

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

LXXIV, № 4

1982

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ը. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. ֆաբտուղար), Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Թ. ԲԱՐԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդր. անդամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդր. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Օ. Մ. ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդր. անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՖԱՆԱՐԺՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРИЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР (отв редактор), Г. С. СААКЯН, академик АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, академик АН АрмССР.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

42

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ս. Վ. Շահվերդյան—Սահմանափակումներով կառավարման համակարգերի օպտիմիզացիան մեթոդներ	147
Մ. Ա. Մկրտչյան—Որոշ ռացիոնալ ձևերի ինտեգրալների հաշվումը	154
Ֆ. Ա. Շամոյան—Թույլ հակադարձելիության մասին անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ տարածություններում	157
Ա. Լ. Ներսիսյան—Տրված աղավաղման մակարդակով դիսկրետ ինֆորմացիայի կոդավորման ալգորիթմ	162
Գ. Ս. Գրիգորյան—Կատեգորիկ բացարձակ նախապատվություններով մոդելում միավոր ժանրաբնույթի վածության դեպքում երկչափ Լահմանային թեորեմներ	169

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Մ. Մխիթարյան—Բենեի ֆունկցիաների համար օրթոգոնալ ինտեգրալ առնչությունների երկու տիպի և խառը խնդիրներում նրանց լիրառությունների մասին	175
--	-----

ԳԵՈՄԵՏԻԿԱ

Ս. Յ. Հակոբյան—Երկրի ոլորման տառանդումների հաշվարկումը ֆունկցիոնալի մեթոդով	183
---	-----

ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ԲԻՄԻԱ

Դ. Վ. Աբաղյան—D-գլյուկոզայի քայքայի ընդհանուր հալման ջերմաստիճանի մոտակայքում պայմանավորված ճառագայթմամբ	188
--	-----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Стр.

- С. В. Шахвердян*—Методы оптимизации систем управления с ограничениями. 147
- М. А. Мкртчян*—Вычисление некоторых интегралов от рациональных форм. 154
- Ф. А. Шамоян*—О слабой обратимости в некоторых пространствах аналитических функций 157
- А. Л. Нерсисян*—Полиномиальный алгоритм кодирования дискретной информации с заданным уровнем искажения 162
- Г. С. Григорян*—Двумерные предельные теоремы в модели с категорийными абсолютными приоритетами при единичной загрузке 169

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- С. М. Мхитарян*—О двух типах ортогональных интегральных соотношений для бесселевых функций и их приложениях к смешанным задачам 175

ГЕОФИЗИКА

- С. Ц. Акопян*—Вычисление крутильных колебаний Земли методом функционала 183

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- Г. В. Абагян*—Деградация глюкозы вблизи температуры плавления, иницированная облучением 188

CONTENTS

MATHEMATICS

p

<i>S. V. Shahverdian</i> —On optimisation methods of control systems with limitations	147
<i>M. A. Mkrtchian</i> —Calculation of several integrals from rational forms .	154
<i>F. A. Samoyan</i> —On weak invertibility in some space of analytic functions	157
<i>A. L. Nerislan</i> —A polynomial algorithm of discrete information encoding with the fidelity criterion	162
<i>C. S. Grigorian</i> —Two dimensional limit theorems for model with categorical pre-emptive priorities in unit traffic intensity case	169

THEORY OF ELASTICITY

<i>S. M. Mkhitarian</i> —On two types of orthogonal integral relationships for Bessel's functions and their supplements to mixed problems	175
---	-----

GEOPHYSICS

<i>S. Tz. Hakopian</i> —Calculation of torsional oscillation of the earth by the method of the functional.	183
--	-----

PHYSICAL CHEMISTRY

<i>G. V. Abaghtan</i> —Decomposition of <i>D</i> glucose near melting temperature initiated by irradiation	188
--	-----

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 20.05.1982. Подписано к печати 31.05.1982. ВФ 05267.
 Бумага № 1, 70×108¹/₁₆. Плоскопечат. Печ. лист 3,0. Усл. печ. лист. 4,2.
 Учет.-изд. 3,41. Тираж 430. Заказ 462. Издат. 5692.
 Адр. ред.: 375019, Ереван, Барекамутян, 24-г II эт., I к.

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван, Барекамутян 24 г.
 Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин.

УДК 62—50

МАТЕМАТИКА

С. В. Шахвердян

Методы оптимизации систем управления с ограничениями

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. Т. Адонцем 25/V 1981)

Для решения задач оптимизации систем управления с ограничением типа $g(x, t) \leq 0$ в настоящее время предлагается использовать методы интегральных штрафных функций (ИШФ) различных модификаций, идейно близкие к ним ⁽¹⁻³⁾, где x — фазовый вектор; t — время. Однако исследования показали, что названные методы применимы лишь для учета ограничения вида $g(x, u, t) \leq 0$, где u — управляющий вектор. Учет ограничения типа $g(x, t) \leq 0$ организовать обычными методами ИШФ и их модификациями не представляется возможным, в силу чего необходимо ввести принципиальные дополнения.

Развивая работы ^(4,5), ниже предлагаем методы, позволяющие решить задачи оптимального управления с ограничением $g(x, t) \leq 0$. Кроме того, рассматриваются задачи оптимизации с ограничением на полное изменение скалярного и векторного управления.

Задача с фазовыми ограничениями. Пусть требуется минимизировать интеграл

$$I = \int_0^T f_0(x, u, t) dt \quad (1)$$

при ограничениях

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(0) = x^0, \quad x(T) = x^T; \quad (2)$$

$$a^0 \leq u \leq a^*; \quad (3)$$

$$g(x, t) \leq 0; \quad (4)$$

$$a^0 = (a_1^0, \dots, a_m^0), \quad a^* = (a_1^*, \dots, a_m^*),$$

где x — n -мерный фазовый вектор; u — m -мерный управляющий вектор; f — n -мерная вектор-функция; f_0, g — скалярные функции; a^0, a^* — m -мерные заданные векторы; T — период управления, заданная величина. Предполагается, что f_0, f, g непрерывные и непрерывно дифференцируемые необходимое число раз функции своих аргументов. Для простоты изложения предполагается также, что фазовая траектория один раз выходит на границу допустимой области и лежит на ней на интервале $[t_1, t_2]$.

Допустим, что ограничение (4) имеет порядок p , по определению равный (4.5)

$$p = \min_{i \in N} \left\{ \frac{\partial g^{(i)}}{\partial u} \neq 0 \right\}, \quad N = \{0, \dots, n\}, \quad g^{(i)} \equiv \frac{d^i g}{dt^i}.$$

Тогда для того, чтобы фазовая траектория на интервале $[t_1, t_2]$ лежала на границе допустимой области, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$G(x, t_1) = (g^{(0)}(x, t_1), \dots, g^{(p-1)}(x, t_1)) = 0; \quad (5)$$

$$G_j(x, t_2) = (g^{(j)}(x, t_2), \dots, g^{(p-1)}(x, t_2)) = 0; \quad (6)$$

$$g^{(j)}(x, u, t) = 0, \quad t \in [t_1, t_2], \quad (7)$$

где

$$j \in M = \{0, \dots, p\}, \quad p \neq 0, \quad \frac{\partial g^{(j)}}{\partial u} = 0, \quad \forall j \in M \setminus P,$$

$$g^{(0)}(x, t) \equiv g(x, t), \quad G_p(x, t_2) \equiv 0.$$

Отметим, что в методе ИШФ и других аналогичных ему методах условия типа (5) и (6) отсутствуют, чем и обусловлена невозможность учета (4) с помощью этих методов.

Обозначим

$$\dot{x}_0 = f_0(x, u, t), \quad x_0(0) = 0, \quad x_0(T) = I; \quad (8)$$

$$R = (a^* - u)(u - a^0) - \gamma^2 = 0, \quad (9)$$

где γ — m -мерный дополнительный управляющий вектор, позволяющий учесть (3) в форме равенств (9).

Тогда задачу (1)–(4) можно сформулировать следующим образом: найти вектор-функции u и γ , которые минимизируют

$$I^* = I + \lambda G + \lambda_j G_j \quad (10)$$

при ограничениях (2), (7)–(9), где λ , λ_j — соответственно p и $p-j$ — 1-мерные векторы, определяемые из условия выполнения (5) и (6). Если в этой задаче применить метод ИШФ, то штрафная функция может быть введена с помощью следующего уравнения:

$$\dot{x}_{n+1} = \frac{1}{2} D(g) (g^{(i)})^2 \equiv \dot{f}_{n+1}(x, u, t), \quad j \in M \quad (11)$$

с граничными условиями

$$x_{n+1}(0) = 0, \quad x_{n+1}(T) = \frac{1}{2} \int_0^T D(g) (g^{(i)})^2 dt = 0, \quad (12)$$

где

$$D(g) = \begin{cases} 0, & \text{если } g \leq 0 \\ 1, & \text{если } g > 0. \end{cases}$$

Составим гамильтонову функцию

$$H = \psi^0 f^0 + \psi R, \quad (13)$$

где $f^0 = (f_0, \dots, f_{n+1})$; $R = (R_1, \dots, R_m)$; $\psi^0 = (\psi_0, \dots, \psi_{n+1})$ — $n+2$ -мерный сопряженный вектор; $v = (v_1, \dots, v_m)$ — m -мерный неопределенный множитель. Здесь сопряженные переменные удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\dot{\psi}_0 = 0, \quad \dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \dot{\psi}_{n+1} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (14)$$

а u и γ должны быть определены из системы

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \gamma} = 0. \quad (15)$$

Из второго уравнения (15) следует

$$v\gamma = 0$$

или

$$v = 0, \quad \gamma \neq 0; \quad v \neq 0, \quad \gamma = 0; \quad v = 0, \quad \gamma = 0. \quad (16)$$

Условия (16) являются существенно слабыми, что обусловлено сведением неравенства (3) к равенству (9). Из-за слабости условий (16), как правило, возникают ситуации закливания итерационной процедуры, поэтому необходимо усилить (16). Можно доказать, что

$$v \begin{cases} \leq 0, & \gamma = 0 \\ = 0, & \gamma \neq 0. \end{cases} \quad (17)$$

Хотя условия (17) известны из теоремы Куна—Таккера (⁶), однако в методе, основанном на замене (3) равенством (9), требование знакоопределенности v отсутствует.

В моменты t_1, t_2 должны быть выполнены известные условия сопряжения (¹)

$$\begin{aligned} [\psi^- - \psi^+ - A]_\tau &= 0; \\ [H^- - H^+ + B]_\tau &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$;

$$A = \begin{cases} \lambda \frac{\partial G}{\partial x}, & \text{когда } \tau = t_1 \\ \lambda_j \frac{\partial G_j}{\partial x}, & \text{когда } \tau = t_2 \end{cases}; \quad B = \begin{cases} \lambda \frac{\partial G}{\partial t}, & \text{когда } \tau = t_1 \\ \lambda_j \frac{\partial G_j}{\partial t}, & \text{когда } \tau = t_2. \end{cases}$$

Здесь верхними индексами (--) и (+) обозначены значения ψ и H соответственно слева и справа от точек t_1 и t_2 .

Ограничение (7) может быть учтено и с помощью метода множителей. Для этого из множества M выбирается j и составляется гамильтониан в виде

$$H = \psi^0 f^0 + \mu_j D(g)g^{(j)} + vR, \quad j \in M, \quad (19)$$

где $\psi^0 = (\psi_0, \dots, \psi_n)$; $f^0 = (f_0, \dots, f_n)$; μ_j — множитель.

Отметим, что этот метод, имея ряд общих моментов с методом, рассмотренным в (⁵), отличается от него тем, что в (⁵) $\lambda_i \equiv 0$; вектор G имеет размерность $k \leq p$ и $D(g) = 1 \quad \forall t \in [0, T]$. В работе (⁴) для учета (4) рассмотрен вариант метода множителей при $j = p$.

Сопряженная система с помощью H , определяемым по (19), может быть записана в виде

$$\dot{\psi}_0 = 0, \quad \dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (20)$$

с условиями сопряжения, аналогичными условиям (18). Здесь условия (15)–(17) также остаются в силе.

Сравнив решения при j и $j+1$, нетрудно доказать, что справедливы условия

$$\dot{\psi}_i^{(j)} = \dot{\psi}_i^{(j+1)} + \mu_{j+1} \frac{\partial g^{(j)}}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (21)$$

$$\mu_j = -\frac{d\mu_{j+1}}{dt}, \quad j = \overline{1, p-1}, \quad (22)$$

где $\dot{\psi}_i^{(j)}$ и $\dot{\psi}_i^{(j+1)}$ — решение системы (20) при вводе в рассмотрение соответственно $g^{(j)}$ и $g^{(j+1)}$, а μ_j и μ_{j+1} — множители при $g^{(j)}$ и $g^{(j+1)}$.

Конкретные экспериментальные исследования на ряде примеров показали, что без ввода в рассмотрение равенств (5) и (6) условие $d=0$ не выполняется и $\min \|d\| \neq 0$, где $\|d\|$ — норма вектора $d = (\Delta x, x_{n+1}(T))$; $\Delta x \equiv x(T) - x^T$.

Задачи с ограничением на полное изменение управления. Пусть требуется минимизировать (1) при ограничениях (2) и

$$V_0^T u_j(t) = \sup \sum_{s=0}^{k-1} |u_j(t_{s+1}) - u_j(t_s)| \leq \varepsilon, \quad (24)$$

где $V_0^T u_j(t)$ — полное изменение функции $u_j(t)$; k — число разбиения интервала $[0, T]$, ε — заданное число. Допустим, что $u_j(t)$ непрерывна и имеет кусочно-непрерывную по t производную, тогда (24) можно заменить интегралом

$$V_0^T u_j(t) = \int_0^T |v_j| dt \leq \varepsilon, \quad \dot{u}_j = v_j \equiv f_{n+1}(v_j). \quad (25)$$

Неравенство (25) заменим равенствами

$$V_0^T u_j(t) - \varepsilon + \beta^2 = 0, \quad \dot{\beta} = 0, \quad (26)$$

где β — неизвестный параметр. Интеграл (1) можно представить в виде

$$I^* = \int_0^T \left[f_0(x, u, t) + \lambda \left(|v_j| + \frac{1}{T} \beta^2 \right) \right] dt - \varepsilon \lambda.$$

Используя обозначение (8), составим гамильтониан

$$H = \psi^0 f^0 - \lambda \left(|v_j| + \frac{1}{T} \beta^2 \right), \quad (27)$$

с помощью которого сопряженная система записывается в виде ($\lambda = \text{const}$ — множитель)

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = \overline{0, n}, \quad \dot{\psi}_{n+1} = -\frac{\partial H}{\partial u_j}, \quad \dot{\psi}_{n+2} = -\frac{\partial H}{\partial \beta}. \quad (28)$$

Из последнего уравнения (28), с учетом параметризации задачи, следует $\dot{\beta} = 0$, а из максимума (27) — $\partial H / \partial u_i = 0$, $i = \overline{1, m}$, $i \neq j$ и

$$\frac{\partial H}{\partial v_j} = \psi_{n+1} - \lambda \operatorname{sign} v_j = 0. \quad (29)$$

Если $\beta \neq 0$, то $\lambda = 0$ и $\partial H / \partial u_j = 0$, $\forall t \in [0, T]$.

Если же $\beta = 0$, $\lambda \neq 0$ и $\int_0^T |v_j| dt = \varepsilon$, то

$$\psi_{n+1}(t) = \psi_{n+1}(t_s - 0) - \int_{t_s}^t \frac{\partial H}{\partial u_j} dt, \quad t \in \tau_s; \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(t_s - 0) &= \lambda \operatorname{sign} v_j(t_s - 0); \\ \psi_{n+1}(t_{s+1} + 0) &= \lambda \operatorname{sign} v_j(t_{s+1} + 0); \end{aligned} \quad (31)$$

$$N \neq \emptyset, \quad |\psi_{n+1}| \begin{cases} \leq \lambda & \text{на } N \\ = \lambda & \text{на } M, \end{cases}$$

где

$$N \equiv \left\{ t : v_j(t) = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial u_j} \neq 0 \right\} \subset [0, T];$$

$$M_0 \equiv \left\{ t : v_j(t) = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial u_j} = 0 \right\} \subset [0, T];$$

$$M_1 \equiv \left\{ t : v_j(t) \neq 0, \quad \frac{\partial H}{\partial u_j} = 0 \right\} \subset [0, T];$$

$$M = M_0 \cup M_1;$$

$\tau_s = [t_s, t_{s+1}]$ — интервал, на котором происходит непрерывное изменение $\psi_{n+1}(t)$ согласно (30); $s = 0, 2, \dots, e$; $t_0 = 0$, $t_{e+1} = T$. Неизвестные моменты t_s , $s = 1, \dots, e$ определяются из условия

$$\Omega_s = \begin{cases} \lambda \operatorname{sign} v_j(t_{s+1} + 0) - \lambda \operatorname{sign} v_j(t_s - 0), & s = \overline{2, e-2} \\ \lambda \operatorname{sign} v_j(t_{s+1} + 0) - \psi_{n+1}(t_s), & s = 0 \\ \psi_{n+1}(t_{s+1}) - \lambda \operatorname{sign} v_j(t_s - 0), & s = e, \end{cases} \quad (32)$$

где

$$\Omega_s \equiv - \int_{t_s}^{t_{s+1}} \left(\frac{\partial H}{\partial u_j} \right)^* dt, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial u_j} \right)^* \equiv \frac{\partial H}{\partial u_j} \Big|_{v_j=0}.$$

$\psi_{n+1}(z) \neq 0$, когда $u_j(z)$ фиксировано, $\psi_{n+1}(z) = 0$ в противном случае, $z = 0, T$. Из (32) легко получить

$$|\Omega_s| \begin{cases} = 2\lambda, & \text{если } s = 2, 4, \dots, e-2 \\ = \lambda, & \text{если } \psi_{n+1}(t_s) = 0, \\ \leq \lambda, & \text{если } \psi_{n+1}(t_s) \neq 0 \end{cases}, \quad s = 0, T. \quad (33)$$

Если $M_0 \neq \emptyset$, то на M_0 $\text{sign } v_i(t)$ не определен. Однако, учитывая (30), (31) и $\partial H / \partial u_i = 0$ на M_0 , получим $\text{sign } v_i(t) = \text{sign } v_i(t_c - 0)$, где t_c — предельная слева точка M_0 .

Теперь вместо (24) введем в рассмотрение ограничение

$$V_{0m}^T u(t) = \sup \sum_{s=0}^{h-1} \|u(t_{s+1}) - u(t_s)\| \leq \varepsilon, \quad (34)$$

где $V_{0m}^T u(t)$ — полное изменение вектора $u(t)$ на $[0, T]$; $\|y\|$ — норма вектора y .

Обозначим

$$\varphi = R - \|u\| = 0;$$

$$\dot{R} = v \equiv f_{n+1}(v).$$

Тогда, предполагая $R(t)$ непрерывным, выражение (34) можно представить в виде

$$V_{m0}^T u(t) = \int_0^T |v| dt \leq \varepsilon,$$

что может быть заменено равенством

$$V_{0m}^T u(t) - \varepsilon + \gamma^2 = 0, \quad \dot{\gamma} = 0,$$

где γ — дополнительный параметр. В этом случае сопряженная система записывается в виде

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = \overline{0, n}, \quad \dot{\psi}_{n+1} = -\frac{\partial H}{\partial R}, \quad \dot{\psi}_{n+2} = -\frac{\partial H}{\partial \gamma}, \quad (35)$$

а уравнения для определения u и v имеют вид:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = \psi^0 \frac{\partial f^0}{\partial u_i} + \mu(t) \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = 0, \quad i = \overline{1, m};$$

$$\frac{\partial H}{\partial v} = \psi_{n+1} - \lambda \cdot \text{sign } v = 0,$$

где $H = \psi^0 f^0 + \mu(t) \varphi + \lambda \left(|v| + \frac{1}{T} \gamma^2 \right)$; $\mu(t)$ и $\lambda = \text{const}$ — множители. Из последних двух уравнений (35) имеем

$$\dot{\psi}_{n+1} = \mu(t), \quad \lambda \gamma = 0,$$

откуда следует, что если $\gamma \neq 0$, $\lambda = 0$, то $\psi_{n+1}^* = \mu(t) = \partial H / \partial u_i = 0$ на $[0, T]$. Если же $\gamma = 0$, $\lambda \neq 0$, то, используя результаты, полученные выше, будем иметь

$$N \neq \emptyset, \quad |\psi_{n+1}| \begin{cases} \leq \lambda & \text{на } N \\ = \lambda & \text{на } M \end{cases},$$

$$R = \begin{cases} \text{const на } N \\ \text{var на } M \end{cases}, \quad \mu(t) \begin{cases} \neq 0 & \text{на } N \\ = 0 & \text{на } M \end{cases}.$$

здесь N и M определяются по (31), где v_j должно быть заменено на v , а u_j на u_i , $i = \overline{1, m}$. Если в (32) Ω_s определить по выражению

$$\Omega_s \equiv - \int_{t_s}^{t_{s+1}} \left(\frac{\partial H}{\partial R} \right)^* dt, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial R} \right)^* \neq \frac{\partial H}{\partial R} \Big|_{v=0},$$

то условие (33) остается без изменений.

На $M_0 \neq \emptyset$ $\text{sign } v(t) = \text{sign } v(t, -0)$, что доказывается аналогично определению $\text{sign } v_j(t)$ на M_0 при решении задачи с ограничением (24).

Филлал ВНИИАЭС

Ս. Վ. ՇԱՀՎԵՐԴՅԱՆ

Սահմանափակումներով կառավարման համակարգերի օպտիմիզացման մեթոդներ

Անկախ այն բանից, թե որ մեթոդով է (4) սահմանափակումը հաշվի առնվում, (5) և (6) հավասարումների դիտարկումը պարտադիր է: Կոնկրետ փորձնական հետազոտությունները ցույց են տվել, որ առանց (5) և (6) պայմանների ներմուծման հնարավոր չէ (4) սահմանափակման և փուլային հետազոծի վրա դրված $\Delta x = x(T) - x^T = 0$ և $x_{n+1}(T) = 0$ պայմանների համատեղ կատարումը, և ընդհանուր դեպքում $\min \|d\| \neq 0$: Հենց այդ պատճառով է, որ ինտեգրալային տուգանային ֆունկցիաների մեթոդը և նրան անալոգ մեթոդները (4) սահմանափակումը հաշվի առնելու պրոբլեմը սկզբունքորեն չեն լուծում:

Սկզբնական և վերջնական կառավարման ֆունկցիաների լրիվ փոփոխության վրա դրված սահմանափակումով օպտիմիզացման խնդրի լուծման արդյունքները հեշտությամբ ընդհանրացվում են (3) տիպի ստանդարտ սահմանափակման առկայության դեպքերի համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱՎԱՆՈՒՅՈՒՆ

- ¹ Э. Полак, Численные методы оптимизации, «Мир», М., 1974. ² Е. С. Левитин, Б. Т. Поляк, ЖВМ и МФ, т. 6, № 5 (1966). ³ Методы оптимизации с приложениями к механизму космического полета. Под редакцией Дж. Лейтмана, М., Наука, 1965. ⁴ А. Брайсон, Хо-Ю Ши, Прикладная теория оптимального управления, Мир, М., 1972. ⁵ А. С. Семенов, В. А. Троицкий, ПММ, т. 34, вып. 1 (1970). ⁶ Б. Н. Пшеничный, Ю. М. Данилин Численные методы в экстремальных задачах, «Наука» М., 1975. ⁷ Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Наука, М., 1961.

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

М. А. Мкртчян

Вычисление некоторых интегралов от рациональных форм

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашьяном 7/IX 1981)

1°. Рассматривается вопрос о вычислении интегралов

$$I(F, R) = \int_{\Gamma} \frac{R dz}{f_1 \cdot f_2 \cdots f_n}, \quad (1)$$

где R — многочлен от переменных $z_1, \dots, z_n$; $dz = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$; $F = (f_1, \dots, f_n)$ — полиномиальное отображение $\mathbb{C}^n$ (n -мерное комплексное аффинное пространство) в $\mathbb{C}^n$, имеющее только конечные нули в $\mathbb{C}P^n$ (n -мерное комплексное проективное пространство); $\Gamma = \{z = (z_1, \dots, z_n): z \in \mathbb{C}^n, |f_i(z)| = \epsilon_i, \epsilon_i > 0, i = 1, \dots, n\}$.

Вычисление интегралов типа (1) позволяет, в частности, найти сумму значений произвольного многочлена в корнях системы

$$f_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Соответствующие формулы для разных классов систем были получены в работах (1–4). Эти формулы позволяют исключать неизвестные из системы (2) по схеме, изложенной в (1), а также (5), (§21) (о первом применении этого метода в математической химии см. в (6)).

Другие результаты для вычисления интегралов типа (1) недавно получил А. П. Южаков.

2°. Обозначим через M множество отображений $P = (P_1, \dots, P_n)$, где все P_i — однородные многочлены, для которых $P^{-1}(0) = \{0\} \in \mathbb{C}^n$ независимо от величин ненулевых коэффициентов многочленов P_i .

Предложение. Пусть $P = (P_1, \dots, P_n)$ отображает $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$ и P_i — однородные многочлены, $i = 1, \dots, n$. Для того чтобы $P \in M$, необходимо и достаточно, чтобы (с точностью до перенумерации)

а) P_1 было мономом,

б) для любого набора $(i_1, \dots, i_k)$, $1 \leq k \leq n$, существовало натуральное число $j(i_1, \dots, i_k)$ такое, чтобы сужение многочлена $P_{j(i_1, \dots, i_k)}$ на плоскости $z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0$ состояло только из одного монома, т. е.

$$P_{j(i_1, \dots, i_k)} = \varphi_{j(i_1, \dots, i_k)}(i_1, \dots, i_k) + z_{i_1} P_{j(i_1, \dots, i_k)}(i_1) + \dots + z_{i_k} P_{j(i_1, \dots, i_k)}(i_k),$$

где $\varphi_{j(i_1, \dots, i_k)}(i_1, \dots, i_k)$ — моном, а множители при $z_{i_1}, \dots, z_{i_k}$ или

однородные многочлены степени $\deg P_{j(i_1, \dots, i_k)} - 1$, или же тождественно равны нулю.

Для произвольного монома h запись $z_i \in h$ означает, что переменное z_i присутствует в мономе h с ненулевым показателем.

Определим множества $\sigma_0(P)$ и $\sigma(P)$ следующим образом:

$i_1, \dots, i_n \in \sigma_0(P)$, если $z_{i_1} \in P_1$ и $z_{i_e} \in \varphi_{j(i_1, \dots, i_{e-1})}(i_1, \dots, i_{e-1})$, $e=2, \dots, n$.

Множество $\sigma(P)$ получается из множества $\sigma_0(P)$ отождествлением элементов $(i_1, \dots, i_n)$ и $(e_1, \dots, e_n)$, для которых равны подстановки

$$\begin{pmatrix} j(i_1) & \dots & j(i_1, \dots, i_{n-1}) \\ \varphi_{j(i_1)}(i_1) & \dots & \varphi_{j(i_1, \dots, i_{n-1})}(i_1, \dots, i_{n-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j(e_1) & \dots & j(e_1, \dots, e_{n-1}) \\ \varphi_{j(e_1)}(e_1) & \dots & \varphi_{j(e_1, \dots, e_{n-1})}(e_1, \dots, e_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Пусть в (2) $f_i = P_i + Q_i$, $i=1, \dots, n$, где P_i — однородные многочлены старшей степени ($\deg Q_i < \deg P_i$) и $P = (P_1, \dots, P_n) \in M$. Тогда

$$a) \quad I(F, R) = E(F, R)$$

$$E(F, R) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \sigma(P)} \sum_{|a| = a_1 + \dots + a_n} (-1)^a \mathfrak{M} \times \\ \times \left[\frac{R z_1 \dots z_n Q_1^{a_1} (g_{j(i_1)}(i_1))^{a_1} \dots (g_{j(i_1, \dots, i_{n-1})}(i_1, \dots, i_{n-1}))^{a_{n-1}}}{P_1^{a_1+1} (\varphi_{j(i_1)}(i_1))^{a_1+1} \dots (\varphi_{j(i_1, \dots, i_{n-1})}(i_1, \dots, i_{n-1}))^{a_{n-1}+1}} \right],$$

где $g_{j(i_1, \dots, i_k)}(i_1, \dots, i_k) = f_{j(i_1, \dots, i_k)} - \varphi_{j(i_1, \dots, i_k)}(i_1, \dots, i_k)$, а $\mathfrak{M}$ — линейный функционал на многочленах Лорана, сопоставляющий каждому такому многочлену его свободный член;

б) число ненулевых слагаемых в правой части а) конечно.

3°. Рассмотрим полиномиальное отображение $H = (H_1, \dots, H_n) = (G_1 + D_1, \dots, G_n + D_n)$, где все G_i ($i=1, \dots, n$) — однородные многочлены и $\deg G_i > \deg D_i$. Пусть $G = (G_1, \dots, G_n)$ и $D = (D_1, \dots, D_n)$. Предполагается, что $G^{-1}(0) = \{0\} \in \mathbb{C}^n$. Это равносильно требованию об отсутствии бесконечно удаленных нулей у отображения H в $\mathbb{C}P^n$. Пусть матрица из однородных многочленов $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ такая, что отображение $G \cdot A \in M$, т. е. отображение HA такое, как в теореме 1. Предложение в пункте 2° и теорема Гильберта гарантируют существование матрицы A .

Теорема 2. $I(H, R) = E(HA, R \cdot \det A)$.

Для вычисления суммы значений произвольного многочлена в корнях системы (2) аналогичная формула получена в (1).

Заметим, что теорема 2 дает серию формул в зависимости от вида отображения GA . При практических вычислениях в разных ситуациях удобно применять ту или иную формулу.

В заключение автор выражает благодарность Л. А. Айзенбергу за постоянное внимание к работе, а также А. К. Циху за полезные обсуждения.

Որոշ ռացիոնալ ձևերի ինտեգրալների հաշվումը

Տրվում է քնածն հետևյալ տիպի ինտեգրալների հաշվման համար

$$\int_{\Gamma} \frac{Rdz}{f_1 \cdot f_2 \cdots f_n}$$

Որտեղ՝ R -ը, $z_1, \dots, z_n$ կոմպլեքս փոփոխականներից կախված բազմանդամ $F=(f_1, \dots, f_n)$ -ը բազմանդամալին արտապատկերում է C^n -ը C^n -ի մեջ որն ունի միայն վերջավոր քանակությամբ զրոներ CP^n -ում;

$$dz = dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n,$$

$$\Gamma = \{z = (z_1, \dots, z_n); z_i \in C^n; |f_i| = \varepsilon_i, \varepsilon_i > 0 (i = 1, \dots, n)\}:$$

Այդ տեսակի ինտեգրալների հաշվումը թույլ է տալիս գտնել կամայական բազմանդամի արժեքների գումարը $f_i(z) = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ համակարգի զրոներում.

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Л. А. Айзенберг, ДАН СССР, т. 234, № 3 (1977). ² Л. А. Айзенберг, А. К. Цих, Сиб. мат. журн., т. 20, № 4 (1979). ³ А. К. Цих, в кн.: Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа, Красноярск, 1980. ⁴ А. П. Южаков, в кн.: Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа. Красноярск, 1980. ⁵ Л. А. Айзенберг, А. П. Южаков, Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе, Наука, Новосибирск, 1979. ⁶ Л. А. Айзенберг, В. И. Быков и др., ДАН СССР, 257, № 4 (1981).

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Шамоян

О слабой обратимости в некоторых пространствах аналитических функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 6/XI 1981)

1°. Пусть G —открытое множество на комплексной плоскости C^1 . И пусть $A(G)$ —пространство всех аналитических в G функций с топологией равномерной сходимости на внутренних компактах. Предположим далее, что X —линейное подпространство пространства $A(G)$, в котором множество всех многочленов от z всюду плотно.

Функция $f \in X$, $f(z) \neq 0$, $z \in G$ называется слабо обратимой в пространстве X (см. ^(1,2)), если существует последовательность многочленов $\{P_n\}_1^\infty$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n f = 1,$$

причем сходимость имеет место в топологии пространства.

В этой заметке мы займемся следующими двумя задачами:

I. Пусть $\lambda(r)$ $\Lambda(r)$, ($\Lambda(r) \geq \lambda(r)$) монотонно растущие мажоранты на полуоси $(0, +\infty)$ и пусть

$$X_\lambda = \left\{ f, f \in A(C^1) : |f(z)| = o(\lambda(|z|)), |z| \rightarrow +\infty, \|f\|_{X_\lambda} = \sup_{z \in C^1} \frac{|f(z)|}{\lambda(|z|)} \right\},$$

аналогично определяется пространство X_Λ . Каким условиям должны удовлетворять мажоранты λ и Λ для того, чтобы каждая функция $f \in X_\lambda$, $f(z) \neq 0$, $z \in C^1$, была слабо обратной в пространстве X_λ ?

II. Пусть X' —некоторое банаховое пространство аналитических функций в единичном круге, которое удовлетворяет следующим условиям:

i) $zX \subset X'$, ii) функционалы Φ_z :

$$\Phi_z(f) = f(z), f \in X, |z| < 1, \text{ непрерывны}$$

в топологии пространства X и множество всех многочленов от z всюду плотно в X .

Предположим далее, что

$$f \in X, f(z) \neq 0, |z| < 1, \frac{1}{f} \in X.$$

Можно ли при этих условиях утверждать, что f слабо обратима в пространстве X ?

Отметим, что аналогичная задача поставлена А. Шильдсом в ⁽¹⁾. Теоремы 1 и 2 дают довольно полный ответ на указанные вопросы в том случае, когда мажоранты λ и Λ удовлетворяют некоторым условиям „регулярности“.

2°. Для формулировки основных результатов заметки прежде всего введем некоторые определения.

Определение 1°. Пусть λ — монотонно растущий вес на полуоси $(0, +\infty)$, будем говорить, что λ принадлежит классу Ω , если функция $\varphi(r) = \lg \lambda(r)$ удовлетворяет одному из следующих условий:

а) для любого положительного числа A существует положительное число $B = B(A)$ такое, что

$$\varphi(Ar) \leq B\varphi(r), \quad r \in (0, +\infty), \quad (1)$$

при этом $\varphi' \in C^1(0, +\infty)$;

б) если же φ не удовлетворяет условию (1), то существует монотонно растущий вес $\omega(t) \geq 0$, $t \in (0, +\infty)$, такой, что

$$\varphi(r) = \int_1^r \frac{\omega(u)}{u} du,$$

$$\omega(r) \uparrow +\infty, \text{ при } r \uparrow +\infty, \quad \int_1^{+\infty} t \frac{\omega'(t)^2}{\omega(t)^3} dt < +\infty. \quad (2)$$

Определение 2. Предположим, что мажоранта $\lambda \in \Omega$ и $\frac{\lambda'(r)r}{\lambda(r)} \uparrow +\infty$, при $r \uparrow +\infty$. В этом случае мы будем говорить, что λ принадлежит классу Ω^* .

Теорема 1. Пусть λ и Λ принадлежат классу Ω^* и пусть

$$\lambda(r)(\lg \lambda(r))^n = O(\Lambda(r)), \text{ при } r \rightarrow +\infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Предположим далее, что $\nu(t)$ — функция обратная к функции $\frac{t\Lambda'(t)}{\Lambda(t)}$ и что $\lg \frac{\Lambda(\nu(e'))}{\lambda(\nu(e'))}$ выпуклая. Если, кроме того,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \lg \frac{\Lambda(\nu(t))}{\lambda(\nu(t))} dt = +\infty, \quad (3)$$

то каждая функция $f \in X_\lambda$, $f(z) \neq 0$, слабо обратима в пространстве X_λ .

Замечание 1. Простые примеры показывают, что при сходимости интеграла (3) утверждение теоремы, вообще говоря, не имеет места.

Замечание 2. Аналог этой теоремы для аналитических в круге функций, но при более жестких ограничениях на λ и Λ доказан в монографии Н. К. Никольского ⁽²⁾.

Доказательство теоремы осуществляется на основе лемм 1—4.

Пусть $\lambda \in \Omega$, обозначим через U_λ класс субгармонических в C

функций, для которых существует положительное число $c=c(u)$ такое, что

$$u(z) \leq c \lg \lambda(|z|), \quad z \in C^1. \quad (4)$$

Лемма 1. Пусть $\lambda \in \Omega$, функции u и v принадлежат классу U_λ , причем $v(0)=1$. Если $w=u-v$ субгармонична в C^1 , то $w \in U_\lambda$.

Доказательство этой леммы, в случае когда $\varphi = \lg \lambda$ удовлетворяет условию (1), легко вывести, используя теорему о средних значениях субгармонических функций. Если же φ удовлетворяет условию (2), то применяются результаты И. Ф. Красичков-Терновского (4,5). Следующее утверждение на наш взгляд имеет самостоятельный интерес. Пусть $F \in X_\lambda$, обозначим через $Z(F)$ множество нулей функции F .

Следствие. Пусть $\lambda \in \Omega$, пусть функции f и g принадлежат классу X_λ и пусть $Z(f) \supset Z(g)$.

Тогда

$$\frac{|f(z)|}{|g(z)|} \leq \text{const } \lambda^{C_0}(|z|), \quad z \in C^1,$$

где C_0 — некоторое положительное число, не зависящее от f и g .

Лемма 2. Пусть $f \in X_\lambda$ и

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

Если Φ — линейный, непрерывный функционал на X_λ , то имеет место равенство

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \Phi(z^k) \rho^k.$$

Лемма 3. Пусть $\lambda \in \Omega$, предположим, что $f \in X_\lambda$, тогда

$$|f'(z)| \leq \text{const } \lambda'(|z|).$$

Для доказательства этой леммы используются оценки С. Варшавского о конформных отображениях криволинейных полос (см. (6)).

Лемма 4. Пусть $f \in X_\lambda$, $\lambda \in \Omega$. Предположим, что для производной функции φ выполняется оценка

$$\varphi'(r) \leq \text{const} (\varphi(r))^k, \quad r \in (0, +\infty),$$

где, как и прежде, $\varphi = \lg \lambda$, k — положительное число. Тогда существуют положительные числа $M=M(k, n)$ и $N=N(k, n)$ такие, что

$$\left| \frac{D^n(f)(z)}{f(z)} \right| \leq M(\varphi(|z|))^N, \quad n=0, 1, \dots \quad z \in C^1,$$

где $D(f)(z) = z f'(z)$.

Приведем схему доказательства теоремы 1.

Обозначим через $E(f)$ замыкание в пространстве X_λ множества Pf , где P — совокупность всех многочленов от z . Предположим, что Φ — линейный непрерывный функционал на X_λ , ортогональный к $E(f)$.

По теореме Хана—Банаха для доказательства теоремы достаточно установить равенство

$$\Phi(1) = 0.$$

Используя леммы 2 и 4, легко убедиться, что

$$\Phi(D^n f) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k k^n \Phi(z^k) = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

и потому для любого $P_n \in P$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P_n(k) a_k \Phi(z^k) = 0.$$

Отсюда выводится, что

$$a_0 \Phi(1) = 0.$$

Поскольку $a_0 \neq 0$, то $\Phi(1) = 0$

3°. Пусть U —открытый единичный круг на комплексной плоскости и

$$\varphi_\varepsilon(z) = \left| \frac{1+z}{1-z} \right|^2 + \left| \frac{1+z}{1-z} \right|^{1-\varepsilon}, \quad z \in U, \quad \varepsilon \in (0, 1).$$

Далее введем следующее пространство аналитических в U функций:

$$X_{\varphi_\varepsilon} = \{f, f \in A(U) : |f(z)| \exp(-\varphi_\varepsilon(z)) \rightarrow 0, z \rightarrow 1, z \in U\};$$

$$\|f\|_{X_{\varphi_\varepsilon}} = \sup_{z \in U} |f(z)| \exp(-\varphi_\varepsilon(z)).$$

Легко видеть, что X_{φ_ε} —банаховое пространство, $zX_{\varphi_\varepsilon} \subset X_{\varphi_\varepsilon}$, а функционалы $\Phi_z(f) = f(z)$, $f \in X_{\varphi_\varepsilon}$, $z \in U$ непрерывны в пространстве X_{φ_ε} .

Пусть

$$f(z) = \exp \left\{ - \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 \right\}, \quad z \in U.$$

Очевидно, что $f, f^{-1} \in X_{\varphi_\varepsilon}$

Теорема 2. Множество многочленов всюду плотно в пространстве X_{φ_ε} . В то же время

$$\inf_{P \in P} \|Pf - 1\|_{X_{\varphi_\varepsilon}} = C_0 > 0.$$

Институт математики

Академии наук Армянской ССР

Յ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ

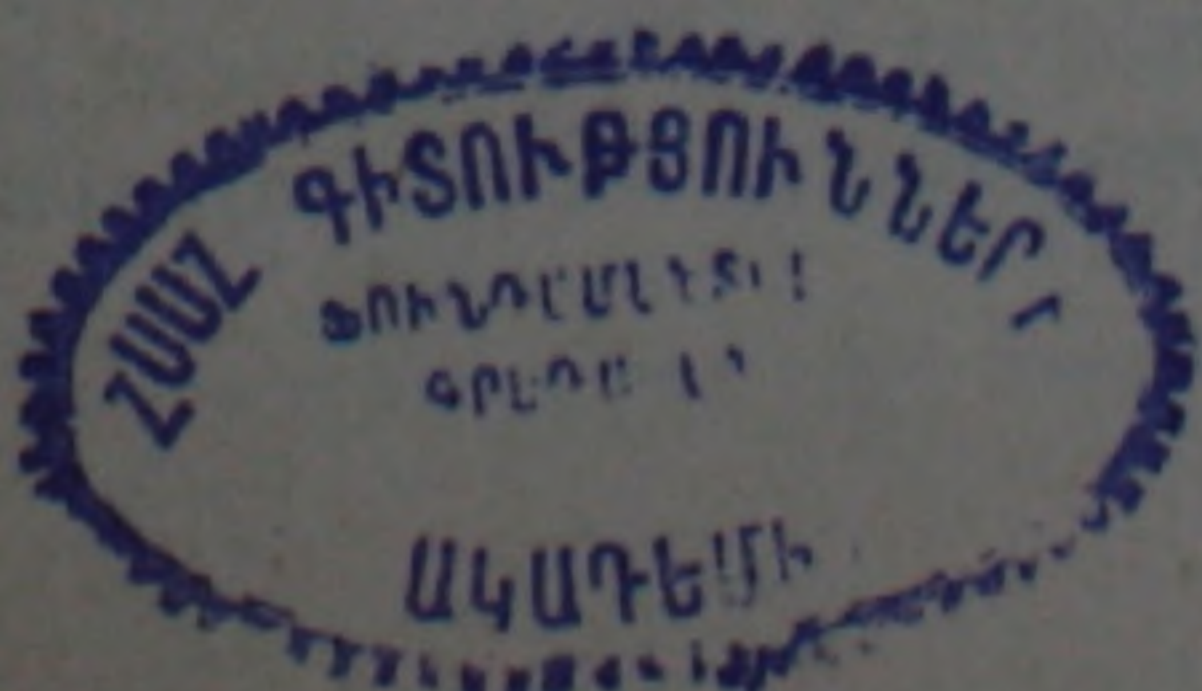
Թույլ եսկադարձելիության մասին անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ տարածութիւններում

Դիցուք Λ -ն բազական արագ աճող ֆունկցիա է $(0, +\infty)$ կիսաառանցքի վրա, X_Λ -ով նշանակենք արև ամբողջ ֆունկցիաների տարածութիւնը, որոնց մոդուլը աճում է ավելի դանդաղ քան Λ -ն:

նշված տիպի Λ և λ , ($\Lambda(r) \geq \lambda(r)$) երկու ֆունկցիաների համար, հոդվածում քննարկվում են պայմաններ, որոնց դեպքում լուրացանչուր $f \in X_\lambda$ $f(z) \neq 0$, $z \in C^1$ թույլ հակադարձելի է X_λ -տարածության մեջ:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ H. S. Shapiro, Mich. Math. J., 11, 161—165 (1964). ² H. K. Никольский, Тр. МИАН им. В. А. Стеклова, т. 120 (1974). ³ A. Shields, Записки науч. семин., ЛОМИ АН СССР им. В. А. Стеклова, т. 62 (1978). ⁴ И. Ф. Красичков-Терновский, Мат. сб., т. 102, № 2 (1977). ⁵ И. Ф. Красичков-Терновский, Мат. сб., т. 103, № 1 (1977). ⁶ С. О. Варшавский, сб. перев., Математика, т. 2, № 4, (1958).



УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

А. Л. Нерсисян

Полиномиальный алгоритм кодирования дискретной информации с заданным уровнем искажения

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 19/XI 1981)

1°. На практике часто встречаются ситуации, когда пользователь применяет информацию не в том виде, в каком она к нему поступает, а в некотором преобразованном. Это имеет место, например, когда информация порождается не в том алфавите, в котором она используется, когда информация допускает погрешности в заданных пределах или когда она является недоопределенной и при использовании должна быть доопределена и т. д.

Во всех этих случаях вместо первоначальной информации используется некоторая другая, которую будем называть „аппроксимирующей“. Степень приближения аппроксимирующей информации к исходной оценивается некоторой совокупностью критериев.

В вероятностной постановке задача о кодировании информации с заданной степенью точности была впервые сформулирована К. Шенноном, и ему принадлежат основополагающие результаты в этой области ⁽¹⁾. Этой проблематике посвящена монография ⁽²⁾ (см. также обзор ⁽³⁾).

В данной работе рассмотрена детерминированная постановка задачи о представлении информации с заданной точностью при дополнительном требовании эффективности процедур кодирования и декодирования. Для ее решения были использованы детерминированные методы сжатия информации, первоначально развитые О. Б. Лупановым ⁽⁴⁾, Э. И. Нечипоруком ⁽⁵⁾ и Л. А. Шоломовым ⁽⁶⁾ для синтеза логических схем. Частный случай этой задачи, относящийся к кодированию недоопределенной информации, рассматривался в ⁽⁷⁾.

2°. Пусть имеются конечные алфавиты $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_l\}$. Исходная последовательность $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, являющаяся словом в алфавите A , должна быть воспроизведена у пользователя в виде последовательности $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$ той же длины в алфавите B . Последовательность $\bar{y}$ будем называть *аппроксимацией* последовательности $\bar{x}$. Качество воспроизведения определяется некоторой совокупностью критериев $f_1, \dots, f_N$. Каждый критерий f_a характеризуется побуквенной мерой искажения $\rho^{(a)}(a_i, b_j) = \alpha_{ij}^{(a)}$, где $0 \leq \alpha_{ij} \leq \infty$ представляет собой „штраф“ за то, что вместо символа a_i воспроизведено b_j . *Общее искажение* между последовательностями $\bar{x}$ и $\bar{y}$

$$\rho^{(d)}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{u=1}^n \rho^{(d)}(x_u, y_u) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}^{(d)} w_{ij},$$

где w_{ij} означает число позиций u , для которых $x_u = a_i, y_u = b_j$. По каждому критерию f_d задан допустимый уровень относительного искажения $\varepsilon^{(d)} \geq 0, d = 1, \dots, N$, и требуется, чтобы аппроксимация $\tilde{y} = \tilde{y}(\tilde{x})$ удовлетворяла совокупности условий

$$\rho^{(d)}(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \varepsilon^{(d)} n, \quad d = 1, \dots, N.$$

Такую аппроксимацию будем называть $\tilde{\varepsilon}$ -точной, где $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(N)})$. Нетрудно видеть, что для выполнимости этих условий при малых значениях $\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(N)}$ необходимо, чтобы для каждого i существовало такое $j = j(i)$, что $\alpha_{ij(i)}^{(d)} = 0$ при всех d .

Обозначим через $m_n(k_1, \dots, k_s)$ класс всех последовательностей длины n , содержащих k_i символов a_i ($k_1 + \dots + k_s = n$). Далее считаем, что $k_i = k_i(n), \dots, k_s = k_s(n)$. Пусть имеется некоторый способ кодирования $K = K_n$, который любой последовательности $\tilde{x} \in m_n(k_1, \dots, k_s)$ ставит в соответствие двоичный набор (код) $K(\tilde{x})$, и пусть имеется способ декодирования $D = D_n$, такой, что $D(K(\tilde{x}))$ является словом длины n в алфавите B . Слово $\tilde{y} = D(K(\tilde{x}))$ будем считать аппроксимацией $\tilde{x}$. Обозначим через $l(\tilde{x})$ длину кодового слова $K(\tilde{x})$ и положим

$$l_n(k_1, \dots, k_s) = \max_{\tilde{x} \in m_n(k_1, \dots, k_s)} l(\tilde{x}).$$

Точность воспроизведения будем характеризовать величинами

$$\rho^{(d)}(\tilde{x}) = \rho^{(d)}(\tilde{x}, D(K(\tilde{x}))), \quad d = 1, \dots, N.$$

Метод кодирования—декодирования будем называть $\tilde{\varepsilon}$ -точным, где $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(N)})$, $\varepsilon^{(1)} \geq 0, \dots, \varepsilon^{(N)} \geq 0$, если для всех $\tilde{x} \in m_n(k_1, \dots, k_s)$

$$\rho^{(d)}(\tilde{x}) \leq \varepsilon^{(d)} n, \quad d = 1, \dots, N.$$

При заданных $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(N)})$ и $P = (p_1, \dots, p_s)$, $\sum_i p_i = 1$, определим функцию $\tilde{\varepsilon}$ -энтропии следующим образом*:

$$H_{\tilde{\varepsilon}}(P) = \min_{\{p_{ij}\}} \sum_{i,j} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{p_i \sum_u p_{ui}},$$

где минимум берется по всевозможным $(s \times t)$ -матрицам $\|p_{ij}\|$, удовлетворяющим условиям

$$\sum_i p_{ij} = p_j, \quad p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i,j} \alpha_{ij}^{(d)} p_{ij} \leq \varepsilon^{(d)}, \quad d = 1, \dots, N.$$

Теорема. 1) Пусть выполнено условие

$$\frac{H_{\tilde{\varepsilon}}\left(\frac{k_1}{n}, \dots, \frac{k_s}{n}\right) \log n}{n \log \log n} \rightarrow \infty.$$

* Здесь и далее под $\log x$ понимается $\log_2 x$.

Тогда для произвольной функции $\alpha(n) \rightarrow \infty$ существуют ε -точное кодирование K_n и декодирование D_n , для которых максимальная длина удовлетворяет оценке

$$l_n(k_1, \dots, k_s) \leq n \left(H_{\varepsilon} \left(\frac{k_1}{n}, \dots, \frac{k_s}{n} \right) + \frac{\alpha(n) \log \log n}{\log n} \right).$$

2) Если функция $\alpha(n)$ допускает вычисление со сложностью n , то кодирование K_n и декодирование D_n имеют сложность, не большую, чем $n^{1+\gamma}$, где $\gamma > 0$ произвольно*.

3) Для любых ε -точных способов кодирования и декодирования**

$$l_n(k_1, \dots, k_s) \geq n H_{\varepsilon} \left(\frac{k_1}{n}, \dots, \frac{k_s}{n} \right) - c_1 \log n. \quad (1)$$

Под сложностью алгоритма, фигурирующей в пункте 2, можно понимать число шагов или потребную память машины с произвольным доступом к памяти (RAM⁽⁸⁾), использующей побуквенные операции, либо число элементов схем из функциональных элементов⁽⁹⁾, осуществляющих кодирование и декодирование.

3°. Пусть $W = \|w_{ij}\|$ является $(s \times t)$ -матрицей, удовлетворяющей условию

$$\sum_j w_{ij} = k_i, \quad i = 1, \dots, s.$$

С матрицей W будем связывать функцию

$$I(W) = n I(\|p_{ij}\|),$$

где

$$I(\|p_{ij}\|) = \sum_{i,j} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{\sum_u p_{uj} \sum_v p_{iv}}, \quad p_{ij} = \frac{w_{ij}}{n}.$$

Положим*** $\Delta = \left\lfloor \frac{n}{\log^2 n} \right\rfloor$ и рассмотрим всевозможные $(s \times t)$ -матрицы $W = \|w_{ij}\|$, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij}^{(d)} w_{ij} \leq \varepsilon^{(d)} n, \quad d = 1, \dots, N$$

и такие, что при всех $j \neq j(i)$

$$w_{ij} = l_{ij} \Delta,$$

где l_{ij} целые числа, а при $j = j(i)$

$$w_{ij(i)} = k_i - \sum_{j \neq j(i)} w_{ij}.$$

Среди них найдем матрицу $W_0 = \|w_{ij}^0\|$ с минимальным значением $I(W)$.

* Условие вычислимости функции $\alpha(n)$ со сложностью n необременительно, ибо оно означает, что допустима экспоненциальная сложность относительно длины двоичной записи аргумента.

** Здесь и далее буквами с индексами будем обозначать константы.

*** Через $[z]$ (через $|z|$) обозначено наибольшее (наименьшее) целое число, не превосходящее (не меньше) z .

Лемма 1. 1) Для матрицы W_0 выполнено неравенство*

$$I(W_0) \leq nH_s\left(\frac{k_1}{n}, \dots, \frac{k_s}{n}\right) + O\left(\frac{n}{\log n}\right).$$

2) Вычислительная сложность нахождения матрицы W_0 ограничена величиной $n(\log n)^{2st+4}$.

4°. Введем величины

$$q^0(j/i) = \frac{w_{ij}^0}{k_i}, \quad i=1, \dots, s, \quad j=1, \dots, t$$

и образуем $(s \times t)$ -матрицу $Q^0 = \|q(j/i)\|$.

Пусть задан целочисленный параметр $v \leq n$. Рассмотрим произвольный набор $x_1, \dots, x_s$, такой, что $\sum_i x_i = v$.

Обозначим

$$I\left(\frac{x_1}{v}, \dots, \frac{x_s}{v}; Q^0\right) = \sum_{i,j} \frac{x_i}{v} q^0(j/i) \log \frac{\frac{x_i}{v} q^0(j/i)}{\frac{x_i}{v} \sum_i \frac{x_i}{v} q^0(j/i)}.$$

Скажем, что множество n последовательностей в алфавите B ϵ -точно аппроксимирует множество m последовательностей в алфавите A , если для каждой последовательности из m в n имеется некоторая ее ϵ -точная аппроксимация. Обозначим через $T_\epsilon(x_1, \dots, x_s)$ минимальную мощность множества n , ϵ -точно аппроксимирующего $m_v(x_1, \dots, x_s)$.

Лемма 2. 1) Имеет место оценка

$$\log T_\delta(x_1, \dots, x_s) \leq v I\left(\frac{x_1}{v}, \dots, \frac{x_s}{v}; Q^0\right) + O(\log v),$$

где $\bar{\delta} = (\delta^{(1)}, \dots, \delta^{(N)})$, причем

$$\delta^{(d)} = \sum_{i,j} a_{ij}^{(d)} \omega_{ij}, \quad \omega_{ij} = [x_i q^0(j/i)], \quad j \neq j(i).$$

2) Множество n , $\bar{\delta}$ -точно аппроксимирующее $m_v(x_1, \dots, x_s)$ и удовлетворяющее оценке пункта 1, может быть найдено со сложностью, не превосходящей $c_1^* + c_2 \log^3 n$.

Эта лемма доказывается на основе градиентной процедуры, использованной в (6) и являющейся модификацией процедуры из (5).

5°. Пусть имеется последовательность $\bar{x} \in m_n(k_1, \dots, k_s)$ в алфавите A . Зададимся натуральным параметром v и разобьем последовательность $\bar{x}$ на куски длины v

$$\bar{x} = \bar{x}_1 \dots \bar{x}_M, \quad M = \left\lfloor \frac{n}{v} \right\rfloor. \quad (2)$$

* Записи $\varphi_n \leq \psi_n$ и $\varphi = O(\psi_n)$ означают, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n}{\psi_n} < \infty$, а запись $\varphi_n = o(\psi_n)$ — что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n}{\psi_n} = 0.$$

Лемма 3. Замена каждого куска $\tilde{\chi}_u$ его $\tilde{\delta}_u$ -точной аппроксимацией $\tilde{\eta}_u$, построенной в соответствии с леммой 2, дает последовательность $\tilde{y} = \tilde{\eta}_1 \dots \tilde{\eta}_M$, являющуюся $\tilde{\epsilon}$ -точной аппроксимацией $\tilde{x}$.

6°. Опишем процедуру кодирования. Кодовое слово $K(\tilde{x})$ для последовательности $\tilde{x} \in m_n(k_1, \dots, k_s)$ будет состоять из трех частей

$$K(\tilde{x}) = \Lambda \Sigma \Xi,$$

которые соответственно будем называть справочной, главной и вспомогательной частями.

Для построения главной части Σ кодового слова $K(\tilde{x})$ последовательность $\tilde{x} \in m_n(k_1, \dots, k_s)$ представим в виде (2), разбив ее на куски длины v . Произведем группировку кусков с одинаковыми параметрами $x_1, \dots, x_s$ ($x_1 + \dots + x_s = v$) в один класс и все полученные классы занумеруем $m_1, \dots, m_R$. Для каждого класса $m_v = m_v(x_1, \dots, x_s)$ с помощью леммы 2 отыщем множество n_v , $\tilde{\delta}_v$ -точно аппроксимирующее m_v . Мощность n_v обозначим через $\hat{T}_{\tilde{\delta}_v}(x_1, \dots, x_s)$. Расположим все последовательности $\tilde{\eta} \in n_v$ в некотором порядке и занумеруем их двоичными последовательностями $\tilde{\pi}(\tilde{\eta})$ длины $\tau_v = \lceil \log \hat{T}_{\tilde{\delta}_v} \rceil$. Если i является некоторым числом, то через $\tilde{i} = (i_1 \dots i_p)$ будем обозначать его двоичную запись минимальной длины, а через $\tilde{i}^*$ — двоичную последовательность вида

$$\tilde{i}^* = (i_1 i_1 \dots i_p i_p 01).$$

Код $\tilde{\sigma}(\tilde{\chi}_i)$ для куска $\tilde{\chi}_i$ из класса $m_v = m_v(x_1, \dots, x_s)$ будет иметь вид

$$\tilde{\sigma}(\tilde{\chi}_i) = \tilde{v}^* \tilde{\pi}(\tilde{\eta}_j),$$

где $\tilde{\eta}_j$ означает $\tilde{\delta}_v$ -точную аппроксимацию $\tilde{\chi}_i$.

Последовательность приписанных друг к другу кодов кусков $\tilde{\chi}$ образует главную часть Σ кодового слова $K(\tilde{x})$. Длину главной части обозначим через L_Σ .

Вспомогательная часть Ξ представляет собой таблицу $\tilde{\delta}$ -аппроксимаций. Пусть всеми $\tilde{\delta}_v$ -аппроксимациями для класса $m_v = m_v(x_1, \dots, x_s)$ являются $\tilde{\eta}_{v_1}, \dots, \tilde{\eta}_{v_{\hat{T}_v}}$, где $\hat{T}_v = \hat{T}_{\tilde{\delta}_v}(x_1, \dots, x_s)$.

Положим

$$\tilde{\xi}(m_v) = \tilde{\eta}_{v_1} \dots \tilde{\eta}_{v_{\hat{T}_v}},$$

где $\hat{\eta}_{v_{\hat{T}_v}}$ получается из $\tilde{\eta}_{v_{\hat{T}_v}}$ путем замены каждого символа $b_i \in B$ последовательности $\tilde{\eta}_{v_{\hat{T}_v}}$ двоичной записью $\hat{j}$ длины $\lceil \log t \rceil$ его номера. Вспомогательная часть будет иметь вид

$$\Xi = \tilde{\xi}(m_1) \dots \xi(m_R),$$

где R число классов $m_v(x_1, \dots, x_s)$. Длину слова $\xi(m_i)$ обозначим через I_i , а общую длину вспомогательной части через L_Ξ .

Справочная часть Λ содержит числовые параметры, необходимые для того, чтобы по главной и вспомогательной частям осуществить декодирование. Она имеет вид

$$\Lambda = \tilde{n}^* \tilde{k}_1^* \dots \tilde{k}_s^* \tilde{L}_2^* \tilde{L}_3^* \tilde{\tau}_1^* \dots \tilde{\tau}_n^* \tilde{I}_1^* \dots \tilde{I}_R^*.$$

7°. Для $\tilde{\chi} \in m_v(x_1, \dots, x_s)$ введем обозначение

$$\varphi(\tilde{\chi}) = v I\left(\frac{x_1}{v}, \dots, \frac{x_s}{v}, Q^0\right).$$

Следующая лемма является следствием выпуклости взаимной информации, при фиксированных переходных вероятностях ⁽¹⁰⁾.

Л е м м а 4.

$$\varphi(\tilde{\chi}_1 \dots \tilde{\chi}_g) \geq \sum_{u=1}^g \varphi(\tilde{\chi}_u).$$

Можно подсчитать, что длина главной части составляет

$$L_2 = \sum_{i=1}^M (\varphi(\tilde{\chi}_i) + O(\log v))$$

и в соответствии с леммой 4 и леммой 1 с учетом равенства $\varphi(\tilde{x}) = I(W_0)$ оценивается величиной

$$\begin{aligned} L_2 \leq \varphi(\tilde{x}) + O\left(\frac{n}{v} \log v\right) &\leq n H_{\tilde{\tau}}\left(\frac{k_1}{n}, \dots, \frac{k_s}{n}\right) + \\ &+ O\left(\frac{n}{\log n}\right) + O\left(\frac{n \log v}{v}\right). \end{aligned}$$

Вспомогательная и справочная части дают дополнительный вклад $c_1^* + v^* \log n$.

Положив

$$v = \left\lfloor \frac{\log n}{a(n)} \right\rfloor,$$

получаем требуемую оценку длины кода. Непосредственный подсчет показывает, что сложность процедур кодирования и декодирования удовлетворяет оценке пункта 2 теоремы.

8°. Способом, приложенным в ⁽⁹⁾ при доказательстве нижней оценки леммы 1, можно получить неравенство

$$\log T_{\tilde{\tau}}(k_1, \dots, k_s) \geq n H_{\tilde{\tau}}\left(\frac{k_1}{n}, \dots, \frac{k_s}{n}\right) - c_1 \log n,$$

из которого с помощью мощностных соображений получим оценку (1).

З а м е ч а н и е. На основе метода кодирования, предложенного в данной работе, может быть получено доказательство теоремы К. Шеннона ⁽¹⁾ о кодировании источника с заданным критерием верности, при произвольной побуквенной мере искажения, не использующее метод случайного кодирования.

Автор выражает свою признательность Л. А. Шоломову за большую помощь в процессе выполнения работы.

ВНИИ системных
исследований ГКНТ и АН СССР

Ա. Լ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ

Տրված աղավաղման մակարդակով դիսկրետ ինֆորմացիայի կոդավորման ավգորիթմ

Աշխատանքում քննարկվում է n երկարությամբ բառերի տրված ճշտությամբ կոդավորման խնդիրը, միջտառային աղավաղման մի քանի շափանիշների առկայության դեպքում:

Առաջարկվում է մեթոդ, որը ապահովում է ասիմպտոտիկ նվազագույն երկարության կոդ: Մեթոդի հաշվողական բարդությունը չի գերազանցում $n^{1+\gamma}$, որտեղ $\gamma > 0$ կամայական հաստատուն է:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ К. Шеннон, Работы по теории информации и кибернетике, ИЛ, М., 1963.
² T. Berger, Rate Distortion Theory, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. Y., 1971.
³ Ю. М. Штарьков, в кн.: Информационный обмен в вычислительных сетях, Наука, М., 1980. ⁴ О. Б. Лупанов, в сб.: Проблемы кибернетики, вып. 14 (1965). ⁵ Э. И. Нечипорук, ДАН СССР, т. 163, № 1 (1965). ⁶ Л. А. Шоломов, в сб.: Проблемы кибернетики, вып. 19 (1967). ⁷ А. Л. Нерсисян, ВНИИСИ, Сборник «Методы исследований сложных систем». Труды конференции аспирантов и молодых специалистов ВНИИСИ, М. 1981, ст. 29—33. ⁸ А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман, Построение и анализ вычислительных процедур, Мир, М., 1979. ⁹ О. Б. Лупанов, в сб.: Проблемы кибернетики, вып. 7 (1962). ¹⁰ Р. Галлагер, Теория информации и надежная связь, Советское радио, М., 1974.

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

Г. С. Григорян

Двумерные предельные теоремы в модели с
категорийными абсолютными приоритетами при
единичной загрузке

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Варшамовым 14/XII 1981)

1°. В теории массового обслуживания внимание исследователей начинают привлекать параметрические модели, позволяющие разработчикам ЭВМ на стадии проектирования подбором параметров найти модель, адекватно отражающую нужную ему ситуацию.

Один из способов построения параметрических моделей—квантование временной оси.

В одноканальную систему массового обслуживания с ожиданием поступают независимые пуассоновские потоки 1-вызовов, ..., r -вызовов с параметрами $a_1, \dots, a_r$ соответственно. Длительности обслуживания независимы, не зависят от процесса поступления и для i -вызовов имеют функцию распределения (ФР) $B_i(t)$, $B_i(+0)=0$.

Ось времен разделена на „кванты“ длины $T>0: [0, T), [T, 2T), [2T, 3T), \dots$. i -вызов имеет относительный (схема (A, T)) или абсолютный с дообслуживанием (схема (B, T)) приоритет перед j -вызовом ($1 \leq i < j \leq r$), если оба поступают в систему на одном и том же кванте. Вызовы всех потоков, поступающие на разных квантах, обслуживаются в порядке поступления. При $T=+\infty$ получаем обычные дисциплины относительного и абсолютного приоритета.

Обозначим через $w_k^T(t)$ ($k=\overline{1, r}$) виртуальное время ожидания (ВВО) k -вызова в момент t , через $\bar{w}_k^T(t)$ —условное ВВО k -вызова в момент t при условии прекращения с момента t доступа вызовов в систему.

В работе (1) для схем (A, T) и (B, T) в терминах преобразований Лапласа—Стильтьеса найдены ФР процессов $\bar{w}_k^T(t)$ и $w_k^T(t)$ ($k=\overline{1, r}$). Там же при $\rho_{r1} < 1$, где

$$\rho_{r1} = a_1 \beta_{11} + \dots + a_r \beta_{r1} \quad \left(\beta_{k1} = \int_0^\infty t dB_k(t), \quad k=\overline{1, r} \right)$$

есть загрузка системы $\overline{1, k}$ -вызовами (1 -вызовами, ..., k -вызовами), описаны все возможные предельные ФР процессов $\bar{w}_k^T(t)$ и $w_k^T(t)$ ($k=\overline{1, r}$) при $t=nT+\tau \rightarrow +\infty$ ($n \geq 0; 0 < \tau \leq T$), когда одновременно меняются n , T и τ .

Обобщение результатов работы (1) для векторов $(\bar{w}_1^T(t), \dots,$

$\overline{w}_r^T(t)$) и $(w_1^T(t), \dots, w_r^T(t))$ в случае схемы (B, T) содержится в работе П. Т. Хостикина ⁽²⁾.

Естественным образом возникает вопрос изучения предельных распределений для ВВО при $\rho_{r1} \geq 1$. Обсудим этот вопрос, например, для $\overline{w}_k^T(t)$ ($k = \overline{1, r}$) в схеме (B, T) при $\rho_{r1} \geq 1$. Момент времени t допускает единственное представление $t = nT + \tau$ ($n \geq 0$; $0 < \tau \leq T$). Обратимся при $t = nT + \tau \rightarrow +\infty$ к отношению τ/t . Ясно, что предельные при $t \rightarrow +\infty$ точки этого отношения полностью заполняют при произвольном изменении T интервал $[0, 1]$. Оказывается, что при некоторых ограничениях на ФР $B_i(t)$ ($i = \overline{1, r}$) для фиксированной предельной точки отношения τ/t существует своя предельная ФР процесса $\overline{w}_k^T(t)$ при $t \rightarrow +\infty$.

В работе ⁽²⁾ исследование схем (A, T) и (B, T) проводится при наличии следующих условий: если $s^+ \rightarrow 0$ ($\operatorname{Re} s \geq 0$, $s \rightarrow 0$), то для

$$\beta_k(s) = \int_0^\infty e^{-st} dB_k(t)$$

имеют место разложения

$$\beta_k(s) = 1 - \beta_{k1} \cdot s + \alpha_k^{(\beta)} \cdot s^{\gamma(k)} + O(s^{\gamma(k)}) \quad (1 < \gamma(k) \leq 2), \quad (1)$$

где $\alpha_k^{(\beta)}$ — положительные константы. Положим ($k = \overline{1, r}$):

$$\gamma_k = \min_{1 \leq i \leq k} \gamma(i), \quad L_k = \{i : i \leq k, \gamma(i) = \gamma_k\}, \quad B_k = \sum_{i \in L_k} a_i \alpha_i^{(\beta)}.$$

В работе ⁽²⁾ описан класс всех возможных предельных ФР для $\overline{w}_k^T(t)$ и $w_k^T(t)$ ($k = \overline{1, r}$) при $\rho_{r1} \geq 1$, $t = nT + \tau \rightarrow +\infty$ ($n \geq 0$; $0 < \tau \leq T$), произвольном изменении T и наличии условий (1) в схемах (A, T) и (B, T) при существовании некоторых предельных связей между t и τ , t и $T' = T - \tau$.

Например, при ρ_{r1} требуется существование пределов

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\tau/t^{1/\gamma_r}) = b' \quad (0 \leq b' \leq +\infty), \quad (2)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} T' = T_0 \quad (0 \leq T_0 \leq +\infty), \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (T'/t^{1/\gamma_r}) = d' \quad (0 \leq d' \leq +\infty). \quad (4)$$

В настоящей работе результаты ⁽²⁾ при $\rho_{r1} = 1$ в случае схемы (B, T) обобщаются на двумерный случай.

2°. Для формулировки основных результатов введем обозначения. Обозначим через $W_k(x, y)$ и $\overline{W}_k(x, y)$ ($k = \overline{2, r-1}$) стационарные (безусловную и условную) ФР векторов $(w_{k-1}^\infty(t), w_k^\infty(t))$ и $(\overline{w}_{k-1}^\infty(t), \overline{w}_k^\infty(t))$ при $t \rightarrow +\infty$:

$$W_k(x) = W_k(+\infty, x), \quad \overline{W}_k(x) = \overline{W}_k(+\infty, x).$$

ФР $\overline{W}_k(x, y)$ и $W_k(x, y)$ ($k = \overline{2, r}$) найдены в явном виде в работе ⁽³⁾.

Пусть $\bar{G}_\alpha(x)$ ($1 < \alpha \leq 2$; $x \geq 0$) — положительный устойчивый закон с параметром α , определяемый своим преобразованием Лапласа — Стильтьеса ($\operatorname{Re} s \geq 0$; $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера):

$$\int_0^\infty e^{-sx} d\bar{G}_\alpha(x) = \exp\{s^\alpha\} \left\{ 1 - \frac{s}{\Gamma(1/\alpha)} \int_0^\infty \exp\{-s^\alpha \cdot v\} v^{-(1-\alpha^{-1})} dv \right\}.$$

Положим ($k = \overline{1, r}$; $x \geq 0$):

$$\sigma_k = a_1 + \dots + a_k, \quad B_{(k)}(x) = \sum_{i=1}^k (a_i/\sigma_k) B_i(x),$$

$$D(x) = \int_0^x \left\{ e^{-\sigma_{k-1}u} + \int_u^x u e^{-\sigma_{k-1}v} \sum_{n \geq 1} v^{n-1} \frac{\sigma_{k-1}^n}{n!} d_v B_{(k-1)}^{n*}(v-u) \right\} d\bar{W}_k(x),$$

$$W_k^{T_0}(x) = \begin{cases} D(x), & x \leq T_0, \\ D(T_0) + \bar{W}_k(x) + \sum_{n \geq 0} \frac{(\sigma_{k-1} \cdot T_0)^n}{n!} e^{-\sigma_{k-1} \cdot T_0} \cdot B_{(k-1)}^{n*}(x) - \\ \int_0^{T_0} \frac{(\sigma_{k-1} \cdot [T_0 - u])^n}{n!} e^{-\sigma_{k-1} \cdot [T_0 - u]} B_{(k-1)}^{n*}(x-u) dD(u), \end{cases}$$

если $x > T_0$,

$$d_k = \frac{\rho_{k-1} d'}{B_r^{1/1r}}, \quad d'_k = \frac{\rho_{k-1} d'}{B_r^{1/1r}}, \quad p_k = \frac{\rho_k b'}{B_r^{1/1r}}, \quad \rho_k = 1 - \rho_{k+1}.$$

Здесь * — знак свертки, а B^{n*} есть n -кратная свертка B с собой.

Обозначим для схемы (A, ∞) через $\pi_k(u)$ ($k = \overline{1, r}$; $u > 0$) период занятости обслуживанием $\overline{1, k}$ -вызовов с задержкой u , т. е. промежуток времени, начинающийся с задержки u , в начале которой вызовы в системе отсутствуют, а за u вызовы не обслуживаются, а только накапливаются, и завершающийся первым после задержки моментом освобождения системы от $\overline{1, k}$ -вызовов.

В работе (3) в явном виде вычислены при $\rho_{k+1} < 1$ совместные вероятности ($k = \overline{2, r}$)

$$P\{\pi_{k-1}(u) < x, \pi_k(v) < y\} = M_k(u, v; x, y) \quad 0 < u \leq v, x \leq y.$$

Положим ($u > 0$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; $k = \overline{1, r}$):

$$V_k(u, x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\sigma_k u)^n}{n!} e^{-\sigma_k u} B_{(k)}^{n*}(x), \quad U_k(u, x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\sigma_k u)^n}{n!} e^{-\sigma_k u} B_k^{n*}(x),$$

$$M_k(u, x) = P\{\pi_k(u) < x\},$$

$$I_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } T_0 \geq \min(x, y) \\ \bar{W}^k(x, y) \cdot \int_0^{\min(x, y)} U_{k-1}(T_0, y-u) d_u V_{k-2}(T_0, u) - \end{cases}$$

$$\int_{u=0}^{T_0} \int_{v=u}^y \int_{w=0}^{T_0} \int_{\lambda=0}^{\min(x, y-v+u)-w} U_{k-1}(T_0, y-(v-u)-w-\lambda) d_\lambda V_{k-2}(T_0-w, \lambda).$$

$$d_w M_{k-2}(u, w) d_u d_v \bar{W}_k(u, v), \text{ если } T_0 < \min(x, y),$$

$$I_2 = \begin{cases} 0, & \text{если } T_0 \geq y, \\ \int_{u=0}^{\min(x, T_0)} \int_{v=0}^y \int_{w=u}^{\min(x, T_0)-v} \int_{\lambda=0}^{y-v+u-w} U_{k-1}(T_0, y-(v-u)-w-\lambda) d_\lambda V_{k-2}(T_0-w, \lambda) d_w M_{k-2}(u, w) d_u d_v \bar{W}_k(u, v) - \\ - \int_{u=0}^{\min(x, T_0)} \int_{v=0}^{T_0} V_{k-1}(T_0-v, y-v) d_u d_v W_k(u, v), & \text{если } T_0 < y, \end{cases}$$

$$I_3 = W_k(\min(x, y, T_0), \min(y, T_0)).$$

Здесь над знаком свертки указывается переменная, по которой свертка берется.

3°. Перейдем к формулировке основных результатов в случае схемы (B, T) .

Теорема 1. Пусть $\rho_{r1} = 1$, существует предел (2),

$$t = nT + \tau \quad (n \geq 0; 0 < \tau \leq T).$$

а) Если $b' = +\infty$, то существует предел $(x \geq 0; y \geq 0; k = \overline{2, r-1})$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P[\bar{w}_{k-1}^T(t) < x, \bar{w}_k^T(t) < y] = \bar{W}_k(x, y).$$

б) Если $b' = +\infty$, выполнены условия (1), то существует предел $(x \geq 0; y \geq 0)$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P\left\{\bar{w}_{r-1}^T(t) < x, \frac{\bar{w}_r^T(t)}{(B_r t)^{1/r}} < y\right\} = \bar{W}_{r-1}(x) \bar{G}_{1r}(y).$$

в) Если $0 \leq b' < +\infty$, выполнены условия (1), то существует предел $(x \geq 0; y \geq 0; k = \overline{2, r})$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P\left\{\frac{\bar{w}_{k-2}^T(t)}{(B_r t)^{1/r}} < x, \frac{\bar{w}_k^T(t)}{(B_r t)^{1/r}} < y\right\} = \bar{G}_{1r}(\min(x + p_{k-1}, y + p_k)).$$

Теорема 2. Пусть $\rho_{r1} = 1$, существует предел (2),

$$t = nT + \tau \quad (n \geq 0; 0 < \tau \leq T).$$

а) Если $b' = +\infty$, существует предел (3), то существует предел $(x \geq 0; y \geq 0; k = \overline{2, r-1})$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P[w_{k-1}^T(t) < x, w_k^T(t) < y] = I_1 + I_2 + I_3.$$

В частных случаях $T_0 \geq y$ и $T_0 = 0$ последнее предельное распределение принимает особенно простой вид. Оно равно $W_k(x, y)$ и $\bar{W}_k(x, y)$ соответственно.

б) Если $b' = +\infty$, выполнены условия (1), существуют пределы (3) и (4), то существует предел ($x \geq 0$; $y \geq 0$):

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P \left\{ w_{r-1}^T(t) < x, \frac{w_r^T(t)}{(B_r t)^{1/r}} < y \right\} = W_{r-1}^T(x) \tilde{G}_r(y).$$

в) Если $0 \leq b' < +\infty$, выполнены условия (1), существует предел (4), то существует предел ($x \geq 0$; $y \geq 0$; $k = \overline{2, r}$):

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} P \left\{ \frac{w_{k-1}^T(t)}{(B_r t)^{1/r}} < x, \frac{w_k^T(t)}{(B_r t)^{1/r}} < y \right\} = & \tilde{G}_r(\min(x - d_{k-1}' + p_{k-1}, y - d_k' + p_k)) - \\ & - \tilde{G}_r(\min(x - d_{k-1}' + p_{k-1}, y - d_k' + p_k, d_{k-1} + p_{k-1})) + \\ & + \tilde{G}_r(\min(x p_{k-2} + p_{k-1}, y - d_k' + p_k, d_{k-1} + p_{k-1})) - \\ & - \tilde{G}_r(\min(x p_{k-2} - p_{k-1}, y - d_k' + p_k, d_k + p_k)) + \\ & + \tilde{G}_r(\min(x p_{k-2} + p_{k-1}, y p_{k-1} + p_k, d_k + p_k)). \end{aligned}$$

Теоремы 1 и 2 описывают все возможные предельные законы для векторов

$$(\bar{w}_{k-1}^T(t), \bar{w}_k^T(t)), (w_{k-1}^T(t), w_k^T(t)) \quad (k = \overline{2, r})$$

в схеме (B, T) при $t \rightarrow +\infty$ и $p_{r1} = 1$.

Методы, использованные в работе, позволяют найти предельные распределения векторов $(\bar{w}_1^T(t), \bar{w}_2^T(t), \dots, \bar{w}_r^T(t))$ и $(w_1^T(t), w_2^T(t), \dots, w_r^T(t))$ при $t \rightarrow +\infty$ и $p_{r1} = 1$.

Например, обобщение теоремы 1 на r -мерный случай имеет следующий вид.

Теорема 3. Пусть $p_{r1} = 1$, выполнены условия (1), существует предел (2), $t = nT + \tau$ ($n \geq 0$; $0 < \tau \leq T$).

1. Если $b' = +\infty$, то существует предел ($x_i \geq 0$; $i = \overline{1, r}$):

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P \left\{ \bar{w}_k^T(t) < x_k (k = \overline{1, r-1}), \frac{\bar{w}_r^T(t)}{(B_r t)^{1/r}} < x_r \right\} = \bar{W}(x_1, \dots, x_{r-1}) \tilde{G}_r(x_r),$$

где $\bar{W}(x_1, \dots, x_{r-1})$ — предельное распределение при $t \rightarrow +\infty$ и $p_{r-11} < 1$ вектора $(\bar{w}_1^\infty(t), \bar{w}_2^\infty(t), \dots, \bar{w}_{r-1}^\infty(t))$.

2. Если $0 \leq b' < +\infty$, то существует предел ($x_i \geq 0$; $i = \overline{1, r}$):

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P \left\{ \frac{\bar{w}_k^T(t)}{(B_r t)^{1/r}} < x_k (k = \overline{1, r}) \right\} = \tilde{G}_r(\min_{1 \leq i \leq r} (x_i + p_i)).$$

Отметим, что ФР $\overline{W}(x_1, \dots, x_{r-1})$ в явном виде вычислена в (3).

Автор благодарит Э. А. Даниеляна за постановку задачи и ценные замечания.

Ереванский политехнический
институт

Գ. Ս. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Կատեգորիկ բացարձակ նախապատվություններով մոդելում միավոր
ծանրաբեռնվածության դեպքում երկչափ սահմանային թեորեմներ

1 — պահանջների, ..., r — պահանջների հոսքերով $\vec{M}_r | \vec{G}_r | 1 | \infty$ զանգվածա-
լին սպասարկման համակարգում ժամանակի առանցքը բաժանված է
քվանտների՝ $[0, T), [T, 2T), [2T, 3T), \dots$: i — պահանջը ունի բացարձակ
նախապատվություն j պահանջի նկատմամբ ($1 \leq i \leq j \leq r$), եթե երկուսն էլ
մտնում են համակարգ նույն քվանտի ընթացքում: Հակառակ դեպքում այդ
պահանջները սպասարկվում են ըստ հերթականության: Նշանակենք $\overline{w}_k^T(t)$ -ով
($k = \overline{1, r}$) k — պահանջի հնարավոր սպասման ժամանակը t պահին: $\overline{w}_k^T(t)$ -ն
 k — պահանջի պայմանական հնարավոր սպասման ժամանակն է t պահին
այն պայմանի դեպքում, երբ t պահից արգելվում է պահանջների մուտքը
համակարգ:

Երբ $t \rightarrow +\infty$, T -ն փոփոխվում է կամայական ձևով, համակարգի
ծանրաբեռնվածությունը հավասար է մեկի, ($\overline{w}_{k-1}^T(t)$), $\overline{w}_k^T(t)$ և $w_{k-1}^T(t)$,
 $w_k^T(t)$) ($k = \overline{2, r}$) վեկտորների համար գտնված են բոլոր հնարավոր սահմա-
նային բաշխման ֆունկցիաները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Э. А. Даниелян, Кибернетика, № 6, 1980. ² П. Т. Хостилян, Анализ моделей с
категорийными во времени приоритетами, канд. дис., Ташкент, 1982. ³ Г. С. Григо-
рян, Э. А. Даниелян, Межвузовский сб. по математике, Ереван, 1982.

УДК 529.3.01

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. М. Мхитарян

О двух типах ортогональных интегральных соотношений для бесселевых функций и их приложениях к смешанным задачам

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 9/VI 1981)

Исследование напряженного состояния тел с концентраторами напряжений типа трещин, штампов, тонкостенных включений и накладок полубесконечных длин в постановке теории упругости или нелинейной теории установившейся ползучести, предложенной Н. Х. Арутюняном ⁽¹⁻³⁾, обычно сводится к решению интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с разностными ядрами. Во многих случаях эффективные решения этих уравнений можно получить развитыми в ⁽⁴⁾ методами и методом ортогональных многочленов ⁽⁵⁻⁷⁾.

В настоящей работе устанавливаются два новых типа ортогональных интегральных соотношений на полубесконечном интервале для бесселевых функций первого рода, связанных с ядрами Коши и Карлемана. Предварительно устанавливается одно предельное соотношение для функций Якоби второго рода. При их помощи затем рассматривается задача о напряженном состоянии кусочно-однородной плоскости с конечным или полубесконечным разрезом.

Отметим, что изложенные здесь результаты позволяют получить эффективное решение ряда новых смешанных задач механики деформируемого тела и приводятся, как представляется автору, впервые.

1. Хорошо известно предельное соотношение-⁽⁸⁾, с. 175, формула (41))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} P_n^{(\alpha, \beta)} \left(1 - \frac{z^2}{2n^2} \right) = \left(\frac{z}{2} \right)^{-\alpha} J_{\alpha}(z), \quad (1.1)$$

имеющее место для любых α и β равномерно в любой ограниченной области комплексной плоскости z . Здесь $P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$ —многочлены Якоби, а $J_{\alpha}(z)$ —функция Бесселя первого рода. Получим аналогичное соотношение для функций Якоби второго рода $Q_n^{(\alpha, \beta)}(\zeta)$ ($n=0, 1, \dots$). При этом (⁽⁸⁾, с. 172, формулы (19) и (20))

$$Q_n^{(\alpha, \beta)}(\zeta) = - \frac{\pi}{2 \sin(\alpha \pi)} P_n^{(\alpha, \beta)}(\zeta) + 2^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \times \\ \times (\zeta-1)^{-\alpha} (\zeta+1)^{-\beta} F \left(n+1, -n-\alpha-\beta; 1-\alpha; \frac{1-\zeta}{2} \right); \quad (1.2)$$

$$Q_n^{(\alpha, \beta)}(\zeta) = \frac{1}{2(\zeta-1)^\alpha(\zeta+1)^\beta} \int_{-1}^1 \frac{(1-t)^\alpha(1+t)^\beta}{\zeta-t} P_n^{(\alpha, \beta)}(t) dt. \quad (1.3)$$

Здесь $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, $F(a, b; c, \zeta)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, а формула (1.3) справедлива в комплексной плоскости ζ , разрезанной вдоль отрезка $[-1, 1]$.

В (1.2) положим $\zeta = 1 - w^2/2n^2$, обе части умножим на $n^{-\alpha}$ и совершим предельный переход $n \rightarrow \infty$. Сначала будем иметь

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(n+1, -n-\alpha-\beta; 1-\alpha; \frac{w^2}{4n^2}\right) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+1) \dots (n+k)(-n-\alpha-\beta) \dots (-n-\alpha-\beta+k-1)}{(1-\alpha)(2-\alpha) \dots (k-\alpha)k!} \left(\frac{w^2}{4n^2}\right)^k = \\ & = \Gamma(1-\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+1-\alpha)} \left(\frac{w}{2}\right)^{2k} = \Gamma(1-\alpha) \left(\frac{w}{2}\right)^\alpha J_{-\alpha}(w). \end{aligned}$$

Затем, принимая во внимание последнее равенство и (1.1), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} Q_n^{(\alpha, \beta)}\left(1 - \frac{w^2}{2n^2}\right) = \frac{\pi}{2 \sin(\alpha\pi)} \left(\frac{w}{2}\right)^{-\alpha} [e^{-i\pi\alpha} J_{-\alpha}(w) - J_\alpha(w)].$$

Теперь в (1.3) положим $\alpha = -\frac{1}{2} - i\mu$ ($-\infty < \mu < \infty$), $\beta = \bar{\alpha}$ и

$$\zeta = 1 - \frac{w^2}{2n^2}, \quad t = 1 - \frac{v^2}{2n^2}.$$

После элементарных операций придем к соотношению

$$\begin{aligned} Q_n^{(\alpha, \bar{\alpha})}\left(1 - \frac{w^2}{2n^2}\right) &= e^{-i\pi\alpha} \left(2 - \frac{w^2}{2n^2}\right)^{-\bar{\alpha}} w^{-2\alpha} \times \\ &\times \int_0^{2n} \frac{v^{2\alpha+1} \left(2 - \frac{v^2}{2n^2}\right)^{\bar{\alpha}} P_n^{(\alpha, \bar{\alpha})}\left(1 - \frac{v^2}{2n^2}\right) dv}{v^2 - w^2}. \end{aligned}$$

Далее, обе части этого равенства умножим на $n^{-\alpha}$ и перейдем к пределу $n \rightarrow \infty$. Воспользовавшись (1.1) и (1.4), находим

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{2 \sin(\alpha\pi)} \left(\frac{w}{2}\right)^{-\alpha} [e^{-i\pi\alpha} J_{-\alpha}(w) - J_\alpha(w)] = \\ & = \left(-\frac{w^2}{2}\right)^{-\alpha} \int_0^\infty \frac{J_\alpha(v) v^{\alpha+1} dv}{v^2 - w^2}. \end{aligned}$$

Отсюда при помощи замены переменных

$$v = \lambda \sqrt{t}, \quad w = \lambda \sqrt{z} \quad (\lambda > 0)$$

легко получим важное соотношение

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(\lambda \sqrt{t}) dt}{t-z} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi\mu)} [ie^{-\pi\mu} J_\alpha(\lambda \sqrt{z}) - J_{-\alpha}(\lambda \sqrt{z})] z^{\frac{\alpha}{2}}, \quad (1.5)$$

справедливое в комплексной плоскости, разрезанной вдоль неотрицательной полуоси $[0, \infty)$. При этом под $\sqrt{z}$ понимается та однозначная аналитическая ветвь, которая на верхнем берегу разреза по лучу $[0, \infty)$ принимает положительное значение $\sqrt{x}$.

Наконец, пользуясь известными формулами Племеля—Сохоцкого из (1.5) имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t^a J_a(\lambda \sqrt{t}) dt}{x-t} - i \operatorname{th}(\pi \mu) x^a J_a(\lambda \sqrt{x}) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi \mu)} x^a J_{-a}(\lambda \sqrt{x})$$

$$\left(a = -\frac{1}{2} - i\mu; \quad \lambda > 0; \quad x > 0 \right), \quad (1.6)$$

что и представляет собой одно из искомых ортогональных соотношений.

Заметим, что при $\lambda \rightarrow +0$ (1.6) даст соотношение

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t^a dt}{x-t} - i \operatorname{th}(\pi \mu) x^a = 0. \quad (1.6')$$

При предельном же переходе $z = x \pm i0$ ($x < 0$), считая на отрицательной полуоси $z = (-x)e^{\pi i}$, опять из (1.5) получим

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t^a J_a(\lambda \sqrt{t}) dt}{t-x} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi \mu)} [I_a(\lambda \sqrt{-x}) - I_{-a}(\lambda \sqrt{-x})] (-x)^{\frac{a}{2}} \quad (x < 0),$$

$$(1.7)$$

где $I_a(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода.

Отметим, что (1.6) можно было бы получить из известного соотношения ⁽⁹⁾

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{P_n^{(\alpha, \bar{\alpha})}(t) (1-t)^{\alpha} (1+t)^{\bar{\alpha}}}{t-x} dt - i \operatorname{th}(\pi \mu) \times$$

$$\times P_n^{(\alpha, \bar{\alpha})}(x) (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\bar{\alpha}} = \begin{cases} \frac{1}{2 \operatorname{ch}(\pi \mu)} P_{n-1}^{(\bar{\alpha}+1, \alpha+1)}(x), & (n=1, 2, \dots) \\ 0, & (n=0) \quad (|x| < 1) \end{cases} \quad (1.8)$$

при помощи замены переменных

$$x = 1 - \frac{u^2}{2n^2}, \quad t = 1 - \frac{v^2}{2n^2} \quad (1.9)$$

и предельного соотношения (1.1). Однако использование (1.3) позволяет получить больше. А именно, кроме (1.6) получаются также (1.5) и (1.7).

Исходя же из известного соотношения ⁽¹⁰⁾

$$\int_{-1}^1 \frac{[a \operatorname{sgn}(t-x) + b]^{\alpha} P_n^{(\alpha-1, \mu-\alpha)}(t) dt}{|t-x|^{\mu} (1-t)^{1-\alpha} (1+t)^{\alpha-\mu}} = \frac{\pi A \Gamma(n+\mu)}{n! \Gamma(\mu) \sin(\pi \mu)} (a+b)^{\mu} P_n^{(\mu-\alpha, \alpha-1)}(x)$$

$$(|x| < 1) \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

где

$$A = \sqrt{1 - 2\cos(\pi\mu)a^\mu + a^{2\mu}}; \quad a = \frac{b-a}{b+a} \quad \operatorname{Re} A > 0$$

$$\sin[\pi(x-\mu)] = a^\mu \sin(\pi\mu) \quad (0 < \operatorname{Re} \mu < 1; \quad 0 < \mu < 1),$$

при помощи (1.1) и (1.9) аналогичным образом получим следующие ортогональные интегральные соотношения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{[a \operatorname{sgn}(x-t) + b]^\mu t^{\frac{\mu-1}{2}} J_{\mu-1}(\lambda \sqrt{t})}{|x-t|^\mu} dt = \\ & = \frac{2^{1-\mu} A}{\Gamma(\mu) \sin(\pi\mu)} (a+b)^{\mu-1} x^{\frac{\mu-1}{2}} J_{\mu-1}(\lambda \sqrt{x}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

($\lambda, x > 0$);

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{[a \operatorname{sgn}(t-x) + b]^\mu t^{\frac{\mu-1}{2}} J_{\mu-1}(\lambda \sqrt{t})}{|x-t|^\mu} dt = \\ & = \frac{2^{1-\mu} A}{\Gamma(\mu) \sin(\pi\mu)} (a+b)^{\mu-1} x^{\frac{1-\mu}{2}} J_{\mu-1}(\lambda \sqrt{x}). \end{aligned}$$

Соотношения (1.10) играют существенную роль в контактных и смешанных задачах в постановке работ (1-3).

Отметим, что при $z \rightarrow x \pm i0$ ($|x| > 1$) из (1.3) получим соотношение

$$Q_n^{(a, \bar{a})}(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{2|x-1|^a |x+1|^{\bar{a}}} \int_{-1}^1 \frac{(1-t)^a (1+t)^{\bar{a}} P_n^{(a, \bar{a})}(t) dt}{x-t} \quad (|x| > 1), \quad (1.11)$$

которое в известном смысле дополняет соотношение (1.8).

2. Задача о напряженном состоянии кусочно-однородной плоскости, содержащей произвольное число разрезов вдоль отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2] \dots [a_n, b_n]$ вещественной оси-линии соединения разнородных материалов, с точки зрения применения методов краевой задачи Римана—Гильберта рассматривалась в (11,12). Здесь приведем разрешающие интегральные уравнения этой задачи. Совокупность разрезов обозначим через L , а дополнительную ей область— L' . Без ограничения общности можно считать, что нагружены только берега разрезов. Пусть на верхних берегах разрезов действуют вертикальные и горизонтальные силы соответственно интенсивностей $q_0^+(x)$ и $\tau_0^+(x)$, а на нижних берегах такие же силы соответственно интенсивностей $q_0^-(x)$ и $\tau_0^-(x)$. Неизвестные вертикальные и горизонтальные контактные напряжения на L' обозначим соответственно через $\sigma(x)$ и $\tau(x)$. Введем обозначения

$$\chi_\pm(x) = \tau_\pm(x) + i\sigma_\pm(x);$$

$$\sigma_\pm(x) = \begin{cases} q_0^\pm(x), & x \in L \\ \sigma(x), & x \in L' \end{cases}; \quad \tau_\pm(x) = \begin{cases} \tau_0^\pm(x), & x \in L \\ \tau(x), & x \in L' \end{cases}.$$

Тогда, составляя скачок перемещений граничных точек верхней

нижней полуплоскостей, для определения функции $\chi(x) = \tau(x) + i\sigma(x)$ ($x \in L'$) получаем следующее интегральное уравнение:

$$iA\chi(x) + B \int_{L'} \frac{\chi(s)ds}{s-x} = g(x) \quad (x \in L'), \quad (2.1)$$

где

$$g(x) = -\frac{x_1+1}{4\pi\mu_1} \int_L \frac{\chi_+(s)ds}{s-x} - \frac{x_2+1}{4\pi\mu_2} \int_L \frac{\chi_-(s)ds}{s-x}.$$

После того как построено решение уравнения (2.1), производная раскрытия разрез $\varphi(x)$ определится из соотношения

$$\begin{aligned} & \frac{x_1+1}{4\pi\mu_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_+(s)ds}{s-x} + \frac{x_2+1}{4\pi\mu_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_-(s)ds}{s-x} + \\ & + i \frac{x_1-1}{4\mu_1} \chi_+(x) - i \frac{x_2-1}{4\mu_2} \chi_-(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in L \\ 0, & x \in L' \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь

$$A = \frac{x_1-1}{4\mu_1} - \frac{x_2-1}{4\mu_2}; \quad B = \frac{x_1+1}{4\pi\mu_1} + \frac{x_2+1}{4\pi\mu_2};$$

μ_k ($k=1, 2$) — модули сдвига материалов полуплоскостей, а x_k ($k=1, 2$) — постоянные Мусхелишвили. К уравнениям (2.1) и (2.2) должны быть добавлены условия непрерывности перемещений на концах L :

$$\int_{a_k}^{b_k} \varphi(x)dx = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (2.3)$$

Рассмотрим частный случай, когда имеется один разрез вдоль отрезка $[-1, 1]$ или по лучу $[0, \infty)$, которые в отдельности также обозначим через L . Кроме того, пусть $q_0^+(x) = q_0^-(x) = q_0(x)$ и $\tau_0^+(x) = \tau_0^-(x) = \tau_0(x)$ ($x \in L$). Тогда $\chi_+(x) = \chi_-(x) = \chi(x)$ и вместо (2.2) получим следующее ключевое уравнение:

$$\chi(x) = \frac{B}{A^2 - \pi^2 B^2} \int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-x} - \frac{iA}{A^2 - \pi^2 B^2} \varphi(x) \quad (2.4)$$

$$(-\infty < x < \infty; A^2 - \pi^2 B^2 \neq 0).$$

Отсюда вытекает, что для определения $\varphi(x)$ получим уравнение

$$-i \frac{A}{\pi B} \varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-x} = f(x), \quad (2.5)$$

которое согласно (2.3) должно рассматриваться при условии

$$\int_L \varphi(x)dx = 0. \quad (2.6)$$

Здесь

$$f(x) = i \frac{A^2 - \pi^2 B^2}{\pi B} [q_0(x) - i\tau_0(x)] \quad (x \in L).$$

После решения уравнения (2.5) контактные напряжения на L' определяются из (2.4) при $x \in L'$.

Далее, положив

$$\operatorname{th}(\pi\mu) = \frac{A}{\pi B} \quad \left(\mu = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{x_2 \mu_2 + \mu_1}{x_2 \mu_1 + \mu_2} \right),$$

решение уравнения (2.5) в случае отрезка $L = [-1, 1]$ представим в виде

$$\varphi(x) = \omega(x) \sum_{n=0}^{\infty} x_n P_n^{(\alpha, \bar{\alpha})}(x) \quad (|x| < 1) \quad (2.7)$$

$$(\omega(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^{\bar{\alpha}}).$$

Из (2.6) непосредственно вытекает, что $x_0 = 0$. Для остальных коэффициентов при помощи (1.8) получим

$$x_n = 2 \operatorname{ch}(\pi\mu) f_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.8)$$

где

$$f_n = \frac{1}{h_n} \int_{-1}^1 f(x) P_n^{(\bar{\alpha}+1, \alpha+1)}(x) \frac{dx}{\omega(x)};$$

$$h_n = \frac{2 \left| \Gamma\left(n + \frac{3}{2} - i\mu\right) \right|^2}{|(n+1)!|^2}.$$

Для контактных напряжений из (2.4) с учетом (2.7), (2.8) и (1.11) будем иметь

$$\tau(x) + i\sigma(x) = - \frac{4B \operatorname{ch}(\pi\mu)}{A^2 - \pi^2 B^2} |x-1|^\alpha |x+1|^{\bar{\alpha}} \operatorname{sgn} x \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1} Q_n^{(\alpha, \bar{\alpha})}(x) \quad (|x| > 1).$$

Отсюда для коэффициентов интенсивности напряжений находим

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow -1-0} [\tau(x) + i\sigma(x)] |x+1|^{-\bar{\alpha}} = \\ &= \frac{2^{\alpha+1} B}{(A^2 - \pi^2 B^2) \Gamma(1+\bar{\alpha})} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_{n-1} \Gamma(n+1+\bar{\alpha}); \\ A_2 &= \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1+0} [\tau(x) + i\sigma(x)] |x-1|^{-\alpha} = \\ &= - \frac{2^{\bar{\alpha}+1} B}{(A^2 - \pi^2 B^2) \Gamma(1+\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1} \Gamma(n+1+\alpha). \end{aligned}$$

В случае полубесконечного разреза $L = [0, \infty)$, при котором условие (2.6) следует заменить условием

$$\int_0^{\infty} \varphi(x) dx < \infty, \quad (2.9)$$

решение интегрального уравнения (2.5) представим в виде*

$$\varphi(x) = x^{\frac{a}{2}} \int_0^{\infty} \Phi(\lambda) J_{\frac{a}{2}}(\lambda \sqrt{x}) d\lambda. \quad (2.10)$$

Подставляя (2.10) в (2.5) и приняв во внимание (1.6), при помощи формул преобразования Ханкеля получим

$$\Phi(\lambda) = -\operatorname{ch}(\pi\mu) \int_0^{\infty} x^{1-\frac{a}{2}} f(x) J_{\frac{a}{2}}(\lambda \sqrt{x}) dx.$$

Далее, учитывая (1.7), будем иметь

$$\tau(x) + i\sigma(x) = \frac{\pi B(-x)^{\frac{a}{2}}}{(A^2 - \pi^2 B^2) \operatorname{ch}(\pi\mu)} \int_0^{\infty} \Phi(\lambda) [I_{\frac{a}{2}}(\lambda \sqrt{-x}) - I_{-\frac{a}{2}}(\lambda \sqrt{-x})] d\lambda, \quad (x < 0),$$

откуда

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow -0} [\tau(x) + i\sigma(x)] (-x)^{-\frac{a}{2}} = \\ &= \frac{2^{a+1} B}{\operatorname{ch}(\pi\mu) (A^2 - \pi^2 B^2)} \int_0^{\infty} \lambda^{\frac{a}{2}} \Phi(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

В заключение отметим, что формулу (2.10) можно интерпретировать также как решение известной задачи В. М. Абрамова (13) в случае полубесконечного штампа.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Մ. ՄԵԻՔԱՐՅԱՆ

Բեւեւի ֆունկցիաների համար օրթոգոնալ ինտեգրալ առնչությունների
երկու տիպի և խառը խնդիրներում նրանց կիրառությունների
մասին

Աշխատանքում արտածվում են Կոշու և Կաուլեմանի կորիզների հետ
կապված նոր տիպի օրթոգոնալ ինտեգրալ երկու առնչություններ կիսաան-
վերջ միջակայքի վրա, որոնք պարունակում են առաջին սեռի Բեւեւի ֆունկ-
ցիաների նախապես արտածվում է Ցակորիի երկրորդ սեռի ֆունկցիաների

* Вследствие (2.9) в формулу (2.10) не входит решение однородного уравнения (2.5), которое согласно (1.6') имеет вид $\varphi(x) = Cx^{\frac{a}{2}}$.

УДК 550.311

ГЕОФИЗИКА

С. Ц. Акопян

Вычисление крутильных колебаний Земли методом функционала

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Т. Асланяном 27/IV 1981)

1. В работах ^(1,2) была построена теория возмущений для крутильных колебаний Земли во втором приближении, которая позволяет оценить область применения линейных соотношений между частотой и небольшими приращениями материальных параметров.

В данной работе описывается методика устойчивого счета добавок к частоте во втором приближении, а также «таблиц производных» в первом приближении от частот обертонов методом функционала ⁽³⁾.

2. При составлении программы был применен вариант метода прогонки по А. А. Абрамову ⁽⁴⁾. Запишем систему дифференциальных уравнений для крутильных колебаний Земли ⁽⁵⁾ в виде

$$\begin{cases} \ddot{u}_l = -\frac{1}{p(x)} v_l & v_l(0) = v_l(c) = 0 \\ \dot{v}_l = q_l(x) u_l & (0 \leq x \leq c), \end{cases} \quad (1)$$

где введены обозначения

$$p(x) = (1-x)^4 \mu, \quad q_l(x) = \left[x^2 \rho - \frac{\bar{N}}{(1-x)^2} \mu \right] (1-x)^4. \quad (2)$$

Здесь и ниже индекс n —номер колебания — опущен, l —номер обертона, x —безразмерная глубина, точка означает дифференцирование по x .

Перейдем от функций u_l, v_l к новым функциям $r_l(x)$ и $\theta_l(x)$ ⁽⁴⁾

$$u_l = r_l(x) \cos \theta_l, \quad v_l = r_l(x) \sin \theta_l. \quad (3)$$

Тогда система (1) после простых преобразований запишется в виде:

$$\dot{r}_l = \left(q_l - \frac{1}{p} \right) \sin \theta_l \cos \theta_l; \quad (4)$$

$$\dot{\theta}_l = \frac{1}{p} \sin^2 \theta_l + q_l \cos^2 \theta_l. \quad (5)$$

Из (3) имеем $v_l/u_l = \tan \theta_l$, откуда находим граничные условия для функции $\theta_l(x)$

$$\theta_l(0) = 0, \quad \theta_l(c) = l\pi, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Решая уравнение для $\theta_l(x)$ (5), (6), определим $\theta_l(x)$, затем, используя (4), по формулам (3) определим $u_l(x)$ и $v_l(x)$.

Собственные значения задачи (4)—(6) находятся „стрельбой“ по параметру x : при данном x граничное условие, заданное на одном конце интервала изменения x , с помощью уравнения (5) переносим на другой конец, проверяем выполнение там граничного условия и затем x изменяем с учетом монотонной зависимости θ от x на правом конце интервала.

После определения собственных значений возникает вопрос о вычислении собственных функций. Собственные функции $u_l(x)$ и $v_l(x)$ можно найти по формулам (3), причем прогоночное уравнение (5) надо интегрировать справа налево, в то время как вычисление собственных функций приходится вести в противоположную сторону (³).

Оказалось, что вычисление собственных функций $u_l(x)$, а следовательно, и u_l и v_l , приводит к большим погрешностям при увеличении номера колебания n и номера обертона l . Повышение точности решения приводит к сильному дроблению шага и увеличению времени счета.

В задаче о крутильных колебаниях Земли требуется вычисление не собственных функций, а некоторых функционалов от них. Для вычисления этих функционалов оказывается возможным получить дифференциальные уравнения, устойчиво считающиеся в ту же сторону, что и уравнение (5) (³). Поскольку в (³) все функционалы имеют один и тот же верхний предел, мы строили функционалы от границ внутренних участков до поверхности, а сами значения функционалов на участках вычисляли как разности функционалов от концов данного участка.

Ниже описывается способ вычисления функционалов $k_{\rho l}^l$, $k_{\mu l}^l$, $a_{\rho l}^{lk}$, $a_{\mu l}^{lk}$ от собственных функций задачи (1), не требующих знания самих собственных функций.

3. Будем рассматривать случай счета справа налево, вводя новую переменную $x' = c - x$ в уравнения (1)—(5).

Разделим область $0 \leq x \leq c$ точками $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_s = c$ на конечное число отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, предположим, что безразмерные плотность $\rho(x)$ и модуль сдвига $\mu(x)$ кусочно-постоянны на каждом из этих отрезков. При переходе к новому распределению $\rho \rightarrow \rho_0 + \Delta\rho$ и $\mu \rightarrow \mu_0 + \Delta\mu$ поправка по теории возмущений к безразмерной частоте x_l в первом и втором приближении дается выражением

$$x_l = x_{0l} + \Delta x_{1l} + \Delta x_{2l}$$

$$\Delta x_{1l} = \sum_{i=1}^s [k_{\rho l}^l \Delta \rho_i + k_{\mu l}^l \Delta \mu_i] \quad (7)$$

$$\Delta x_{2l} = \sum_{i,j}^s [k_{\rho\rho,l}^l \Delta \rho_i \Delta \rho_j + k_{\mu\mu,l}^l \Delta \mu_i \Delta \mu_j + k_{\rho\mu,l}^l \Delta \rho_i \Delta \mu_j],$$

где i, j —номера сферических слоев Земли, $k_{\rho l}^l$, $k_{\mu l}^l$, $k_{\rho\rho,l}^l$, $k_{\mu\mu,l}^l$, $k_{\rho\mu,l}^l$ определены в (³).

Перейдем к вычислению этих коэффициентов, имеющих смысл частных производных.

4. Для случая счета справа налево выражение для $k_{\rho l}^l$ (2) запишется в виде

$$k_{\rho l}^l = \left\{ -\frac{x_{0l}}{2} \int_{c-x_l}^{c-x_l-1} dx (c_0+x)^4 u_l^2 \right\} \left\{ \int_0^c dx (c_0+x)^4 \rho_0 u_l^2 \right\}^{-1}. \quad (8)$$

($c_0 = 1-c$)

Введем вспомогательные функции:

$$U_{\rho l}^l(x) = \left\{ -\frac{x_{0l}}{2} \int_{c-x_l}^x dt (c_0+t)^4 u_l^2 \right\} \frac{1}{u_l^2 + v_l^2}; \quad (9)$$

$$V_l(x) = \left\{ \int_0^x dt (c_0+t)^4 \rho_0 u_l^2 \right\} \frac{1}{u_l^2 + v_l^2}. \quad (10)$$

Продифференцируем (9), (10) и, используя (1)–(3), получим:

$$\dot{U}_{\rho l}^l = -2U_{\rho l}^l \left(\frac{1}{\rho} - q_l \right) \sin \theta_l \cos \theta_l - \frac{x_{0l}}{2} (c_0+x)^4 \cos^2 \theta_l, \quad (11)$$

$$\dot{V}_l = -2V_l \left(\frac{1}{\rho} - q_l \right) \sin \theta_l \cos \theta_l + (c_0+x)^4 \rho_0 \cos^2 \theta_l. \quad (12)$$

Граничные условия для (11), (12) будут

$$U_{\rho l}^l(c-x_l) = 0, \quad V_l(0) = 0. \quad (13)$$

$k_{\rho l}^l$ находится по формуле

$$k_{\rho l}^l = \frac{U_{\rho l}^l(c) - U_{\rho l-1}^l(c)}{V_l(c)}. \quad (14)$$

Аналогично вычислялись $k_{\mu l}^l$.

Коэффициенты $k_{\rho p, ij}^l$, $k_{\mu p, ij}^l$ и $k_{\mu p, ij}^l$ выражаются через $a_{\rho l}^{lk}$ и $a_{\mu l}^{lk}$ (2).

Запишем $a_{\rho l}^{lk}$ в виде

$$a_{\rho l}^{lk} = \left\{ -\frac{x_{0l}}{x_{0l}^2 - x_{0k}^2} \int_{c-x_l}^{c-x_l-1} dx (c_0+x)^4 u_l u_k \right\} \left\{ \int_0^c dx (c_0+x)^4 \rho_0 u_k \right\}^{-1}. \quad (15)$$

Введем вспомогательную функцию в виде

$$U_{\rho l}^{lk}(x) = \left\{ -\frac{x_{0l}}{x_{0l}^2 - x_{0k}^2} \int_{c-x_l}^x dt (c_0+t)^4 u_l u_k \right\} \frac{1}{(u_l^2 + v_l^2)^{1/2} (u_k^2 + v_k^2)^{1/2}}. \quad (16)$$

Действуя стандартным образом, получим

$$U_{\rho l}^{lk} = -U_{\rho l}^{lk} \left[\left(\frac{1}{\rho} - q_l \right) \sin \theta_l \cos \theta_l + \left(\frac{1}{\rho} - q_k \right) \sin \theta_k \cos \theta_k \right] -$$

$$- \frac{x_{0l}^2}{x_{0l}^2 - x_{0k}^2} (c_0 + x)^4 \cos \theta_l \cos \theta_k, \quad (17)$$

$$U_{\rho l}^{lk} (c - x_l) = 0.$$

$a_{\rho l}^{lk}$ определится по формуле

$$a_{\rho l}^{lk} = \frac{U_{\rho l}^{lk}(c) - U_{\rho l-1}^{lk}(c)}{[V_l(c) V_k(c)]^{1/2}} \left(\frac{V_l}{V_k} \right)^{1/2}, \quad (18)$$

Аналогично вычислялись $a_{\mu l}^{lk}$.

Уравнения (11), (12), (17) устойчиво интегрируются совместно с уравнением (5) для $\theta_l(x)$ от 0 до c , а искомые функционалы определяются по формулам (14), (18).

5. Для счета коэффициентов нам надо прогонять с концов всех участков $[x_{l-1}, x_l]$ до c функции U . Это очень неудобно для многослойной модели Земли, так как с каждым последующим участком увеличивается число дифференциальных уравнений, счет которых требует большого количества времени. Для существенного сокращения времени счета функционалы на участках определялись пересчетом.

На каждом интервале интегрируем (11), (12), (16) с нулевыми начальными условиями и соответствующие им однородные уравнения, затем, используя рекуррентную формулу, пересчитываем значения функционалов на правом конце интервала, зная ее значение на левом конце. Такая техника пересчета существенно сократила время счета.

Зная коэффициенты $k_{\rho l}^l, k_{\mu l}^l, a_{\rho l}^{lk}, a_{\mu l}^{lk}$, по формулам (2) вычисляли $k_{\rho\rho,lj}^l, k_{\mu\mu,lj}^l, k_{\mu\rho,lj}^l$. Выбор числа обертонов при вычислении этих коэффициентов определялся принятой точностью вычислений. Как правило, вычисления ограничивались первыми 12 обертонами.

Вычисления проводили в диапазоне изменения n от 2 до 5.

l	T_n , мин			
	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
0	43,61	28,23	21,62	17,84
1	12,56	11,52	10,46	9,498
2	7,413	7,205	6,951	6,657
3	5,131	5,058	4,968	4,859
4	3,851	3,823	3,784	3,738
5	3,094	3,080	3,059	3,035
6	2,583	2,575	2,563	2,548
7	2,218	2,213	2,205	2,196
8	1,944	1,941	1,896	1,894
9	1,729	1,727	1,723	1,719
10	1,556	1,554	1,551	1,548
11	1,414	1,413	1,411	1,408
12	1,298	1,297	1,296	1,294

В качестве исходной модели Земли была взята модель Гутенберга⁽¹⁾. В первом приближении вычислены периоды крутильных колебаний (таблица) и „таблицы производных“ $k_{\rho l}^l$ и $k_{\mu l}^l$ для обертонов $l=0+12$.

Во втором приближении были вычислены $k_{\rho\rho,l}^l$, $k_{\rho\mu,l}^l$ и $k_{\mu\mu,l}^l$. Попутно для некоторых вариантов распределения Q с глубиной были вычислены диссипативные функции Q_l для обертонов от 1-го до 12.

Институт геофизики и инженерной
сейсмологии Академии наук Армянской ССР

Ս. Յ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Երկրի ոլորման տատանումների հաշվարկումը ֆունկցիոնալի մեթոդով

Նկարագրված է Երկրի ոլորման տատանումների հաճախականությունների փոփոխության կայուն հաշվարկը ֆունկցիոնալի մեթոդով:

Այդ մեթոդը հնարավորություն է տալիս խուսափել խնդրի սեփական ֆունկցիաների անմիջական հաշվարկումը հայտնի եղանակով, որը բերում է զգալի անճշտությունների՝ կապված տատանումների օրերտոնի համարի աճի հետ:

Հաշվված են Երկրի ոլորման տատանումների պարբերությունները 0 մինչև 12 օրերտոնների և $n=2+5$ համարների համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. Ц. Акопян, В. Н. Жарков, В. М. Любимов, ДАН СССР, т. 204, № 3 (1972).
² С. Ц. Акопян, В. Н. Жарков, В. М. Любимов, Изв. АН СССР, Физика Земли, № 3 1977. ³ Е. С. Биргер, ЖВМ МФ, т. 8, № 5 (1968). ⁴ А. А. Абрамов, ЖВМ МФ, т. 1, № 2 (1961). ⁵ В. Н. Жарков, В. М. Любимов, А. А. Мовчан и др., в кн.: Земные приливы и внутреннее строение Земли, Наука, М., 1967.

УДК 539.196:547.458:53.082.7

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Г. В. Абагян

Деградация глюкозы вблизи температуры плавления,
инициированная облучением

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 10/XI 1981)

Большие значения радиационно-химических выходов (G) кислот (^{1,2}) и конечных продуктов деградации (^{4,3}) в облученных углеводах указывают на возможность протекания цепных радикальных реакций, инициированных облучением. На самом деле известно (⁵), что реакции распада и дегидратации исходных, «первичных» углеводных радикалов могут приводить к образованию вторичных радикалов с α -атомами водорода, которые способны к отрыву атома H от исходной молекулы. Подтверждением этому являются наблюдения цепных реакций во фруктозе (⁶), моногидрате лактозы (⁷) и 2-дезоксирибозе (⁸). Можно полагать, что реакция вторичного радикала с C-H связями в исходной молекуле должна быть достаточно общей для большинства сахаров и отсутствие этой реакции может быть обусловлено следующими причинами: а) жесткостью матрицы (кристаллическая решетка, система водородных связей и т. д.); б) образованием вторичных, химически мало активных радикалов (тупиковых); в) наличием в системе примесей, способных оборвать цепь, например, лигнина в целлюлозе; г) наличием в системе воды, препятствующей развитию цепей. Первые две являются основными, ими также объясняется высокая стабильность свободных радикалов в кристаллических углеводах, инициированных облучением: в отсутствие влаги и кислорода радикалы устойчивы вплоть до температур плавления.

В настоящей работе предпринята попытка экспериментальной проверки вышесделанного предположения.

В качестве объекта исследования использовали коммерческие препараты безводной D-глюкозы, находящиеся в α -форме. Согласно нашим измерениям удельное вращение водного раствора препарата равнялось 106° (α -форма). Температура плавления 419°K .

Образцы облучали при 310°K интегральными дозами от 2 до 10 Мрад, мощность дозы варьировали в пределах $2 \cdot 10^{14}$ — $2,5 \cdot 10^{16}$ $\text{eV г}^{-1} \text{сек}^{-1}$. Перед облучением проводили тщательное обезвоживание образцов в условиях вакуума при 413 — 418°K . Кривые накопления и гребели радикалов в обезвоженном образце в условиях вакуума показаны на рис. 1.

Заключение о степени деградации глюкозы делали по количеству образовавшейся воды. Выделение воды определяли после прогрева об-

лученных образцов в интервале 373—413°K. В контрольном опыте по сбору воды в необлученном образце, предварительно обезвоженном при 413—418°K, после прогрева на 3—4° выше $T_{пл}$ выделения воды не наблюдалось. Вплоть до 383°K радиационно-химический выход воды (G_{H_2O}) не зависит от дозы и мощности дозы облучения, температуры прогрева и равен $G \approx 3$. Значение это сравнимо с данными, полученными другими авторами (⁹), облучавшими глюкозу при 300°K большими интегральными дозами: так, при 20 Мрад $G_{H_2O} = 2,96$, при 30 Мрад $G_{H_2O} = 3,62$. Выше 383°K—при 403 и 408°K, когда наблюдается значительное уменьшение концентрации радикалов в обезвоженном образце (рис. 1), выделение воды увеличивается. Зависимость G_{H_2O} от интегральной дозы облучения после прогрева образца при 403—408°K приведена на рис. 2. Наблюдаемые значения $G_{H_2O} = 70$, при термоотжиге образца выше 403°K, свидетельствуют, очевидно, о протекании цепных

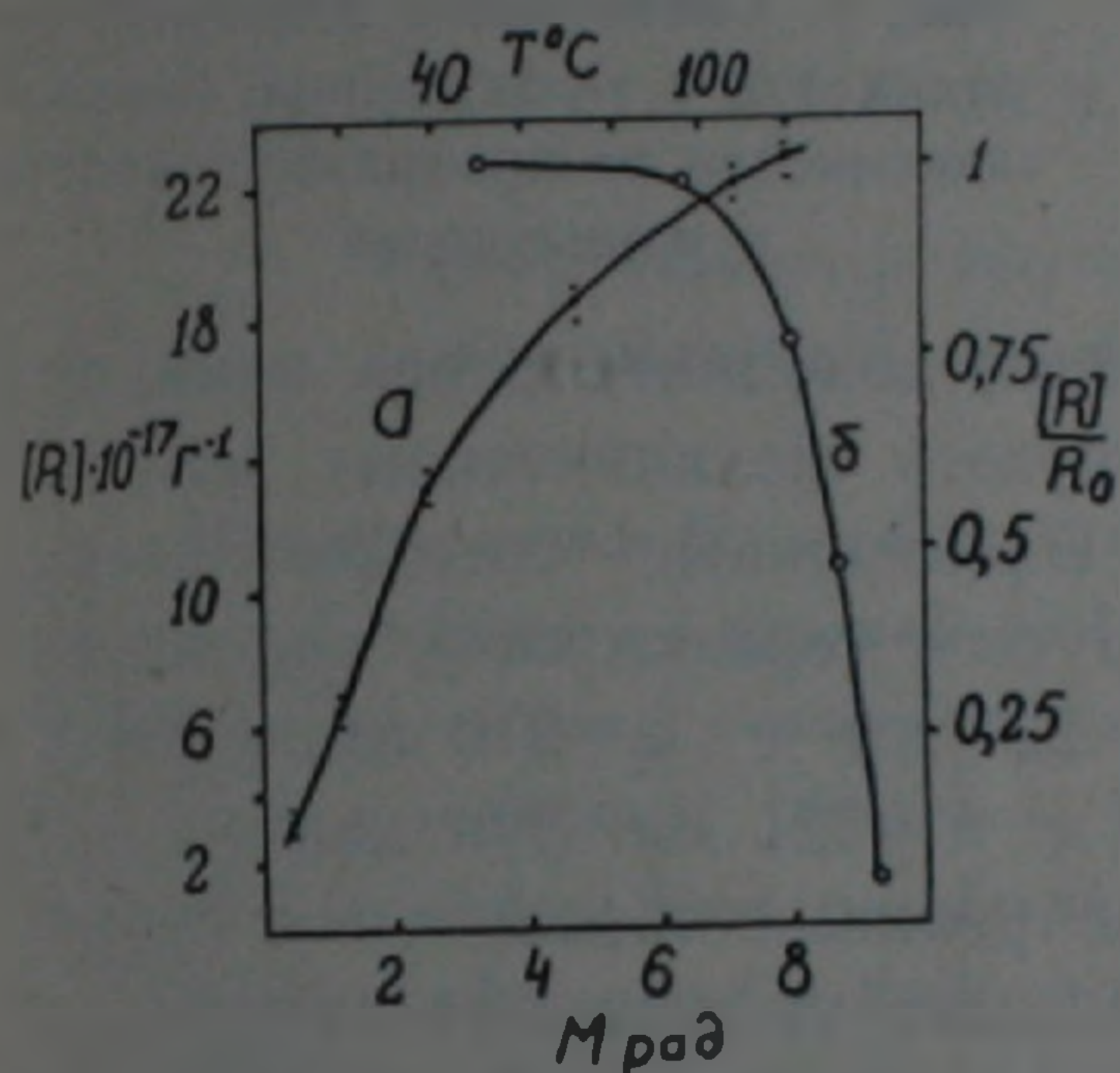


Рис. 1. Кривые накопления (а) и гибели (б) радикалов в обезвоженном образце, в вакууме

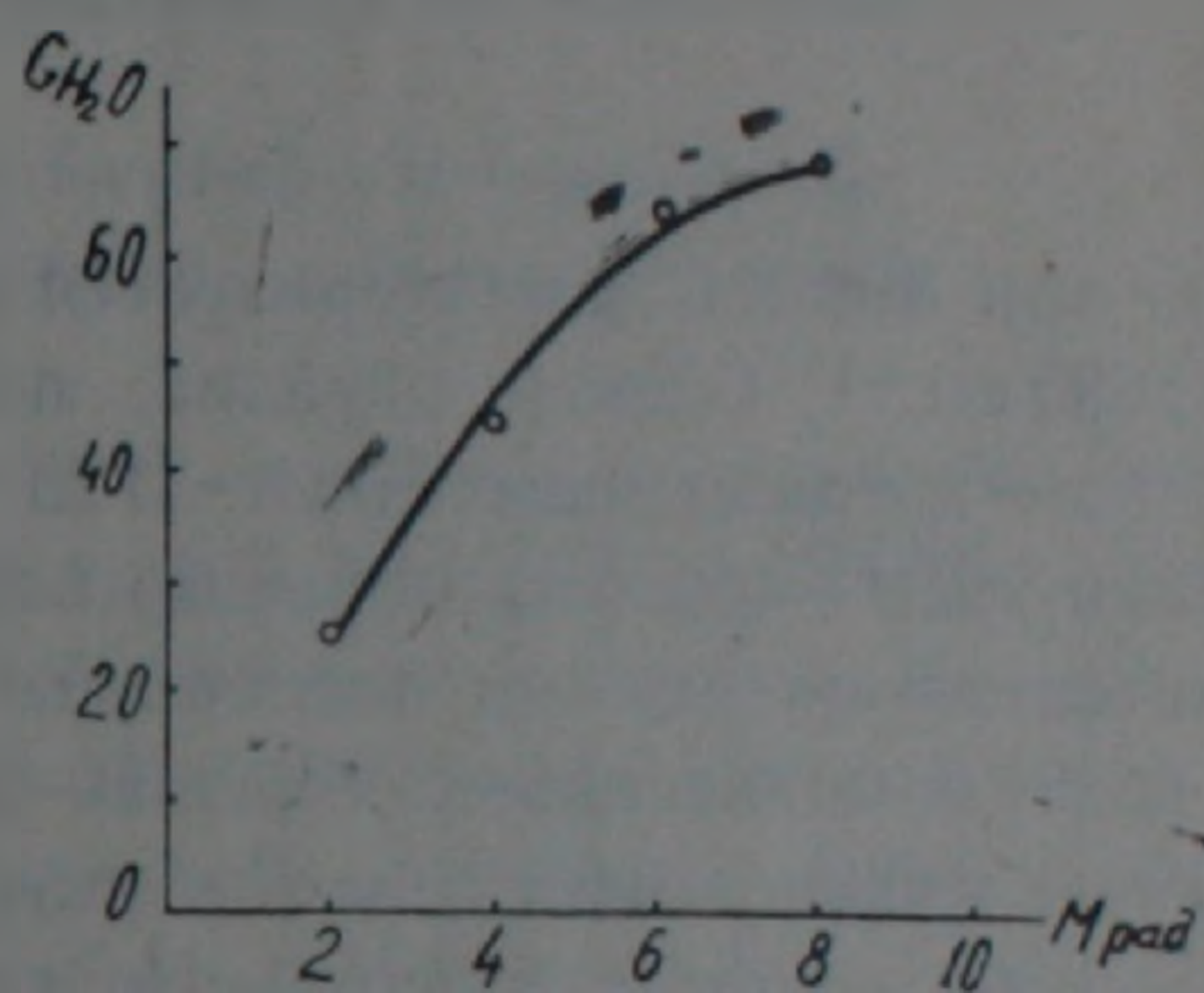


Рис. 2. Зависимость G_{H_2O} от интегральной дозы облучения при последующем термоотжиге образца при 403°K

радикальных реакций. В интервале $2 \cdot 10^{14} - 2,5 \cdot 10^{16} \text{ ev g}^{-1} \text{ сек}^{-1}$ выход G_{H_2O} от мощности дозы облучения не зависит.

Таким образом следует предположить, что протеканию радикальных реакций препятствуют именно жесткость решетки. Данное заключение можно проверить и другим способом—путем механического измельчения облученного образца, создавая в нем пластические деформации, которые будут способствовать протеканию реакции. Это нами было осуществлено при механическом измельчении образца глюкозы, предварительно обезвоженного в условиях вакуума при 418°K, а затем облученного при 310°K дозой 8 Мрад. Измельчение проводили в ампулах со стеклянными шарами на вибромельнице (¹⁰) при 300°K. Одновременно в пробирке, припаянной к рабочему сосуду (рис. 4), собирали выделявшуюся при реакции воду.

На рис. 3 изображен спектр ЭПР облученного при 10°K образца глюкозы до измельчения. Механическое измельчение образца сопровождается гибелью радикалов, без изменения формы спектра ЭПР. Уменьшение концентрации радикалов в зависимости от продолжительности измельчения представлено на рис. 4. После 240 мин измельчения, т. е. когда в образце свободные радикалы почти полностью по-

гибли, выход $G_{H_2O} = 10.5$. Данное значение в 3—4 раза превышает G_{H_2O} в случае, когда в системе отсутствуют пластические деформации.

Спектр ИК поглощения конечного продукта (облучение, термоот-

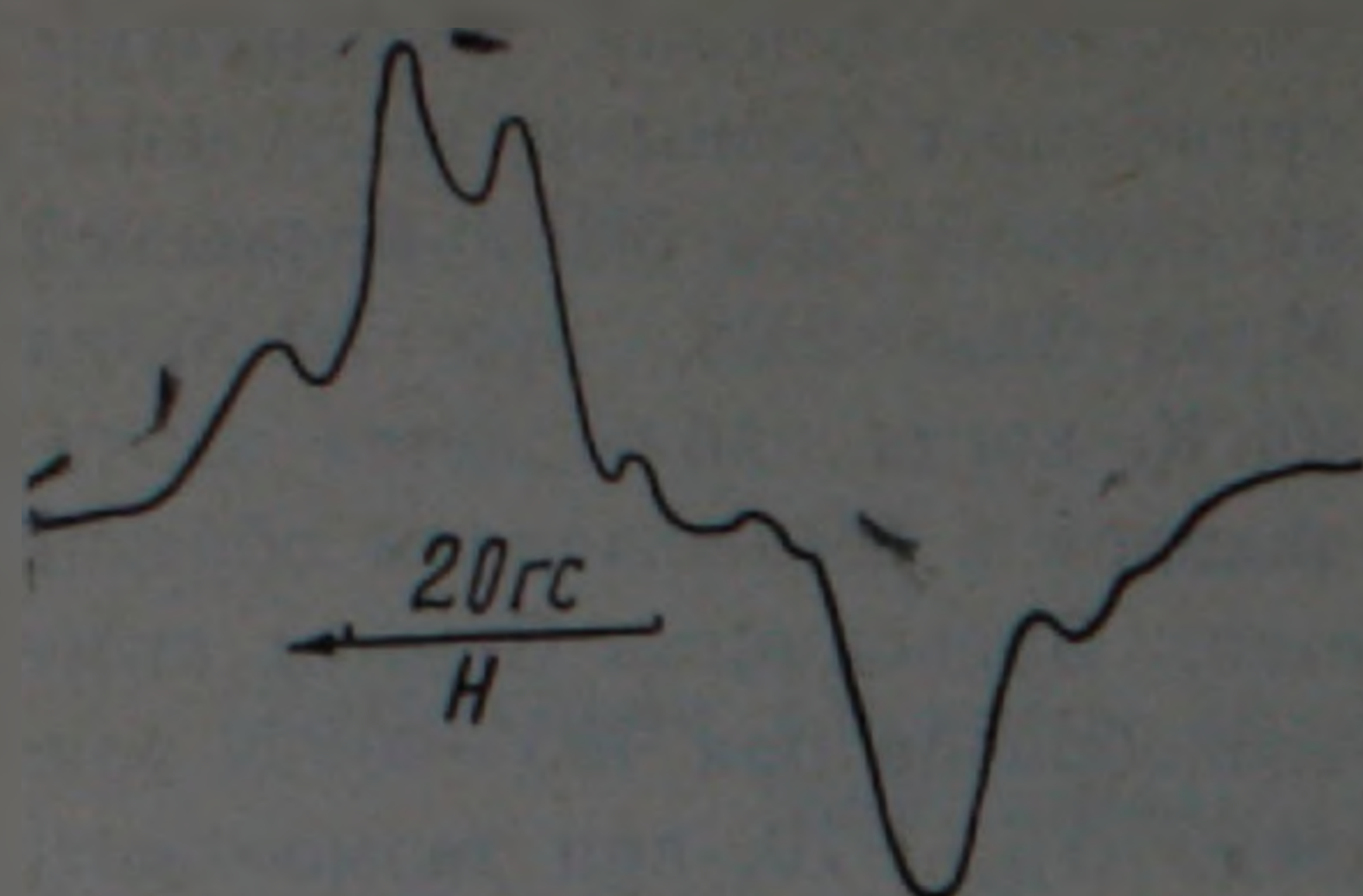


Рис. 3. Спектр ЭПР обезвоженной глюкозы, облученной при 310°K

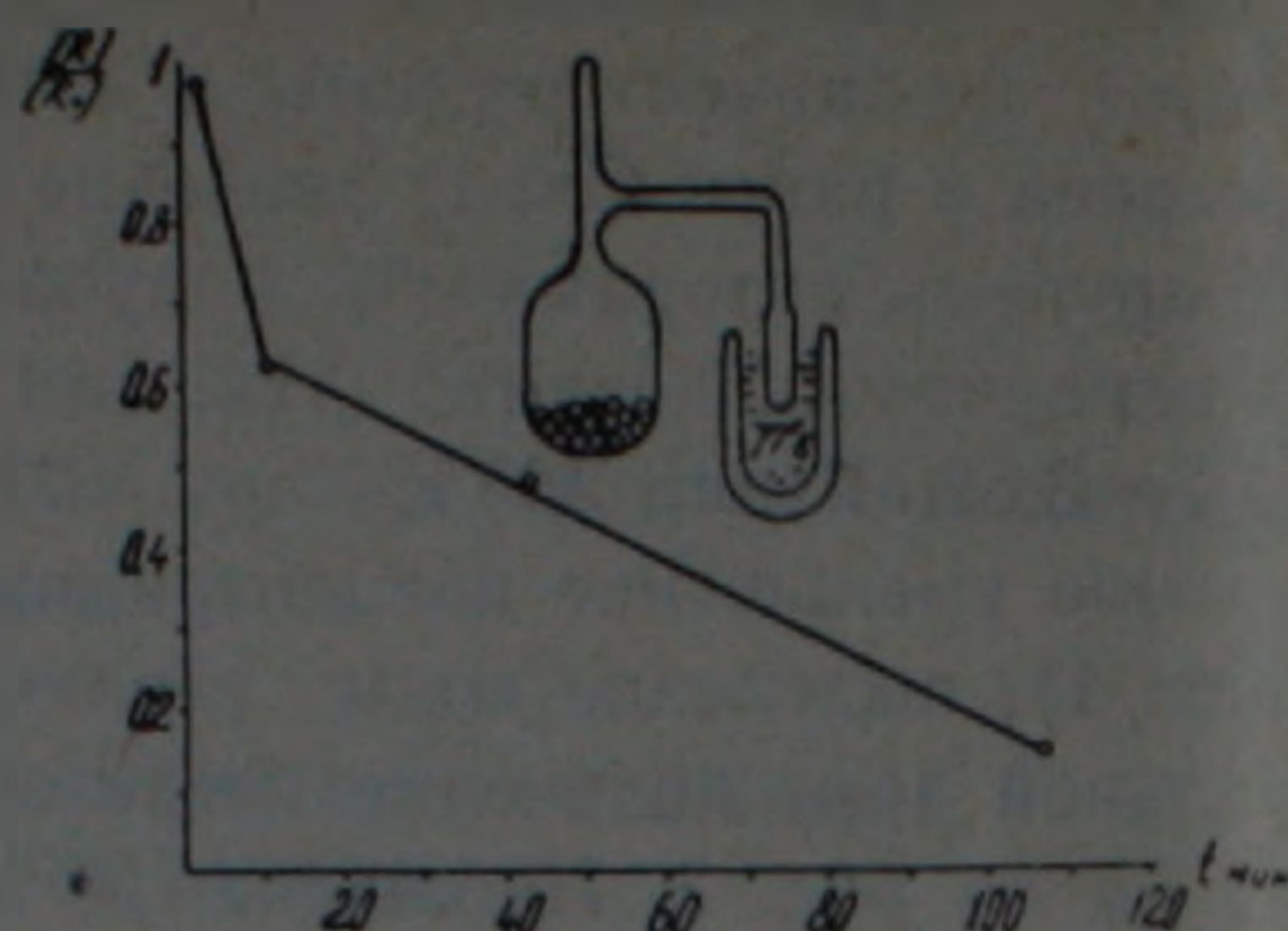


Рис. 4. Уменьшение концентрации радикалов в γ -облученной глюкозе зависимости от продолжительности в измельчения

жиг при 408°K) характеризуется наличием дополнительного пика при $\lambda = 1630 \text{ см}^{-1}$. Спектр образца, подвергнутого механическому измельчению,—поглощением при $\lambda = 1720 \text{ см}^{-1}$. Электронные спектры поглощения (200—400 нм) образца, подвергнутого термоотжигу, характеризуются двумя пиками поглощения: $\lambda_1 = 221 \text{ нм}$ и $\lambda_2 = 270 \text{ нм}$, а механически измельченного образца—одним, с $\lambda = 221 \text{ нм}$. Эти данные позволяют предположить, что в результате реакции образуется соединение, содержащее карбонильную группу. Более уверенно это можно утверждать в случае механически измельченного образца: $\lambda = 1720 \text{ см}^{-1}$ —характерное поглощение карбонильной группы. Смещение максимума поглощения в сторону коротких длин волн (1630 см^{-1}) в случае образца, подвергнутого термоотжигу, вероятно, можно объяснить наличием меж- и внутримолекулярных водородных связей, концентрации которых в случае механически измельченного образца очевидно минимальны.

Как известно, на начальной стадии радиационного поражения углеводов не исключено образование нескольких типов свободных радикалов, направления превращения которых определяются в основном первичной структурой углевода и свойствами матрицы. К настоящему времени методами ЭПР и анализа конечных продуктов радиационной дегградации установлены два основных направления внутримолекулярных превращений первичных радикалов ⁽⁵⁾: реакции распада и гидролиза радикалов, сопровождающиеся раскрытием пиранозного цикла, и реакции дегидратации радикалов, при которых, вероятнее всего, циклическое строение углевода сохраняется. Следует отметить, что образующиеся в первом случае алкилзамещенные радикалы типа— $R\dot{C}HOH$ и $R\dot{C}H_2$ активны (подвижны) и наблюдаемые цепные реакции во фруктозе, моногидрате лактозы и 2-дезоксирибозе ⁽⁶⁻⁸⁾ обусловлены ими. Спектры ЭПР, соответствующие этим радикалам, в моно- и дисахарах, даже при 77°K, не обнаружены, в то время как подвижность радикалов дегидратации, в которых циклическое строение радикала сохра-

няется, сильно ограничена решеткой, благодаря чему спектры ЭПР этих радикалов наблюдали при 77 и 300°K (^{11,12}). При температурах, близких к $T_{пл}$, а также пластических деформациях подвижность радикалов дегидратации возрастает, сопровождаясь их гибелью и соответственно возрастанием G_{H_2O} .

Таким образом, на основании вышесказанного можно утверждать, что радиационная деградация глюкозы при последующем термоотжиге вблизи температуры плавления протекает по цепному механизму, причем цепь ведут радикалы дегидратации. В результате этого процесса образуется соединение, содержащее карбонильную группу.

Институт физических
исследований Академии
наук Армянской ССР

Գ. Վ. ԱՔԱՂՅԱՆ

D-գլյուկոզայի փայփայումը հալման ջերմաստիճանի մոտակայքում պայմանավորված ճառագայթմամբ

Հետազոտված է γ -ճառագայթված D-գլյուկոզայի քայքայման մեխանիզմը: Հենվելով ռադիացոն-քիմիական ելքի և էՊՌ, ՈՒԿ և ՈՒՄ սպեկտրոսկոպիկ մեթոդներով ստացված տվյալների համադրության վրա, ցույց է տրված, որ գլյուկոզայի հետագա (հալման ջերմաստիճանին մոտ) տաքացմամբ պայմանավորված նրա ռադիացիոն քայքայումն ընթանում է շղթայական մեխանիզմով, ընդ որում շղթան զարգացնում են դեհիդրատացման ռադիկալները:

Այդ պրոցեսի արդյունքում գոյանում են կարբոքսիլ խումբ պարունակող միացություններ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ G. O. Phillips, P. Baugh, Nature, 198, 282 (1963). ² G. O. Phillips P. J. Baugh, G. Löfroth, J. Chem. Soc. (A), 377 (1966). ³ N. U. Ahmed, P. J. Baugh, G. O. Phillips, J. Chem., Soc., 1305 (1972). ⁴ G. Löfroth, Int. J. Rad. Phys. Chem., 4, 277 (1972). ⁵ Г. В. Абагян, Арм. хим. журн., т. 32, № 10 (1981). ⁶ M. D. Dirdaroglu, J. Lettich, C. von Sonntag, Carbohydrate Res., 47, 15, (1976). ⁷ C. von Sonntag, M. Dizdaroglu, Z. Naturforsch., 28b, 367 (1973). ⁸ C. von Sonntag, K. Neuwald, M. Dizdaroglu, Rad. Res., 58, 1 (1974). ⁹ С. И. Гольдин, А. А. Ивко, Н. Т. Бондаренко и др., ДАН СССР, т. 228, 389 (1976). ¹⁰ Г. В. Абагян, П. Ю. Бутягин, Биофизика, т. 9, 180 (1964). ¹¹ Г. В. Абагян, А. С. Апресян, А. М. Дубинская, Журн. физ. химии, т. 50, 28 (1976). ¹² A. Gröslund, G. Löfroth, Acta Chem, Scand., 1329, 475 (1975).

