ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1978

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXI, № 1, 1978 Механика

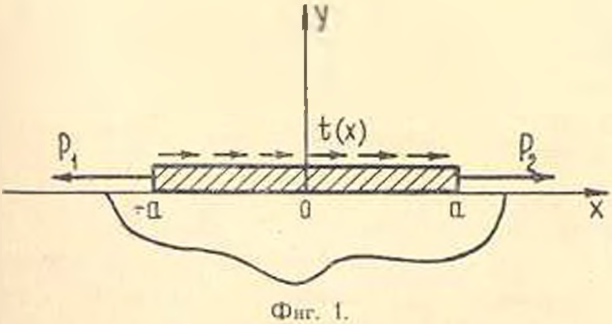
В. М. АЛЕКСАНДРОВ, Е. В. КОВАЛЕНКО, С. М. МХИТАРЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПОЛУПЛОСКОСТИ С УПРУГИМИ НАКЛАДКАМИ

Исследованию напряженного состояния полуплоскости с упругим подкреплением части границы посвящен большой ряд работ: отметим некоторые из них [1—8]. Во всех этих работах строились и изучались неограниченные на краях подкрепления (накладки) решения. В работе [9] впервые поставлен вопрос о возможности существования таких режимов работы накладки, когда в ее концевых точках отсутствует концентрация контактных касательных напряжений.

В данной работе установлено, что решения, ограниченные на краях накладки, безусловно существуют в тех случаях, когда накладка соответствующим образом нагружена. Выделен класс таких нагружений. Математически строго обосновано, что отыскание ограниченных решений автоматически приводит к решениям, обращающимся в нуль в соответствующих концевых точках. Исследование проводилось методом ортогональных многочленов. При этом дан численный анализ для ряда конкретных случаев загружения накладки.

1. *Постановка задачи, интегральное уравнение.* Пусть граница упругой полуплоскости на участке $x \in [-a, a]$ усилена упругой накладкой (стрингером) с жесткостью на растяжение W. Пусть это подкрепление нагружено сосредоточенными силами P_1 и P_2 на его краях и распределенной нагрузкой интенсивности $t(x)$ по верхней грани (фиг. 1). Предполагается, что между границей полуплоскости и накладкой осуществлено полное сцепление при всех $x \in [-a, a]$.



Фиг. 1.

При сделанных предположениях рассматриваемая задача может быть приведена [8, 9] к интегро-дифференциальному уравнению Прандтля

$$\int_{-a}^{a} \frac{T'(\xi)}{\xi - x} d\xi = \pi\lambda [T(x) - F(x)], \quad \left(|x| \leqslant a, \ \lambda = \frac{E}{2W}\right) \tag{1.1}$$

при граничных условиях

$$T(-a) = P_1, \ T(a) = P_2 + F(a) \tag{1.2}$$

Здесь E — модуль Юнга для полуплоскости (случай плоского напряженного состояния) и введены функции

$$T(x) = \int_{-a}^{x} \tau(\xi)\, d\xi + P_1, \quad F(x) = \int_{-a}^{x} t(\xi)\, d\xi \tag{1.3}$$

где $\tau(x)$ — искомое контактное касательное напряжение, действующее между накладкой и полуплоскостью в области $|x| \leqslant a$.

Переходя в (1.1)—(1.3) к безразмерным координатам

$$x = x'a, \quad \xi = \xi' a, \quad \mu = \lambda a$$

и вводя обозначения

$$\varphi(x') = T(x'a), \quad f(x') = F(x'a)$$

перепишем (1.1), (1.2) в виде

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi'(\xi)\, d\xi}{\xi - x} = \pi\mu [\varphi(x) - f(x)] \quad (|x| \leqslant 1) \tag{1.4}$$

$$\varphi(-1) = P_1, \quad \varphi(1) = P_2 + f(1)$$

штрихи у x' и ξ' здесь и далее опускаем.

На основании результатов работы [10] и гл. V монографии [11] можно сформулировать относительно структуры функции $\tau(x)$, определяемой уравнениями (1.1)—(1.3), следующие теоремы.

Теорема 1.1. *Если $F(x) \in B^{\alpha}(-a, a)$, $0 < \alpha \leqslant 1$ и при данном $\lambda \in (0, \infty)$ существует решение уравнения (1.1)—(1.3) такое, что $\tau(x) \in L_p(-a, a)$, $1 < p < 2$, то $\tau(x)$ имеет вид*

$$\tau(x) = \frac{\omega(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad \omega(x) \in B^{\gamma}(-a, a), \qquad \gamma = \inf\left(\alpha, \frac{p-1}{p}\right) \tag{1.5}$$

Теорема 1.2. *Если 1) $F(x) \in B^{\alpha}(-a, a)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, 2) $F(x) \in B^{\beta}(a - \varepsilon, a)$, $\varepsilon > 0$, $1/2 < \beta \leqslant 1$ и при данном $\lambda \in (0, \infty)$ существует решение уравнения (1.1)—(1.3) такое, что 1) $\tau(x) \in L_p(-a, a)$, $1 < p < 2$; 2) $|\tau(x)| \leqslant m$ при $a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a$, где $m = \mathrm{const}$, то выполняется соотношение*

$$P = \int_{-a}^{a} \tau(\xi)\, d\xi = -\lambda \int_{-a}^{a} [T(\xi) - F(\xi)] \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}\, d\xi \tag{1.6}$$

и $\tau(x)$ *имеет вид*

$$\tau(x) = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\, \omega(x), \quad \omega(x) \in B^{\gamma}(-a, a), \quad \gamma = \operatorname{Inf}\left(\alpha,\ \beta - \frac{1}{2},\ \frac{p-1}{p}\right) \tag{1.7}$$

Теорема 1.3. *Если 1)* $F(x) \in B^{\alpha}(-a, a)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, *2)* $F(x) \in B^{\beta}(a - \varepsilon, a)$, $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{2} < \beta \leqslant 1$, *3)* $F(x) \in B^{\gamma}(-a, -a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{2} < \gamma \leqslant 1$ *и при данном* $\lambda \in (0, \infty)$ *существует решение уравнения (1.1)—(1.3) такое, что 1)* $\tau(x) \in L_p(-a, a)$, $1 < p < 2$; *2)* $|\tau(x)| \leqslant m$ *при* $a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a$; *3)* $|\tau(x)| \leqslant n$ *при* $-a \leqslant x \leqslant -a + \varepsilon$, *где* m *и* n — *постоянные, то выполняются соотношения*

$$\begin{gathered} P = -\lambda \int_{-a}^{a} [T(\xi) - F(\xi)] \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \\ 0 = \int_{-a}^{a} [T(\xi) - F(\xi)] \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \end{gathered} \tag{1.8}$$

и $\tau(x)$ *имеет вид*

$$\begin{gathered} \tau(x) = \sqrt{a^2 - x^2}\, \omega(x), \quad \omega(x) \in B^{\delta}(-a, a) \\ \delta = \operatorname{Inf}\left(\alpha,\ \beta - \frac{1}{2},\ \gamma - \frac{1}{2},\ \frac{p-1}{p}\right) \end{gathered} \tag{1.9}$$

Из теорем 1.2 и 1.3 следует, что если соответствующим образом нагрузить накладку по ее верхней грани, то есть подобрать функцию $F(x)$ так, чтобы выполнялись условия (1.6) или (1.8), то будут существовать решения, ограниченные на одном либо двух краях накладки вида (1.7), (1.9). В случае $F(x) \equiv 0$ вопрос о существовании ограниченных решений остается открытым. Однако, численное исследование задачи при произвольных значениях сил P_1 и P_2 показало, что в диапазоне $0 \leqslant \lambda \leqslant 120$ решение имеет вид (1.5), причем $\omega(\pm a) \neq 0$.

2. *Сведение к бесконечной алгебраической системе.* Для отыскания приближенного решения задачи в общем неограниченном случае (1.5) применим метод ортогональных многочленов [6, 7].

Представим функцию $\omega(x)$ в (1.5) в виде ряда

$$a^{-1} \omega(ax) = \varphi^{*}(x) \sqrt{1 - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x) \tag{2.1}$$

где $T_n(x)$ — полиномы Чебышева первого рода. Такое представление возможно в силу того, что $\omega(ax) \in B^*(-1, 1)$, при этом ряд (2.1) сходится равномерно.

На основании (2.1) имеем

$$\varphi(x) = P_1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x), \quad F_n(x) = -\frac{1}{n} \sin n\theta \quad (n \geqslant 1) \tag{2.2}$$

$$F_0(x) = \pi - \theta, \quad \theta = \arccos x$$

при этом первое граничное условие (1.4) удовлетворено. Удовлетворяя второму граничному условию (1.4), найдем

$$a_0 = \frac{1}{\pi} [P_2 - P_1 + f(1)] \tag{2.3}$$

Далее разложим $f(x) \in B^*(-1, 1)$ в равномерно сходящийся ряд по полиномам Чебышева второго рода

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n U_{n-1}(x) \tag{2.4}$$

Подставляя (2.1), (2.2) и (2.4) в уравнение (1.4) и принимая во внимание интеграл [12]

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(\xi)\, d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(\xi - x)} = \pi U_{n-1}(x), \quad (|x| \leqslant 1) \tag{2.5}$$

придем к соотношению

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = \mu \left[P_1 + a_0(\pi - \theta) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin n\theta}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \right] \tag{2.6}$$

Умножим обе части (2.6) на $\sin\theta \sin m\theta$ и проинтегрируем в пределах от 0 до π. В результате придем к бесконечной алгебраической системе относительно коэффициентов

$$a_m = \mu \left[\frac{2}{\pi} b_m(P_1 + \pi a_0) - \frac{2}{\pi} a_0 c_m + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n K_{mn} - f_m \right] \tag{2.7}$$

$$(m = 1, 2, \ldots)$$

$b_m = 0$ при $m > 1$, $b_1 = \frac{\pi}{2}$, $c_m = -2m[(-1)^m + 1](m^2 - 1)^{-2}$ при $m > 1$

$c_1 = \frac{\pi^2}{4}$, $K_{mn} = 2m[(-1)^{m+n} + 1][(m-n)^2 - 1]^{-1}[(m+n)^2 - 1]^{-1}$ при

$$m \neq n - 1,\ m \neq n + 1,\ K_{n-1,n} = K_{n+1,n} = 0$$

Введем в рассмотрение сумму

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} |K_{mn}| \tag{2.8}$$

На основании оценки для S_m, данной в работе [7], и с учетом того, что $|f_m| \to 0$ при $m \to \infty$, может быть сформулирована следующая

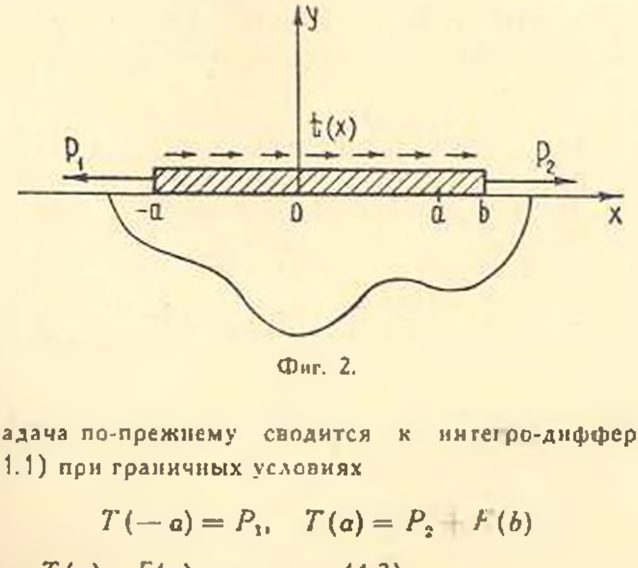
Теорема 2.1. *Бесконечная алгебраическая система (2.7) квазивполне регулярная при всех $\mu \in (0, \infty)$ и вполне регулярна при $\mu < \pi/12$.*

Заметим, что для общего случая рассматриваемой задачи (когда полудлина области контакта a фиксирована) имеет место принцип наложения решений для различных видов загружения накладки.

После решения алгебраической системы (2.7) коэффициенты при особенностях у функции $\tau(ax) = \varphi'(x)$ при $x = \pm 1$ могут быть найдены соответственно по формулам

$$D_1(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad D_2(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \tag{2.9}$$

3. *Сведение к бесконечной алгебраической системе в случае ограниченного решения на одном крае.* Пусть длина накладки $l = b + a$, $b > a$ и по всей своей длине она нагружена по верхней грани распределенной нагрузкой интенсивности $t(x)$, а в точках $x = -a$ и $x = b$ силами P_1 и P_2. В то же время контакт между накладкой и границей полуплоскости осуществляется лишь на участке $-a \leqslant x \leqslant a$. При этом будем предполагать, что в точке $x = a$ контактное касательное напряжение $\tau(x)$ ограничено.



Фиг. 2.

Такая задача по-прежнему сводится к интегро-дифференциальному уравнению (1.1) при граничных условиях

$$T(-a) = P_1, \quad T(a) = P_2 + F(b) \tag{3.1}$$

Здесь функции $T(x)$ и $F(x)$ имеют вид (1.3).

В старых безразмерных переменных интегро-дифференциальное уравнение будет иметь вид (1.4), а граничные условия (3.1) запишутся следующим образом:

$$\varphi(-1) = P_1, \quad \varphi(1) = P_2 + f(\varkappa), \quad \varkappa = ba^{-1} \tag{3.2}$$

Согласно теореме 1.2, решение задачи, ограниченное на крае $x=1$, будем искать в виде ряда

$$\varphi'(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(1/2,\, -1/2)}(x) \tag{3.3}$$

Здесь $P_n^{(\alpha,\, \beta)}(x)$ — полиномы Якоби. Представление (3.3) возможно в силу того, что в соответствии с (1.7) функция $\omega(ax) \in B^r(-1, 1)$, при этом ряд в (3.3) сходится равномерно.

Интегрируя (3.3) и удовлетворяя первому граничному условию (3.2), получим

$$\varphi(x) = P_1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x), \quad F_0(x) = \pi - \theta + \sin\theta \tag{3.4}$$

$$\theta = \arccos x, \quad F_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left[\frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} - \frac{\sin n\theta}{n} \right] \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Удовлетворяя второму граничному условию (3.2), найдем

$$a_0 = \frac{1}{\pi} [P_2 - P_1 + f(\varkappa)] \tag{3.5}$$

Разложим теперь функцию $f(x) \in B^r(-1, \varkappa)$ в равномерно сходящийся при $|x| \leqslant 1$ ряд по полиномам Якоби

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^{(-1/2,\, 1/2)}(x) \tag{3.6}$$

Подставляя (3.3), (3.4) и (3.6) в уравнение (1.4) и принимая во внимание интеграл [9, 13]

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_n^{(1/2,\, -1/2)}(\xi)}{\xi - x} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\, d\xi = -\pi P_n^{(-1/2,\, 1/2)}(x) \quad (|x| < 1) \tag{3.7}$$

придем к соотношению

$$-\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(-1/2,\, 1/2)}(x) = \mu \left[P_1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^{(-1/2,\, 1/2)}(x) \right] \tag{3.8}$$

Умножим обе части равенства (3.8) на $\sqrt{(1+x)/(1-x)}\, P_m^{(-1/2,\, 1/2)}(x)$ и проинтегрируем в пределах от -1 до 1.

С учетом условия ортогональности полиномов Якоби [12] получим следующую бесконечную алгебраическую систему:

$$a_m^* = -\frac{\mu}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} K_{mn} a_n^* + \mu f_m^* \quad (m = 0,\ 1,\ \ldots) \tag{3.9}$$

Здесь введены обозначения

$$a_m^* = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\,a_m, \qquad f_m^* = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\,f_m, \quad f_0^* = f_0 - P_1 \tag{3.10}$$

$$K_{m0} = \left|\begin{array}{ll} \dfrac{1}{2}\pi^2 + 4 \quad (m = 0); \quad \dfrac{4}{3} & (m = 1) \\ -\dfrac{4}{(2k+1)^2(2k-1)} & (m = 2k;\ k = 1,\ 2\ldots) \\ \dfrac{4}{(2k-1)^2(2k+1)} & (m = 2k-1; \quad k = 2,\ 3\ldots) \end{array}\right.$$

$$K_{mn} = \left|\begin{array}{c} 2\left\{\dfrac{1-(-1)^{n+m}}{(n^2-m^2)(n+m+2)} - \dfrac{1+(-1)^{n+m}}{[(n+1)^2-m^2](n-m+1)}\right\} \\ (n \neq m,\ n \neq m-1,\ n \neq m+1) \\ \dfrac{4}{2m+1}\ (n = m); \qquad \dfrac{8m}{4m^2-1} \quad (n = m-1) \\ -\dfrac{8}{(2m+3)(2m+1)} \quad (n = m+1) \end{array}\right| \begin{array}{l} n=1,\ 2,\ldots \\ m=0,\ 1,\ldots \end{array}$$

Принимая во внимание (3.5). бесконечную систему (3.9) перепишем в виде

$$\frac{1}{\pi}[P_2 - P_1 + f(x)]\left(1 + \frac{4\mu}{\pi}\right) + \frac{\mu}{2}[P_2 + P_1 + f(x) - 2f_0] + $$

$$+ \frac{\mu}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} K_{0n} a_n^* = 0 \tag{3.11}$$

$$a_m^* = -\frac{\mu}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} K_{mn} a_n^* + b_m \quad (m = 1,\ 2,\ldots) \tag{3.12}$$

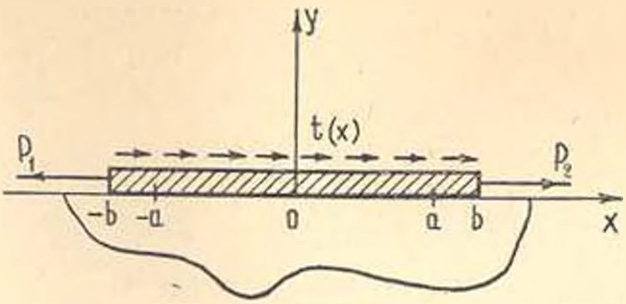
$$b_m = \mu f_m^* - \frac{\mu}{\pi^2}K_{m0}[P_2 - P_1 + f(x)]$$

Отметим, что уравнение (3.11) является условием ограниченности решения задачи на крае $x=a$ (типа условия (1.6)) и служит, после определения коэффициентов a^*_m из системы (3.12), для нахождения величины a при заданных b и законе нагружения накладки.

На основании результатов, приведенных в работе [9], можно утверждать, что справедлива следующая

Теорема 3.1. *Бесконечная алгебраическая система (3.12) квазивполне регулярна при всех* $\mu \in (0, \infty)$ *и вполне регулярна при* $\mu < \sqrt{6}/2$.

4. *Сведение к бесконечной алгебраической системе в случае ограниченного решения на двух краях.* Пусть длина накладки $l=2b$, а контакт между накладкой и границей полуплоскости осуществляется лишь на участке $-a \leqslant x \leqslant a$, $a<b$. По всей своей верхней грани накладка нагружена распределенной нагрузкой интенсивности $t(x)$, а в точках $x=\pm b$ сосредоточенными силами P_1 и P_2. При этом будем предполагать, что в точках $x=\pm a$ контактное касательное напряжение $\tau(x)$ ограничено.



Фиг. 3.

Задача по-прежнему приводится к интегро-дифференциальному уравнению (1.1) при граничных условиях (3.1). При этом $T(x)$ имеет вид (1.3), а

$$F(x) = \int_{-b}^{x} t(\xi)\, d\xi \tag{4.1}$$

В указанных в п. 1 безразмерных переменных интегро-дифференциальное уравнение будет иметь вид (1.4), а граничные условия—(3.2).

В соответствии с теоремой 1.3 решение задачи, ограниченное на краях $x=\pm 1$, будем искать в виде ряда

$$\varphi'(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n U_{n-1}(x) \tag{4.2}$$

Здесь $U_n(x)$ — полиномы Чебышева второго рода. Разложение (4.2) возможно в силу того, что в соответствии с (1.9) функция $\omega(ax) \in B\ (-1, 1)$, при этом ряд в (4.2) сходится равномерно.

Интегрируя (4.2) и удовлетворяя первому граничному условию (3.2), получим

$$\varphi(x) = P_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n(x), \qquad F_1(x) = \frac{1}{2}\left(\pi - \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) \tag{4.3}$$

$$F_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{2(n+1)} - \frac{\sin(n-1)\theta}{2(n-1)} \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

$$\theta = \arccos x$$

Удовлетворяя второму граничному условию (3.2), найдем

$$a_1 = \frac{2}{\pi}[P_2 - P_1 + f(\infty)] \tag{4.4}$$

Далее представим $f(x) \in B^{*}(-\infty, \infty)$ в форме равномерно сходящегося при $|x| \leqslant 1$ ряда по полиномам Чебышева первого рода

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n T_n(x) \tag{4.5}$$

Подставляя (4.2), (4.3) и (4.5) в уравнение (1.4) и принимая во внимание интеграл [12]

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}\, U_{n-1}(\xi)}{\xi - x}\, d\xi = -\pi T_n(x) \quad (|x| \leqslant 1;\ n = 1, 2, \ldots) \tag{4.6}$$

получим соотношение

$$-\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta = \mu\left[P_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n(\cos\theta) - \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos n\theta\right] \tag{4.7}$$

Умножая обе части равенства (4.7) на $\cos m\theta$ и интегрируя в пределах от 0 до π, придем к следующей бесконечной алгебраической системе:

$$e_m a_m = \frac{2\mu}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n K_{mn} + \mu f_m - \mu P_1 e_m \quad (m = 0, 1, \ldots) \tag{4.8}$$

$$e_m = 0 \text{ при } m = 0, \quad e_m = 1 \text{ при } m \geqslant 1, \ K_{01} = \pi^2/4$$

$$K_{0n} = -4n(n^2 - 1)^{-2} \text{ при } n \geqslant 2, \quad K_{mn} = 0 \text{ при } n = m-1, \ n = m+1$$

$$K_{mn} = \frac{2n[(-1)^{m+n} + 1]}{[(n+m)^2 - 1][(n-m)^2 - 1]}, \quad \text{при } n \neq m-1, \ n \neq m+1$$

Принимая во внимание (4.4), бесконечную систему (4.8) перепишем в виде

$$0 = \sum_{n=2}^{\infty} a_n K_{0n} + \frac{\pi}{2}[P_2 + P_1 + f(\infty) - 2f_0] \tag{4.9}$$

$$\frac{2}{\pi}[P_2 - P_1 + f(x)]\left(1 + \frac{4\mu}{3}\right) = \frac{2\mu}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} a_n K_{mn} + \mu f_1 \tag{4.10}$$

$$a_m = -\frac{2\mu}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} a_n K_{mn} + b_m \quad (m = 2,\ 3, \ldots) \tag{4.11}$$

$$b_m = \mu f_m + \frac{4\mu}{\pi^2} K_{m1}[P_2 - P_1 + f(x)]$$

Отметим, что соотношения (4.9) и (4.10) являются условиями ограниченности решения задачи на краях $x = \pm a$ (типа условий (1.8)) и служат, после определения a_n из (4.11), для нахождения величины a при заданном b, накладывая вместе с тем некоторое ограничение на характер нагружения накладки.

На основании результатов, приведенных в работе [9], можно утверждать, что справедлива

Теорема 4.1. *Бесконечная алгебраическая система (4.11) квазивполне регулярна при всех* $\mu \in (0, \infty)$ *и вполне регулярна при* $\mu < \sqrt{6}$.

5. *Числовые примеры.* В качестве конкретных примеров были рассмотрены следующие задачи при сцеплении накладки с полуплоскостью по всей ее длине (фиг. 1): а) $f(x) = 0$, $P_1 = 1$, $P_2 = 1$; б) $f(x) = 0$, $P_1 = -1$; $P_2 = 1$; в) $f(x) = 1$, $P_1 = P_2 = 0$; г) $f(x) = x$, $P_1 = P_2 = 0$.

По формулам (2.9) были подсчитаны коэффициенты при особенностях на краях накладки в диапазоне $0 \leq \mu \leq 10$. При решении системы (2.7) методом редукции в урезанной системе бралось 20 уравнений. В табл. 1 даны результаты вычислений $D_1(\mu)$; гарантируется точность в 1%. Здесь следует принять во внимание, что $D_1(\mu) = -D_2(\mu)$ для задач а) и г), и $D_1(\mu) = D_2(\mu)$ для задач б) и в).

Таблица 1

μ	а	б	в	г	μ	а	б	в	г
0.5	0.3867	0.8218	0.5949	0.08496	5.5	1.792	1.920	0.4189	0.1945
1.0	0.6472	0.9807	0.5622	0.1274	6.0	1.875	1.998	0.4101	0.1948
1.5	0.8479	1.121	0.5357	0.1402	6.5	1.955	2.072	0.4019	0.1948
2.0	1.014	1.248	0.5136	0.1668	7.0	2.032	2.144	0.3942	0.1946
2.5	1.158	1.363	0.4946	0.1766	7.5	2.105	2.213	0.3871	0.1942
3.0	1.286	1.471	0.4782	0.1832	8.0	2.176	2.280	0.3805	0.1937
3.5	1.403	1.571	0.4637	0.1876	8.5	2.244	2.345	0.3742	0.1930
4.0	1.510	1.665	0.4508	0.1906	9.0	2.310	2.408	0.3683	0.1923
4.5	1.610	1.754	0.4391	0.1925	9.5	2.374	2.469	0.3628	0.1915
5.0	1.703	1.839	0.4286	0.1938	10.0	2.436	2.528	0.3575	0.1907

Пользуясь принципом наложения решений, отмеченным в п. 2, рассмотрим следующие комбинированные случаи загружения накладки:

1) $P_1 = P_2 = P$, $t(x) = -\alpha x$; 2) $P_1 = P_2 = P$, $t(x) = -q$;
3) $P_1 = -P_2 = P$, $t(x) = q$; 4) $P_1 = -P_2 = P$, $t(x) = \alpha x$;
5) $P_1 = 0$, $P_2 = P$, $t(x) = -q$; 6) $P_1 = 0$, $P_2 = P$, $t(x) = -\alpha x$;
7) $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $t(x) = q - \alpha x$.

В первом и третьем из указанных случаев соответствующим подбором величин P, α, q при заданном значении μ можно добиться одновременной ограниченности решения на краях $x = \pm 1$. В остальных случаях можно таким образом добиться ограниченности решения на крае $x = 1$.

Таблица 2

μ	1) P/α	2) P/q	3) P/q	4) P/α	5) P/q	6) P/α	7) q/α
1	0.1968	0.8687	0.5733	0.1299	0.6907	0.1565	0.2266
2	0.1645	0.5065	0.4115	0.1337	0.4541	0.1475	0.3248
3	0.1425	0.3719	0.3251	0.1245	0.3469	0.1329	0.3831
4	0.1262	0.2985	0.2708	0.1145	0.2840	0.1201	0.4225
5	0.1138	0.2517	0.2331	0.1054	0.2420	0.1094	0.4522
6	0.1039	0.2187	0.2053	0.09750	0.2118	0.1006	0.4750
7	0.09577	0.1940	0.1839	0.09076	0.1888	0.09320	0.4937
8	0.08902	0.1749	0.1669	0.08496	0.1708	0.08694	0.5091
9	0.08325	0.1594	0.1529	0.07986	0.1561	0.08152	0.5221
10	0.07828	0.1468	0.1414	0.07544	0.1440	0.07683	0.5334

В табл. 2 даны при различных μ отношения P/α, P/q и q/α для всех семи указанных случаев нагружения накладки, при которых имеют место ограниченные решения.

Ростовский государственный университет
Институт механики АН Армянской ССР

Поступила 6 IX 1977

Վ. Մ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎ, Ե. Վ. ԿՈՎԱԼԵՆԿՈ, Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՎԵՐԱԴԻՐՆԵՐԻ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴՐԻ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է իր եզրագծի մի մասով վերադիրով (ստրինգերով) ուժեղացված կիսահարթության լարվածային վիճակի մասին խնդիրը։ Ցույց է տրված, որ գոյություն ունեն վերադիրի բեռնավորման այնպիսի դեպքեր, երբ նրա ծայրակետերում բացակայում է շոշափող կոնտակտային լարումների կոնցենտրացիան։

Մաթեմատիկորեն խիստ ապացուցված է, որ սահմանափակ լուծումների որոնումը ինքնաբերաբար բերում է համապատասխան ծայրակետերում զրո դարձող լուծումների։ Հետազոտությունը կատարված է օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդով։

Վերադիրի բեռնավորման մի շարք կոնկրետ դեպքերում տրված է թվային անալիզ։

RESEARCH IN FINITE SOLUTIONS FOR A PROBLEM ON INTERACTION BETWEEN A HALF-PLANE AND ELASTIC STRINGERS

V. M. ALEXANDROV, E. V. KOVALENKO, S. M. MKHITARIAN

S u m m a r y

A problem on stress state of a half-plane with its boundary partly stiffenned by an elastic stringer is considered. Some cases of stringer loading are found to occur where the concentration of contact tangential stresses on borders of the stringer is absent.

It is mathematically strictly substantiated that seeking for finite solutions automatically leads to solutions vanishing at proper terminal points. The research is conducted by the method of orthogonal polynomials.

A numerical analysis for some concrete cases of stringer loading is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калахлия А. И.* Об одном прямом методе решения уравнения теории крыла и его применение в теории упругости. Матем. сб., 1957, т. 42, вып. 2.
2. *Толкачев В. М.* Передача нагрузки от стрингера конечной длины к бесконечной и полубесконечной пластине. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 4.
3. *Александров В. М., Галаджев Р. С., Соловьев А. С.* К расчету погрешностей тензоизмерений. Измерит. техника, 1966, № 2.
4. *Арутюнян Н. Х.* Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
5. *Александров В. М., Соловьев А. С.* Некоторые смешанные плоские задачи теории упругости и их приложение к расчету погрешностей тензоизмерений. МТТ, 1970, № 1.
6. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
7. *Arutunyan N. K. and Mkhitaryan S. M.* Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners. Trends in elasticity and thermoelasticity; Witold Nowacki Anniversary Volume. Wolters-Noordhoff Publishing, 1971, p. 3—20.
8. *Александров В. М., Солодовник М. Д.* Эффективный метод решения задачи о взаимодействии накладки (стрингера) с упругой полуплоскостью и некоторые новые качественные результаты. Труды X Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, т. I. Изд. «Мецниереба», Тбилиси, 1975.

9. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, т. 25, № 2.
10. *Александров В. М.* О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления или трения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
11. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. И.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
12. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., ГИФМЛ, 1962.
13. *Попов Г. Я.* Некоторые новые соотношения для многочленов Якоби. Сиб. матем. ж., 1967, т. 8, № 6.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXI, № 1, 1978 Механика

Г. Г. ЕГИЯН, В. Б. КОЛМАНОВСКИЙ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

1. В работе рассматриваются три задачи оптимального управления стохастической системой вида

$$\ddot{x} = u + \sqrt{2\sigma}\dot{\xi} \tag{1.1}$$

где u — управление, $|u| \leqslant b$, $b = \text{const}$, ξ — скалярный стандартный винеровский процесс, σ — некоторое постоянное число, характеризующее интенсивность шума.

Система (1.1) описывает движение материальной точки под действием случайных сил. Уравнение Беллмана, соответствующее рассмотренным ниже задачам, содержит частные производные по двум фазовым координатам и времени. Численное решение уравнений с большим числом независимых переменных лимитируется возможностями современной вычислительной техники. Движение материальной точки будем рассматривать в фазовом пространстве $(x, \dot{x})$. Систему (1.1) запишем в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = u + \sqrt{2\sigma}\dot{\xi} \end{cases} \tag{1.2}$$

Первая из изучаемых задач состоит в следующем. Имеются две прямые $x=0$ и $x=q_1$. Требуется выбором управления u максимизировать вероятность достичь прямую $x=0$ раньше, чем $x=q_1$. Задача решается при помощи метода динамического программирования. Обозначим через α момент первого выхода системы (1.2) из области $0 \leqslant x \leqslant q_1$, а через $V(x, y)$ — функцию Беллмана сформулированной задачи. Тогда

$$V(x, y) = \sup_u P(x(\alpha) = 0)$$

Соответствующее уравнение Беллмана имеет вид

$$y\frac{\partial V}{\partial x} + \sup_u \frac{\partial V}{\partial y} u + \sigma \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0; \quad V(0, y) = 1, \tag{1.3}$$

$$y \leqslant 0; \; V(q_1, y) = 0, \; y > 0$$

Из постановки задачи и (1.2) видно, что оптимальным будет управление $u_0 = -b$. Подставив u_0 в (1.3), получим

$$y\frac{\partial V}{dx} - b\frac{\partial V}{\partial y} + \sigma\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0; \quad V(0, y) = 1, \; y \leqslant 0;$$

$$V(q_1, y) = 0, \; y > 0$$

Если в полученном уравнении сделать замены переменных $y=c_1y_1$ и $x=c_2x_1$, то, потребовав $c_1=\sigma/b$ и $c_2=\sigma^2/b^3$, получим уравнение, не содержащее b и σ. Запишем это уравнение с прежними обозначениями x, y, V

$$y\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0;\quad V(0,\,y)=1,\ y\leqslant 0; \tag{1.4}$$

$$V(q,\,y)=0,\ y>0,\ q=q_1c_2^{-1}$$

Непосредственное решение разностного аналога уравнения (1.4) сводится к обращению матрицы, что затруднительно при большом числе точек сетки. Вместо этого аппроксимируем решение задачи (1.4) решением $V(t,\,x,\,y)$ задачи

$$\frac{\partial V}{\partial t}+y\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0;\quad 0\leqslant t\leqslant T \tag{1.5}$$

$$V(t,\,0,\,y)=1,\ y\leqslant 0;\ V(t,\,q,\,y)=0,\ y>0$$

Здесь T — параметр. Отметим, что при $T\to\infty$ будет $V(t,\,x,\,y)\to$ $\to V(x,\,y)$. Действительно, решение задачи (1.5) есть максимальная вероятность достичь прямую $x=0$ раньше, чем $x=q$ за время T. Поэтому при $T\to\infty$ решение задачи (1.5) будет сходиться к решению задачи (1.4). Следовательно, решение задачи (1.4) можно построить с помощью итераций по T решений задачи (1.5).

Прежде чем перейти к разностной аппроксимации уравнения (1.5), построим ограниченную область на фазовой плоскости $(x,\,y)$, в которой будем искать решение исходной задачи и зададим соответствующие граничные условия.

Обрежем симметрично относительно начала координат ось y. Получим прямоугольную область, которая показана на фиг. 1. Согласно постановке задачи и закону (1.2) на границах полученной области должны быть выставлены следующие условия: на линии OAD (фиг. 1) функция $V(t,\,x,\,y)=1$, на линии BCF (фиг. 1) функция $V(t,\,x,\,y)=0$. Так как (это видно из (1.2)) граница области на отрезках OB и FD недостижима, то на указанных отрезках граничные условия не выставляются. Недостижимая граница на фиг. 1 заштрихована. В указанной прямоугольной области строится равномерная сетка.

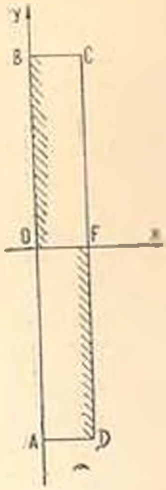
Обозначим через $V_{i,j}^k$ значение функции $V(t,\,x,\,y)$ в точке фазовой плоскости с координатами $x=il$, $y=jh$ и момент времени $t=k\tau$, где l, h и τ — соответственно шаги аппроксимации по координатам x, y и t, а i, j и k — соответствующие индексы, меняющиеся в пределах $0\leqslant i\leqslant S$, $-N\leqslant j\leqslant N$ и $0\leqslant k\leqslant K$. Граничные условия на отрезках BC и AD (фиг. 1) будем задавать в форме

$$V_{i,N}^k=0,\quad 1\leqslant i\leqslant S-1,\quad K>k\geqslant 0 \tag{1.6}$$

$$V_{i,-N}^k=1,\quad 1\leqslant i\leqslant S-1,\quad K>k\geqslant 0 \tag{1.7}$$

При разностной аппроксимации уравнения (1.5) будем использовать для случая $j \leqslant 0$ левую производную [2], аппроксимирующую $\partial V/\partial x$, и правую производную [2] в случае $j > 0$.

Это делается из-за недостижимости границы области. При этом вычисления для случая $j \leqslant 0$ идут слева направо с использованием граничных условий на отрезке OA, а в случае $j > 0$ — справа налево с использованием граничных условий на отрезке CF (фиг. 1).



Фиг. 1.

Поэтому, применив для аппроксимации уравнения (1.5) метод дробных шагов [1], получим

$$(V_{i,j}^{k} - V_{i,j}^{k-0.5})/\tau + (V_{i+1,j}^{k-0.5} - V_{i,j}^{k-0.5})\, hj/l = 0, \ j > 0 \quad (1.8)$$

$$(V_{i,j}^{k} - V_{i,j}^{k-0.5})/\tau + (V_{i,j}^{k-0.5} - V_{i-1,j}^{k-0.5})\, hj/l = 0, \ j \leqslant 0 \quad (1.9)$$

$$(V_{i,j}^{k-0.5} - V_{i,j}^{k-1})/\tau - (V_{i,j+1}^{k-1} - V_{i,j-1}^{k-1})/2h +$$

$$+ (V_{i,j+1}^{k-1} - 2V_{i,j}^{k-1} + V_{i,j-1}^{k-1})/h^2 = 0 \quad (1.10)$$

Отметим [1], что указанный выше метод абсолютно устойчив и дает погрешность порядка h^2 и τ соответственно по фазовым координатам и по времени.

Для того, чтобы система уравнений (1.8), (1.9), (1.10) была разрешима, необходимо помимо граничных условий (1.6), (1.7) и граничных условий

$$V_{0,j}^{k} = 1, \ -N < j < 0, \ K \geqslant k \geqslant 0 \quad (1.11)$$

$$V_{S,j}^{k} = 0, \ 1 < j < N, \ K \geqslant k \geqslant 0 \quad (1.12)$$

задать начальное значение $V_{i,j}^{K}$ в момент времени $t = T$ во всех внутренних точках заданной сетки. Подчеркнем, что вычисления производятся в обратном времени, начиная с момента $t = T$ и кончая моментом времени $t = 0$.

В момент времени $t = T$ следует задавать во всех внутренних точках сетки, исходя из постановки задачи, следующее начальное условие:

$$V_{i,j}^{K} = 0, \ 1 < i \leqslant S - 1, \ -N + 1 \leqslant j \leqslant N - 1 \quad (1.13)$$

Таким образом, имея граничные условия (1.6), (1.7), (1.11), (1.12) и начальное условие (1.13), можно разрешить систему уравнений (1.8), (1.9) и (1.10) и определить значения функции Беллмана на заданной нами сетке в любой момент времени $t = k\tau$.

Из уравнений (1.8), (1.9) вытекают следующие две рекуррентные формулы для определения значений функции Беллмана:

$$V_{i,j}^{k-0.5} = (V_{i-1,j}^{k-0.5}\tau jh - lV_{i,j}^{k})/(\tau jh - l), \ j \leqslant 0 \quad (1.14)$$

$$V_{i,j}^{k-0.5} = (V_{i+1,j}^{k-0.5}\tau jh + lV_{i,j}^{k})/(\tau jh + l), \ j > 0 \quad (1.15)$$

В вычислениях по формулам (1.14) и (1.15) используются соответственно граничные условия (1.11), (1.12) и на первом этапе вычислений начальное условие (1.13), а затем на последующих этапах берутся значения функции $V_{i,j}^{\tau}$, полученные в результате текущих вычислений. Подставив результаты вычислений по формулам (1.14) и (1.15) в (1.10) и используя граничные условия (1.6), (1.7), мы получим разностную трехточечную схему, которую решим методом прогонки [2] при помощи рекуррентных формул. Для полноты изложения приведем эти формулы.

Из (1.10) имеем следующее основное уравнение прогонки, которое получается приведением подобных членов в (1.10):

$$(2\tau + \tau h)\, V_{i,j-1}^{k-1} - (2h^2 + 4\tau)\, V_{i,j}^{k-1} + (2\tau - \tau h)\, V_{i,j+1}^{k-1} = -2h^2 V_{i,j}^{k-0.5} \quad (1.16)$$

$$i = \text{const}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} A &= 2\tau + \tau h, \quad C = 4\tau + 2h^2 \\ B &= 2\tau - \tau h, \quad F_j = 2h^2 V_{i,j}^{k-0.5} \end{aligned} \qquad (1.17)$$

Тогда уравнение (1.16) примет вид

$$A V_{i,j-1}^{k-1} - C V_{i,j}^{k-1} + B V_{i,j+1}^{k-1} = -F_j, \quad i = \text{const} \qquad (1.18)$$

Граничные условия для этой системы имеют вид (1.6), (1.7).

Метод прогонки состоит из следующего алгоритма:

$$V_{i,j}^{k-1} = k_{j+1} V_{i,j+1}^{k-1} + \beta_{j+1}; \quad j = N-1, \quad N-2, \dots, 1-N \qquad (1.19)$$

$$V_{i,N}^{k-1} = (\gamma_2 + r_2 \beta_N)/(1 - r_2 k_N) \qquad (1.20)$$

$$k_{j+1} = B/(C - k_j A); \quad \beta_{j+1} = (A\beta_j + F_j)/(C - k_j A) \qquad (1.21)$$

где $k_{-N+1} = 0$; $\beta_{-N+1} = 1$.

Сначала вычисляются значения k_j и β_j при помощи рекуррентных формул (1.21). Далее вычисляется по формуле (1.20) значение $V_{i,N}^{k-1}$. Затем по формуле (1.19) рекуррентно вычисляются значения функции Беллмана $V_{i,j}^{k-1}$. Эта процедура повторяется для всех $i = 1, 2, \dots, S-1$.

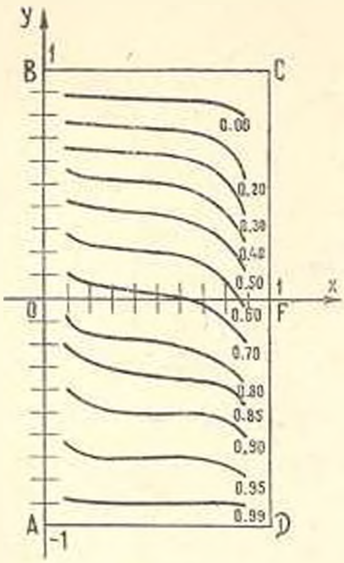
Устойчивость вычислений обеспечивается условиями [2]

$$A > 0, \; B > 0, \; C \geqslant A + B \qquad (1.22)$$

Значения функции Беллмана $V_{i,j}^{0}$, вычисленные в момент времени $t = 0$, запоминаются на каждой итерации по параметру T. Если разность между значениями функции Беллмана $V_{i,j}^{0}$ для нескольких заранее выделенных контрольных точек заданной сетки на предыдущей и последующих итерациях по T не превышает заданной нами точности вычислений, то процесс счета заканчивается, и машина выдаст значения искомой нами функции $V(x, y)$ в момент времени $t = 0$ во всех внутренних точках заданной нами сетки на последней итерации.

Задача считалась на машине БЭСМ-3М. Исходные параметры задачи: $q=1$, $OB=OA=1;\ 2$ (фиг. 1). Параметр T принимал следующие значения: 2, 4, 6, 8, 10. Параметры сетки следующие: $l=h=0.1$. Шаг по времени $\tau=0.01$. Точность вычислений $\Lambda=0.01$. Все константы задачи в безразмерных единицах. В качестве контрольных были взяты следующие четыре точки: $x_1=0.3$, $y_1=-0.4$, $x_2=0.3$, $y_2=0.4$, $x_3=0.6$, $y_3=-0.4$, $x_4=0.6$, $y_4=0.4$.

Результаты счета задачи для трех вариантов полосы $ABCD$ (фиг. 1) показаны в виде линий уровня функции Беллмана на фиг. 2, 3, 4. На фиг. 2 дана картина линий уровня функции $V(x,y)$ для полосы $ABCD$ с параметрами $q=1$, $OB=OA=1$, на фиг. 3 — для полосы $ABCD$ с параметрами $q=1$, $OB=OA=2$, на фиг. 4 — для полосы $ABCD$ с параметрами $q=1$, $OB=OA=3$. На указанных фигурах в правом конце каждой линии уровня указано соответствующее значение функции Беллмана.



Фиг. 2.

Процесс счета задачи для первого варианта полосы $ABCD$ (фиг. 2) сходился на второй итерации по T ($T=4$), для второго варианта полосы $ABCD$ (фиг. 3) — на третьей итерации по T ($T=6$), для третьего варианта полосы $ABCD$ (фиг. 4) — на четвертой итерации по T ($T=10$).

Как видно из фиг. 2, 3, 4, значения функции Беллмана в области $OADF$ близки к единице, а в области $OBCF$ значения функции Беллмана, в основном, не превосходят 0.5. Кроме того, видно, что функция $V(x,y)$ убывает как с увеличением x при $y=\text{const}$, так и с увеличением y при $x=\text{const}$. Из сравнения фиг. 2 и фиг. 3 замечаем, что с увеличением длины полосы $ABCD$ линии уровня становятся более крутыми. Сравнение фиг. 3, 4 показывает, что при $T=10$, $OB=3$ имеет место сходимость к решению задачи (1.3).

2. В этом параграфе рассматривается задача о максимизации вероятности успокоения системы (1.2). Формулировка задачи следующая. Пусть система (1.2) начинает движение при $t=0$ из внутренней точки области R, ограниченной квадратами $ABCD$ и $abcd$ (фиг. 5). Выбором управления требуется максимизировать вероятность достижения квадрата $abcd$ раньше, чем линии $ABCD$ за время T.

Выпишем начальные условия

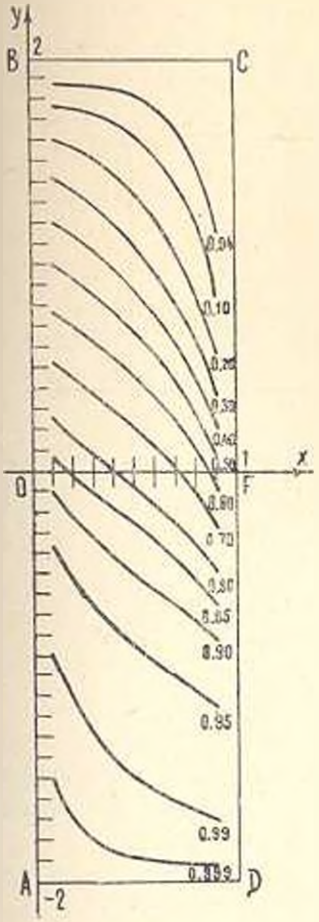
$$V(T, x, y)=0;\ x,\ y\in R \tag{2.1}$$

и соответствующее уравнение Беллмана в виде, не содержащем параметры b и σ, аналогично уравнению (1.5) ($t\to\sigma b^{-2}t$)

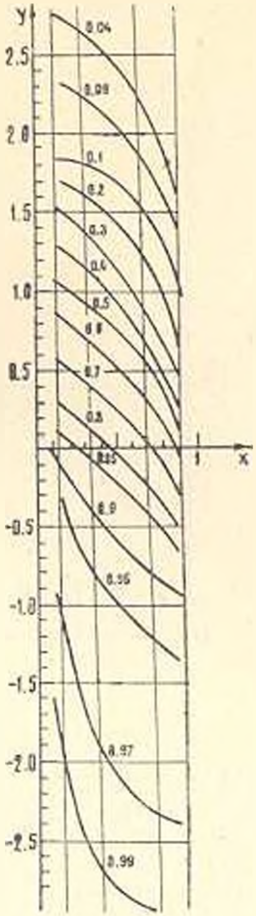
$$\frac{\partial V}{\partial t} + y\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{sign}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{2.2}$$

$$0 \leqslant t \leqslant T$$

где $\mathrm{sign}(L)$ означает знак выражения L.



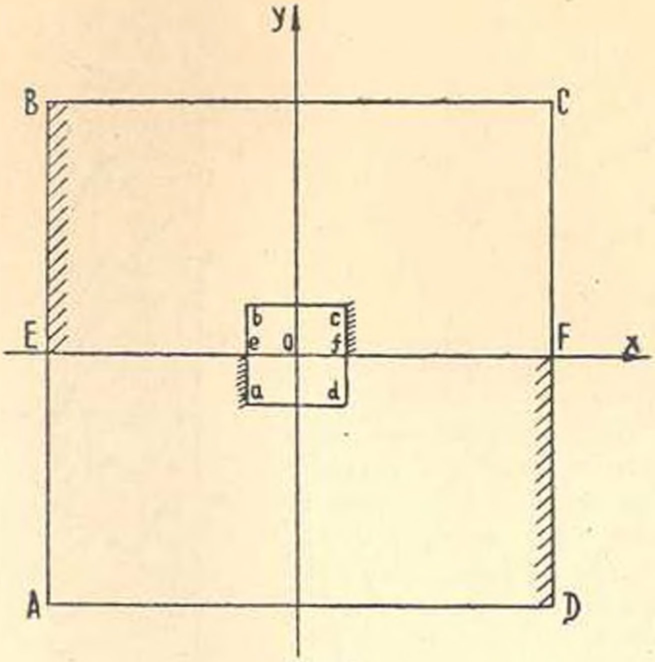
Фиг. 3.



Фиг. 4.

Уравнение (2.2) так же, как и уравнение (1.5) в § 1, решается с помощью разностной аппроксимации и метода дробных шагов. Для указанной на фиг. 5 области построим равномерную сетку. В этом разделе будем придерживаться тех же обозначений, что и в § 1. Дополнительно покажем границы изменения индексов i и j: $-S \leqslant i \leqslant S$ при $n \leqslant j \leqslant N$ или $-N \leqslant j \leqslant n$; $-S \leqslant i \leqslant -m$ при $-N \leqslant j \leqslant N$; $m \leqslant i \leqslant S$ при $-N \leqslant j \leqslant N$, где индекс S соответствует $x \in CD$, m соответствует $x \in cd$, N и n соответствуют $y \in BC$ и $y \in bc$ (фиг. 5). Индекс k пробегает значения $0 \leqslant k \leqslant K$, где $K = T/\tau$. Индексы i, j и k целочисленны.

Из уравнения (1.2) и постановки задачи видно, что внешняя и внутренняя граница области в четырех участках EB, FD, ae и fc (фиг. 5) недостижимы. Так как шаг по времени τ будем брать малым ($\tau=0.01$), то при разностной аппроксимации вместо $\operatorname{sign}(V_{i,j+1}^{k-1}-V_{i,j-1}^{k-1})/2h$ будем брать знак производной с предыдущего (половинчатого) слоя по времени, то есть $\operatorname{sign}(V_{i,j+1}^{k-0.5}-V_{i,j-1}^{k-0.5})/2h$.



Фиг. 5.

С учетом § 1 работы и сказанного выше, уравнение (2.2) после разностной аппроксимации и применения метода дробных шагов преобразуется в следующие три разностных уравнения:

$$(V_{i,j}^{k}-V_{i,j}^{k-0.5})/\tau+(V_{i+1,j}^{k-0.5}-V_{i,j}^{k-0.5})\,hj/l=0, \quad j\geqslant 0 \tag{2.3}$$

$$(V_{i,j}^{k}-V_{i,j}^{k-0.5})/\tau+(V_{i,j}^{k-0.5}-V_{i-1,j}^{k-0.5})\,hj/l=0, \quad j<0 \tag{2.4}$$

$$(V_{i,j}^{k-0.5}-V_{i,j}^{k-1})/\tau+(V_{i,j+1}^{k-1}-V_{i,j-1}^{k-1})\operatorname{sign}(V_{i,j+1}^{k-0.5}-V_{i,j-1}^{k-0.5})/2h+$$

$$+(V_{i,j+1}^{k-1}-2V_{i,j}^{k-1}+V_{i,j-1}^{k-1})/h^2=0 \tag{2.5}$$

Уравнения (2.3)—(2.5) должны решаться совместно на интервале $K\geqslant k\geqslant 0$. С учетом сказанного в § 1 и постановки задачи, граничные условия задаются следующим образом:

$$V_{s,j}^{k}=0, \quad 0\leqslant j<N; \quad V_{m,j}^{k}=1, \quad -n\leqslant j\leqslant -1$$

$$V_{-m,j}^{k}=1, \quad 0\leqslant j\leqslant n; \quad V_{-s,j}^{k}=0, \quad -N<j\leqslant -1 \tag{2.6}$$

$$K\geqslant k\geqslant 0$$

$$(V^k_{i,N}+V^k_{i,N-1})/2=0,\ -S+1\leqslant i\leqslant S-1;\ (V^k_{i,n}+V^k_{i,n+1})/2=$$
$$=1,\ -m\leqslant i\leqslant m;\ (V^k_{i,-n}+V^k_{i,-n+1})/2=1,\ -m\leqslant i\leqslant m \quad (2.7)$$
$$(V^k_{i,-N}+V^k_{i,-N+1})/2=0,\ -S+1\leqslant i\leqslant S-1$$
$$K\geqslant k\geqslant 0$$

Согласно постановке задачи начальные условия следовало бы задать в виде $V^K_{i,j}=0$ во всех внутренних точках построенной сетки. Но при этом, как видно из уравнений (2.3) и (2.4), на временном слое K—0.5 значения функции Беллмана при j—const получаются одинаковыми для каждого j, а это приводит к тому, что под знаком sign стоит нуль, то есть ЭВМ не может анализировать выражение $\mathrm{sign}\,(V^{K-0.5}_{i,j+1}-V^{K-0.5}_{i,j-1})$ и вместо знака минус или плюс выдает нуль.

Установим, однако, что малому изменению начальных условий (2.1) соответствует малое изменение решений уравнения (2.2) при неизменных граничных условиях. Обозначим через $V_\varepsilon(t,x,y)$ решение уравнения (2.2) с начальным условием $V_\varepsilon(T,x,y)=\varepsilon$ и прежними граничными условиями, а через $Q_\varepsilon(t,x,y)$ — функцию, определенную равенствами

$$Q_\varepsilon(t,x,y)=1 \qquad \text{при } t<T;\quad x,y\in ebc\cup adf$$
$$Q_\varepsilon(t,x,y)=0 \qquad \text{при } t<T;\quad x,y\in BCF\cup EAD$$
$$Q_\varepsilon(T,x,y)=\varepsilon; \qquad x,y\in R$$

Пусть далее $\alpha_\varepsilon(t,x,y)$ — момент первого выхода из области $R\times[t,T]$ системы (1.2), рассматриваемой на отрезке $[t,T]$, при управлении $u_\varepsilon=\mathrm{sign}\,(\partial V_\varepsilon/\partial y)$ и начальном условии $x(t)=x$, $y(t)=y$. Тогда имеем (M — знак математического ожидания)

$$V_\varepsilon(t,x,y)\geqslant MQ_\varepsilon(\alpha_0(t,x,y),x(\alpha_0),y(\alpha_0))+$$
$$+MQ_0(\alpha_0(t,x,y),x(\alpha_0),y(\alpha_0))-MQ_0(\alpha_0(t,x,y),x(\alpha_0),$$
$$y(\alpha_0))\geqslant V_0(t,x,y)-\varepsilon$$

Аналогично устанавливается противоположное неравенство

$$V_0(t,x,y)\geqslant MQ_0(\alpha_\varepsilon(t,x,y),x(\alpha_\varepsilon),y(\alpha_\varepsilon))+$$
$$+MQ_\varepsilon(\alpha_\varepsilon(t,x,y),x(\alpha_\varepsilon),y(\alpha_\varepsilon))-MQ_\varepsilon(\alpha_\varepsilon(t,x,y),$$
$$x(\alpha_\varepsilon),y(\alpha_\varepsilon))\geqslant V_\varepsilon(t,x,y)-\varepsilon$$

Таким образом, окончательно имеем

$$|V_0(t,x,y)-V_\varepsilon(t,x,y)|\leqslant\varepsilon$$

то есть решение V_ε уравнения (2.2) отличается от решения V_0 не более, чем на ε. Зададим поэтому для численного решения уравнения (2.2) начальное условие в виде

$$V^K_{i,j}=0.01 \qquad (2.8)$$

во всех внутренних точках построенной сетки.

Для решения уравнений (2.3), (2.4) разобьем область R на четыре прямоугольника, продолжив прямые bc и ad до пересечения с прямыми AB и CD (фиг. 5). В каждом из этих прямоугольников уравнения (2.3) и (2.4) решаются при помощи рекуррентных формул (1.14), (1.15) с граничными условиями (2.6) и начальными условиями (2.8). Уравнение (2.5) приводится к виду

$$A_j V_{i,j-1}^{k-1} - C V_{i,j}^{k-1} + B_j V_{i,j+1}^{k-1} = -F_j, \quad i = \text{const} \tag{2.9}$$

$$A_j = 2\tau - u_{i,j}\tau h, \quad C = 2h^2 + 4\tau, \quad B_j = 2\tau + u_{i,j}\tau h \tag{2.10}$$

$$u_{i,j} = \operatorname{sign}(V_{i,j+1}^{k-0.5} - V_{i,j-1}^{k-0.5})$$

Разобьем область R на четыре прямоугольника, продолжив прямые ab и cd до пересечения с BC и AD (фиг. 5). В каждом из прямоугольников уравнение (2.9) решается методом прогонки с использованием граничных условий (2.7) и результатов решения уравнений (2.3), (2.4). Прогоночные формулы такие же, как и в первом параграфе, только вместо A и B используются соответственно A_j и B_j. Устойчивость метода прогонки обеспечивается условиями (1.22), где вместо A и B используются соответственно A_j и B_j.

Задача решена на машине БЭСМ-3М. Помимо значений функции Беллмана дается и синтез оптимального управления — машина выдает значения оптимального управления, равного

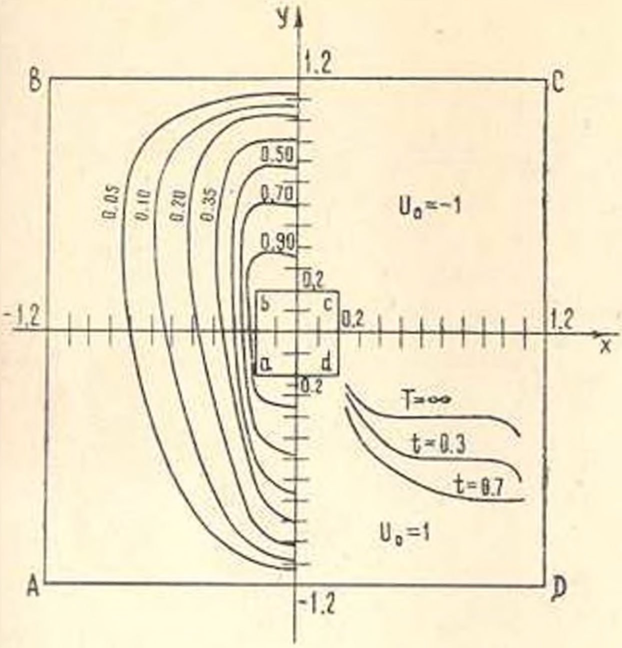
$$\operatorname{sign}(V_{i,j+1}^{k-0.5} - V_{i,j-1}^{k-0.5}), \quad K-1 \geqslant k \geqslant 0 \tag{2.11}$$

во всех внутренних точках построенной сетки. Ниже приводятся параметры задачи в безразмерных единицах $T=1$, $\tau=0.01$, $h=l=0.1$, $S=N=12$, $m=n=2$.

Решения выдаются для следующих десяти моментов времени $t=0$, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, ..., 0.9.

Результаты счета показывают, что с уменьшением t в фиксированных точках области R наблюдается монотонное возрастание функции $V(t, x, y)$, то есть существует стационарное решение рассматриваемой задачи при $T\to\infty$. Это стационарное решение $V(x, y)$ было найдено так же, как и в § 1, итерацией решения уравнения (2.2) по параметру T. Параметр T при этом принимал значения 2, 4, 6, 8, 10. Решения в трех фиксированных точках R сравнивались на предыдущей и последующей итерациях с точностью $\Delta=0.01$. Процесс сошелся уже на второй итерации ($T=4$).

Поскольку уравнение (2.2) обладает центральной симметрией, то линии уровня функции Беллмана и линии переключения оптимального управления симметричны относительно начала координат фазовой плоскости (x, y). Поэтому на фиг. 6 совместно показаны соответственно для двух половин области R линии уровня функции Беллмана для стационарного случая, то есть при $T=\infty$, и линии переключения оптимального управления для моментов времени $t=0.7$ и $t=0.3$ при $T=1$ и для стационарного случая ($T=\infty$). Выше соответствующей линии переключения и над отрезком bc оптимальное управление равно -1. Ниже соответствующей линии переключения и под отрезком ad оптимальное управление равно $+1$ (фиг. 6). Отметим, что линия переключения в каждый момент времени единственна.

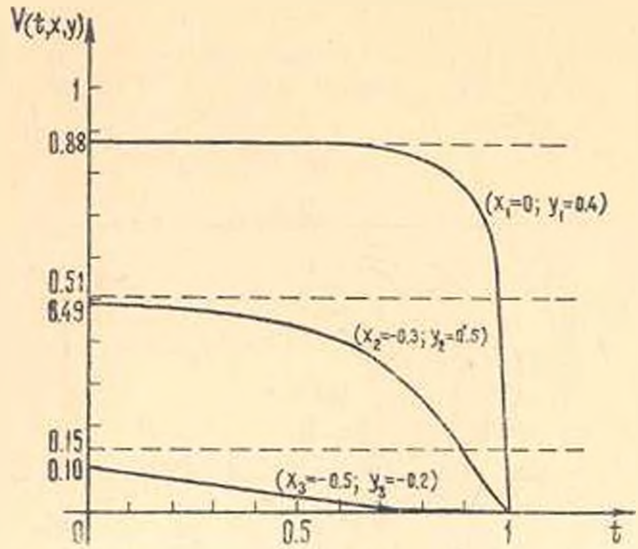


Фиг. 6.

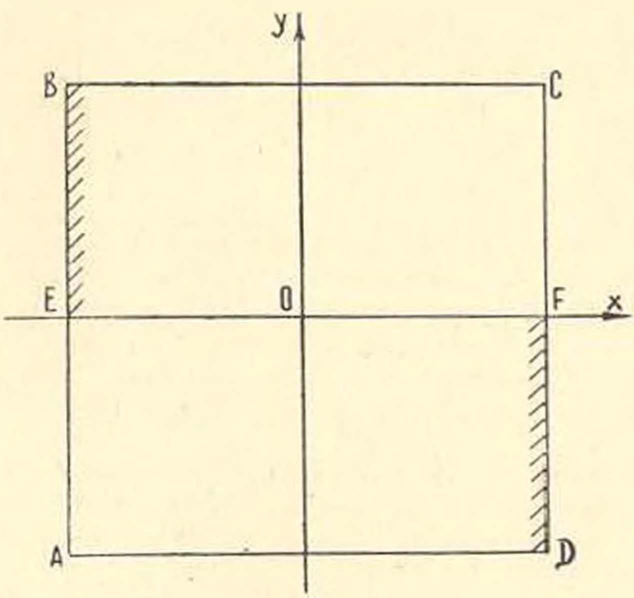
На фиг. 7 приведена зависимость функции $V(t, x, y)$ от времени для трех фиксированных точек с координатами: $x_1=0$, $y_1=0.4$, $x_2=-0.3$, $y_2=0.5$ и $x_3=-0.5$, $y_3=0.2$ на интервале $0\leqslant t\leqslant 1$. Пунктирными прямыми, параллельными оси t, которые являются асимптотами для кривых, соответствующих определенной фиксированной точке, показаны значения функции Беллмана в данной точке для стационарного случая ($T=\infty$).

3. В этом разделе рассмотрим задачу максимизации вероятности удержания материальной точки, двигающейся по закону (1.2), в некоторой квадратной области фазовой плоскости (x, y) за промежуток времени $0\leqslant t\leqslant T$.

Все обозначения и константы, фигурирующие в разделе 2, сохраним и для этого параграфа. В упомянутой выше области (фиг. 8) строим равномерную сетку с параметрами h и l ($h=l$). Так же, как и в предыдущих параграфах, недостижимые участки границы области (EB и FD) на фиг. 8 заштрихованы. Уравнение Беллмана для сформулированной выше задачи будет в точности совпадать с уравнением (2.2) параграфа 2. После разностной аппроксимации уравнения Беллмана данной задачи и применения метода дробных шагов получим такие же, как и в разделе 2, три уравнения (2.3), (2.4), (2.5).



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Граничные условия, согласно постановке задачи, имеют вид

$$V^{k}_{-s,j}=0,\ -N<j\leqslant -1;\ \ V^{k}_{s,j}=0,\ 0\leqslant j\leqslant N \tag{3.1}$$

$$K\geqslant k\geqslant 0$$

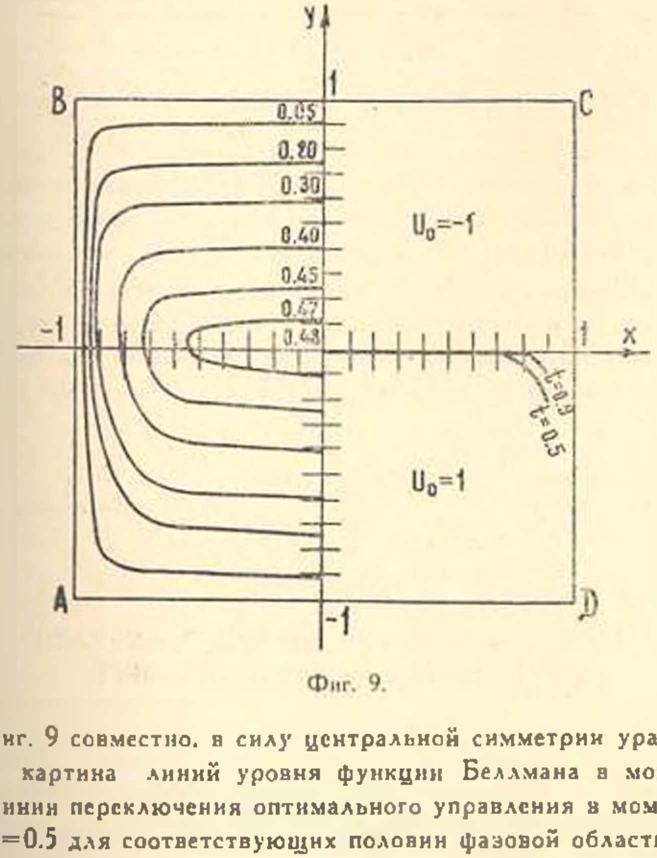
$$(V^k_{i,N} + V^k_{i,N-1})/2 = 0, \quad -S+1 \leqslant i \leqslant S-1$$
$$(V^k_{i,-N} + V^k_{i,-N+1})/2 = 0, \quad -S+1 \leqslant i \leqslant S-1 \qquad (3.2)$$
$$K > k > 0$$

Начальное условие имеет вид

$$V^K_{i,j} = 1, \quad -S+1 \leqslant i \leqslant S-1, \quad -N+1 \leqslant j \leqslant N-1 \qquad (3.3)$$

Уравнения (2.3) и (2.4) решаются рекуррентно с помощью формул (1.14), 1.15), граничных условий (3.1) и начального условия (3.3). Уравнение 2.5 так же, как и в разделе 2, приводится к виду (2.9) и решается с помощью соответствующих прогоночных формул, граничных условий (3.2) и результатов решения уравнений (2.3), (2.4), полученных выше.

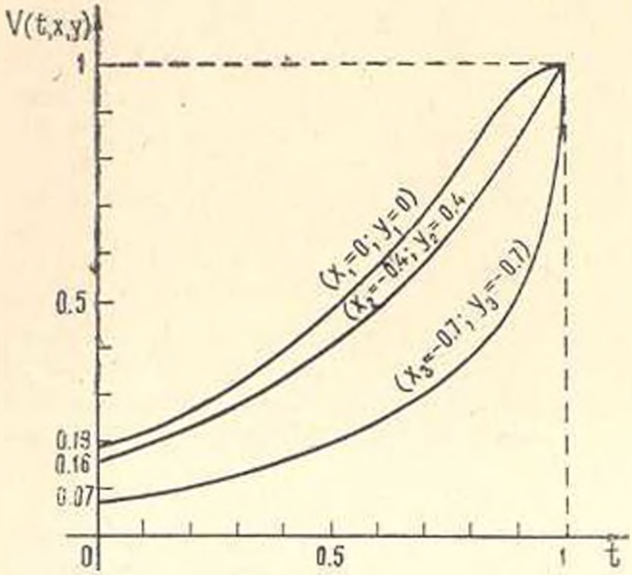
Условия устойчивости метода прогонки сохраняются такими же, как и в разделе 2. Задача считалась на машине БЭСМ-3М для следующих параметров: $T=1$, $h=l=0.1$, $\tau=0.01$, $S=N=10$. Все параметры даны в безразмерных единицах. Кроме значений функции Беллмана, то есть максимальной вероятности удержания в области за время $0 \leqslant t \leqslant T$, машина выдает по формуле (2.11) синтез оптимального управления во всех внутренних точках построенной сетки для следующих десяти моментов времени $t=0, 0.1, 0.2, \ldots, 0.9$.



Фиг. 9.

На фиг. 9 совместно, в силу центральной симметрии уравнения (2.2), показаны картина линий уровня функции Беллмана в момент времени $t=0.5$ и линии переключения оптимального управления в моменты времени $t=0.9$ и $t=0.5$ для соответствующих половин фазовой области (x, y).

Значения оптимального управления в точках, лежащих над соответствующей линией переключения, равны — 1, а в точках, лежащих под соответствующей линией переключения, оптимальное управление равно +1 (фиг. 9). Следует подчеркнуть, что линия переключения оптимального управления в каждый момент времени единственна. Функция Беллмана



Фиг. 10.

принимает максимальные значения в точках, лежащих на оси $y=0$. Глобальный максимум функции $V(t, x, y)$ в момент времени $t=0.5$, равный 0.48, достигается в начале координат. При возрастании $|y|$ и фиксированном x функция Беллмана монотонно убывает (фиг. 9). Аналогичный факт имеет место и для других моментов времени. Функция $V(t, x, y)$ в фиксированных точках со временем убывает, что можно проследить на фиг. 10, где показана зависимость функции Беллмана от времени для трех фиксированных точек с координатами: $x_1=0$, $y_1=0$, $x_2=-0.4$, $y_2=0.4$, $x_3=-0.7$, $y_3=-0.7$.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила 13 VI 1977

Գ. Գ. ԵՂՅԱՆ, Վ. Բ. ԿՈԼՄԱՆՈՎՍԿԻ

ՍՏՈԽԱՍՏԻԿ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՂԵԿԱՎԱՐՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԹՎԱՅԻՆ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում է պատահական ուժերի ազդեցության տակ նյութական կետի շարժումը նկարագրող ղեկավարվող համակարգ։ Դրվում են հիշված հա-

մակարդով օպտիմալ ղեկավարման երեք խնդիրներ։ Որպես օպտիմալության չափանիշներ ծառայում են համապատասխան հնարավոր ֆունկցիոնալներ։ Դիտարկվող խնդիրներից յուրաքանչյուրը բերվում է Բելմանի համապատասխան հավասարման տարբերական անալոգի ԷՀՄ-ի վրա թվային լուծման։ Հաշվումների համար հիմնական ալգորիթմ է ծառայում կոտորակային քայլերի մեթոդը։

NUMERICAL SOLUTION TO SOME PROBLEMS ON OPTIMAL STOCHASTIC SYSTEM CONTROL

G. G. EGHIAN, V. B. KOLMANOVSKY

S u m m a r y

Three problems on optimal stochastic system control, describing the motion of a particle under stochastic forces, are examined. The dynamic programming method is applied to solve the problems whose solutions are numerically computerised. The values for Bellman's function and optimal control synthesis are derived..

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А. А.* Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 5.
2. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXI, № 1, 1978 Механика

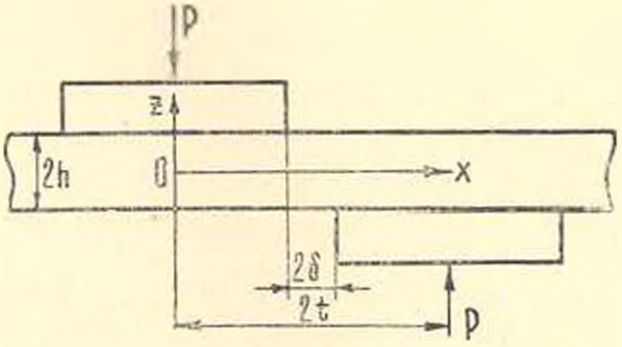
В. В. ДРОБЯЗКО, В. Н. НИКИТЕНКО, А. Ф. УЛИТКО

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА С ТРЕНИЕМ НА УПРУГОЙ ПОЛОСЕ

Для обеспечения надежной работы твердосплавного инструмента, широко используемого в разделительных операциях листовой штамповки (в частности, в таких операциях как резка, вырубка и пробивка), необходимо тщательное изучение как силонагруженности инструмента, так и процесса деформирования обрабатываемого металла в локальных зонах разделения. Напряженность твердосплавного инструмента, который с высокой степенью точности можно считать идеально упругим телом высокой жесткости (штампом) ($E \sim 6.0 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}), естественно, зависит от характера контактного взаимодействия и деформации обрабатываемого материала в зоне разделения. К настоящему времени отсутствует строгая теория этого сложного процесса [1, 2, 3, 4, 5].

Ниже представлено решение чисто упругой контактной задачи на полосе, моделирующей наиболее характерные особенности указанных процессов на упругой стадии деформирования. Заметим, что для тонколистовых материалов (~ 1 *мм*) качественные и количественные данные для напряжений контактного взаимодействия, полученные на основе упругого решения, верны вплоть до критических значений нагрузок разделительных операций.

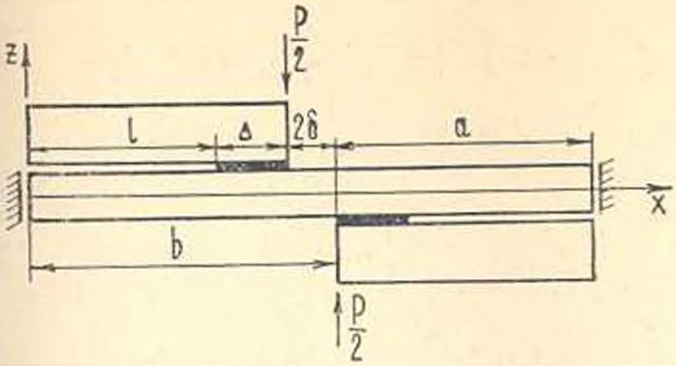
Рассмотрим упругую полосу толщины $2h$, на верхней и нижней гранях которой расположены периодические системы штампов. Геометрические размеры штампов и их взаимное расположение указаны на фиг. 1. Все



Фиг. 1.

штампы нагружены центрально одинаковыми прижимающими силами P. Учет сил трения, вонзикающих в зонах контакта штампов с полосой, ниже осуществляется по гипотезе Кулона с коэффициентом трения f.

Периодический характер расположения штампов позволяет рассматривать участок полосы длиной $2l=a+b$ с условиями симметрии по торцам полосы (фиг. 2). Руководствуясь физическими соображениями, с самого начала полагаем, что контакт штампов с полосой в процессе нагружения имеет место не по всей подошве штампов, а лишь у их краев на участках длины Δ. По классификации контактных задач, используемой в работах [6, 7, 8], рассматриваемая задача относится к классу задач с уменьшающейся площадкой контакта. Более того, как будет показано в работе, для весьма тонких полос исходная площадка контакта ненагруженных штампов, совпадающая с их длиной, в процессе нагружения скачком изменяется до участков постоянной длины Δ у краев штампов. Заметим, что контактные задачи с уменьшающейся областью контакта обсуждались, кроме указанных работ, также в статьях [9, 10, 11, 12 и др.].



Фиг. 2.

Общее решение задачи, схематически представленной на фиг. 2, строится известными методами [13, 14] в виде рядов Фурье по декартовой координате x. Для компонентов вектора перемещений имеем

$$2Gu_x = -\sum_{n=1}^{\infty}\Big[A_n \operatorname{sh}\lambda_n z + B_n \operatorname{ch}\lambda_n z +$$

$$+ C_n\left(\frac{3m-4}{m}\operatorname{sh}\lambda_n z + \lambda_n z \operatorname{ch}\lambda_n z\right) +$$

$$+ D_n\left(\frac{3m-4}{m}\operatorname{ch}\lambda_n z + \lambda_n z \operatorname{sh}\lambda_n z\right)\Big]\sin\lambda_n x$$

$$2Gu_z = zD_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \operatorname{ch}\lambda_n z + B_n \operatorname{sh}\lambda_n z +$$

$$+ C_n\lambda_n z \operatorname{sh}\lambda_n z + D_n\lambda_n z \operatorname{ch}\lambda_n z)\cos\lambda_n x \qquad (1.1)$$

где $\lambda_n = \frac{n\pi}{2l}$, G — модуль сдвига, m — число Пуассона.

В виде аналогичных рядов Фурье представляются и выражения для напряжений

$$
\begin{aligned}
\sigma_x = \frac{1}{m-2} D_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Big| A_n \operatorname{sh} \lambda_n z + B_n \operatorname{ch} \lambda_n z + \\
+ C_n \left(\frac{3m-2}{m} \operatorname{sh} \lambda_n z + \lambda_n z \operatorname{ch} \lambda_n z \right) + \\
+ D_n \left(\frac{3m-2}{m} \operatorname{ch} \lambda_n z + \lambda_n z \operatorname{sh} \lambda_n z \right) \Big| \cos \lambda_n x
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_z = \frac{m-1}{m-2} D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Big| A_n \operatorname{sh} \lambda_n z + B_n \operatorname{ch} \lambda_n z + \\
+ C_n \left(\frac{m-2}{m} \operatorname{sh} \lambda_n z + \lambda_n z \operatorname{ch} \lambda_n z \right) + \\
+ D_n \left(\frac{m-2}{m} \operatorname{ch} \lambda_n z + \lambda_n z \operatorname{sh} \lambda_n z \right) \Big| \cos \lambda_n x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_{xz} = - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Big| A_n \operatorname{ch} \lambda_n z + B_n \operatorname{sh} \lambda_n z + \\
+ C_n \left(2\, \frac{m-1}{m} \operatorname{ch} \lambda_n z + \lambda_n z \operatorname{sh} \lambda_n z \right) + \\
+ D_n \left(2\, \frac{m-1}{m} \operatorname{sh} \lambda_n z + \lambda_n z \operatorname{ch} \lambda_n z \right) \Big| \sin \lambda_n x
\end{aligned}
$$

Записанные выражения автоматически удовлетворяют условиям симметрии ($u_x = 0$, $\tau_{xz} = 0$) при $x = 0$ и $x = 2t$.

Введем в рассмотрение неизвестные нормальные и касательные напряжения в зонах контакта штампов.

$$
\begin{aligned}
\sigma_z \big|_{z=h} = \sigma^+ (x), \quad \tau_{xz} \big|_{z=h} = -f_0 \sigma^+ (x), \quad (l \leqslant x < a) \\
\sigma_z \big|_{z=-h} = \sigma^- (x), \quad \tau_{xz} \big|_{z=-h} = -f_0 \sigma^- (x), \quad (b < x \leqslant 2t - l)
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

Представим эти напряжения в виде рядов Фурье в соответствии с разложениями (1.2)

$$
\begin{aligned}
\sigma^+ (x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x, \quad -f_0 \sigma^+ (x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \lambda_n x \\
\sigma^- (x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \lambda_n x, \quad -f_0 \sigma^- (x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin \lambda_n x
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

При этом коэффициенты рядов a_n и b_n находятся по формулам

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_b^a \sigma^+(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_b^a \sigma^+(x)\cos\lambda_n x\,dx$$

$$b_n = -\frac{f_0}{l}\int_b^a \sigma^+(x)\sin\lambda_n x\,dx \tag{1.5}$$

а коэффициенты c_n и d_n выражаются через a_n и b_n зависимостями

$$c_0 = a_0, \quad c_n = (-1)^n a_n, \qquad d_n = -(-1)^n b_n \tag{1.6}$$

Постоянные интегрирования, входящие в решение (1.2), легко могут быть выражены через неизвестные коэффициенты разложений (1.4), удовлетворяя граничные условия для нормальных и касательных напряжений на поверхностях полосы $z=\pm h$. При этом оказывается, что постоянные $A_{2k} = C_{2k} = B_{2k-1} = D_{2k-1} = 0$. После подстановки найденных значений для постоянных интегрирования в (1.1) и использования интегральных равенств (1.5) находим выражение для нормальных перемещений точек верхней грани полосы $(z=h)$

$$2Gu_*^+ = \frac{1}{l}\int_b^a \sigma^+(\xi)\left\{\frac{m-2}{2(m-1)}h + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{2k-1}\Delta_{2k-1}}\left[2\frac{m-1}{m}\times\right.\right.$$

$$\times \operatorname{ch}^2(\lambda_{2k-1}h)\cos(\lambda_{2k-1}\xi) - f_0\left(\frac{m-2}{m}\operatorname{sh}(\lambda_{2k-1}h)\operatorname{ch}(\lambda_{2k-1}h) +\right.$$

$$\left.\left. + (\lambda_{2k-1}h)\right)\sin(\lambda_{2k-1}\xi)\right]\cos(\lambda_{2k-1}x) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{2k}\Delta_{2k}}\left[2\frac{m-1}{m}\operatorname{sh}^2(\lambda_{2k}h)\cos(\lambda_{2k}\xi) -\right.$$

$$\left.\left. - f_0\left(\frac{m-2}{m}\operatorname{sh}(\lambda_{2k}h)\operatorname{ch}(\lambda_{2k}h) - (\lambda_{2k}h)\right)\sin(\lambda_{2k}\xi)\right]\cos(\lambda_{2k}x)\right\} d\xi \tag{1.7}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_{2k-1} &= \operatorname{sh}(\lambda_{2k-1}h)\operatorname{ch}(\lambda_{2k-1}h) - \lambda_{2k-1}h\\ \Delta_{2k} &= \operatorname{sh}(\lambda_{2k}h)\operatorname{ch}(\lambda_{2k}h) + \lambda_{2k}h\end{aligned} \tag{1.8}$$

При вертикальном смещении штампов условие на участке контакта $b\le x\le a$ можно взять в виде [7]

$$\frac{du_*^+}{dx} = 0 \tag{1.9}$$

[1] Известия АН Армянской ССР, Механика, № 1

Это условие приводит к однородному интегральному уравнению Фредгольма первого рода относительно неизвестного контактного давления $\sigma^+(x)$. Выполнив асимптотическое преобразование рядов в ядре интегрального уравнения и использовав значения сумм [15]

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} \tag{1.10}$$

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots = -\frac{1}{2} + \pi\delta(x), \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$$

($\delta(x)$ — дельта-функция Дирака),

находим

$$2lf_0\frac{m-2}{2(m-1)}\sigma^+(x) + \sin\frac{\pi x}{2l}\int_{-l}^{l}\frac{\sigma^+(\xi)}{\cos\frac{\pi x}{2l} - \cos\frac{\pi\xi}{2l}}\,d\xi =$$

$$= -\int_{-l}^{l}\sigma^+(\xi)K(x,\xi)\,d\xi \tag{1.11}$$

причем

$$K(x,\xi) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-2\lambda_{2k-1}h}}{\bar\Delta_{2k-1}}\left[\left(1 + 2\lambda_{2k-1}h + e^{-2\lambda_{2k-1}h}\right)\cos(\lambda_{2k-1}\xi) -\right.$$

$$\left.- f_0 2\lambda_{2k-1}h\sin(\lambda_{2k-1}\xi)\right]\sin(\lambda_{2k-1}x) + \tag{1.12}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-2\lambda_{2k}h}}{\bar\Delta_{2k}}\left[\left(1 + 2\lambda_{2k}h - e^{-2\lambda_{2k}h}\right)\cos(\lambda_{2k}\xi) -\right.$$

$$\left.- f_0 2\lambda_{2k}h\sin(\lambda_{2k}\xi)\right]\sin\lambda_{2k}x$$

где

$$\bar\Delta_{2k-1} = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-4\lambda_{2k-1}h}\right) - \lambda_{2k-1}he^{-2\lambda_{2k-1}h}$$

$$\bar\Delta_{2k} = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-4\lambda_{2k}h}\right) + \lambda_{2k}he^{-2\lambda_{2k}h} \tag{1.13}$$

Уравнению (1.11) можно придать стандартный вид сингулярных интегральных уравнений второго рода, если ввести замены

$$x = \frac{2l}{\pi}\arccos\vartheta, \quad \xi = \frac{2l}{\pi}\arccos\varphi, \quad \frac{\sigma^+(\vartheta)}{\sqrt{1-\vartheta^2}} = \Psi(\vartheta) \tag{1.14}$$

В результате можем записать

$$f_0 \frac{m-2}{2(m-1)} \Psi(\vartheta) - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{\Psi(\varphi)}{\varphi - \vartheta} d\varphi = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \Psi(\varphi) K^*(\vartheta, \varphi) d\varphi \quad (1.15)$$

Здесь $\vartheta_0 = \cos\frac{\pi a}{2t}$, $\vartheta_1 = \cos\frac{\pi l}{2t}$ $(0 < \vartheta_0 < \vartheta_1 < 1)$, а ядро $K^*(\vartheta, \varphi)$ вычисляется с использованием (1.12) по формуле

$$K^*(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{1-\vartheta^2}} K\left(\frac{2t}{\pi}\arccos\vartheta, \quad \frac{2t}{\pi}\arccos\varphi\right) \quad (1.16)$$

Предполагая, что неизвестная длина области контакта $\Lambda = a - l$ порядка толщины слоя и что сам слой имеет малую относительную толщину $\left(\frac{h}{t} < \frac{1}{10}\right)$, численным анализом был установлен практически линейный характер зависимости ядра $K^*(\vartheta,\varphi)$ от координаты φ и независимость его от ϑ, то есть

$$K^*(\vartheta, \varphi) \approx \beta(\vartheta_1) + \gamma(\vartheta_1)\varphi \quad (1.17)$$

Аппроксимация (1.17) позволяет записать точное решение уравнения (1.15). Учитывая равенство

$$\int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \Psi(\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2t} \int\limits_{l}^{a} \sigma(x) dx = -\frac{\pi}{2t}\frac{P}{2}, \quad (P > 0) \quad (1.18)$$

и временно полагая

$$\int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \Psi(\varphi) \varphi d\varphi = M \quad (1.19)$$

можем записать (1.15) в виде

$$f_0 \frac{m-2}{2(m-1)} \Psi(\vartheta) - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{\Psi(\varphi)}{\varphi - \vartheta} d\varphi = C(\vartheta_1) \quad (1.20)$$

где

$$C(\vartheta_1) = \frac{1}{2t}\frac{P}{2}\beta(\vartheta_1) - \frac{\gamma(\vartheta_1)}{\pi} M$$

Решение уравнения (1.20) в классе функций, имеющих интегрируемые особенности в концах интервала $[\vartheta_0, \vartheta_1]$, приведено в [16]. Используя его, запишем

$$\Psi(\vartheta) = C(\vartheta_1)\cos\pi\alpha\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta}{\vartheta - \vartheta_0}\right)^{\frac{1}{2}+\alpha} + \frac{D}{(\vartheta - \vartheta_0)^{\frac{1}{2}+\alpha}(\vartheta_1 - \vartheta)^{\frac{1}{2}-\alpha}},$$

$$\alpha = -\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(f_0 \frac{m-2}{2(m-1)}\right) \quad (1.21)$$

Постоянная D находится через $C(\vartheta_1)$ после подстановки $\Psi(\vartheta)$ в (1.18), а неизвестная M исключается по равенству (1.19). После этого уравнение для определения площадки контакта (то есть значения ϑ_1) получается из условия обращения в ноль контактных давлений при $\vartheta=\vartheta_1$ ($\sigma^+(l) = \Psi(\vartheta_1) = 0$) и записывается в виде равенства

$$(\vartheta_1 - \vartheta_0)\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)\Big[\beta(\vartheta_1) +$$

$$+\left(\vartheta_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)(\vartheta_1 - \vartheta_0)\right)\gamma(\vartheta_1)\Big] + 1 = 0 \qquad (1.22)$$

При этом вычисление функций $\beta(\vartheta_1)$ и $\gamma(\vartheta_1)$ для поиска значения ϑ_1, удовлетворяющего уравнению (1.22), производится по формулам (1.12), (1.16) и используется аппроксимация (1.17).

Формула для вычисления функции контактного давления $\Psi(\vartheta)$ имеет вид

$$\Psi(\vartheta) = -\frac{P}{2}\frac{1}{2t}\frac{\cos\pi\alpha}{\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)(\vartheta_1 - \vartheta_0)}\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta}{\vartheta - \vartheta_0}\right)^{\frac{1}{2}+\alpha} \qquad (1.23)$$

Возвращаясь к исходной координате x, находим

$$\sigma^+(x) = -\frac{1}{2\pi}\frac{P}{\Delta}\frac{\cos\pi\alpha}{\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)}\left(\frac{x - l}{a - x}\right)^{\frac{1}{2}+\alpha} \qquad (1.24)$$

$$(\Delta = a - l)$$

Если трение отсутствует ($f_0=0$, $\alpha=0$), то

$$\sigma^+(x) = -\frac{1}{\pi}\frac{P}{\Delta}\left(\frac{x - l}{a - x}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1.25)$$

Полученное решение позволяет заключить, что величина площадок контакта при нагружении системой периодических штампов упругой полосы не зависит от величины прижимающих штампы сил P и модуля сдвига материала полосы (в (1.12), а, следовательно, и в (1.22) не входят P и G). Для гладкого контакта они не зависят и от коэффициента Пуассона материала полосы, а определяются лишь ее толщиной и расположениями штампов.

С использованием полученного решения были выполнены расчеты площадок контакта для полосы с отношением $\frac{h}{t} = \frac{1}{15}$ и числом Пуассона $m = 3$. Результаты расчетов для $\frac{\Delta}{h}$ (h — полутолщина полосы) в зависимости от безразмерной величины зазора между соседними верхним и нижним штампами $\frac{\varepsilon}{h}$ (фиг. 2) и коэффициента трения f_0 представлены в табл. 1.

Таблица 1

f_0 / ε/h	0	0.1	0.2	0.3
0.025	0.41	0.61	0.87	1.17
0.050	0.37	0.55	0.80	1.08
0.100	0.31	0.45	0.66	0.93
0.150	0.25	0.37	0.54	0.79
0.200	0.21	0.30	0.44	0.65
0.230	0.20	0.27	0.39	0.57

Из данных таблицы следует, что величина площадок контакта существенно зависит от коэффициента трения, увеличиваясь с увеличением f_0. Уменьшение зазора также приводит к увеличению длины площадок контакта. Характер распределения нормальных напряжений в зонах контакта для всех случаев описывается формулой (1.24). Значения касательных напряжений в зонах контакта получаются умножением правой части (1.24) на коэффициент трения f_0. Касательные напряжения всегда направлены так, что приводят к сжатию контактирующих поверхностей штампов, то есть к сближению угловых точек контакта штампов. Интересно отметить, что особенность контактных напряжений при подходе к угловым точкам штампов с учетом трения оказывается немного ниже корневой особенности $\frac{1}{2}$, имеющей место в задачах гладкого контакта.

Полученные выше результаты по определению площадок контакта и характера контактных напряжений являются исходными для строгого анализа напряженного состояния у режущих кромок твердосплавных элементов на упругой стадии их работы.

Институт механики АН УССР
Институт сверхтвердых материалов АН УССР

Поступила 1 XI 1976

Վ. Վ. ԴԻՈՐՑԱՉԻՆ, Վ. Ն. ՆԻԿԻՏԻՆԱ, Ա. Ֆ. ՈՒԼԻՏԿՈ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՇԵՐՏԻ ՎՐԱ ՇՓՈՒՄՈՎ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ամփոփում

Ներկայացվում է առաձգական շերտի վրա շփումով պարբերական կոնտակտային խնդրի լուծումը։ Այդ խնդիրը մոդելավորում է թերթավոր դրոշման բաժանարար օպերացիաների տեղական դեֆորմացիաների ամենաբնորոշ առանձնահատկությունները ձևափոխման առաձգական փուլում։

Խնդրի լուծումը բերվում է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման, որի ճշգրիտ լուծումը հաջողվել է գրանցել թվային անալիզի օգնությամբ կորիզի ռեգուլյար մասի կապակցությունը արգումենտներից գծային օրենքով սահմանելուց հետո։

Որոշվել են դրոշմների անկյունային եզրերի մոտ կոնտակտային գոտիները և կոնտակտային լարումների բաշխման բնույթը։

Բերվում են տվյալներ կոնտակտային մակերեսների, խնդրի երկրաչափական պարամետրերից և շփման գործակցի մեծությունից, ունեցած կապի մասին։

THE RECURRENT CONTACT PROBLEM WITH FRICTION ON ELASTIC STRIP

V. V. DROBJASKO, V. N. NIKITENKO, A. F. ULITKO

Summary

The solution of the recurrent contact problem with friction on the elastic strip, modelling the most characteristic features of local deformation of divisional operations of sheet punching in the elastic stage of deformation is presented in this paper.

The exact solution of the singular integral equation to which this problem is reduced is written after determination by numerical analysis of the linear dependence of the regular part of kernel from arguments.

The contact zones near the angular edges of punches and characteristics of distribution of contact stresses are determined.

The results are presented on dependence of contact grounds on geometrical parameters of the problem and on the coefficient of friction.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дурнев В. Д., Казаринова Т. А.* О распределении напряжений на упругой стадии процесса вырубки изотропного материала. Изв. АН СССР, Металлы. 1976, № 1.
2. *Попов Е. А.* Основы теории листовой штамповки. М., Машиностроение, 1968, с. 238.
3. *Сторожев М. В., Попов Е. А.* Теория обработки металлов давлением. М., Машиностроение, 1971, с. 424.
4. *Фотеев Н. К.* Высокостойкие штампы. М., Машиностроение, 1965, с. 258.
5. *Takushi Gluma.* The theoretical research on the flanking of the sheet material. Soc. Mechanical Eugn., 1962, vol. 28, No. 196, 1719.
6. *Дандерс, Стипс.* Роль констант упругости в некоторых контактных задачах. Прикл. механ., Тр. Америк. о-ва инж.-механ., сер. Е, 1970, т. 37, № 4.
7. *Кир, Дандерс, Цзай.* Контактная задача для слоя, лежащего на полупространстве. Прикл. механ., Тр. Америк. о-ва инж.-механ., сер. Е, 1972, т. 39, № 4.
8. *Dundurs J.* Properties of elastic bodies in contact. The mechanics of the contact between deformable bodies. Proceedings of IUTAM Symposium. Enschede, Netherlands, 20—30, August 1974. Ed-rs A. D. de Pater, J. J. Kalker. Delft University Press, 1975, 54—66.

9. *Баблоян А. А., Мелконян М. Г.* О контакте двух прямоугольников без сцепления с определением области контакта. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1974, т. XXVII, № 5.

10. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* Контактная задача теории упругости для слоя, локально прижатого к полупространству. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1976, т. XXIX, № 2.

11. *Приварников А. К.* О контакте слоя с упругим полупространством. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 4.

12. *Pu S. L., Hussain M. A.* Note on the unbonded contact between plates and an elastic half space. Trans. ASME, ser. E., J. Appl. Mech., 1970, vol. 37, No. 3, pp. 859—861.

13. *Улитко А. Ф.* Решение некоторых задач теории упругости методом собственных вектор-функций. Прикл. мех., 1960, т. 6, вып. 4.

14. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., Изд. «Наука», 1967, с. 402.

15. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959, с. 470.

16. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963, с. 640.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXI, № 1, 1978 Механика

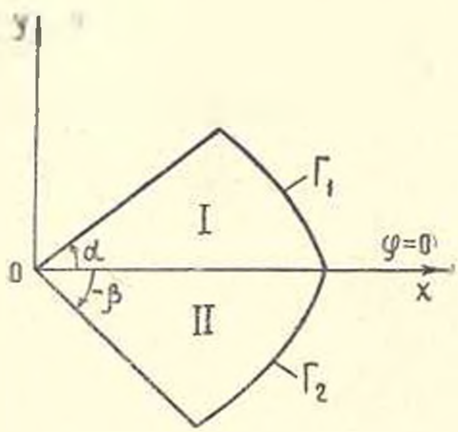
Р. К. АЛЕКСАНЯН, С. А. МЕЛИК-САРКИСЯН

О КРУЧЕНИИ АНИЗОТРОПНОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СЕКТОРОВ

Решению задачи о кручении анизотропных стержней посвящены работы [1—6].

В настоящей работе строится точное решение задачи о кручении призматического стержня, составленного из двух призматических анизотропных тел с поперечными сечениями в виде эллиптических секторов, зависящих от анизотропии материалов. Материалы стержня обладают различными свойствами упругой анизотропии прямолинейного вида.

1. Поместим начало прямолинейной декартовой системы координат в точке пересечения линии раздела и контура поперечного сечения составного призматического стержня, направляя ось x по линии раздела. Через α и β обозначим углы между осью x и радиальными частями контура области, а через Γ_1 и Γ_2 — замыкающие эллиптические части контура области поперечного сечения (фиг. 1), которые определяются коэффициентами анизотропии материалов.



Фиг. 1.

Напряжения $\tau_{yz}^{(k)}, \tau_{xz}^{(k)}$ $(k=1, 2)$ определяются формулами

$$\tau_{xz}^{(k)} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial y}, \quad \tau_{yz}^{(k)} = -\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \tag{1.1}$$

где $\Phi_k(x, y)$ — функции напряжений, удовлетворяющие дифференциальному уравнению [3]

$$A[\Phi_k] = a_{44}^{(k)} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x^2} - 2a_{45}^{(k)} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x \partial y} + a_{55}^{(k)} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial y^2} = -2\tau \tag{1.2}$$

Здесь $a_{44}^{(k)}, a_{45}^{(k)}, a_{55}^{(k)}$ $(k=1, 2)$ — упругие постоянные материалов, а τ — относительный угол закручивания составного стержня.

Функции Φ_k на ветвях контура области и на линии раздела удовлетворяют следующим условиям:

$$\Phi_1(r\cos\alpha, \ r\sin\alpha) = \Phi_2(r\cos\beta, \ -r\sin\beta) = 0 \tag{1.3}$$

$$\Phi_1(x, 0) = \Phi_2(x, 0) \tag{1.4}$$

$$-a_{45}^{(1)}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+a_{55}^{(1)}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\bigg|_{y=0}=-a_{45}^{(2)}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}+a_{55}^{(2)}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\bigg|_{y=0}$$

2. Решение уравнения (1.2) представим в виде

$$\Phi_k(x,\ y)=F_k(x,\ y)+\Phi_{0k}(x,\ y)\quad(k=1,\ 2)\tag{1.5}$$

Частное решение $\Phi_{0k}(x,\ y)$ уравнения (1.2) будем искать в виде

$$\Phi_{0k}(x,\ y)=L_kx^2+M_ky^2+N_kxy\quad(k=1,\ 2)\tag{2.1}$$

Удовлетворяя уравнению (1.2) и условиям (1.3), (1.4), получаем систему уравнений

$$\begin{gathered}
a_{44}^{(1)}L_1-a_{45}^{(1)}N_1+a_{55}^{(1)}M_1=-\tau\\
a_{44}^{(2)}L_2-a_{45}^{(2)}N_2+a_{55}^{(2)}M_2=-\tau\\
L_1\cos^2\alpha+M_1\sin^2\alpha+N_1\sin\alpha\cos\alpha=0\\
L_2\cos^2\beta+M_2\sin^2\beta-N_2\sin\beta\cos\beta=0\\
L_1-L_2=0\\
-2a_{45}^{(1)}L_1+a_{55}^{(1)}N_1+2a_{45}^{(2)}L_2-a_{55}^{(2)}N_2=0
\end{gathered}\tag{2.2}$$

Из системы (2.2) можно определить коэффициенты L_k, M_k, N_k $(k=1,\ 2)$. Определитель системы (2.2) может обращаться в нуль лишь при частных комбинациях упругих постоянных материалов и углов α и β. В этих случаях частное решение (2.1) можно получить соответствующим подбором коэффициентов L_k, M_k, N_k $(k=1,\ 2)$ или предельным переходом.

Легко заметить, что напряжения, определяемые частным решением (2.1), в начале координат исчезают.

Решение соответствующего однородного уравнения

$$A[F_k]=0\quad(k=1,\ 2)\tag{2.3}$$

представим в виде [7]

$$F_k(x,\ y)=(x+\delta_ky)^\lambda\tag{2.4}$$

где δ_k и λ — постоянные.

Относительно δ_k получаем уравнение [3]

$$a_{44}^{(k)}-2a_{45}^{(k)}\delta_k+a_{55}^{(k)}\delta_k^2=0\tag{2.5}$$

Из условия

$$a_{44}^{(k)}a_{55}^{(k)}-(a_{45}^{(k)})^2>0$$

следует, что корни уравнения (2.5) комплексные и сопряженные, то есть $\delta_{k2}=\bar{\delta}_{k1}=\sigma_k-i\nu_k$ $(k=1,\ 2)$ [3]. Поэтому решение уравнений (2.3) представится в виде

$$F_k(x, y) = A_k(x + \delta_k y)^\lambda + B_k(x + \bar{\delta}_k y)^\lambda \tag{2.6}$$

где A_k и B_k — комплексные постоянные.

Удовлетворяя условиям (1.3) и (1.4), получаем систему

$$\begin{gathered}
A_1(\cos\alpha + \delta_1 \sin\alpha)^\lambda + B_1(\cos\alpha + \bar{\delta}_1 \sin\alpha)^\lambda = 0 \\
A_2(\cos\beta - \delta_2 \sin\beta)^\lambda + B_2(\cos\beta - \bar{\delta}_2 \sin\beta)^\lambda = 0 \\
A_1 + B_1 - A_2 - B_2 = 0 \\
\mu(A_1 - B_1) - A_2 + B_2 = 0
\end{gathered} \tag{2.7}$$

где $\mu = \dfrac{d_1}{d_2}$, а $d_k = [a_{44}^{(k)} a_{55}^{(k)} - (a_{45}^{(k)})^2]^{1/2}$ $(k = 1, 2)$.

Из условия существования нетривиального решения однородной систе-мы (2.7) относительно λ получаем уравнение

$$(1 + \mu)\sin\lambda(\varphi_1 + \varphi_2) + (1 - \mu)\sin\lambda(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \tag{2.8}$$

где

$$\varphi_1 = \arg(\cos\alpha + \delta_1 \sin\alpha), \quad \varphi_2 = \arg(\cos\beta - \delta_2 \sin\beta)$$

Решения уравнения (2.8) являются собственными значениями трехто-чечной самосопряженной краевой задачи дифференциального уравнени-второго порядка. Все корни уравнения (2.8) действительны. В случае по-ложительных простых корней, пронумерованных по порядку их возраста-ния, общее решение уравнения (1.2) представляется в виде

$$\Phi_k(x, y) = \sum_{(\lambda_n)} [A_{kn}(x + \delta_k y)^{\lambda_n} + B_{kn}(x + \bar{\delta}_k y)^{\lambda_n}] + \Phi_{0k} \tag{2.9}$$

где сумма распространена на все положительные корни λ_n характеристи-ческого уравнения (2.8). Необходимость отбрасывания отрицательных кор-ней вытекает из условия конечности накопленной потенциальной энерги-деформации в конечном объеме стержня в окрестности конца линии раз-дела [8].

Однородные решения, соответствующие кратным корням, строятс-при помощи присоединенных функций [9].

Решение (2.9) в полярной системе координат (r, φ) представляетс-в виде

$$\begin{gathered}
\Phi_1 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2iB_{n1}\cos\lambda_n\varphi_1}{\cos\lambda_n\varphi_1 + i\sin\lambda_n\varphi_1} r_2^{\lambda_n}(\sin\lambda_n\varphi - \operatorname{tg}\lambda_n\varphi_1 \cos\lambda_n\varphi) + \Phi_{01} \\
\Phi_2 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2iB_{n1}\cos\lambda_n\varphi_1}{\cos\lambda_n\varphi_1 + i\sin\lambda_n\varphi_1} r_2^{\lambda_n}(\mu\sin\lambda_n\varphi - \operatorname{tg}\lambda_n\varphi_1 \cos\lambda_n\varphi) + \Phi_{02}
\end{gathered} \tag{2.10}$$

где

$$r_k^2 = [(\cos\varphi + \alpha_k \sin\varphi)^2 + \nu_k^2 \sin^2\varphi]\, r^2 = r^2\rho_k^2$$

Так как $\Phi_i(r, \varphi)$ — действительные функции, то комплексные постоянные B_{n1} выбираем следующим образом:

$$B_{n1} = -\frac{\cos\lambda_n\varphi_1 + i\sin\lambda_n\varphi_1}{2i\cos\lambda_n\varphi_1}\, B'_{n1}$$

где B'_{n1} — действительные постоянные.

Функции напряжений окончательно представляются в виде

$$\Phi_k(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} B'_n (r\rho_k)^{\lambda_n} (\mu^{k-1} \sin\lambda_n\gamma - \operatorname{tg}\lambda_n\varphi_2 \cos\lambda_n\gamma) + \Phi_{0k} \qquad (2.11)$$

где

$$\gamma = \arg(\cos\varphi + \alpha_2 \sin\varphi + i\nu_2 \sin\varphi) \quad \text{при} \quad -\beta < \varphi < 0$$

$$\gamma = \arg(\cos\varphi + \alpha_1 \sin\varphi + i\nu_1 \sin\varphi) \quad \text{при} \quad 0 < \varphi < \alpha$$

Если собственные числа являются корнями уравнения $\cos\lambda_n\varphi_1 = 0$, то в (2.11) появляется ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\lambda_n} \cos\lambda_n\gamma$ [10].

3. Рассмотрим семейства кривых, являющихся частями замыкающих контура рассматриваемой области

$$r\rho_1 = c, \quad r\rho_2 = c$$

В декартовой системе координат имеем

$$\begin{aligned} (x + \alpha_1 y)^2 + \nu_1^2 y^2 &= c^2 \\ (x + \alpha_2 y)^2 + \nu_2^2 y^2 &= c^2 \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Эти кривые являются дугами эллипсов с совпадающими центрами в начале координат.

Для неопределенных коэффициентов B'_n, входящих в (2.11), из условий

$$\Phi_k|_{\Gamma_k} = 0$$

получаем уравнения

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} B'_n c^{\lambda_n} (\sin\lambda_n\gamma - \operatorname{tg}\lambda_n\varphi_1 \cos\lambda_n\gamma) = f_1(\gamma) \\ &\sum_{n=1}^{\infty} B'_n c^{\lambda_n} (\mu \sin\lambda_n\gamma - \operatorname{tg}\lambda_n\varphi_1 \cos\lambda_n\gamma) = f_2(\gamma) \end{aligned} \qquad (3.2)$$

где $f_k(\gamma)$ — значения $-\Phi_k(x, y)$ при $M(x, y) \in \Gamma_k$.

Рассмотрим систему функций

$$u_n = \begin{cases} u_{1n}(\gamma) = \sin \lambda_n\gamma - \operatorname{tg} \lambda_n\varphi_1 \cos \lambda_n\gamma & \text{при} \quad 0 < \gamma < \varphi_1 \\ u_{2n}(\gamma) = \mu \sin \lambda_n\gamma - \operatorname{tg} \lambda_n\varphi_1 \cos \lambda_n\gamma & \text{при} \quad -\varphi_2 < \gamma < 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Система (3.3) является полной ортогональной системой в интервале $-\varphi_2 < \gamma < \varphi_1$ с кусочно-постоянным весом

$$d(\gamma) = \begin{cases} d_1 = [a_{44}^{(1)}a_{55}^{(1)} - (a_{45}^{(1)})^2]^{1/2} & \text{при} \quad 0 < \gamma < \varphi_1 \\ d_2 = [a_{44}^{(2)}a_{55}^{(2)} - (a_{45}^{(2)})^2]^{1/2} & \text{при} \quad -\varphi_2 < \gamma < 0 \end{cases}$$

как система собственных функций самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка

$$u_k'' + \lambda^2 u_k = 0 \quad (k = 1, 2)$$

с граничными и контактными условиями

$$u_1\big|_{\gamma=\varphi_1} = 0, \quad u_2\big|_{\gamma=-\varphi_2} = 0$$

$$u_1\big|_{\gamma=0} = u_2\big|_{\gamma=0}, \quad \mu \frac{du_1}{d\gamma}\Big|_{\gamma=0} = \frac{du_2}{d\gamma}\Big|_{\gamma=0}$$

Разложим функцию

$$f(\gamma) = \begin{cases} f_1(\gamma), \text{ если } M(x, y) \in \Gamma_1 \\ f_2(\gamma), \text{ если } M(x, y) \in \Gamma_2 \end{cases}$$

в ряд по функциям (3.3)

$$f(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(\gamma)$$

На основании (3.2) для коэффициентов B_n' имеем

$$B_n' = b_n c^{-\lambda_n} \tag{3.4}$$

где

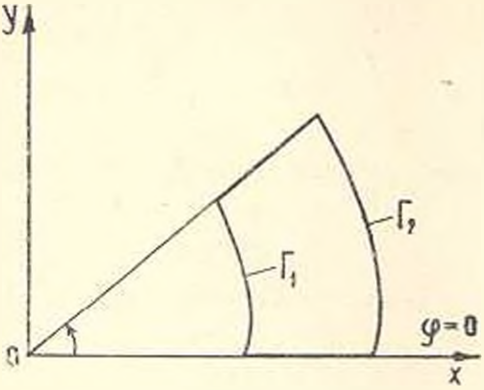
$$b_n = \frac{\int\limits_{-\varphi_2}^{\varphi_1} d(\gamma) f(\gamma) u_n(\gamma)\, d\gamma}{\int\limits_{-\varphi_2}^{\varphi_1} d(\gamma)\, u_n^2(\gamma)\, d\gamma}$$

Подставляя (3.4) в (2.11), получаем

$$\Phi_k(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{r\rho_k}{c}\right)^{\lambda_n} (\mu^{k-1} \sin \lambda_n\gamma - \operatorname{tg} \lambda_n\varphi_1 \cos \lambda_n\gamma) + \Phi_{0k} \tag{3.5}$$

Таким образом, решение задачи кручения однородного анизотропного и составного анизотропного призматического тела можно получить в замкнутом виде для угловой области, если только замыкающие части контура поперечного сечения являются дугами эллипсов, определяемые формулами (3.1). Каждое семейство кривых (3.1) характеризуется парами чисел (σ_k, ν_k), определяемыми упругими постоянными соответствующих материалов. В случае изотропного материала, когда $\sigma_k = 0$, а $\nu_k = 1$, эллипсы вырождаются в окружности $x^2 + y^2 = c^2$. Приведенный угол γ совпадает с полярным углом φ. Параметры ρ_1 и ρ_2, характеризующие растяжение или сжатие полярного радиуса r, приравниваются к единице.

4. В качестве примера рассмотрим задачу кручения анизотропного эллиптического сектора с центральным углом α (фиг. 2), которая ранее была решена вариационным методом в работе [2]. В этом случае предполагается, что материал призматического тела ортотропен, одна из плоскостей упругой симметрии которого нормальна к оси z стержня, а две другие нормальны к осям x и y.



Фиг. 2.

В этом случае функция напряжений $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$L(u) = a_{44}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{55}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \tag{4.1}$$

где

$$a_{44} = \frac{1}{G_{xz}}, \qquad a_{55} = \frac{1}{G_{yz}}$$

G_{xz} — модуль сдвига в плоскости, параллельной xoz,
G_{yz} — модуль сдвига в плоскости, параллельной yoz.

Общее решение уравнения (4.1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u(x, 0) = u(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha) = 0 \tag{4.2}$$

представляется в виде

$$u_1 = \sum_{(\lambda_n)} B_n r^{\lambda_n} (\cos^2\varphi + \nu^2 \sin^2\varphi)^{\frac{\lambda_n}{2}} \sin\lambda_n\theta +$$

$$+ G_{yz} r^2 (\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{tg}\,\alpha - \sin^2\varphi) \tag{4.3}$$

где

$$\theta = \arg(x + i\nu y), \quad \nu = \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{55}}}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{\theta_1}$$

$$\theta_1 = \arg(\cos\alpha + i\nu\sin\alpha), \quad 0 < \theta < \theta_1$$

В случае кольцевого сектора $\alpha = \pi$ имеем $\theta_1 = \pi$, $\lambda_n = n(n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2; \ldots)$, а общее решение уравнения (4.1) представляется в виде

$$u = -G_{yz}y^2 + \sum_{n=1}^{\infty} [B_n (x^2 + \nu^2 y^2)^{\frac{n}{2}} - B_{-n} (x^2 + \nu^2 y^2)^{-\frac{n}{2}}] \sin n\theta \tag{4.4}$$

или

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} [B_n r^n (\cos^2\varphi + \nu^2\sin^2\varphi)^{\frac{n}{2}} - B_{-n} r^{-n} (\cos^2\varphi + \nu^2\sin^2\varphi)^{-\frac{n}{2}}] -$$

$$- G_{yz} r^n \sin^2\varphi$$

Решение (4.4) на дугах следующих эллипсов:

$$r^2 (\cos^2\varphi + \nu^2\sin^2\varphi) = c_1^2, \quad (\Gamma_1)$$

$$r^2 (\cos^2\varphi + \nu^2\sin^2\varphi) = 1 \quad (\Gamma_2)$$

удовлетворяет условиям

$$u|_{\Gamma_1} = 0, \quad u|_{\Gamma_2} = 0$$

Для коэффициентов B_n и B_{-n} получаем уравнения

$$\begin{gathered} \sum_{n=1}^{\infty} [B_n c_1^n - B_{-n} c_1^{-n}] \sin n\theta = G_{yz} r^2 \sin^2\varphi|_{\Gamma_1} \\ \sum_{n=1}^{\infty} [B_n - B_{-n}] \sin n\theta = G_{yz} r^2 \sin^2\varphi|_{\Gamma_2} \end{gathered} \tag{4.5}$$

где

$$r^2 \sin^2\varphi|_{\Gamma_1} = \frac{c_1^2 \sin^2\theta}{\nu^2}, \quad r^2 \sin^2\varphi|_{\Gamma_2} = \frac{\sin^2\theta}{\nu^2}$$

Из (4.5) имеем

$$B_{2k} = B_{-2k} = 0$$

$$B_{2k-1} = -\frac{8G_{yz}}{\pi\nu^2(2k-1)[(2k-1)^2-4]}\,\frac{c_1^{-2k+1}+c_1^2}{c_1^{2k-1}+c_1^{-2k+1}} \tag{4.6}$$

$$B_{-2k+1} = \frac{8G_{yz}}{\pi\nu^2(2k-1)[(2k-1)^2-4]}\,\frac{c_1^{2k-1}-c_1^2}{c_1^{2k-1}+c_1^{-2k+1}}$$

Общее решение (4.4) окончательно примет вид

$$u = -\frac{8G_{yz}}{\pi\nu^2}\sum_{n=1,3,\ldots}\frac{\sin n\theta}{n(n^2-4)}\left[\frac{c_1^{-n}+c_1^2}{c_1^n+c_1^{-n}}(x^2+\nu^2y^2)^{\frac{n}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{c_1^n-c_1^2}{c_1^n+c_1^{-n}}(x^2+\nu^2y^2)^{-\frac{n}{2}}\right] - G_{yz}y^2$$

В случае, когда призматический стержень имеет поперечное сечение в виде полуэллиптического сектора, ограниченного эллипсом

$$x^2+\nu^2y^2 = 1 \text{ и осью } y = 0$$

на основании (4.3) и из условия ограниченности напряжений в начале координат для напряжений получаем выражения

$$\tau_{xz} = -2G_{yz}y + \frac{8G_{yz}}{\pi\nu}\sum_{n=1,3,\ldots}\frac{(x^2+\nu^2y^2)^{\frac{n}{2}-1}}{4-n^2}(\nu y\sin n\theta + x\cos n\theta)$$

$$\tau_{yz} = \frac{8G_{yz}}{\pi\nu^2}\sum_{n=1,3,\ldots}\frac{(x^2+\nu^2y^2)^{\frac{n}{2}-1}}{n^2-4}(x\sin n\theta - \nu y\cos n\theta) \tag{4.7}$$

Напряжения τ_{xz} и τ_{yz}, когда $x=0$, $y=0$, принимают значения

$$\tau_{yz} = 0, \qquad \tau_{xz} = \frac{8\sqrt{G_{xz}G_{yz}}}{3\pi} \tag{4.8}$$

Напряжения, получающиеся из приближенной формулы для функции напряжений, приведенной в работе Н. Х. Арутюняна, в середине диаметра эллипса совпадают с напряжениями (4.8).

ВЦ АН Арм. ССР и ЕрГУ
ЕрПИ им. К. Маркса

Поступила 26 IV 1977

Ռ. Կ. ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ, Ս. Ա. ՄԵԼԻՔ-ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ՍԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ՏԵՍՔՈՎ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ՁՈՂԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է էլիպսական սեկտորի տեսքով հատվածք ունեցող երկու պրիզմատիկ մարմիններից բաղկացած պրիզմատիկ ձողի ոլորման խնդիրը։ Ձողի նյութերն օժտված են ուղղագիծ առաձգական անիզոտրոպիայի հատկություններով։ Ձողի բաղադրիչ մասերը միացված են միմյանց հետ կողմնային մակերևույթի ընդհանուր մասի երկայնությամբ։ Նյութերի անիզոտրոպիան յուրաքանչյուր կետում ունի ձողի կողմնային մակերևույթի ծնիչին ուղղահայաց առաձգական սիմետրիայի հարթություն։

Լարումների ֆունկցիան ներկայացված է երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման համար եռակետ եզրային խնդրի սեփական ֆունկցիաներով շարքի տեսքով։ Ձողի անհամասեռության և նրա նյութերի անիզոտրոպիայի հետ կապված լայնական կտրվածքի համար ստացված է փակ լուծում։

TORSION OF A PRISMATIC COMPOSITE ANISOTROPIC BAR OF ELLIPTICAL SECTOR CROSS-SECTION

R. K. ALEXANIAN, S. A. MELIK-SARKISSIAN

S u m m a r y

The problem on torsion of a prismatic bar consisting of two prismatic bodies with sections in the form of elliptical sector, made of linear anisotropic materials, is considered. The components of the bar are joined together along the common part of its lateral surface. The anisotropism of the materials at any point has a plane of elastic symmetry perpendicular to the generator of the bar lateral surface.

The stress function is represented by the series over eigen-functions of the three-point boundary problem for a differential equation of the second order. For the cross-section, depending upon the bar non-homogeneity and the material anisotropism, a closed solution is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Симметричная деформация и кручение анизотропного тела вращения с анизотропией частного вида. ПММ, 1940, т. IV, вып. 3.
2. *Арутюнян Н. Х.* О кручении эллиптического кольцевого сектора. ПММ, 1947, т. XI.
3. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.—Л., Гостехтеориздат, 1950.
4. *Геворкян С. Х.* Исследование особенностей напряжений в некоторых задачах теории упругости анизотропного тела. Изв. АН Арм. ССР, «Механика», 1968, т. XXI, № 4.

5. *Минасян Р. С.* О кручении и изгибе анизотропных призматических стержней с поперечным сечением в виде параллелограмма. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. н., 1958, т. 11, № 3.
6. *Саркисян В. С.* Некоторые задачи теории упругости анизотропного тела. Изд. Ер. гос. универ., 1970.
7. *Алексанян Р. К.* Об одном классе решений уравнений плоской задачи теории упругости анизотропного тела. Докл. АН Арм. ССР, 1975, т. XI, № 4.
8. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. J. of Appl. Mech., v. 19, 1952.
9. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., Изд. «Наука», 1969.
10. *Алексанян Р. К.* Стационарное температурное поле в составном круговом секторе. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1971, т. XXIV, № 6.

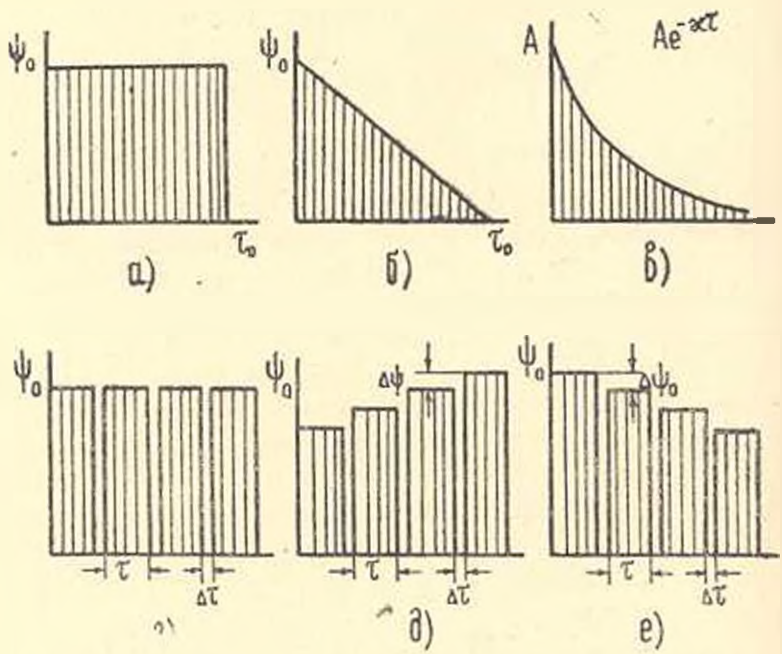
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXI, № 1, 1978 Механика

Е. А. ВОЛЬМИР

ИССЛЕДОВАНИЕ ИМПУЛЬСИВНОГО НАГРУЖЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

В предыдущей работе А. С. Вольмира и автора [2] было изучено упруго-пластическое поведение пластинок и пологих оболочек при импульсивном нагружении. Там же приведен перечень других трудов в области, относящейся к выпучиванию тонкостенных конструкций при динамических воздействиях. Однако, в [2] исследовались лишь две формы импульса. В настоящей статье с помощью зависимостей, полученных в [2], изучается ряд воздействий иного типа: ступенчатый импульс, экспоненциальный, треугольный, прерывистый ступенчатый с постоянной, а также увеличивающейся и уменьшающейся амплитудами нагрузки при различной скважности (фиг. 1).



Фиг. 1.

Рассматривается прямоугольная в плане пологая шарнирно опертая по всем кромкам панель, подвергающаяся динамически приложенному сжатию вдоль образующей. Используется теория малых упруго-пластических деформаций; при этом не учитывается эффект разгрузки и предполагается, что пластические свойства материала проявляются лишь в направлении основного напряжения в срединной поверхности. Допускается, что секущий и касательный модули являются функциями средней интенсивности напряжений в срединной поверхности. Время действия нагрузки считается большим, чем время прохождения возмущений по длине панели, поэтому в исходных геометрически и физически нелинейных уравнениях учитывается лишь инерционный член, соответствующий нормальному прогибу панели. С помощью метода Бубнова—Галеркина в форме Папковича задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = \left(\frac{m}{\lambda}\right)^2 \psi(\tau)\zeta - (\zeta - \zeta_0)\Bigg\{\frac{1}{16}\varphi_c(1+3\lambda_0)\left(\frac{m}{\lambda}\right)^4 + \frac{1}{2}\varphi_c\frac{m^2n^2}{\lambda^2} + \frac{1}{4}\varphi_c n^4 + \frac{3}{16}(1-\mu^2)\varphi_k\left[\left(\frac{m}{\lambda}\right)^4 + \frac{4n^4}{3\lambda_0+1}\right]\zeta(\zeta+\zeta_0) + 3(1-\mu^2)\varphi_c\frac{1}{\pi^4}\frac{m^2k^2}{m^2\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4\lambda_0}\right)+\lambda^2n^2\left(3-\frac{1}{\lambda_0}\right)+\frac{\lambda^4n^4}{m^2\lambda_0}}\Bigg\} + \alpha\frac{1-\mu^2}{\pi^4}(\zeta-\zeta_0)\Bigg\{8\varphi_k\frac{1}{3\lambda_0+1}\frac{nk}{m}(\zeta+\zeta_0) + 32\zeta\varphi_c\frac{kmn}{m^2\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4\lambda_0}\right)+\lambda^2n^2\left(3-\frac{1}{\lambda_0}\right)+\frac{\lambda^4n^4}{m^3\lambda_0}}\Bigg\} \quad (1.1)$$

Здесь через ζ и ζ_0 обозначены полный и начальный прогибы, отнесенные к толщине панели h, $\lambda = a/b$ — отношение длины панели a к ширине b, измеренной по дуге, $k = b^2/Rh$ — параметр кривизны, где R — радиус кривизны срединной поверхности; m и n — числа полуволн вдоль образующей a и по дуге b; λ_0 — отношение касательного модуля к секущему. Введены безразмерные параметры времени

$$\tau = t\sqrt{\frac{\pi^4 Egh^2}{3(1-\mu^2)\gamma b^4}} \quad (1.2)$$

и нагрузки

$$\psi(\tau) = p\left(\frac{1}{\delta}\right)^2\frac{3(1-\mu^2)}{\pi^2 E} \quad (1.3)$$

где $\delta = h/b$.

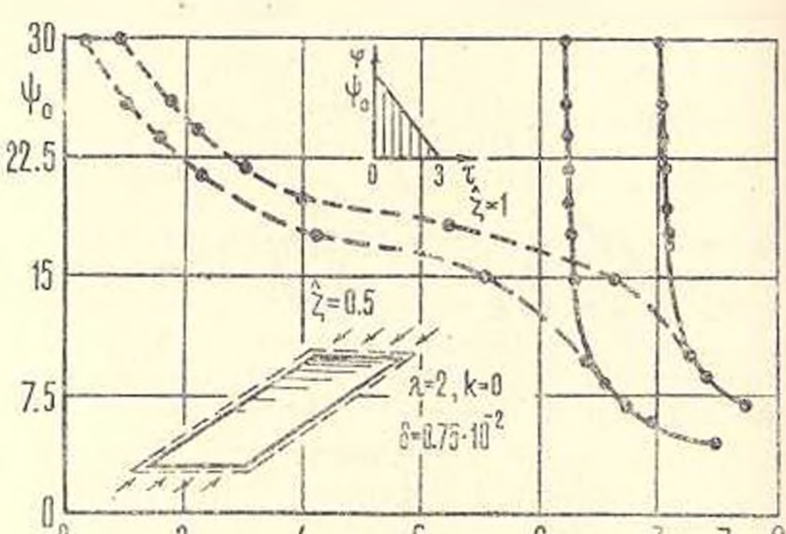
Решение уравнения (1.1) при начальных условиях

$$\zeta = \zeta_0, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial\tau} = 0 \quad \text{при } \tau = 0 \quad (1.4)$$

проводилось на ЭВМ БЭСМ-6 с применением метода Рунге—Кутта. Расчетные параметры, характеризующие пластические свойства материала, брались из диаграммы сжатия для дюралюмина Д16Т.

Находились зависимости стрелы прогиба от времени $\zeta(\tau)$, причем, подобно предыдущим исследованиям, варьировались числа полуволн по образующей m и вдоль дуги n. Предполагалось, что реализуется та форма волнообразования, которой отвечает кривая, лежащая ближе всего к оси ординат ζ. Во всех рассмотренных примерах по ширине образовывалась одна полуволна $n = 1$. В некоторых случаях происходила перестройка волнообразования с уменьшением «критического» числа полуволн m вдоль образующей по времени.

По графикам $\zeta - \tau$ определялся момент, в который прогиб при том или ином параметре нагрузки достигал значения, равного, например, толщине панели или половине толщины — конкретные вычисления могут быть проведены для любого интересующего нас уровня прогиба. Затем вычислялся импульс $J = \int \varphi \, d\tau$, полученный конструкцией к этому моменту. В результате были выявлены зависимости, подобные представленным на фиг. 2.

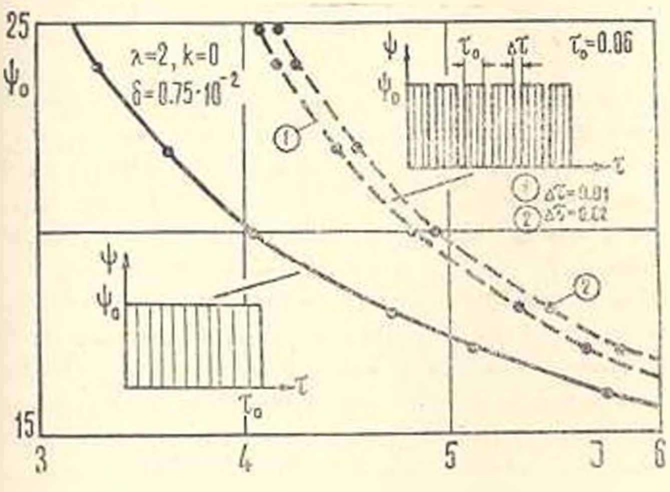


Фиг. 2.

В данном случае нагрузка считалась изменяющейся по треугольному закону (фиг. 1б). Вычисления проводились для удлиненной пластинки ($\lambda = 2$) с отношением толщины к ширине $\delta = 0.75 \cdot 10^{-2}$. Здесь сплошными линиями изображены кривые, полученные в предположении о применимости закона Гука, штриховыми — из решения уравнения (1.1). Для $\psi_0 \leq 10$ оба решения совпадают — напряжения в материале не превосходят предела пропорциональности. Кривые 1 отвечают предельному прогибу, равному толщине панели, кривые 2 — прогибу, равному половине толщины. Здесь, так же, как и для других видов нагружения (ступенчатого, экспоненциального), обсуждавшихся в работе [2], величина импульса для конструкции, деформирующейся в упруго-пластической области, резко снижается по сравнению со случаем идеально упругого материала.

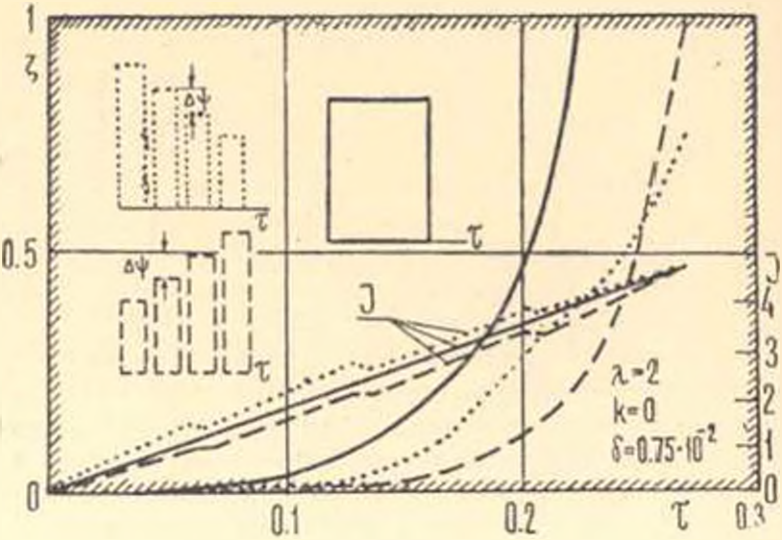
Из рассмотрения графиков, отражающих зависимость между параметром единичной нагрузки и импульсом, необходимым для достижения того или иного значения прогиба, можно заключить, что учет упруго-пластических свойств материала существенным образом сказывается на характере таких зависимостей. Применение модели упругого материала приводит к завышенным значениям импульсов и поэтому не может быть использовано при определении расчетных нагрузок. Характер же формы прикладываемого импульса не вносит значительных изменений в картину этих зависимостей. Скорее можно отметить, что существенной оказывается лишь величина амплитуды приложенной нагрузки независимо от того, остается ли она постоянной, как в случае ступенчатого, или уменьшающейся, как в случае треугольного или экспоненциального закона изменения нагрузки.

До сих пор обсуждались лишь единичные импульсы. На практике имеют место случаи, когда конструкция воспринимает прерывистый импульс, причем он может иметь как постоянную, так и изменяющуюся амплитуду.



Фиг. 3.

На фиг. 3 изображены кривые «амплитуда нагрузки — импульс» для удлиненной пластинки с отношением сторон, равным 2, в упруго-пластической области, причем сплошная кривая относится к непрерывно воздействующей нагрузке, а штриховые — к нагрузке прерывистого типа той же амплитуды. Все кривые отвечают предельному прогибу, равному толщине пластинки. Из рассмотрения этих зависимостей можно заключить, что непрерывно воздействующая нагрузка представляет бóльшую опасность для конструкции. Об этом же свидетельствуют данные экспериментов, приведенные в [1]. Время, в течение которого действует сигнал, для обеих штриховых кривых одинаково: оно составляет по (1.2) 0.06, а время разрыва между отдельными импульсами для кривой 1 составляет 0.01, а для кривой 2 — 0.02. Таким образом, можно сделать вывод о том, что с увеличением скважности конструкция способна воспринять больший импульс.



Фиг. 4.

На фиг. 4 приведены данные, относящиеся к удлиненной пластинке, подвергающейся действию волн нарастающей интенсивности (они изображены штриховыми линиями), а также волн, следующих друг за другом в обратном порядке (пунктир). Время действия отдельного импульса составляет 0.06, время между отдельными импульсами — 0.01. Параметр нагрузки по (1.3) изменяется от 17 до 23 с интервалом, равным 2. Таким образом, каждое из воздействий само по себе заведомо не является опасным. Две ломаные внизу отражают закон изменения импульса от времени для обоих случаев нагружения. Максимальное значение его составляет 4.8. Кривые характеризуют изменение прогиба пластинки во времени. Из рассмотрения этих зависимостей можно заключить, что для достижения одного и того же значения прогиба (в данном случае равного 0.55 толщины пластинки) в случае увеличивающейся нагрузки необходим импульс меньший, чем в случае уменьшающейся. Этот вывод подтверждается экспериментальными данными, приведенными в монографии [1]. В [1] изображены кривые, с качественной стороны совпадающие с представленными здесь. На этой же фигуре сплошными линиями отражены результаты, относящиеся к непрерывно действующему ступенчатому импульсу средней по отношению к предыдущим амплитуды. Можно отметить, что время, необходимое для достижения того же уровня прогиба (0.55 от толщины) и импульс, воспринимаемый к этому моменту конструкцией, здесь меньше, чем для прерывистого характера изменения нагрузки.

НИИ автоматических систем Поступила 30 VIII 1977

Ե. Ա. ՎՈԼՄԻՐ

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԻՄՊՈՒԼՍՈՎ ԲԵՌՆԱՎՈՐՄԱՆ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ամփոփում

Դիտարկվում է փոքր թեքությամբ պլանում ուղղանկյունաձև կլոր գլանային պանելի վարքը այն ենթադրությամբ, որ նա ենթարկվում է ծնիչի երկայնքով դինամիկական սեղմման նյութի պլաստիկական հատկությունների հաշվառումով։ Որոշվում է իմպուլսի ձևի ազդեցությունը կառուցվածքի ուռուցիկացման ընթացքի վրա։

THE INVESTIGATION OF THE IMPULSE LOADING OF ELASTIC-PLASTIC CYLINDRICAL SHELLS

E. A. VOLMIR

Summary

The influence of the mode of impulse compression loading upon the behaviour of rectangular in plane circular cylindrical shallow panel is considered. The elastic-plastic deformations developed during the finite deflections of the panel are taken into account.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. М., «Наука», 1976.
2. *Вольмир А. С., Вольмир Е. А.* Упруго-пластическое поведение пластинок и пологих оболочек при импульсивном нагружении. Изв. АН Арм. ССР, сер. техн. н., 1975, т. XXIII, № 5.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXI, № 1, 1978 Механика

Г. А. БАБАДЖАНЯН

ТЕЧЕНИЕ РЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

В последние годы проявляется большой интерес к задачам о течения жидкостей (несжимаемой и сжимаемой) вблизи проницаемых поверхностей. Подобные задачи связаны с многочисленными явлениями в различных отраслях современной техники, промышленности и сельского хозяйства.

При решении вышеуказанных задач теоретически существуют три основных направления. Первое из них можно назвать гидравлическим, за основу исследования которого берутся идеи гидравлики. Одним из первых исследований в этом направлении явились известные работы Л. С. Лейбензона [1]. В дальнейшем появились работы других исследователей [2], [3].

Второе направление развивалось на основе полных уравнений Навье-Стокса [4], [5], [6]. В третьем — за основу исследований берутся уравнения пограничного слоя [7], [8].

Имеются, конечно, и многочисленные экспериментальные работы [9], [10].

Нужно отметить, что почти во всех перечисленных теоретических исследованиях применялись или приближенные методы интегрирования, или решения численным методом.

Ясно, что точность решенных задач строго зависела от выбора того или иного метода. В смысле точного интегрирования дифференциальных уравнений движения некоторое преимущество имеет первое направление, согласно которому падение напора по течению полностью расходуется на преодоление силы трения от вязкости жидкости. В работе [2] учтено изменение давления, соответствующее изменению скоростного напора. Но при движении капельной жидкости в длинных трубопроводах с доэвуковыми скоростями обычно оказывается возможным пренебречь этим изменением. Это обстоятельство еще более усиливается при малых дозвуковых скоростях. Уравнение движения в этом случае будет иметь следующий вид:

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\xi\rho u^2}{8\delta} \tag{0.1}$$

где p, u и ρ — средние по сечению трубы давление, скорость и плотность жидкости, ξ — коэффициент сопротивления трения, δ — гидравлический радиус трубы, x — направление потока. Второе уравнение получается, исходя из закона сохранения масс втекающей и вытекающей жидкости в рассматриваемом объеме. Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+D\rho(p-p_н)=0 \tag{0.2}$$

здесь D — постоянная, зависящая от геометрических характеристик трубы и от степени проницаемости стенки. Для плоской трубы

$$D = \frac{\alpha}{2h} \tag{0.3}$$

Для цилиндрической

$$D = \frac{2\alpha}{a} \tag{0.4}$$

$p_в$ — в уравнении (0.2) есть внешнее давление. В формулах (0.3), (0.4) α есть коэффициент, показывающий степень проницаемости стенки, которая вдоль канала принимается непрерывной и постоянной: $2h$ — ширина плоского канала, a — радиус трубы. В работе [2] вместо уравнения (0.2) берутся значения u' в виде Петрова Г. А. [11]. Если в формуле (0.2) $p - p_в > 0$, имеет место отсос жидкости, в случае $p - p_в < 0$ — вдувание. Из (0.2) видно, что скорость отсоса (вдува) через проницаемые стенки равна $\alpha(p - p_в)$.

1. Предположим, что режим движения жидкости ламинарный, а труба плоская, тогда коэффициент сопротивления трения ξ будет иметь следующее значение:

$$\xi = \frac{12\nu}{hu} \tag{1.1}$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости. Подставляя значение (1.1) в (0.1) и учитывая, что для плоской трубы $\lambda = \frac{h}{2}$, получим

$$-\frac{dp}{dx} = bu \tag{1.2}$$

где $b = \frac{3\mu}{h^2}$.

Исключая из уравнений (0.2) и (1.2) переменное $p(x)$ и принимая $\rho = \text{const}$ (жидкость несжимаемая), получим

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\alpha b}{2h}u = 0 \tag{1.3}$$

Решением уравнения (1.3) будет

$$u(x) = c_1 e^{\sqrt{\frac{\alpha b}{2h}}x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{\alpha b}{2h}}x} \tag{1.4}$$

Для определения постоянных интегрирования c_1 и c_2 зададимся следующими граничными условиями:

при $x = 0$ $\qquad u = u_н = \frac{Q_н}{2h}$

и $p = p_{н}$ или

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} = -\frac{\alpha(p - p_{в})}{2h} \tag{1.5}$$

где $u_{н}$ и $p_{н}$ — скорость и давление в начальном сечении трубы, $Q_{н}$ — начальный расход жидкости.

Из (1.5) для c_1 и c_2 получим

$$c_1 = \frac{u_{н}}{2} - \frac{p_{н} - p_{в}}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{2hb}}; \quad c_2 = \frac{u_{н}}{2} + \frac{p_{н} - p_{в}}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{2hb}}$$

Подставляя значения c_1 и c_2 в выражение $u(x)$ и производя некоторые математические преобразования, получим закон изменения скорости в следующем виде:

$$u(x) = u_{н}\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{\alpha b}{2h}}\,x - (p_{н} - p_{в})\sqrt{\frac{\alpha}{2hb}}\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{\alpha b}{2h}}\,x \tag{1.6}$$

Из (0.2) получим закон изменения давления

$$p(x) = p_{в} + (p_{н} - p_{в})\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{\alpha b}{2h}}\,x - u_{н}\sqrt{\frac{2bh}{\alpha}}\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{\alpha b}{2h}}\,x \tag{1.7}$$

Предельная длина участка отсоса или вдувания определяется из (1.7), если принять $p(x) = p_{в}$

$$L_{пред} = \sqrt{\frac{2h}{\alpha b}}\,\mathrm{arcth}\,\frac{p_{н} - p_{в}}{u_{н}}\sqrt{\frac{\alpha}{2bh}} \tag{1.8}$$

Продольный расход изменяется по следующему закону:

$$G_{пр} = \rho s u = 2hu\rho L_1 \tag{1.9}$$

Расход жидкости через стенку канала определяется по формуле

$$G_{ст} = \alpha(p - p_{в})\rho L_1 \cdot 1 \tag{1.10}$$

Здесь L_1 — ширина канала в поперечном направлении.

Если плоская труба заканчивается закрытым концом, то есть граничные условия имеют вид

$$\begin{array}{ll} \text{при } x = 0 & u = u_{н} \\ \text{при } x = L & u = 0 \end{array} \tag{1.11}$$

то для постоянных интегрирования c_1 и c_2 получим

$$c_1 = -\frac{u_{н}\exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha b}{2h}}\,L\right)}{2\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{\alpha b}{2h}}\,L}, \qquad c_2 = \frac{u_{н}\exp\left(\sqrt{\frac{\alpha b}{2h}}\,L\right)}{2\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{\alpha b}{2h}}\,L}$$

В этом случае законы изменения скорости и давления будут

$$u(x) = \frac{u_н}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{\alpha b}{2h}} L} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\alpha b}{2h}} (L - x) \tag{1.12}$$

$$p(x) = p_в + \sqrt{\frac{2hb}{\alpha}} \frac{u_н}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{\alpha b}{2h}} L} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\alpha b}{2h}} (L - x) \tag{1.13}$$

Продольный и поперечный расходы будут определяться по формулам (1.9) и (1.10) соответственно.

В случае цилиндрической трубы вместо уравнения (1.3) получим

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{2\alpha b_1}{a} u = 0 \tag{1.14}$$

где $b_1 = \frac{32\mu}{d^2}$.

Если учесть граничные условия (1.5), значения скорости и давления в этом случае будут

$$u(x) = u_н \operatorname{ch} \sqrt{\frac{2\alpha b_1}{a}} - \sqrt{\frac{2\alpha}{ab_1}} (p_н - p_в) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{2\alpha b_1}{a}} x \tag{1.15}$$

$$p(x) = p_в + (p_н - p_в) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{2\alpha b_1}{a}} x - u_н \sqrt{\frac{ab_1}{2\alpha}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{2\alpha b_1}{a}} x \tag{1.16}$$

Предельная длина отсоса (вдува) будет

$$L = \sqrt{\frac{a}{2\alpha b_1}} \operatorname{arc\,th} \frac{p_н - p_в}{u_н} \sqrt{\frac{2\alpha}{ab_1}} \tag{1.17}$$

Продольный расход жидкости определится по формуле

$$G_{пр} = \pi a^2 \rho u(x) \tag{1.18}$$

Расход жидкости через стенки будет

$$G_{ст} = 2\pi a \rho \alpha (p - p_в) \tag{1.19}$$

В случае закрытого конечного конца, то есть при граничных условиях (1.11) для значений скорости и давления получим

$$u(x) = \frac{u_н \operatorname{sh} \sqrt{\frac{2\alpha b_1}{a}} (L - x)}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{2\alpha b_1}{a}} L} \tag{1.20}$$

$$p(x) = p_н + u_н \sqrt{\frac{\alpha b_1}{2a}} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{2\alpha b_1}{a}} (L - x)}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{2\alpha b_1}{a}} L} \tag{1.21}$$

Продольный и поперечный расходы определяются соответственно по формулам (1.18) и (1.19).

2. В случае турбулентного режима движения значение коэффициента сопротивления можно принять постоянным и зависящим только от гидравлического радиуса трубы. Если жидкость движется в плоской трубе, то из уравнений (0.1) и (0.2) получим

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = A u^2 \tag{2.1}$$

где

$$A = \frac{\lambda \rho a}{8h^2}$$

Обозначая $u'(x) = z(x)$, из (2.1) будем иметь

$$z = -\sqrt{\frac{2}{3} A u^3 + c} = \frac{du}{dx} \tag{2.2}$$

Перед корнем берем знак минус, так как $\frac{du}{dx} < 0$. Если граничные условия возьмем в виде (1.5), то для c получим значение

$$c = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 (p_в - p_н)^2}{4h^2} - \frac{A u_н^3}{3} \tag{2.3}$$

Из (2.2) получим

$$-\int \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{3} A u^3 + c}} = x + c_1 \tag{2.4}$$

На основании граничных условий (1.5) получим

$$x = \int_u^{u_н} \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{3} A u^3 + c}} \tag{2.5}$$

Из формулы (2.5) следует, что функция $u(x)$ выражается через эллиптическую функцию Вейерштрасса $\wp(x)$.

Для нахождения инвариант функции Вейерштрасса g_2, g_3 преобразуем (2.5). Обозначая $c = -\frac{Au_{\text{н}}}{6}$ и производя общеизвестные математические операции, получим окончательно

$$u(x) = \wp\left(x\sqrt{\frac{A}{6}} + c_1\right) \tag{2.6}$$

где

$$c_1 = \int_{u_{\text{н}}}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_3}} \tag{2.7}$$

Имея значения $u_{\text{н}}$, по таблице можем вычислить c_1.

В нашем случае первый инвариант g_2 равен нулю, а из теории эллиптических функций известно, что в этом случае имеет место следующее соотношение:

$$\wp(t;\ 0;\ g_3) = \sqrt[3]{g_3}\,\wp(\sqrt[6]{g_3}\,t;\ 0;\ 1) \tag{2.8}$$

Для функции $\wp(t;\ 0;\ 1)$ составлены таблицы, из которых можно вычислить значение самой функции и значение ее первой производной.

Давление жидкости в трубе в этом случае определится из выражения

$$p(x) = p_{\text{н}} - \frac{2h}{a}\sqrt{\frac{A}{6}}\,\wp'\left(\sqrt{\frac{A}{6}}x + c\right) \tag{2.9}$$

Максимальная длина участка отсоса (вдува) определится из выражения

$$\wp'\left(\sqrt{\frac{A}{6}}L + c_1\right) = 0 \tag{2.10}$$

Продольный и поперечный расходы жидкости определятся согласно формулам (1.9) и (1.10).

В случае цилиндрической трубы коэффициент A в уравнении (2.1) будет иметь значение

$$A = \frac{8\nu}{2a^2}$$

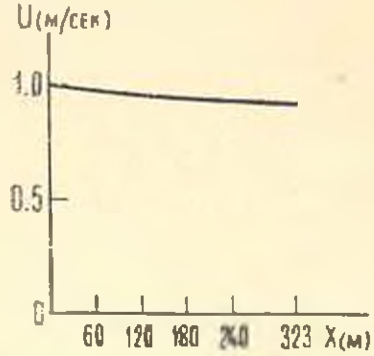
Примеры расчета

В случае ламинарного движения жидкости в цилиндрической трубе возьмем следующие данные:

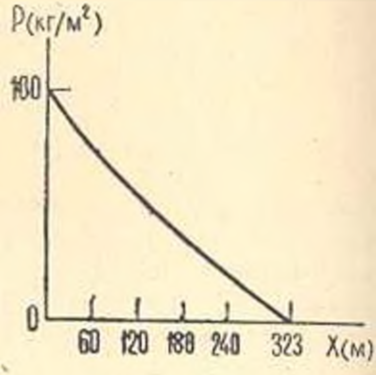
$$u_{\text{н}} = 5\cdot 10^{-2}\ м/сек, \qquad a = 2\cdot 10^{-2}\ м, \quad \nu = 10^{-3}\ \frac{м^2}{кГсек}$$

$$p_н = 10^2 \frac{кГ}{м^2}, \quad p_в = 0, \quad \mu = 10^{-4} \frac{кГсек}{м^2}, \quad \rho = 102 \frac{кГсек^2}{м^4}.$$

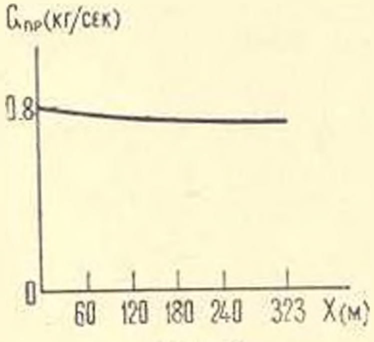
Законы изменения скорости, давления, продольного и поперечного расхода, вычисленные по формулам (1.15), (1.16), (1.18), (1.19), представлены на фиг. 1, 2, 3, 4. Предельная длина отсоса пористой трубы, вычисленная по формуле (1.17), будет $L = 323.5$ *м*. В случае турбулентного дви-



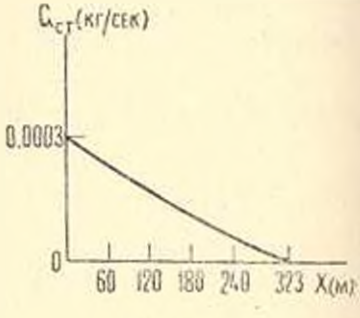
Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

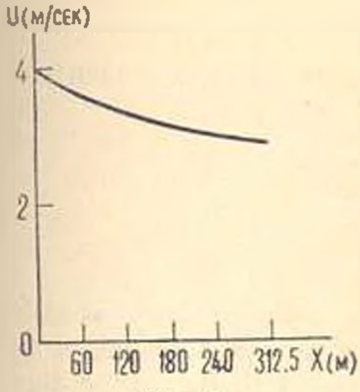
жения жидкости в цилиндрической трубе конкретный численный пример подсчитан для следующих данных:

$$v_н = 4 \frac{м}{сек}, \quad a = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad \alpha = 10^{-8} \frac{м^3}{кГсек}, \quad p_в = 0,$$

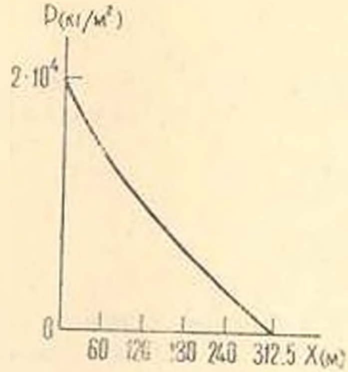
$$p_н = 2 \cdot 10^4 \frac{кГ}{м^2}, \quad \xi = 0.012, \quad \rho = 102 \frac{кГсек^2}{м^4}$$

Законы изменения скорости, давления, продольного и поперечного расхода жидкости, вычисленные по формулам (2.6), (2.9), (1.18) и (1.19), представлены на фиг. 5, 6, 7, 8.

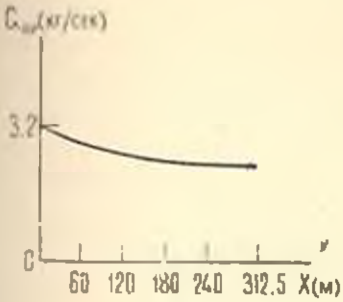
Предельная длина отсоса пористой трубы, вычисленная по формуле (2.10), в этом случае будет $L = 1000$ м.



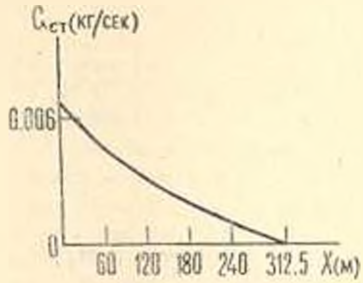
Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Из сопоставления полученных кривых 5, 6, 7, 8 с аналогичными кривыми в работе [2] видно, что между ними имеются качественные совпадения.

Ереванский государственный
университет

Поступила 2 XII 1976

Գ. Հ. ԲԱԲԱՋԱՆՅԱՆ

ԻՐԱԿԱՆ ԱՆՍԵՂՄԵԼԻ ՀԵՂՈՒԿԻ ՀՈՍԱՆՔԸ ԹԱՓԱՆՑԵԼԻ ՊԱՏԵՐՈՎ ԽՈՂՈՎԱԿՆԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Հոդվածում քննարկվում է հարթ և գլանային ծակոտկեն պատերով խողովակներում հեղուկի միաչափ ստացիոնար, իզոթերմ շարժումը։ Դիտարկվում են հեղուկի շարժման լամինար և տուրբուլենտ ռեժիմները։ Ստացված են շարժման արագության, ճնշման, երկայնական և լայնական ուժերի փո-

փոփոխման օրենքները։ Հաշված են թվային օրինակներ և կառուցված են գրաֆիկներ որոնելի ֆունկցիաների փոփոխման օրինաչափությունների նկարագրման վերաբերյալ։

THE FLOW OF A REAL NONCOMPRESSIBLE LIQUID IN PERMEABLE WALLED TUBES

G. A. BABAJANIAN

S u m m a r y

One-dimensional isotropic flow of ja real liquid in flat and cylindrical permeable tubes is considered. The laws for variation in the rate and the pressure of longitudinal and transverse discharge of liquid for laminar and turbulent conditions of flow are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лейбензон Л. С.* О движении нефтей и газов по каналам с проницаемыми стенками. Собрание трудов, т. II, М., 1953.
2. *Кузнецкий Р. С.* О распределении скорости и давления жидкости вдоль трубы с отверстием. Инж.-физич. ж., 1971, т. 20, № 1.
3. *Хублорян М. Г.* О совместном решении задачи о притоке к дрене и течении жидкости внутри нее. ВНИИГ и М, вып. 2, М., 1974.
4. *Леонов А. И.* О медленном течении вязкой жидкости в трубе с пористыми стенками. Изв. АН СССР, ОТН, Механика-машиностроение, 1963, № 2.
5. *Квейл Ж. П. и Леви Е. К.* Ламинарное течение в трубе с оттеком через пористую стенку. Тр. американского общества инженеров-механиков, теплоотдача, 1975, № 1.
6. *Бабаджанян Г. А.* Течение вязкой жидкости в трубе с пористыми стенками. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 1965, т. XVIII, № 4.
7. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М., ИЛ, 1956, с. 241.
8. *Ян Жи У.* Влияние постоянной скорости отсоса на пленочную конденсацию при ламинарном течении конденсата на пористой вертикальной стенке. Тр. американского общества инженеров-механиков. Теплопередача, № 2, 1970.
9. *Кочеков И. С. и Баранова Л. И.* Течение в каналах с проницаемыми стенками. Тепло-массоперенос, т. 1, Минск, 1965.
10. *Романенко П. Н. и Верзин И. С.* Влияние поперечного потока массы на теплообмен и динамику потока при турбулентном течении нагретого воздуха в осесимметричном диффузоре с проницаемой стенкой. Инж.-физ. журнал, 1973, т. XXV, № 2.
11. *Петров Г. А.* Движение жидкости с изменением расхода вдоль пути. М.—Л., Гос. изд. строит. литер, 1951.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXI, № 1, 1978 Механика

Н. Н. КУДИШ

УПРУГО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЯЖЕЛО НАГРУЖЕННОГО КОНТАКТА КАЧЕНИЯ

В работе исследуется плоская изотермическая упруго-гидродинамическая задача для тяжело нагруженного контакта качения двух бесконечно длинных цилиндров, разделенных тонким слоем вязкой жидкости. Смазка считается несжимаемой ньютоновской жидкостью.

Минимальная толщина слоя смазки является одной из наиболее важных характеристик упруго-гидродинамического контакта. Определению толщины слоя смазки посвящено большое количество работ, из которых первыми являются работы [1, 2, 3].

В тяжело нагруженном контакте толщина слоя смазки мала, а область контакта близка к герценской. Поэтому почти по всей области контакта, за исключением малых зон входа и выхода из нее, основной вклад в решение вносит упругое взаимодействие цилиндров; при этом давление в указанной области весьма близко к герцевскому. Это означает, что в рассматриваемой области смазочный слой практически не оказывает влияния на величину и характер распределения давления. В зонах же входа и выхода вклад смазочного слоя соизмерим с вкладом сил упругости, поэтому пренебрегать первым из них уже нельзя. При дальнейшем удалении от герцевской зоны основной вклад в решение начинает вносить смазочный слой. Как будет показано ниже, толщина слоя, в основном, определяется поведением решения в зонах входа и выхода, существенно меньших герцевской площадки контакта. Поэтому очень важно детально изучить поведение смазки именно в этих малых зонах. Однако, обычно применяемые методы решения поставленной задачи как, например, метод сквозных численных расчетов, обходят этот вопрос и лишь весьма приближенно выявляют механизм образования масляной пленки.

Наиболее эффективным методом решения поставленной задачи является метод сращиваемых асимптотических разложений [4, 5], позволяющий подробно исследовать поведения смазки в каждой из перечисленных зон и их влияние на толщину слоя смазки. Этот метод использован при решении данной задачи. Получена система асимптотически справедливых уравнений, разрешенных численно. Для толщины слоя смазки найдены асимптотические оценки.

1. Как известно [1, 2], поставленная задача сводится к системе уравнений

$$\frac{dp}{dx} = 12u\mu\frac{h-h_l}{h^3}, \qquad h = h_l + \frac{x^2-x_l^2}{R} + \frac{4}{\pi E'}\int\limits_{x_i}^{x_l} p(t)\ln\frac{x_l-t}{|x-t|}\,dt \tag{1.1}$$

$$\mu = \mu_0 e^{\alpha p^m}, \quad m>0$$

$$p(x_i) = p(x_l) = 0, \quad \int\limits_{x_i}^{x_l} p(x)\,dx = F \tag{1.2}$$

При этом x — пространственная переменная, отсчитываемая поперек полоски контакта в направлении движения смазки; x_i, x_l — координаты точек входа и выхода из области контакта; $p(x)$ и $h(x)$ — распределения давления и зазора между цилиндрами; $\mu(x)$ — динамическая вязкость смазки; μ_0 — вязкость смазки при атмосферном давлении и температуре контакта; α — пьезокоэффициент вязкости; m — показатель степени; $u = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ — полусумма линейных скоростей поверхностей цилиндров; h_l — толщина слоя смазки в точке выхода из области контакта; $R = \frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$ — приведенный радиус цилиндров; E' — приведенный модуль упругости материалов цилиндров $\frac{1}{E'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)$; F — погонная нагрузка.

2. С помощью безразмерных величин

$$x' = x/b_H, \quad p' = p/p_H, \quad h' = h/h_l, \quad \mu' = \mu/\mu_0, \quad a = x_i/b_H, \quad c = x_l/b_H$$

преобразуем уравнения (1.1) и (1.2) к виду (штрихи опущены)

$$\frac{dp}{dx} = \frac{V}{H_0^2}\frac{h-1}{h^3}e^{Qp^m}, \quad m>0 \tag{2.1}$$

$$H_0(h-1) = x^2 - c^2 + \frac{2}{\pi}\int\limits_a^c p(t)\ln\frac{c-t}{|x-t|}\,dt \tag{2.2}$$

$$p(a) = p(c) = 0 \tag{2.3}$$

$$\int\limits_a^c p(t)\,dt = \frac{\pi}{2} \tag{2.4}$$

Здесь b_H и p_H, соответственно, полуширина герцевской площадки контакта и максимальное герцевское давление

$$Q = \alpha p_H^m, \quad V = \frac{v}{Q^{1/m}}, \quad v = \frac{3u\mu_0 E'^{2}\alpha^{1/m}}{2R}, \quad H_0 = \frac{h_l R}{b_H^2} \tag{2.5}$$

Задача состоит в отыскании величин c, H_0, $p(x)$ и $h(x)$.

Условимся называть контакт тяжело нагруженным, когда

$$Q \gg 1$$

Применение метода сращиваемых асимптотических разложений к задаче (2.1)—(2.4) при $Q \gg 1$ осложняется ее нелокальным характером, что проявляется во взаимном влиянии решений в зонах входа и выхода в приближениях одного порядка.

Согласно терминологии [4] под внешней областью будем понимать зону, для которой $x \pm 1 = O(1)$, а под внутренними областями — зоны входа и выхода, характерными размерами которых являются величины $\varepsilon_r = \varepsilon_r(V, Q, m)$ — для зоны входа и $\varepsilon_l = \varepsilon_l(V, Q, m)$ — для зоны выхода. При этом $x + 1 = O(\varepsilon_r)$, $x - 1 = O(\varepsilon_l)$ и $O(\varepsilon_r, \varepsilon_l) \ll 1$ при $Q \gg 1$.

Введем внутренние переменные следующим образом:

$$r = \frac{x+1}{\varepsilon_r}, \qquad s = \frac{x-1}{\varepsilon_l}$$

Предположим, что координата a точки входа представима в виде

$$a = -1 + \alpha_1 \varepsilon_r, \quad \alpha_1 \sim 1 \tag{2.6}$$

тогда во внешней области ($x \pm 1 = O(1)$ и $p = O(1)$ при $Q \gg 1$) при ограниченной величине H_0 получим из уравнения (2.1) с экспоненциальной точностью

$$h - 1 = 0 \tag{2.7}$$

Перейдем в (2.2), (2.6) и (2.7) к пределу $Q \to \infty$; учитывая, что $c - 1 \to 0$ при $Q \to \infty$, получим

$$x^2 - 1 + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} p(t) \ln \frac{1-t}{|x-t|}\, dt = 0 \tag{2.8}$$

решением которого является герцевское давление

$$p_0(x) = \sqrt{1-x^2}\,\theta(1-x^2) \tag{2.9}$$

Так как внутренние асимптотические представления решения должны сращиваться с $p_0(x)$, порядки главных членов этих представлений равны $\varepsilon_r^{1/2}$ — в зоне входа и $\varepsilon_l^{1/2}$ — в зоне выхода.

3. Рассмотрим случай масляного голодания, когда

$$\varepsilon_r \ll Q^{-2/m} \tag{3.1}$$

Зная порядки решения в зонах входа и выхода, на основании (2.9) будем искать решение в виде асимптотических рядов:

в зоне входа

$$p(x) = \varepsilon_r^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}\nu_{rk}(V, Q, m)\,p_{rk}(r), \quad p_{rk}(r) = O(1), \quad \nu_{r0} = 1 \tag{3.2}$$

и в зоне выхода

$$p(x) = \varepsilon_l^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}\nu_{lk}(V, Q, m)\,p_{lk}(s), \quad p_{lk}(s) = O(1), \quad \nu_{l0} = 1 \tag{3.3}$$

В герцевской зоне ($x \pm 1 = O(1)$) будем иметь

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu_k(V, Q, m)\,p_k(x), \quad p_k(x) = O(1), \quad \mu_0 = 1 \tag{3.4}$$

Величины c и H_0 будем искать в виде

$$\begin{gathered} c = 1 - \varepsilon_l\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k(V, Q, m)\,\beta_k, \quad \beta_k = O(1), \quad \delta_1 \ll 1 \\ H_0 = H_{00}(V, Q, m)\sum_{k=0}^{\infty}\tau_k(V, Q, m)\,\gamma_k, \quad \gamma_k = O(1), \quad \tau_0 = \gamma_0 = 1 \end{gathered} \tag{3.5}$$

При этом $\{\mu_k\}$, $\{\nu_{rk}\}$, $\{\nu_{lk}\}$, $\{\delta_k\}$ и $\{\tau_k\}$ представляют собою асимптотические последовательности функций большого параметра Q.

Ограничимся в дальнейшем исследованием почти всюду главных членов асимптотических представлений (3.2)—(3.5).

Перейдем к решению задачи (2.1)—(2.4) при заданных a, V и $Q \gg 1$. Заменив интеграл, входящий в (2.2), суммой интегралов по зонам входа, выхода и герцевской зоне, с помощью (2.2), (3.2)—(3.5) получим равномерно-пригодное асимптотическое представление для $h(x)$

$$\begin{aligned} H_0(h-1) = {} & H_0(h_H(x) - h_H(c)) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k\int_{-1}^{1}p_k(t)\ln\left|\frac{c-t}{x-t}\right|dt + \\ & + \frac{2}{\pi}\varepsilon_r^{3/2}\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg\{\nu_{rk}\int_{a_1}^{\infty}p_{rk}(r)\ln\left|\frac{c+1-r\varepsilon_r}{x+1-r\varepsilon_r}\right|dr - \mu_k\varepsilon_r^{-1/2}\int_{0}^{\infty}p_k(-1+r\varepsilon_r)\,\times \\ & \times\ln\left|\frac{c+1-r\varepsilon_r}{x+1-r\varepsilon_r}\right|dr\Bigg\} + \frac{2}{\pi}\varepsilon_l^{3/2}\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg\{\nu_{lk}\int_{-\infty}^{\frac{c-1}{\varepsilon_l}}p_{lk}(s)\ln\left|\frac{c-1-s\varepsilon_l}{x-1-s\varepsilon_l}\right|ds - \\ & - \mu_k\varepsilon_l^{-1/2}\int_{-\infty}^{0}p_k(1+s\varepsilon_l)\ln\left|\frac{c-1-s\varepsilon_l}{x-1-s\varepsilon_l}\right|ds\Bigg\} \end{aligned} \tag{3.6}$$

где

$$H_0(h_H(x)-1)=[\,|x|\sqrt{x^2-1}-\ln(|x|+\sqrt{x^2-1})\,]\,\theta(x^2-1) \tag{3.7}$$

при этом $\theta(x)$ — функция Хэвисайда.

Пользуясь соотношениями (3.1)—(3.5), а также формальными разложениями в ряды Тейлора, представим (2.3) и (2.4) в виде

$$p_{rk}(\alpha_1)=0, \quad (k=0, 1,\ldots)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\nu_{ln}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\,p_{ln}^{(m)}(0)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k\beta_k\right)^m=0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\int_{-1}^{1}p_k(t)\,dt+\varepsilon_r^{3/2}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\nu_{rk}\int_{\alpha_1}^{\infty}p_{rk}(r)\,dr-\mu_k\,\varepsilon_r^{-1/2}\int_{0}^{\infty}p_k(-1+r\varepsilon_r)\,dr\right\}+$$

$$+\varepsilon_l^{3/2}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\nu_{lk}\left[\int_{-\infty}^{0}p_{lk}(s)\,ds+\sum_{i=0}^{\infty}\delta_{i+1}\int_{0}^{-\beta_{i+1}}p_{lk}\left(\delta_{i+1}s-\sum_{j=1}^{i}\delta_j\beta_j\right)ds\right]-\right.$$

$$\left.-\mu_k\,\varepsilon_l^{-1/2}\int_{-\infty}^{0}p_k(1+s\varepsilon_l)\,ds\right\}=0 \tag{3.8}$$

где

$$p_{lk}\left(\delta_{i+1}s-\sum_{j=1}^{i}\delta_j\beta_j\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\,p_{lk}^{(m)}(0)\left[\delta_{i+1}s-\sum_{j=1}^{i}\delta_j\beta_j\right]^m \tag{3.9}$$

Из сравнения порядка членов в уравнении (2.1) в зонах входа и выхода, используя соотношения (3.2)—(3.9), получим асимптотические оценки

$$O(\varepsilon_r)=O(\varepsilon_l)=\varepsilon,\quad H_{00}=A\,(V\varepsilon^2)^{1/3},\quad A=A(\alpha_1, m)=O(1)\ \text{при}\ Q\gg 1 \tag{3.10}$$

а также систему уравнений для определения $p_{r0}(r)$, $p_{l0}(s)$, A и β_1

$$\frac{dp_{r0}}{dr}=A^{-3}\left\{-\frac{4\sqrt{2}}{3}\,r\sqrt{-r}\,\theta(-r)+\frac{2}{\pi}\left[\int_{0}^{\infty}(p_{l0}(t)-\sqrt{2t})\ln t\,dt-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_{\alpha_1}^{\infty}(p_{r0}(t)-\theta(t)\sqrt{2t})\ln|r-t|\,dt\right]\right\}e^{\gamma p_{r0}},\qquad r>\alpha_1\quad(\alpha_1<0)$$

$$p_{r0}(\alpha_1)=0,\qquad\int_{\alpha_1}^{\infty}[p_{r0}(t)-\theta(t)\sqrt{2t}]\,dt=\frac{\pi}{3}\,\beta_1$$

$$\frac{dp_{l0}}{dr} = -\frac{2}{\pi} A^{-3} \int\limits_0^\infty [p_{l0}(t) - \sqrt{2t}] \ln \frac{t}{|r-t|}\, dt\, e^{\gamma p_{l0}}, \quad r > 0 \quad (3.11)$$

$$p_{l0}(0) = 0, \quad \int\limits_0^\infty [p_{l0}(t) - \sqrt{2t}]\, dt = \frac{\pi}{3} \beta_1, \quad \beta_1 < 0$$

$$\gamma = \begin{cases} 0 & \text{при } \varepsilon \ll Q^{-2/m} \\ 1 & \text{при } \varepsilon = Q^{-2/m} \end{cases}$$

где произведена замена переменной s на $r = -s$.

Интегральные условия в (3.11) получены из рассмотрения (2.1), (3.6)—(3.10) в зоне входа и герцевской зоне с учетом сращивания $p_{r0}(r)$ и $p_{l0}(r)$ с $\sqrt{2r}$ при $r \to \infty$ [4, 5]. Кроме того, получено [6]

$$\mu_1 = \varepsilon^{3/2}, \quad \delta_1 = \varepsilon^{1/2}, \quad p_1(x) = -\frac{2}{3} \beta_1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \beta_1 \leqslant 0 \quad (3.12)$$

При выводе системы (3.11) предполагалось, что $\varepsilon^{3/2} \ll H_0$, что имеет место в силу (3.1) и (3.10).

Таким образом, получена система двух нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (3.11) относительно главных членов асимптотик давления $p_{r0}(r)$ в зоне входа и $p_{l0}(r)$ в зоне выхода, а также величин A и β_1 при заданных α_1, m и γ. Решив систему (3.11) и задавшись, кроме того, определенным ε, удовлетворяющим (3.1), из (2.5) и (3.10) получим формулу для толщины слоя смазки

$$h_t = A(\alpha_1, m)(V\varepsilon^2)^{1/3} \frac{b_H^2}{R} \quad (3.13)$$

Исследуем систему (3.11). Если при $\gamma = 0$ известно решение A°, β_1°, $p_{r0}^\circ(r)$ и $p_{l0}^\circ(r)$ для $\alpha_1 = -1$, то для любого α_1 ($\alpha_1 < 0$) решение (3.11) имеет вид

$$A = A^\circ |\alpha_1|^{2/3}, \quad \beta_1 = \beta_1^\circ |\alpha_1|^{3/2}, \quad p_{r0}(r) = |\alpha_1|^{1/2} p_{r0}^\circ\left(\frac{r}{|\alpha_1|}\right)$$
$$p_{l0}(r) = |\alpha_1|^{1/2} p_{l0}^\circ\left(\frac{r}{|\alpha_1|}\right) \quad (3.14)$$

Очевидно, что при $\gamma = 1$ для главных членов решения системы (3.11) при $|\alpha_1| \ll 1$ ($\alpha_1 < 0$) также справедливы соотношения (3.14).

В работе [7] показано, что в случае ньютоновской жидкости Ри-Эйринга при $Q \gg 1$ и $u_1 = u_2$ при использовании метода сращиваемых асимптотических разложений задача также сводится к системе (3.11).

Изложенный метод решения может быть распространен на задачи с различными зависимостями вязкости масла от давления.

4. Рассмотрим случаи недостаточной и обильной смазки. Недостаточной смазкой будем называть режимы, для которых выполняются соотношения

$$\varepsilon_r \gg Q^{-2/m}, \qquad \varepsilon_r^{3/2} \ll H_0 \tag{4.1}$$

а при обильной смазке

$$\varepsilon_r \gg Q^{-2/m}, \qquad \varepsilon_r^{3/2} \sim H_0 \tag{4.2}$$

Полагая в (3.11) $a_1 = \alpha_1 \varepsilon_r Q^{2/m}$ и учитывая соотношения $p_{r0}(r) = O(1)$ и $p_{l0}(r) = O(1)$, из сравнения порядка членов в уравнении для $p_{r0}(r)$ системы (3.11) при $r = O(a_1)$ получим

$$A \sim (\varepsilon_r Q^{2/m})^{5/6} \tag{4.3}$$

а из интегрального условия будем иметь

$$\beta_1 \sim \varepsilon_r Q^{2/m} \tag{4.4}$$

Положив $\varepsilon = Q^{-2/m}$ в формуле (3.10) для H_0, с помощью (3.5), (3.12), (4.3) и (4.4) получим

$$H_0 \sim \varepsilon_r^{5/6} (VQ^{1/m})^{1/3}, \qquad c - 1 \sim \varepsilon_r Q^{-1/m} \tag{4.5}$$

Последние соотношения справедливы как для режимов недостаточной смазки, так и для режимов обильной смазки.

В случае обильной смазки будем иметь

$$\varepsilon_r \sim (VQ^{1/m})^{1/2}, \qquad H_0 \sim (VQ^{1/m})^{3/4}, \qquad c - 1 \sim (VQ^{-1/m})^{1/2} \tag{4.6}$$

Асимптотика H_0 в (4.6) несколько отличается от величины H_0, полученной в [3] иным путем.

Оценки H_0, аналогичные (3.10), (4.5) и (4.6), могут быть получены и в случае пространственной изотермической упруго-гидродинамической задачи для ньютоновской смазки.

5. В силу сращивания функций $p_{r0}(r)$ и $p_{l0}(r)$ при $r \to \infty$ с герцевским давлением $\theta(r)\sqrt{2r}$ из (3.11) получим

$$\lim_{r \to \infty} \int_{a_1}^{\infty} [p_{r0}(t) - \theta(t)\sqrt{2t}] \ln|r - t| \, dt =$$
$$= \lim_{r \to \infty} \int_{0}^{\infty} [p_{r0}(t) - \sqrt{2t}] \ln|r - t| \, dt = \int_{0}^{\infty} [p_{r0}(t) - \sqrt{2t}] \ln t \, dt \tag{5.1}$$

Продифференцируем уравнения (3.11) по r и добавим граничные условия $p_{r0}(r)$, $p_{l0}(r) - \theta(r)\sqrt{2r}$ при $r \to \infty$. Будем иметь

$$\frac{A^2}{2}\frac{d}{dr}\left(e^{-\eta p_{r0}^m}\frac{dp_{r0}}{dr}\right) = -\sqrt{-2r}\,\theta(-r) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\alpha_1}^{\infty}\frac{p_{r0}(t)-\theta(t)\sqrt{2t}}{t-r}\,dt$$

$$p_{r0}(\alpha_1) = 0, \qquad p_{r0}(r) \underset{r\to\infty}{\to} \sqrt{2r}$$

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\infty}[p_{r0}(t)-\theta(t)\sqrt{2t}]\,dt = \frac{\pi}{3}\beta_1$$

$$\frac{A^2}{2}\frac{d}{dr}\left(e^{-\eta p_{l0}^m}\frac{dp_{l0}}{dr}\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{p_{l0}(t)-\sqrt{2t}}{t-r}\,dt \tag{5.2}$$

$$p_{l0}(0) = 0, \qquad p_{l0}(r) \underset{r\to\infty}{\to} \sqrt{2r}$$

$$\int\limits_{0}^{\infty}[p_{l0}(t)-\sqrt{2t}]\,dt = \frac{\pi}{3}\beta_1$$

$$\beta_1 \leqslant 0, \qquad \eta = \begin{cases} 1, & \varepsilon = Q^{-2/m} \\ 0, & \varepsilon \ll Q^{-2/m} \end{cases}$$

Системы (3.11) и (5.2) эквивалентны при условии существования и единственности решения системы (3.11) и единственности решения системы (5.2).

Уравнения (5.2) имеют более простой вид по сравнению с (3.11) и более удобны для численного решения. При численной реализации (5.2) решение регуляризуется членами типа вторых производных от искомых функций [8].

Численное решение (5.2) производилось методом итераций. Полубесконечные отрезки интегрирования $[\alpha_1, \infty]$ и $[0, \infty]$ заменялись конечными отрезками $[\alpha_1, r_{\inf}]$ и $[0, r_{\inf}]$, которые разбивались узлами r_j, $j = 0, \ldots, N-1$, причем $r_0 = 0$ и $r_{N-1} = r_{\inf}$. Для одновременного определения величин $p_{r0}(r)$ и A, а также величин $p_{l0}(r)$ и β_1, организуем итерационный процесс следующим образом:

$$\frac{A_k^2}{2}\frac{d}{dr}\left\{\exp[-\eta(p_{r0}^k)^m]\frac{dp_{r0}^{k+1}}{dr}\right\} +$$

$$+ \frac{3}{2}A_k^2(A_{k+1}-A_k)\frac{d}{dr}\left\{\exp[-\eta(p_{r0}^k)^m]\frac{dp_{r0}^k}{dr}\right\} =$$

$$= -\sqrt{-2r}\,\theta(-r) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\alpha_1}^{r_{\inf}}\frac{p_{r0}^{k+1}(t)-\theta(t)\sqrt{2t}}{t-r}\,dt$$

$$p_{r0}^{k+1}(a_1) = 0, \quad p_{r0}^{k+1}(r_{\text{inl}}) = \sqrt{2r_{\text{inl}}}$$

$$\int_{a_1}^{\infty} [p_{r0}^{k+1}(t) - \theta(t)\sqrt{2t}]\,dt = \frac{\pi}{3}\beta_1^k \tag{5.3}$$

$$\frac{1}{2}A_{k+1}^3 \frac{d}{dr}\left\{\exp[-\gamma_i (p_{I0}^k)^m]\frac{dp_{I0}^{k+1}}{dr}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{r_{\text{inl}}} \frac{p_{I0}^{k+1}(t) - \sqrt{2t}}{t - r}\,dt$$

$$p_{I0}^{k+1}(0) = 0, \quad p_{I0}^{k+1}(r_{\text{inl}}) = \sqrt{2r_{\text{inl}}}$$

$$\int_0^{\infty} [p_{I0}^{k+1}(t) - \sqrt{2t}]\,dt = \frac{\pi}{3}\beta_1^{k+1}$$

где индекс k означает номер итерации.

Заменив интегралы, входящие в (5.3), суммами с помощью квадратурных формул [9], а производные — конечно-разностными отношениями, получим две системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=0}^{N-1} a_{ij}^k p_{r0}^{k+1}(r_j) + a_{iN}^k (A_{k+1} - A_k) = f_i^k, \quad i = 0,\dots, N \tag{5.4}$$

$$\sum_{j=i_0}^{N-1} b_{ij}^k p_{I0}^{k+1}(r_j) = g_i^k, \quad i = i_0,\dots, N-1 \tag{5.5}$$

где

$$a_{0j} = \begin{cases}1, & j = 0\\ 0, & j \neq 0\end{cases}, \quad a_{N-1j}^k = \begin{cases}1, & j = N-1\\ 0, & j \neq N-1\end{cases}, \quad a_{Nj}^k = \begin{cases}0, & j = N\\ \Delta_j, & j \neq N\end{cases}, \quad j=0,\dots, N$$

$$a_{iN}^k = \frac{3}{A_k}\,\frac{\varphi_{i+1}^k p_{r0}^k(r_{i+1}) - (\varphi_i^k + \varphi_{i+1}^k)\,p_{r0}^k(r_i) + \varphi_i^k p_{r0}^k(r_{i-1})}{\Delta_i}$$

$$i = 1,\dots, N-2$$

$$a_{ii-1}^k = -\omega_{ii-1} + \frac{\varphi_i^k}{\Delta_i}, \quad a_{ii}^k = -\omega_{ii} - \frac{\varphi_i^k + \varphi_{i+1}^k}{\Delta_i}$$

$$a_{ii+1}^k = -\omega_{ii+1} + \frac{\varphi_{i+1}^k}{\Delta_i}, \quad i = 1,\dots, N-2 \tag{5.6}$$

$$a_{ij}^k = -\omega_{ij}\,(j \neq i-1,\ i,\ i+1;\ i = 1,\dots, N-2;\ j = 0,\dots, N-1)$$

$$f_0^k = 0; \quad f_{N-1}^k = \sqrt{2r_{\text{inl}}}; \qquad f_N^k = \frac{\pi}{3}\beta_1^k + \sum_{j=i_0+1}^{N-1} \Delta_j\sqrt{2r_j}$$

$$f_i^k = -\sqrt{-2r_i}\,\theta(-r_i) - \sum_{j=i_0+1}^{N-1} \omega_{ij}\sqrt{2r_j}, \quad i = 1,\dots, N-2$$

Далее

$$b^k_{i_0 j} = \begin{cases} 1, & j = i_0 \\ 0, & j \neq i_0 \end{cases}, \qquad b^k_{N-1\,j} = \begin{cases} 1, & j = N-1 \\ 0, & j \neq N-1 \end{cases}, \quad j = i_0, \ldots, N-1$$

$$b^k_{i\,i-1} = \omega_{i\,i-1} + \frac{\varphi^k_i}{\Delta_i}, \quad b^k_{ii} = \omega_{ii} - \frac{\varphi^k_i + \varphi^k_{i+1}}{\Delta_i}, \quad b^k_{i\,i+1} = \omega_{i\,i+1} + \frac{\varphi^k_{i+1}}{\Delta_i}$$

$$b^k_{ij} = \omega_{ij} \; (j \neq i-1,\ i,\ i+1; \quad i = i_0 + 1, \ldots, N-2; \quad j = i_0, \ldots, N-1) \tag{5.7}$$

$$g^k_{i_0} = 0; \quad g^k_{N-1} = \sqrt{2r_{\inf}}; \quad g^k_i = \sum_{j=i_0+1}^{N-1} \omega_{ij} \sqrt{2r_j}, \quad i = i_0 + 1, \ldots, N-2$$

при этом

$$\varphi^k_i = \frac{(A_k)^2}{2} \, \frac{\exp\left\{-\eta \left| \dfrac{p^k_{r0}(r_i) + p^k_{r0}(r_{i-1})}{2} \right|^m \right\}}{r_i - r_{i-1}}$$

$$\varphi^k_i = \frac{(A_{k+1})^2}{2} \, \frac{\exp\left\{-\eta \left| \dfrac{p^k_{l0}(r_i) + p^k_{l0}(r_{i-1})}{2} \right|^m \right\}}{r_i - r_{i-1}} \tag{5.8}$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{2r_i - r_{j+1} - r_i}{2r_i - r_j - r_{i-1}} \right|, \qquad \Delta_i = \frac{r_{i+1} - r_{i-1}}{2}$$

На каждой итерации методом Гаусса решалась система (5.4), (5.6) и (5.8) относительно $p^{k+1}_{r0}(r_j)$ $(j = 0, \ldots, N-1)$ и A_{k+1}. После этого с известным уже коэффициентом A_{k+1} методом Гаусса решалась система (5.5), (5.7) и (5.8) относительно $p^{k+1}_{l0}(r_j)$ $(j = i_0, \ldots, N-1)$; по найденным $p^{k+1}_{l0}(r_j)$ вычислялось новое β^{k+1}_1 с помощью соотношения

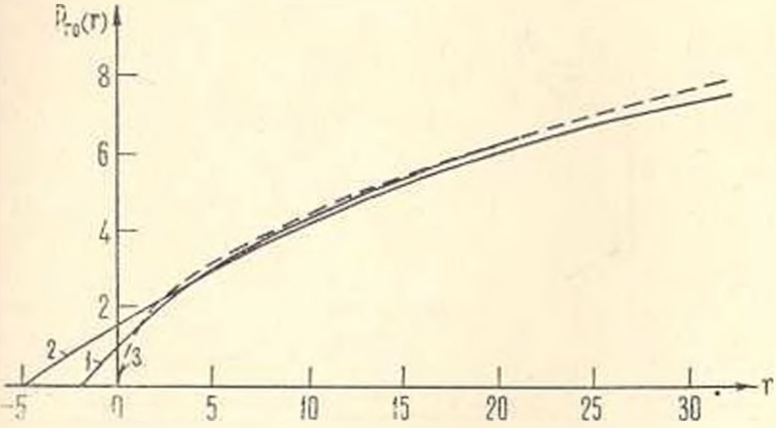
$$\beta^{k+1}_1 = \frac{3}{\pi} \sum_{j=i_0+1}^{N-1} \Delta_j \left[p^{k+1}_{l0}(r_j) - \sqrt{2r_j} \right] \tag{5.9}$$

и итерационный процесс возобновлялся. Проверка сходимости процесса осуществлялась с помощью интегральных характеристик A и β_1. Граница $r_{\inf}$ выбиралась в зависимости от величин α_1, η и m таким образом, чтобы ошибка, обусловленная заменой полубесконечных интервалов конечными, была малой.

1. Случай $\eta = 1$ $(\alpha = Q^{-2m})$.

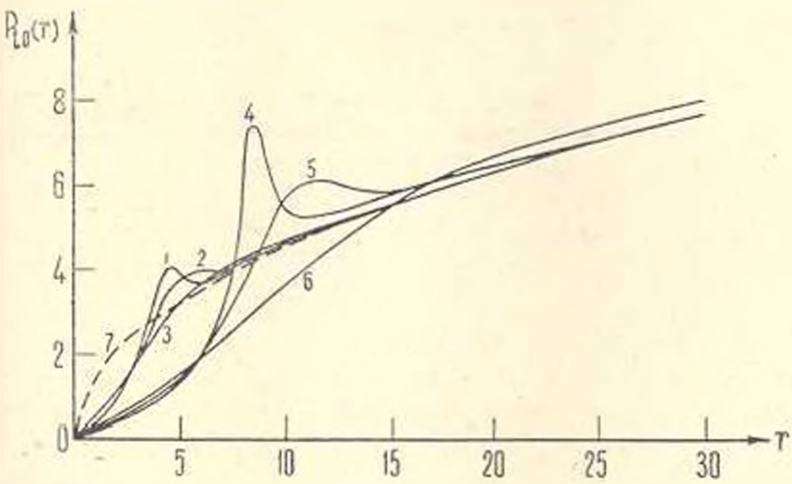
В области $\alpha_1 \leq r \leq r_{\inf}$ выбиралась равномерная сетка с шагом $\Delta r = 0.5$. Получены решения системы (5.2) для $m = 0.25;\ 0.75;\ 1$; для $\alpha_1 = -2$ и $\alpha_1 = -5$; при этом $r_{\inf}$, соответственно, равны 40 и 50. На фиг. 1 дана эпюра $p_{r0}(r)$ и давление по Герцу в зоне входа, из которой видно, что давление на входе монотонно растет с увеличением r.

На фиг. 2 даны эпюры $p_{l0}(r)$ и давление по Герцу в области выхода для некоторых сочетаний α_1 и m. Из фиг. 2 видно, что при $m = 0.25$ давление на выходе по мере уменьшения r монотонно падает, а при $m = 0.75$



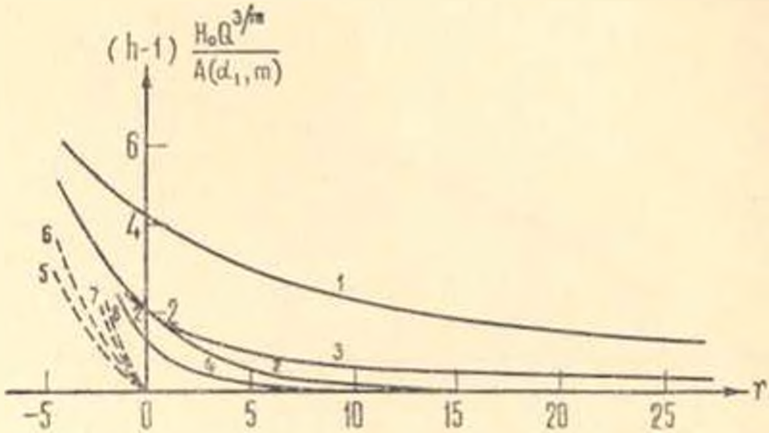
Фиг. 1. Распределение давления в зоне входа. 1. $\alpha_1 = -2$, $m = 0.25$; 2. $\alpha_1 = -5$, $m = 0.25$; 3. по Герцу $p(r) = \sqrt{2r}$.

функция $p_{l0}(r)$ имеет локальный максимум и минимум, причем при увеличении $|\alpha_1|$ $(\alpha_1 < 0)$ максимум растет и смещается в сторону центра области контакта. При уменьшении m максимум давления уменьшается, а протяженность зоны, примыкающей к максимуму, увеличивается. При одном и том же α_1 и различных m более медленный выход на герцевское решение наблюдается при меньших m, что объясняется более сильным влиянием гидродинамических эффектов.

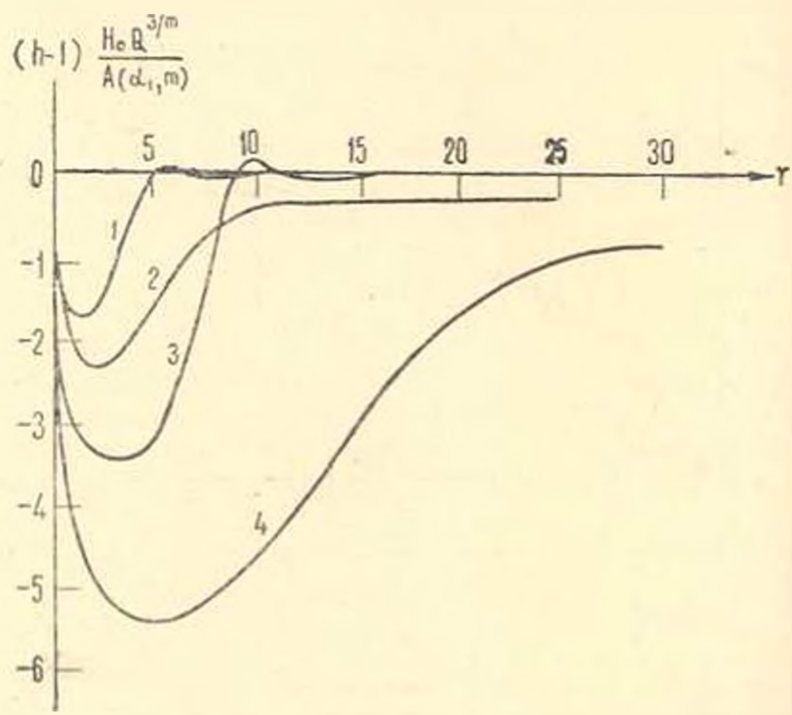


Фиг. 2. Распределение давления в зоне выхода. 1. $\alpha_1 = -2$, $m = 1$; 2. $\alpha_1 = -2$, $m = 0.75$; 3. $\alpha_1 = -2$, $m = 0.25$; 4. $\alpha_1 = -5$, $m = 1$; 5. $\alpha_1 = -5$, $m = 0.75$; 6. $\alpha_1 = -5$, $m = 0.25$; 7. по Герцу $p(r) = \sqrt{2r}$.

На фиг. 3, 4 изображены профили $h_{r0}(r)$, $h_{l0}(r)$ и $h_{Hr0}(r) = \dfrac{2(-2r)^{3/2}}{3A(\alpha_1, m)}\,\theta(-r)$, связанные с зазором h между цилиндрами соотношениями



Фиг. 3. Профиль зазора между цилиндрами в зоне входа. 1. $\alpha_1 = -2$, $m = 1$; 2. $\alpha_1 = -2$, $m = 0.25$; 3. $\alpha_1 = -5$, $m = 1$; 4. $\alpha_1 = -5$, $m = 0.25$; Зазор по Герцу: 5. $\alpha_1 = -2$, $m = 1$; 6. $\alpha_1 = -2$, $m = 0.25$; 7. $\alpha_1 = -5$, $m = 1$; 8. $\alpha_1 = -5$, $m = 0.25$.



Фиг. 4. Профили зазора между цилиндрами в зоне выхода. 1. $\alpha_1 = -2$, $m = 1$; 2. $\alpha_1 = -2$, $m = 0.25$; 3. $\alpha_1 = -5$, $m = 1$; 4. $\alpha_1 = -5$, $m = 0.25$.

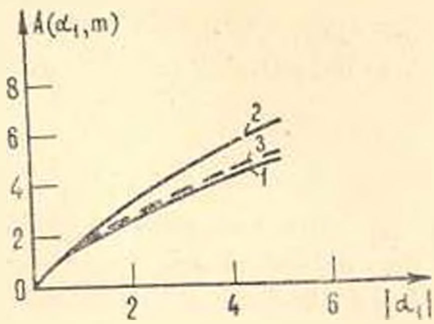
$$h(x) = 1 + \frac{\varepsilon^{3/2}}{H_{00}} A(\alpha_1, m) \begin{cases} h_{r0} & \text{при } x + 1 \sim \varepsilon \\ h_{l0} & \text{при } x - 1 \sim \varepsilon \end{cases}$$

$$h_H(x) = 1 + \frac{\varepsilon^{3/2}}{H_{00}} A(\alpha_1, m)\, h_{H0}(r) \tag{5.10}$$

Функции $h_{r0}(r)$ и $h_{l0}(r)$ легко вычисляются по найденным $p_{r0}(r)$, $p_{l0}(r)$ и A по формулам, вытекающим из (3.11)

$$h_{r0} = A^2(\alpha_1, m)\, e^{-\eta \bar{p}_{r0}} \frac{dp_{r0}}{dr}, \quad h_{l0} = -A^2(\alpha_1, m) e^{-\eta \bar{p}_{l0}} \frac{dp_{l0}}{dr} \tag{5.11}$$

Из фиг. 3 видно, что в зоне входа зазор монотонно уменьшается с увеличением r, причем скорость уменьшения существенно зависит от m. Поведение зазора в зоне выхода зависит от m (фиг. 4).



Фиг. 5. Зависимость $A = A(\alpha_1, m)$
1. $m = 1$; 2. $m = 0.25$; 3. $\eta = 0$.

На фиг. 5 даны кривые $A = A(\alpha_1, m)$ для различных m, из которых видно, что при изменении m от 0 до 1 коэффициент A (а, следовательно, толщина слоя смазки) изменяется в пределах 30%.

2. Случай $\eta = 0$ ($\varepsilon \ll Q^{-2/m}$).

В данном случае систему (5.2) достаточно решить для $\alpha_1 = -1$; расчеты выполнены при $\Delta r = 0.25$ и $r_{inf} = 40$. Эпюра давления и профиль зазора в зонах входа и выхода весьма близки к полученным при $\eta = 1$ и $m = 0.25$. Кривая $A = A^*|\alpha_1|^{2/3}$ показана на фиг. 5 пунктирной линией.

Как показали численные эксперименты с вдвое меньшим шагом Δr и большей областью интегрирования r_{inf} ошибка в величине A не превышает 1%.

Настоящая работа доложена и обсуждена на объединенном заседании семинаров «Контактная прочность» и «Гидроаэроупругость» Ростовского государственного университета.

Всесоюзный научно-исследовательский
конструкторско-технологический институт
подшипниковой промышленности

Поступила 3 V 1977

Ի. Ի. ԿՈՒԴԻՇ

ԾԱՆՐ ԲԵՌՆԱՎՈՐՎԱԾ ԳԼՈՐՄԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՁԳԱ-ՀԻԴՐՈԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ամփոփում

Ասիմպտոտիկան վերլուծությունների միացման մեթոդով ուսումնասիրվել է նյուտոնյան հեղուկի համար հարթ իզոթերմիկ խնդիրը գլորման կոնտակտի ծանր բեռնավորման դեպքում։

Յուղման կարիքի և լիառատ յուղման ռեժիմների համար ստացվել են ասիմպտոտական գնահատականներ յուղման շերտի հաստության համար։

Յուղման կարիքի դեպքում ստացվել են հավասարումներ և նրանք լուծվել են ճնշման ասիմպտոտիկայի գլխավոր անդամների համար խնդրի պարամետրների տարբեր արժեքների դեպքում։

Ցույց է տրված, որ յուղման շերտի հաստությունը որոշվում է ինչպես մուտքի այնպես էլ ելքի զոնաներով։

AN ELASTO-HYDRODYNAMIC PROBLEM FOR A HEAVY-LOADED ROLLING CONTACT

I. I. KUDISH

Summary

A plane isothermal elasto-hydrodynamic problem for newtonian liquid is studied by the method of matched asymptotic expansions in case of a heavy-loaded contact. Asymptotic estimations for lubricant film thickness are obtained for lubricant deficiency and abundant lubrication conditions. In case of deficiency conditions equations for major members of pressure asymptotics are derived and numerically solved for various values of the problem parameters.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петрусевич А. И.* Основные выводы из контактно-гидродинамической теории смазки. Изв. АН СССР, ОТН, 1951, № 2.
2. *Коднир Д. С.* Контактная гидродинамика смазки деталей машин. М., изд. «Машиностроение», 1976.
3. *Грубин А. Н.* Основы гидродинамической теории смазки тяжело нагруженных цилиндрических поверхностей. Сб. «Исследование контакта детали машин», ЦНИИТМАШ. кн. 30. М., Машгиз, 1949.
4. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М., изд. «Мир», 1967
5. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М., изд. «Мир», 1972.
6. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М., ГИТТЛ, 1953.
7. *Кудиш И. И.* Определение толщины слоя смазки в условиях масляного голодания для линейного контакта. «Труды института», № 1 (91). М., Специнформцентр ВНИИПП, 1976, 10—14.
8. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М., изд. «Наука», 1974.
9. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* La solution approchée du problème de Dirichlet. Докл. АН СССР, 1929, 11.