

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր  
Д О К Л А Д Ы

LXXIV, № 2

1982

## Խմբագրական կոլեգիա

Կ. Ա. ԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, տեխն. գիտ. բեկնա-  
ծու (սլատ. Բարսեղյան), Է. Գ. ԱՅՐԻՎՅԱՆ,  
ՀՍՍՀ ԳԱ րդրակից-անդամ, Ա. Բ. ԲԱՐՍ-  
ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱ-  
ԼԱՆՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդրակից-անդամ, Վ.  
Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդրակից-ան-  
դամ, Վ. Հ. ՀԱՄՐԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս,  
Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս  
(սլատ. խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱԲ-  
ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ,  
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (սլատ. խմբագիր),  
Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդրակից-անդամ,  
Ս. Մ. ՍԱՊՈՆՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդրակից-  
անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ  
ԳԱ րդրակից-անդամ, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՁՅԱՆ,  
ՀՍՍՀ ԳԱ րդրակից-անդամ:

## Редакционная коллегия

Վ. Ա. ԱՄԲԱՐՇՄՅԱՆ, ակադեմիկ, Գ. Ա.  
ԱՐՅՄԱՆՅԱՆ, կանդ. տեխ. ռաւկ (ոճ.  
սեկրետար), Յ. Գ. ԱՓՐԻԿՅԱՆ, շլ.-կորր.  
ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Ա. Դ. ԲԱԲԱՅԱՆ, ակադեմիկ  
ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Վ. Օ. ԿԱԶԱՐՅԱՆ, ակա-  
դեմիկ ԱՆ ԱրմՏՏՐ (շամ. ոճ. ռեդակտոր),  
Ի. Գ. ՄԱԳԱԿՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ Արմ-  
ՏՏՐ, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ակադեմիկ ԱՆ  
ԱրմՏՏՐ (ոճ. ռեդակտոր), Գ. Տ. ՏԱԱԿՅԱՆ,  
շլ.-կորր. ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Օ. Մ. ՏԱՓՈՆ-  
ԺՅԱՆ, շլ.-կորր. ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Ա. Ա. ԴԱ-  
ԼԱԼՅԱՆ, շլ.-կորր. ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Վ. Մ.  
ԴԱՐԱՅԱՆ, շլ.-կորր. ԱՆ ԱրմՏՏՐ, Մ. Լ.  
ԴԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ, շլ.-կորր. ԱՆ ԱրմՏՏՐ,  
Վ. Վ. ՓԱՆԱՐԺՅԱՆ, շլ.-կորր. ԱՆ  
ԱրմՏՏՐ.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

42

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

- 1. Հ. Խաչատրյան—«Հուսամուտի» հատկությամբ օժտված աղյուսակներ . . . . . 51
- 2. Մ. Խոսրովյան—Քվադրհասարաչափ ենթախմբերը կիսապարզ լիի խմբերում 57
- Վ. Մ. Կարախանյան—Դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդիրը բազմաչափ տորում . . . . . 61

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

- Վ. Ա. Արսենյան—Երկու ուղղանկյունաձև անցքերով թուլացված անվերջ հարթությունում կշիռ ունեցող կիսահարթոթյունում առկա լարումների մասին . . . . . 66

ՇՐՆԱՐԱՐԱԿԱՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱ

- Է. Ե. Խաչիյան, Մ. Գ. Մելիքովյան—«Վերականգնող ուժ—տեղափոխություն» դինամիկ կախվածությունների ստացման մեթոդիկան . . . . . 72

ԱՌԱՋԿԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

- Վ. Պ. Մույրոբզյան, Ի. Ե. Տրոյանովսկի—Անհամասեռ առաձգամածուցիչի մարմինների սեփական տատանումները . . . . . 78

ՅՈՒՋԻԿԱ

- Գ. Ն. Ղաբաչյան—Խառնուրդային փոխանակային կապերով ֆերիմագնետիկ տեսության վերաբերյալ . . . . . 82

ԻՆՓԵՆԻՐԱՅԻՆ ՍԵՅՍՄՈՂՈՒԿԱ

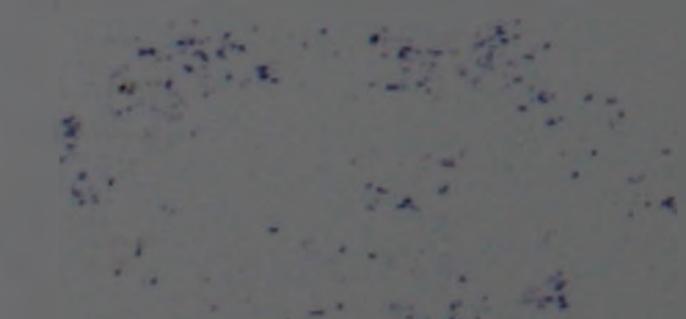
- Ա. Պ. Կիրիլով, Ս. Ս. Դաբրինյան, Ա. Վ. Մլինասյան—Խզվող բնոթագրերով առաձգապլաստիկ համակարգերի սեյսմոկայունությունը . . . . . 85

ՍԵՅՍՄՈՂՈՒԿԱ

- Ա. Մ. Ավետիսյան, Ի. Պ. Դոբրովոլսկի—Տեսական մոդելի վրա երկրաշարժի կոորդինատների որոշման էֆեկտիվության մասին . . . . . 91

ՕՐԳԱՆԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

- Ա. Թ. Բարայան, Գ. Հ. Թորոսյան, Ս. Լ. Պառավյան—Ալկիլբենզիլ եթերների սինթեզ . . . . . 94



## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

	Стр.
<i>Л. Г. Хачатрян</i> —Таблицы, обладающие свойством «окна»	51
<i>О. М. Хосровян</i> —Квазиравномерные подгруппы в полупростых группах Ли	57
<i>В. М. Караханян</i> —Дискретная изопериметрическая задача на многомерном торе	61

### МЕХАНИКА

<i>В. А. Арсенян</i> —О напряжениях в бесконечной плоскости и в весоной полуплоскости, ослабленных двумя прямоугольными отверстиями	66
---	----

### СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

<i>Э. Е. Хачиян, М. Г. Мелкумян</i> —Методика получения динамической зависимости «восстанавливающая сила—перемещение»	72
---	----

### ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

<i>В. П. Майборода, И. Е. Трояновский</i> —Собственные колебания неоднородных вязкоупругих тел	78
--	----

### ФИЗИКА

<i>Г. Н. Караджян</i> —К теории ферримагнетика с примесью обменных связей	82
---	----

### ИНЖЕНЕРНАЯ СЕЙСМОЛОГИЯ

<i>А. П. Кириллов, С. С. Дарбинян, А. В. Минасян</i> —Сейсмостойкость упруго-пластических систем с разными характеристиками	85
---	----

### СЕЙСМОЛОГИЯ

<i>А. М. Аветисян, И. П. Добровольский</i> —Об оценке эффективности методов определения координат гипоцентров землетрясений на теоретических моделях	91
--	----

### ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

<i>А. Т. Бабаян, Г. О. Торосян, С. Л. Паравян</i> —Синтез алкилбензиловых эфиров	94
--	----

## C O N T E N T S

## MATHEMATICS

	P
<i>L. H. Khachatryan</i> —Arrays with „window“ property . . . . .	51
<i>H. M. Khosrovian</i> —Quasieven subgroups in semi-simple Lie groups . . . . .	57
<i>V. M. Karakhanian</i> —The discrete isoperimetric problem on the multi-dimensional torus . . . . .	61

## MECHANICS

<i>V. A. Arsenian</i> —Stresses in an infinite plate and infinite half-plate weakened by two rectangular holes . . . . .	66
--	----

## STRUCTURAL MECHANICS

<i>E. E. Khachian, M. G. Melkumian</i> —Method of obtaining the dynamic relationship of „restore force displacement“ . . . . .	72
--	----

## THEORY OF ELASTICITY

<i>V. P. Mayboroda, I. E. Troyanovsky</i> —Proper oscillations of the nonhomogeneous viscoelastic bodies . . . . .	78
--	----

## PHYSICS

<i>G. N. Karadjian</i> —The theory of ferrimagnets with impurity exchange bonds . . . . .	82
---	----

## APPLIED SEISMOLOGY

<i>A. P. Kirillov, S. S. Darbinian, A. V. Minasian</i> —Seismostability of discontinuous elastic-plastic systems . . . . .	85
--	----

## SEISMOLOGY

<i>A. M. Avetisyan, I. P. Dobrovolsky</i> —On the estimation of effectiveness of the earthquake hypocentre coordinate determination methods on theoretical patterns . . . . .	91
---	----

## ORGANIC CHEMISTRY

<i>A. T. Babayan, G. H. Torosian, S. L. Paravlan</i> —The synthesis of alkylbenzylethers . . . . .	94
--	----

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 9.03.1982. Подписано к печати 16.3.1982. ВФ 05128.  
 Бумага № 1, 70×108<sup>1/16</sup>. Плоскопечать. Печ. лист. 3,0, Усл. печ. лист. 4,2  
 Учет.-изд. 3,36. Тираж 430. Заказ 220. Издат. 5632.  
 Адрес ред: 375019, Ереван, Барекамутян, 24-г. 1 эт., 2 к.

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван, Барекамутян 24 г.  
 Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин.

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

Л. Г. Хачатрян

Таблицы, обладающие свойством «окна»

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 14/IX 1981)

Работа посвящена построению таблиц, обладающих свойством «окна», которые являются обобщением последовательностей максимальной длины и циклов де Брейна на плоскости. Дается новый метод построения таких таблиц. С помощью предложенного метода, в частности, получен класс таблиц, являющийся улучшением результата работы (1). Для получения новых классов таблиц в работе рассматривается также проблема разбиения последовательностей максимальной длины и циклов де Брейна.

1. Пусть  $A = a_1 a_2 \dots a_{t^m-2}$  последовательность длины  $t^m - 1$  из элементов алфавита  $T = \{0, 1, \dots, t-1\}$ .  $A$  называется последовательностью максимальной длины (п. м. д.), если среди  $m$ -наборов  $(a_0, \dots, a_{m-1}), (a_1 \dots a_m), \dots, (a_{t^m-2} a_0 \dots a_{m-2})$  встречаются всевозможные ненулевые комбинации над алфавитом  $T$ . Аналогичную последовательность длины  $t^m$  с нулевым набором обозначим через (п. м. д.)  $0$ . (П. м. д.)  $0$  называется также полным циклом или последовательностью де Брейна. (П. м. д.) над конечными полями хорошо изучены. Они существуют над любым конечными полем  $GF(q)$ , относительно любого натурального числа  $m$  и строятся следующим образом. Рассмотрим рекуррентные соотношения или разностные уравнения над полем  $GF(q)$

$$\sum_{j=0}^m h_j a_{t+j} = 0 \tag{1}$$

или

$$a_{t+m} = - \sum_{j=0}^{m-1} h_j a_{t+j}, \tag{2}$$

где  $h_0 \neq 0, h_m = 1$ , каждое  $h_i \in GF(q)$  и  $\exists a_i \neq 0 (0 \leq i < m)$ . Тогда решение этих уравнений описывается следующей теоремой.

Теорема 1 (2). Пусть  $h(x) = \sum_{j=0}^m h_j x^j, h_0 \neq 0, h_m = 1$  и  $n$  — наименьшее натуральное число, для которого многочлен  $x^n - 1$  делится на  $h(x)$ . Тогда решение рекуррентных соотношений (1) периодически с периодом  $n$ . Если  $h(x)$  — примитивный полином степени  $m$ , то период последовательности равен  $q^m - 1$ .

Естественным обобщением (п. м. д.) и (п. м. д.) 0 является построение таблиц, обладающих свойством „окна“.

Определение 1<sup>(1)</sup>. Пусть  $D$  таблица размера  $a \times b$ , где  $a \cdot b = t^{mk} - 1$ , из элементов алфавита  $T = (0, 1, \dots, t-1)$ . Таблица  $D$  обладает свойством  $m \times k$  „окна“, если при перемещении прямоугольника  $m \times k$  по таблице  $D$  в клетках прямоугольника встречаются всевозможные ненулевые  $t^{mk} - 1$  комбинации над алфавитом  $T$ .

Определение 1\*. Таблица  $D$  размера  $a \times b$ , где  $a \cdot b = t^{mk}$ , обладает свойством  $m \times k$  „окна“ над алфавитом  $T$ , если при перемещении прямоугольника  $m \times k$  по таблице  $D$  в клетках прямоугольника встречаются всевозможные  $t^{mk}$  комбинации над алфавитом  $T$ .

Заметим, что в отличие от (п. м. д.) и (п. м. д.) 0 таблицы со свойством „окна“ с нулевым набором и без нулевого набора существенно различаются, хотя бы размерами.

2. Пусть  $A = a_0 a_1 \dots a_{q^k-2}$  (п. м. д.) из элементов поля  $GF(q)$ . Через  $A_i (i = 0, 1, \dots, q^k-2)$  обозначим последовательность, которая получается из  $A$  циклическим сдвигом на  $i$  позиций. Через  $A_y$  обозначим нулевой вектор длины  $q^k-1$ . Рассмотрим  $m$ -наборы из множества  $L = \{F(0, 1, \dots, q^k-2), y\}$ , где  $F(0, 1, \dots, q^k-2)$  кольцо целых чисел по модулю  $q^k-1$ , а „ $y$ “ элемент, для которого по определению  $y + \delta = y$  для всех  $\delta \in L$ .

Определение 2. Скажем, что набор  $(i_1, \dots, i_m)$  эквивалентен набору  $(j_1, \dots, j_m)$ , если существует  $\delta \in L$  такой, что

$$(i_1, \dots, i_m) = (j_1 + \delta, \dots, j_m + \delta).$$

Пусть  $M$  все  $m$ -наборы над множеством  $L$ , у которых есть хотя бы один элемент из кольца  $F$  и первый из них 0. Легко убедиться, что мощность  $M$

$$|M| = C_m^0 (q^k-1)^{m-1} + C_m^1 \cdot (q^k-1)^{m-2} + \dots + C_m^{m-1} \cdot 1 = \frac{q^{km}-1}{q^k-1}$$

и любая пара из  $M$  неэквивалентна.

Рассмотрим ленты  $B_i \left( i = 1, \dots, \frac{q^{km}-1}{q^k-1} \right)$  размеров  $q^k-1 \times m$  со столбцами  $(A_{i_1}, \dots, A_{i_m})$ , где  $(i_1, \dots, i_m)$  —  $i$ -ый набор множества  $M$ . (У ленты, в отличие от таблицы, циклически замкнута только одна сторона). Тогда можно убедиться, что, если прямоугольник  $k \times m$  пробегает все ленты  $B_i$ , то в клетках прямоугольника встречаются все  $q^{km}-1$  ненулевые комбинации над полем  $GF(q)$ . Поэтому, если возможно построить последовательность  $C = c_0 c_1 \dots c_{\frac{q^{km}-1}{q^k-1}-1}$  длины

$\frac{q^{km}-1}{q^k-1}$  над множеством  $L$  такую, что среди  $m$ -наборов  $(c_0 c_1 \dots c_{m-1}); \dots (c_1, \dots, c_m), \dots (c_{\frac{q^{km}-1}{q^k-1}-1}, c_0, \dots, c_{m-2})$  нет набора  $(y,$

$y, \dots, y)$  и любая пара наборов неэквивалентна, то таблица размера  $q^h - 1 \times \frac{q^{km} - 1}{q^k - 1}$ , столбцы которой состоят из  $A_i$ , где  $i$  пробегает последовательность  $C$ , обладает свойством  $k \times m$  „окна“. Назовем  $C$  порождающей последовательностью таблицы.

Используя некоторые свойства рекуррентных соотношений, построена порождающая последовательность  $C$  и тем самым доказана теорема.

**Теорема 2.** Для любых натуральных чисел  $k$  и  $m$  можно построить таблицу размера  $q^h - 1 \times \frac{q^{km} - 1}{q^k - 1}$  из элементов поля  $GF(q)$ , обладающих свойством  $k \times m$  „окна“.

Это является улучшением результата Мак-Вильямса и Слоэна, где требуется дополнительное условие  $\left(q^k - 1, \frac{q^{km} - 1}{q^k - 1}\right) = 1$ .

**Примеры.** а)  $q=2, k=m=2$ . Порождающая последовательность имеет вид  $(y\ 0020)$ . Таблица  $3 \times 5$  со свойством  $2 \times 2$  „окна“ в качестве первого столбца имеет нулевой набор, а остальные столбцы состоят из сдвигов  $(п. м. д.) = 011$ .

$$D_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

б)  $q=2, k=2, m=3$ . Порождающая последовательность равна:  $(yy00y201112110y1y1020)$

$$D_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Таблица  $D_2$  обладает свойством  $2 \times 3$  „окна“

3. Метод построений таблиц  $t^k \times t^{k(m-1)}$  со свойством  $k \times m$  „окна“ аналогичен методу, описанному в пункте 2. Для построения таблиц со свойством „окна“ с нулевым набором строятся порождающие последовательности,  $m$ -наборы которых неэквивалентны. Однако построения этих последовательностей существенно отличаются.

Сначала рассмотрим случай, когда  $t=q$  — степень простого числа. Для построения порождающей последовательности доказаны следующие леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $N = n_0 n_1 \dots n_{q^{m-1}-2}$  (п. м. д.) длины  $q^{m-1} - 1$ , которая задается решением рекуррентных соотношений (1) с помощью примитивного полинома  $h(x)$ , степени  $m-1$ , над полем  $GF(q)$  и  $m \geq 2$ . Тогда все  $m$ -наборы при  $q \geq 3$   $(n_0 n_1 \dots n_{m-1}), \dots, (n_{q^{m-1}-2}, n_0, \dots, n_{m-2})$  неэквивалентны над полем  $GF(q)$ . Для  $q=2$  это имеет место при  $m \geq 3$ .

**Лемма 2.** Пусть  $N = n_0 n_1 \dots n_{q^{m-1}-2}$  (п. м. д.), определен-

ная в лемме 1, и  $N_j$  — последовательность, полученная из  $N$  циклическим сдвигом на  $j$  позиции так, что первые  $(m-1)$  элементы  $N_j$  — единицы. Обозначим через  $\hat{N} = (\hat{n}_0 \hat{n}_1 \dots \hat{n}_{q^{k(m-1)}-1})$  последовательность длины  $q^{k(m-1)}$ , у которой первые  $q^{(k-1)(m-1)}$  элементы единицы, а остальная часть состоит из  $q^{(k-1)(m-1)}$  последовательностей  $N_j$ . Тогда для каждого  $i = 0, 1, \dots, q^{(k-1)(m-1)} - 1$  среди наборов вида

$$(\hat{n}_{i+jq^{(k-1)(m-1)}}, \hat{n}_{i+1+jq^{(k-1)(m-1)}}, \dots, \hat{n}_{i+m-1+jq^{(k-1)(m-1)}}), \quad j=0, \dots, q^{m-1} - 1$$

встречаются всевозможные неэквивалентные наборы.

С помощью этих лемм доказана следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть  $q = p^n$  — степень простого числа. Тогда для каждой  $k$  и  $m \neq 2$  можно построить последовательность длины  $q^{k(m-1)}$  из элементов  $(0, 1, \dots, q^k - 1)$ , которая содержит все неэквивалентные наборы над кольцом  $F(0, 1, \dots, q^k - 1)$ . Если  $p \geq 3$ , то такую последовательность можно построить и для  $m = 2$ .

Перейдем к построению таблиц над любым конечным алфавитом, обладающих свойством „окна“.

Пусть  $V_1$  и  $V_2$  таблицы размеров  $n'_1 \times n'_2$  и  $n''_1 \times n''_2$  над алфавитами  $(0, 1, \dots, n_1 - 1)$  и  $(0, 1, \dots, n_2 - 1)$  соответственно и  $t_1 + t_2 = t'_1 + t'_2 = km$ . Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 4.** Если таблицы  $V_1$  и  $V_2$  обладают свойством  $k \times t$  „окна“ и  $(n_1, n_2) = 1$ , то существует таблица  $V$  размера  $n'_1 \cdot n''_1 \times n'_2 \cdot n''_2$ , обладающая свойством  $k \times t$  „окна“ над алфавитом  $(0, 1, \dots, n_1 \cdot n_2 - 1)$ .

**Следствие.** Для любых натуральных чисел  $t$  и  $m$  существует последовательность максимальной длины  $(t^m - 1)$  или  $t^m$  над алфавитом из  $t$  элементов.

Из теорем 3 и 4 следует

**Теорема 5.** Для любых натуральных чисел  $k, t \geq 2, m \neq 2$  можно построить таблицу размера  $t^k \times t^{k(m-1)}$ , обладающую свойством  $k \times t$  „окна“. Если  $t$  — нечетное число, то такую таблицу можно построить и для  $m = 2$ .

**Пример.**  $t = 2, k = 2, m = 3$ . Порождающая последовательность имеет вид:  $S^* = 0003020320010023$

$$\hat{D} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Таблица  $D$  обладает свойством  $2 \times 3$  „окна“. В последовательности  $S^*$  все 3-наборы неэквивалентны над кольцом по модулю 4. Таблица  $\hat{D}$  состоит из (п. м. д.)  $A = 0011$  и ее сдвигов, которые соответствуют  $S^*$ .



«Լուսամուտի» հատկությամբ օժտված աղյուսակներ

Աշխատանքը նվիրված է «լուսամուտի» հատկությամբ օժտված աղյուսակների կառուցմանը, որոնք հանդիսանում են մաքսիմալ երկարության հաջորդականությունների և դե Բրեյնի ցիկլերի ընդհանրացումը հարթության վրա: Տրված է նոր մեթոդ այդպիսի աղյուսակների կառուցման համար: Նոր մեթոդի օգնությամբ, մասնավորապես, կառուցված է աղյուսակների դաս, որոնք<sup>(1)</sup> աշխատանքի արդյունքի ընդհանրացումն են կազմում: Աղյուսակների նոր դասեր ստանալու համար աշխատանքում դիտարկված է նաև մաքսիմալ երկարության հաջորդականությունների և դե Բրեյնի ցիկլերի տրոհման պրոբլեմը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> F. J. MacWilliams, N. J. A. Sloane, IEEE, vol. 64, № 12 (1976). <sup>2</sup> У. Питерсон, Э. Уэлдон, Коды, исправляющие ошибки, Мир, М., 1976.

УДК 519.46

МАТЕМАТИКА

О. М. Хосровян

### Квазиравномерные подгруппы в полупростых группах Ли

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 26/X 1981)

Пусть  $G$  — связная полупростая вещественная линейная группа Ли. Связную замкнутую подгруппу  $U \subset G$  будем называть квазиравномерной, если однородное пространство  $G/U$  имеет два конца в смысле Фрейденталя. Это равносильно тому, что  $G/U \cong M \times \mathbb{R}$ , где  $M$  — компактное многообразие <sup>(1)</sup>. В работе дается классификация всех квазиравномерных подгрупп с точностью до сопряженности. Заметим, что случай, когда  $U$  — комплексная подгруппа Ли в комплексной полупростой группе Ли  $G$ , был изучен ранее <sup>(1,2)</sup>. На протяжении всей работы мы будем свободно переходить от языка групп Ли к языку алгебр Ли и обратно, используя следующие соглашения: группы Ли будем обозначать заглавными, а их алгебры Ли — соответствующими малыми латинскими буквами.

1. Мы будем использовать известное описание параболических подалгебр в полупростой алгебре  $g$  над  $\mathbb{R}$  <sup>(3)</sup>. Пусть  $g = k + p$  — картановское разложение, где  $k$  — максимальная компактная подалгебра, и пусть  $h$  — картановская подалгебра в  $g$ , содержащая максимальную абелеву подалгебру  $h_- \subset p$ ,  $h = h_+ + h_-$ , где  $h_+ \subset k$ . Обозначим через  $\Sigma$  систему корней алгебры  $g^{\mathbb{C}}$  относительно  $h^{\mathbb{C}}$  и через  $\Delta$  систему корней симметрического пространства  $G/K$  <sup>(4)</sup>. Ограничение  $\rho: x \rightarrow x|_{h_-}$  отображает  $\Sigma$  на  $\Delta$ . Пусть  $\Sigma_0 = \Sigma \cap \ker \rho$ ,  $\Sigma_1 = \Sigma \setminus \Sigma_0$ . Обозначим через  $g_\alpha \subset g^{\mathbb{C}} (\alpha \in \Sigma)$  и  $g^\lambda \subset g (\lambda \in \Delta)$  соответствующие корневые подпространства. Введем в  $\Sigma$  упорядочение, инвариантно относительно естественной инволюции  $\sigma^*$ , порожденной комплексным сопряжением. перенесем его на  $\Delta$  и обозначим через  $\Pi \subset \Sigma$  и  $\bar{\Pi} \subset \Delta$  соответствующие системы простых корней. Тогда  $\Pi = \Pi_0 \cup \Pi_1$ , где  $\Pi_0 \subset \Sigma_0$ ,  $\Pi_1 \subset \Sigma_1$ ,  $\rho(\Pi_1) = \bar{\Pi}$  и слой отображения  $\rho: \Pi_1 \rightarrow \bar{\Pi}$  совпадает с орбитами инволюции  $\bar{\sigma}: \Pi_1 \rightarrow \Pi_1$ , индуцированной  $\sigma^*$ .

Известно, что любая параболическая подалгебра в  $g$  сопряжена стандартной параболической подалгебре  $u_\Gamma$ , где  $\Gamma \subseteq \Pi_1$  — произвольное  $\bar{\sigma}$ -инвариантное подмножество и

$$u_\Gamma = s_\Gamma + c_\Gamma + n_\Gamma;$$

при этом  $n_\Gamma$  — нильрадикал в  $u_\Gamma$ ,  $r_\Gamma = s_\Gamma + c_\Gamma$  — редуцированная подалгебра Леви,  $s_\Gamma$  полупроста и  $c_\Gamma$  — центр в  $r_\Gamma$ . Имеем  $c_\Gamma = c_\Gamma^+ + c_\Gamma^-$ , где

$c_r^+ \subset h_{\pm}$ ,  $c_r^c = \text{Ann}(\Pi_0 \cup \Gamma)$ . Далее,  $s_r$  — полупростая подалгебра в  $g$ , отвечающая подсистеме  $\Pi_0 \cup \Gamma \subset \Pi$ . Пусть  $\Pi_0^*$  — объединение всех связанных компонент схемы  $\Pi_0 \cup \Gamma$ , состоящих из корней системы  $\Pi_0$ , и пусть  $\Pi_0' = \Pi_0 \setminus \Pi_0^*$ . Тогда  $s_r = s_r^n + s_r^k$ , где  $s_r^n$  — идеал, отвечающий подсистеме  $\Pi_0' \cup \Gamma$  и не содержащий нетривиальных компактных идеалов, а  $s_r^k$  — компактный идеал, отвечающий подсистеме  $\Pi_0^*$ . Положим  $r_r^k = s_r^k + c_r^+$ . Наконец,  $n_r = \sum_{\lambda \in \Delta^*} g^\lambda$ , где  $\Delta^*$  — система положительных корней из  $\Delta$ , не выражающихся через  $\bar{\Gamma} = \rho(\Gamma)$ .

2. Опишем теперь четыре класса подалгебр  $u$  в полупростой алгебре Ли  $g$  над  $R$ . Пусть выбрана некоторая  $\sigma$ -инвариантная подсистема  $\Gamma \subseteq \Pi_1$  (или, что равносильно, некоторая подсистема  $\bar{\Gamma} \subseteq \bar{\Pi}$ ).

I.  $u = s_r^n + q + n_r$ , где  $q$  — подалгебра в  $r_r^k + c_r^-$ , причем  $\dim p_{c_r^-} r q = \dim c_r^- - 1$ .

II. Предположим, что  $s_r^n$  содержит простой идеал типа  $so(1, n)$ , где  $n \geq 2$ . Пусть  $s_r^n = so(1, n) \oplus s'$  и  $so(1, n-1) \subseteq so(1, n)$  — стандартно вложенная подалгебра. Тогда положим

$$u = (so(1, n-1) \oplus s') + q + n_r$$

где  $q$  — подалгебра в  $r_r^k + c_r^-$  и  $p_{c_r^-} r q = c_r^-$ , если  $n \geq 3$  и

$$u = s' + q + n_r,$$

где  $q \subseteq so(1, 1) + c_r^- + r_r^k$  и  $p_{so(1,1)+c_r^-} q = so(1, 1) + c_r^-$ , если  $n = 2$ .

III. Пусть  $\lambda \in \bar{\Pi} / \bar{\Gamma}$  — корень, ортогональный к  $\bar{\Gamma}$  (в частности,  $\Gamma \neq \Pi_1$ ). Тогда положим

$$u = s_r^n + m + n + g^{2\lambda} + \sum_{\mu \in \Delta^* \setminus \{\lambda, 2\lambda\}} g^\mu,$$

где  $m$  — подалгебра в  $r_r^k + c_r^-$ ,  $p_{c_r^-} r m = c_r^-$  и  $n$  — такое подпространство коразмерности 1 в  $g^\lambda$ , что  $[m, n] \subseteq n$ .

IV. Выбрав  $\lambda \in \bar{\Pi}$ , как в предыдущем пункте, положим

$$u = s_r^n + m + g^{2\lambda} + \sum_{\mu \in \Delta^* \setminus \{\lambda, 2\lambda\}} g^\mu,$$

причем  $m \subseteq r_r^k + (c_r^- \cap \ker \lambda) + g^\lambda$  — подпространство, определяющее равномерную подалгебру в алгебре Ли  $b = (r_r^k + (c_r^- \cap \ker \lambda) + g^\lambda + g^{2\lambda}) / g^{2\lambda}$ .

Очевидно,  $b$  — полупрямое произведение компактной и абелевой алгебр Ли. Равномерные подалгебры в таких алгебрах описаны в (5).

**Теорема 1.** Если  $U \subset G$  — связанная замкнутая подгруппа в линейной полупростой группе Ли  $G$ , отвечающая одной из подалгебр типов I–IV, то  $U$  квазиравномерна.

Доказательство основано на построении некоторых естественных расслоений многообразия  $G/U$ . В случаях I и III получаем главные расслоения с компактной однородной базой и слоем  $R$ , в случае II — расслоение с компактной однородной базой и слоем  $SO(1, n) / SO(1, n-1) = R \times S^{n-1}$ , при  $n \geq 3$ , или слоем  $T^n \times R$  при  $n = 2$ , в случае IV — расслоение с компактной однородной базой и слоем  $T^n \times R$ .

3. Сформулируем наш основной результат.

**Теорема 2.** Если  $U$  — квазиравномерная подгруппа полупростой линейной группы Ли  $G$ , то подалгебра  $u \subset \mathfrak{g}$  сопряжена одной из подалгебр типов I–IV из п°2.

Доказательство теоремы 2 разбивается на три этапа.

1)  $u$  — редуцируемая подалгебра в  $\mathfrak{g}$ . Используя расслоение Карпелевича—Мостова и известную классификацию симметрических пространств, содержащих вполне геодезические подмногообразия ко-размерности 1<sup>(6)</sup>, приходим к подалгебрам типа II (в предположении  $\Gamma = \Pi_1$ ).

2)  $u$  — не редуцируемая алгебраическая подалгебра в  $\mathfrak{g}$ . Пусть  $u = \mathfrak{r} + \mathfrak{n}$  — разложение Леви алгебры Ли  $u$ , где  $\mathfrak{n}$  — нильрадикал. Как известно, мы можем считать, что  $u \subset u_\Gamma$  для некоторой подсистемы  $\Gamma \subset \Pi_1$ , причем  $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{s}_\Gamma + \mathfrak{c}_\Gamma$ ,  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}_\Gamma$ . Используя естественные расслоения, получаем, что либо  $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_\Gamma$ , либо  $\dim \mathfrak{n}_\Gamma - \dim \mathfrak{n} = 1$ . В первом случае приходим к типам I и II, во втором — к типу III (с алгебраическими подалгебрами  $\mathfrak{q}$  и  $\mathfrak{m}$ ).

3)  $u$  — не редуцируемая и не алгебраическая. Тогда ее алгебраическое замыкание  $\hat{u}$  — не редуцируемая алгебраическая подалгебра, причем она соответствует либо квазиравномерной, либо равномерной подгруппе в  $G$ . В первом случае  $u$  — одна из подалгебр типов I, II, IV, а во втором случае — подалгебра типа I.

**Следствие.** Пусть в предположениях теоремы 2  $\mathfrak{g}$  — разложимая вещественная алгебра Ли. Тогда  $u$  сопряжена одной из подалгебр следующих трех типов ( $\Gamma \subseteq \Pi = \bar{\Pi}$  — некоторая подсистема):

I.  $u = \mathfrak{s}_\Gamma + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}_\Gamma$ , где  $\mathfrak{a}$  — подпространство ко-размерности 1 в  $\mathfrak{c}_\Gamma$ ;

II.  $\Gamma$  содержит изолированный корень, т. е.  $\mathfrak{s}_\Gamma = \mathfrak{so}(1, 2) \oplus \mathfrak{s}'$  и  $u = (\mathfrak{so}(1, 1) \oplus \mathfrak{s}') + \mathfrak{c}_\Gamma + \mathfrak{n}_\Gamma$ ;

III.  $u = \mathfrak{s}_\Gamma + \mathfrak{c}_\Gamma + \sum_{\alpha \in \Pi/\Gamma} \mathfrak{g}^\alpha$ , где  $\alpha \in \Pi/\Gamma$  — корень, ортогональный к  $\Gamma$ .

В другом частном случае, когда  $\mathfrak{g}$  — комплексная полупростая алгебра Ли, теорема 2 дает новое доказательство основного результата работы (2).

4. Теорему 2 можно применить для описания транзитивных действий некомпактных полупростых групп Ли на многообразиях вида  $M \times \mathbb{R}$ , где  $M$  — однородное пространство компактной группы Ли. Пусть  $K$  — максимальная компактная подгруппа полупростой линейной группы Ли  $G$ ,  $L$  — связная замкнутая подгруппа в  $K$ . В работе (3) подгруппа  $L$  называется  $G$ -подгруппой в  $K$ , если естественное действие группы  $K$  на  $K/L$  продолжается до действия группы  $G$ , т. е. имеем  $K/L = G/U$ . В (3) явно перечислены подалгебры  $l \subset \mathfrak{k}$ , соответствующие  $G$ -подгруппам  $L \subset K$  (они называются  $\mathfrak{g}$ -подалгебры). Аналогичный результат в нашем случае формулируется следующим образом.

**Теорема 3.** Пусть  $L_1$  — связная компактная подгруппа в  $K$ . Для того чтобы на многообразии  $K/L_1 \times \mathbb{R}$  существовало транзитивное действие группы  $G$ , индуцирующее структуру однородного  $K$ -расслоения с базой  $K/L_1$  и слоем  $\mathbb{R}$ , необходимо и достаточно, чтобы подалгебра  $l_1 \subset \mathfrak{k}$  содержалась в некоторой  $\mathfrak{g}$ -подалгебре

$l \subseteq k$ , причем либо  $l_1 = l$ , либо  $l = so(n) \oplus \bar{l}$  и  $l_1 = so(n-1) \oplus \bar{l}$ , где  $n \geq 2$  и  $so(n)$  максимальная компактная подалгебра в идеале типа  $so(1, n)$  редуцированной части подалгебры  $u \subset g$ , отвечающей  $l$ .

Автор искренне благодарен А. Л. Онищику за внимание к работе.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Հ. Մ. ԿՈՍՏՐՈՎՅԱՆ

Քվադրիհավասարաչափ ենթախմբերը կիսապարզ լիի խմբերում

Հոդվածում նկարագրված են  $G$  իրական կիսապարզ գծային լիի խմբի քվադրիհավասարաչափ  $U$  ենթախմբերը, այսինքն  $G$  լիի խմբի բոլոր կապակցված փակ  $U$  ենթախմբերը, որոնց դեպքում  $G/U$  համասեռ տարածությունները հոմեոմորֆ են  $M \times \mathbb{R}$ -ին, որտեղ  $M$ -ը կոմպակտ բազմաձևություն է:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Д. Н. Ахиезер, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 41, 308—324 (1977). <sup>2</sup> О. М. Хосровян, в сб.: Геометрические методы в задачах анализа и алгебры, Ярославль, 1978. <sup>3</sup> А. Л. Онищик, Мат. сб., 74 (116), 398—416 (1967). <sup>4</sup> S. Helgason, Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Academic press, N. Y, San Francisco, London, 1978. <sup>5</sup> А. Л. Онищик, Мат. сб., 71 (113), 483—494 (1966). <sup>6</sup> А. Л. Онищик, в сб.: Геометрические методы в задачах анализа и алгебры, Ярославль 1980.

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

В. М. Караханян

Дискретная изопериметрическая задача на многомерном торе

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 8/XI 1981)

В данной работе рассматривается изопериметрическая задача (1) на  $n$ -мерном дискретном торе.

Для произвольных целых чисел  $1 < l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_n \leq +\infty$  многозначный  $n$ -мерный тор определяется как множество

$$T_{l_1, l_2, \dots, l_n}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / -[(l_i - 1)/2] \leq x_i \leq [l_i/2], x_i - \text{целые}, 1 \leq i \leq n\},$$

в котором вершины  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  считаются соседними, если все их координаты одинаковы, кроме одной, для которой  $|x_i - y_i| \equiv 1 \pmod{l_i}$ .

Пусть  $A \subseteq T_{l_1, l_2, \dots, l_n}^n$  некоторое подмножество; скажем, что вершина  $x \in A$  внутренняя, если все ее соседние вершины принадлежат подмножеству  $A$ . В противном случае вершину  $x \in A$  назовем граничной вершиной подмножества  $A$ . Обозначим через  $B(A)$  и  $\Gamma(A)$  соответственно множество всех внутренних и граничных вершин подмножества  $A$ .

Дискретная изопериметрическая задача в многозначном  $n$ -мерном торе  $T_{l_1, l_2, \dots, l_n}^n$  по произвольному заданному целому числу  $a$ ,  $0 \leq a \leq |T_{l_1, l_2, \dots, l_n}^n|$ , требует найти такое подмножество  $A \subseteq T_{l_1, l_2, \dots, l_n}^n$ ,  $|A| = a$ , что

$$|B(A)| = \max_{\substack{A' \subseteq T_{l_1, l_2, \dots, l_n}^n \\ |A'| = a}} |B(A')|.$$

Решение этой задачи при  $l_1 = l_2 = \dots = l_n = 2$  дано в (1-5), а при  $l_1 = l_2 = \dots = l_n = +\infty$  — в (6). В данной работе приводится решение изопериметрической задачи, когда все  $l_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , произвольные четные числа или  $l_i = +\infty$ . Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что  $l_i = 2k_i$  для любого  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , т. е.

$$T_{l_1, l_2, \dots, l_n}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / -k_i + 1 \leq x_i \leq k_i, x_i - \text{целые}, 1 \leq i \leq n\},$$

где  $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n \leq +\infty$  и тогда условно будем писать

$$T_{l_1, l_2, \dots, l_n}^n = T_{k_1, k_2, \dots, k_n}^n.$$

Определим для векторов  $x$  и  $y \in T_{k_1, k_2, \dots, k_n}^n$  их сумму и разность  $z = x \pm y = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \dots, x_n \pm y_n) = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ , где  $-k_i + 1 \leq z_i \leq k_i$  и  $z_i \equiv (x_i \pm y_i) \pmod{2k_i}$ , когда  $k_i$  конечное число и  $x_i \pm y_i$

обычные операции сложения и вычитания для целых чисел, когда  $k_i = +\infty$ .

Нормой вершины  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  назовем число  $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$ , а расстоянием между вершинами  $x$  и  $y$  — число  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ .

Обозначим  $|x| = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$ ,  $\delta(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , где  $\alpha_i = 1$  при  $x_{n-i+1} > 0$  и  $\alpha_i = 0$  при  $x_{n-i+1} \leq 0$ , и определим линейный порядок между вершинами  $T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n$  следующим образом:

$x \prec y$  ( $x$  предшествует  $y$ ) тогда и только тогда, когда

- 1)  $\|x\| < \|y\|$ , или
- 2)  $\|x\| = \|y\|$  и  $\delta(y)$  лексикографически предшествует  $\delta(x)$ , или же
- 3)  $\|x\| = \|y\|$ ,  $\delta(x) = \delta(y)$  и  $|y|$  лексикографически предшествует  $|x|$ .

Множество первых  $a$  вершин линейного порядка назовем стандартным размещением мощности  $a$ .

**Лемма 1.** Если  $A$  стандартное размещение, то внутренние вершины множества  $A$  предшествуют его граничным вершинам.

Рассмотрим произвольное стандартное размещение  $A$  и его раз-

биение  $A = \bigcup_{j=-k_i+1}^{k_i} A_i(j)$  по  $i$ -ому направлению,  $1 \leq i \leq n$ , где  $A_i(j) = \{x \in A / x_i = j\}$ . Обозначим через  $B(A_i(j))$  подмножество внутренних вершин множества  $A_i(j)$  в  $(n-1)$ -мерном торе  $T_i^n(j) = \{x \in T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n / x_i = j\}$ , через  $e_i$  — единичный вектор  $i$ -ого направления и через  $A \pm j e_i$  — множество  $\{x \pm j e_i / x \in A\}$ . Тогда

- 1°. каждое множество  $A_i(j)$  есть стандартное размещение в  $T_i^n(j)$ ;
- 2°. для любого  $j$ ,  $1 \leq j < k_n$ ,  $A_n(-j) + e_n \subseteq B(A_n(-j+1))$ ;
- 3°. для любого  $j$ ,  $1 < j \leq k_n$ ,  $A_n(j) - e_n \subseteq B(A_n(j-1))$ ;
- 4°. для любого  $j$ ,  $0 \leq j < k_n$ ,  $A_n(-j) \supseteq A_n(j+1) - (2j+1)e_n \supseteq B(A_n(-j))$  или  $A_n(-j) = T_n^n(-j)$  и  $A_n(j+1) = T_n^n(j+1) \setminus \{(k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, j+1)\}$ ;
- 5°. для любого  $j$ ,  $0 < j < k_n$ ,  $A_n(j) \supseteq A_n(-j) + 2j e_n \supseteq B(A_n(j))$  или  $A_n(j) = T_n^n(j)$  и  $A_n(-j) = T_n^n(-j) \setminus \{(k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, -j)\}$ .

Из указанных свойств стандартного размещения следует

**Лемма 2.** Если  $A$  стандартное размещение и  $|A| < |T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n| - 1$ , то

$$|B(A)| = |A| - |A_n(0)| - |A_n(1)| + |B(A_n(-k_n+1))| + |B(A_n(k_n))|.$$

Для двоичного набора  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  подмножество

$$\alpha(T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n) = \{x \in T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n / \delta(x) = \alpha\}$$

будем называть  $\alpha$ -частью тора  $T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n$ .

Для  $x, y \in \alpha(T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n)$  определим их сумму как  $x \oplus y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ , где  $x_i + y_i \equiv z_i \pmod{k_i}$ ,  $1 \leq z_i \leq k_i$  при  $\alpha_i = 1$  и  $-k_i + 1 \leq z_i \leq 0$  при  $\alpha_i = 0$  для любого  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Шаром (соответственно оболочкой) в  $\alpha$ -части с центром в точке  $x \in \alpha(T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n)$  и радиусом  $k$  назовем подмножество

$$S_\alpha^n(x, k) = \left\{ y = x \oplus r_1 e_1 \oplus r_2 e_2 \oplus \dots \oplus r_n e_n / \sum_{i=1}^n |r_i| \leq k \right\}$$

(соответственно подмножество  $O_\alpha^n(x, k) = S_\alpha^n(x, k) / S_\alpha^n(x, k-1)$ ), где  $r_i$  — целые числа,  $r_i \geq 0$  при  $\alpha_i = 1$  и  $r_i \leq 0$  при  $\alpha_i = 0$ .

Множество  $O^n(x, k) = \{y \in T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n / \rho(x, y) = k\}$  назовем просто оболочкой с центром  $x$  и радиусом  $k$ .

Ясно, что определенный выше линейный порядок между вершинами  $T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n$  в каждой  $\alpha$ -части совпадает с диагональной последовательностью, определенной в (7), начальный отрезок которой снова назовем стандартным размещением. Поэтому, если определим подмножество внутренних вершин множества  $A \subseteq \alpha(T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n)$  как  $\{x \in A / S_\alpha^n(x, 1) \subseteq A\} = B_\alpha(A)$ , то, используя результаты (7), может быть доказана

**Лемма 3.** Если  $A, C, D$  и  $E$  такие стандартные размещения в  $\alpha$ -частях, что  $|C| \geq |A| \geq |D| \geq |E|$ ,  $|A| + |D| = |C| + |E|$  и  $C$  или  $E$  шар в  $\alpha$ -части, то

$$|B_\alpha(C)| + |B_\alpha(E)| \geq |B_\alpha(A)| + |B_\alpha(D)|.$$

Доказанные свойства стандартного размещения вершин  $n$ -мерного тора  $T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n$  позволяют доказать следующую теорему.

**Теорема 1.** Если  $A \subseteq T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n$  стандартное размещение, а  $C \subseteq T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n$  произвольное множество мощности  $|A|$ , то

$$|B(A)| \geq |B(C)|.$$

Теорема доказывается индукцией по  $n$ . Причем общий шаг индукции выводится для  $n \geq 3$  и отдельно доказывается теорема для двухмерного случая. При  $n=1$  утверждение теоремы тривиально.

Обозначим  $|O^n(x, k)| = F_n^k(k_1, k_2, \dots, k_n)$  и  $|O_\alpha^n(x, k)| = f_n^k(k_1, k_2, \dots, k_n)$ , в частности  $F_n^k(k_1, k_2, \dots, k_n) = f_n^k(k_1, k_2, \dots, k_n) = 0$ , если  $k$  не удовлетворяет условию  $0 \leq k \leq \sum_{i=1}^n (k_i - 1) = K$ . Ясно, что

$$F_n^k(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{\alpha \in E^n} f_n^{k - \|\alpha\|}(k_1, k_2, \dots, k_n),$$

где  $E^n$  —  $n$ -мерный единичный куб. Числа  $f_n^k(k_1, k_2, \dots, k_n)$ ,  $k=0, 1, \dots, K$ , определяются из следующего равенства (см. (8)):

$$\begin{aligned} (1+t+t^2+\dots+t^{k_1-1})(1+t+t^2+\dots+t^{k_2-1})\dots(1+t+t^2+\dots+t^{k_n-1}) = \\ = \sum_{k=0}^K f_n^k(k_1, k_2, \dots, k_n) t^k. \end{aligned}$$

Пусть множество  $A_1$  — стандартное размещение мощности  $a_1$  в  $\alpha$ -части,  $0 \leq a_1 \leq |\alpha(T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n)| = \prod_{i=1}^n k_i$ , а  $A_2$  — стандартное размещение в

$T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n$  мощности  $a_2$ ,  $0 \leq a_2 \leq |T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n| = 2^n \cdot \prod_{i=1}^n k_i$ , тогда числа  $a_1$  и  $a_2$

можно представить в виде:

$$a_1 = \sum_{i=0}^k f_n^i(k_1, k_2, \dots, k_n) + b_1, \text{ где } 0 \leq b_1 < f_n^{k+1}(k_1, k_2, \dots, k_n); \quad (1)$$

$$a_2 = \sum_{i=0}^r F_n^i(k_1, k_2, \dots, k_n) + b_2, \text{ где } 0 \leq b_2 < F_n^{r+1}(k_1, k_2, \dots, k_n). \quad (2)$$

Если  $0 \leq b_1 < f_n^{k+1}(k_1, k_2, \dots, k_n)$ , то число  $b_1$  можно единственным образом представить в виде

$$b_1 = \sum_{r=0}^{\mu} \sum_{i=0}^{l_r} f_n^{k - \sum_{i=1}^{n_r} k_i + n_r + r + j} (k_{n_r+1}, k_{n_r+2}, \dots, k),$$

где  $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{\mu} < n$  и  $0 \leq l_i < k_{n_i} - 1$  при  $1 \leq i \leq \mu$ . Согласно этому представлению число  $p_k(b_1)$  — всех внутренних вершин стандартного размещения  $A_1$ , принадлежащих оболочке  $O_2^n(a, k)$ , выражается в следующем виде

$$p_k(b_1) = \sum_{r=1}^{\mu} \sum_{j=0}^{l_r} f_n^{k - \sum_{i=1}^{n_r} k_i + n_r + r - 1 + j} (k_{n_r+1}, k_{n_r+2}, \dots, k_n). \quad (3)$$

Если  $0 \leq b_2 < F_n^{r+1}(k_1, k_2, \dots, k_n)$ , то число  $b_2$  можно единственным образом представить в виде

$$b_2 = \sum_{i=1}^{\tau} \sum_{a \in E^{n-m_i}} f_n^{r-1+|a|-m_i+i} (k_1, k_2, \dots, k_n) + b_0,$$

где  $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_{\tau} \leq n$  и  $0 \leq b_0 < f_n^{k-n+\tau} (k_1, k_2, \dots, k_n)$ . Согласно этому представлению и (3), число  $P_r(b_2)$  — всех внутренних вершин стандартного размещения  $A_2$ , принадлежащих оболочке  $O^n(0, r)$ , выражается в следующем виде:

$$P_r(b_2) = \sum_{i=1}^{\tau} \sum_{a \in E^{n-m_i}} f_n^{r-1+|a|-m_i+i-1} (k_1, k_2, \dots, k_n) + p_{k-n+\tau-1}(b_0). \quad (4)$$

**Теорема 2.** Если  $A_1$  — стандартное размещение в  $\alpha$ -части мощности (1), а  $A_2$  — стандартное размещение в  $T_{k_1 k_2 \dots k_n}^n$  мощности (2), то

$$|B_{\alpha}(A_1)| = \sum_{i=0}^{k-1} f_n^i(k_1, k_2, \dots, k_n) + p_k(b_1);$$

$$|B(A_2)| = \sum_{i=0}^{r-1} F_n^i(k_1, k_2, \dots, k_n) + P_r(b_2).$$

В заключение приношу искреннюю благодарность Л. А. Асланяну за постоянное внимание и полезные советы.

Вычислительный центр Академии наук  
Армянской ССР и Ереванского государственного университета

Դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդիրը բազմաչափ տոռում

Աշխատանքում դիտարկվում է դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդիրը բազմաբարձեր  $n$ -չափանի տոռում: Ապացուցվում է, որ երբ տորի բոլոր ցիկլերը ունեն դույզ երկարություններ, ապա հնարավոր է տալ տորի գագաթների այնպիսի գծային կարգավորվածություն, որ վերջինիս կամայական հզորությամբ սկզբնահատվածներն իրենցից ներկայացնեն դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդրի լուծումներ: Ստացվում է նաև լուծումների պարամետրերի կապը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Л. А. Асланян, В. М. Караханян, Б. Е. Торосян, ДАН СССР, т. 241, № 1 (1978). <sup>2</sup> Л. А. Асланян, Проблемы кибернетики, вып. 36, М., 1979. <sup>3</sup> L. H. Harper, J. Combin. Theory, 1, p. 385—393 (1966). <sup>4</sup> F. B. Kruskal, Mathematical Optimization Techniques, p. 251—278 (1963). <sup>5</sup> G. Katona, Studia Scient. Math. Hungarica, 10, p. 131—140 (1975). <sup>6</sup> D. L. Wang, P. Wang, SIAM J. Appl. Math., vol. 32, № 4, p. 860—870 (1977). <sup>7</sup> D. L. Wang, P. Wang, SIAM Appl. Math., vol. 33, № 1, p. 55—59 (1977). <sup>8</sup> Дж. Риордан, Введение в комбинаторный анализ, Изд. иностр. лит, М., 1963.



УДК 539.311

МЕХАНИКА

В. А. Арсенян

О напряжениях в бесконечной плоскости и в весоной полуплоскости, ослабленных двумя прямоугольными отверстиями

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 15/IX 1981)

1. Рассмотрим упругую бесконечную плоскость с двумя симметрично расположенными прямоугольными отверстиями, по краям которых приложены равномерно-распределенные нормальные усилия. Расстояние центра тяжести каждого прямоугольника  $L_k$  ( $k=1, 2$ ) с основанием  $b$  и высотой  $h$  (рис. 1) от начала координатных осей  $OX$  и  $OY$  обозначим через  $R$  ( $R > b/2$ ).

Для решения поставленной задачи в упругой бесконечной области  $S$  будем искать две аналитические функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ , которые имеют известные представления <sup>(1)</sup>. При этом граничные условия поставленной задачи почти всюду на  $L$  приводятся к следующему интегральному уравнению:

$$\omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \omega(t) d \ln \frac{t-t_0}{t-\bar{t}_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega(t)} d \frac{t-t_0}{t-\bar{t}_0} + \sum_{k=1}^2 \frac{b_k}{t_0 - z_k} = pt_0 + C_k; \quad z_1 = R; \quad z_2 = -R; \quad (1.1)$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi i M_k} \int_{L_k} \{\omega(t) d\bar{t} - \overline{\omega(t)} dt\}; \quad C_k = -\frac{1}{N_k} \int_{L_k} \omega(t) ds. \quad (1.2)$$

Здесь  $\omega(t)$  — подлежащая определению комплексная непрерывная функция. В окрестности угловых точек  $a_{kj}$  ( $k=1, 2; j=1, 2, 3, 4$ )  $\omega(t)$  имеет следующую асимптотику <sup>(2)</sup>:

$$\omega(t) = A_{kj} \left( \frac{t-a_{kj}}{T_{kj}-a_{kj}} \right)^\lambda + \sum_{r=0}^{\infty} B_{kj}^{(r)} \left( \frac{t-a_{kj}}{T_{kj}-a_{kj}} \right)^r, \quad (1.3)$$

где  $T_{kj}$  — фиксированные точки на контуре  $L_k$ , удовлетворяющие условиям  $\arg(T_{kj}-a_{kj}) = \arg(t-a_{kj})$ ;  $\lambda = 0,5445$  — постоянная, являющаяся корнем характеристического уравнения  $\sin^2 \lambda \alpha = \lambda^2 \sin^2 \alpha$  с наименьшей положительной действительной частью для угла  $\alpha = 3/2 \pi$ .

В (1.2)  $M_k$  и  $N_k$  — действительные постоянные, выбираемые по удобству <sup>(3)</sup> в процессе решения (1.1).

Учитывая циклическую симметрию задачи, уравнение (1.1) приводим к виду <sup>(4)</sup>:

$$\omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \omega(t) dK_1(t, t_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \overline{\omega(t)} dK_2(t, t_0) + \sum_{k=1}^2 \frac{b_k}{t_0 - z_k} = pt_0 + C_1; \quad (1.4)$$

$$K_1(t, t_0) = \ln \frac{t-t_0}{t-t_0} - \ln \frac{t+t_0}{t+t_0}; \quad K_2(t, t_0) = \frac{t-t_0}{t-t_0} - \frac{t+t_0}{t+t_0}, \quad (1.5)$$

где плотность  $\omega(t)$  определяется только в точках верхней половины контура  $L_1$ . Значения ее в точках нижней половины контура  $L_1$  определяются из условия зеркальной симметрии:  $\omega(t'_0) = \overline{\omega(t_0)}$ , для  $t'_0 = \overline{t_0} \in L_1$ .

Интегралы, входящие в (1.4), понимаются в смысле Стильеса. Как показано в (2), к интегральному уравнению (1.4) можно применять теорию Фредгольма. Будем решать это уравнение методом последовательных приближений.

Для численного решения (1.4) на сторонах  $l_k$  ( $k=1, \dots, 4$ ) прямоугольника  $L_1$  (рис. 1) равномерным делением выбираются точки, соответственно числом  $n_1, n_2, n_3$  и  $n_4 = n_2$ . Их будем называть основными опорными точками (ООТ). Эти точки не совпадают с угловыми. Для решения (1.4) построим последовательные приближения, заменив в (1.4) интегралы Стильеса интегральными суммами Стильеса. При этом будем иметь:

$$\begin{aligned} \omega_0(t_{0j}) = pt_{0j}; \quad \omega_N(t_{0l}) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m \omega_{N-1}(t_{0i}) \{K_1(t_{i+1}, t_{0l}) - K_1(t_i, t_{0l})\} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m \overline{\omega_{N-1}(t_{0i})} \{K_2(t_{i+1}, t_{0l}) - K_2(t_i, t_{0l})\} - \frac{b_1}{t_{0l}-R} - \frac{b_1}{t_{0l}+R} + C_1; \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$j = 1, 2, \dots, n; \quad n = \sum_{k=1}^4 n_k; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad m = \sum_{k=1}^4 m_k; \quad m_k > n_k.$$

С целью повышения точности вычислений интегральные суммы, входящие в (1.6), вычисляются на более мелкой сетке дополнительных опорных точек (ДОТ) общим числом  $m$ , включающей в себя точки ООТ (ср. (5)). Причем на отрезках длиной  $\Delta_k$  ( $\Delta_k = l_k/n_k$ ,  $k=1, \dots, 4$ ), примыкающих к угловым точкам, вводится локальная сетка с переменным шагом (6). Вычисление всех итераций (1.6) производится только в точках ООТ, а в точках ДОТ они определяются интерполированием. Для этого на средних участках сторон  $l_k$  строятся кубические сплайны, а на крайних ее участках используются представления (1.3).

Результаты вычислений на ЭВМ, проведенные для шести различных расстояний  $d = 2R - b$  между границами двух одинаковых отверстий с размерами  $b = 1, 2$  и  $h = 0,8$ , при  $\nu = 2$  в (1.3), приведены в табл. 1.

Значения тангенциальных нормальных напряжений  $\varepsilon(t_i)/p$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ) приведены в следующих характерных точках контура:  $t_1 = d/2$ ;  $t_2 = (d + i(h - h/n_1))/2$ ;  $t_3 = (d + b/n_2 + ih)/2$ ;  $t_4 = R + ih/2$ ;  $t_5 = (2R + b - b/n_2 + ih)/2$ ;  $t_6 = t_2 + b$ ;  $t_7 = t_1 + b$ . В табл. 1 приведены также максимальные погрешности  $\delta$  в процентах от напряжений  $p$ , полученные при проверке граничного условия задачи, при числе итераций  $N$ . Для случая  $\nu = 0,2$  на рис. 1, 2 показаны линии равных напряжений  $\sigma_{\max}/p$ ,  $\sigma_{\min}/p$  и  $\tau_{\max}/p$ , определяемых формулами:

$d$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$M_1$	3.0	2.75	2.5	2.25	2.0	1.75
$N_1$	22.5	20.625	18.75	16.875	15.0	13.125
$n_1$	22	26	30	32	36	40
$n_2$	30	30	30	30	30	30
$n_3$	42	42	42	40	40	40
$\delta\%$	2.9	3.6	3.6	2.9	3.7	4.0
$N$	43	53	45	50	39	35
$\sigma_y(t_1)/p$	-2.28	-1.46	-0.95	-0.63	-0.44	-0.31
$\sigma_y(t_2)/p$	-2.79	-2.72	-2.71	-2.63	-2.70	-2.71
$\sigma_x(t_3)/p$	-0.18	-0.46	-0.74	-0.92	-1.09	-1.21
$\sigma_x(t_4)/p$	0.5	0.5	0.49	0.48	0.47	0.45
$\sigma_x(t_5)/p$	-1.65	-1.58	-1.54	-1.50	-1.49	-1.48
$\sigma_y(t_6)/p$	-3.13	-2.92	-2.82	-2.71	-2.65	-2.60
$\sigma_y(t_7)/p$	-0.26	-0.18	-0.14	-0.11	-0.09	-0.07

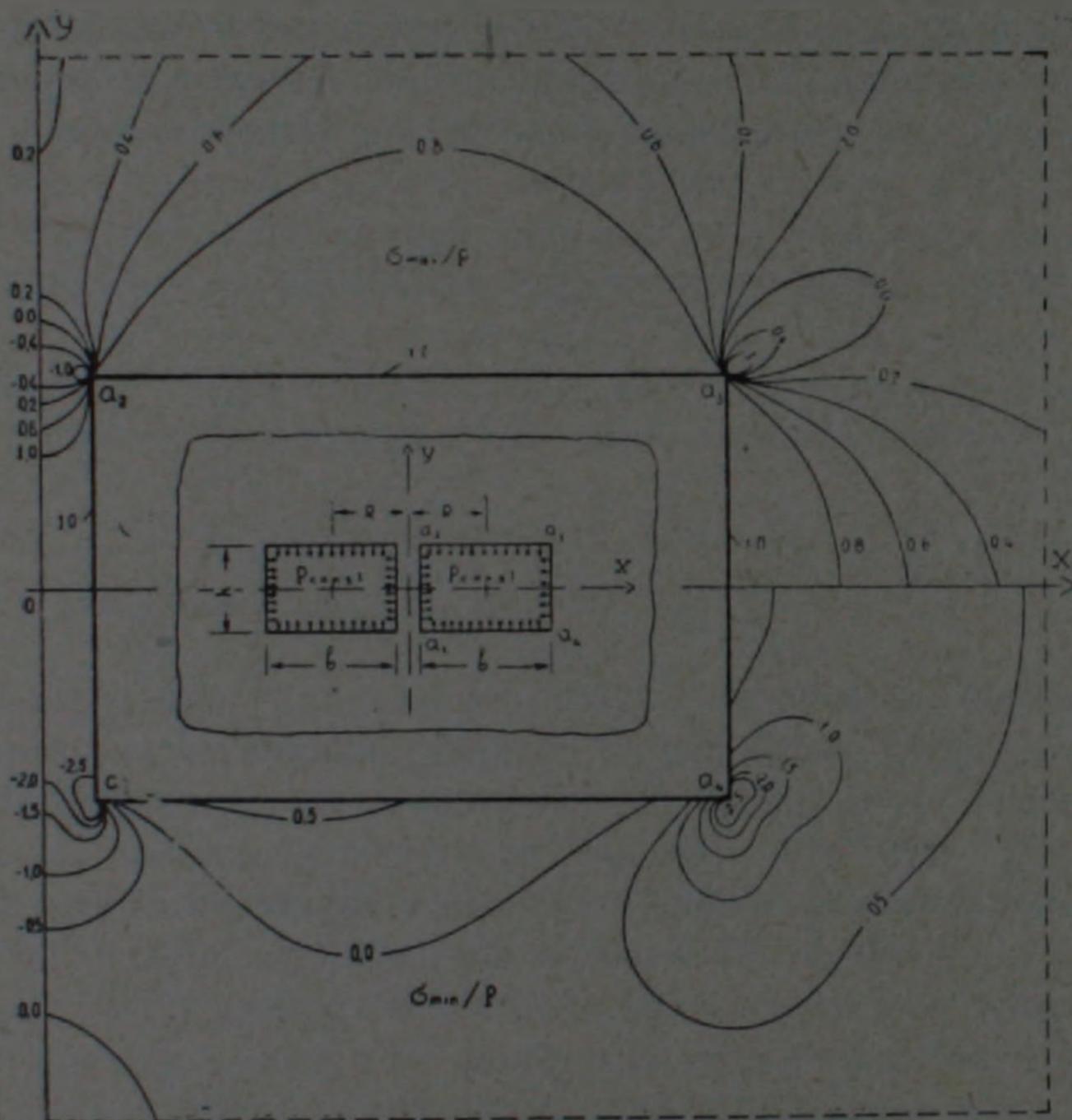


Рис. 1

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}; \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (1.7)$$

Приведем результаты численного эксперимента, позволяющего определить влияние значения  $\lambda$ , показателя главного члена асимптотики (1.3), на точность выполнения граничного условия задачи. Для этого показателю  $\lambda$  задавались несколько значений и при каждом из них, вычислив итерации (1.6), проверялись граничные напряжения. Вычисления показали, что наивысшая точность получается, когда  $\lambda = 0,5445$ , т.е. является корнем трансцендентного уравнения  $\sin^2 \lambda a =$

$\approx \lambda^2 \sin^2 \alpha$  при  $\alpha = 3/2\pi$ , причем это подтверждалось при различных расстояниях  $d$  между границами отверстий. В табл. 2 приведены максимальные погрешности  $\delta(d)$  (при  $d=0,2; 0,4; 0,6$ ) выполнения граничного условия в процентах от  $\rho$ , при нескольких значениях  $\lambda$ .

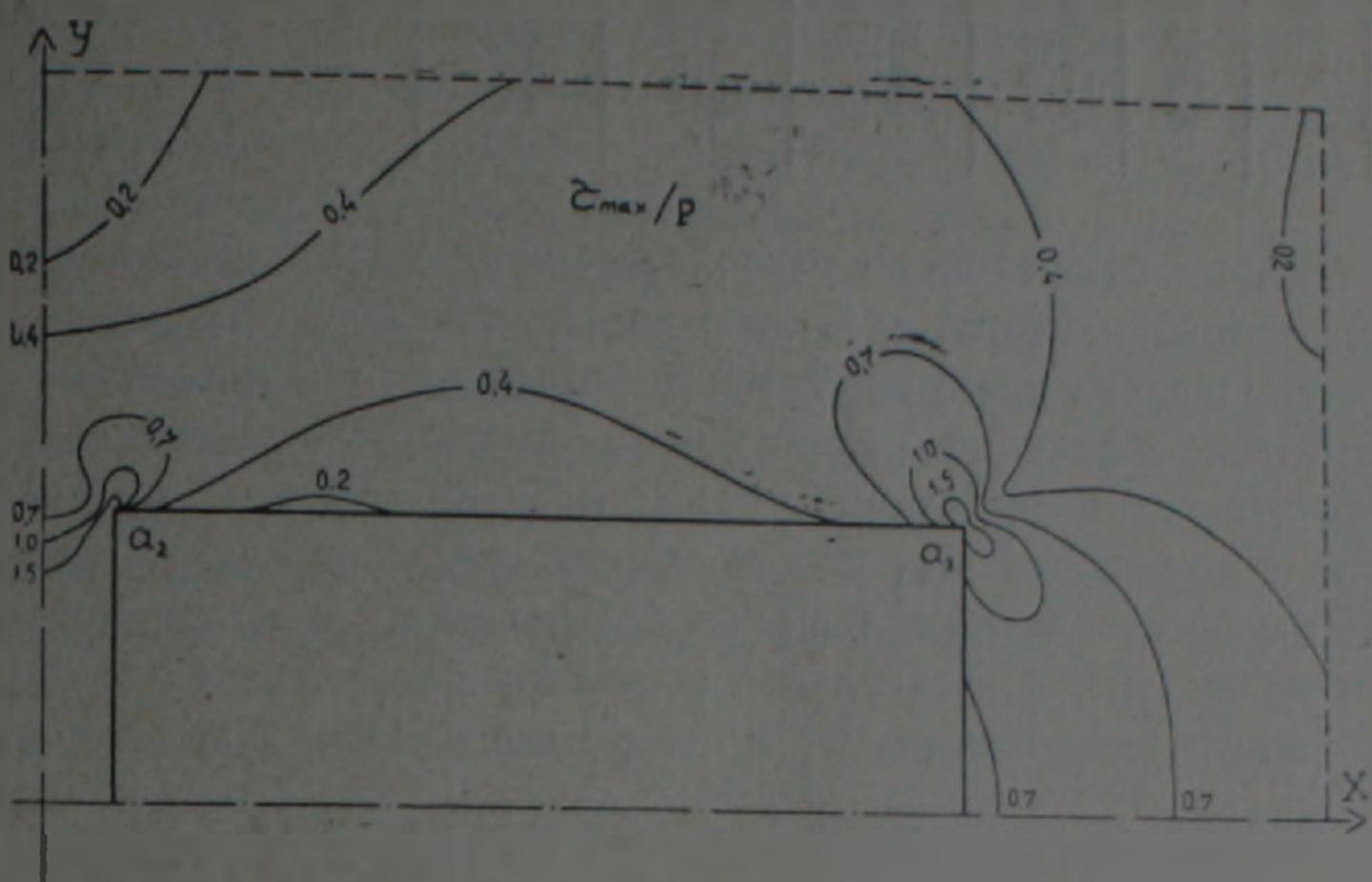


Рис. 2

Таблица 2

$\lambda$	0,4	0,5	0,5445	0,6	0,7	0,8
$\delta(0,2) \%$	7,4	6,0	2,9	3,7	8,0	11,8
$\delta(0,4) \%$	5,9	4,1	1,5	2,0	5,9	9,6
$\delta(0,6) \%$	6,0	4,1	1,0	1,9	5,6	8,9

Отметим, что точность численного решения (1.4) зависит как от использования асимптотики (1.3), так и от выбора сетки разбиения всего контура. Выбор сетки нужно контролировать проверкой точности выполнения граничного условия задачи. Анализ решений этой задачи показывает, что в окрестности угловых точек требуется ввести локальную дискретизацию контура, согласно асимптотике решения в окрестности этих углов. Поведение плотности и ее производных на отдельных сторонах прямоугольника зависит как от внешней нагрузки, так и от отношения размеров этих сторон и расстояния между отверстиями. Вследствие этого поведение плотности и ее производной на разных сторонах прямоугольника различно. Это приводит к необходимости введения различной дискретизации контура.

В табл. 3 приведены значения максимальных погрешностей  $\delta(l_i)$  выполнения граничного условия в процентах от  $\rho$ , вычисленные в тех же характерных точках  $l_i$  контура, рассмотренных в табл. 1, при разных соотношениях числа точек ООТ на сторонах прямоугольника.

Приведенные в табл. 3 результаты соответствуют случаю  $d=0,2$ . Как видно из этой таблицы, точность решения зависит от отношений  $n_1/n_2$  и  $n_2/n_3$ . При  $n_1/n_2=2/3$  и  $n_2/n_3=3/4$  получается наименьшая погрешность при общем числе точек, не превосходящем 130.

2. Рассмотрим теперь задачу о равновесии весомой полуплос-

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$\bar{\varepsilon}(t_1)\%$	$\bar{\varepsilon}(t_2)\%$	$\bar{\varepsilon}(t_3)\%$	$\bar{\varepsilon}(t_4)\%$	$\bar{\varepsilon}(t_5)\%$	$\bar{\varepsilon}(t_6)\%$	$\bar{\varepsilon}(t_7)\%$
20	30	20	2,0	2,6	2,8	1,3	2,6	11,5	5,2
30	35	30	3,4	15,9	2,0	1,3	2,1	8,3	1,6
40	20	30	11,0	19,7	5,8	4,7	2,1	2,4	5,0
20	30	40	2,1	2,7	2,5	1,2	0,6	1,7	0,9

кости с двумя симметрично расположенными прямоугольными отверстиями, центры которых удалены на расстояние  $f$  от границы  $L_0$ . В данном случае нас преимущественно интересует напряженное состояние среды в окрестности контуров  $L_k$ , достаточно удаленных от  $L_0$ . Так как отверстия достаточно удалены от  $L_0$ , то без заметной погрешности можно считать, что в точках среды, примыкающих к  $L_0$ , нормальные составляющие напряжений равны  $\sigma_x^\infty$  и  $\sigma_y^\infty$  (напряжениям на бесконечности), а касательная составляющая равна нулю (<sup>1</sup>).

Искомые напряжения  $\sigma_x^{(1)}$ ,  $\sigma_y^{(1)}$  и  $\tau_{xy}^{(1)}$  представим в виде суммы (<sup>2</sup>):

$$\sigma_x^{(1)} = \sigma_x^0 + \sigma_x; \quad \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^0 + \sigma_y; \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}, \quad (2.1)$$

где  $\sigma_x^0$ ,  $\sigma_y^0$  и  $\tau_{xy}^0$  — напряжения в сплошной весомой среде, удовлетворяющие указанным условиям на бесконечности и определяемые формулами:

$$\sigma_x^0 = n\rho g(y-f) + \sigma_x^\infty; \quad \sigma_y^0 = \rho g(y-f) + \sigma_y^\infty; \quad \tau_{xy}^0 = 0. \quad (2.2)$$

В (2.2)  $n$  — постоянная, зависящая от упругих свойств среды,  $\rho$  — плотность среды,  $g$  — ускорение силы тяжести. Напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  в (2.1) обусловлены наличием отверстий.

Следуя (<sup>1</sup>), напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  можем определить с помощью упругих потенциалов  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ , аналитических в бесконечной области  $S$  и исчезающих на бесконечности, заменив полубесконечную область, занятую упругой средой, на бесконечную плоскость. При этом граничное условие задачи записывается только на контурах отверстий и имеет вид (<sup>2</sup>):

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = (k_1 + k_2)t/2 - (k_1 - k_2)\overline{t}/2; \quad (2.3)$$

$$k_1 = n\rho g f - \sigma_x^\infty; \quad k_2 = \rho g f - \sigma_y^\infty. \quad (2.4)$$

Рассмотрим случай, когда  $n=1$  и  $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \sigma^\infty$ . Тогда в правой части (2.3)  $f(t) = (\rho g f - \sigma^\infty)t = p_1 t$ , что по существу совпадает с правой частью  $f(t) = pt$  уравнения (1.1) предыдущей задачи. Исходя из этого, используем результаты предыдущей задачи и искомые напряжения определим формулами:

$$\sigma_x^{(1)} = (\sigma_x/p - 1)p_1; \quad \sigma_y^{(1)} = (\sigma_y/p - 1)p_1; \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}p_1/p, \quad (2.5)$$

где  $\sigma_x/p$ ,  $\sigma_y/p$  и  $\tau_{xy}/p$  — решения в окрестности контуров  $L_k$ , полученные для случая равномерно-распределенного нагружения по контурам отверстий.

Երկու ուղղանկյունաձև անցքերով թուլացված անվերջ հարթությունում և կշիռ ունեցող կիսահարթությունում առկա լարումների մասին

Թվային եղանակով լուծվում է Շերման-Լաուրիշելայի ինտեգրալ հավասարումը երկու ուղղանկյունաձև անցքերով թուլացված անվերջ տիրույթի համար, երբ անցքերի եզրագծերի վրա կիրառված են հավասարաչափ բաշխված նորմալ լարումներ: Հնդ որում դիտարկվում են անցքերի միջև տարբեր հեռավորությունների մի քանի դեպքեր:

Աշխատանքում ցույց է տրվում, թե ինչպես ինտեգրալ հավասարման լուծման ասիմպտոտիկայի հաշվառումը թվային լուծման մեջ բերում է այդ հավասարման էֆեկտիվ լուծմանը անկյուններ ունեցող տիրույթի համար:

Դիտարկվում է նաև կշիռ ունեցող կիսահարթության խնդիրը, երբ այն թուլացված է նրա եզրագծից բավականաչափ հեռու գտնվող երկու ուղղանկյունաձև անցքերով: Որոշ պայմանների դեպքում այս խնդիրը բերվում է նախորդ դեպքին:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> Д. И. Шерман, ДАН СССР, т. 28, № 1 (1940). <sup>2</sup> С. С. Заргарян, V всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике, Аннотации докладов, Наука, Алма-Ата, 1981. <sup>3</sup> В. А. Арсенян, С. С. Заргарян, В. Р. Мартirosян, Изв. АН СССР, МТТ, № 1, 1982. <sup>4</sup> В. М. Буйвол, Прикл. механика, т. 5, № 3 (1959). <sup>5</sup> С. Ф. Ступак, в кн.: Механика твердого деформируемого тела и родственные проблемы анализа, МИХМ, М., 1978. <sup>6</sup> В. А. Арсенян, Мужвузовский сб. «Механика», изд. Ереванск. гос. ун-та, т. 1, 1981. <sup>7</sup> Д. И. Шерман, Изв. АН СССР, ПММ, т. 15, вып. 3, 1951:

УДК 624.041. 2

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Э. Е. Хачиян, М. Г. Мелкумян

**Методика получения динамической зависимости  
 «восстанавливающая сила—перемещение»**

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 21/X 1981)

Одним из актуальных вопросов в теории сейсмостойкости является задача определения динамической восстанавливающей силы в зависимости от горизонтальных смещений конструкций. При расчете зданий на сейсмическое воздействие характеристику восстанавливающей силы обычно принимают или как линейную функцию от деформации, или основываясь на данных статических испытаний отдельных конструктивных элементов—балок, колонн, стен, рам и др. Однако известно, что закономерности динамического нагружения, каким является сейсмическое воздействие, существенно отличаются от статического, особенно для строительных конструкций. Кроме того, характеристику восстанавливающих сил необходимо иметь в отдельности для каждого этажа здания с учетом влияния всех несущих и ненесущих элементов конструкций, податливости узлов сопряжения, переменного вертикального обжатия, чтобы более точно построить расчетную схему и ближе подойти к действительному поведению сооружения.

Сложность определения динамической восстанавливающей силы при реальном землетрясении обусловлена необходимостью регистрации одновременно по всей высоте здания величин, характеризующих положение конструкций и действующих на них инерционных сил в любой момент времени на протяжении всего колебательного процесса.

В настоящей статье сделана, по-видимому, первая попытка экспериментального получения динамической зависимости «восстанавливающая сила—перемещение» при динамических испытаниях зданий с использованием вибрационных машин инерционного действия.

Рассмотрим многоэтажное здание, расчетную схему которого, как обычно принято в расчетах на сейсмическое воздействие, представим в виде вертикального бруса с дискретными массами, сосредоточенными в уровнях междуэтажных перекрытий. Как показывают многочисленные данные экспериментальных исследований, проведенных у нас в стране и за рубежом, в зданиях при колебаниях перекрытия перемещаются параллельно друг другу только в горизонтальных плоскостях. В этом случае восстанавливающая сила для любого этажа будет обусловлена разностью перемещений этого и смежного нижнего этажа, т. е. динамическим перекосом яруса. Поэтому для получения динамической зависимости «восстанавливающая сила—перемещение» целе-

сообразно исследовать непосредственно изменение во времени деформированного состояния конструкции при колебаниях, возбуждаемых вибрационной машиной инерционного действия, установленной на перекрытии верхнего этажа изучаемой системы. Дифференциальные уравнения движения, полученные в (1) для принятой расчетной схемы, представим в следующем виде:

$$Q_k(t) + R_k(y_k - y_{k-1}) + C_k(\dot{y}_k - \dot{y}_{k-1}) = P(t), \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где  $Q_k(t) = \sum_{i=k}^n m_i \ddot{y}_i$  — поперечная инерционная сила на уровне  $K$ -го этажа;  $m_k$ ,  $y_k$ ,  $\dot{y}_k$  — соответственно масса, перемещение и ускорение  $K$ -го этажа;  $R_k$ ,  $C_k$  — соответственно неизвестные восстанавливающая сила и сила внутреннего трения  $K$ -го этажа;  $P(t)$  — возмущающая сила вибратора.

Наиболее полное описание характеристики восстанавливающей силы возможно при развитии в изучаемой конструкции неупругих деформаций с дальнейшим доведением ее до разрушения. При вибрационных испытаниях этого можно добиться, вводя конструкцию в резонанс, что приводит к образованию значительных инерционных нагрузок с резким увеличением перемещений и ускорений (2). Весь процесс деформирования вплоть до разрушения конструкции реализуется путем поэтапных резонансных испытаний с увеличением на каждом этапе веса внецентренных грузов на валах вибрационной машины.

Опыт натурных испытаний зданий резонансным методом при действии мощных вибрационных машин показывает, что величины возбуждаемых ими внешних сил  $P(t)$  не превышают 5% от возникаемых в зданиях величин поперечных инерционных сил  $Q(t)$  даже на том уровне (в данном случае верха здания), где закреплена машина, не говоря уже об остальных этажах, где по сравнению с поперечными силами их величины ничтожно малы\*. Принимая это во внимание, можно считать, что поперечная инерционная сила на уровне данного этажа при резонансе практически уравнивается восстанавливающей силой и силой внутреннего трения. Ввиду сложности разделения последних (а в некоторых случаях их разделение, по-видимому, не является необходимым), сумму этих сил назовем общей динамической восстанавливающей силой и обозначим через  $R_k^0(t)$ . Следовательно, для ее экспериментального определения на данном этаже нужно в любой момент времени определить величину инерционной поперечной силы  $Q_k(t)$

$$R_k^0(t) = -Q_k(t). \quad (2)$$

Таким образом, для экспериментального получения динамической зависимости «восстанавливающая сила—перемещение» при динамических испытаниях с помощью вибрационной машины необходимо осуществлять одновременную запись ускорений и перемещений на уровне всех перекрытий. По полученным результатам для данного момента времени, зная массу каждого этажа, определяются действующие по высоте здания инерционные силы и соответствующие перемещения. Затем вычисляются поперечные силы и динамические перекосы на каждом этаже. Если на осциллограммах выделить отрезок времени,

\* При необходимости силу  $P(t)$  можно учесть исходя из уравнения (1).

соответствующий одному полному колебанию, и разделить его с определенным шагом на равные промежутки времени, то, выполняя указанные вычисления для каждого момента времени, можно построить гистерезисную кривую, характеризующую динамическую зависимость восстанавливающей силы данного этажа от его перекоса при данном уровне динамического нагружения. Семейство таких кривых, полученных при испытаниях вплоть до разрушения конструкции, позволит описать полную картину динамического деформирования по высоте здания.

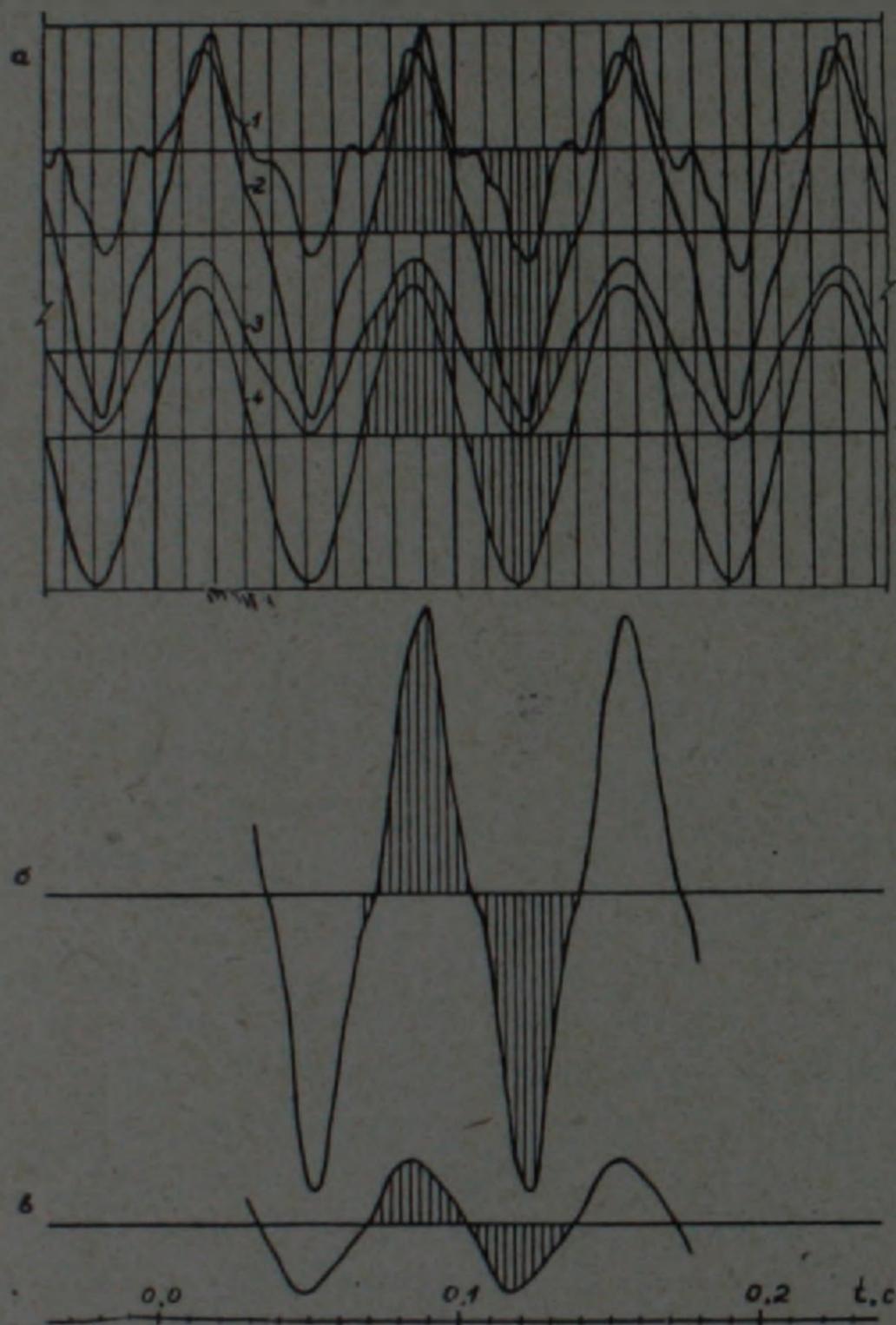


Рис. 1. К методике определения динамической восстанавливающей силы: а—участок осциллограммы, полученной при динамических испытаниях модели; б—поперечная сила на уровне первого этажа, построенная по записям 1, 2; в—динамический перекос второго этажа, построенный по записям 3, 4; 1, 2—запись ускорений на уровне перекрытий соответственно первого и второго этажей; 3, 4—запись перемещений на уровне перекрытий соответственно первого и второго этажей

Предлагаемая методика была апробирована при испытании двухэтажной пространственной железобетонной модели здания со связевым каркасом, выполненной в масштабе 1/5 с соблюдением принципов простого подобия (3). На рис. 1 приведен участок осциллограммы с за-

тысячи ускорений и перемещений первого и второго этажей модели. Отрезок времени, соответствующий одному полному колебанию, разделен на 22 равные части с шагом 0,0033 сек. Определяя по этой записи на каждом шаге величины инерционных сил и перемещений и далее—поперечных сил и перекосов, были построены графики работы первого и второго этажей при данном уровне динамического нагружения. Выполняя аналогичные операции на каждом этапе нагружения до разрушения модели, получены графики, иллюстрирующие динамические зависимости «восстанавливающая сила—перемещение» для первого и второго этажей, которые приведены соответственно на рис. 2 и 3.

Таким образом, предлагаемая методика дает возможность интегрально, с учетом сил внутреннего трения, конструкционного трения в узлах и стыках, влияния как несущих, так и ненесущих элементов

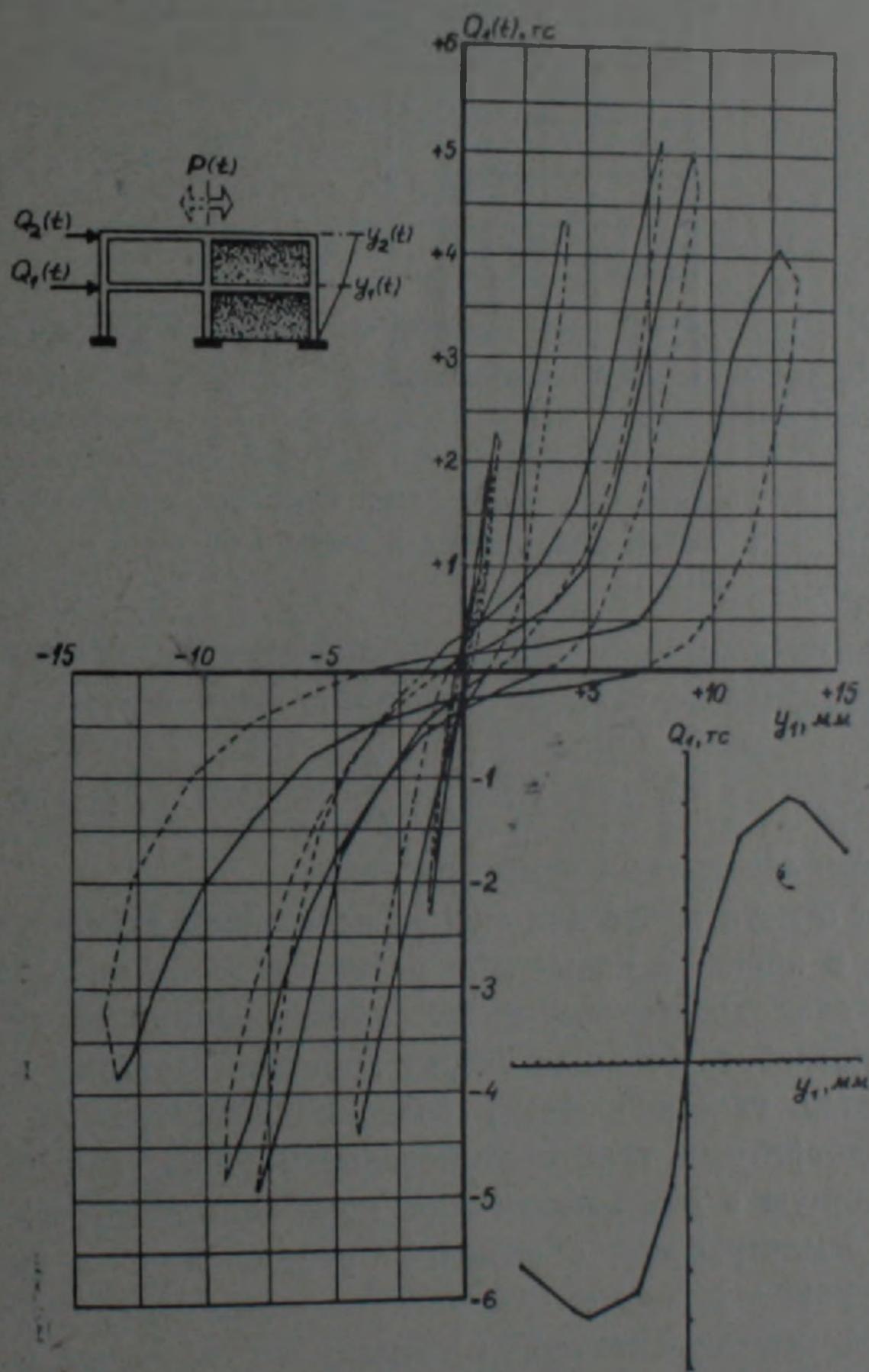


Рис. 2. Динамическая зависимость «восстанавливающая сила—перемещение» для первого этажа

конструкций в целом, определять характеристику динамической восстанавливающей силы. Отметим, что по этой методике можно выявить картину динамического деформирования по высоте различных типов

зданий непосредственно во время землетрясений, используя станции инженерно-сейсмометрической службы. Выдаваемая ими информация о величинах перемещений и ускорений грунта и всех этажей здания и их изменении во времени на протяжении действия землетрясения по-

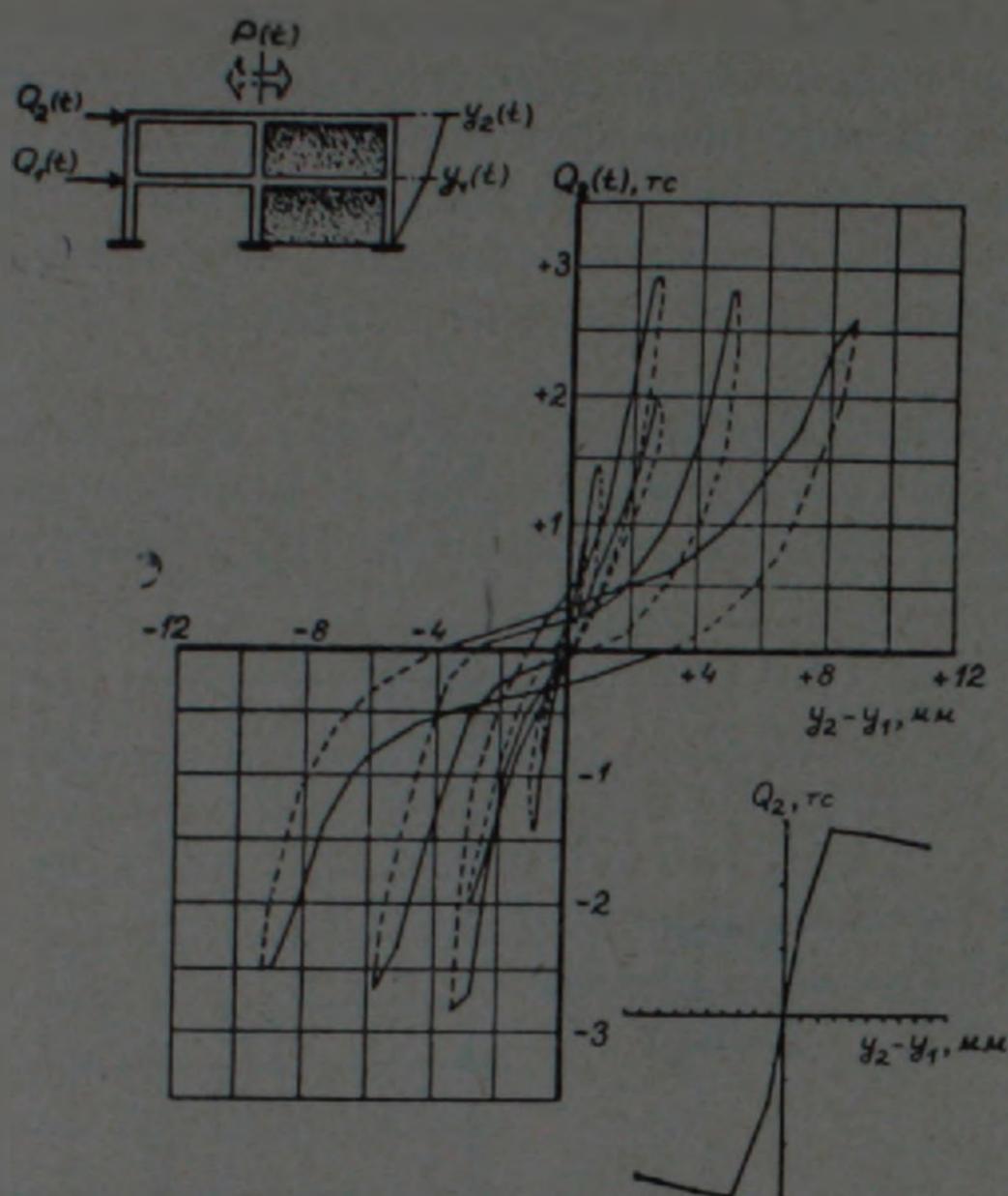


Рис. 3. Динамическая зависимость «восстанавливающая сила—перемещение» для второго этажа

зволит по вышеописанной методике определять зависимости  $R_k^0(y_k - y_{k-1})$ , исходя из следующего уравнения равновесия:

$$R_k^0(t) = -Q_k(t) - \sum_{i=k}^n m_i \ddot{y}_0(t), \quad (3)$$

где  $\ddot{y}_0(t)$ —акселерограмма землетрясения.

Следует отметить, что для зданий небольшой этажности обработка полученных в процессе испытаний результатов не представляет больших затруднений. Однако для многоэтажных зданий обработка результатов уже потребует больших затрат времени. Поэтому в дальнейшем представляется целесообразным создание электронных устройств в виде малогабаритных транспортабельных блоков, способных обрабатывать вводимую в них информацию непосредственно во время испытаний или землетрясения с выдачей результатов в виде таблиц и готовых графиков, а также создание аппаратуры, регистрирующей динамические перекосы этажей\* и суммарные ускорения в процессе колебания здания.

Научно-исследовательский институт  
строительства и архитектуры  
Госстроя Армянской ССР

\* Идея создания аппаратуры для регистрации динамического перекоса этажа была высказана А. Г. Назаровым.

«Վերականգնող ուժ—տեղափոխություն» դինամիկ կախվածության ստացման մեթոդիկան

Հոդվածում շարադրված է շենքերի և կառուցվածքների դինամիկ փորձարկումների արդյունքներով «վերականգնող ուժ—տեղափոխություն» դինամիկ կախվածության ստացման մեթոդիկան:

Ներկայումս օգտագործվող կախվածությունները, որպես կանոն, ստացված են շենքերի առանձին կոնստրուկտիվ էլեմենտների և մասերի ստատիկ փորձարկումներով: Բայց ստատիկ և դինամիկ բեռնավորումների որակական տարբերությունների հետևանքով այդ կախվածությունները չեն արտահայտում կոնստրուկցիաների իրական վարքը սեյսմիկ ազդեցությունների դեպքում:

Առաջարկվող մեթոդիկան թույլ կտա ստանալ վերականգնող ուժի բնութագիրը հետազոտվող շենքի յուրաքանչյուր հարկի համար, ինչպես դինամիկ փորձարկումների, այնպես էլ երկրաշարժերի ժամանակ: Այս դեպքում գումարային ձևով հաշվի է առնվում կոնստրուկցիաների կրող և ոչ կրող էլեմենտների և ներքին շփման ուժերի ազդեցությունը սիստեմի ամբողջ աշխատանքի վրա:

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

<sup>1</sup> Э. Е. Хачиян, Сейсмические воздействия на высокие здания. Айастан, Ереван, 1973. <sup>2</sup> Г. А. Шапиро и др., Вибрационные испытания зданий, Стройиздат, М., 1972. <sup>3</sup> А. Г. Назаров, О механическом подобии твердых деформируемых тел (к теории моделирования), Изд. АН АрмССР, Ереван, 1965.

УДК 539.379

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. П. Майборода, И. Е. Трояновский

Собственные колебания неоднородных  
 вязкоупругих тел

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 11/V 1981)

В <sup>(1)</sup> статические и динамические задачи для многослойных, в частности, вязкоупругих конструкций ставятся и решаются в рамках теории многослойных оболочек.

В настоящей работе к постановке задачи о собственных колебаниях неоднородных, в том числе и слоистых, вязкоупругих тел привлекаются трехмерные уравнения линейной теории вязкоупругости.

1. Рассматривается составное тело, занимающее объем  $V = \sum_{n=1}^N V_n$ , ограниченный поверхностью  $\Sigma = \Sigma_a + \Sigma_p$ . Каждый из  $N$  объемов  $V_n$  заполнен вязкоупругой средой, параметры которой зависят от номера  $n$ . На части поверхности заданы нулевые перемещения, на остальной части  $\Sigma_p$  — нулевые напряжения, массовые силы отсутствуют. Подлежат определению частоты и показатели демпфирования собственных колебаний тела.

Физические свойства  $n$ -го тела описываются соотношениями <sup>(2)</sup>

$$\sigma_{ij} = \bar{\lambda}_n \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\bar{\mu}_n \varepsilon_{ij}; \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad n = 1, \dots, N, \quad (1.1)$$

где  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензоров напряжений и деформаций,  $\bar{\lambda}_n$ ,  $\bar{\mu}_n$  — операторы Вольтерра

$$\bar{\lambda}_n \varphi \equiv \lambda_n \left[ \varphi(t) - \int_0^t R_{\lambda_n}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right]; \quad (1.2)$$

$$\bar{\mu}_n \varphi \equiv \mu_n \left[ \varphi(t) - \int_0^t R_{\mu_n}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right];$$

$\lambda_n$ ,  $\mu_n$ ,  $R_{\lambda_n}$ ,  $R_{\mu_n}$  — параметры Ламе и ядра релаксации среды, занимающей объем  $V_n$ ,  $\varphi$  — произвольная функция времени. Предполагается малость интегральных членов в (1.2).

Пусть функция  $\varphi$  в (1.2) имеет вид

$$\varphi(t) = \psi(t) e^{-i\omega_R t},$$

где  $\omega_R$  — действительная константа,  $\psi$  — медленно меняющаяся функция

времени,  $i$  — мнимая единица. С помощью метода замораживания <sup>(2)</sup> вместо (1.2) можно записать приближенные соотношения

$$\bar{\lambda}_n \varphi \cong \bar{\lambda}_n \varphi \equiv \lambda_n [1 - \Gamma_{\lambda_n}^c(\omega_R) - i \Gamma_{\lambda_n}^s(\omega_R)] \varphi;$$

$$\Gamma_{\lambda_n}^c(\omega_R) = \int_0^{\infty} R_{\lambda_n}(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau, \quad \Gamma_{\lambda_n}^s(\omega_R) = \int_0^{\infty} R_{\lambda_n}(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau,$$

второе из соотношений (1.2) преобразуется аналогично.

Решение задачи о собственных колебаниях составного тела ищется в виде

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = \vartheta_i(x_1, x_2, x_3) e^{-i\omega t}, \quad (1.3)$$

где  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  — координаты,  $u_i$  — перемещения,  $\vartheta_i$  — их комплексные амплитуды,  $\omega = \omega_R + i\omega_I$  — искомая комплексная собственная частота. Амплитуды и частоты определяются из комплексной задачи на собственные значения вида

$$\vec{x} \in V_n: \bar{\mu}_n(\omega_R) \frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial x_i \partial x_j} + [\bar{\lambda}_n(\omega_R) + \bar{\mu}_n(\omega_R)] \frac{\partial^2 \vartheta_j}{\partial x_i \partial x_i} + \rho_n \omega^2 \vartheta_i = 0;$$

$$\vec{x} \in \Sigma_u: \vartheta_i = 0; \quad (1.4)$$

$$\vec{x} \in \Sigma_p: \left[ \bar{\lambda}_n(\omega_R) \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \bar{\mu}_n(\omega_R) \left( \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \vartheta_j}{\partial x_i} \right) \right] \nu_j = 0,$$

где  $\nu_j$  — компоненты нормали к поверхности,  $\rho_n$  — плотность материала  $n$ -го тела,  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ .

2. Рассматривается короткий полый цилиндр длины  $l$ , состоящий из  $N$  коаксиальных вязкоупругих слоев. Вводится цилиндрическая система координат  $r, \varphi, z$ . Внутренняя  $r = r_0$  и внешняя  $r = r_N$  поверхности свободны от нагрузок,  $\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{rz} = 0$ , на торцах  $z = 0, l$  равны нулю осевое смещение  $u_z$  и касательные напряжения  $\sigma_{rz}, \sigma_{zr}$ , на границах слоев  $r = r_1, \dots, r_{N-1}$  непрерывны смещения  $u_r, u_\varphi, u_z$  и напряжения  $\sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{rz}$ .

В качестве искоемых переменных задачи принимаются перемещения  $u_r, u_\varphi, u_z$  и напряжения  $\sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{rz}$ ; они ищутся в виде

$$(u_r, u_\varphi, u_z, \sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{rz}) = (\vartheta_r, -i\vartheta_\varphi, -i\vartheta_z, \tau_{rr}, -i\tau_{r\varphi}, -i\tau_{rz}) \times$$

$$\times \exp \left( im\varphi + \frac{ik\pi}{l} z - i\omega t \right),$$

где  $m, k$  — положительные целые числа,  $\vartheta_r, \vartheta_\varphi, \vartheta_z, \tau_{rr}, \tau_{r\varphi}, \tau_{rz}$  — комплексные амплитуды, зависящие от радиуса  $r$ . Задача сводится к проблеме собственных значений для системы шести обыкновенных уравнений первого порядка относительно комплексных амплитуд вида

$$r_{n-1} < r < r_n:$$

$$\frac{d\vartheta_r}{dr} = - \frac{\bar{\nu}_n}{1 - \bar{\nu}_n} \left( \frac{\vartheta_r}{r} + \frac{m}{r} \vartheta_\varphi + \frac{k\pi}{l} \vartheta_z \right) + \frac{(1 + \bar{\nu}_n)(1 - 2\bar{\nu}_n)}{E_n(1 - \bar{\nu}_n)} \tau_{rr};$$

$$\frac{d\vartheta_\varphi}{dr} = \frac{m}{r} \vartheta_r + \frac{\vartheta_\varphi}{r} + \frac{2(1+\bar{\nu}_n)}{\bar{E}_n} \tau_{r\varphi};$$

$$\frac{d\vartheta_z}{dr} = \frac{k\pi}{l} \vartheta_r + \frac{2(1+\bar{\nu}_n)}{\bar{E}_n} \tau_{rz};$$

$$\frac{d\tau_{rr}}{dr} = -\frac{m}{r} \tau_{r\varphi} - \frac{k\pi}{l} \tau_{rz} - \frac{\tau_{rr} - \tau_{r\varphi}}{r} - \rho_n \omega^2 \vartheta_r;$$

$$\frac{d\tau_{r\varphi}}{dr} = \frac{m}{r} \tau_{\varphi\varphi} - \frac{k\pi}{l} \tau_{\varphi z} - \frac{2}{r} \tau_{r\varphi} - \rho_n \omega^2 \vartheta_\varphi;$$

$$\frac{d\tau_{rz}}{dr} = -\frac{m}{r} \tau_{\varphi z} - \frac{k\pi}{l} \tau_{zz} - \frac{\tau_{rz}}{r} - \rho_n \omega^2 \vartheta_z;$$

(2.1)

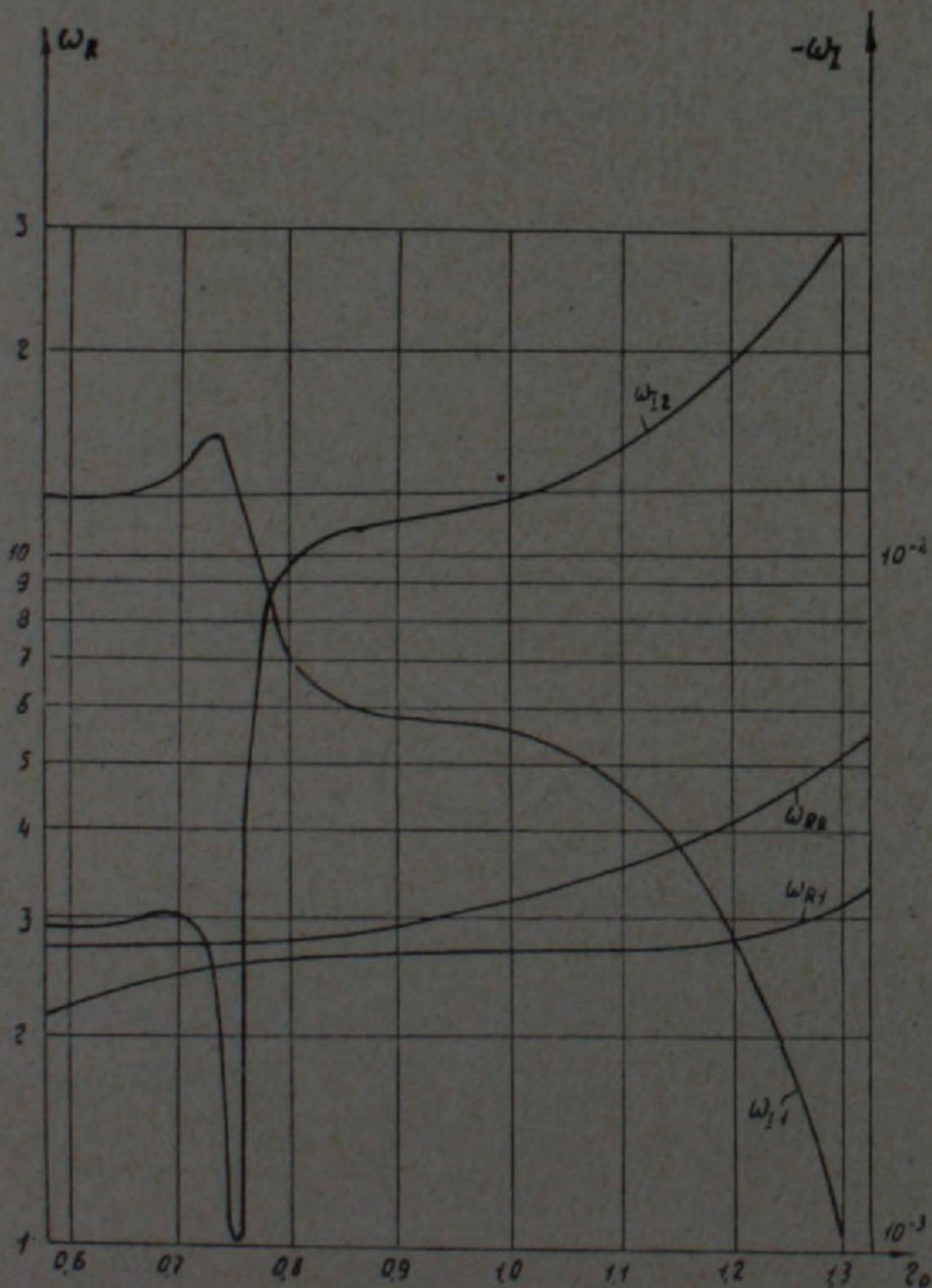
$$r=r_0, r_N: \tau_{rr} = \tau_{r\varphi} = \tau_{rz} = 0;$$

где

$$\tau_{\varphi z} = -\frac{\bar{E}_n}{2(1+\bar{\nu}_n)} \left( \frac{k\pi}{l} \vartheta_\varphi + \frac{m}{r} \vartheta_z \right);$$

$$\tau_{\varphi\varphi} = \frac{\bar{E}_n}{1-\bar{\nu}_n} \left( \frac{\vartheta_r}{r} + \frac{m}{r} \vartheta_\varphi + \frac{k\pi}{l} \vartheta_z \right) + \frac{\bar{\nu}_n}{1-\bar{\nu}_n} \tau_{rr};$$

$$\tau_{zz} = \frac{\bar{E}_n}{1-\bar{\nu}_n} \left( \frac{\vartheta_r}{r} + \frac{m}{r} \vartheta_\varphi + \frac{k\pi}{l} \vartheta_z \right) + \frac{\bar{\nu}_n}{1-\bar{\nu}_n} \tau_{rr};$$



$$\bar{E}_n = \frac{\bar{\mu}_n(3\bar{\lambda}_n + 2\bar{\mu}_n)}{\bar{\lambda}_n + \bar{\mu}_n}; \quad \bar{\nu}_n = \frac{\bar{\lambda}_n}{2(\bar{\lambda}_n + \bar{\mu}_n)}$$

Задача (2.1) не вырождается при  $\bar{\nu}_n = 0,5$ .

Характеристическое уравнение задачи (2.1) строилось методом ортогональной прогонки<sup>(4)</sup>, его корни определялись методом Мюллера<sup>(4)</sup>.

На рисунке приведены результаты расчетов для случая плоских колебаний ( $m=2, k=0$ ) цилиндра, состоящего из внешнего тонкого упругого слоя ( $r_1=1,5, r_2=1,7$ ) и внутреннего несжимаемого слоя, внутренний радиус которого варьировался в пределах 0,6—1,3. Были приняты следующие значения параметров:  $E_1=10^{-4}; \nu_1=0,5; R_{p1} = A \exp(-\beta t)/t^{\alpha-1}, \alpha=0,1, \beta=1, A=0,01; E_2=1; \nu_2=0,3; R_2=0$ . На рисунке показаны зависимости действительных и мнимых частей первых двух собственных частот от внутреннего радиуса  $r_0$ . Приведенный график отражает новый механический эффект, заключающийся в существенной зависимости показателя демпфирования конструкции от геометрии неоднородного тела.

Московский институт  
электронного машиностроения

Վ. Պ. ՄԱՅՔՈՐՈՂԱ, Ի. Ե. ՏՐՈՅԱՆՈՎՍԿԻ

Անհամասեռ առաձգամածուցիկ մարմինների սեփական տատանումները

Հնդհանուր դրվածքով լուծվել է անհամասեռ, այդ թվում և շերտավոր, առաձգամածուցիկ բաղադրյալ ցանկացած ձև ունեցող մարմինների սեփական տատանումների վերաբերյալ խնդիրը:

Օգտագործվում են գծային առաձգամածուցիկության տեսության եռաչափ հավասարումները:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков, Механика многослойных конструкций, Машиностроение, М., 1980. <sup>2</sup> А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря, Основы математической теории термовязкоупругости, Наука, М., 1970. <sup>3</sup> А. Н. Филатов, Асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений, ФАН, Ташкент, 1974. <sup>4</sup> Н. С. Бахвалов, Численные методы, Наука, М., 1975.

УДК 548 : 537.611.46

ФИЗИКА

Г. Н. Караджян

К теории ферромагнетика с примесью обменных связей

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 20/Х 1981)

Вызывающая возрастающий интерес проблема спиновых стекол<sup>(1)</sup> является центральной в современной теории неупорядоченных магнитных систем. Большинство результатов, раскрывающих суть явления, относятся к модели Изинга<sup>(2-6)</sup>. В последнее время появилось, однако, большое число работ, посвященных более реалистичной гейзенберговской модели, которая в отличие от изинговской учитывает также явления, связанные со спин-волновыми возбуждениями. В решеточной модели спинового стекла атомы располагаются в узлах правильной решетки, а обменные интегралы между ними содержат некоторое количество примесных связей, отличающихся по знаку и величине от обменного интеграла матрицы. Состояние спинового стекла возникает при этом в результате конкуренции реализующихся по разным траекториям взаимодействий между спинами. Однопримесной в такой модели при низких температурах является задача о двухатомной „молекуле“, атомы которой взаимодействуют друг с другом через примесную связь и виртуальные спиновые волны матрицы. Такая задача в случае ферромагнетика с примесной связью рассматривалась в работах Изюмова, Медведева<sup>(7)</sup> и Гинзбурга<sup>(8)</sup>.

В настоящей работе изучаются спин-волновые возбуждения в ферромагнетике с примесной обменной связью  $J'$  произвольного знака. Ясно, что при некотором критическом значении параметра  $J'/J$  ( $J > 0$  — обменный интеграл матрицы), антипараллельное упорядоченное состояние, над которым возбуждаются спиновые волны, станет неустойчивым. В двухподрешеточном ферромагнетике эта неустойчивость связана с появлением у дна акустической зоны невозмущенного кристалла локализованного состояния.

В квазиклассическом приближении<sup>(9)</sup> гейзенберговский гамильтониан с взаимодействием  $z$  ближайших соседей приводит к следующим уравнениям движения:

$$\begin{aligned} \left( i \frac{\partial}{\partial t} - 2JzS_2 \right) \dot{S}_n^+ - 2JS_1 \sum_{\Delta(n)} \dot{S}_{n+\Delta(n)}^+ - 2Jz(S_1^z \dot{S}_0^+ - S_0^z \dot{S}_1^+) \delta_{1n} &= Q_n^+, \\ \left( i \frac{\partial}{\partial t} + 2JzS_1 \right) \dot{S}_m^+ + 2JS_2 \sum_{\Delta(m)} \dot{S}_{m+\Delta(m)}^+ + 2Jz(S_1^z \dot{S}_0^+ - S_0^z \dot{S}_1^+) \delta_{0m} &= Q_m^+, \end{aligned} \quad (1)$$

$$Q_j^+ = 2J \delta S_j^z \sum_{\Delta(i)} \delta S_{j+\Delta(i)}^+ - 2J \delta S_j^+ \sum_{\Delta(i)} \delta S_{j+\Delta(i)}^z, \quad j=n, m.$$

Здесь  $\xi = (J'/J) - 1$  — параметр возмущения, вносимого примесной связью, заключенной между узлами 0 и 1. Индекс  $n$  нумерует узлы первой, а  $m$  — узлы второй подрешеток,  $j + \Delta(j)$  пробегает по всем ближайшим соседям узла  $j$ ,  $\delta S_n^z = S_n^z - S_1 \sim \delta S_n^+ \delta S_n^-$ ,  $\delta S_m^z = S_m^z + S_2 \sim \delta S_m^+ \delta S_m^-$  ( $\delta S_j^+ = \delta S^x + i \delta S^y$ ) — спиновые отклонения. При достаточно низких температурах эти уравнения решаются просто. В случае возбуждений над антипараллельным упорядоченным состоянием оператор возмущения для задачи (1) в узельном представлении имеет размеры  $2 \times 2$ , поэтому независимо от симметрии решетки существует только одна примесная колебательная мода. Эта мода описывается формулами:

$$\delta S_1^+ = - \frac{Z_1(\varepsilon)}{Z_0(\varepsilon)} \delta S_0^+,$$

$$\delta S_n^+ = \frac{Z_n(\varepsilon)}{Z_1(\varepsilon)} \delta S_1^+, \quad \delta S_m^+ = \frac{Z_m(\varepsilon)}{Z_0(\varepsilon)} \delta S_0^+,$$

$$Z_n(\varepsilon) = G_{n1}^{011}(\varepsilon) - G_{n0}^{012}(\varepsilon), \quad Z_m(\varepsilon) = G_{m0}^{022}(\varepsilon) - G_{m1}^{021}(\varepsilon),$$

определяющими картину прецессии спинов как для локализованных, так и резонансных состояний. В этих формулах  $\varepsilon = E/2JzS_2$  обозначает безразмерную энергию колебаний, а  $G^{\mu\nu\gamma}(\varepsilon + i0^+)$  ( $\mu, \nu = 1, 2$  — номера подрешеток) — соответствующий блок функции Грина невозмущенной задачи (1) в гармоническом приближении:

$$G^0(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \left( \varepsilon + \frac{S_1}{S_2} \right) P_{nn'}(\varepsilon) & \frac{1}{z} \left( \frac{S_1}{S_2} \right) \sum_{\Delta(n)} P_{n+\Delta(n),m'}(\varepsilon) \\ -\frac{1}{z} \sum_{\Delta(m)} P_{m+\Delta(m),n'}(\varepsilon) & (\varepsilon - 1) P_{mm'}(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

$$P_{ij}(\varepsilon) = \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\exp[i\mathbf{k}(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)]}{[\varepsilon - \varepsilon_{\text{вк}}(\mathbf{k})][\varepsilon + \varepsilon_{\text{оп}}(\mathbf{k})]},$$

где

$$\varepsilon_{\text{вк}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{S_1}{S_2} + \left[ \left( 1 + \frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 4 \frac{S_1}{S_2} \gamma^2(\mathbf{k}) \right]^{1/2} \right\},$$

$$\varepsilon_{\text{оп}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{S_1}{S_2} - 1 + \left[ \left( 1 + \frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 4 \frac{S_1}{S_2} \gamma^2(\mathbf{k}) \right]^{1/2} \right\},$$

$$\gamma(\mathbf{k}) = \frac{1}{z} \sum_{\Delta} \exp(i\mathbf{k}\Delta), \quad S_1 > S_2$$

— спектры двух ветвей одночастичных возбуждений в идеальном двухподрешеточном ферримагнетике.

Зависимость параметра  $J'/J$  от энергии спин-волновых колебаний имеет следующий вид:

$$\frac{J'}{J} = 1 + z \left\{ \left( 1 - \frac{S_1}{S_2} \right) \varepsilon P_{11}(\varepsilon) + 2 \frac{S_1}{S_2} \left[ P_{11}(\varepsilon) - \frac{1}{z} \sum_{\Delta(1)} P_{1+\Delta(1),0}(\varepsilon) \right] \right\}^{-1}.$$

Для критического значения параметра  $J'/J$ , при котором антипараллельное упорядоченное состояние становится неустойчивым, получаем:

$$\left(\frac{J'}{J}\right)_{\text{кр}} = 1 + 2z \frac{S_1}{S_2} \left[ P_{11}(0) - \frac{1}{z} \sum_{\Delta(1)} P_{1+\Delta(1),0}(0) \right]^{-1}.$$

Для антиферромагнетика ( $S_1 = S_2$ ) с примесной связью  $(J'/J)_{\text{кр}}$  легко посчитать, пользуясь известными таблицами матричных элементов функции Грина. Например, в случае объемно-центрированной кубической решетки  $(J'/J)_{\text{кр}} = -3$ . Однако из-за различий в спектрах одночастичных возбуждений критическое значение параметра  $J'/J$  для ферромагнетика будет другим. Заметим, что численный счет матричных элементов функции Грина одночастичных возбуждений в идеальном ферромагнетике является довольно трудоемкой работой и представляет собой отдельную задачу.

В заключение автор выражает благодарность С. Л. Гинзбургу за руководство работой. Автор признателен также М. Л. Тер-Микаеляну за критическое обсуждение результатов.

Институт физических исследований  
Академии наук Армянской ССР

#### Գ. Ն. ՂԱՐԱԶՅԱՆ

Խառնուրդային փոխանակային կապերով ֆերիմագնետիկի տեսության վերաբերյալ

Տվյալ աշխատանքում հետազոտված են խառնուրդային փոխանակային կապով երկենթացանց համագիծ ֆերիմագնետիկի հակազուգահեռ կարգավորված վիճակի վրա առաջացող սպին-ալիքային գրգռումները: Ցույց է տրված, որ անկախ բյուրեղային ցանցի սիմետրիայից, գոյութուն ունի միայն մեկ խառնուրդային տատանողական մոդա: Գտնված է խառնուրդային փոխանակման ինտեգրալի կրիտիկական այն արժեքը, որի դեպքում հակազուգահեռ կարգավորված վիճակը դառնում է անկայուն:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> S. F. Edwards, P. W. Anderson, J. Phys., F5, 965 (1975). <sup>2</sup> S. Kirkpatrick, D. Sherrington, Phys. Rev., B17, 4384 (1978). <sup>3</sup> M. W. Klein, L. J. Schowalter, P. Shukla, Phys. Rev., B19, 1492 (1979). <sup>4</sup> D. J. Thouless, P. W. Anderson, R. G. Palmer, Philos. Mag., 35, 593 (1977). <sup>5</sup> С. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, т. 74, 236 (1978). <sup>6</sup> Г. Н. Караджян, ЖЭТФ, т. 78, 855 (1980). <sup>7</sup> Ю. А. Изюмов, М. В. Медведев, ЖЭТФ, т. 55, 1117 (1968). <sup>8</sup> С. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, т. 76, 2230 (1979). <sup>9</sup> С. В. Вонсовский, Магнетизм, Наука, М., 1971.

УДК 624.042.80.03+15

ИНЖЕНЕРНАЯ СЕЙСМОЛОГИЯ

А. П. Кириллов, С. С. Дарбинян, А. В. Минасян

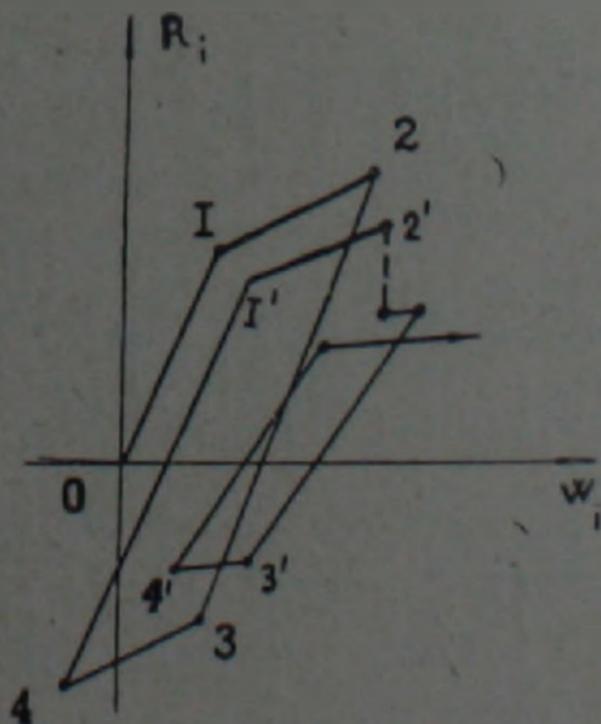
Сейсмостойкость упруго-пластических систем с  
 разрывными характеристиками

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 31/VIII 1981)

Данные о последствиях сильных землетрясений (<sup>1-3</sup>) свидетельствуют о том, что во многих случаях в сооружениях, перенесших сейсмические воздействия, развиваются зоны пластических шарниров и частичные разрушения. Согласно нормам (<sup>4</sup>) при расчете сооружений и конструкций допускаются напряжения, превышающие предел упругости элементов и не связанные с разрушением несущих каркасов. В связи с этим в области сейсмостойкого строительства имеются принципиально различные точки зрения на формирование сейсмических нагрузок, действующих на сооружения и конструкции с учетом работы системы за пределом упругости.

При изучении несущей способности системы основные трудности заключаются в том, что до настоящего времени не существует завершенных моделей сооружений и конструкций, которые могли бы полностью охарактеризовать весь колебательный процесс от микросейма до разрушительных землетрясений. По существу это объясняется многообразными механическими свойствами материалов и элементов сооружений.

В данной работе исследуется поведение сооружений с учетом накопления повреждаемости. Рассмотрим колебания сооружения, моделируемого как стержень, заделанный нижним концом и имеющий сосредоточенные массы. Учитываются как упруго-пластические течения, так и частичные разрушения. Нелинейная связь между восста-



навливающей силой и смещением заменяется линейным упрочнением (рисунок). Кусочно-линейная аппроксимация имеет важное значение для теории сейсмостойкости, так как она позволяет решать линейные дифференциальные уравнения.

Таким образом, примем для расчета диаграмму реакция—смещение с кусочно-линейным упрочнением на основе экспериментальных исследований (8).

Движение системы в лагранжевых координатах характеризуют обобщенные функции:

$$\bar{Q}_k = Q_k(Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N), \\ k=1, 2, 3, \dots, N.$$

Уравнение энергохарактеристики системы в исследуемых координатах преобразуем следующим образом:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^N \left\{ (\Phi_{ik}^0)^2 M_i \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_p} \dot{Q}_k(\xi_p) \right] \frac{\partial Q_k(\xi_p)}{\partial \xi_p} + \Phi_{ih}^0 M_i \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_p} \dot{Q}_0(\xi_p) \right] \frac{\partial Q_k(\xi_p)}{\partial \xi_0} - \right. \right. \\ \left. \left. - \Phi_{ih}^0 R_{ik}^* \frac{\partial Q_k(\xi_p)}{\partial \xi_p} \right\} \delta(\xi_p) + B_k^* Q_k(\xi_p) \delta Q_k(\xi_p) = \sum_{i=1}^N \left\{ (\Phi_{ik}^0)^2 M_i \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_p} \left[ \dot{Q}_k(\xi_p) + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \dot{Q}_0(\xi_p) \right] \right\} \left[ \dot{Q}_k(\xi_p) + \dot{Q}_0(\xi_p) \right] \delta(\xi_p) + \Phi_{ik}^0 M_i \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_p} \left[ \dot{Q}_k(\xi_p) + \dot{Q}_0(\xi_p) \right] \right\} \left[ \dot{Q}_k(\xi_p) + \right. \right. \\ \left. \left. + \dot{Q}_0(\xi_p) \right\} \delta(\xi_p) + B_k^* Q_k(\xi_p) \delta Q_k(\xi_p) - \sum_{i=1}^N \left\{ (\Phi_{ik}^0)^2 R_{ik}^* \frac{\partial Q_k(\xi_p)}{\partial \xi_p} + \right. \right. \\ \left. \left. + (\Phi_{ik}^0)^2 M_i \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_p} \dot{Q}_0(\xi_p) \right] \dot{Q}_k(\xi_p) + (\Phi_{ik}^0)^2 M_i \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_p} \dot{Q}_0(\xi_p) \right] \dot{Q}_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + (\Phi_{ik}^0)^2 M_i \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_p} \dot{Q}_k(\xi_p) \right] \dot{Q}_0(\xi_p) + \Phi_{ik}^0 M_i \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_p} \dot{Q}_k(\xi_p) \right] \dot{Q}_k(\xi_p) + \right. \right. \\ \left. \left. + \Phi_{ik}^0 M_i \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_p} \dot{Q}_k(\xi_p) \right] \dot{Q}_0(\xi_p) + \Phi_{ih}^0 M_i \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_p} \dot{Q}_0(\xi_p) \right] \dot{Q}_0(\xi_p) \right\} \delta(\xi_p). \quad (1)$$

$M_i$  — масса;  $\Phi_{ik}^0$  — собственные функции;  $B_k^*$  — параметр жесткости;  $R_{ik}^*$  — параметр реакции;  $\dot{Q}_0$  — характеризует внешнее воздействие.

$$B_k^* = B_k \left( \sum_{i=1}^N \Phi_{ik}^0{}^2 M_i \right)^{-1};$$

$$R_{ik}^* = R_{ik} - R_{ik+1};$$

$$R_{ik} = [\beta_{ik}^{\lambda_k} W_{k\bar{i}-1}^{**} - \beta_{ik}^{\lambda_k} W_{k\bar{i}}^* - (1 - \beta_{ik}^{\lambda_k}) W_{k\bar{i}}^{**}] B_k; \quad (2)$$

$$R_{ik+1} = [\beta_{i\bar{k}+1}^{\lambda_{k+1}} W_{k+1, \bar{i}-1}^{**} - \beta_{i\bar{k}+1}^{\lambda_{k+1}} W_{k+1}^* + (1 - \beta_{i\bar{k}+1}^{\lambda_{k+1}}) W_{i\bar{k}+1}^{**}] B_{k+1}; \quad (3)$$

$$W_{k\bar{i}}^* = (-1)^{0.5(i^0-1)} (W_{k\bar{i}}^* - W_{k\bar{i}-1}^{**}); \quad \bar{i} = 1, 3, 5, \dots;$$

$$W_{k\bar{i}}^{**} = \sum_{i=1}^{i^0/2} (W_{k2\bar{i}}^* - W_{k2\bar{i}-1}^{**}); \quad \bar{i} = 2, 4, 6, \dots$$

$\rho_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{в упругих участках диаграммы} \\ 1 & \text{в упруго-пластических участках диаграммы;} \end{cases}$   
 $B_k$  — единичная реакция;  $\nu_k$  — параметр упрочнения;  $W_{kl}^*$  — величина деформации в нечетных точках диаграммы;  $W_{kl}^{**}$  — накопление деформации после  $0,5 l^0$  цикла колебания.

Для системы, претерпевающей скачкообразное частичное разрушение с  $\tau^*$  по  $\tau^* + \delta\tau^*$ , уравнение (1) примет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{\tau_1} \left\{ \sum_{i=1}^N \left\{ (\Phi_{ik}^0)^2 M_i \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_p} \dot{Q}_k(\xi_p) \right] \frac{\partial Q_k(\xi_p)}{\partial \xi_p} + \Phi_{ih}^0 M_i \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_p} \dot{Q}_0(\xi_p) \right] \frac{\partial \dot{Q}_k(\xi_p)}{\partial \xi_p} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \Phi_{ih}^0 R_{ik}^* \frac{\partial \dot{Q}_k(\xi_p)}{\partial \xi_p} \right\} \right\} \delta(\xi_p) - B_k^* Q_k(\xi_p) \delta Q_k(\xi_p) = \\ & \sum_{p=0}^{\tau} \left\{ \sum_{i=1}^N \left\{ (\Phi_{ik}^0)^2 M_i \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_p} [\dot{Q}_k(\xi_p) + \dot{Q}_0(\xi_p)] \right\} [\dot{Q}_k(\xi_p) + \dot{Q}_0(\xi_p)] + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \Phi_{ih}^0 M_i \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_p} [\dot{Q}_k(\xi_p) + \dot{Q}_0(\xi_p)] \right\} [\dot{Q}_k(\xi_p) + \dot{Q}_0(\xi_p)] \right\} \right\} \delta(\xi_p) + \\ & \quad + \sum_{p=\tau}^{\tau_1} \left\{ \sum_{i=1}^N \left\{ (\Phi_{ik}^0)^2 M_i \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_p} [\dot{Q}_k(\xi_p) + \dot{Q}_0(\xi_p) + \delta\dot{Q}_k(\xi_p)] \right\} \times \right. \right. \\ & \quad \times [\dot{Q}_k(\xi_p) + \dot{Q}_0(\xi_p) + \delta\dot{Q}_k(\xi_p)] + \Phi_{ih}^0 M_i \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_p} [\dot{Q}_k(\xi_p) + \right. \\ & \quad \left. \left. + \dot{Q}_0(\xi_p) + \delta\dot{Q}_k(\xi_p)] \right\} [\dot{Q}_k(\xi_p) + \dot{Q}_0(\xi_p) + \delta\dot{Q}_k(\xi_p)] \right\} \right\} \delta(\xi_p) + \\ & \quad + \sum_{p=0}^{\tau_1} \left\{ B_k^* Q_k(\xi_p) \delta Q_k(\xi_p) - \left\{ \sum_{i=1}^N \left\{ (\Phi_{ik}^0)^2 M_i \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_p} \dot{Q}_0(\xi_p) \right] \times \right. \right. \right. \\ & \quad \times \dot{Q}_k(\xi_p) + (\Phi_{ik}^0)^2 M_i \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_p} \dot{Q}_0(\xi_p) \right] \dot{Q}_0(\xi_p) + \\ & \quad \left. \left. + (\Phi_{ik}^0)^2 M_i \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_p} \dot{Q}_k(\xi_p) \right] \dot{Q}_0(\xi_p) + \Phi_{ih}^0 M_i \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_p} \dot{Q}_k(\xi_p) \right] \dot{Q}_k(\xi_p) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \Phi_{ih}^0 M_i \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_p} \dot{Q}_k(\xi_p) \right] \dot{Q}_0(\xi_p) + \Phi_{ih}^0 M_i \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_p} \dot{Q}_0(\xi_p) \right] \dot{Q}_0(\xi_p) \right\} \right\} \delta(\xi_p), \quad (4) \end{aligned}$$

где  $\delta\dot{Q}_k(\xi_p)$  характеризует приращение скорости движения. Переходя к предельным состояниям, из (1) и (2) после некоторых преобразований и сокращения получаем

$$\begin{aligned} \delta\dot{Q}_k = \dot{Q}_k(\tau^*) & \left\{ \left\{ 1 + \left[ \left( \sum_{i=1}^N (\Phi_{ik}^0)^2 M_i \right) (\dot{Q}_k(\tau^*))^2 \right]^{-1} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times [\delta R_{ik} Q_k(\tau^*) + \delta B_k^* [Q_k(\tau^*)]^2] \right\}^{1/2} - 1 \right\}. \quad (5) \end{aligned}$$

Дальнейшее поведение системы характеризуют изменяющиеся параметры, причем движение системы будет выражаться уравнением

$$\sum_{i=1}^N (\Phi_{ik}^0)^2 M_i \frac{d^2 Q_k(\xi_p)}{d\xi_p^2} + \alpha_{k1} \frac{dQ_k(\xi_p)}{d\xi_p} + B_k^* Q_k(\xi_p) =$$

$$= \frac{d^2 Q_0(\xi_p)}{d\xi_p^2} \sum_{i=1}^N \Phi_{ik} M_i + \sum_{i=1}^N \Phi_{ik} R_{ik}^* \quad (6)$$

Решение осуществляется с учетом начальных условий при

$$\bar{Q}_k(0) = Q_k; \quad \bar{Q}'_k(0) = \bar{Q}'_k.$$

В уравнениях (4), вводя член неупругого сопротивления пропорционально скорости движения, решение получаем в следующем виде:

$$Q_k = \exp[-2^{-1} \alpha_k 2\pi T_k^{-1} (t_i - \xi_p)] \times [\bar{Q}_k \cos 2\pi T_k^{-1} (t_i - \xi_p) + 2\pi T_k^{-1} \times$$

$$\times (\alpha_k 2\pi T_k^{-1} \bar{Q}_k + \bar{Q}'_k) \sin 2\pi T_k^{-1} (t_i - \xi_p)] + [2\pi T_k^{-2} (1 + \alpha_k^2)]^{-1} \times$$

$$\times \{ \alpha_k \sin 2\pi T_k^{-1} (t_i - \xi_p) + \cos 2\pi T_k^{-1} (t_i - \xi_p) \} [1 - \exp[-2\pi T_k^{-1} \alpha_k (t_i - \xi_p)]] \times$$

$$\times \sum_{i=1}^N \Phi_{ik}^0 M_i R_{ik}^{**} \times \left( \sum_{i=1}^N (\Phi_{ik}^0)^2 M_i \right)^{-1} - (2\pi T_k^{-1})^{-1} \left( \sum_{i=1}^N \Phi_{ik}^0 M_i \right) \left( \sum_{i=1}^N (\Phi_{ik}^0)^2 M_i \right) \times$$

$$\times \sum_{p=\tau}^{t_i} \bar{Q}_0(\xi_p) \exp [2\pi T_k^{-1} (t_i - \xi_p) \alpha_k] \sin 2\pi T_k^{-1} (t_i - \xi_p) \delta \xi_p;$$

$$R_{ik}^{**} = [\beta_{ik} \lambda_k W_{ki-1}^{**} - \beta_{ik} \lambda_k W_{ki-1}^* + (1 - \beta_{ki}) \lambda_k W_{ki}^{**}] B_k -$$

$$- [\beta_{i,k+1} \lambda_k W_{k+1,i-1}^{**} - \beta_{k+1,i,k+1} W_{k+1,i}^* + (1 - \beta_{k+1,i}) \lambda_{k+1} W_{k+1,i}^{**}] \quad (7)$$

где  $\bar{Q}_k(\xi_p)$  и  $\bar{Q}'_k(\xi_p)$  определяются следующим образом:

$$\bar{Q}_k(\xi_p)|_{p=\tau_1-\tau_1^*} = \bar{Q}_k(\tau_1^*);$$

$$\bar{Q}'_k(\xi_p)|_{p=\tau_1-\tau_1^*} = \bar{Q}'_k(\tau_1^*) + \delta \dot{Q}_k(\tau_1^*),$$

$$T_k = T^0 (1 - \alpha_k^2)^{1/2}, \quad \alpha_k = \alpha_{k1}/2. \quad (8)$$

Здесь  $\alpha_k$  — характеристика диссипации.

Поперечные нагрузки определяются по уравнению

$$q_k = B_k^* [\beta_{ki} \lambda_k W_{ki}^* + (1 - \beta_{ki}) \lambda_k W_k - \beta_{ki} \lambda_k W_{ki-1}^{**} - (1 - \beta_{ki}) \lambda_{ki} W_{ki}^{**}]. \quad (8')$$

Приведем частный пример расчета 4-этажного каркасного здания (1) с учетом комбинационных повреждений. Задача решается с помощью ЭВМ поэтапно, при этом каждый раз определяются функции  $\Phi_{ik}^0$ . Для этой цели по участкам диаграммы находятся частоты  $(2\pi T_k^{-1})$  из характеристического определителя. Затем определяются искомые функции согласно выражению аналогично (7).

Необходимо отметить, что в точках перехода зависимости „реакция — смещение“ сохраняются условия неразрывности движения. Имея напряженно-деформационное состояние, сейсмические силы находим согласно (3—7). Предполагается, что в момент времени  $\tau^*$ , когда усилия, действующие на сооружения, принимают максимальные значения, происходит частичное разрушение. Процедура обращения к

характеристическому определителю при разрушении осуществляется аналогично упруго-пластическому случаю, т. е. следует заново определить собственные функции, обусловленные изменением параметров характеристического определителя. Для нахождения функции  $Q_i$  согласно (7) учитываются условия (8).

Этаж	Сейсмическая нагрузка ТС		
	упругое решение	упр.-пласт.	учет разрушения
I вариант			
IV	182,68	138,57	109,11
III	157,79	123,04	85,44
II	106,16	88,29	49,99
I	89,09	79,69	47,40
II вариант			
IV	212,85	161,46	130,20
III	173,16	144,38	94,36
II	124,42	106,27	62,88
I	102,32	81,26	46,07

В таблице приведены некоторые результаты расчета на сейсмостойкость четырехэтажного каркасного здания. Характеристики здания соответствуют примеру, приведенному в (1):

$$B_1 = 2270; \quad B_2 = B_3 = B_4 = 2300 \text{ (ТС} \times \text{см}^{-1}\text{)}$$

$$M_1 = 0,794; \quad M_2 = M_3 = 0,743; \quad M_4 = 0,729 \text{ ТС} \cdot \text{сек}^2 \times \text{см}^{-1}.$$

Для результатов, приведенных в таблице (I вариант), модуль диссипации равен 0,15; параметр, характеризующий максимальное смещение в долях упругой деформации, — 1,333; параметр упрочнения — 0,75. Для II варианта эти параметры соответственно равны 0,20; 2,0; 0,75. Изменения реакции после частичных разрушений равны  $0,742 B_2$  и  $0,742 B_1$ , соответственно вариантам I и II.

Анализ числовых результатов показывает, что учет накопления повреждений, не представляющих опасности для людей и ценного оборудования, приводит к заметному снижению сейсмических сил. Следовательно, здания и сооружения, проектированные на сейсмические воздействия в соответствии с нормами, обладают резервами несущей способности, в 1,5—2 раза превышающими расчетные.

НИС Гидропроект  
Институт геофизики  
и инженерной сейсмологии  
Академии наук  
Армянской ССР

Խզվող բնութագրերով առաձգա-պլաստիկ համակարգերի  
սեյսմոկայունությունը

Հողվածում ուսումնասիրվում է առաձգա-պլաստիկ համակարգերի տատանումը և սեյսմոկայունությունը: Ենթադրվում է, որ դեֆորմացիաների սահմանային արժեքի դեպքում տեղի է ունենում կոշտության ակնթարթային փոփոխություն:

Ուժեղ երկրաշարժերի հետազոտությունները ցույց են տալիս, որ շատ դեպքերում շենքերի և կոնստրուկցիաների էլեմենտներում սեյսմիկ ցնցումների հետևանքով առաջանում են պլաստիկ հողակապեր և փխրուն քայքայման տեղամասեր: Հետևաբար, կառուցվածքների կրողունակությունը պայմանավորված է կոմբինացիոն քայքայումներից՝ պլաստիկ հոսունությունից և փխրուն ակնթարթային քայքայումից:

Առաձգա-պլաստիկ համակարգերում էներգիայի վերաբաշխումը որոշելու համար ստացված է (5) բանաձևը: Խվային հաշվարկները ցույց են տալիս, որ թույլատրելի սահմաններում կոմբինացիոն քայքայման հաշվառումով սեյսմիկ բեռները 1,5—2 անգամ փոքրանում են:

ЛИТЕРАТУРА — ՊՐԱՇԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> Инженерный анализ последствий землетрясений в Японии и США, Стройиздат, М., 1961. <sup>2</sup> Землетрясения в СССР, Изд. АН СССР, М., 1961. <sup>3</sup> С. В. Поляков, Сейсмостойкие конструкции зданий, Высш. школа, М., 1969. <sup>4</sup> СНиП П—А. 12—69\* М., 1977. <sup>5</sup> А. Г. Назаров, Метод инженерного анализа сейсмических сил, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1957. <sup>6</sup> К. С. Завриев, А. Г. Назаров и др., Руководство по проектированию сейсмостойких зданий и сооружений, т. 1—4, Стройиздат, М., 1969—1972. <sup>7</sup> И. Л. Корчинский и др., Основы проектирования зданий в сейсмических районах, Госстройиздат, М. 1961. <sup>8</sup> Non-Linear Response Analysis of Taal Buildings to strong Earthquake and its Application to Dynamic Design. SERAC REPORT № 1, 1962, № 3, 1963.

УДК 550.348(100)

СЕЙСМОЛОГИЯ

А. М. Аветисян, И. П. Добровольский

Об оценке эффективности методов определения координат  
 гипоцентров землетрясений на теоретических моделях

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 22/VI 1981)

Значения координат гипоцентров землетрясений являются одним из основных видов сейсмической информации. Они важны, в частности, при составлении карт сейсмического районирования и при детальном изучении сейсмичности в процессе подготовки сильных землетрясений. Но если в первом случае анализируются события на больших площадях, то во втором характерные размеры значительно меньше и требования к точности определения координат существенно повышаются. Это один из примеров, когда задача выбора хорошего алгоритма, невзирая на ее трудоемкость, что не столь важно при использовании быстродействующих ЭВМ, становится принципиальной.

Точность определения координат гипоцентров в основном зависит: а) от точности обработки первичной сейсмической информации (нахождение времен первых вступлений и т. п.); б) от расположения сейсмических станций по отношению к очагу землетрясения; в) от степени соответствия применяемого при вычислениях годографа истинному годографу изучаемой области.

Наконец, существенное значение имеет алгоритм обработки. В настоящее время имеется много различных алгоритмов для определения координат гипоцентров землетрясений, в том числе и достаточно сложных (<sup>1</sup>), которые при обработке одного и того же события дают различные результаты.

В этих условиях становится важной задача выбора оптимального алгоритма. Классический способ—сравнение с точным решением, т. е. для нашего случая анализ ситуации, когда положение гипоцентра заведомо точно известно. Такая ситуация может иметь место в двух случаях: в полевых экспериментах со взрывами и при численном моделировании.

Численное моделирование, хотя и уступает в известной степени натурному эксперименту, тем не менее обладает рядом неоспоримых достоинств. Оно экологически чище, менее трудоемко, дешевле и позволяет изучить по единой методике много различных вариантов. Нужно отметить, что в настоящее время такой численный эксперимент можно осуществить для среды с любым заданным распределением скоростей.

Здесь рассматривается простейшая модель землетрясения с точеч-

ным источником, хотя в принципе построение протяженных источников не приведет к чрезмерному усложнению. На этой модели можно исследовать изменение времен пробега сейсмических волн в лучевом приближении в зависимости от геометрических и механических характеристик.

В качестве первого примера берем горизонтально однородное изотропное полупространство. Таким образом, рассматриваются малые области, когда можно пренебречь кривизной Земли.

Лучевая задача с распространением волн в среде с заданным полем скоростей  $V(x)$  сводится к решению следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i = V(x) \alpha_i(x);$$

$$\dot{\alpha}_i = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

с начальными условиями

$$x_i(0) = x_{0i}; \quad \alpha_{0i} = \frac{n_{0i}}{V(x_{0i})} = \left( \frac{\cos \varphi_0}{V_0}, \frac{\sin \varphi_0}{V_0} \right),$$

где  $x_i$  — декартовы координаты точек луча;  $V_0$  — скорость в точке  $x_{0i}$ ;  $n_i$  — единичный касательный вектор к лучу;  $\alpha_i = \frac{n_i}{V}$ ,  $\varphi_0$  — угол между осью  $x_3$  и направлением луча.

Если мы имеем среду с постоянным градиентом, то данная задача допускает точное решение в элементарных функциях. Для полупространства  $x_3 \geq 0$  с  $V = b + ax_3$  решение лучевой задачи в плоскости  $x_1, x_3$  имеет вид

$$x_1 = x_{10} + \frac{V_1 \operatorname{sh} at \cos \varphi_0}{a},$$

$$x_3 = x_{30} + \frac{V_1 - V_0}{a},$$

$$\alpha_1 = \alpha_{01}; \quad \alpha_3 = -(A \operatorname{ch} at + B \operatorname{sh} at)$$

$$A = -\frac{\sin \varphi_0}{V_0}, \quad B = \frac{1}{V_0},$$

где

$$V_1 = \frac{1}{A \operatorname{sh} at + B \operatorname{ch} at}, \quad \left( -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

Эти формулы записаны для случая, когда  $t_0 = 0$ . Отсюда уравнение годографа

$$\Delta = \frac{b}{a} \sqrt{2 \left( 1 + \frac{a}{b} x_{03} \right) \operatorname{ch} at - \left[ 1 + \left( 1 + \frac{a}{b} x_{03} \right)^2 \right]}.$$

В случаях отсутствия точного решения построение лучей и годографа производится каким-либо приближенным методом. При высокой гладкости (кусочной) поля скоростей эффективен метод с экстраполяцией Ричардсона (<sup>2</sup>).

Теоретическое моделирование производится по следующей схеме.

1. Задаются координаты сейсмических станций (исходные данные) и гипоцентра.

2. Строится исходный годограф для дискретных значений глубин гипоцентра—аналог реальных годографов.

3. С помощью годографа для выбранного положения гипоцентра определяются времена прихода  $P$ - и  $S$ - волн на каждую станцию. Совокупность этих значений образует набор, эквивалентный данным наблюдения. В дальнейшем он используется в двух вариантах: точные значения и значения, в которые внесены случайные ошибки на уровне реальных ошибок измерений.

4. По полученным данным с помощью различных алгоритмов определяется положение гипоцентра землетрясения и сравнивается с точным значением.

Предложенная методика позволяет:

1) при определенных условиях выбрать конкретный способ или алгоритм, который при определении координат гипоцентра более надежен, чем остальные. Оценить влияние случайных ошибок наблюдений и измерений на окончательный результат;

2) найти границу отношения глубины гипоцентра к эпицентральному расстоянию, до которой алгоритм достаточно эффективно вычисляет глубину гипоцентра;

3) оценивать методы вычисления распределения скоростных разрезов;

4) проверить надежность современных площадных годографов и трехмерных скоростных моделей.

Институт геофизики и инженерной сейсмологии  
Академии наук Армянской ССР

Ա. Մ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ, Ի. Պ. ԴՈԲՐՈՎՈԼՍԿԻ

Տեսական մոդելի վրա երկրաշարժի կոորդինատների որոշման էֆեկտիվության մասին

Հոդվածում նշված մեթոդիկան հնարավորություն է տալիս օգտագործելով երկրաշարժերի տարածության մեջ տեղաբաշխման մաթեմատիկական մոդելը, սեյսմիկ կայանների որոշակի դասավորության և արագությունների ցանկացած ձևով բաշխման դեպքում գոյություն ունեցող եղանակներից կամ ալգորիթմներից ընտրել այն, որը կապահովի կոորդինատների ավելի մեծ ճշտություն համեմատած սեյսմիկ ինֆորմացիայի մշակման մյուս եղանակների հետ:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> А. М. Аветисян, И. П. Добровольский, ДАН АрмССР, т. 71, № 3 (1980). <sup>2</sup> Руководство по производству и обработке наблюдений на сейсмических станциях СССР. Часть 2, Изд-во АН СССР, М., 1954. <sup>3</sup> И. П. Добровольский, В. И. Фридман, Изв. АН СССР, «Физика Земли», № 3, 1980.

УДК 66. 095.14

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Академик АН Армянской ССР А. Т. Бабаян,  
 Г. О. Торосян, С. Л. Паравян

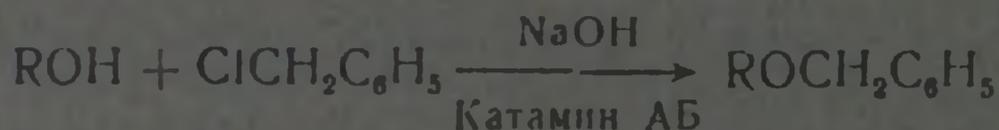
Синтез алкилбензиловых эфиров

(Представлено 2/XII 1981)

В 50-х годах было установлено каталитическое действие солей четырехзамещенного аммония (ЧАС) в реакциях алкилирования элемент-Н кислот галоидными алкилами в водно-щелочной среде (1-4).

Позднее на примере алкилирования фенола бромистым амилем в присутствии различных ЧАС была установлена высокая каталитическая активность катамина АБ (смесь хлористых солей диметилбензилалкил (C<sub>10</sub>—C<sub>18</sub>) аммония) (5).

Настоящая работа посвящена распространению этого метода на алкилирование первичных спиртов хлористым бензилом в присутствии катамина АБ



В реакционной смеси наряду с алкилированием исходного спирта хлористым бензилом могут иметь место гидролиз последнего и последующее алкилирование образовавшегося бензилового спирта. Ускорение гидролиза алкилгалогенидов в присутствии ЧАС ранее было установлено на примере 1,3-дихлор-2-бутена (4) В отсутствие ЧАС хлористый бензил гидролизуется в незначительной степени (1%).

Реагенты—спирт, хлористый бензил, 10 н водный раствор (или порошок) едкого натра и 56%-ный водный раствор катамина АБ брали в мольных соотношениях 1:1,2:2:0,1. К реакционной смеси, содержащей остальные компоненты реакции, в течение 20 мин прикапывали водную щелочь или хлористый бензил при постоянном перемешивании и нагревании на кипящей водяной бане. Общая продолжительность реакции 30 или 60 мин. Данные приведены в таблице. Выходы продуктов алкилирования определяли газо-жидкостным хроматографированием методом внутренней нормализации, а также фракционированием. Разница (±3—5%) в пределах ошибок эксперимента.

Как видно из таблицы, в присутствии эквимольного количества катализатора (опыт 5) гидролиз хлористого бензила ускоряется, приводя к повышению выхода дибензилового эфира. В отсутствие катализатора (опыт 3) образуется лишь небольшое количество продукта алкилирования бутилового спирта, гидролиз же хлористого бензила

практически не имеет места. Увеличение продолжительности реакции от 30 до 60 мин (опыты 4 и 6) не приводит к повышению выхода несимметричного эфира. Несколько увеличивается лишь выход дибензилового эфира. По-видимому, за первые 30 мин значительная часть хлористого бензила успевает гидролизаться. В опытах с порошком

Алкилирование спиртов хлористым бензилом при прикапывании щелочи (хлорида) в течение 20 мин

№	Спирт	Общая продолжительность, мин	Выходы эфиров, %		Использование, %		Примечание
			несимметричного	дибензилового	спирта	хлорида	
1	Бензиловый	30	—	95	95	79	
2	Аллиловый	30	61	34	61	85	
3	Бутиловый	30	5	—	5	4	Без катализатора
4	—	30	61	17	61	68	
5	—	30	26	50	26	73	Эквивалентное количество катализатора
6	—	60	62	30	62	82	
7	—	(60)	68	32	68	89	
8	—	(60)	80	24	80	91	Порошок NaOH
9	—	(60)	94	19	94	97	— толуол
10	—	(60)	95	5	47,5	100	Порошок NaOH 2 моль спирта

NaOH (небольшое количество воды вводится лишь с катамином) условия для гидролиза неблагоприятны и выход несимметричного эфира резко повышается. Особенно хорошие результаты получаются, когда при этом добавляется и толуол (опыт 9) или берется двойное мольное количество бутилового спирта (опыт 10).

Таким образом установлено, что и при алкилировании первичных спиртов катамин АБ является эффективным катализатором.

Институт органической химии  
Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Ա. Թ. ԲԱԲԱՅԱՆ, Գ. Հ. ԹՈՐՈՍՅԱՆ, Ս. Լ. ՊԱՌԱՎՅԱՆ

### Ալկիլբենզիլ եթերների սինթեզ

Ներկա աշխատանքը նվիրված է առաջնային սպիրտների ալկիլմանը բենզիլ քլորիդով ջրահիմնային միջավայրում, շորրորդային ամոնիումային աղերի ներկայությամբ: Համապատասխան ալկիլբենզիլ եթերի հետ միաժամանակ գոյանում է նաև դիբենզիլ եթեր, որը արդյունք է բենզիլ քլորիդի հիդրոլիզի և հետագա ալկիլման:

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> Jarrousse, С. г., 232, 1424 (1951). <sup>2</sup> А. Т. Бабаян, Нина Гамбарян, Н. П. Гамбарян, ЖОХ, т. 24, 191 (1954). <sup>3</sup> А. Т. Бабаян, М. Г. Инджикян, ЖОХ, т. 27, 1201 (1957). <sup>4</sup> А. Т. Бабаян, М. Г. Инджикян, А. А. Азизян, ДАН АрмССР, т. 31, 79 (1960). <sup>5</sup> С. Л. Паравян, Г. О. Торосян, А. Т. Бабаян, Арм. хим. журн., т. 32, 708 (1979).

