осуществляется на фактической плоскости спая.

К упругому подкрепляющему элементу приложены внешние изгибающие моменты $M(x)$, перерезывающие силы $P(x)$ и усилия $N(x)$ и $T(x)$ (N, T — нормальная и касательная составляющие заданных усилий). Со стороны подкрепляющего элемента на пластину будут передаваться контактные изгибающие моменты $M^{(0)}(x)$, перерезывающие силы $P^{(0)}(x)$ и усилия $N^{(0)}(x)$, $T^{(0)}(x)$. Следовательно, на контуре спая пластины с упругим элементом имеем условия сопряжения

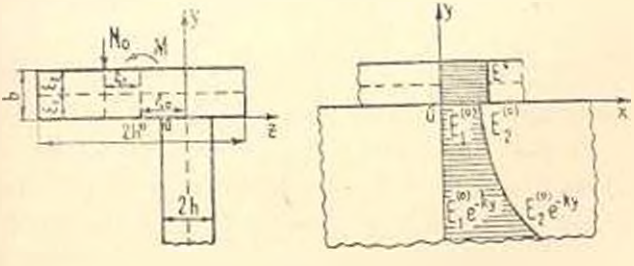
$$(u_1)_{y=0} = u_2; \quad (v_1)_{y=0} = v_2; \quad (w_1)_{y=0} = w_2; \quad \left(\frac{dw_1}{dy}\right)_{y=0} = \frac{dw_2}{dy} \qquad (1.1)$$

$$(\sigma_y)_{y=0} = N^{(0)}(x); \quad (\tau_{xy})_{y=0} = T^{(0)}(x); \quad (M_y)_{y=0} = M^{(0)}(x)$$

$$\left(N_y + \frac{\partial H_{xy}}{\partial x}\right)_{y=0} = P^{(0)}(x)$$

где u_1, v_1, w_1 и u_2, v_2, w_2 — компоненты вектора смещения пластины и подкрепляющего элемента.

Независимо от вида нагружения при наличии аксцентриситета подкрепления пластина испытывает изгибное и обобщенное плоское напряженное состояния (фиг. 1). При $\zeta_0 = 0$ задача расчленяется на плоскую и изгиб.



Фиг. 1.

Модули упругости и модуль сдвига неоднородной ортотропной пластины меняются по закону

$$E_1(y) = E_1^{(0)} e^{-ky}, \quad E_2(y) = E_2^{(0)} e^{-ky}, \quad G(y) = G^{(0)} e^{-ky} \tag{1.2}$$

где k — величина, характеризующая степень неоднородности материала.

Предполагается, что модуль сдвига связан с модулями упругости следующим образом:

$$G^{(0)} = \frac{E_1^{(0)} E_2^{(0)}}{E_1^{(0)}(1+2\nu_2)+E_2^{(0)}} \tag{1.3}$$

Соотношение (1.3) дает возможность рассматривать численные примеры в относительных величинах $E_1^{(0)}/E_2^{(0)}$, в противном случае для $G^{(0)}$ можно задавать конкретные числовые данные, не учитывая выражения (1.3). Коэффициенты Пуассона ν_1 и ν_2 предполагаются постоянными.

2. Подкрепляющий упругий элемент рассчитывался по теории криволинейных стержней. При малых деформациях, принимая гипотезу нормального сечения, вдоль контура спая пластины со стержнем ($y = 0$) имеют место следующие кинематические соотношения:

$$\frac{du_2}{dx} = e_0 - \varepsilon_1 \frac{d\theta_z}{dx} - \varepsilon_0 \frac{d\theta_y}{dx}, \qquad \frac{dv_2}{dx} = -\theta_z,$$
$$\frac{dw_2}{dx} = \theta_y + \varepsilon_1 \frac{d\theta_x}{dx}, \qquad \frac{dw_2}{dy} = -\theta_x \tag{2.1}$$

где e_0 — деформация оси стержня; θ_x, θ_y, θ_z — углы поворота поперечного сечения стержня вокруг координатных осей x, y, z.

Из уравнений равновесия элемента стержня найдем

$$\frac{dV_y}{dx} = 2hN^{(i)} - 2h^*N, \qquad \frac{dV_x}{dx} = 2hT^{(i)} - 2h^*T$$

$$\frac{dV_z}{dx} = P^{(i)} - P, \quad \frac{d^2L_y}{dx^2} = P - P^{(i)} - 2h\varepsilon_0 \frac{dT^{(i)}}{dx} + 2h^*\varepsilon_1 \frac{dT}{dx}$$

$$\frac{dL_x}{dx} = M^{(i)} - M + 2h\varepsilon_0 N^{(i)} + \varepsilon_1 P^{(i)} + \varepsilon_2 P - 2h^*\varepsilon_1 N \tag{2.2}$$

$$\frac{d^2L_z}{dx^2} = 2hN^{(i)} - 2h^*N - 2h^*\varepsilon_2 \frac{dT}{dx} - 2h\varepsilon_1 \frac{dT^{(i)}}{dx}$$

где V_x, V_y, V_z и L_x, L_y, L_z — составляющие по осям xyz главного вектора $\vec{V}$ и главного момента $\vec{L}$ внутренних усилий, действующих в произвольном сечении стержня; ε_1 и ε_2 — расстояния волокон стержня от его нейтрального слоя (оси) соответственно внутреннего и внешнего края; $b = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ — высота стержня; $2h^*$ — толщина края стержня, который не соприкасается с пластиной; $2h$ — толщина пластины; ε_1 — эксцентриситет приложения внешнего нормального усилия.

При малых деформациях закон Гука для стержня сводится к соотношениям

$$e_0 = \frac{V_x}{g_1}, \quad \frac{d\theta_z}{dx} = \frac{L_z}{g_2}, \quad \frac{d\theta_y}{dx} = \frac{L_y}{A}, \quad \frac{d\theta_x}{dx} = \frac{L_x}{C} \tag{2.3}$$

где $g_1 = E^*F_0$, $g_2 = E^*I_z$, $A = E^*I_y$, C — жесткости стержня соответственно на растяжение, изгиб и кручение; F_0 — площадь нормального сечения стержня; E^* — модуль упругости материала стержня; I_z, I_y — моменты инерции стержня.

В работе используется интегральное преобразование Фурье по переменной x

$$\begin{gathered} \overline{F}(\lambda, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)\, e^{i\lambda x}\, dx \\ F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F}(\lambda, y)\, e^{-i\lambda x}\, d\lambda \end{gathered} \tag{2.4}$$

Из равенств (2.1). (2.2), (2.3). используя интегральное преобразование Фурье (2.4). находим

$$\lambda^3\overline{u}_0 = 2h^* i\lambda\left(\frac{1}{G_2} + \frac{\zeta_0\varepsilon_1}{A}\right)\overline{T} - 2hi\lambda\left(\frac{1}{G_1} - \frac{\zeta_0^2}{A}\right)\overline{T}^{(i)} -$$

$$- \frac{2h\varepsilon_1}{g_2}\overline{N}^{(i)} - \frac{2h^*\varepsilon_1}{g_2}\overline{N} + \frac{\zeta_0}{A}\overline{P}^{(i)} - \frac{\zeta_0}{A}\overline{P}$$

$$\lambda^4\overline{v}_0 = \frac{2h^*}{g_2}\overline{N} - \frac{2h}{g_2}\overline{N}^{(i)} - i\lambda\frac{2h\varepsilon_1}{g_2}\overline{T}^{(i)} - i\lambda\frac{2h^*\varepsilon_1}{g_2}\overline{T}$$

$$\overline{w}_0 = i\frac{2h\zeta_0}{\lambda^3 A}\overline{T}^{(i)} - \frac{2h\varepsilon_1\zeta_0}{\lambda^2 C}\overline{N}^{(i)} - \left(\frac{\varepsilon_1}{\lambda^2 C} - \frac{1}{\lambda^4 A}\right)\overline{P}^{(i)} - \frac{\varepsilon_1}{\lambda^2 C}\overline{M}^{(i)} +$$

$$+ \left(\frac{1}{\lambda^4 A} - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\lambda^2 C}\right)\overline{P} - \frac{2h^*\zeta_1}{\lambda^2 C}\overline{N} - i\frac{2h^*\zeta_0}{\lambda^3 A}\overline{T} + \frac{\varepsilon_1}{\lambda^2 C}\overline{M}$$

$$\frac{d\overline{w}_0}{dy} = \frac{2h\zeta_0}{\lambda^2 C}\overline{N}^{(i)} + \frac{1}{\lambda^2 C}\overline{M}^{(i)} + \frac{\varepsilon_1}{\lambda^2 C}\overline{P}^{(i)} + \frac{2h^*\zeta_1}{\lambda^2 C}\overline{N} - \frac{\varepsilon_1}{\lambda^2 C}\overline{P} - \frac{1}{\lambda^2 C}\overline{M}$$

где

$$\frac{1}{G_1} = \frac{1}{g_1} + \frac{\varepsilon_1^2}{g_2}, \quad \frac{1}{G_2} = \frac{1}{g_2} - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{g_2}$$

3. Обобщенное плоское напряженное состояние неоднородной ортотропной полубесконечной пластины, упругие характеристики которой меняются по закону (1.2), рассматривалось в работе [2], поэтому на нем останавливаться не будем. В трансформантах Фурье формулы, связывающие

компоненты точек границы неоднородной ортотропной пластины ($y = 0$) с приложенными к границе полубесконечной пластины усилиями (1.1), имеют вид

$$(i\lambda^3 \bar{u}_1)_{y=0} = \frac{1}{E_1^{(0)}} (s_1 \bar{N}^{(0)} + i\lambda s_2 \bar{T}^{(0)})$$
$$(\lambda^4 \bar{v}_1)_{y=0} = \frac{1}{E_1^{(0)}} (s_3 \bar{N}^{(0)} + i\lambda s_4 \bar{T}^{(0)}) \qquad (3.1)$$

где

$$s_1 = \nu_1 \lambda^2 - \alpha_1 \alpha_2 + \frac{k}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) - \frac{k^2}{4}, \qquad s_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - k$$

$$s_3 = (\alpha_1 + \alpha_2) \left| \alpha_1 \alpha_2 - \frac{k}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{k^2}{4} \right|$$

$$s_4 = \frac{k^2}{4} + \frac{k}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2) - \lambda^2 [\nu_1 - k_0 (1 + 2\nu_2) - 1]$$

$$\alpha_{1,2} = \sqrt{\frac{k^2}{4} + k_1 \lambda^2 \pm \lambda \sqrt{\lambda^2 (k_1^2 - k_0) - \nu_1 k^2}}$$

$$k_0 = \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}}, \qquad k_1 = \frac{1}{2} [k_0 (1 + 2\nu_2) + (1 - 2\nu_1)]$$

4. Рассмотрим изгиб неоднородной ортотропной пластины, упругие характеристики которой—экспоненциальные функции координаты y. Уравнения равновесия элемента ортотропной пластины при изгибе имеют вид [1]

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + q = 0, \qquad N_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H_{xy}}{\partial y}, \qquad N_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H_{xy}}{\partial x}$$

$$M_x = -D_1 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right), \qquad M_y = -D_2 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) \qquad (4.1)$$

$$H_{xy} = -2 D_k \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}, \qquad D_1 = \frac{E_1 (2h)^3}{12 (1 - \nu_1 \nu_2)}$$

$$D_2 = \frac{E_2 (2h)^3}{12 (1 - \nu_1 \nu_2)}, \qquad D_k = \frac{G (2h)^3}{12}$$

где N_x, N_y — перерезывающие силы, действующие на пластину; M_x, M_y — изгибающие моменты; H_{xy} — скручивающий момент; q — нагрузка на единицу площади пластины; D_1, D_2, D_k — величины, характеризующие жесткости ортотропной пластины и зависящие от координаты y; w_1 — прогиб пластины.

Принимая, что ν_1 и ν_2 постоянные и $q = 0$, и учитывая при этом выражения (1.2) и (2.4), из равенств (4.1) получим однородное дифференциальное уравнение для определения трансформанты функции изгиба $\overline{w}_1$ неоднородной ортотропной пластины

$$\frac{d^4\overline{w}_1}{dy^4} - 2k\frac{d^3\overline{w}_1}{dy^3} + \left[k^2 - \lambda^2\left(\frac{4k_0(1-\nu_1\nu_2)}{k_0(1+2\nu_2)+1} + k_0\nu_2 - \nu_1\right)\right]\frac{d^2\overline{w}_1}{dy^2} +$$

$$+ 2\lambda^2 k\left[\frac{2k_0(1-\nu_1\nu_2)}{k_0(1+2\nu_2)+1} + \nu_1\right]\frac{d\overline{w}_1}{dy} + (k_0\lambda^4 - k^2\nu_1\lambda^2)\overline{w}_1 = 0 \qquad (4.2)$$

Решение уравнения (4.2) будем искать в виде

$$\overline{w}_1 = \sum_{n=1}^{4} B_n e^{\left(\beta_n + \frac{k}{2}\right)y} \qquad (y \leqslant 0) \qquad (4.3)$$

Подставляя выражение (4.3) в уравнение (4.2), получим

$$\beta_n^4 - 2\left(\frac{k^2}{4} + \lambda^2 k_2\right)\beta_n^2 + \frac{k^4}{16} + \frac{k^2\lambda^2}{2}k_2 + k_0\lambda^4 - k^2\nu_1\lambda^2 = 0 \qquad (4.4)$$

где

$$k_2 = \frac{2k_0(1-\nu_1\nu_2)}{k_0(1+2\nu_2)+1} + \nu_1$$

Отсюда находим β_n

$$\beta_n = \pm\sqrt{\frac{k^2}{4} + k_2\lambda^2 \pm \sqrt{\lambda^4(k_2^2 - k_0) + k^2\nu_1\lambda^2}} \qquad (4.5)$$

Для решения уравнения (4.2) в виде (4.3) с учетом (4.4) необходимо удержать члены, исчезающие на бесконечности. Значит, соотношение для $\overline{w}_1$ запишется

$$\overline{w}_1(\lambda, y) = B_1(\lambda)e^{\left(\beta_1 + \frac{k}{2}\right)y} + B_2(\lambda)e^{\left(\beta_2 + \frac{k}{2}\right)y} \qquad (4.6)$$

где

$$\beta_{1,2} = \sqrt{\frac{k^2}{4} + k_2\lambda^2 \pm \sqrt{\lambda^4(k_2^2 - k_0) + k^2\nu_1\lambda^2}}$$

$B_1(\lambda)$, $B_2(\lambda)$ — неизвестные функции параметра λ, подлежащие определению из граничных условий (1.1).

На контуре спая пластины с подкрепляющим элементом ($y = 0$) на основании уравнений (1.1) и (4.1) будут иметь место равенства

$$\left[\frac{d^3\overline{w}_1}{dy^3} - k\frac{d^2\overline{w}_1}{dy^2} - \lambda^2(2k_2 - \nu_1)\frac{d\overline{w}_1}{dy} + k\nu_1\lambda^2\overline{w}_1\right]_{y=0} =$$

$$= -\frac{3(1-\nu_1\nu_2)}{2h^3E_2^{(d)}}\overline{p}^{(1)} \qquad (4.7)$$

$$\left[\frac{d^2\overline{w}_1}{dy^2} - \nu_1\lambda^2\overline{w}_1\right]_{y=0} = -\frac{3(1-\nu_1\nu_2)}{2h^3E_1^{(0)}}\overline{M}^{(i)}$$

Подставляя выражение (4.6) в равенства (4.7), найдем $B_1(\lambda)$ и $B_2(\lambda)$. Тогда

$$\left(\overline{w}_1\right)_{y=0} = \frac{3(1-\nu_1\nu_2)}{2h^3E_1^{(0)}\omega_0}\left(\omega_1\overline{P}^{(i)} - \omega_2\overline{M}^{(i)}\right)$$

$$\left(\frac{d\overline{w}_1}{dy}\right)_{y=0} = \frac{3(1-\nu_1\nu_2)}{2h^3E_1^{(0)}\omega_0}\left(\omega_3\overline{P}^{(i)} - \omega_4\overline{M}^{(i)}\right) \qquad (4.8)$$

Здесь введены обозначения

$$\omega_0 = \beta_1^2\beta_2^2 + \left(\frac{k^2}{4} - \nu_1\lambda^2\right)\left(\beta_1^2 + \beta_1\beta_2 + \beta_2^2\right) + \left[\frac{3}{4}k^2 + \lambda^2(2k_2 - \nu_1)\right]\beta_1\beta_2 +$$

$$+ k\left[\beta_1\beta_2 + \lambda^2(k_2 - 2\nu_1) + \frac{k^2}{4}\right](\beta_1 + \beta_2) +$$

$$+ \frac{k^2\lambda^2}{2}(k_2 - 2\nu_1) + \nu_1\lambda^4(2k_2 - \nu_1) + \frac{k^4}{16}$$

$$\omega_1 = \beta_1 + \beta_2 + k, \qquad \omega_3 = \beta_1\beta_2 + \frac{k}{2}(\beta_1 + \beta_2) + \nu_1\lambda^2 + \frac{k^2}{4}$$

$$\omega_2 = \beta_1^2 + \beta_1\beta_2 + \beta_2^2 + \frac{k}{2}(\beta_1 + \beta_2) - \lambda^2(2k_2 - \nu_1) - \frac{k^2}{4}$$

$$\omega_4 = \beta_1\beta_2\left(\frac{k}{2} + \beta_1 + \beta_2\right) + \frac{k}{2}\left(\beta_1^2 + \beta_1\beta_2 + \beta_2^2\right) + \frac{k^2}{4}(\beta_1 + \beta_2) - k\nu_1\lambda^2$$

5. Исходя из условий равенства перемещений на контуре спая (1.1), на основании соотношений (2.5), (3.1), (4.8) получим

$$a_{11}\overline{N}^{(i)} + a_{12}\overline{T}^{(i)} + a_{13}\overline{P}^{(i)} = c_{11}\overline{N} + c_{12}\overline{T} + c_{13}\overline{P}$$

$$a_{21}\overline{N}^{(i)} + a_{22}\overline{T}^{(i)} = c_{21}\overline{N} + c_{22}\overline{T} \qquad (5.1)$$

$$a_{31}\overline{N}^{(i)} + a_{32}\overline{T}^{(i)} + a_{33}\overline{P}^{(i)} + a_{34}\overline{M}^{(i)} = c_{31}\overline{N} + c_{12}\overline{T} + c_{13}\overline{P} + c_{14}\overline{M}$$

$$a_{41}\overline{N}^{(i)} + a_{43}\overline{P}^{(i)} + a_{44}\overline{M}^{(i)} = c_{41}\overline{N} + c_{43}\overline{P} + c_{44}\overline{M}$$

где

$$a_{11} = 2h\varepsilon_1 + \frac{g_2s_1}{E_1^{(0)}}, \qquad a_{12} = i\lambda\left[2hg_2\left(\frac{1}{G_1} + \frac{\xi_0^2}{A}\right) + \frac{g_2s_1}{E_1^{(0)}}\right], \qquad a_{13} = -\frac{\xi_0 g_2}{A}$$

$$a_{21} = 2h + \frac{g_2s_3}{E_1^{(0)}}, \qquad a_{22} = i\lambda\left(2h\varepsilon_1 + \frac{g_2s_4}{E_1^{(0)}}\right), \qquad a_{31} = 2h\varepsilon_1\lambda^2\xi_0$$

$$a_{32} = -i\lambda\zeta_0\frac{2hC}{A}, \quad a_{33} = \frac{3\lambda^4\omega_1(1-\nu_1\nu_2)C}{2\omega_0 h^3 E_2^{(0)}} + \lambda^2\zeta_1^2 + \frac{C}{A}$$

$$a_{34} = \varepsilon_1\lambda^2 - \frac{3\lambda^4\omega_2(1-\nu_1\nu_2)C}{2\omega_0 h^3 E_2^{(0)}}, \quad a_{41} = 2h\zeta_0$$

$$a_{43} = \varepsilon_1 - \frac{3\lambda^2\omega_3(1-\nu_1\nu_2)C}{2\omega_0 h^3 E_2^{(0)}}, \quad a_{44} = 1 + \frac{3\lambda^2\omega_4(1-\nu_1\nu_2)C}{2\omega_0 h^3 E_2^{(0)}}$$

$$c_{11} = 2h^*\varepsilon_1, \quad c_{12} = 2h^* i\lambda g_2\left(\frac{1}{G_2} + \frac{\zeta_0\zeta_1}{A}\right), \quad c_{13} = -\frac{\zeta_0 g_2}{A}, \quad c_{21} = 2h^*$$

$$c_{22} = -2h^* i\lambda\varepsilon_2, \quad c_{23} = \frac{C}{A} - \lambda^2\varepsilon_1\varepsilon_2, \quad c_{24} = \lambda^2\varepsilon_1, \quad c_{31} = -2h^* i\lambda\zeta_1$$

$$c_{32} = -2h^* i\lambda\zeta_1\frac{C}{A}, \quad c_{41} = -2h^*\zeta_1; \quad c_{43} = \varepsilon_2, \quad c_{44} = -1$$

Система уравнений (5.1) служит для определения трансформант контактных усилий $\overline{N}^{(i)}$, $\overline{T}^{(i)}$, $\overline{P}^{(i)}$ и моментов $\overline{M}^{(i)}$ при несимметричном подкреплении упругим элементом неоднородной ортотропной пластины, упругие характеристики которой — экспоненциальные функции координаты y. Сами же контактные усилия и моменты восстанавливаются при помощи формулы обращения (2.4). В случае симметричного подкрепления ($\zeta_1 = 0$) система уравнений (5.1) распадается на две независимые.

6. Рассмотрим случай нагружения подкрепляющего элемента внешним нормальным усилием $N(x)$ ($T = 0$, $P = 0$, $M = 0$) при $\zeta_1 = 0$. Тогда

$$c_{12} = c_{13} = c_{22} = c_{31} = c_{32} = c_{33} = c_{34} = c_{41} = c_{43} = c_{44} = 0 \tag{6.1}$$

Решение системы уравнений (5.1) в этом случае, учитывая соотношения (2.4), представим в виде

$$N^{(i)}(x) = \frac{c_{11}}{\pi}\int_0^\infty \frac{R_1(\lambda)}{R_0(\lambda)}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} N(t)\cos\lambda(t-x)\,dt$$

$$T^{(i)}(x) = \frac{c_{21}}{\pi}\int_0^\infty \frac{R_2(\lambda)}{R_0(\lambda)}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} N(t)\sin\lambda(t-x)\,dt \tag{6.2}$$

$$P^{(i)}(x) = \frac{c_{21}}{\pi}\int_0^\infty \frac{R_3(\lambda)}{R_0(\lambda)}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} N(t)\cos\lambda(t-x)\,dt$$

$$M^{(i)}(x) = \frac{c_{21}}{\pi}\int_0^\infty \frac{R_4(\lambda)}{R_0(\lambda)}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} N(t)\cos\lambda(t-x)\,dt$$

где

$$R_0(\zeta) = (a_{11}a^*_{22} - a_{12}a^*_{21})(a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43}) - a_{11}[a^*_{32}(a_{34}a_{41} - a_{31}a_{44}) +$$

$$+ a_{21}a^*_{32}a_{14}], \quad R_1(\zeta) = (\zeta_1 a^*_{22} - a^*_{12})(a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43}) + a_{13}a^*_{32}a_{44}$$

$$R_2(\zeta) = (a_{12} - \zeta_1 a_{11})(a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43}) + a_{13}(a_{34}a_{41} - a_{31}a_{44})$$

$$R_3(\zeta) = (a^*_{22}\zeta_1 - a^*_{12})(a_{33}a_{41} - a_{31}a_{43}) + a^*_{32}a_{41}(\zeta_1 a_{21} - a_{11})$$

$$R_4(\zeta) = a^*_{32}(a_{11}a_{43} - a_{13}a_{41}) - a^*_{12}(a_{31}a_{43} - a_{33}a_{41}) -$$

$$- \zeta_1[a_{13}(a_{21}a^*_{32} - a^*_{22}a_{31}) + a^*_{12}a_{33}a_{41}]$$

$$a^*_{12} = 2hg_2\left(\frac{1}{G_2} + \frac{\zeta_2^2}{A}\right) + \frac{g_2 s_2}{E_1^{(0)}}, \qquad a^*_{22} = 2hg_1 + \frac{g_2 s_2}{E_1^{(0)}}, \qquad a^*_{32} = -\frac{2hC\zeta_0}{A}$$

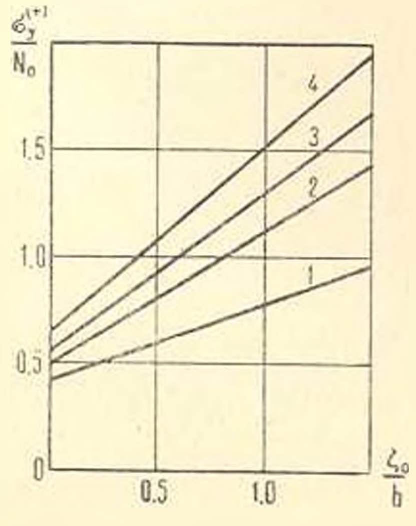
Для примера рассмотрим неоднородную ортотропную пластину и подкрепляющий упругий элемент прямоугольного сечения $b \times 2h^*$ со следующими упругими, жесткостными и геометрическими характеристиками

$$\frac{2h^*}{2h} = 2.5, \qquad \frac{E^*}{E_1^{(0)}} = \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} = 2, \qquad C = \frac{0.249\, E^* b^3 h^*}{1 + \nu^*}, \qquad A = \frac{2}{3}E^* b h^{*3}$$

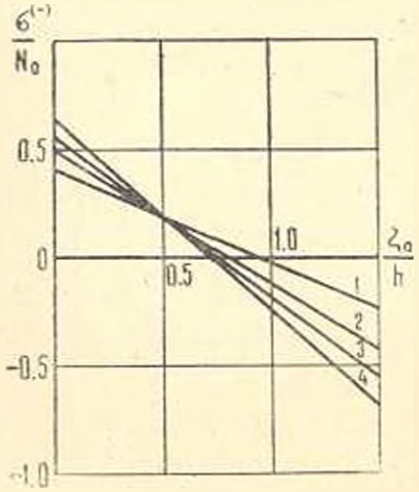
$$g_1 = 2h^* b E^*, \quad g_2 = \frac{1}{6}E^* b h^*, \quad b = 2h, \quad s_1 = s_2 = h, \quad \nu^* = \nu_1 = 0.3$$

Упругий элемент нагружен внешней сосредоточенной силой N_0.

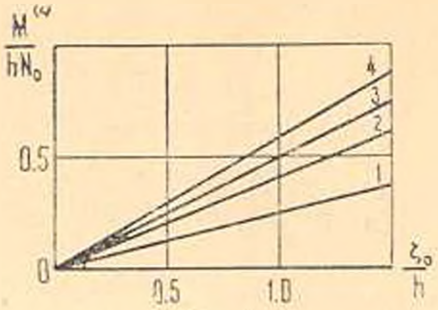
На фиг. 2, 3 приведены зависимости контактных напряжений $\sigma_y^{(+)}$ и $\sigma_y^{(-)}$ на краях пластины, когда $z = -h$ и $z = h$, при $x = 0$ от эксцентриситета подкрепления ζ_0. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям параметра $k = 0;\ 0.5;\ 1.0;\ 2.0$.



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Зависимость контактных моментов $M^{(1)}$ от эксцентриситета подкрепления ζ_0 при $x=0$ и тех же значениях k представлена на фиг. 4.

Львовский госуниверситет
им. И. Франко

Поступила 9 III 1977

Տ. Լ. ՄԱՐՏԻՆՈՎԻՉ, Վ. Ե. ՅՈՒՐԻՆԵՑ

ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԹԻԹԵՂԻ ԵՎ ՆՐԱՆ ՈՉ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԱՄՐԱՑՎԱԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԷԼԵՄԵՆՏԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության մեթոդով լուծված է ոչ սիմետրիկ ամրացված եզրով անհամասեռ օրթոտրոպ կիսաանվերջ թիթեղի լարված վիճակի վերաբերյալ խնդիրը։ Թիթեղի առաձգական բնութագրերը ներկայացված են ըստ կոորդինատի էքսպոնենցիալ ֆունկցիաներով։

ON CONTACT INTERACTION OF A NON-HOMOGENEOUS ORTHOTROP PLATE WITH AN ASYMMETRICALLY STRENGTHENED ELASTIC ELEMENT

T. L. MARTYNOVICH, V. E. YURYNETS

Summary

The problem of the tense state of a non-homogeneous orthotrop semiinfinite plate, whose characteristics are the exponential function of the coordinate with an asymmetrically strengthened edge, is solved by the method of the Fourier integral transformations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М., Гостехтеоретиздат, 1957.
2. *Мартынович Т. Л., Юринец В. Е., Нищенко И. А.* Неоднородная ортотропная полуплоскость с подкрепленным краем. Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, XXIX, № 3.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXI, № 3, 1978 Механика

И. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ СИЛОВЫХ ПОЛЕЙ

Во многих явлениях природы и в многочисленных технических приложениях теория распределения позволяет записывать одинаковые выражения и составить некоторые общие методы для изучения явлений, существенно облегчая вычисления.

Целью настоящей работы является уточнение определенных зависимостей теории поля, представление электрических (или тяготение) силовых полей однородными выражениями, независящими от формы тела, создающего поля (точки, конечная система точек, кривая или поверхность). Преимущество этого обобщенного представления очевидно. Оно состоит в получении обобщенных соотношений, включающих возможные частные случаи.

1. *Выражение силы в поле нагрузки, распределенной по некоторому объему.*

Пусть электростатически нагруженное трехмерное тело занимает объем V. Предполагается, что в точке P, когда $P(\alpha, \beta, \gamma) \in V$, приложена нагрузка dq

$$dq = [\rho(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha d\beta d\gamma] \tag{1.1}$$

где $\rho(\alpha, \beta, \gamma)$ — плотность нагрузки в точке $P(\alpha, \beta, \gamma)$ из области V.

Если обозначить через $U(x-\alpha, y-\beta, z-\gamma)$ силовую функцию для единичной нагрузки, то элементарная нагрузка dq будет создавать силовое поле в точке M пространства с координатами x, y, z, характеризуемое силой

$$d\overline{F} = \operatorname{grad} U \cdot dq \tag{1.2}$$

Согласно (1.1) можно записать в общепринятой терминологии

$$d\overline{F} = \left(\overline{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \overline{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \overline{k}\frac{\partial U}{\partial z}\right)\rho(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha d\beta d\gamma \tag{1.3}$$

Итак, в текущей точке $M(x, y, z)$ пространства совокупность нагрузок, занимающих неизменный сплошной объем V, будет вызывать силу поля

$$\overline{F} = \int\limits_{(V)} d\overline{F} = \iiint\limits_{(V)} \left(\overline{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \overline{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \overline{k}\frac{\partial U}{\partial z}\right)\rho(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha d\beta d\gamma \tag{1.4}$$

Это равенство верно только для рассматриваемого случая, а именно, для случая, когда нагрузки ,создающие силовое поле, занимают объем V.

2. *Введение распределения Дирака в силовых полях.*

Задаваясь любыми α_s, β_s, γ_s, легко получить, что

$$U(x-\alpha,\ y-\beta,\ z-\gamma)\,\delta(\alpha-\alpha_s,\ \beta-\beta_s,\ \gamma-\gamma_s)=$$
$$=U(x-\alpha_s,\ y-\beta_s,\ z-\gamma_s)\,\delta(\alpha-\alpha_s,\ \beta-\beta_s,\ \gamma-\gamma_s) \qquad (2.1)$$

где $\delta(\alpha-\alpha_s,\ \beta-\beta_s,\ \gamma-\gamma_s)$ — распределение Дирака, а $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ — координаты текущей точки, принадлежащей объему V. Отсюда следует, что

$$\overline{\nabla}\,[U(x-\alpha,\ y-\beta,\ z-\gamma)\,\delta(\alpha-\alpha_s,\ \beta-\beta_s,\ \gamma-\gamma_s)]=$$
$$=\overline{\nabla}\,[U(x-\alpha_s,\ y-\beta_s,\ z-\gamma_s)\,\delta(\alpha-\alpha_s,\ \beta-\beta_s,\ \gamma-\gamma_s)] \qquad (2.2)$$

где оператор

$$\overline{\nabla}=\overline{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\overline{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\overline{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

Равенства (2.1), (2.2) и (1.4) могут быть использованы в следующих случаях:

а) случай конечного множества нагрузок. При этом нагрузки q_s $(s=1,\ 2,\ldots,\ n)$ расположены в точках $P_s(\alpha_s,\ \beta_s,\ \gamma_s)$.

В этом случае плотность будет

$$\overline{\rho}=\sum_{s=1}^{n} q_s\,\delta(\alpha-\alpha_s,\ \beta-\beta_s,\ \gamma-\gamma_s) \qquad (2.3)$$

Подставляя это выражение в (1.4) и учитывая (2.1) и (2.2), получим

$$\overline{F}=\iiint\limits_{(V)}\Big[\,\overline{\nabla}\,U(x-\alpha,\ y-\beta,\ z-j)\sum_{s=1}^{n}\delta(\alpha-\alpha_s,\ \beta-\beta_s,\ \gamma-\gamma_s)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,\Big] \qquad (2.4)$$

откуда

$$\overline{F}=\sum_{s=1}^{n} q_s\,[\,\overline{\nabla}\,U(x-\alpha_s,\ y-\beta_s,\ z-\gamma_s)] \qquad (2.5)$$

б) нагрузка составляет одномерную постоянную систему (кривая). Пусть

$$\alpha=\varphi(t),\quad \beta=\psi(t),\quad \gamma=\theta(t) \qquad (2.6)$$

— параметрическое уравнение этой кривой.

Для криволинейной координаты s имеем:

$$s=\int\limits_{0}^{t}\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}\,dt \qquad (2.7)$$

Допустим, что плотность нагрузки изменяется вдоль кривой по закону $q=q(s)$.

Следовательно,

$$d\rho = q(s)\,\delta[\alpha - \varphi(t),\ \beta - \psi(t),\ \gamma - \theta(t)]\,ds \tag{2.8}$$

или на основании равенства (2.7)

$$\rho = \int_{(C)} g(t)\,\delta[\alpha - \varphi(t),\ \beta - \psi(t),\ \gamma - \theta(t)]\,dt \tag{2.9}$$

где

$$g(t) = q\left[\int_0^t \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}\,dt\right] \times$$

$$\times \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} \tag{2.10}$$

Интеграл (2.9) берется по кривой C, заданной уравнениями (2.6). Тогда

$$\overline{F} = \iiint_{(V)} \overline{\nabla} U\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma =$$

$$= \iiint_{(V)} \left| \overline{\nabla} U(x - \varphi,\ y - \psi,\ z - \theta) \int_{(C)} g(t)\,\delta(\alpha - \varphi,\ \beta - \psi,\ \gamma - \theta)\,dt \right| d\alpha\,d\beta\,d\gamma \tag{2.11}$$

то есть

$$\overline{F} = \int_{(C)} \{\overline{\nabla} U[x - \varphi(t),\ y - \psi(t),\ z - \theta(t)]\}\,g(t)\,dt \tag{2.12}$$

в) материальная система, создающая поле, размещена по поверхности. Пусть параметрическое уравнение поверхности будет:

$$\alpha = \sigma(\lambda, \nu),\ \beta = \zeta(\lambda, \nu),\ \gamma = \mu(\lambda, \nu) \tag{2.13}$$

где λ и ν — криволинейные координаты поверхности.

Если $\eta(\lambda, \nu)$ — нагрузка единицы поверхности, то

$$\rho = \iint_{(A)} \eta(\lambda, \nu) \left\{ \left[\frac{\partial(\zeta, \mu)}{\partial(\lambda, \nu)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(\mu, \sigma)}{\partial(\lambda, \nu)}\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial(\sigma, \zeta)}{\partial(\lambda, \nu)}\right]^2 \right\} \delta(\alpha - \sigma,\ \beta - \zeta,\ \gamma - \mu)\,d\lambda\,d\nu \tag{2.14}$$

где A — поверхность, по которой распределена нагрузка.

Тогда

$$\overline{F}=\iiint\limits_{(V)}\overline{\nabla}U(x-\alpha,\ y-\beta,\ z-\gamma)\,\rho\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \tag{2.15}$$

примет вид

$$\overline{F}=\iint\limits_{(A)}\{\overline{\nabla}U[x-\sigma(\lambda,\nu),\ y-\zeta(\lambda,\nu),\ z-\mu(\lambda,\nu)]\}\, f(\lambda,\nu)\, d\lambda\, d\nu \tag{2.16}$$

где

$$f(\lambda,\nu)=\rho(\lambda,\nu)\left\{\left|\frac{\partial(\zeta,\mu)}{\partial(\lambda,\nu)}\right|^2+\left|\frac{\partial(\mu,\sigma)}{\partial(\lambda,\nu)}\right|^2+\left|\frac{\partial(\sigma,\zeta)}{\partial(\lambda,\nu)}\right|^2\right\}^{1/2}$$

* * *

Вышеприведенные соотношения могут быть использованы в случаях, когда материальная система состоит из электрических нагрузок, составленных объединением нагрузок, распределенных по объему, поверхности, кривой (а именно, конечные трехмерные, двумерные и одномерные множества). Таким образом, предложенный метод выражения силовых полей является достаточно общим.

Петрошанский горный институт
(Румыния)

Поступила 2 XII 1977

Ի. Ն. ԿՈՆՍՏԱՆՏԻՆԵՍԿՈՒ

ՈՒԺԱՅԻՆ ԴԱՇՏԵՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԲԱՇԽՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՕԳՏԱԳՈՐԾՈՒՄԸ

Ամփոփում

Հոդվածում ուսումնասիրվում են վերջավոր մարմնի վրա էլեկտրական դաշտի ազդեցության կառուցման հարցերը մարմնի մեջ էլեկտրական լիցքերի տարբեր բաշխումների ժամանակ։

Դիտարկվում է այն դեպքը, երբ բեռի խտությունը արտահայտվում է Դիրակի ֆունկցիաներով և բեռը կիրառված է մարմնի տարբեր կետերում։

Ուժի ազդեցությունը կառուցվել է, երբ լիցքերը բաշխված են վերջավոր թվով կետերում, ողորկ կորի կամ ողորկ մակերևույթի վրա, Ստացված արդյունքները կարելի է տարածել բավական լայն դասի դաշտերի վրա։

ON THE USE OF THE DISTRIBUTION THEORY FOR THE STUDY OF SOME FORCE FIELDS

I. N. CONSTANTINESCU

Summary

Using the theory of distribution, the treatment of some energetic fields with discontinuous characteristics is discussed. The results obtained are applied to the study of impacts of some particles in contact with rigid surfaces, as well as to traversing some media formed in strata with different resistances opposed to the entrance of the particles that cross them, underlining also the connection of the above with some aspects in optics.

Some numerical examples are given.