

Զ Ե Կ ՈՒ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

LXXIV, № 3

1982

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. բեկնա-
ծու (պատ. ֆաբրուդար), Է. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Թ. ԲԱԲԱՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ րդր. անդամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ րդր. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄ-
ՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ
ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղա-
կալ), Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմի-
կոս (պատ. խմբագիր), Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Օ. Մ. ՍԱՊՈՆՋՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ րդր. անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼ-
ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՁ-
ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРИЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, ака-
демик АН АрмССР (зам. отв. редакто-
ра), А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН, академик АН АрмССР, О. М. САПОН-
ДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТА-
ЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, академик АН Арм-
ССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, академик АН АрмССР.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

Ե Ր Ե Վ Ա Ն

ЕРЕВАН

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

12

- Լ. Հ. Ասլանյան—Դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդիր—ասիմպտոտիկ դեպք 99
- Ի. Ա. Ավետիսյան—Ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների ընդհանրացված *D*-հատկության մասին 104
- Բ. Ս. Նաճապետյան—Ստացիոնար պաստահական պրոցեսի կորելյացիոն ֆունկցիայի վարքի մասին 109
- Գ. Գ. Գևորգյան—Չափելի ֆունկցիաները մարտինգալներով ներկայացման և ներկայացման միակության վերաբերյալ 113
- Ս. Կ. Պողոսյան—Բազմամասնիկ փոխազդումով կավարավոր համակարգերի Գիրսյան անսամբլի վիճակագրական գումարի լոգարիթմի ասիմպտոտիկան 118

ԱՍՏՐՈՆՈՄԻԱ

- Ս. Գ. Իսկուդարյան—Ուշ Լիպի սարույրների կառուցվածքային մի բնութագրի մասին 122

ՍԻՅՈՒՐՈՒՈՒԹՅՈՒՆ

- Ա. Գ. Նազարով—Իրկրաշարժների կանխագուշակման պրոբլեմի շուրջը 131

ՄԻՋԱՏԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- Հ. Ն. Տերտերյան, Է. Ա. Քաջվորյան—Մժեղի նոր տեսակ (Diptera, Simuliidae) Հայկական ՍՍՀ-ից 134
- Վ. Ի. Պիսկունով, Ի. Մ. Եմելյանով—Գելեխիդ ցեղերի նոր տեսակներ՝ *Gelechia* Hbn., *Teleiodes* Sattler և *Aristotelia* Hbn. սեռերից ՍՍՀՄ ֆաունայից 138

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- Л. А. Асланян—Дискретная изопериметрическая задача—асимптотический случай 99
- Р. А. Аветисян—Об обобщенном D -свойстве функциональных последовательностей 104
- Б. С. Нахапетян—О поведении корреляционной функции стационарного случайного процесса 109
- Г. Г. Гевросян—О представлении и единственности представления измеримых функций мартингалами 113
- С. К. Поогсян—Асимптотика логарифма статистической суммы гиббсовского ансамбля для решетчатых систем с многочастичным взаимодействием 118

АСТРОФИЗИКА

- С. Г. Искударян—О некоторой морфологической характеристике поздних спиралей 122

СЕЙСМОЛОГИЯ

- А. Г. Назаров—К проблеме сейсмопрогноза 131

ЭНТОМОЛОГИЯ

- А. Е. Тертерян, Э. А. Качворян—Новый вид мошки из Армянской ССР (*Diptera*, *Simuliidae*) 134
- В. И. Пискунов, И. М. Емельянов—Новые виды выемчатокрылых молей родов *Gelechia* Hbn., *Teleiodes* Sattler и *Aristolella* Hbn. (*Lepidoptera*, *Gelechiidae*) из фауны СССР 138

CONTENTS

MATHEMATICS

	P.
<i>L. A. Aslanian</i> —The discrete isoperimetric problem—asymptotic case	93
<i>R. A. Avetisyan</i> —About the generalized <i>D</i> -property of the functional sequences	104
<i>B. S. Nahapetian</i> —The behavior of correlation function of stationary random process	109
<i>G. G. Gevorgian</i> —On representation and uniqueness of representation of measurable functions of martingals.	113
<i>S. K. Pogosyan</i> —The asymptotic expansion of the logarithm of partition function of gibbsian ensemble for lattice systems with manybody interaction	118

ASTROPHYSICS

<i>S. G. Iskudarian</i> —On some morphological characteristic of late type spirals	122
--	-----

SEISMOLOGY

<i>A. G. Nazarov</i> —On the problem of earthquake prediction	131
---	-----

ENTOMOLOGY

<i>A. E. Terterian, E. A. Kachvorian</i> —A new black-fly species from Armenian SSR (Diptera, Simuliidae).	134
<i>V. I. Piskunov, I. M. Emelyanov</i> —New species of gelechiid moths from the genera <i>Gelechia</i> Hbn., <i>Telelodes</i> Sattler and <i>Aristotella</i> Hbn. (Lepidoptera, Gelechiidae) from the fauna of the USSR	138

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 7.04.82 г. Подписано к печати 30.04.82 г. ВФ 05221.
 Бумага № 1, 70×108¹/₁₆. Плоскопечать. Печ. лист. 3,0. Усл. печ. лист. 4,2.
 Учет.-изд. 4,1. Тираж 430. Заказ 316. Издат. 5667.
 Адрес ред.: 375019, Ереван, Барекамутян, 24-г. II эт. ком. I.

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван, Барекамутян 24 г.
 Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин.

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

Л. А. Асланян

Дискретная изопериметрическая задача — асимптотический случай

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 8/IX 1981)

В данной статье приводятся исследования по дискретной изопериметрической задаче ^(1,2) в асимптотическом случае с использованием метода работы ⁽³⁾. Одновременно обсуждаются некоторые следствия, получаемые из основной изопериметрической теоремы.

1. Рассмотрим множество E^n вершин n -мерного единичного куба. Пусть $\mathcal{M}_a = \{A \subseteq E^n, |A| = a\}$, $0 \leq a = 2^{n-1}(1 + \alpha(n)) \leq 2^n$ и $\mathcal{M} = \bigcup \mathcal{M}_a$. Для произвольного $A \in \mathcal{M}$ вершину $\bar{x} \in A$ назовем внутренней для A , если $S_1^n(\bar{x}) \subseteq A$, где $S_1^n(\bar{x})$ — шар радиуса 1 в метрике Хэмминга с центром $\bar{x}$. $B(A)$ — множество всех внутренних вершин подмножества A . Вопросам поиска максимальных значений $|B(A)|$, $A \in \mathcal{M}_a$ был посвящен ряд работ ⁽⁴⁾. Ниже мы формулируем утверждения, характеризующие типичные значения $|B(A)|$.

Подмножество $A \subseteq E^n$ назовем γ -компактным, если $\gamma(A) = |B(A)|/|A| = \gamma$, $0 \leq \gamma \leq 1$. Обозначим через $m(\gamma)$ ($m_a(\gamma)$) долю тех подмножеств $A \in \mathcal{M}$ ($A \in \mathcal{M}_a$), которые γ -компактны. Соответственно $\bar{m}(\gamma)$ и $\bar{m}_a(\gamma)$ доли тех подмножеств $A \in \mathcal{M}$ и $A \in \mathcal{M}_a$, для которых $\gamma(A) \geq \gamma$. При $n \rightarrow \infty$ эти определения нужно понимать в смысле $\gamma(A) \sim \gamma$ и $\gamma(A) \geq \gamma$.

а) для почти всех подмножеств $A \subseteq E^n$ $\gamma(A) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Если k — произвольное целое число, $k \geq 0$, то $m\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) \sim \frac{1}{2^{k+1}k! \sqrt{e}}$ при $n \rightarrow \infty$

и $\bar{m}\left(\frac{\tau_1(n)}{2^n}\right) \rightarrow 0$ при $\tau_1(n) \rightarrow \infty$;

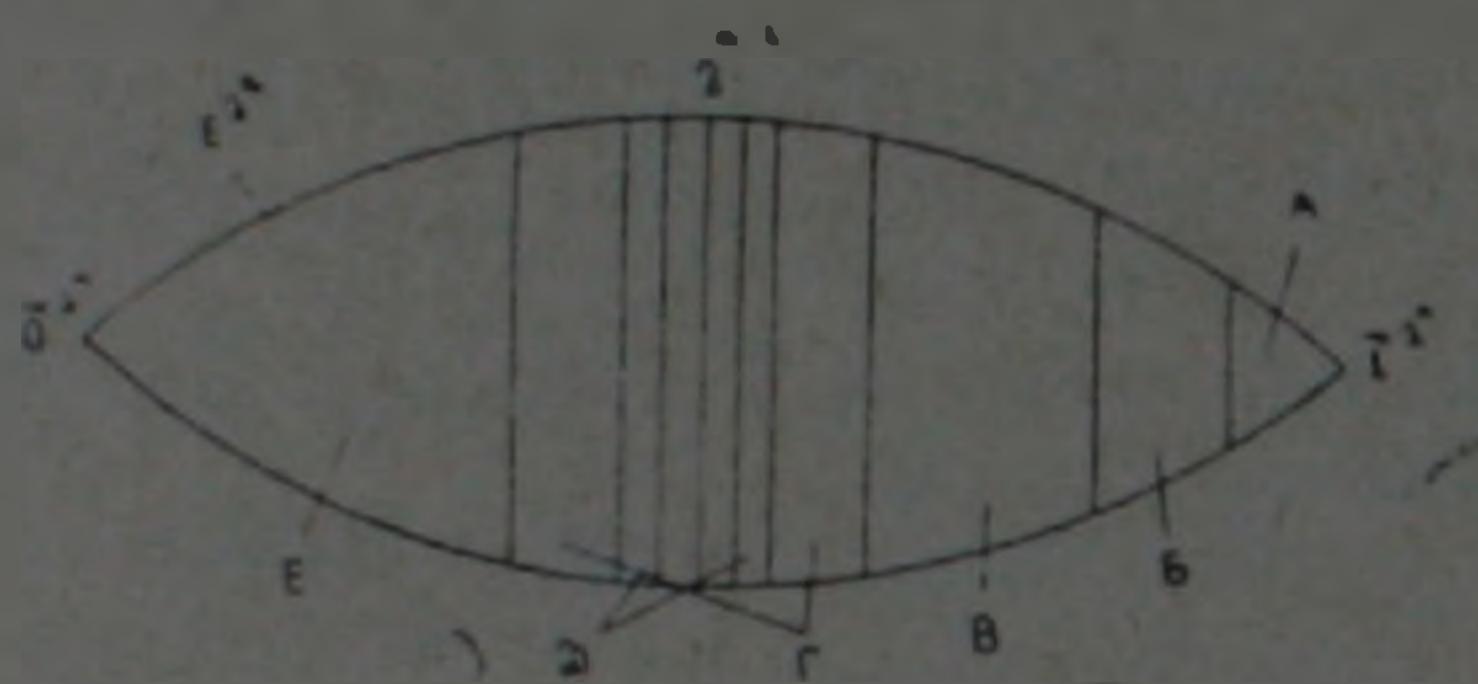
б) если $n\alpha(n) \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$, то для почти всех подмножеств $A \in \mathcal{M}_a$ $\gamma(A) = 0$;

в) если $n\alpha(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то $m_a\left(\left(\frac{1+\alpha(n)}{2}\right)^n\right) \rightarrow 1$. Если $1 - \alpha(n) \sim \frac{c}{n}$, $c > 0$, то для почти всех множеств $A \in \mathcal{M}_a$ $\gamma(A) \sim e^{-c/2}$, для $1 - \alpha(n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ $m_a(1) \rightarrow 1$;

г) при $n\lambda(n) \rightarrow \infty$ для почти всех $B \in \mathfrak{M}_b$, $|b-a| = o\left(\frac{2^n}{n}\right)$ $\gamma(B) \sim \left(\frac{1+\lambda(n)}{2}\right)^n \sim \gamma(A)$;

д) если $n\lambda(n) \rightarrow \lambda$ при $n \rightarrow \infty$, то $m_n\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) \rightarrow \frac{1}{k!} \left(\frac{e^\lambda}{2}\right)^k e^{-\frac{e^\lambda}{2}}$, $\bar{m}_n\left(\frac{\gamma_i(n)}{2^{n-1}}\right) \rightarrow 0$ при $\gamma_i(n) \rightarrow \infty$. Случай $\lambda = 0$ полезно сопоставить с а).

Приведем схематическое представление этих утверждений. Разместим вершины 2^n -мерного единичного куба E^{2^n} , как обычно, по слоям и упорядочим эти слои по возрастанию. Тогда вершины E^{2^n} кодируют подмножества E^n , и выполнение утверждений а) д) в слоях E^{2^n} представляет собой следующую картину:



А — на слоях с номерами от $2^n - o\left(\frac{2^{n-1}}{n}\right)$ до 2^n для почти всех подмножеств $\gamma \sim 1$;

Б — на слоях с номерами $2^n - \frac{c2^{n-1}}{n}$, где c эквивалентно некоторой положительной постоянной, для почти всех подмножеств $\gamma \sim e^{-c/2}$,

В — на слоях с номерами $2^{n-1} + \frac{\varphi(n)}{n} 2^{n-1}$, где $\varphi(n)$ как угодно медленно растущая функция, для почти всех подмножеств $\gamma \sim \left(\frac{1+\lambda(n)}{2}\right)^n$. Если a и b номера двух таких слоев, и γ_1 и γ_2 — значения параметра γ для них, то при $|a-b| = o\left(\frac{2^n}{n}\right)$ $\gamma_1 \sim \gamma_2$;

Г — на слоях с интервала $2^{n-1} \pm c \frac{2^{n-1}}{n}$ точное распределение представлено в пункте д);

Д — на слоях с интервала $2^{n-1} \pm o\left(\frac{2^{n-1}}{n}\right)$ имеет место ситуация, аналогичная представленной в а) (отметим, что на слоях с номерами $2^{n-1} \pm \varphi(n)2^{n/2}$ находятся коды почти всех подмножеств E^n);

E — на слоях с номерами $2^{n-1} - \varphi(n) \frac{2^{n-1}}{n}$ для почти всех подмножеств $\gamma = 0$.

Перейдем сейчас к формулировке тех утверждений, следствиями которых являются пункты а) — д).

Математическое ожидание и дисперсия числа внутренних вершин подмножеств класса $\mathfrak{M}_n$ выражаются соответственно формулами:

$$\begin{aligned} M_n(|B(A)|) &= 2^n C_{2^n-n-1}^{a-n-1} / C_{2^n}^a, \\ D_n(|B(A)|) &= 2^n \frac{C_{2^n-n-1}^{a-n-1}}{C_{2^n}^a} + 2^n (n + C_n^2) \frac{C_{2^n-2n}^{a-2n}}{C_{2^n}^a} + \\ &+ 2^n (2^n - 1 - n - C_n^2) \frac{C_{2^n-2n-2}^{a-2n-2}}{C_{2^n}^a} - \left(2^n \frac{C_{2^n-n-1}^{a-n-1}}{C_{2^n}^a} \right)^2. \end{aligned}$$

Лемма 1. Если при $n \rightarrow \infty$

а) $n\alpha(n) \rightarrow -\infty$, то $M_n(|B(A)|) \rightarrow 0$,

б) $n\alpha(n) \rightarrow \infty$, то $M_n(|B(A)|) \sim \frac{(1+\alpha(n))^n}{2} \rightarrow \infty$,

в) $n\alpha(n) \rightarrow \text{const}$, то $M_n(|B(A)|) \sim \frac{1}{2} \cdot \exp(n\alpha(n))$.

Лемма 2. Если $n\alpha(n) \rightarrow \infty$, то $\frac{D_n(|B(A)|)}{M_n^2(|B(A)|)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Эти утверждения на основе неравенств Чебышева и составляют доказательство некоторых утверждений пунктов а) — д). Остальные доказательства пунктов а) — д) основываются на использовании теоремы непрерывности производящих функций случайных величин.

Рассмотрим целочисленную случайную величину ξ , принимающую значение $n \in N$ с вероятностью p_n . Факториальный момент r -го порядка для случайной величины ξ определяется формулой

$$\alpha(r) = M\xi(\xi-1) \cdot \dots \cdot (\xi-r+1).$$

В качестве ξ мы будем рассматривать число внутренних вершин подмножеств $A \in \mathfrak{M}_n$ при равномерном распределении вероятностей над $\mathfrak{M}_n$. Обозначим через b_r среднее число неупорядоченных r -ок внутренних вершин по всем подмножествам системы $\mathfrak{M}_n$, тогда

Лемма 3. Если $\frac{n^2 r^2 2^{4r}}{2^n (1+\alpha(n))^{4r}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$b_r \leq C_{2^n}^r \cdot \left(\frac{1+\alpha(n)}{2} \right)^{r(n+1)}.$$

Важным следствием этой леммы является следующее утверждение. Если $r \leq n^{1/3}$, то при $n \rightarrow \infty$ равномерно по r

$$b_r \sim \frac{1}{r!} \cdot \left(\frac{(1+\alpha(n))^{n+1}}{2} \right)^r.$$

Таким образом, для слабо растущих r факториальные моменты рассматриваемой случайной величины ξ равномерно эквивалентны факториальным моментам Пуассоновского распределения со средним значением $\frac{(1+\alpha(n))^{n+1}}{2}$. Отсюда непосредственно можно перейти к

доказательству сходимости соответствующих производящих функций. Производящая функция факториальных моментов определяется формулой $\gamma(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$ для тех значений s , при которых ряд сходится.

Теорема непрерывности для производящих функций факториальных моментов гласит, что для случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ со спектральными значениями $0, 1, \dots, m, \dots$ и производящими функциями $\gamma_{\xi_1}(s), \gamma_{\xi_2}(s), \dots, \gamma_{\xi_n}(s), \dots$ $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{\xi_n}(t) = p_{\xi}(t)$, t — произвольное число тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{\xi_n}(s) = \gamma_{\xi}(s)$ при $0 \leq s \leq 1$.

Можно убедиться, что для рассматриваемых нами производящих функций справедливо представление $\gamma(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(s-1)^k}{k!}$. Таким образом, нам остается доказать сходимость соответствующих степенных рядов, при $-1 \leq s-1 \leq 0$, что легко сделать, если учесть, что эти ряды абсолютно сходящиеся.

В заключение этой части отметим, что содержание (3) непосредственно означает, что доли всех подмножеств E^n при фиксированном числе внутренних вершин также подчинены распределению Пуассона со средним значением $\tau = \frac{1}{2}$.

II. Множество $A \subseteq E^n$ критическое по компактности, если удаление произвольной ее вершины уменьшает число внутренних вершин, $|B(A)|$. Если стандартное размещение обладает данным свойством, то соответствующая мощность $|A|$ называется критической по компактности.

Множество $A \subseteq E^n$ критическое по соседству, если к нему нельзя прибавить вершины так, чтобы окаймление $O(A) = \Gamma(E^n \setminus A)$ не увеличилось. Если стандартное размещение обладает данным свойством, то соответствующая мощность называется критической по соседству.

Пусть $a = \sum_{i=0}^k C_n^i + \delta$, $0 \leq \delta < C_n^{k+1}$. Обозначим через K_k и K_c соответственно (через k_k и k_c) множество всех тех a (δ), которые критические по компактности и по соседству*.

Лемма 4. В стандартной последовательности L^n все вершины $\bar{x}_i$, $i \in K_c$ непосредственно предшествуют вершинам $\bar{x}_p$, $p \in K_k$.

Структура множества K_k в L^n допускает простое описание: $i \in K_k$ тогда и только тогда, когда $\bar{x}_i \in E^n (x_n = 1)$. В частности $|K_k| = 2^{n-1}$, и множество K_c на основе сделанного замечания может быть описано

* Отметим, что в формулировке теоремы 7 (2) об условиях минимальности $O(A)$ (с точностью до изоморфизма) упущено условие $\delta \in k_c$.

следующим образом: $i \in K_c$ тогда и только тогда, когда $\bar{x}_i$ построено следующим образом: для некоторого i , $1 \leq i \leq n$ $x_{ii} = 0$, $x_{ij} = 1$ для всех $i < j \leq n$ и для $i-1$, если $i-1 \geq 1$, а другие координаты x_i произвольные. Отсюда, в частности, получаем, что $|K_c| = 2^{n-1}$.

III. В этом пункте мы формулируем утверждения, аналогичные I для разбиений n -мерного единичного куба. Под разбиением E^n мы подразумеваем его представление в виде $\pi = (A, E^n \setminus A)$, где A произвольное подмножество E^n . В некоторых задачах теории распознавания образов представляют интерес такие числовые параметры разбиений, как $|B(\pi)| = |B(A)| \cup |B(E^n \setminus A)|$, $\gamma(\pi) = |B(\pi)|/2^n$ и др. Они в каком-то, смысле выражают простоту рассматриваемого разбиения π .

1) Если $n \rightarrow \infty$, то доля тех разбиений, для которых $|B(\pi)| = k$ стремится к $\frac{1}{k!e}$.

2) Если рассмотреть все разбиения E^n , когда мощности составляющих подмножеств зафиксированы $-(a, 2^n - a)$, то

а) если при $n \rightarrow \infty$ $n|x(n)| \rightarrow \infty$, то для почти всех разбиений $|B(\pi)| \sim \frac{1}{2} (1 + |x(n)|)^{n+1}$;

в) если $n|x(n)| \rightarrow \lambda$, то доля тех разбиений, для которых $|B(\pi)| = k$, стремится к $\frac{1}{k!} e^{\lambda k} e^{-e^\lambda}$.

Вычислительный центр Академии наук
Армянской ССР и Ереванского государственного
университета

Լ. Ա. ԱՍԼԱՆՅԱՆ

Դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդիր—ասիմպտոտիկ դեպք

Հոդվածում շարունակվում է դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդրի ուսումնասիրությունը ^(1,2) ասիմպտոտիկ դեպքում: Աշխատանքը հենվում է ⁽³⁾-ի մեթոդի վրա: Ապացուցվում է, որ n -չափանի միավոր E^n խորանարդի ֆիքսված հզորության էնթալպիայի մասը, որոնք ունեն նշված թվով ներքին կետեր, բավարարում է Պուասսոնի հավանական թաղիմանը: Դիտարկվում են նաև հիմնական իզոպերիմետրիկ թեորեմի որոշ հետևանքներ, կապված կրիտիկական հզորությունների հետ:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱՇԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Լ. Ա. Ասլանյան, Վ. Մ. Կարահանյան, Բ. Ե. Թորոսյան, ДАН АрмССР, т. 65, № 5 (1977). ² Լ. Ա. Ասլանյան, Վ. Մ. Կարահանյան, ДАН АрмССР, т. 65, № 4 (1977). ³ И. А. Акипови, Л. А. Асланиян, Учен. зап. ЕГУ, № 1, 1980.

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

Р. А. Аветисян

Об обобщенном D -свойстве функциональных последовательностей

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 29/X 1981)

Результаты настоящей заметки примыкают к работе ⁽¹⁾. Напомним следующее

Определение ⁽²⁾. Будем говорить, что система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$ обладает свойством D , если из абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$$

на множестве положительной меры следует неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty.$$

Аналогично определяется D -свойство для кратных последовательностей.

Чтобы привести определение понятия обобщенного D -свойства, сделаем следующие обозначения:

через Z_+ обозначим множество

$$\{(m, n) : m, n = 1, 2, \dots\}.$$

Семейство множеств $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ будем называть правильным разбиением, если $Z_+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$, где N_k конечные подмножества множества Z_+ , причем $N_i \cap N_j = \emptyset (i \neq j)$.

Через $\overline{N}_k$ будем обозначать число элементов множества N_k . Пусть, далее, $\{\Phi_{mn}(x, y)\}_{m,n=1}^{\infty}$ система функций, определенных на квадрате $T = [0, 1] \times [0, 1]$.

Определение 2. Будем говорить, что система $\{\Phi_{mn}(x, y)\}_{m,n=1}^{\infty}$ обладает обобщенным D -свойством, если из условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{(m,n) \in N_k} a_{mn} \Phi_{mn}(x, y) \right| < \infty,$$

где $(x, y) \in E \subset T$, $|E| > 0$, следует неравенство

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}| < \infty$$

(здесь $|E|$ — лебегова мера плоского множества E). В работе ⁽¹⁾ для случая $\overline{N}_k = 1$ приведены утверждения типа необходимых и достаточ-

ных условий на системы вида $\{f_n(x) \cdot f_m(y)\}_{m,n=1}^{\infty}$ и $\{\varphi(m x) \cdot \varphi(n y)\}_{m,n=1}^{\infty}$, чтобы они обладали D -свойством на всяком множестве положительной меры.

В случае, когда $\Phi_{mn}(x, y)$ является двойной тригонометрической системой, В. С. Панферовым доказано, что если $\overline{N}_k \leq C(k=1, 2, \dots)$, то она обладает обобщенным D -свойством (в смысле определения 2) на всяком множестве положительной плоской меры. С другой стороны, легко построить двойной тригонометрический ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{(m,n) \in N_k} a_{mn} \sin m x \sin n y + b_{mn} \sin m x \cos n y + \right. \\ \left. + c_{mn} \cos m x \sin n y + d_{mn} \cos m x \cos n y \right|,$$

который сходится п. в. на квадрате $Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, но

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}| + |b_{mn}| + |c_{mn}| + |d_{mn}| = +\infty.$$

Здесь, очевидно, будет выполняться условие

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{N}_k = +\infty.$$

Действительно, положим $b_{mn} = c_{mn} = d_{mn} = 0$,

$$a_{mn} = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n \\ \frac{1}{n}, & \text{если } m = n \end{cases}$$

и рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=M_n+1}^{M_{n+1}} \frac{1}{k} \sin k x \sin k y \right),$$

где возрастающая последовательность M_n ($M_1=0$) удовлетворяет условию $M_n = O(n^4)$.

По неравенству Коши—Буняковского, будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_Q \left| \sum_{k=M_n+1}^{M_{n+1}} \frac{1}{k} \sin k x \sin k y \right| dx dy \leq 2\pi \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_Q \left(\sum_{k=M_n+1}^{M_{n+1}} \frac{1}{k} \sin k x \sin k y \right)^2 dx dy \right|^{1/2} = 2\pi^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=M_n+1}^{M_{n+1}} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} < \infty.$$

Следовательно, по теореме Леви, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=M_n+1}^{M_{n+1}} \frac{1}{k} \sin k x \sin k y \right|$$

сходится почти всюду на Q .

Нетрудно также построить ряд, обладающий такими же свойствами, для любой заранее взятой монотонно возрастающей последовательности натуральных чисел M_n , удовлетворяющих лишь условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (M_{n+1} - M_n) = +\infty.$$

Дело, как видно из вышеприведенных рассуждений, сводится к построению числовой последовательности a_k , удовлетворяющей условиям:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = +\infty; \\ 2) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=M_n+1}^{M_{n+1}} a_k^2 \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

Такой пример легко построить.

В этой заметке мы сперва формулируем одно утверждение, являющееся обобщением вышеуказанного результата Панферова, потом описываем некоторый класс плоских множеств меры нуль, на которых двойная тригонометрическая система обладает обобщенным D -свойством.

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть 2π -периодические функции $\varphi(x)$ и $\psi(x) \in L_2[0, 2\pi]$ удовлетворяют следующим условиям:

- а) $\varphi(x), \psi(x) \neq \text{const}$
- б) $\varphi(x), \psi(x) \neq 0$ почти всюду.

Тогда для любого правильного разбиения $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ такого, что $\overline{N}_k \leq C(k=1, 2, \dots)$, система $\Phi_{mn}(x, y) = \varphi(mx - \alpha_m) \cdot \psi(ny - \beta_n)$ обладает обобщенным D -свойством на любом множестве положительной плоской меры (α_m и β_n произвольные действительные числа).

Доказательство этой теоремы опирается на следующую лемму:

Пусть $\varphi(x) \in L^2[0, 2\pi]$, $\varphi(x) \neq \text{const}$, m — натуральное число. $E \subset [0, 2\pi]$ — множество положительной меры и $p_0 > 0$.

Тогда для всех $N \geq N_0(m, E, \varphi, p_0)$ справедливо неравенство

$$\left\{ \sum_{k=N+1}^{N+m} a_k^2 \right\}^{1/2} \leq C(m, E, \varphi, p_0) \cdot \left\{ \int_E \left| \sum_{h=N+1}^{N+m} a_h \varphi(n_h x - \alpha_h) \right|^{p_0} dx \right\}^{1/p_0}, \quad (1)$$

где $\{n_h\}_{h=1}^{\infty}$ произвольная последовательность отличных друг от друга натуральных чисел.

Эта лемма является усилением леммы 2.8 из (3), в которой в правой части (1) вместо $\varphi(n_h x - \alpha_h)$ фигурирует выражение $\varphi(kx - \alpha_k)$, но доказывается точно так же, только вместо леммы 1.3 из (1) нужно применить следующую лемму А. С. Белова (4):

Пусть

$$P(x) = \sum_{n=1}^m c_n e^{i\lambda_n x},$$

где $c_1, \dots, c_m$ произвольные комплексные, а $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ действительные числа, причем

$$|\lambda_{n_1} - \lambda_{n_2}| \geq \Delta > 0, \quad n_1 \neq n_2.$$

Пусть далее $E \subset J$, $|E| > 0$, где J — произвольный сегмент на действи-

тельной прямой. Тогда для любой функции $\varphi(x) \geq 0$, $x \in [0, +\infty)$ и любого числа $\gamma \in (0, 1]$

$$\frac{1}{|E|} \int_E \varphi(|P(x)|) dx \geq (1-\gamma) \cdot \varphi(A_2(m, \Delta, \gamma \cdot |E|, |J|) \cdot \max_{1 \leq n \leq m} |c_n|),$$

где

$$A_2(m, \Delta, \gamma \cdot |E|, |J|) \geq \left(\frac{|E|}{3 \cdot |J|} \right)^{2m-1} \cdot \left(\min \left(\frac{\Delta \cdot |J|}{2\pi}, 1 \right) \right)^{m-1}.$$

В работе (5), в частности, установлено, что если ряд

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |A_{mn}(x, y)|, \quad (2)$$

где

$$A_{mn}(x, y) = a_{mn} \sin mx \sin ny + b_{mn} \sin mx \cos ny + c_{mn} \cos mx \sin ny + d_{mn} \cos mx \cos ny,$$

сходится на множестве точек $(x, f(x))$, где $x \in E$, $E \subset [0, 2\pi]$ и $|E| > 0$, а $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая на $[0, 2\pi]$ функция, удовлетворяющая условиям

- 1) $f'(x) \geq q > 0$ при $x \in [0, 2\pi]$;
- 2) $f'(x)$ строго монотонно возрастает на $[0, 2\pi]$.

то

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}| + |b_{mn}| + |c_{mn}| + |d_{mn}| < \infty. \quad (3)$$

Оказывается, этот результат можно усилить: а именно, вместо сходимости ряда (2) можно требовать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{(m,n) \in N_k} A_{mn}(x, y) \right|,$$

где N_k удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда при тех же ограничениях на $f(x)$ справедливо (3).

В заключение отметим, что часть результатов этой заметки доложена нами на международной конференции по теории аппроксимаций и функциональным пространствам в г. Гданьске (ПНР) в 1979 г.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

Ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների ընդհանրացված
[D]-հատկության մասին

Հոդվածում բերվում են բավարար տիպի պայմաններ, որոնց դեպքում
կրկնակի ֆունկցիոնալ սիստեմը օժտված կլինի ընդհանրացված [D]-հատկու-
թյամբ:

Ձևակերպված են հետևյալ 2 պնդումները.

1. Եթե $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ 2π -պարբերական ֆունկցիաները բաժարարում են որոշակի պայմանների, ապա $\Phi_{mn}(x, y) = \varphi(mx - \alpha_m) \cdot \psi(ny - \beta_n)$ կրկնակի սխառեմը օժտված է ընդհանրացված D -հատկությունը ցանկացած դրական չափի հարթ բազմություն վրա:

2. Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը խիստ ուռուցիկ կոր է, ապա $A_{mn}(x, y)$ կրկնակի եռանկյունաչափական սխառեմը օժտված է ընդհանրացված D -հատկությունը այդ կորի վրա գտնվող զծային դրական չափի ցանկացած բազմություն վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Р. А. Аветисян, Изв. АН АрмССР, т. XI, № 3 (1976). ² Г. Алексич, Проблемы сходимости ортогональных рядов, ИЛ. М., 1963. ³ С. Б. Стечкин, П. Л. Ульянов, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 86, (1965). ⁴ А. С. Белов, «Anal. math.», т. 5, № 2 (1979). ⁵ Р. А. Аветисян, Мат. сб., т. 110 (152), № 2 (10) (1979).

УДК 519.214

МАТЕМАТИКА

Б. С. Нахапетян

О поведении корреляционной функции стационарного случайного процесса

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрином 4/XI 1981)

Пусть $\xi_t, t \in \mathbb{Z}^1$ стационарный случайный процесс, удовлетворяющий одному из двух нижеследующих критериев слабой зависимости:

а) сильное перемешивание (с. п.):

$$\sup_{A \in M_{-\infty}^t, B \in M_{t+s}^{\infty}} |P(AB) - P(A)P(B)| = \tau(s) \rightarrow 0; \quad s \rightarrow \infty$$

б) равномерное сильное перемешивание (р. с. п.):

$$\sup_{A \in M_{-\infty}^t, B \in M_{t+s}^{\infty}, P(A) > 0} \left| \frac{P(AB) - P(A)P(B)}{P(A)} \right| = \tau(s) \rightarrow 0. \quad s \rightarrow \infty$$

Здесь M_a^b — σ -алгебра, порожденная случайными величинами $\xi_t, a \leq t \leq b, a, b \in \mathbb{Z}^1, -\infty \leq a < b \leq \infty$.

Хорошо известны следующие оценки для корреляционной функции $R(n)$ процессов с с. п. (см. (1), с. 389):

$$|R(n)| \leq (4 + 6 \cdot C)(\tau(n))^{\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}}$$

в случае, когда $M|\xi_0|^{2+\varepsilon} < C < \infty, \varepsilon > 0$, и для процессов с р. с. п. (см. (1), с. 392)

$$|R(n)| \leq 2C(\tau(n))^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < C < \infty,$$

когда $M|\xi_0|^2 < C$.

Из этих оценок следует, что корреляционная функция таких процессов стремится к нулю на бесконечности тем быстрее, чем быстрее стремится к нулю соответствующий коэффициент перемешивания.

Но оказывается, что имеет место любопытный факт (и он будет доказан в настоящей заметке), что как бы медленно ни стремился к нулю коэффициент перемешивания, корреляционная функция соответствующих процессов на бесконечности стремится к нулю с определенной скоростью, большей чем $\frac{1}{n^2}, \varepsilon > 0$. А именно, имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. * Пусть стационарный случайный процесс $\xi_t, t \in \mathbb{Z}^1$

*Всюду далее мы исключаем из рассмотрения класс случайных процессов, представимых в виде $\xi_t = \eta_{t+1} - \eta_t$, где η_t получаются сдвигами некоторой случайной величины η_0 , принадлежащей замкнутой среднеквадратически, линейной оболочке случайных величин $\xi_t, t \in \mathbb{Z}^1$ (см. (1), с. 411).

$\in Z^1$, $M\xi_0^2 < \infty$ обладает свойством р. с. п. Тогда при любом $\epsilon > 0$, в случае существования предела $\lim_{n \rightarrow \infty} R(n)n^{1-\epsilon}$, его значение необходимо равно нулю.

Пусть x_i , $i \in Z^1$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным вторым моментом,

$$MX_i = 0 \text{ и } \xi_i = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l X_{i+l}, \text{ где } \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^2 < \infty, c_l \in R^1.$$

Теорема 2. Пусть случайный процесс $\xi_i = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l X_{i+l}$ обладает свойством с. п. Тогда при любом $\epsilon > 0$ в случае существования предела $\lim_{n \rightarrow \infty} R(n)n^{1-\epsilon}$ его значение необходимо равно нулю.

Далее отметим, что теоремы 1, 2 представляют собой необходимые признаки принадлежности процесса классу процессов, обладающих тем или иным свойством перемешивания.

Используя эти критерии, мы приведем примеры регулярных процессов, не обладающих свойством с. п., и примеры процессов с с. п., не обладающих свойством р. с. п.

Известно, что процесс $\xi_i = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l X_{i+l}$ регулярен (см. (1), с. 385).

Пусть

$$c_i = \frac{1}{|i+r|^\alpha}, \quad i \in Z^1, \quad r \in R^1 \setminus Z^1, \quad \alpha > \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$R(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i c_{n+i} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|i+r|^\alpha} \cdot \frac{1}{|i+r+n|^\alpha} > \frac{1}{|r|^\alpha |r+n|^\alpha}$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1-\epsilon}}{|r|^\alpha |r+n|^\alpha} = \infty, \text{ если только } 1-\epsilon > \alpha.$$

Таким образом, при $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ регулярный процесс $\xi_i = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{X_{i+l}}{|i+r|^\alpha}$ не обладает свойством сильного перемешивания.

Рассмотрим теперь стационарную цепь Маркова, состояниями которой являются все целые числа, и $p_{n,n+1} = p_{-n,-n-1} = \alpha_n$, $n \geq 0$; $p_{n,0} = p_{-n,0} = 1 - \alpha_n$, $n > 0$, $p_{0,0} = 0$, $\alpha_0 = \frac{1}{2}$, $0 < \alpha_n < 1$ при $n \geq 1$. Если f_{00}^n обозначает вероятность, выходя из нуля, впервые попасть в нуль на n -ом шагу, то $f_{00}^1 = 0$ и при $n \geq 2$ $f_{00}^n = \beta_{n-1} - \beta_n$, где $\beta_0 = \beta_1 = 1$, $\beta_n = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_{n-1}$. Стационарное распределение имеет вид $\pi_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \right)^{-1}$.

$\pi_j = \pi_{-j} = \frac{1}{2} \pi_0 \beta_{j-1}$, $j > 0$ и существует в том и только в том случае, когда $\sum_0^\infty \beta_n < \infty$.

Пусть теперь

а) $f_{00}^n = A n^{-2-\delta}$, $\delta > 1$, где A выбирается из условия $\sum_1^\infty f_{00}^n = 1$;

$\Phi(j) = \sin g \{j\} |j|^{\frac{1}{r}}$, r таково, что $\delta r > 2$, $\xi_t^{(1)} = \Phi(X_t)$, где X_t — состояние цепи в момент t .

б) f_{00}^n определяется так же, как и в первом примере, $0 < \delta < 1$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(j) = -\Phi(-j) = 1 + \frac{1}{j}$, $j > 0$, $\xi_t^{(2)} = \Phi(X_t)$.

Ю. А. Давыдов показал (см. (2)), что оба процесса ($\xi_t^{(1)}$ и $\xi_t^{(2)}$) удовлетворяют условию сильного перемешивания, а

$$R^{(1)}(n) \asymp n^{\frac{2}{r}-\delta}, \quad R^{(2)}(n) \asymp n^{-\delta}.$$

Используя теорему 1, получаем, что процесс $\xi_t^{(1)}$ не обладает свойством р. с. п. при $0 < \frac{\delta r - 2}{r} < 1$, процесс же $\xi_t^{(2)}$ вообще не обладает этим свойством.

Приведем доказательства теорем. Они очень просты.

Доказательство теоремы 1. Известно (см. (1), с. 413), что если стационарный случайный процесс ξ_t , $t \in Z^1$ с конечным вторым моментом обладает свойством р. с. п., то дисперсия $\sigma_n^2 = D\left(\sum_{t=1}^n \xi_t\right) = nh(n)$, где $h(n)$ — медленно меняющаяся функция. Одним из свойств медленно меняющихся функций является следующее: для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(n)n^{-\varepsilon} = 0. \quad (1)$$

Легко видеть, что в нашем случае

$$h(n) = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n (n-j)R(j) + R(0).$$

Воспользуемся теперь (1) и теоремой Штольца, утверждающей, что предел отношения двух вариантов x_n и y_n , $n \in Z^1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} =$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$, если только $y_{n+1} > y_n$, $n \in Z^1$, и существует предел

справа конечный или даже бесконечный. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(n)}{n^\varepsilon} &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n (n-j)R(j)}{n^{1+\varepsilon}} = \\ &= 2 \frac{\sum_{j=1}^n (n-j)R(j) - \sum_{j=1}^{n-1} (n-1-j)R(j)}{n^{1+\varepsilon} - (n-1)^{1+\varepsilon}} = \frac{2}{1+\varepsilon} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n R(j)}{n^\varepsilon} \end{aligned}$$

при условии, что последний предел существует. Вновь применяя теорему Штольца, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n R(j)}{n^{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-\varepsilon} R(n), \varepsilon > 0,$$

при условии существования предела в правой части равенства. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} h(n)n^{-\varepsilon} = 0$, получаем утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Известно, что случайный процесс $\xi_i = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l X_{i+l}$ подчиняется центральной предельной теореме (см. (1), с. 455). Известно также, что если процесс ξ_i обладает свойством сильного перемешивания и подчиняется центральной предельной теореме, то необходимо $\sigma_n^2 = nh(n)$, где $h(n)$ — медленно меняющаяся функция (см. (1), с. 424). Для завершения доказательства теоремы 2 остается повторить соответствующую часть доказательства теоремы 1.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Р. Ս. ՆԱՀԱՊԵՏՅԱՆ

Ստացիոնար պատահական պրոցեսի կորելյացիոն ֆունկցիայի
վարքի մասին

Աշխատանքում բերվում են թույլ կերպով կախված կոմպոնենտներով պրոցեսների այս կամ այն դասի պատկանելիության անհրաժեշտ հատկանիշներ կորելյացիոն ֆունկցիայի տերմիններով: Այդ հատկանիշների օգնությամբ բերվում են ռեգուլյար պրոցեսների օրինակներ, որոնք օժտված չեն ուժեղ խառնման հատկությամբ, և ուժեղ խառնող պրոցեսների օրինակների, որոնք չունեն հավասարաչափ ուժեղ խառնման հատկություններ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, Наука, М., 1955. ² Ю. А. Давыдов, Теория вероятности и ее применения, т. 18, вып. 2 (1973).

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Г. Г. Геворкян

О представлении и единственности представления изме- римых функций мартингалами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 28 XII 1981)

Пусть (Ω, F, P) вероятностное пространство, $F_1 \subset F_2 \subset \dots F_n \subset F$ последовательность σ -алгебр и F_∞ — порожденная ими минимальная σ -алгебра, $F_\infty \subset F$.

В работах ⁽¹⁻³⁾ были рассмотрены вопросы о возможности пред-
 ставления произвольной F_∞ -измеримой функции $f(x)$ сходящимися
 к ней почти всюду на Ω мартингалами $\{f_n, F_n\}_{n=1}^\infty$, а также сходящи-
 мися к $f(x)$ рядами $\sum_{k=1}^\infty a_k \psi_k(x)$, где $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ центрированная относи-
 тельно $\{F_n\}$ система функций.

Для формулировки этих результатов приведем некоторые опре-
 деления из работ ⁽¹⁾ и ⁽²⁾.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная в пространстве (Ω, F, P) сис-
 тема и F_n — минимальная σ -алгебра, относительно которой измеримы
 все функции $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, n=1, 2, \dots$

Определение 1. Ортонормированная система $\{\psi_n(x)\}$ назы-
 вается H -системой, если

- 1) σ -алгебра F_n ($n=1, 2, \dots$) состоит из n атомов;
- 2) $\psi_1(x) \equiv 1$, каждая $\psi_n(x)$ при $n > 1$ равна нулю вне одного из атомов σ -алгебры F_{n-1} и принимает ровно два (положительно на Δ_n^+ и отрицательно на Δ_n^-) значения на множестве точек этого атома.

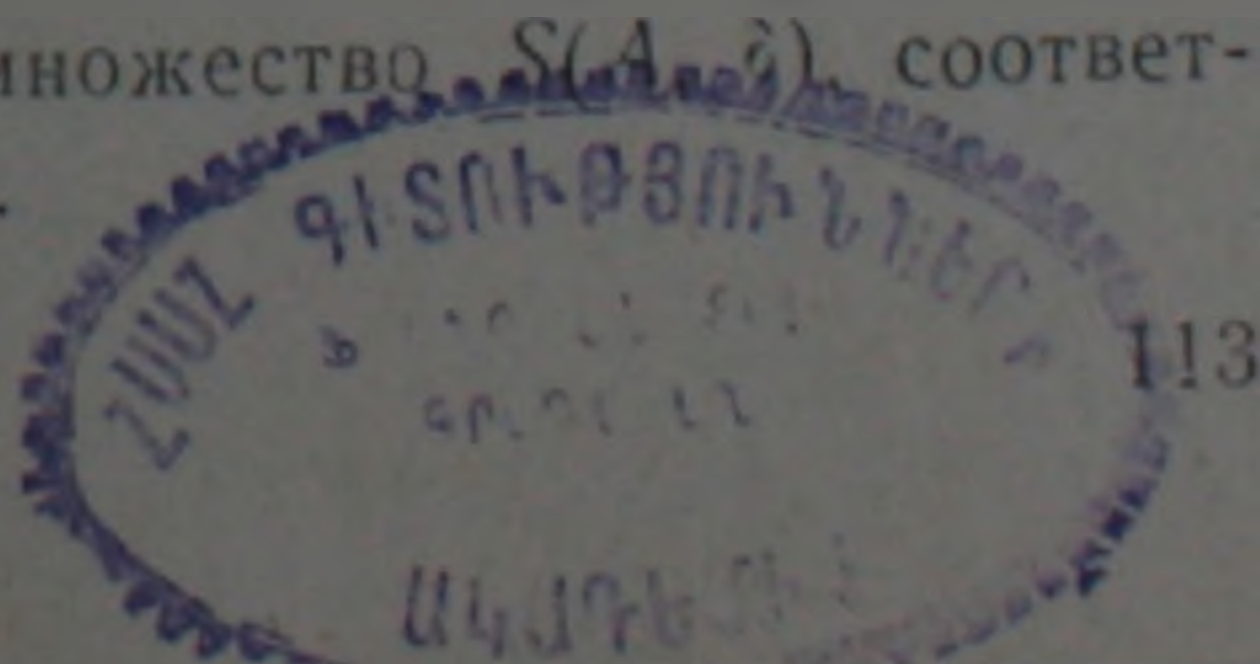
Пусть G и H — алгебра с единицей Ω , $G \subset H \subset F$, $0 < \delta \leq 1/2$ и $B \in H$. Обозначим через $S(B, \delta)$ множество тех точек Ω , где условная вероятность $P\{B/G\}$ множества B относительно G удовлетворяет не-
 равенству $0 < P\{B/G\} \leq \delta$.

Определение 2. Множество $S(A, \delta)$, $A \in H$, называется δ -рас-
 щепляющим множеством σ -алгебры G относительно σ -алгебры H ,
 если:

- 1) $P\{A/G\} \leq \delta$ почти всюду на Ω ;
- 2) $S(B, \delta) \subset S(A, \delta)$ для любого $B \in H$.

Существование множеств $S(A, \delta)$ и его единственность (для различ-
 ных A они с точностью до множества меры нуль совпадают), уста-
 новлено в ⁽³⁾.

Обозначим через $S(m, n, \delta)$, $n \geq m$, множество $S(A, \delta)$, соответ-
 ствующее случаю, когда $G = F_m$ и $H = F_n$.



Определение 3. Последовательность σ -алгебр $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется d -последовательностью, если

$$\bigcup_{n=m}^{\infty} S\left(m, n, \frac{1}{2}\right) = \Omega \text{ для любого } m \geq 1.$$

В работе ⁽¹⁾ Р. Ганди была доказана

Теорема I (Р. Ганди). Если $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L_2[0, 1]$ и является H -системой, то для любой почти всюду конечной измеримой функции $f(x)$ существует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x)$, который сходится к $f(x)$ почти всюду.

Когда последовательность $\{F_n\}$ удовлетворяет определению 1, любой мартингал $\{f_n, F_n\}$ является последовательностью частичных сумм некоторого ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x)$, где $\{\psi_k(x)\}$ фиксированная H -система, соответствующая последовательности $\{F_n\}$.

Когда (Ω, F, P) совпадает с пространством Лебега и H -система $\{\psi_n(x)\}$ полна в $L_2[0, 1]$, легко видеть, что соответствующая последовательность $\{F_n\}$ является d -последовательностью. Кроме того из полноты системы $\{\psi_n(x)\}$ вытекает, что множество F_{∞} -измеримых функций совпадает с множеством измеримых по Борелю функций. Поэтому приводимая ниже теорема Ламба ⁽²⁾ является обобщением теоремы I.

Теорема II. (Ламб). Пусть $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ — d -последовательность. Тогда для любой почти всюду конечной F_{∞} -измеримой функции существует мартингал $\{f_n, F_n\}$, который почти всюду сходится к $f(x)$.

Другое усиление теоремы I дано в работе Р. С. Давтяна ⁽³⁾.

Теорема III * (Р. С. Давтян). Пусть $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — H -система, определенная на (Ω, F, P) , такая, что

$$P(\limsup_{n \geq 1} \Delta_n) = P(\Omega) = 1,$$

где $\Delta_n = \{\psi_n \neq 0\}$, а $f(x)$ произвольная F_{∞} -измеримая функция, конечная почти всюду. Тогда существует ряд по системе $\{\psi_n(x)\}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x)$, который почти всюду абсолютно сходится к $f(x)$.

Верна следующая

Теорема 1. Если $\{F_n\}$ — d -последовательность, то для любой почти всюду конечной F_{∞} -измеримой функции $f(x)$ существует центрированная относительно $\{F_n\}$ система $\{\varphi_n(x)\}$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) = f(x) \text{ п. в. на } \Omega \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)| < +\infty \text{ п. в.}$$

Из этой теоремы вытекает следующее усиление теоремы II.

Теорема 2. Если $\{F_n\}$ — d -последовательность и $f(x)$ произ-

* Для системы Хаара эта теорема была доказана Ф. Г. Арутюняном ⁽⁴⁾.

вольная почти всюду конечная F_∞ -измеримая функция, то существует мартингал $\{f_n, F_n\}$, который почти всюду сходится к $f(x)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| < +\infty$ п. в.

Верна более общая

Теорема 3. Пусть $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ — d -последовательность и $f: \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$, F_∞ -измеримая функция ($f(x)$ может принять бесконечные значения на множестве положительной меры), тогда существует мартингал $\{f_n, F_n\}$, который на множестве $A = \{|f| = +\infty\}$ сходится к $f(x)$ по мере, а на A^c сходится к $f(x)$ п. в., при этом $\sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \cdot \chi_{A^c}(x) < +\infty$ п. в.

Теорема 4. Пусть $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n \subset F$ и для произвольной F_∞ -измеримой функции $f: \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ существует мартингал $\{f_n, F_n\}$, который по мере сходится к f на Ω . Тогда $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ является d -последовательностью.

Когда F_∞ — сепарабельная σ -алгебра, верна следующая

Теорема 5. Пусть $\{F_n\}$ — d -последовательность и F_∞ сепарабельна. Тогда существует центрированная относительно $\{F_n\}$ система $\{\varphi_n(x)\}$ такая, что для любой почти всюду конечной F_∞ -измеримой функции $f(x)$ существует подпоследовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, такая что:

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{n_k}(x) = f(x) \text{ п. в.};$$

$$2) \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{n_k}(x)| < +\infty \text{ п. в.}$$

Теорема 5 является усилением и обобщением теоремы А. А. Талаляна (см. (5), теорема 2) о том, что существует ряд по системе Хаара, который универсален относительно подрядов.

Верна также следующая теорема неединственности.

Теорема 6. Пусть $\{F_n\}$ — d -последовательность, $\{f_n, F_n\}$ — произвольный мартингал и m любое натуральное число. Тогда существует мартингал $\{\varphi_n, F_n\}$ такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0$ п. в.,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_{n-1}(x) - \varphi_n(x)| < +\infty \text{ п. в. и } f_n = \varphi_n \text{ при } n \leq m.$$

В работе (6) Ф. Г. Арутюняном и А. А. Талаляном для рядов по системам Хаара и Уолша был установлен аналог известной теоремы Валле—Пуссена о единственности тригонометрических рядов. Для системы Хаара эта теорема формулируется следующим образом.

Теорема IV (Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян). Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x) \quad (*)$$

где $\{\chi_n(x)\}$ — система Хаара, обладает свойствами:

а) некоторая последовательность $\{S_{N_j}(x)\}$ частных сумм ря-

да (*) сходится к суммируемой функции $f(x)$ всюду на отрезке $[0, 1]$, кроме, быть может, счетного множества точек;

3) для любой точки $x_0 \in [0, 1]$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{n_k}}{\gamma_{n_k}(x_0)} = 0$, где $n_1 < n_2 < \dots < n_n < \dots$ суть все те номера n , для которых $\gamma_{n_k}(x_0) \neq 0$.

Тогда ряд (*) является рядом Фурье функции $f(x)$ по системе Хаара, т. е.

$$a_n = \int_0^1 f(x) \gamma_n(x) dx.$$

Теорему IV можно распространить на произвольные H -системы, рассмотренные в пространстве (Ω, F, P) . При этом приходится ввести некоторую модификацию понятия точки пространства (Ω, F_∞, P) .

Определение 4. Скажем, что $\xi = \{\delta_n\}_{n=1}^\infty$ является точкой пространства (Ω, F_∞, P) (относительно $\{F_n\}_{n=1}^\infty$), если $\delta_1 \supseteq \delta_2 \supseteq \dots \supseteq \delta_n \supseteq \dots$ и δ_n атом из σ -алгебры F_n $n=1, 2, \dots$.

Если $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ является H -системой относительно последовательности σ -алгебр $\{F_n\}$ и $\xi = \{\delta_n\}_{n=1}^\infty$ — точка (относительно $\{F_n\}$) пространства (Ω, F_∞, P) , то значением функции $\psi_n(x)$ в точке ξ считается постоянное значение, принимаемое этой функцией на атоме δ_n , $n=1, 2, \dots$.

Если задан ряд $\sum_{k=1}^\infty a_k \psi_k(x)$, то значением $S_n(\xi)$ частичной суммы

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \psi_k(x) \text{ в точке } \xi = \{\delta_n\}_{n=1}^\infty \text{ считается величина } S_n(\xi) = \sum_{k=1}^n a_k \psi_k(\xi).$$

Верны следующие теоремы.

Теорема 7. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^\infty a_n \psi_n(x), \quad (1)$$

где $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — H -система, обладает следующими свойствами:

А) некоторая фиксированная последовательность частичных сумм $\{S_{N_l}(x)\}$ ряда (1) сходится во всех, кроме, быть может, счетного множества точек $\xi = \{\delta_n\}_{n=1}^\infty$, т. е. существует конечный предел $\lim_{l \rightarrow \infty} S_{N_l}(\xi)$ для всех $\xi = \{\delta_n\}_{n=1}^\infty \in A$, где A не более чем счетное множество;

Б) ряд (1) по мере сходится к интегрируемой функции $f(x)$;

В) для любой точки ξ имеет место $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{n_k}}{\psi_{n_k}(\xi)} = 0$, где $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ суть все те номера n , для которых $\psi_n(\xi) \neq 0$. Тогда ряд (1) является рядом Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^\infty$, т. е.

$$a_n = \int_{\Omega} f(x) \psi_n(x) dP.$$

Легко видеть, что теорема 7 содержит в себе теорему IV.

Теорема 8. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x), \quad (2)$$

где $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — H -система, обладает следующими свойствами:

1) некоторая последовательность частичных сумм $\{S_{N_j}(x)\}$ ряда (2) сходится во всех точках;

2) ряд (2) по мере сходится к интегрируемой функции $f(x)$.

Тогда ряд (2) является рядом Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

В заключение выражаю благодарность А. А. Талаляну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Ереванский государственный университет

Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Չափելի ֆունկցիաները մարտինգալներով ներկայացման և
նեկրայացման միակության վերաբերյալ

Աշխատանքում ձևակերպված են (առանց ապացույցի) որոշ թեորեմներ
չափելի ֆունկցիաները մարտինգալներով ներկայացման և ինտեգրելի ֆունկ-
ցիաների զուգամիտող մարտինգալների միակության մասին:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ R. F. Gundy. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 124, № 2 (1966). ² Ch. W. Lamb. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 188, № 2 (1974) ³ P. С. Давтян, Мат. заметки, т., 19, № 5 (1976). ⁴ Ф. Г. Арутюнян, Доклады АН АрмССР, т. 42, № 3 (1966). ⁵ А. А. Талалян, Изв. АН СССР, сер. мат., т. 24 (1960). ⁶ Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян, Изв. АН СССР, сер. мат., т. 28 (1964).

УДК 519.248 : 531.9

МАТЕМАТИКА

С. К. Погосян

Асимптотика логарифма статистической суммы
гиббсовского ансамбля для решетчатых систем с
многочастичным взаимодействием

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 6/І 1982)

Рассмотрим классическую конфигурационную систему одинаковых частиц, находящихся в некотором конечном подмножестве $\Lambda \subset \mathbb{Z}^v$ v -мерной целочисленной решетки ($v \geq 1$) и взаимодействующих с помощью симметричного, трансляционно-инвариантного многочастичного потенциала $\Phi(c)$, $c \in C(\Lambda)$, где $C(\Lambda)$ — множество всех подмножеств (конфигураций) множества Λ ($\Phi(\emptyset) = 0$). Распределение вероятностей на $C(\Lambda)$, задаваемое формулой

$$P_{\Lambda, \beta, z}(c) = \Xi^{-1}(\Lambda, \beta, z) z^{|c|} e^{-\beta U(c)},$$

называется распределением Гиббса (¹). Здесь $|\cdot|$ — числа точек в конечном множестве, $U(c)$ — энергия конфигурации c , задаваемая формулой

$$U(c) = \sum_{\bar{c} \subset c} \Phi(\bar{c}).$$

z (активность) и β (обратная температура) — некоторые положительные параметры и, наконец, нормирующий множитель

$$\Xi(\Lambda, \beta, z) = \sum_{c \in C(\Lambda)} z^{|c|} e^{-\beta U(c)},$$

и называется статистической суммой.

Предполагается, что потенциал Φ удовлетворяет следующему условию убывания на бесконечности: существует симметричная трансляционно-инвариантная метрика δ в $\mathbb{Z}^v$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^v} \exp\left(-\frac{1}{2} \delta(0, x)\right) < \infty$$

и такая, что

$$\sum_{\substack{c \in C(\mathbb{Z}^v) \\ c \in c}} \exp(L_\delta(c) |\Phi(c)|) < \infty.$$

Здесь $L_\delta(c)$ — длина минимального, относительно метрики δ , дерева (связного графа без циклов), вершины которого содержат все точки c .

Назовем параллелепипедом в $\mathbb{Z}^v$ множество точек $x \in \mathbb{Z}^v$ таких,

что $|x^i| < b_i$, где $b_i, i=1, \dots, \nu$ — натуральные числа. Пусть $W(r), r > 0$ — класс всех параллелепипедов $\Lambda \subset Z^\nu$, удовлетворяющих условию: $\text{diam } \Lambda \leq r|\Lambda|^{1/\nu}$. Обозначим через $\Lambda^{(i)}, i=0, 1, \dots, \nu-1$ совокупность всех i -мерных граней параллелепипеда Λ .

Определим последовательность функций $\varphi = \{\varphi_n(x_1, \dots, x_n)\}_{n \geq 2}, (x_1, \dots, x_n) \in Z^\nu$ равенствами:

$$\varphi_0 \equiv 0, \varphi_1 = 1, \varphi_n(X) = \sum_{\gamma \in \Gamma(X)} \prod_{B \in \gamma} (e^{-\beta \Phi(B)} - 1) \text{ при } n \geq 2, \quad (1)$$

где $X = (x_1, \dots, x_n)$. Здесь сумма берется по всем обобщенным графам $\gamma \in \Gamma(X)$, связным относительно точек X . Обобщенным графом $\gamma = (B_1, \dots, B_m), m=1, 2, \dots$ с вершинами в некотором конечном множестве G называется произвольная конечная последовательность подмножеств $B_i \subseteq G$, содержащих не менее двух точек. Обобщенный граф называется связным относительно двух точек $g_1, g_2 \in G$, если существует цепочка $(B_{i_1}, \dots, B_{i_k}), B_{i_j} \in \gamma$ такая, что $B_{i_j} \cap B_{i_{j+1}} \neq \emptyset, j=1, \dots, k-1$ и $g_1 \in B_{i_1}, g_2 \in B_{i_k}$. Наконец, обобщенный граф называется связным относительно подмножества $V \subseteq G$, если он связан относительно любых двух точек из V . Функции, определенные формулами (1), называются функциями Урсела (¹).

Далее, для любого $X = (x_1, \dots, x_n) \in Z^\nu$ через $\bar{X}$ обозначим множество всех геометрически различных точек, занятых частицами $x_1, \dots, x_n$.

Теорема 1. Пусть активность z достаточно мала. Тогда для любого $\Lambda \in W(r)$ имеет место разложение

$$\ln \Xi(\Lambda, \beta, z) = a_0 |\Lambda| + a_1 \sum_{\Lambda \in \Lambda^{(\nu-1)}} |\bar{\Lambda}| + \dots + a_{\nu-1} \sum_{\Lambda \in \Lambda^{(1)}} |\bar{\Lambda}| + a_\nu + R(\Lambda), \quad (2)$$

при этом

$$a_0 = a_0(\Phi, \beta, z) = \sum_{n \geq 0} z^n \sum_{X \in \Lambda^n} \varphi(X), \quad (3)$$

где φ — функция Урселла; $a_i = a_i(\Phi, \beta, z), i=1, \dots, \nu$ — константы, зависящие от потенциала Φ и параметров β и z (явный вид a_1 и a_2 при $\nu=2$ приводится ниже), наконец, величина $R(\Lambda) = R(\Lambda, \Phi, \beta, z)$, допускает оценку

$$|R(\Lambda)| \leq C |\Lambda|^{-1/\nu}$$

с константой $C = C(\Phi, \beta, z, r)$.

Доказательство этой теоремы основано на применении сильных кластерных оценок для урезанных корреляционных функций (²). Используемый метод доказательства позволяет получать явные выражения для всех коэффициентов $a_i, i=1, \dots, \nu$, однако в общем случае $\nu \geq 1$ они имеют громоздкий вид. Для иллюстрации сформулируем частный случай теоремы 1 при $\nu=2$ и приведем явные выражения для коэффициентов.

Теорема 1'. Пусть $\nu=2$ и активность z достаточно мала. Тогда для любого $\Lambda \in W(r)$ имеет место разложение

$$\ln \Xi(\Lambda, \beta, z) = a_0 |\Lambda| + a_1 |\Gamma(\Lambda)| + a_2 + R(\Lambda),$$

где a_0 определено формулой (3), $\Gamma(\Lambda)$ — граница множества Λ ,

$$a_1 = \sum_{x \in (Z^1)_+} \sum_{c \in C_+(Z^1_+)} f_{\beta, z}(\{x\} \cup c),$$

$$a_2 = \sum_{x \in \overline{Z^1_{+,+}}} \left[\sum_{c \in C_+(Z^1_{+,-})} f_{\beta, z}(\{x\} \cup c) + \sum_{c \in D} f_{\beta, z}(\{x\} \cup c) \right],$$

а величина $R(\Lambda)$ удовлетворяет оценке

$$|R(\Lambda)| \leq C|\Lambda|^{-1/2}.$$

При этом использованы следующие обозначения: для любого $V \subset Z^1$,

$$C_+(V) = C(V) \setminus \{\emptyset\}; \quad (Z^1)_+ = \{(x^1, x^2) \in Z^2 : x^1 = 0, x^2 \geq 0\},$$

$$Z^1_+ \setminus \{(x^1, x^2) \in Z^2 : x^2 > 0\}, \quad Z^1_{+,-} = \{(x^1, x^2) \in Z^2 : x^1 > 0, x^2 < 0\},$$

$$\overline{Z^1_{+,+}} = \{(x^1, x^2) \in Z^2 : x^1 \geq 0, x^2 \geq 0\},$$

$$I) = \{c \in C_+(Z^2 \setminus \overline{Z^1_{+,+}}) : c \cap Z^1_{+,-} \neq \emptyset, c \cap Z^1_{+,-} \neq \emptyset\},$$

где множества $Z^1_{+,-}$, $Z^1_{+,+}$ определяются по аналогии с $Z^1_{+,-}$.
Наконец,

$$f_{\beta, z}(c) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \sum_{\substack{X \in Z^{1,n} \\ X \subset c}} \sum_{m \geq 0} \frac{z^m}{m!} \sum_{\substack{Y \in Z^{1,m} \\ Y \subset Z^1 \setminus c}} (-1)^{|Y|} \varphi(X, Y),$$

где φ — функция Урселла, а $(X, Y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, если $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_m)$.

З а м е ч а н и е. Главный член асимптотики (1) получен в работах (3) и (4). Явное выражение для второго члена асимптотики содержится в (5) и (6). Для непрерывных систем с парным взаимодействием, заключенных в ограниченную область $\Lambda \subset \mathbb{R}^v$ с гладкой границей, разложение, аналогичное (2), содержится в работе (7). Однако в то время как для указанных непрерывных систем в асимптотике логарифма статистической суммы последний из растущих вместе с $|\Lambda|$ членов имеет порядок $\ln |\Lambda|$, в решетчатом случае, как это видно из теоремы 1, такой член отсутствует. Логарифмический член отсутствует также в случае непрерывных систем, заключенных в многогранник (8).

Институт математики Академии наук Армянской ССР

Ս. Կ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

Բազմամասնիկ փոխազդումով կապարավոր համակարգերի Գիրսյան անսամբլի վիճակագրական գումարի լոգարիթմի ասիմպտոտիկան

Դիտարկվում է $\Lambda \subset Z^v$ ($v \geq 1$) վերջավոր բազմություն մեջ գտնվող միանման մասնիկների կոնֆիգուրացիոն համակարգը: Ենթադրվում է, որ մասնիկները փոխազդում են սիմետրիկ, տրանսլացիոն ինվարիանտ բազմամասնիկ պոտենցիալի միջոցով, որը բավարարում է անվերջության վրա

նվազման բավականաչափ ընդհանուր պայմանին, Յաժր ակտիվության դեպ-
քում բերված է համապատասխան դիրսյան անսամբլի վիճակադրական գու-
մարի լոգարիթմի ասիմպտոտիկական վերլուծությանը, երբ $\Lambda \uparrow Z$: Լեսյա-
ցուցման մեթոդը թույլ է տալիս նաև բացահայտ հաշվել վերլուծության բո-
լոր շնվազող անդամները:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Д. Рюэль. Статистическая механика. Строгие результаты, Мир, М., 1971. ² М. Duneau, B. Soullard, Comm. Math. Phys., vol. 47, 155—166 (1976). ³ L. Van Hove, Physica, vol. 15, 951—961 (1949). ⁴ C. N. Yang, T. D. Lee, Phys. Rev., vol. 87, 404—409 (1952). ⁵ Р. Л. Добрушин, Теоретическая и мат. физика, т. 12, 115—134 (1972). ⁶ M. Flsher, G. Gagnalp, Comm. Math. Phys., vol. 56, 11—56 (1977). ⁷ С. К. Погосян, Изв. АН АрмССР, сер. мат., т. 13, № 3 (1978). ⁸ F. H. Abdulla-Zadeh, R. A. Mlatos, S. K. Pogostin, Multicomponent random systems N.—Y. Marcel Dekker, 1—36 (1980).

УДК 523.855

АСТРОФИЗИКА

С. Г. Искударян

О некоторой морфологической характеристике поздних спиралей

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 14/VII 1981)

Галактики «поздних» типов Sb, Sc, Sd и нерегулярные содержат помимо основного остова (балдж), часто с довольно регулярным распределением яркости, и более или менее правильных спиральных рукавов, несколько искажаемых темной материей, также и другие структурные детали, иногда крупного масштаба, такие как разветвления рукавов, мосты между рукавами, спутники различной природы на концах рукавов, цепочки ассоциаций и кольца. Считая, что частота встречаемости подобных деталей может служить одним из параметров, характеризующих данную галактику, была составлена выборка галактик типов Sc, SBc и IrrI для изучения этого вопроса. В выборку вошли все 58 поздних спиралей списка ⁽¹⁾ до 12.0 видимой фотографической звездной величины включительно, изображения которых на Паломарских картах кроме областей, непосредственно окружающих ядро, не передержаны. В список не были включены галактики, у которых наклон к картинной плоскости настолько велик, что мешает изучению деталей структуры. Для однородности используемого материала были использованы в основном Паломарские карты, но в некоторых случаях использовались также снимки, полученные на больших телескопах и опубликованные в разных изданиях.

Таким образом, наша выборка содержит 51 галактику морфологического типа Sc, пять галактик типа SBc и две—типа IrrI (согласно классификации Хаббла).

На изображениях этих галактик были сосчитаны перечисленные ниже детали: количество мостов (μ), разветвлений (r), центров активности (c), спутников (s), колец (k), цепочек ассоциаций (h)

Мосты представляют собой образования в виде перемычки между двумя рукавами галактики. В большинстве случаев на концах моста или на одном его конце имеются сгущения вида ассоциаций. Такой вид мостов иногда напоминает перемычку галактик SB (bar), имеющую сгущение на своих концах.

В нашей выборке мостами богаты галактики NGC 3184, 4303, 4501, 5194. В каждой из них содержится больше пяти мостов.

Разветвления в спиральных рукавах иногда происходят там, где имеется некоторое сгущение. В работе ⁽²⁾ уже говорилось о связи ярких ассоциаций с окружающей локальной структурой галактики. В данном случае сгущение (ассоциация) является лишь деталью следующей

картины: основной рукав, который кончается яркой ассоциацией или сверхассоциацией, разделяется на более мелкие ветви, причем последние берут начало в этой ассоциации и имеют одинаковое направление с основным рукавом. Хороший пример такой картины—сверхассоциация в галактике NGC 6643, о чем уже говорилось в работе (2). В нашей выборке разветвлениями богаты галактики NGC 1232, 3344, 3631, 3938.

В качестве центров активности мы принимали голубые сгущения, которые являются сверхассоциациями или приближающимися к ним по яркости ассоциациями. Кроме того, центрами активности мы считали и более слабые голубые сгущения, которые имеют вокруг себя некоторую локальную структуру, явно связанную с ними. Во всех случаях требовалось, чтобы изображение на голубой карте атласа было заметно ярче, чем на красной, что приблизительно соответствует $m_{pg} - m_r < 0^m 8$. Но, как правило, все встречающиеся центры активности намного голубее. В нашей выборке центрами активности богаты галактики NGC 578, 1073, 3646, 3810, 4236, 4254, 4321, 4501, 4654. Если ассоциация находится в точке разветвления, то она учитывается как центр активности, несмотря на то, что одновременно входит и в подсчет точек разветвлений.

Спутники представляют собой более или менее концентрированные образования, имеющие более красный цвет, чем рукав ($m_{pg} - m_r \geq 1^m 0$), и находящиеся в основном в периферийных частях галактик, или связанные с рукавами объекты. Не исключено, что они могут проектироваться и на центральные области галактики. Поэтому, когда встречались объекты, расположенные близко к центру галактики и имеющие сравнительно красный цвет (т. е. их изображение в целом или его центральное сгущение на красной карте было определено ярче, чем на голубой), то их мы считали не центрами активности, а спутниками галактики. В нашей выборке спутниками богата галактика NGC 578.

Кольца—это образования круглого вида в галактиках. Они могут находиться в произвольном месте галактики. В центре кольца иногда имеется яркое образование, но еще чаще в центре нет яркого сгущения. Тем не менее бывают случаи, когда близ кольца имеется какое-то сгущение и создается впечатление, что кольцо удалилось от сгущения (см., например, объект Мейолла (3)). В нашей выборке кольцами относительно богаты галактики NGC 1073, 3359, 3486, 4501, 7741. Интересно, что три из перечисленных галактик представляют собой SBc галактики, а в нашу выборку входят всего 5 SBc галактик. Каждая из них имеет от четырех до шести колец. Такое богатство SBc галактик кольцами, по-видимому, нельзя считать простой случайностью.

Цепочки ассоциаций могут находиться и в рукавах, и вне рукавов, и на мостах, и на кольцах галактик, и в виде спутника на конце рукава, иногда образуя некоторый угол с рукавом галактики, как это хорошо видно на примере M81. Цепочками ассоциаций в нашей выборке богаты галактики NGC 925, 1232, 2336. Каждая имеет по пять цепочек.

Следует еще раз упомянуть, что отмеченные выше детали учитывались нами только в тех случаях, когда они находились в области изображения данной галактики. К примеру, если галактика имела да-

же очень близкие спутники, которые, однако, не были связаны с ее структурой ни нитями, ни перемычками, то такие спутники не принимались во внимание. Вышеупомянутые детали либо каким-то образом должны были быть связаны с изображением галактики, либо находиться внутри нее.

Суммарные результаты подсчетов приводятся в табл. 1.

Таблица 1
Суммарное количество характерных деталей в отобранных 58 галактиках

μ	r	c	s	k	h
125 44 (12) 8 $\overline{N}_{\mu}=2.2$	172 52 (2) 9 $\overline{N}_r=3.0$	210 54 (1) 10 $\overline{N}_c=3.6$	109 45 (3) 7 $\overline{N}_s=1.9$	68 36 (13) 6 $\overline{N}_k=1.2$	107 44 (10) 6 $\overline{N}_h=1.8$

Каждому виду характерных деталей соответствует один столбец таблицы. В первой строке дается полное число деталей данного вида во всех 58 галактиках, во второй строке—число галактик, в которых встречается данная деталь, в скобках приведены числа тех из них, в которых присутствие детали лишь заподозрено. В третьей строке дается наибольшее число деталей, которые встречаются в отдельных галактиках. В последней строке дается среднее число деталей данного вида в каждой галактике. Как видно из таблицы, в структуре поздних спиралей чаще всего встречаются, как и следовало ожидать, центры активности—яркие ассоциации и сверхассоциации и разветвления. Затем идут галактики, имеющие мосты, спутники и цепочки ассоциаций. Кольца встречаются в наименьшем числе галактик, и сомнительные случаи здесь составляют наибольший процент. Из таблицы видно также, что центры активности и разветвления не только встречаются в большом числе галактик, но и в отдельной галактике могут быть довольно многочисленны.

Нас интересовал вопрос, как связано полное число всех деталей с главными интегральными характеристиками, такими, как, например, светимость галактик. Наличие каждой из рассматриваемых характерных деталей связано, конечно, с природой галактики. Но вопрос о сущности этой связи, естественно, связан с представлениями об эволюции галактик, которые, как известно, находятся еще в зачаточном состоянии. Однако на чисто эмпирическом уровне можно поставить вопрос, не коррелирует ли полная сумма

$$N=N_{\mu}+N_r+N_c+N_s+N_k+N_h \tag{1}$$

или, может быть, какая-либо линейная комбинация тех же слагаемых типа

$$N_1=k_1N_{\mu}+k_2N_r+k_3N_c+k_4N_s+k_5N_k+k_6N_h$$

с такими фундаментальными параметрами галактик, как светимость или поверхностная яркость. После ряда проб мы остановились на линейной комбинации

№	NGC	БК	$m-M$	M_r	$m_{\square}$	$\lg(N_1+1)$
1	247		26.5			
2	578	—	33.0	—16.5	23.74	0.81
3	628	2	29.7	21.4	22.40	1.00
4	908	4	32.6	19.9	22.53	0.93
5	925	2	29.8	21.8	22.12	0.93
6	1058	4	29.8	19.3	22.90	1.00
7	1073	2	32.9	17.9	21.52	0.93
8	1084	2	32.4	21.2	22.59	0.00
9	1087	4	32.8	21.3	21.11	0.60
10	1232	—	32.7	21.4	21.62	0.95
11	1637	4	30.0	22.2	22.47	1.00
12	2207	—	31.5	18.4	21.30	0.90
13	2336	1	33.4	21.5	22.40	0.90
14	2403	1	27.6	22.2	22.56	1.11
15	2715	2	32.1	18.8	23.24	0.80
16	2903	2	29.5	20.2	22.69	0.88
17	2976	2	27.3	19.8	22.53	0.80
18	3184	4	30.0	16.4	21.79	0.30
19	3198	2	29.6	19.8	22.34	1.15
20	3294	2	32.3	17.6	23.40	0.74
21	3344	5	30.1	20.3	22.22	0.78
22	3359	1	31.8	19.7	22.25	1.06
23	3367	5	33.7	21.1	22.75	0.54
24	3486	4	31.7	21.8	21.24	0.98
25	3556	2	29.3	21.0	22.46	0.88
26	3631	2	31.8	18.9	22.54	0.00
27	3646	4	34.7	20.3	22.64	1.00
28	3726	4	31.5	22.9	22.14	0.95
29	3810	4	31.2	19.7	23.38	0.84
30	3893	4	31.7	20.1	21.50	1.16
31	3938	2	31.8	20.7	22.20	0.81
32	4038—39	4	32.3	20.3	22.28	1.11
33	4088	1	31.0	21.5	20.60	0.30
34	4178	2	30.5	19.8	22.64	0.30
35	4236	1	25.9	18.5	22.94	0.98
36	4254	4	33.4	15.4	24.52	0.78
37	4303	4	32.4	23.2	21.14	0.93
38	4321	2	32.4	22.4	21.44	1.10
39	4449	—	28.0	21.8	22.12	0.54
40	4490	2	31.5	18.2	21.28	0.93
41	4501	4	33.1	21.5	21.36	0.48
42	4535	4	32.8	22.1	22.48	1.16
43	4559	5	31.2	21.8	22.50	1.08
44	4567	5	33.2	20.7	23.52	0.78
45	4568	2	33.3	20.7	22.12	0.93
46	4654	2	31.4	21.3	22.74	0.88
47	4656	—	29.8	19.9	22.35	0.93
48	4775	2	32.4	18.8	24.61	0.90
49	4781	2	31.8	20.4	21.13	1.10
50	5068	4	29.6	19.8	22.01	1.00
51	5194	4	30.3	18.6	22.62	1.00
52	5248	2	31.8	21.7	21.62	1.23
53	5457	2	27.7	20.8	22.14	0.93
54	6015	2	31.2	19.2	22.84	1.16
55	6217	5	32.5	19.6	22.80	0.48
56	6946	4	29.1	20.6	21.91	0.60
57	7448	4	33.6	19.3	22.14	0.95
58	7741	2	31.4	21.6	21.24	0.60
				19.1	22.64	0.60

$$N_1 = 1.5N_{\mu} + N_s + N_h. \quad (2)$$

В табл. 2 приводится список галактик нашей выборки. В столбцах таблицы последовательно даются порядковые номера галактик, номера по NGC, бюраканские классы ^(4,5), значения модулей расстояний. Для

близких галактик они взяты из работы Холмберга (⁶), а для далеких — определены по известным лучевым скоростям (⁷). При этом постоянная Хаббла была принята равной 50 км/сек Мпс. В пятом столбце приводятся абсолютные фотографические величины галактик, в шестом — поверхностные яркости галактик, вычисленные нами по формуле $m_{\square}^* = m_{pg} + 5 \lg R''$, где R'' — большой радиус галактики в угловых секундах, измеренный нами на картах Паломарского атласа. В седьмом столбце приводятся значения $\lg(N_1+1)$.

В первую очередь остановимся на вопросе, какова связь между $\lg(N_1+1)$ и поверхностной яркостью галактик. На рис. 1, а приводится диаграмма, показывающая эту связь. Точки на диаграмме заполняют

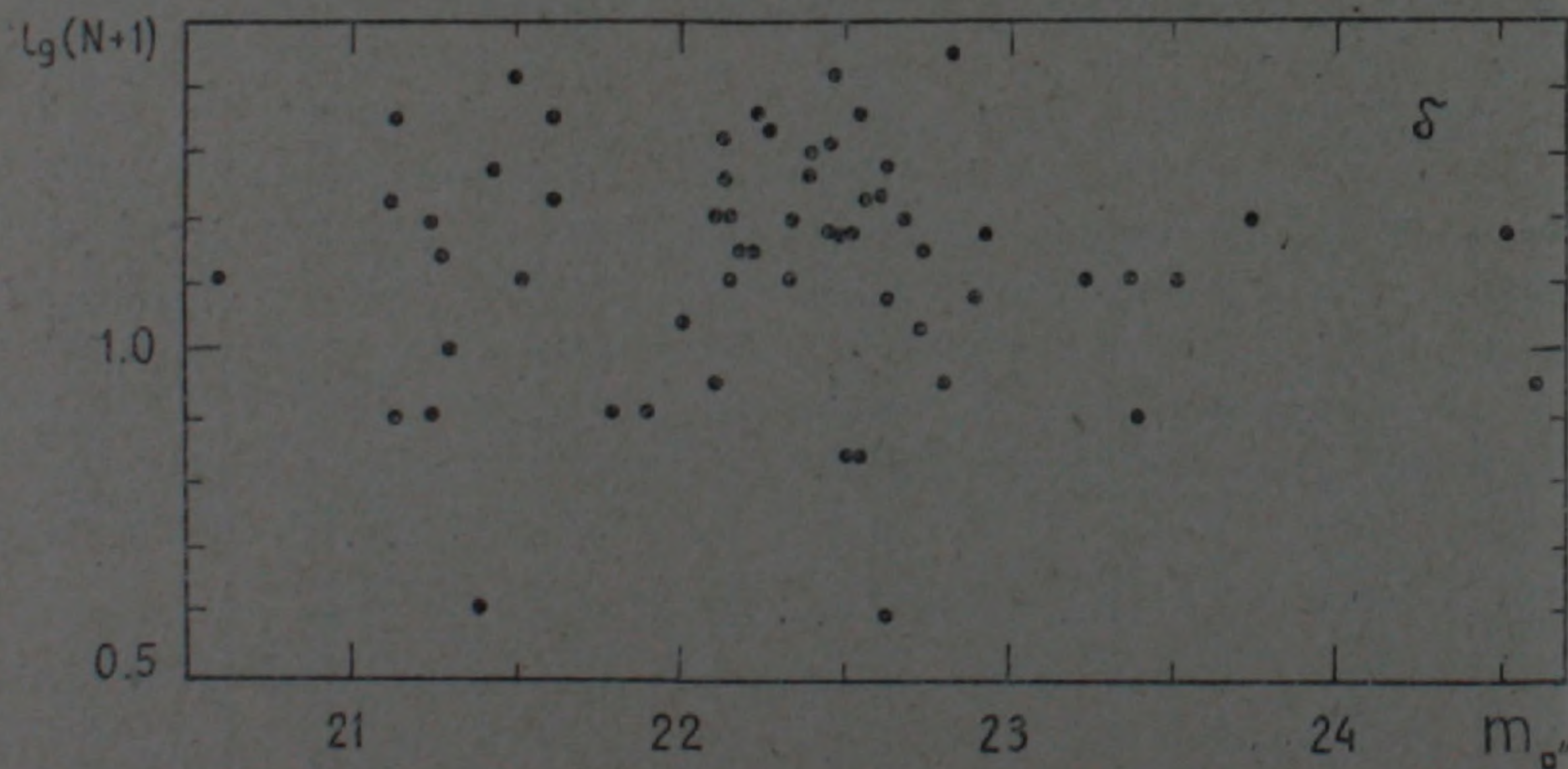
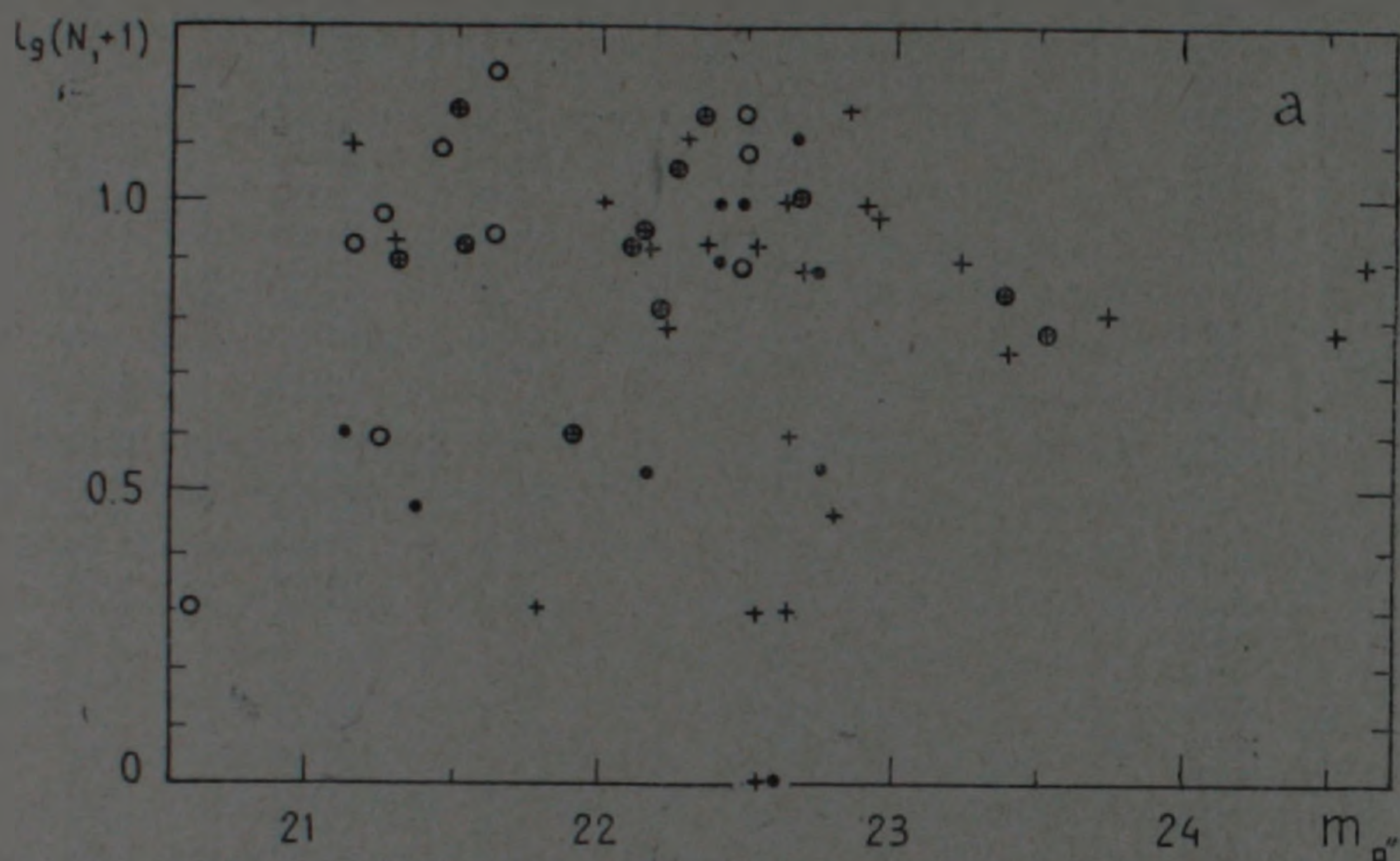


Рис. 1, а — Зависимость между $\lg(N_1+1)$ и поверхностной яркостью галактик. Условные обозначения: $\bullet$ — яркие галактики ($M_r < -21^m 0$) с некомпактными ядрами; $\circ$ — яркие галактики ($M_r < -21^m 0$) с компактными ядрами; $+$ — слабые галактики ($M_r > -21^m 0$) с некомпактными ядрами; $\oplus$ — слабые галактики ($M_r > -21^m 0$) с компактными ядрами. б — Зависимость между $\lg(N+1)$ и поверхностной яркостью галактик

некоторую камертонообразную область. Как видно из диаграммы галактики, поверхностная яркость которых выше $23^m.0$ (их мы назовем галактиками высокой поверхностной яркости), на диаграмме явно делятся на две группы—галактики, содержащие мало деталей, и галактики, содержащие много деталей. Такого деления не замечается у галактик, поверхностная яркость которых ниже $23^m.0$ (их мы назовем галактиками низкой поверхностной яркости). Последние составляют одну группу и содержат умеренное число деталей. В эту группу входят только галактики умеренной светимости, с $M_r > -21^m.0$. Что касается двух других групп, то в них галактики различной светимости входят как бы поровну.

Естественно было думать, что такая разница между интегральными числами деталей галактик всех трех групп должна привести к морфологическим особенностям. Однако сравнение классов галактик всех трех групп по де Вокулеру ⁽⁸⁾ показало, что во все три группы входят галактики, имеющие весьма разные по де Вокулеру структуры и подструктуры. Но когда мы рассмотрели долю галактик из разных групп, входящих в атлас пекулярных галактик Арпа ⁽³⁾, то оказалось, что в нижней группе из 14 галактик 5 входят в атлас Арпа, в верхней группе из 37 галактик входят 5, а из группы, соответствующей «ручке камертона», ни одна не входит в этот атлас. Таким образом, в той части диаграммы $\lg(N_1+1)$ —поверхностная яркость, где имеет место деление на две группы (с большими N_1 и малыми N_1), расположены как нормальные, так и пекулярные галактики, причем в нижнюю группу пекулярные галактики входят относительно чаще, чем в верхнюю. Следует отметить, что в нижнюю группу входят в подавляющем большинстве случаев галактики с некомпактными ядрами (галактики бюраканских классов 2 и 1).

Кажется естественным существование галактик высокой поверхностной яркости, имеющих множество деталей (верхняя левая часть диаграммы). Кажется естественным также существование галактик низкой поверхностной яркости с малым числом деталей (нижняя правая часть диаграммы). Но как объяснить существование галактик с малым числом деталей и высокой поверхностной яркости? Учитывая тот факт, что пекулярность галактик своего атласа Арпа в основном связывает с выбросами и с образованием новых компонент ⁽⁹⁾, можно предположить, что у галактик последней категории идет процесс образования новых деталей. В пользу такого предположения говорит хотя бы тот факт, что две точки (см. рис. 1.б, где приведена зависимость поверхностная яркость—логарифм полного числа деталей), попадающие в область диаграммы, где должны находиться галактики высокой поверхностной яркости, с малым числом деталей, соответствуют галактикам NGC 4490, 4088. Первая является мощным радионисточником, вторая тоже показывает радионизлучение ⁽¹⁰⁾.

Прежде чем считать указанное выше деление галактик на две группы окончательно установленным, необходимо выяснить, нет ли в рассматриваемом интервале видимых величин зависимости значений $\lg(N_1+1)$ от расстояния. Поэтому была составлена диаграмма, показывающая зависимость между $\lg(N_1+1)$ и $m-M$ (рис. 2). Из диаграм-

мы видно, что более чем 25% галактик нашей выборки очень далекие, но тем не менее содержат много деталей. Таким образом, влиянием расстояния на число деталей, содержащихся в галактиках, в нашей выборке можно пренебречь.

Для того, чтобы выяснить, насколько существенно влияет подбор коэффициентов в выражении (2) для N_1 на степень наблюдаемого разделения на две группы, мы для сравнения составили также диаграмму $\lg(N_1+1)$ — поверхностная яркость, где N определялось по формуле (1) (рис. 1,б). Сравнение показывает, что камертонная форма распределения сохраняется, хотя и менее четко.

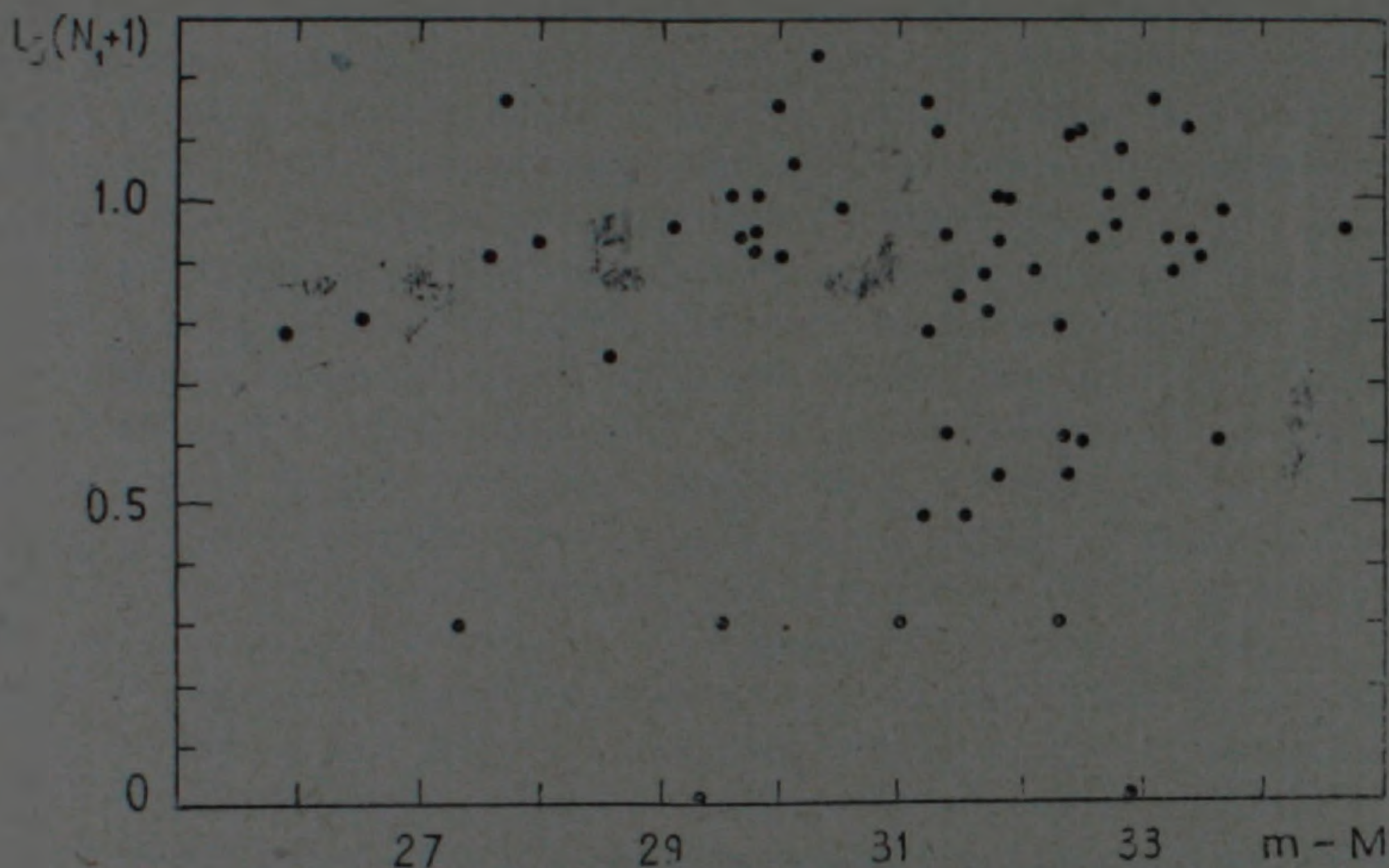


Рис. 2. Зависимость между $\lg(N_1+1)$ и значениями модулей расстояний галактик

Мы составили также диаграмму, показывающую взаимную зависимость абсолютных величин галактик и значений $\lg(N_1+1)$. Как видно из диаграммы, приведенной на рис. 3, здесь тоже явно существуют две

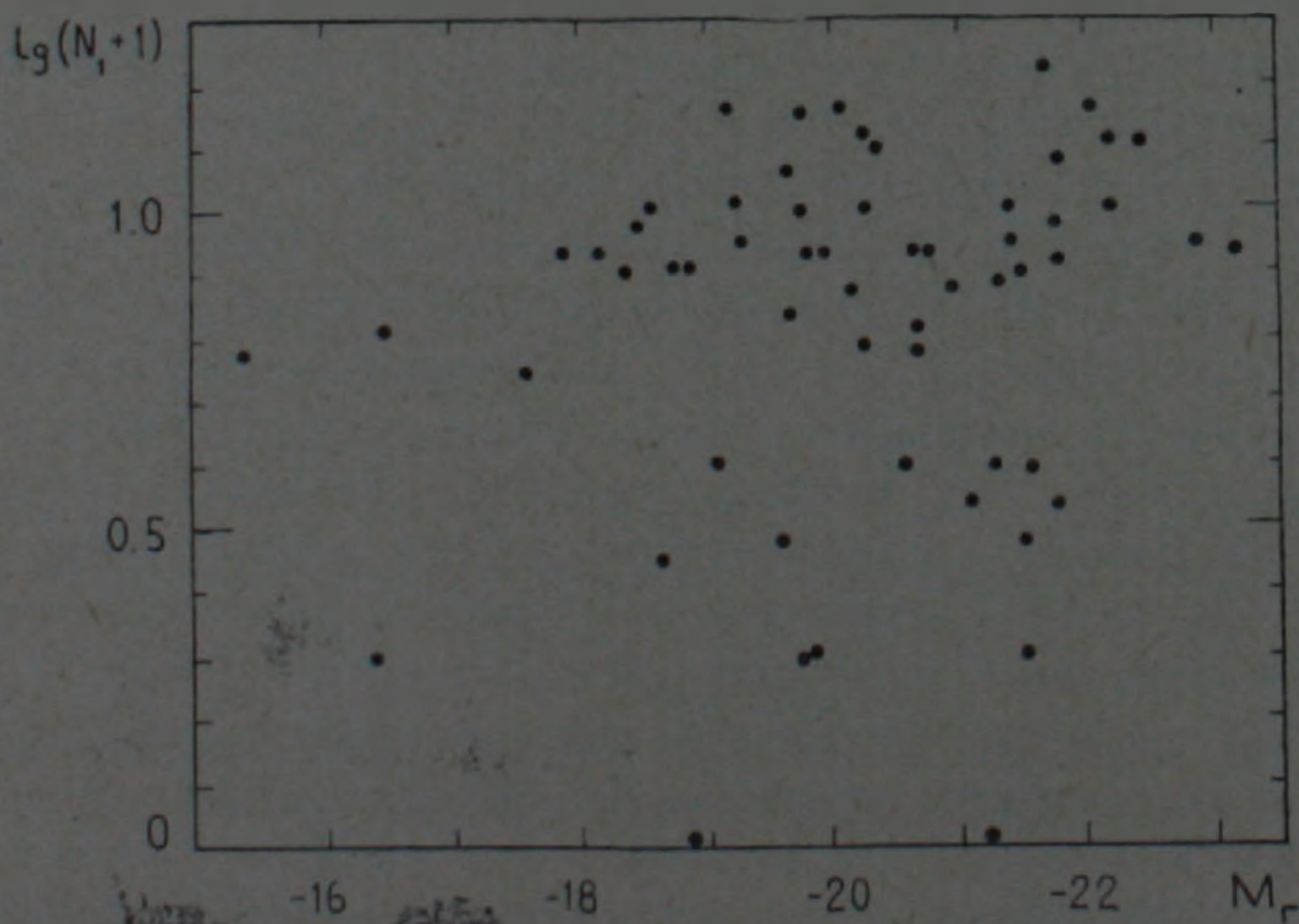


Рис. 3. Зависимость между $\lg(N_1+1)$ и абсолютными величинами галактики

группы галактик. Одна—верхняя показывает, как растет M с ростом значений $\lg(N_1+1)$. Но эта связь довольно слабая, что представляет особый интерес. В нижней же группе высокие светимости сопровождаются малыми значениями $\lg(N_1+1)$, за исключением одной галактики (NGC 2976).

Сопоставление значений $\lg(N_1+1)$ с бюраканскими классами галактик показало (см. табл. 2), что независимо от светимости галактик объекты с компактными ядрами (галактики бюраканских классов 5 и 4) содержат много деталей (за исключением трех случаев). Среди галактик с некомпактными ядрами галактики, имеющие мало деталей, встречаются чаще.

Связан ли полученный факт о разделении поздних спиралей высокой поверхностной яркости на две группы по богатству некоторых структурных деталей, таких как мосты, спутники, цепочки ассоциаций, с закономерностями эволюции галактик, сейчас трудно сказать. Важнее, что устанавливается наличие существенных различий в интенсивности формообразовательных процессов, ведущих к возникновению этих морфологических деталей. Тем более интересно, что для галактик низкой поверхностной яркости такого разделения как будто не происходит.

Выражаю свою благодарность академику В. А. Амбарцумяну за непосредственное руководство настоящей работой.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР

II. Գ. ԻՍԿՈՒԴԱՐՅԱՆ

Ուշ տիպի պարույրների կառուցվածքային մի բնութագրի մասին

Ուշ տիպի պարույրները պարունակում են մի շարք կառուցվածքային մանրամասներ, որոնք իրենց չափերով փոքր են պարուրաթևերից, բայց սվելի մեծ են միջին չափերի աստղասփյուռներից: Ընդունելով, որ յուրաքանչյուր տիպի մանրամասնի քանակը կարող է գալակտիկան բնութագրող պարամետրի դեր կատարել և որպես գալակտիկան բնորոշող մանրամասներ վերցնելով կամուրջները, արբանյակներն ու աստղասփյուռների շղթաները, ցույց է տրված, որ բարձր մակերևույթային պայծառության ուշ տիպի պարույրները բաժանվում են երկու՝ մեկ մեկուց բավականաչափ գատ խմբերի: Մի խումբը հարուստ է այնպիսի կառուցվածքային մանրամասներով, ինչպիսիք կամուրջներն են, արբանյակներն ու աստղասփյուռների շղթաները, մյուս խումբը աղքատ է նույն մանրամասներից: Մյուս կողմից, ցածր մակերևույթային պայծառության ուշ տիպի պարույրների մոտ նման բաժանում չի դիտվում:

Կապված է այս փաստը գալակտիկաների էվոլյուցիայի օրինաչափու-

թյունների հետ, դեռևս դժվար է ասել: Կարևոր է, որ բացահայտվում է գալակտիկաների տարբեր խմբերում դեպի կառուցվածքային մանրամասների առաջացումը տանող ձևակազմավորման պրոցեսների ինտենսիվության մեջ էական տարբերությունների առկայությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ S. Wan den Bergh, Publications DDO, vol. 11, 159 (1960) ² С. Г. Искударян, Сообщ. Бюраканской обс., вып. 46 (1975). ³ H. Arp, Atlas of Peculiar Galaxies, Pasadena, 1966. ⁴ S. G. Iskudarian et al, Communication IAU, Praha, 1967. ⁵ Бюраканский сводный каталог галактик, Сообщ. Бюраканской обс., вып. 47 (1975). ⁶ E. Holmberg, Arkiv for Astronomi, band 3, 387 (1965) ⁷ G. de Vaucouleurs, A. de Vaucouleurs, H. G. Corwin Jr., Second Reference Catalogue of Bright Galaxies, Austin, London, 1976. ⁸ G. de Vaucouleurs, Ap. J., Suppl. ser., vol. 8, 31 (1963). ⁹ Вопросы физики и эволюции Вселенной, Изд-во АН Арм ССР, Ереван, 1978. ¹⁰ D. S. Heeschen, C. M. Wade, A. J., vol. 69, 277 (1964).

УДК 550.34

СЕЙСМОЛОГИЯ

Академик АН Армянской ССР А. Г. Назаров

К проблеме сейсмопрогноза

(Представлено 22/XII 1981)

Насчитываются сотни предвестников землетрясений, связанных с данными сейсмологии, геологии, геодезии, геофизики, - геохимии, космологии и биологии. Современное состояние сейсмопрогноза довольно полно отражено в работах (^{1,2}). В целом исследования по предвестникам землетрясений ведутся методом постепенной локализации ожидаемого землетрясения в пространстве, во времени и по мощности на началах теории вероятности (долгосрочный, краткосрочный и оперативный прогнозы).

Нам представляется целесообразным остановиться на следующем вопросе. Помехой для сейсмопрогноза являются ложные предвестники землетрясений, когда предвестники появляются, но само землетрясение не возникает. Необходимо поэтому научиться отличать ложные предвестники от действительных.

Ложные предвестники являются результатом текущих квазистатических процессов в земной коре. Действительные же предвестники возникают в связи с подготовкой к скачкообразному переходу определенного участка земной коры из одного квазистатического равновесного состояния в другое с бурным выделением кинетической энергии в процессе потери устойчивости.

Надо полагать, что ложные предвестники чем-то должны отличаться от действительных, поскольку природа их происхождения различна. При качественном сопоставлении, по-видимому, эти различия незаметны. Необходимо поэтому к предвестникам подходить дифференцированно и попытаться вводить в них определенные параметры, которые помогут достоверно отделять ложные предвестники от действительных.

Это потребует большой систематической работы для каждого предвестника в отдельности. Особое внимание должно быть сосредоточено на предвестниках, прямо связанных с процессом деформаций в земной коре. Они являются первичными и несут прямую ответственность за происхождение землетрясений. Одним из предвестников, как известно, является бухтообразная форма деформации в функции от времени. Возникновение землетрясений связывается с ниспадающей частью бухтообразной кривой. Не исключена возможность, во всяком случае можно логично ожидать, что чем круче ниспадающая часть этой кривой, тем вероятнее возможность возникновения землетрясения. Представляется поэтому целесообразным осуществлять особенно подробное исследование

дование этой части кривой включая ее производные. Полученные результаты могут быть использованы и для электромагнитных предвестников, поскольку они связаны с деформациями определенными зависимостями.

Приведенные выше соображения в особенности касаются последнего предвестника землетрясения. Действительно, в начале скачкообразного перехода участка земной коры из квазистатического равновесия в динамическое состояние должна иметь место все ускоряющаяся подвижка горных масс в зоне очага землетрясения в некотором интервале времени Δt . Из общих законов механики следует, что чем мощнее землетрясение, тем больше протяженность Δt ⁽³⁾. Эта подвижка в очаге землетрясения должна со скоростью распространения волн достигать поверхности Земли, где она может быть зафиксирована с помощью специальных приборов.

Последний предвестник должен представлять собою практически достоверное, детерминированное событие, так как элементы случайности при нем связаны лишь с погрешностями измерения и сведены к минимуму.

Поэтому если предвестник будет располагать специфическими чертами, указывающими на то, что именно он является последним (например, все ускоряющаяся деформация) и его длительность Δt достаточно велика, то он окажет неоценимую услугу в проблеме прогноза.

Если последний предвестник будет зафиксирован хотя бы за несколько минут до землетрясения, то и это будет иметь большое значение для оперативного прогноза при использовании современных средств связи.

Действительно, при получении долгосрочного и краткосрочного предвестников население может быть приведено к потенциальной готовности, которую уже относительно легче оперативно реализовать за несколько минут при возникновении последнего предвестника. Положение дел с подготовкой встречи с землетрясением облегчается тем, что чем мощнее землетрясение, как указывалось выше, тем длиннее отрезок времени Δt , т. е. тем больше времени будет для последних подготовительных операций.

Успешное решение поставленных здесь задач возможно лишь при гармоническом сочетании детерминированного подхода на основе возможно глубокого проникновения в сущность исследуемых процессов и вероятностного подхода для правильного учета их случайной части ⁽⁴⁻⁷⁾.

Ордена Трудового Красного
Знамени Институт инженерной
сейсмологии и геофизики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ՆԱԶԱՐԵԱՆ

Երկրաշարժերի կանխագուշակման պրոբլեմի շուրջը

Խարուսիկ նախանշանները հանդիսանում են երկրի կեղևում բնթաքող քվադրիպոլար պրոցեսների արդյունքը, այն դեպքում, երբ իսկական նա-

խանջանները կապված են երկրաշարժի առաջացման հետ։ Հետևաբար, խա-
րուսիկ և իսկական նախանջանների մեջ պետք է սպասել էական տարբե-
րություններ, որոնք սպրդում են մեր ուշադրությունից նախանջանների որա-
կական համադրման ժամանակ։ Անհրաժեշտ է կատարել նախանջանների
բանական համադրում, իսկ դրա համար նախապես պետք է իրականաց-
նել նախանջանների պարամետրիզացիա, որը հնարավորություն կստեղծի
ներանց դիֆֆերենցված համադրման ու վերլուծման համար։

Աշխատանքի վերջնամասը վերաբերում է երկրաշարժի սկզբնավոր-
մանը կարճ ժամանակով նախորդող վճռականորեն որոշակի նախանջանի
գոյության հնարավորության վարկածին։ Այդպիսի նախանջանի հայտնա-
բերումը թույլ կտար էականորեն ճշտել երկրաշարժի առաջացման ժամա-
նակը։

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ ՈՒ Ն

¹ Научная программа исследований по прогнозу землетрясений. МСССС и ИФЭ
АН СССР. М., 1981. ² Т. Рикитакэ, Предсказание землетрясений. Мир, М., 1979.
³ А. Г. Назаров, ДАН АрмССР, т 53, № 1 (1971). ⁴ Д. Бом, Причинность и случайность
в современной физике, ИЛ, М., 1959. ⁵ Л. Бриллюэн, Научная неопределенность и ин-
формация. Мир, М., 1966. ⁶ В. А. Амбарцумян, Философские вопросы науки о вселен-
ной, Ереван, Изд. АН АрмССР, 1973. ⁷ Ф. М. Гольцман, Статистические модели ин-
терпретации, Наука, М., 1971.

УДК 595.771

ЭНТОМОЛОГИЯ

А. Е. Тертерян, Э. А. Качворян

Новый вид мошки из Армянской ССР (Diptera, Simuliidae)

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР В. В. Фанарджяном 26/VI 1981)

Дополнительный сбор материала одного из авторов (Э. А. Качворян) из высокогорных водостоков Гукасянского района и его обработка позволили установить ошибочность отнесения формы, собранной ранее в Артикском, Апаранском и Абовянском районах Армянской ССР, к среднеазнатскому виду *Eusimulium ocreastylum* Rubz. (1). Идентификация была проведена на основании головных придатков личинки и количества дыхательных трубочек куколки, извлеченных из зрелой личинки.

Исследование нового материала (личинки, куколки и самца) и сравнение его с ранее собранным позволили выявить наличие нового высокогорного вида, распространенного дизъюнктивно на северо-восточных склонах горы Арагац, Гегамском хребте и на западных отрогах Джавахетского хребта.

Eusimulium arpiensis Terterian et Kachvorian, sp. n.

Личинка. Длина тела 7,0—8,2 мм. Окраска головы светло-коричневая. Лоб относительно светлый; переднее, среднее, передне-боковые и задне-боковые пятна более или менее отчетливые; рисунок позитивный. Антенна длинная, соотношение длин члеников следующее: I членик равен 200 μ, II членик 212,5 μ, III членик 162,5 μ. В премандибулах: в большом веере 32—45, в малом 16—22 жгутика. Количество жгутиков в базальном веере 8—14. Количество лопаточек 6. Характер пектизации в средней части жгутика большого веера дан на рис. 2, 17. Мандибула (рис. 2, 16). У основания выше выреза имеется обособленное опушенное поле из волосков. Высота нижнего выреза мандибулы 150,0—175,0 μ, ширина мандибулы—162,5 μ. Вершинный зубец се крупный, относительно утолщенный; предвершинные зубцы хорошо выражены и как правило, 2-й и 3-й зубцы относительно короче 1-го; внутренних зубцов 5—8; краевые зубцы также четко выражены, из них 1-й зубец относительно крупный, с широким основанием, располагается обособленно; последующие краевые зубцы представляются в виде зазубрин и тесно прилегают друг к другу так, как на рис. 1, 5. Субментум (рис. 1, 2) характеризуется некрупными 1-м и 5-м зубцами, причем 1-й зубец ниже уровня 5-х. Промежуточные зубцы почти не выступают за передний край ментума. По краям субментума располагаются 3—4 щетинки. Расстояние от переднего конца 1-го зубца субментума до заднего его

края 137,5—162,5 μ . Расстояние от заднего края субментума до переднего края вентрального выреза 150,0—200,0 μ . Вентральный вырез более или менее узкий и глубокий, характеризуется заметным расширением в средней части. Края выреза пигментированы. Ширина выреза



Рис. 1. 1—15. Личинка и куколка *Eusimulium arpiensis* Terterian et Kachvorian, sp. n. 1—вентральная часть головной капсулы личинки (субментум и вентральный вырез); 2—субментум личинки; 3—5—различные варианты размеров зубцов мандибулы личинки; 6—рисунок лба личинки; 7—склеротизованная рама личинки; 8—антенна личинки; 9—рисунок головы личинки сбоку; 10—12—схемы ветвления дыхательных трубочек куколки; 13—характер микроструктуры дыхательной трубочки куколки; 14—кокон куколки; 15—куколка, вид сверху

в средней расширенной части 125,0—175,0 μ . Глубина вентрального выреза 225,0—250,0 μ . Расстояние между склеротизованными утолщениями заднего края вентрального выреза 337,5—362,5. В заднем прикреплении

тельном диске 54—59 рядов крючков, по 7—12 в каждом ряду. Склеротизованная рама с узкими задними ветвями (рис. 1, 7).

Куколка. Длина кокона 5—6 мм. Кокон с рогом. Длина куколки вместе с дыхательными трубочками равна 7,0—7,5 мм. Дыхательных



Рис. 2. 16—28. Личинка, куколка и самец *Eusimulium arpiensis* Terterian et Kachvorian, sp. n. 16—мандибула личинки; 17—пектинация жгута большого веера личинки; 18—IX сегмент брюшка куколки; 19—кальципала и педисулькус задней ноги самца; 20—гоноподит, гоностерн и гонофурка самца, вид сзади (детали не разделены); 21—гоноподит самца сзади (в горизонтальной плоскости); 22—гоноподит самца сбоку; 23—парамеры самца; 24—щупальца самца; 25—гоностерн самца сбоку; 26—гоностерн, парамеры и гонофурка самца, вид сзади; 27—X стернит самца; 28—гоностерн и гоно- стиль самца, вид снизу

трубочек 8 (рис. 1, 10—12). Некоторые пары трубочек сидят на выраженных стебельках. Формула ветвления трубочек: $2 + (2 + 1) + (2 - 1)$ или $2 + (2 + 1) + 3$. Характер микроструктуры трубочки при большом увеличении показан на рис. 1, 13. Передний край кокона и края рога окаймлены неширокой полоской светло-коричневого цвета. IX сегмент брюшка с вентральной стороны вооружен 2 небольшими коническими выростами (рис. 2, 18).

Взрослые насекомые. Самец. По деталям строения, отпрепарированным из зрелых куколок. Щупики (рис. 2, 24) тонкие, четвертый вершинный членик превосходит длину второго членика в 1,7 раза. Кальци-

Пала и педисулькасы представлены на рис. 2. 19. Гоноподиты (рис. 2. 20—22). Гонококситы слегка округло-прямоугольные, длина их заметно меньше длины гоностилей; последние изогнуты посередине, в вершинной 1/3 сужены. Парамеры с 1 шипом (рис. 2. 23). 10-й стернит округло-прямоугольной формы. Гоностерн широкий, длина слегка превосходит ширину, сзади посередине он с широкой выемкой.

Экология. Мошки *Eusimulium arpiensis* Tert. et Kach, sp. n. развиваются в мелких высокогорных ручьях (2100—3000 м над ур. м.), заросших растительностью. Личинки и куколки прикрепляются на нижней поверхности камней и на водной растительности. Зрелые личинки и куколки обнаруживаются в водостоках в I и II декадах июня.

Материал. Голотип, куколка. Армянская ССР, Гугасянский р-н, родниковый ручей в селе Сарагюх, 11.VI.1979, 2300 м над ур. м. (Качворян Э.). Паратипы: личинки, куколки и самец в препаратах № 1627, 1628, Гугасянский р-н, родниковый ручей в селе Сарагюх, 11.VI.1979 (Качворян Э.); куколки из того же биотопа; Апаранский р-н, ручей вблизи села Овит, с.-в. склон горы Арагац; Артекский район, ручей выше села Артек; Абовянский район, ручей на Гегамском хребте.

Сравнительные замечания к виду.

Eusimulium arpiensis Tert. et Kach., sp. n. резко отличается от *Eusimulium ocreastylum* Rubz. по строению половых придатков самца (пятка и носок гоностилей длинные, с вырезом по заднему краю) (3). По количеству дыхательных трубочек и отчасти по характеру их ветвления новый вид сближается также с другим среднеазиатским видом *Eusimulium brachystylum* Rubz., однако резко отличается от него строением гоностилей и парамер (4).

Институт зоологии

Академии наук Армянской ССР

Հ. Բ. ՏԵՐՏԵՐՅԱՆ, Է. Ա. ՔԱՉՎՈՐՅԱՆ

Մժեղի նոր տեսակ (Diptera, Simuliidae) Հայկական ՍՍՀ-ից

Արթիկի, Ապարանի, Արտիկյանի շրջաններից նախկինում հավաքված մեղիները որոշվել էին որպես միջինասիական *Eusimulium ocreastylum* Rubz. տեսակ: Սակայն լրացուցիչ նյութերի (թրթուրների, հարսնյակների և արունների) հետազոտությունից պարզվեց, որ նա հանդիսանում է գիտության համար նոր բարձր լեռնային տեսակ՝ *Eusimulium arpiensis* Terterian et Kachvorian, sp. n., որը Հայաստանում տարածված է դիպլոմեդների ձևով:

Հոդվածում տրվում է նոր տեսակի նկարագրությունը և նշվում է նրա տարրերից հատկանիշները մոտ տեսակներից:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 А. Е. Тертерян, Мошки (Diptera, Simuliidae). Фауна Армянской ССР. Насекомые двукрылые, Изд. АН Арм ССР, Ереван, 1968. 2 И. А. Рубцов, Мошки (Diptera, Simuliidae). Фауна СССР. Насекомые двукрылые, т. 6, вып. 6, М.—Л., 1956. 3 И. А. Рубцов, in Lindner's "Die Fliegen der Palaearctischen Region", Lief. 220, Stuttgart, 1962. 4 И. А. Рубцов, Энтомологическое обозрение, т. 55, вып. 1, Л. (1976).

УДК 595.782. (479.25+574)

ЭНТОМОЛОГИЯ

В. И. Пискунов, И. М. Емельянов

Новые виды выемчатокрылых молей родов *Gelechia* Hbn.,
Teleiodes Sattler и *Aristotelia* Hbn. (Lepidoptera, Gelechiidae)
из фауны СССР

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. О. Мовсисяном 22/II 1982)

Данная статья основана преимущественно на сборах Г. А. Арутюняна (Отдел защиты растений Ботанического института АН Армянской ССР), присланных первому автору на определение. Использованы также материалы Зоологического института АН СССР. Голотипы и паратипы новых видов находятся в Зоологическом институте АН СССР (Ленинград); часть паратипов—в Институте зоологии АН Армянской ССР (Ереван). Этикетки голотипов процитированы в подлинниках.

Gelechia sattleri Piskunov, sp. n.

Внешние признаки имаго. Размах 14—16 мм. Передние крылья серовато-коричневые с размытым темно-коричневым пятном в прикорневом поле. Бахромка светло-серая, отдельные чешуйки с коричневыми вершинами. Задние крылья коричневато-серые, со слабым блеском; бахромка серовато-желтая. Грудь темно-серая, тегулы коричневато-серые, голова сверху грязно-желтая, впереди желтая. 2-й членик губных щупиков желтый, сверху в редких коричневых чешуйках, снизу со щеткой из грязно-желтых чешуек; 3-й членик темно-коричневый, с продольной желтой тонкой полосой снизу. Усики серовато-коричневые, скапус желтовато-коричневый, пестрый.

Гениталии самца (рис. 1, А, Б). Верхняя часть вальвы ланцетовидная, нижняя укороченная, саблевидная. Ункус и анальная трубка широкие, короткие; субскафнум узкий, лентовидный; тегумен сильно вытянут; эдеагус—изогнутая массивная трубка, почти в 2 раза длиннее саккуса.

Гениталии самки (рис. 2, А). Лопasti вагинальной пластинки расставлены. Стеригма полусферическая; остиум неотчетлив; дуктус широкий; склеротизованный пояс (цингулум) узкий. Копулятивная сумка в 5-м—6-м сегментах; сигна крестовидная, сильно расширена по поперечной оси, с характерной для подсемейства *Gelechiinae* глубокой складкой по этой оси; края сигны мелкопильчатые. Передние апофизы в 2 раза короче вагинальной пластинки, задние не доходят до 7-го сегмента. Анальные сосочки удлиненные.

Распространение. Армянская ССР; Казахская ССР: Чимкентская область, заповедник Аксу-Джабаглы.

Изменчивость. Габитуально экземпляры нового вида из Армении и южного Казахстана сходны. Гениталии самца из заповедника Аксу-



Рис. 1. *Gelechia sattleri* Pisk., sp. n.
Гениталии самца. А, В—вид сбоку;
Б, Г—эдеагус

Джабаглы изображены на рис. 1, В, Г, а самки—на рис. 2, Б. Отличия от описанных выше экземпляров из Армении (типовая местность) заключаются в форме нижней части вальвы, ее более крупных размерах, а также в общей форме и строении вершины эдеагуса в гениталиях самцов.

Сравнительные замечания. В роде *Gelechia* Hbn. новый вид наиболее близок к средиземноморскому *G. senticetella* (Stgr.) (*limitanella* Rbl., *nigrostriella* Zerny) с можжевельников (размах 10,5—11,5 мм). В литературе изображены гениталии (¹⁻³) и имаго (¹) данного вида; в одной географической точке и одном биотопе с *G. sattleri* sp. n. он найден в Армянской ССР (⁶). В отличие от нового вида у *G. senticetella* (Stgr.) эдеагус прямой, стеригма почти плоская, сигна растянута по продольной оси, сбоку в форме полумесяца; размах крыльев меньше и рисунок передних крыльев другой.

Новый вид назван в честь К. Заттлера (Dr. K. Sattler), английского специалиста по выемчатокрылым и черноточечным молям.

Исследованный материал. 32 экз. Лев. бер. ср. теч. р. Арпа, 1500 м, Ехегнадзорский р-н, Арм. ССР. Арутюнян Г., ex. 1. 28 VI 1976, выв. № 2099, ♂ (голотип), препарат № 14815; там же, Арутюнян Г., ex. 1. 28—30 VI 1976, 3 ♂, 1 ♀ (паратипы); запов. Аксу-Джабаглы,

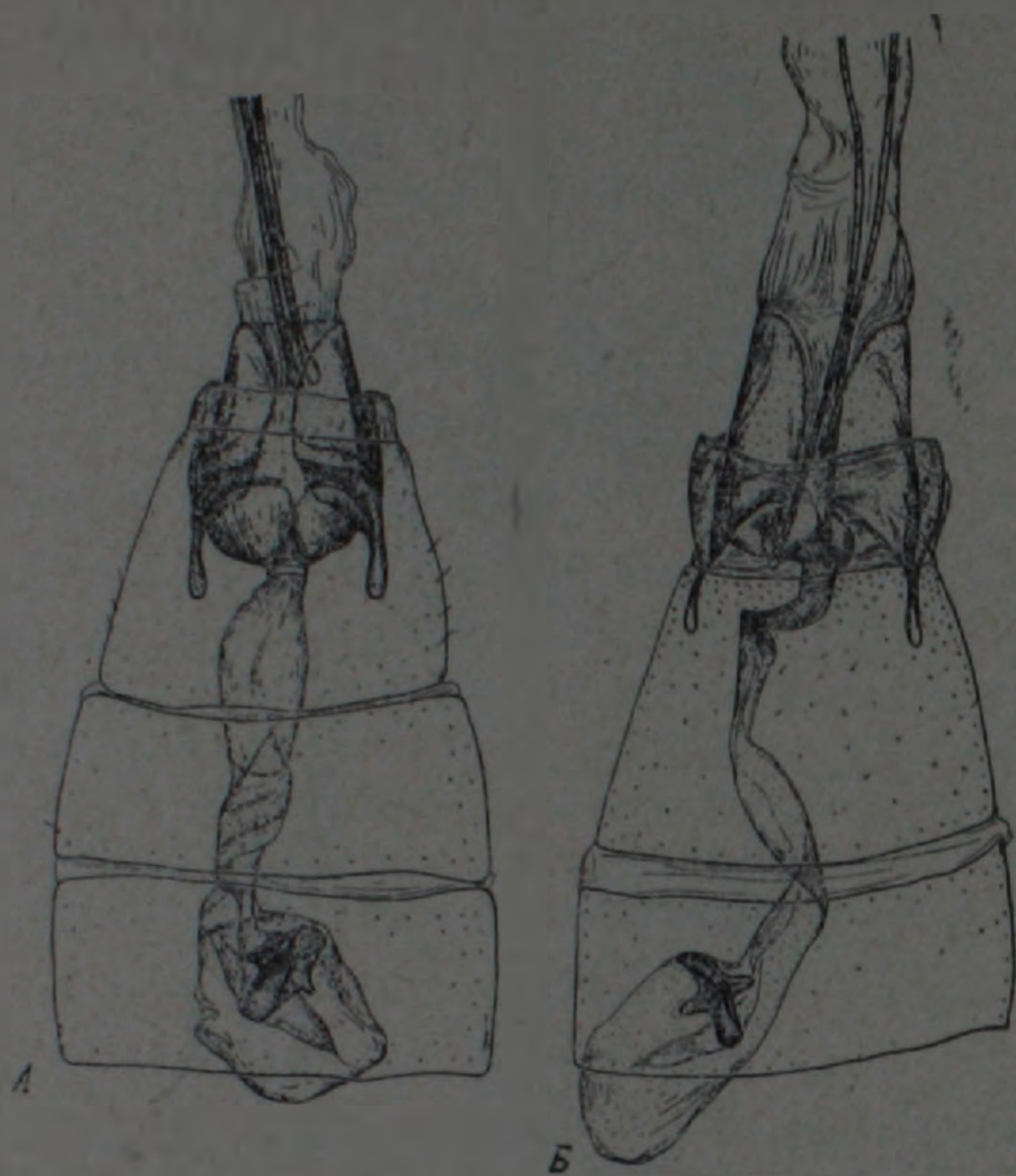


Рис. 2. А, Б. *Gelechia satteri* Pisk., sp. n. Гениталии самки

1900—2750 м, Чимкентская обл., Фисечко, 4, 13. 16, 19, 28 VII, 1 VIII 1966, 13 VII 1968, 27 экз. (паратипы), препараты №№ 11665—11668.

Биология. В Армянской ССР гусеницы питаются хвоей можжевельника многоплодного (*Juniperus polycarpos* C. Koch), можжевельниковые редколесья, конец мая; окукление между сплетенных шелковой нитью 2-х—3-х однолетних побегов в местах повреждений, начало июня; вылет имаго в лаборатории в конце июня. В заповеднике Аксу-Джабаглы гусеницы объедают охвоенные веточки местных видов арчи (древовидных можжевельников): можжевельника полушаровидного (*J. semiglobosa* Rgl.), в меньшей мере зеравшанского (*J. seravschanica* Kom.) и туркестанского (*J. turkestanica* Kom.). Таким образом, в Палеарктике известно 9 видов выемчатокрылых молей, связанных трофически с можжевельниками. Кроме описанного нами, это олигофаги *Gelechia obscuripennis* (Frey), южная можжевельниковая моль — *G. senticetella* (Stgr.), *G. atlanticella* (Ams.), *G. sabinel-la* Z., можжевельниковая выемчатокрылая моль — *Mesophleps oxycedrellus* (Mill.), можжевельниковая моль — *Dichomeris marginella* (F.), *D. juniperella* (L.) и полифаг еловая минирующая (побеговая) моль — *Chionodes electella* (Z.) (^{3,5}). Большинство из этих видов (кроме первого и третьего) отмечены в СССР (³).

Telelodes paradoxa Piskunov et I. Emelyanov, sp. n.

Внешние признаки имаго. Размах 13—14 мм. Передние крылья темно-серые, прикорневое поле черное; корень, внутренняя и почти вся наружная перевязи в темно-коричневых приподнятых чешуйках, на костальном крае последняя перевязь в виде косого грязно-белого штриха. Бахромка серовато-желтая, на заднем крае почти желтая. Задние крылья серые, бахромка грязно-желтая. Грудь, тегулы и голова черные, с серыми точками. Губные щупики грязно-белые, щетка 2-го членика в основании и на вершине черная, 3-й членик с 3 черными поясками. Усики темно-коричневые, с бронзовым блеском.

Гениталии самца (рис. 3, А, Б). 8-й стернит с вырезом на верхнем



Рис. 3. *Telelodes paradoxa* Pisk. et I. Emel., sp. n. Гениталии. А—самец, общий вид сбоку; Б—самец, вид снизу; В—самка, область пагинальной пластинки; Г—самка, копулятивная сумка

крас. Верхняя часть вальвы саблевидная с острой оттянутой вершиной, нижняя короткая, туповершинная, в щетниках. Ункус длинный, слабо изогнут; гнатос дуговидный, вентрально подковообразен. Тегумен узкий; винкулум сбоку ладьевиден; саккус короткий. Эдеагус—грубка со срезанной косо вершиной.

Гениталии самки (рис. 3, В, Г). Лопasti вагинальной пластинки разобщены, их задние углы оттянуты на тергит. Стеригма с 6—7 продольными склеротизованными тяжами. Остиум круглый; дуктус узкий, перепончатый. Копулятивная сумка в 5-м—6-м сегментах; сигна—ромб с бороздой по поперечной оси. Передние апофизы в 1,8 раза длиннее вагинальной пластинки, задние оканчиваются в области стеригмы. Анальные сосочки овальные.

Сравнительные замечания. Новый вид по гениталиям самца имеет сходство с голарктическим *T. sequax* (Hw.) с солнцезвезда (°), который отличается более изогнутой верхней лопастью вальвы и зауженным, длинным гнатосом; есть отличия и в рисунке передних крыльев (°). От *T. brucinella* (Mn.), conb. n., связанного с гребенщиками (8,9), новый вид отличается более крупными размерами и очень темными передними крыльями.

Исследованный материал. 3♂♂, 2♀♀. Окр. с. Лусагюх, Арм. ССР, Эчмиадзинский р-н, Арутюнян Г., ex. 1. 6 VI 1975, выв. № 2023, ♂ (голотип), препарат № 14821; там же, Арутюнян Г., ex. 1. 6, 9 VI 1975, 1 ♂, 2 ♀♀ (паратипы); тот же район, Джрарат, из галлов на тамариксе, ex. 1. 3—4 VII 1973, Эртевцян, 1 ♂ (паратип).

Биология. Гусеницы в галлах на ветвях араратского (*Tamarix araratica* Gorschk.) и многоветвистого (*T. ramosissima* Ledeb.) гребенщиков, конец апреля. Галлообразование редко встречается у чешуекрылых (10); укажем все случаи среди выемчатокрылых молей на гребенщиках. Галлообитание: *Ornativulva pharaonis* Sattler (11,12). Собственно галлообразование: *Amblypalpis olivierella* Rag. (10,11,13), галловая тамариксовая моль (*A. tamaricella* Dan.) (10,11,13—15), *Parapodla sinaica* (Frauenfeld) (*Cecidonostola tamaricella* Ams.) (11,13,16,17), *Cecidophaga tamaricicola* Wlsm. (17). Изображения галлов опубликованы (11,13—15). Данные о галлообразовании *Teleiodes brucinella* (Mn.) (9) требуют подтверждения; в обзорах насекомых-галлообразователей гребенщиков (11,13,15) этот вид не указан. Таким образом, в Палеарктике известно всего 6 видов выемчатокрылых молей, достоверно связанных с галлами на гребенщиках, а 3 из них (новый и третий, четвертый из приведенного выше списка) встречаются в СССР.

Aristotelia avanica Piskunov et I. Emelyanov, sp. n.

Внешние признаки имаго. Размах 8,5—9,5 мм. Передние крылья в костальной половине и по внешнему краю серовато-коричневые, местами темно-коричневые, а вдоль заднего края охристо-желтые, с 3 белыми перевязями, 2-я из которых заужена в центре. Бахромка темно-коричневая, от заднего угла желтовато-серая. Задние крылья светло-серые, с блеском, бахромка той же окраски. Грудь и тегулы темно-коричневые, последние с желтыми вершинами; голова желтая. Губные щупики светло-желтые, на 2-м и 3-м члениках по паре коричневых колец.

Усики темно-коричневые, вершина скапуса и основание каждого членика жгутика желтые.

Гениталии самца (рис. 4, А, Б, В). Верхняя часть вальвы широкая, вершина слабо оттянута, шейка заметно заужена; нижняя маленькая, треугольная, по верхнему краю зазубрена. Ункус короткий, тупой; гнатос массивный, крючковидный; винкулум на заднем крае с парой округлых лопасти, в щетинках. Саккус широкий. Эдеагус базально расширен, под зауженной вершиной группа мелких шипиков; в 3,5 раза длиннее саккуса.

Гениталии самки (рис. 4, Г). Вагинальная пластинка цельная, на

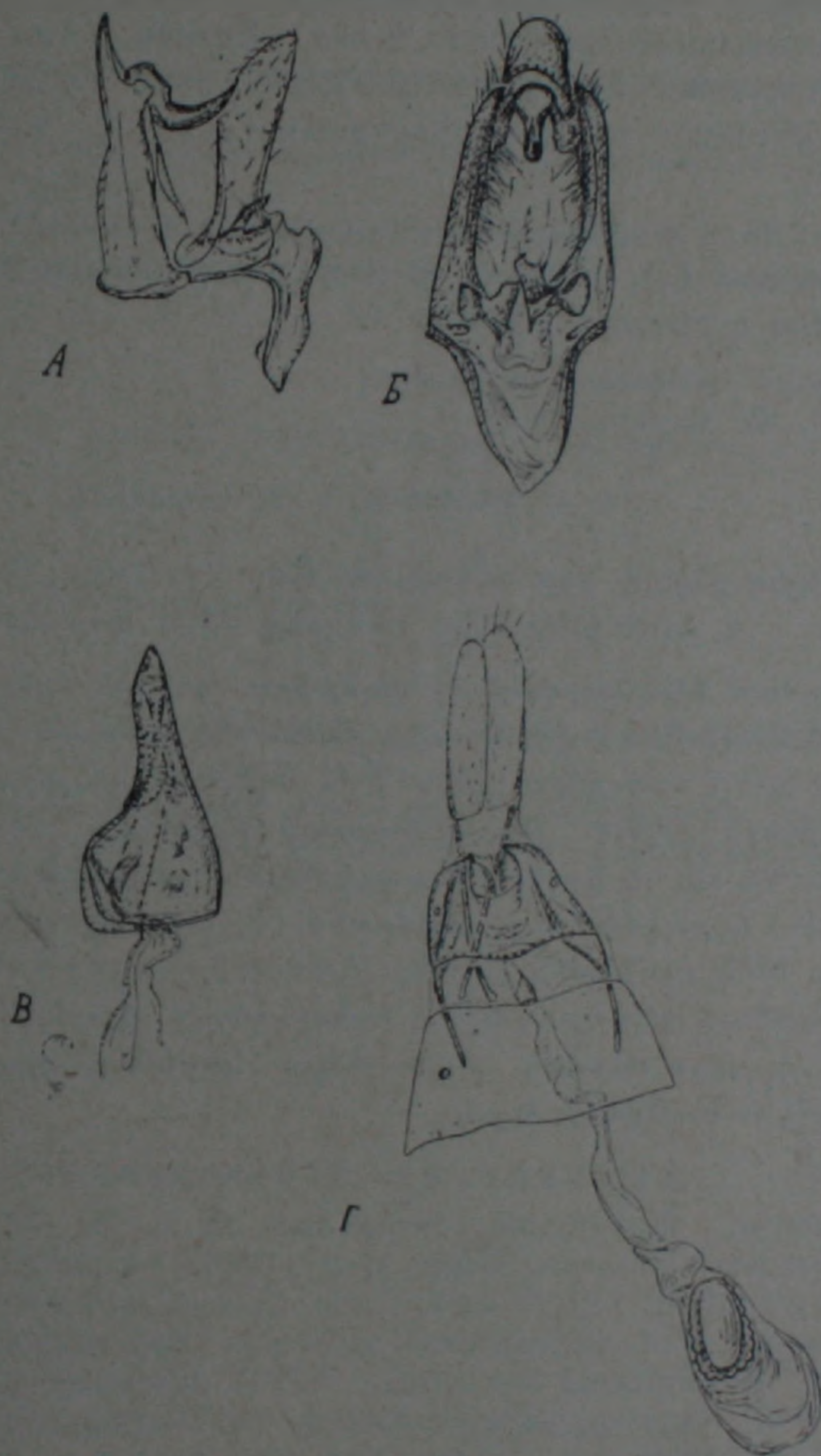


Рис. 4. *Aristotella avanica* Plsk. et I. Emel., sp. n.
Гениталии. А—самец, вид сбоку; Б—самец, вид снизу; В—эдеагус; Г—самка

заднем крае с глубоким вырезом, углы которого оттянуты назад. Остиум неотчетлив, перепончатый дуктус со склеротизованным пояском (цингулумом). Копулятивная сумка в 3-м—4-м сегментах, вытянутая; сигна овальная со склеротизованным, фестончато изрезанным краем.

Яйцеклад короткий. Передние апофизы заметно длиннее вагинальной пластинки, задние оканчиваются у заднего края 7-го сегмента. Анальные сосочки вытянутые.

Сравнительные замечания. Рисунком передних крыльев новый вид похож на *A. staticella* Mill. (Франция; размах 6—7 мм) и *A. subdecurtella* Stt. с дербенника (Европа; размах 12—13 мм), но отличается, кроме размеров, от первого более ярким, насыщенным крыловым рисунком, а от второго строением гениталий, которые изображались (*). По гениталиям новый вид сходен с *A. brizella* (Tr.) с армерии (Европа, Ближний Восток; размах 10—12 мм) (*), но рисунок передних крыльев *A. brizella* (Tr.) другой (*).

Исследованный материал. 9 экз. Ереван, Арм. ССР, Аванское ущелье, Арутюнян Г., ex. l. 3 VI 1975, выв. № 2021, ♂ (голотип), препарат № 14822; там же, Арутюнян Г., ex. l. 3—6 VI 1975, 8 экз. (паратипы).

Биология. Гусеницы минируют листья шиповатой курчавки (*Atraphaxis spinosa* L.), апрель; во 2-ой половине апреля выход из мин и окукливание в рыхлых коконах.

Витебский педагогический институт
им. С. М. Кирова

Վ. Ի. ՊԻՍԿՈՒՆՈՎ, Ի. Մ. ԵՄԵԼՅԱՆՈՎ

Գելեխիիդ ցեղերի նոր տեսակներ՝ *Gelechia* Hbn., *Telelodes* Sattler
և *Aristotella* Hbn. սեռերից ՍՍՀՄ ֆաունայից

Հոդվածում նկարագրվում են գելեխիիդ ցեղերի երեք նոր տեսակներ՝ *Gelechia sattleri* Pisk. sp. n. որը վնասում է տարբեր տեսակի դիհինների (*Juniperus* spp.) տանդները (Հայկ. ՍՍՀ եղեգնաձորի շրջան և Հաղարավան ՍՍՀ, Զիմֆենդի շրջան, Արսու-Ջաբազլի արգելոց); *Telelodes paradoxa* Pisk. et Emel. sp. n. դալեր է առաջացնում արարատյան (*Tamarix araratica* Gorschk.) և բազմաճյուղ կարմրանի (*T. ramosissima* Ledeb.) ճյուղերի վրա (Հայկ. ՍՍՀ, Էջմիածնի շրջան); *Aristotella avanica* Pisk. et Emel. sp. n. որի համար կերակրարույթ է հանդիսանում փշամանդիկը (*Atraphaxis spinosa* L.); այս տեսակի թրթուրները տերևների վրա առաջացնում են աղաններ (Երևան, Ավանի կիրճ):

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ J. Klimesch, Mitt. Münchn. entomol. Ges., 32, 2. Taf. XIII—XV (1942). ² J. Klimesch, Fragmenta Balcanica, Skopje, 1, 27 (1956). ³ K. Sattler, Deutsch. entomol. Z., N. F. 7, 1/2 (1960). ⁴ D. Povolný, Časop. Českosl. společ. entomol., 61, 1 (1964). ⁵ В. И. Пискунов, в кн.: Определитель насекомых Европейской части СССР, 4, 2. Л., «Наука», Ленинградское отд. (1981). ⁶ Г. А. Арутюнян, Биол. ж. Армении, 31, 9 (1978). ⁷ L. Gozmány, Microlepidoptera, IV. Magyarország állatvilága—Fauna Hungariae, 16, Lepidoptera, 5 (40), Budapest, Akadémiai kiadó, 1958. ⁸ А. М. Герасимов и В. Э. Крейцберг, Энтомол. обозр., 35, 1, (1956). ⁹ R. Zocchi, Redia, 52 (1971). ¹⁰ А. С. Данилевский, Энтомол. обозр., 34 (1955). ¹¹ D. Gerling, J. Kugler, A. Lupo, Boll. Lab. entomol. agr. «F. Silvestri», 33 (1976). ¹² K. Sattler, Bull. Brit. Mus. (Natur. Hist.) Entomol., 34, 2 (1976). ¹³ Э. И. Сленяч, Бюлл. Моск. о-ва испыт. природы. Нов. сер. Отд. биол., 67, 5 (1962). ¹⁴ П. И. Мариковский, Зоол. ж., 31, 5 (1952). ¹⁵ Ю. В. Синадский, Сб. работ Моск. лесотехн. ин-та, 12 (1960). ¹⁶ В. И. Кузнецов, Тр. Зоол. ин-та АН СССР, 27 (1960). ¹⁷ K. Sattler, Beitr. naturg. Forsch. SW-Deutschl., 21, 1 (1962).