

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր  
Д О К Л А Д Ы

LXXIV, № 1

1982

## Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, տեխն. գիտ. բեկնա-  
ծու (պատ. ֆաբրիկա), Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ,  
ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ա. Թ. ԲԱՐՍ-  
ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹՍ-  
ԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ.  
Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-ան-  
դամ, Վ. Հ. ՀԱՄՐԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս,  
Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս  
(պատ. խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱԲ-  
ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ,  
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր),  
Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ,  
Օ. Մ. ՍԱՊՈՆՉՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-  
անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ  
ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՁՅԱՆ,  
ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ:

## Редакционная коллегия

Վ. Ա. ԱՄԲԱՐՇՄՅԱՆ, ակադեմիկ, Գ. Ա.  
ԱՐՅՄԱՆՅԱՆ, կանդ. տեխ. նաուկ (օտվ.  
սեկրետար), Յ. Գ. ԱՓՐԻԿՅԱՆ, շլ.-կորր.  
ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Ա. Կ. ԲԱԲԱՅԱՆ, ակադեմիկ  
ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Վ. Օ. ԿԱՅԱՐՅԱՆ, ակա-  
դեմիկ ԱՆ ԱրմՍՍՐ (շամ. օտվ. ռեդակտոր),  
Ի. Գ. ՄԱԳԱԿՅԱՆ, ակադեմիկ ԱՆ Արմ.  
ՍՍՐ, Ա. Գ. ՆԱՅԱՐՈՎ, ակադեմիկ ԱՆ  
ԱրմՍՍՐ (օտվ. ռեդակտոր), Գ. Ս. ՏԱԿՅԱՆ,  
շլ.-կորր. ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Օ. Մ. ՏԱՓՈՆ-  
ԺՅԱՆ, շլ.-կորր. ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Ա. Ա. ԿԱ-  
ԼԱԼՅԱՆ, շլ.-կորր. ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Վ. Մ.  
ԿԱՐԱՅԱՆ, շլ.-կորր. ԱՆ ԱրմՍՍՐ, Մ. Լ.  
ԿԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ, շլ.-կորր. ԱՆ ԱրմՍՍՐ,  
Վ. Վ. ՓԱՆԱՐԺՅԱՆ, շլ.-կորր. ԱՆ  
ԱրմՍՍՐ.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

էջ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ա. Հ. Առաքելյան—Նիմ խաղերի D-արտադրյալը և կոմպոզիցիան . . . . . 3  
Վ. Ա. Սենյեկով, Վ. Ա. Խաչկերիչ—Ինդեֆինիտ մետրիկայով տարածություններում  
դեֆինիտ գծային բազմաձևությունների և խիստ պլյուս-օպերատորների մասին . . . . . 7  
Ա. Ա. Բալայան—Ոչ պայմանական զուգամիտության համակարգեր շահնդիսացող  
օրթոգոնալ համակարգերի մասին . . . . . 12

ՄԵՆԱՆԻԿԱ

Մ. Ա. Զաքոյան—Մի քանի խնդիրներ աստիճանային օրենքով ամրապնդվող բա-  
ղադրյալ մարմնի միացման մակերևույթի անկյունային կետում լարումների կենտրո-  
նացման վերաբերյալ . . . . . 18

ԱՌԱՋԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Վ. Գ. Ժուրավյով, Ս. Ա. Նազարով, Բ. Ա. Եոյլսևո—Անհամասեռ ծերացող մարմին-  
ների լարված-դեֆորմացված վիճակի ճաթի գազաթի շրջակայքի ասիմպտոտիկան . . . . . 26

ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Մ. Մխիբարյան—Շերտի կամ կիսահարթության տեսքի ճաթով ըստ աստիճա-  
նային օրենքի դեֆորմացվող անվերջ տարածության լարվածային վիճակի շուրջը . . . . . 30

ՏԻՋԻԿԱ

Բ. Ա. Բաղյան, Մ. Լ. Տեր-Միֆայելյան—Անցումային ճառագայթման ֆոտոնների  
լրիվ թիվը անհարթ սահմանի դեպքում . . . . . 37  
Ա. Ս. Կուրանյան, Կ. Լ. Հովհաննիսյան, Ա. Գ. Պետրոսյան, Գ. Հ. Շիրինյան— $Tb_2Al_3O_{12}$   
նոնաթարի անեցումը հալույթից և նրա հատկությունները . . . . . 42

ԲԺՇԿԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Վ. Մ. Հաբուրյունյան, Ս. Ե. Քոբոսյան, Գ. Ա. Եզանյան—Հիպոթալամուսի ազդեցու-  
թյունը մակերիկամի կեղևի ֆունկցիայի վրա շաքարախտի ժամանակ . . . . . 45

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

Стр.

- А. А. Аракелян*— $D$  — произведение и композиция игр Ним . . . . . 3
- А. А. Сендеров, В. А. Хацкевич*—О дефинитных линейалах и строгих плюс-операторах в пространстве с индефинитной метрикой . . . . . 7
- А. А. Талалаян*—Об ортогональных системах, не являющихся системами безусловной сходимости . . . . . 12

### МЕХАНИКА

- М. А. Задоян*—Некоторые задачи концентрации напряжений в угловой точке контактной поверхности составного тела со степенным упрочнением . . . . . 18

### ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- В. П. Журавлев, С. А. Назаров, Б. А. Шойхет*—Асимптотика вблизи вершины трещины напряженно-деформированного состояния неоднородно стареющего тела. . . . . 26

### ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

- С. М. Мхитарян*—К напряженному состоянию деформирующегося по степенному закону бесконечного пространства с разрезом в виде полосы или полуплоскости . . . . . 30

### ФИЗИКА

- Р. А. Багиян, М. Л. Тер-Микаелян*—Полное число фотонов переходного излучения на шероховатых поверхностях раздела . . . . . 37
- А. С. Кузаян, К. Л. Ованесян, А. Г. Петросян, Г. О. Ширинян*—Выращивание из расплава редкоземельного граната  $Tb_3Al_5O_{12}$  и его свойства. . . . . 42

### МЕДИЦИНА

- В. М. Арутюнян, С. Е. Торосян, Г. А. Еганян*—О влиянии гипоталамуса на функцию коры надпочечников при аллоксановом диабете . . . . . 45

## C O N T E N T S

## MATHEMATICS

- |   | P. |
|---|----|
| <i>A. H. Arakellan</i> — <i>D</i> -products and compositions of Nim games . . . . .   | 3  |
| <i>V. A. Senderov, V. A. Haskevich</i> —On definite linear set and on strong plus-operators in a space with an indefinite metric. . . . . | 7  |
| <i>A. A. Talallan</i> —On orthogonal systems not being the systems of unconditional convergence. . . . .                                  | 12 |

## MECHANICS

- |   |    |
|---|----|
| <i>M. A. Zadoyan</i> —Several problems of the voltages concentration at the corner point of the contact surface of the compound body with a serial strengthening. . . . . | 18 |
|---|----|

## THEORY OF ELASTICITY

- |   |    |
|---|----|
| <i>V. P. Juravlev, S. A. Nazarov, B. A. Shojhet</i> —Asimptotic representation near crack front of stresses and displacements for nonhomogeneous ageing bodies. . . . . | 26 |
|---|----|

## THEORY OF GREEP

- |   |    |
|---|----|
| <i>S. M. Mkhitarlan</i> —To stress state of the deforming by law degree infinite space with the measure in the form of strip or halfplane . . . . . | 30 |
|---|----|

## PHYSICS

- |   |    |
|---|----|
| <i>R. A. Baghlan, M. L. Ter-Mikaellan</i> —The total number of photons of the transition radiation on the statistically rough interface . . . . .             | 37 |
| <i>A. S. Kuzanian, K. L. Hovhannisslan, A. G. Petrossian, G. H. Shirinian</i> —Melt growth and properties of the rare-earth granet $Tb_3Al_5O_{12}$ . . . . . | 42 |

## MEDICINE

- |  |    |
|--|----|
| <i>V. M. Harutlunian, S. E. Torosian, G. A. Yeganian</i> —On the hypothalamus influence upon the adrenal cortex function in alloxan diabetis condition . . . . . | 45 |
|--|----|

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 2.2.1982. Подписано к печати 11.3.1982. ВФ 05116  
 Бумага № 1. 70×108<sup>1/16</sup>. Плоскопечать. Печ. лист. 3,0. Усл. печ. лист. 4,2.  
 Учет.-изд. 354. Тираж 430. Заказ 109. Издат. 5623.  
 Адрес ред: 375019, Ереван, Барекамутян, 24-г. II эт., I к.

Издательство Академии наук Армянской ССР, 375019, Ереван, Барекамутян 24 г.  
 Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин

УДК 518.9

МАТЕМАТИКА

А. А. Аракелян

*D*-произведение и композиция игр Ним

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 16/VI 1981)

Композиции игр Ним рассмотрены в (1), где при помощи введения функции Гранди получены условия, которым должны удовлетворять позиции, обеспечивающие игроку выигрыш или ничью. Однако функция Гранди не позволяет получить множество выигрышных позиций игры-композиции при помощи множеств выигрышных позиций игр сомножителей.

В данной статье, используя результаты работы (2), в которой построены решения композиции и *D*-произведения релятивов, приводятся множества позиций, обеспечивающих игрокам выигрыш или ничью для композиции и *D*-произведения игр Ним.

Опишем игру Ним, приведенную в (1), при помощи релятива  $(A, \rho)$ . Пусть  $p$  и  $q$  игроки. Положения игроков будем представлять при помощи элементов поля  $A$ . Начальное состояние  $a_0$  выбирается жеребьевкой. Далее противники поочередно выбирают элементы из  $A$ ; вначале игрок  $p$  выбирает некоторый элемент  $a_1 \in A$ . Затем игрок  $q$  выбирает элемент  $a_2 \in \rho \langle a_1 \rangle$ , где  $\rho \langle a_1 \rangle = \{a' \in A \mid (a_1, a') \in \rho\}$  называется (2) срезом отношения  $\rho$  через элемент  $a_1$ . Далее игрок  $p$  выбирает элемент  $a_3 \in \rho \langle a_2 \rangle$  и т. д. Игра оканчивается, если один из игроков выбрал такой элемент  $a_k$ , что  $\rho \langle a_k \rangle = \emptyset$ , и выигравшим считается игрок, выбравший элемент из  $A$  последним.

Множество  $V_\rho(A)$  называется решением релятива  $(A, \rho)$  (2), если оно удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $(x, y) \notin \rho$  для любых  $x, y \in V_\rho(A)$ ;
- 2) для любого  $y \in V_\rho(A)$  существует такой  $x \in V_\rho(A)$ , что  $(x, y) \in \rho$ .

Известно (1), что если релятив  $(A, \rho)$  имеет решение  $V_\rho(A)$  и если один из игроков выбрал вершину в решении, то этот выбор обеспечивает ему выигрыш или ничью.

Релятив  $(A, \rho)$  называется композицией релятивов  $(A_i, \rho_i)$ ,  $i \in I$ , если  $A = \prod_{i \in I} A_i$ ,  $(a, b) \in \rho$  тогда и только тогда, когда существует такой  $i \in I$ , что  $(a_i, b_i) \in \rho_i$ ,  $a_j = b_j$ ,  $j \neq i$ .

Определим следующее обобщение игры Ним (1). Пусть  $(A_i, \rho_i)$ ,  $i \in I$  совокупность игр Ним и игра происходит следующим образом: в очередной момент игры игрок, которому нужно ходить, выбирает одну из игр Ним и делает ход в этой игре, не трогая остальных; первый, кто совсем не сможет играть, проигрывает. Определенная таким об-

разом игра есть игра Ним для релятива, являющегося композицией релятивов  $(A_i, \rho_i)$ ,  $i \in I$ .

Из теоремы 1 главы 6 <sup>(1)</sup> следует, что если композиция  $(A, \rho)$  игр Ним  $(A_i, \rho_i)$ ,  $i \in I$  имеет решение  $V_\rho(A)$ , то в такой игре выигрывает тот из игроков, который выберет элемент из  $V_\rho(A)$ . Однако в <sup>(1)</sup> не приводится вид множества  $V_\rho(A)$ .

Ниже мы покажем, что  $V_\rho(A)$  можно построить при помощи решений  $V_{\rho_i}(A_i)$  релятивов  $(A_i, \rho_i)$ ,  $i \in I$ .

Пусть  $L \subset I$ ,  $V_{\rho_i}(A_i)$  решение релятива  $(A_i, \rho_i)$ ,  $i \in I$ . Положим

$$W_L = \prod_{i \in L} V_{\rho_i}(A_i) \times \prod_{i \in I \setminus L} (A_i \setminus V_{\rho_i}(A_i)), \quad I_{i_1, i_2, \dots, i_k} = I \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\},$$

$$R^k = \{I_{i_1, i_2, \dots, i_k} \mid i_1, i_2, \dots, i_k \in I, k \neq 0, R^0 = I.$$

Всюду далее четность релятива будем понимать в смысле <sup>(3)</sup>.

Игра Ним  $(A_i, \rho_i)$  четная, если релятив  $(A_i, \rho_i)$  четный.

**Теорема 1.** Пусть  $I = \{1, 2, \dots, m\}$  и игры Ним  $(A_i, \rho_i)$  четные. Если игроки играют в композицию  $(A, \rho)$  этих игр, то выигрыш или ничья обеспечиваются выбором таких состояний  $a \in A = \prod_{i \in I} A_i$ ,

что  $a \in V_\rho = \bigcup_{k=0}^{\lfloor \frac{|I|}{2} \rfloor} \bigcup_{L \in R^k} W_L$ , где  $\lfloor \frac{|I|}{2} \rfloor$  целая часть от  $\frac{|I|}{2}$ .

Доказательство следует из теоремы 3.1 <sup>(2)</sup> и теоремы 1 главы 6 <sup>(1)</sup>.

Определим операцию суперпозиции бинарных отношений  $\sigma_i \subset A \times A$  следующим образом:  $(a, b) \in \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_n$  тогда и только тогда, когда существуют такие  $c_i \in A$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , что  $(a, c_1) \in \sigma_1$ ,  $(c_1, c_2) \in \sigma_2, \dots, (c_{n-1}, b) \in \sigma_n$ .

Если  $\sigma_j = \rho$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , то суперпозицию обозначим через  $\rho$ .

Для того чтобы  $\rho \subset A \times A$  было ациклическим, нереклексивным и асимметричным, ациклическим, нереклексивным и симметричным, ациклическим, рефлексивным и асимметричным, необходимо и достаточно, чтобы имели место

$$\rho^n \cap \Delta_A = \emptyset \quad \text{для любого } n$$

$$\rho^n \cap \Delta_A = \emptyset \quad \text{для любого } n \neq 2, \Delta_A \subset \rho^2,$$

$$\rho^n \cap \Delta_A = \emptyset \quad \text{для любого } n > 2, \Delta_A \subset \rho^2 \cap \rho \text{ соответственно.}$$

Под звездой отношения  $\rho \subset A \times A$  через элемент  $a \in A$  будем понимать множество  $(\rho \cup \rho^{-1}) \langle a \rangle$ , где  $\rho^{-1} \langle a \rangle = \{a' \in A \mid (a', a) \in \rho\}$ .

Отношение  $\rho \subset A \times A$  называется звездно-конечным, если  $|(\rho \cup \rho^{-1}) \langle a \rangle| < \infty$  для любого  $a \in A$ .

Пусть  $(A_i^0, \rho_i^0)$ ,  $i \in I$  четные релятивы и элементы  $A_i$ ,  $i \in I$  перемножены не более, чем счетными кардинальными числами. Тогда из <sup>(3)</sup> будет следовать существование базиса  $U_{\rho_i^0}(A_i^0)$  релятива  $(A_i^0, \rho_i^0)$ ,  $i \in I$ .

Положим  $A_i^1 = A_i \setminus U_{\rho_i^0}(A_i^0)$ ,  $\rho_i^1 = \rho_i^0 \cap (A_i^1 \times A_i^1)$ , тогда по теореме Ричардсона (3) будет следовать существование базиса  $U_{\rho_i^1}(A_i^1)$  релятива  $(A_i^1, \rho_i^1)$ ,  $i \in I$ . Если продолжить процесс построения релятивов по индукции, то получим последовательность релятивов  $\{(A_i^k, \rho_i^k)\}_{k \leq \lambda}$ , где  $A_i^k = A_i \setminus \left( \bigcup_{l=1}^{k-1} U_{\rho_i^l}(A_i^l) \right)$ ,  $\rho_i^k = \rho_i \cap A_i^k \times A_i^k$ ,  $k \leq \lambda$  и для любого  $(A_i^k, \rho_i^k)$  существует базис  $U_{\rho_i^k}(A_i^k)$ ,  $k \leq \lambda$ .

Аналогично, используя результаты (3), можно построить индуктивным способом релятивы  $(A_i^k, \rho_i^k)$  для звездно-конечного ациклического релятива  $(A_i, \rho_i)$ ,  $i \in I$ .

Пусть  $(A_i^\alpha, \rho_i^\alpha)$  релятив, полученный из  $(A_i, \rho_i)$  описанным методом. Положим

$$Z_L^\alpha = \left( \prod_{i \in L} U_{\rho_i^\alpha}(A_i^\alpha) \right) \times \left( \prod_{i \in I \setminus L} (A_i^\alpha \setminus U_{\rho_i^\alpha}(A_i^\alpha)) \right) \text{ где } L \subset I, V^\alpha = \bigcup_{k=0}^{\lfloor \frac{|I|}{2} \rfloor} \bigcup_{L \in \mathcal{R}^{|I|-2k}} Z_L^\alpha.$$

Теорема 2. Пусть игры Ним  $(A_i, \rho_i)$ ,  $i \in I$

- а) либо четные, либо ациклические и звездно-конечные,
- б) существует такое порядковое число  $\gamma$ , что  $A_i^\gamma = \emptyset$  и  $A_i^\beta \neq \emptyset$  для любого  $\beta < \gamma$ ,  $i \in I$ .

Тогда, если игроки играют в композицию  $(A, \rho)$  этих игр, то выигрыш или ничья обеспечиваются выбором таких состояний  $a \in A$ , что  $a \in V_\rho(A) = \bigcup_{\alpha < \gamma} V^\alpha$ .

Доказательство следует из теоремы 3.2 (2) и теоремы главы 6 (1).

Положим для множества  $X$  множество  $S(X) = \{Y \mid Y \subset X\}$ .

Определение (4). Пусть  $I$  — некоторое множество.  $D$  называется фильтром над множеством  $I$ , если

- а)  $D \subset S(I)$ ,  $\emptyset \neq D \neq S(I)$ ;
- б)  $X \in D$ ,  $X \subset Y$  влекут  $Y \in D$ ;
- в)  $X, Y \in D$  влекут  $X \cap Y \in D$ .

Пусть  $I \neq \emptyset$ ,  $(A_i, \rho_i)$ ,  $i \in I$  релятивы.

Положим  $A = \prod_{i \in I} A_i$ . Будем говорить, что  $a_1 \in A$  эквивалентно  $a_2 \in A$ ,  $a_1 \sim a_2$ , если  $\{i \in I \mid a_1(i) = a_2(i)\} \in D$ .

Положим  $a^- = \{a_1 \in A \mid a \sim a_1\}$ ,  $A^- = \{a^- \mid a \in A\}$ .

Под  $D$ -произведением релятивов  $(A_i, \rho_i)$ ,  $i \in I$  понимаем релятив  $(A^-, \rho)$ , определенный следующим образом:  $(a_1^-, a_2^-) \in \rho$  тогда и только тогда, когда  $\{i \in I \mid (a_1(i), a_2(i)) \in \rho_i\} \in D$ .

Рассмотрим случай, когда  $|a^-| = 1$  для любого  $a \in A$ .

Определим другое обобщение игры Ним. Пусть имеем некоторое множество игр Ним  $(A_i, \rho_i)$ ,  $i \in I$ ,  $D$  — фильтр над  $I$  и игроки ходят поочередно по следующему правилу: в очередной момент игры игрок, которому нужно ходить, выбирает некоторое множество игр  $T \in D$ -фильтру и делает ход в играх  $(A_i, \rho_i)$ ,  $i \in T$ , не трогая остальных; первый, кто совсем не сможет играть, проигрывает. Эта ситуа-

ция представляет собой игру Ним на релятиве, который является  $D$ -произведением релятивов  $(A_i, \rho_i)$ ,  $i \in I$ .

Пусть  $V_{\rho_i}(A_i)$  решение  $(A_i, \rho_i)$ ,  $i \in I$ . Положим

$$W_L = \left( \prod_{i \in L} V_{\rho_i}(A_i) \right) \times \left( \prod_{i \in I \setminus L} (A_i \setminus V_{\rho_i}(A_i)) \right), \quad W_L^- = \{w^- | w \in W_L\}, \quad L \subseteq I.$$

Способ выигрыша в определенной таким образом игре дается следующей теоремой.

**Теорема 3.** Пусть  $(A_i, \rho_i)$  игра Ним, имеющая решение  $V_{\rho_i}(A_i)$ ,  $i \in I$ , и существует такой  $L_1 \in D$ -фильтру над множеством  $I$ , что  $L_1 = \{i_j\}_{j=1,2,\dots,l}$ ,  $\{i_j\} \in D$ ,  $j=1,2,\dots,l$ ,  $L(L_1) = \{L_k, k=1,2,\dots,p | L_k \subset \subset L_{k+1}, k=1,2,\dots,p-1\}$ .

Если игроки играют в  $D$ -произведение  $(A^-, \rho)$  игр Ним  $(A_i, \rho_i)$ ,  $i \in I$ ,  $|a^-| = 1$  для любого  $a \in A$ , то выигрыш или ничья обеспечиваются выбором таких состояний  $a \in A$ , что  $a \in V_\rho(A^-) = \bigcup_{L \in L(L_1)} W_L^-$ .

Доказательство следует из теоремы 2.1. <sup>(2)</sup> и теоремы 1 глава 6 <sup>(1)</sup>.

Ереванский институт  
народного хозяйства

## Ա. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

### Նիմ խաղերի $D$ -արտադրյալը և կոմպոզիցիան

Հոդվածում դիտարկվում է նիմ խաղերի  $D$ -արտադրյալի և կոմպոզիցիայի շահույթ կամ ոչ ոքի ապահովող իրավիճակների կառուցման խնդիրը: Օգտագործելով <sup>[2]</sup> աշխատանքում ստացված արդյունքները, ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը:

**Թեորեմ 3.** Դիցուք  $(A_i, \rho_i)$  նիմ խաղեր են,  $V_{\rho_i}(A_i)$ ,  $i \in I$  նրանց լուծումներն են և գոյություն ունի այնպիսի  $L_1 \in D$ -ֆիլտրին, որը տրված է  $I$  բազմության վրա, որ  $L_1 = \{i_j\}_{j=1,2,\dots,l}$ ,  $\{i_j\} \in D$ ,  $j=1,2,\dots,l$ ,

$$L(L_1) = \{L_k, k=1,2,\dots,p | L_k \subset \subset L_{k+1}, k=1,2,\dots,p-1\}.$$

Եթե խաղացողները խաղում են  $(A_i, \rho_i)$ ,  $i \in I$  նիմ խաղերի  $(A, \rho)$   $D$ -արտադրյալը,  $|a^-| = 1$  ցանկացած  $a \in A$ , ապա շահույթը կամ ոչ ոքին ապահովվում են այնպիսի իրավիճակներով, որ  $a \in V_\rho(A^-) = \bigcup_{L \in L(L_1)} W_L^-$ .

## ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> К. Берж, Теория графов и ее применения, ИЛ, М., 1962. <sup>2</sup> А. А. Аракелян, в сб.: Мат вопросы кибернетики и вычислительной техники, вып. 12, ВЦ АН АрмССР, 1981. <sup>3</sup> М. Richardson, Ann. Math., vol. 58, N 3 (1953). <sup>4</sup> Г. Дж. Крейслер, Чен Чень-Чунь, Теория непрерывных моделей, Мир, М., 1971.

УДК 517.43+513.88

МАТЕМАТИКА

В. А. Сендеров, В. А. Хацкевич

О дефинитных линеалах и строгих плюс-операторах в пространстве с индефинитной метрикой

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 30/VI 1981)

В первой части настоящей статьи рассматриваются так называемые дефинитные линеалы в  $J_\nu$ -пространствах, т. е. в нормированных пространствах с индефинитной метрикой. Установлен критерий равномерной дефинитности одновременно всех дефинитных подпространств  $J_\nu$ -пространства. Подобные исследования, касающиеся (полных) гильбертовых  $J_2$ -пространств, были начаты в работах Л. С. Поптрягина <sup>(1)</sup> и Ю. П. Гинзбурга <sup>(2)</sup>.

Во второй части статьи рассматриваются так называемые строгие плюс-операторы. Изучение таких операторов в гильбертовых пространствах было начато в работе М. Г. Крейна и Ю. Л. Шмульяна <sup>(3)</sup>, а в банаховых пространствах — в работах И. С. Иохвидова <sup>(4,5)</sup>. Затем изучение строгих плюс-операторов было продолжено в <sup>(6,7)</sup>.

Во второй части предлагаемой статьи содержится в основном продолжение исследований работ <sup>(6,7)</sup>.

1. Пусть  $M = M_+ \dot{+} M_-$  — топологическое разложение нормированного пространства  $M$  в прямую сумму (замкнутых) подпространств,  $P_\pm$  — проекторы на  $M_\pm$  соответственно, отвечающие этому разложению. Функционал  $J_\nu(x) = \|P_+x\|^\nu - \|P_-x\|^\nu$  ( $x \in M, \nu > 0$ ) порождает на  $M$   $J_\nu$ -метрику.

Определение 1. Линеал  $L$  пространства  $M$  называется положительным (отрицательным), если  $J_\nu(x) > 0$  ( $J_\nu(x) < 0$ ) при  $x \in L, x \neq 0$ .

Определение 2. Линеал  $L$  пространства  $M$  называется равномерно дефинитным, если  $|J_\nu(x)| \geq c \|x\|^\nu$  ( $c > 0$ ) при  $x \in L$ .

Равномерно дефинитные линеалы естественно делятся на равномерно положительные и равномерно отрицательные.

Ниже для определенности будем говорить об отрицательных подпространствах.

Определение 3. Будем говорить, что последовательность векторов отрицательного подпространства  $J_\nu$ -сходится к нулю, если  $\|x_n\| \leq C, J_\nu(x_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Всюду ниже  $J_\nu$ -сходимость последовательности  $\{x_n\}$  векторов к нулю будем записывать так:  $x_n \xrightarrow{J_\nu} 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Определение 4. Разложение отрицательного подпространства  $L$  вида  $L = (L \cap M_-) \dot{+} B$  будем называть  $J_\nu$ -топологичес-

ким, если из  $z_n = x_n + y_n$ ,  $x_n \in L \cap M_-$ ,  $y_n \in B$ ,  $J_\nu(z_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  следует, что  $J_\nu(x_n) \rightarrow 0$ ,  $J_\nu(y_n) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Лемма 1. Пусть  $\dim M_+ < \infty$ .  $J_\nu$ -сходимость любой последовательности векторов отрицательного подпространства  $L$  к нулю эквивалентна сходимости этой последовательности к нулю по норме тогда и только тогда, когда любое разложение  $L = (L \cap M_-) \dot{+} B$  является  $J_\nu$ -топологическим.

Доказательство. Пусть разложение  $L = (L \cap M_-) \dot{+} B$  является  $J_\nu$ -топологическим. Рассмотрим  $\{z_n\} : z_n \in L, z_n \xrightarrow{J_\nu} 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Поскольку  $x_n \xrightarrow{J_\nu} 0, y_n \xrightarrow{J_\nu} 0$  при  $n \rightarrow \infty$  ( $z_n = x_n + y_n, x_n \in L \cap M_-, y_n \in B$ ) и на подпространствах  $L \cap M_-$  и  $B$   $J_\nu$ -сходимость к нулю совпадает со сходимостью к нулю по норме ( $\dim B \leq \dim M_+ < \infty$ ), то мы имеем:  $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0$ . Следовательно,  $z_n \rightarrow 0$  и  $J_\nu$ -сходимость к нулю совпадает со сходимостью к нулю по норме.

Обратно, пусть из  $z_n \in L, z_n \xrightarrow{J_\nu} 0 (n \rightarrow \infty)$  следует, что  $z_n \rightarrow 0$ . Вследствие замкнутости  $L \cap M_-$  и конечномерности  $B$  ( $\dim B \leq \dim M_+ < \infty$ ) разложение  $L = (L \cap M_-) \dot{+} B$  является топологическим. Поэтому  $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0$ ; следовательно  $x_n \xrightarrow{J_\nu} 0, y_n \xrightarrow{J_\nu} 0 (n \rightarrow \infty)$ , что и требовалось.

Лемма 2. Разложение отрицательного подпространства  $L$  вида  $L = (L \cap M_-) \dot{+} B$  является  $J_\nu$ -топологическим для любых подпространств  $L$  и  $B$  тогда и только тогда, когда для всякого подпространства  $D, D \subset M_-$ , и всякого вектора  $x \in M_-$  существует вектор  $y \in D$  такой что  $\rho(x, D) = \rho(x, y)$ . (Здесь и ниже  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ ,  $\rho(x, D) = \inf_{y \in D} \|x - y\|$ ).

Доказательство. Пусть выполнено условие леммы. Предположим, что разложение  $L = (L \cap M_-) \dot{+} B$  не является  $J_\nu$ -топологическим.

Рассмотрим  $\{z_n\} : z_n \in L, z_n \xrightarrow{J_\nu} 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поскольку  $\|y_n\| \leq C$  ( $z_n = x_n + y_n, x_n \in L \cap M_-, y_n \in B$ ), можно считать, что  $y_n \rightarrow (-b)$ , причем для некоторой последовательности  $\{z_n\}$  будет:  $b \neq 0$ .

Очевидно,  $x_n - b \xrightarrow{J_\nu} 0 (n \rightarrow \infty)$ . Значит,  $\|P_+ b\|^\nu - \|P_- b - x_n\|^\nu \rightarrow 0$ . Но  $\|P_- b - x_n\| \geq \rho(P_- b, (L \cap M_-)) = \rho(P_- b, a)$ , где  $a \in L \cap M_-$ . Следовательно,  $\|P_- b\|^\nu - \|P_- b - x_n\|^\nu \leq \|P_+ b\|^\nu - \|P_- b - a\|^\nu < 0$ , и мы пришли к противоречию.

Обратно, пусть существует (замкнутое) подпространство  $D, D \subset M_-$ , и вектор  $y \in M_-$  такие, что  $\rho(y, D) < \rho(y, z)$  для всех  $z \in D$ . Рассмотрим  $x \in M_+, \|x\| = \rho(y, D)$ . Положим  $L = \text{л. о. } \{x + y, D\}$ . Для всякого  $d \in D$  имеем:  $J_\nu(x + y + d) = \|x\|^\nu - \|y + d\|^\nu < 0$ . Значит,  $L$  — отрицательное подпространство.

Чтобы доказать, что разложение  $L = (L \cap M_-) \dot{+} \text{л. о. } \{x + y\}$  не является  $J_\nu$ -топологическим, очевидно, достаточно доказать, что существует последовательность  $\{y_n\}, y_n \in L \cap M_-$ , для которой  $x + y - y_n \xrightarrow{J_\nu} 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Рассмотрим последовательность  $\{y_n\}$  такую, что  $\rho(y, y_n) \rightarrow \rho(y, L \cap M_-), n \rightarrow \infty$ . Имеем:  $J_\nu(y_n - x - y) = \|x\|^\nu - \|y_n - y\|^\nu \rightarrow 0$ , что и требовалось.

Теорема 1. Пусть  $M = M_+ + M_-$ ,  $\dim M_+ < \infty$ . Для того чтобы любое дефинитное подпространство пространства  $M$  было равномерно дефинитным, необходимо и достаточно, чтобы для любого подпространства  $D \subset M_-$  и любого вектора  $x \in M_-$  существовал вектор  $y \in D$  такой, что  $\varphi(x, D) = \varphi(x, y)$ .

Доказательство. В силу условия  $\dim M_+ < \infty$  всякое положительное подпространство является равномерно положительным.

Очевидно, что отрицательное подпространство равномерно отрицательно тогда и только тогда, когда  $J_\nu$ -сходимость любой последовательности его векторов к нулю эквивалентна сходимости этой последовательности к нулю по норме. Теперь заключение теоремы следует из лемм 1,2.

Эту теорему можно сформулировать в следующем, более удобном для исследования, виде

Теорема 1'. Пусть  $M = M_+ + M_-$ ,  $\dim M_+ < \infty$ . Для того чтобы любое дефинитное подпространство пространства  $M$  было равномерно дефинитным, необходимо и достаточно, чтобы для любого линейного непрерывного функционала  $f(x)$ , заданного на подпространстве  $D$  пространства  $M_-$ , существовал вектор  $x_0 \in D$  такой, что  $f(x_0) = \|f\|$ .

Следствие. В рефлексивном пространстве  $M$  ( $\dim M_+ < \infty$ ) всякое дефинитное подпространство равномерно дефинитно.

В частном случае гильбертова пространства  $M$  результат этого следствия содержится в работах (1,2).

Как показывает сравнение теоремы 1' с теоремой Джеймса (3), в случае сепарабельного банахова пространства  $M = L$  ( $\dim L_+ < \infty$ ) рефлексивность является также и необходимым условием.

Однако существуют сепарабельные неполные пространства, в которых всякое дефинитное подпространство равномерно дефинитно. Это можно вывести из результатов работы (4).

2. Ниже рассматриваются линейные операторы, заданные на всем  $J_\nu$ -пространстве  $M$  ( $\nu > 1$ ). Обозначения:  $H = \{x \in M : \|P_- x\| \leq \|P_+ x\|\}$ ;  $N$  — совокупность всех неотрицательных подпространств  $L$  таких, что  $P_+ L = M_+$ .

Определение 5. Линейный оператор  $A$  называется плюс-оператором, если  $AH \subset H$ . Плюс-оператор  $A$  называется строгим, если

$$\mu(A) = \inf_{J_\nu(x)=1} J_\nu(Ax) > 0.$$

Теорема 2. Пусть пространство  $M_+$  полно и всякое его (замкнутое) подпространство обладает в нем топологическим дополнением;  $A$  — строгий плюс-оператор,  $P_+ A P_-$  — ограниченный оператор. Тогда  $\text{def } AL = \text{const}$  ( $L \in N$ ), где

$$\text{def } AL = \dim M_+ | P_+ \overline{AL}.$$

Доказательство. Положим  $W(K) = P_+ A P_+ + P_+ A P_- K$ , где  $K \in \mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}$  — семейство угловых операторов (2) всех подпространств  $L \in N$ . Сначала покажем, что для некоторого  $\delta > 0$  справедливо неравенство

$$\|W(K)x\| \geq \delta \|x\| \quad (x \in M_+, K \in \mathbf{K}). \quad (1)$$

В противном случае найдутся последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{K_n\}$  такие, что  $\|x_n\|=1, K_n \in \mathbf{K}$ ,

$$W(K_n)x_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Из (2) с учетом ограниченности оператора  $P_+AP_-$  следует, что  $\|P_+AP_+x_n\| \leq C < \infty$ .

Положим  $y_n = \sqrt[3]{1+\lambda_n} x_n + \sqrt[3]{\lambda_n} K_n x_n$ , где бесконечно большая последовательность  $\{\lambda_n\}$  выбрана так, чтобы  $\sqrt[3]{\lambda_n} W(K_n)x_n \rightarrow 0$ . Тогда  $J_+(y) \geq 1$ , а  $P_+Ay_n = (\sqrt[3]{1+\lambda_n} - \sqrt[3]{\lambda_n})P_+AP_+x_n + \sqrt[3]{\lambda_n} W(K_n)x_n \rightarrow 0$ , вопреки строгости плюс-оператора  $P_+A$  (очевидно,  $\mu(P_+A) \geq \mu(A) > 0$ ). Тем самым неравенство (1) доказано.

Пусть  $R(W(K)) = \{y : y = W(K)x, x \in M_+\}$ . По условию для любого  $K \in \mathbf{K}$  существует топологическое дополнение  $D(K)$  подпространства  $\overline{R(W(K))}$  в  $M_+$ . Пусть  $P(K)$  — (ограниченный) проектор на  $\overline{R(W(K))}$ , порожденный разложением  $M_+ = \overline{R(W(K))} \dot{+} D(K)$ .

Очевидно,  $\text{def } AL = \dim D(K)$ , где  $K$  — угловой оператор подпространства  $L (L \in N)$ . Положим  $\rho(W(K)) = \inf_{\|x\|=1} \|W(K)x\|$ . В силу (1)

$$\rho(W(K)) > 0. \quad \text{Если } \|K - K_0\| < \frac{\rho(W(K))}{\|P(K)\| \|P_+AP_-\|}, \quad \text{то}$$

$$\dim D(K) = \dim D(K_0). \quad (3)$$

Действительно,  $W(K_0) = W(K) + P_+AP_-(K_0 - K)$ . На  $D(K) \dot{+} \overline{R(W(K))}$  определим линейный оператор  $W(K)^{(-1)}$  равенствами:  $W(K)^{(-1)}W(K)x = x, W(K)^{(-1)}y = 0 (y \in D(K))$  (ср. (3)). Мы имеем:  $\|W(K)^{(-1)}\| \leq \frac{\|P(K)\|}{\rho(W(K))}$ .

Через  $B(K)$  обозначим продолжение по непрерывности оператора  $W(K)^{(-1)}$  на все  $M_+ = \overline{R(W(K))} \dot{+} D(K)$ . Тогда  $W(K_0) = (I + P_+AP_-(K_0 - K)B(K))W(K)$ . В силу  $\|P_+AP_-(K_0 - K)B(K)\| < 1$  справедливо равенство (3).

Пусть  $K_1, K_2 \in \mathbf{K}$ . Положим  $K_t = (1-t)K_1 + tK_2$ , где  $t \in [0, 1]$ . Тогда  $K_t \in \mathbf{K}$  и по доказанному выше у всякого  $t \in [0, 1]$  найдется окрестность  $U(t)$ , для которой справедливо равенство  $\dim D(K_s) = \text{const} (s \in U(t))$ . Теперь заключение теоремы следует из компактности отрезка  $[0, 1]$ .

**Следствие** (обобщение теоремы 2,3 (3)). Пусть  $A$  — строгий плюс-оператор в гильбертовом  $J$ -пространстве  $M$ ,  $P_+AP_-$  — ограниченный оператор. Тогда

$$\text{def } AL = \text{const} \quad (L \in N).$$

Ինդեֆինիտ մետրիկայով տարածություններում դեֆինիտ գծային  
բազմաձևությունների և խիստ պլյուս-օպերատորների մասին

Հորվածում ստացված է հայտանիշ ինդեֆինիտ մետրիկայով նորմավոր-  
ված տարածություններում բոլոր դեֆինիտ գծային բազմաձևությունների  
հավասարաչափ դեֆինիտ լինելու համար: Բավականաչափ ընդհանուր պայ-  
մանների դեպքում ապացուցված է թեորեմ խիստ պլյուս-օպերատորի պլյուս-  
դեֆեկտի հաստատունության վերաբերյալ:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- <sup>1</sup> Л. С. Понтрягин, Изв. АН СССР, серия мат., 8 (1944). <sup>2</sup> Ю. П. Гинзбург, Науч. зап. Одесск. пед. ин-та, т. 25, № 2 (1961). <sup>3</sup> М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмультян, Мат. исслед., 1, Кишинев, РИО АН МССР. <sup>4</sup> И. С. Иохвидов, Изв. АН МССР, № 1, 1968. <sup>5</sup> И. С. Иохвидов, ДАН СССР, т. 189, № 3 (1966). <sup>6</sup> В. А. Хацкевич, УМН, т. 27, вып. 5 (167) (1972). <sup>7</sup> В. А. Сендеров, В. А. Хацкевич, Мат. исслед., т. 8, № 3 (29), Кишинев, РИО АН МССР. <sup>8</sup> Robert C. James, Ann. of Math., vol 66, № 1, (1957). <sup>9</sup> Robert C. James, Jor. I. Math., vol. 9, № 4 (1971).

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН Армянской ССР А. А. Талалян

Об ортогональных системах, не являющихся системами  
 безусловной сходимости

(Представлено 4/IX 1981)

Ортогональные и нормированные в  $L_2[0, 1]$  системы  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  для краткости будем называть О. Н. системами. Обозначим

$$\|f\| = \left( \int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \|f\|_E = \left( \int_E |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad E \subset [0, 1]. \quad (1)$$

Для удобства изложения приведем также некоторые определения.

Определение 1. О. Н. система  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  называется системой безусловной сходимости, если для любой перестановки  $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$  натуральных чисел и для любой последовательности  $\{a_k\}$ ,  $\sum a_k^2 < +\infty$ , ряд

$$\sum a_k \varphi_{\nu_k}(x)$$

сходится почти всюду на  $[0, 1]$ .

Определение 2. Система  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  интегрируемых с квадратом на множестве  $E$  функций, называется полной на множестве  $E$ , если множество конечных линейных комбинаций функций  $f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  всюду плотно в  $L_2(E)$ .

Определение 3. О. Н. система  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  называется полной по рядам из  $L_2$  на множестве  $E$ ,  $E \subset [0, 1]$ ,  $\mu(E) > 0$ , если для любой функции  $f(x)$ , определенной на  $E$  и интегрируемой с квадратом на  $E$ , существует  $F(x) \in L_2[0, 1]$  такая, что  $F(x) = f(x)$  почти всюду на  $E$  и ряд Фурье функции  $F(x)$  по системе  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  сходится к  $F(x)$  в метрике  $L_2[0, 1]$ .

Определение 4. Система  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  почти везде конечных на  $[0, 1]$  измеримых функций называется неполной всюду, если она не полна ни на одном множестве  $E \subset [0, 1]$ ,  $\mu(E) > 0$ .

В обзорной статье <sup>(1)</sup> американского математика Прайса, где анализируются вопросы полноты О. Н. систем на подмножествах отрезка  $[0, 1]$ , а также вопросы сходимости и безусловной сходимости ортогональных рядов, поставлен следующий вопрос (см. <sup>(1)</sup>, с. 608): является ли свойство неполноты всюду (см. опр. 4) необходимым и достаточным условием для того, чтобы О. Н. система  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  была системой безусловной сходимости?

Оказывается, что этот вопрос имеет отрицательный ответ как в смысле необходимости, так и в смысле достаточности вышеуказанного условия. Если же в этом вопросе обычную полноту заменить более сильным требованием полноты по рядам из  $L_2$ , то в этом случае в смысле необходимости условия получится положительный ответ. В настоящей статье приводится краткая схема доказательства этих утверждений. Отрицательный ответ на первую часть вопроса фактически содержится в работе (2) (см. также (3), с. 119), где построена О. Н. система  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  такая, что

$$f_n(x) = b_n x^{n-1}, \quad x \in \left[ \frac{1}{n+1}, 1 \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

где  $b_n$  — отличные от нуля числа.

В самом деле, эта система по теореме Мюнца полна на любом отрезке  $[\delta, 1]$ ,  $0 < \delta < 1$ , и вместе с тем  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  является системой безусловной сходимости, ибо, как легко видеть, любой ряд  $\sum a_n f_n(x)$ , где  $\sum a_n^2 < +\infty$ , абсолютно сходится во всех точках интервала  $(0, 1)$ . Иначе обстоит дело, когда О. Н. система  $\{\varphi_n(x)\}$  полна по рядам из  $L_2$  на множестве  $E$ ,  $E \subset [0, 1]$  положительной меры. Верна следующая

**Теорема 1.** Если О. Н. система  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  полна по рядам из  $L_2$  на некотором множестве  $E \subset [0, 1]$ ,  $\mu(E) > 0$ , то существуют перестановка  $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$  натуральных чисел и последовательность  $\{a_k\}$ ,  $\sum a_k^2 < +\infty$ , такие, что ряд  $\sum a_k \varphi_{\nu_k}(x)$  расходится почти всюду на множестве  $E$ .

Эта теорема является обобщением известной теоремы Ульянова (4) и Олевского (5), согласно которой для любой полной в  $L_2[0, 1]$  О. Н. системы существует расходящийся почти всюду на  $[0, 1]$  ряд  $\sum a_k \varphi_{\nu_k}(x)$ , где  $\sum a_k^2 < +\infty$ ,  $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$  — некоторая перестановка натуральных чисел.

Теорема 1 означает также, что явление расходимости почти всюду переставленных рядов по полным О. Н. системам имеет локальный характер — для неполных систем это явление сохраняется на тех множествах, где они полны по рядам из  $L_2$ .

Для доказательства теоремы 1 в пространстве  $L_2(E)$ , где  $E$  множество, на котором система  $\{\varphi_n(x)\}$  полна по рядам из  $L_2$ , вводится новая норма  $\|\cdot\|^*$  следующим образом.

Для  $f(x) \in L_2(E)$  обозначается через  $M_f$  множество функций  $F(x) \in L_2[0, 1]$ , являющихся суммами в  $L_2[0, 1]$  рядов по системе  $\{\varphi_n(x)\}$  и совпадающих с  $f(x)$  почти всюду на  $E$ . Полагается

$$\|f\|^* = \inf_{F \in M_f} \|F\|. \quad (4)$$

Множество  $L_2(E)$  с нормой  $\|\cdot\|^*$  является полным нормированным пространством и оператор  $Af = f$ , отображающий это пространство на пространство  $L_2(E)$  с нормой  $\|f\|_E$ ,  $f \in L_2(E)$ , непрерывен. Отсюда применением теоремы Банаха о непрерывности обратного оператора получается существование постоянной величины  $M > 0$ , такой, что для любой  $f(x) \in L_2(E)$  существует ряд  $\sum a_k \varphi_{\nu_k}(x)$ ,  $\sum a_k^2 < +\infty$ ,

сумма которого (в метрике  $L_2[0, 1]$ ) совпадает с  $f(x)$  почти всюду на  $E$  и

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right\| \leq M \|f\|_E, \quad n=1, 2, \dots \quad (5)$$

Этот факт играет вспомогательную роль при установлении следующей основной леммы.

Лемма 1. Пусть О. Н. система  $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  полна по рядам из  $L_2$  на  $E$ .  $E \subset [0, 1]$ ,  $\mu(E) > 0$ , и  $A \subset E$ ,  $\mu(A) > 0$ . Тогда для любого натурального  $N$  и положительного  $\tau > 0$  существуют  $a_{N+1}$ ,  $a_{N+2}, \dots, a_m$ ;  $m > N$  и функция  $r(A, x)$  такие, что

$$r(A, x) = 1, \quad x \in A_1; \quad r(A, x) = -1, \quad x \in A_2; \quad r(A, x) = 0, \quad x \in \bar{A}, \quad (6)$$

где

$$A_1 \cup A_2 = A, \quad \mu(A_1) = \mu(A_2) = 1/2\mu(A); \quad (7)$$

$$\left\| \sum_{i=N+1}^m a_i \varphi_i(x) - r(A, x) \right\|_E \leq \tau; \quad (8)$$

$$\left\| \sum_{i=N+1}^n a_i \varphi_i(x) \right\| \leq M \|r(A, x)\|_E = M \cdot \|r(A, x)\|_A, \quad (9)$$

где  $M$  — постоянная, зависящая только от  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  и от  $E$ .

Эта лемма дает возможность свести доказательство теоремы 1 к результату Ульянова (4) о существовании рядов из  $L_2$  по системе Хаара, расходящихся почти всюду на  $[0, 1]$  после перестановок. Заметим, что этот результат Ульянова лежит также в основе доказательства вышеупомянутой теоремы Ульянова—Олевского. Сама лемма 1 доказывается методом, приведенным в работе (6) (см. (6), леммы 1.3 и 3.3), который существенно отличается от методов, применяемых в подобных вопросах в случае полных в  $L_2[0, 1]$  ортонормированных систем.

Теперь приведем простой и наглядный пример О. Н. системы, дающей отрицательный ответ на вторую часть вышеприведенной задачи Прайса.

Пусть  $\{r_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — система Радемахера, т. е.  $r_n(x) = \text{sign} \sin 2^n \pi x$ ,  $n=1, 2, \dots$  и  $\{n_k\}$  — последовательность натуральных чисел такая, что

$$n_k > n_{k-1} + 2, \quad k \geq 2, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (n_k - n_{k-1}) = +\infty \quad (10)$$

и если обозначить

$$m_k = n_{k+1} - n_k, \quad k \geq 1, \quad N_1 = 1, \quad N_j = j + \sum_{k=1}^{j-1} m_k, \quad j \geq 2, \quad (11)$$

то

$$\sum_{n=0}^{m_j} \frac{1}{N_j + n} > 1. \quad (12)$$

Для каждого фиксированного  $k$  по аналогии с функциями Хаара

определим функции  $\{\chi_{ki}^{(n)}(x)\}$ ,  $1 \leq i \leq 2^n$ ,  $0 \leq n \leq m_k$  следующим образом:

$$\chi_{k1}^{(0)}(x) = r_{n_k}(x),$$

$$\chi_{k1}^{(1)}(x) = \sqrt{2} r_{n_k-1}(x) \chi_{E_{k1}^{(1)}}(x), \quad \chi_{k2}^{(1)}(x) = \sqrt{2} r_{n_k+1}(x) \chi_{E_{k2}^{(1)}}(x), \quad (13)$$

где  $\chi_{E_{k1}^{(1)}}(x)$  и  $\chi_{E_{k2}^{(1)}}(x)$  — характеристические функции множеств  $E_{k1}^{(1)} = \{x; \chi_{k1}^{(0)}(x) > 0\}$ ,  $E_{k2}^{(1)} = \{x; \chi_{k1}^{(0)}(x) < 0\}$ . Далее, если определены функции  $\chi_{ki}^{(n-1)}(x)$ ,  $1 \leq i \leq 2^{n-1}$ , обозначаем

$$E_{k2i-1}^{(n)} = \{x; \chi_{ki}^{(n-1)}(x) > 0\}, \quad E_{k2i}^{(n)} = \{x; \chi_{ki}^{(n-1)}(x) < 0\} \quad (14)$$

и полагаем

$$\chi_{k2i-1}^{(n)}(x) = \sqrt{2^n} r_{n_k+n}(x) \chi_{E_{k2i-1}^{(n)}}(x); \quad \chi_{k2i}^{(n)}(x) = \sqrt{2^n} r_{n_k+n}(x) \chi_{E_{k2i}^{(n)}}(x). \quad (15)$$

Полученная система  $\{\chi_{ki}^{(n)}(x)\}$ ,  $1 \leq i \leq 2^n$ ,  $0 \leq n \leq m_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  ортогональна, нормирована и обладает следующими свойствами:

а) В сумме

$$\sum_{n=0}^{m_k} \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{N_k+n} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \chi_{ki}^{(n)}(x) \quad (16)$$

слагаемые можно переставлять таким образом, чтобы для вновь полученной суммы

$$\sum_{v=0}^{2^{m_k+1}-1} a_v f_v^{(k)}(x) \quad (17)$$

почти всюду на  $[0, 1]$  имело место неравенство

$$\sup_{1 \leq p \leq q < 2^{m_k+1}} \left| \sum_{v=p}^q a_v f_v^{(k)}(x) \right| \geq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m_k} \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{N_k+n} \frac{1}{\sqrt{2^n}} |\chi_{ki}^{(n)}(x)| > \frac{1}{2}. \quad (18)$$

б) Если  $\Delta$  — двоичный интервал, т. е.  $\Delta = (j-1/2^N, j/2^N)$ , и натуральное  $p$  выбрано так, что  $n_p > N+2$ , то любая линейная комбинация  $H(x)$  вида

$$H(x) = \sum_{k=p}^q \sum_{n=0}^{m_k} \sum_{i=1}^{2^n} c_{ki}^{(n)} \chi_{ki}^{(n)}(x), \quad q \geq p \quad (19)$$

обладает тем свойством, что для любого  $c$

$$\mu(\{x; |H(x)| > c\} \cap \Delta') = \mu(\{x; |H(x)| > c\} \cap \Delta''), \quad (20)$$

где  $\Delta'$ ,  $\Delta''$  соответственно левая и правая половины интервала  $\Delta$ .

Из свойства а), которое является следствием известной леммы Никишина—Ульянова (?), вытекает, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m_k} \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{N_k+n} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \chi_{ki}^{(n)}(x), \quad (21)$$

который является рядом из  $L_2$ , после некоторой перестановки членов расходится почти всюду на  $[0, 1]$ . Таким образом, построенная О. Н. система не является системой безусловной сходимости. Вместе с тем, построенная система неполна всюду. Это легко доказать, основываясь

на свойстве  $\beta$ ) (выполнение этого свойства легко усматривается из построения системы), и из следующей теоремы, доказанной в работе (2) (см. также (3), с. 116, теорема 12).

**Теорема 2.** Если система  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  почти везде конечных на множестве  $E$  измеримых функций обладает тем свойством, что любая, определенная на  $E$  измеримая функция является пределом в смысле сходимости по мере на  $E$  некоторой последовательности конечных линейных комбинаций функций  $f_n(x)$ ,  $n=1, 2, \dots$ ; то для любого натурального  $N$  этим же свойством обладает и подсистема  $\{f_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ .

Предполагая, что система  $\{\gamma_{ki}^{(n)}(x)\}$  полна на некотором множестве  $E$ ,  $\mu(E) > 0$ , в метрике  $L_2(E)$  берется двончный интервал  $\Delta = (j-1/2^N, j/2^N)$ , для которого

$$\mu(E \cap \Delta') > \frac{7}{8} \mu(\Delta'), \quad \mu(E \cap \Delta'') > \frac{7}{8} \mu(\Delta''), \quad (22)$$

где  $\Delta'$ ,  $\Delta''$  левая и правая половины интервала  $\Delta$ .

Можно доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \cap \Delta' \\ 0, & x \in E \cap \Delta'' \end{cases}$$

не является пределом в смысле сходимости по мере на множестве  $E \cap \Delta$  никакой последовательности линейных комбинаций подсистемы  $\{\gamma_{ki}^{(n)}(x)\}$ ,  $1 \leq i \leq 2^n$ ,  $0 \leq n \leq m_k$ ,  $k=p, p+1, \dots$ ; где  $p$  такое, что  $n_p > N+2$ . Это противоречит теореме 2 и, следовательно, система будучи неполной на  $\Delta \cap E$  в смысле сходимости по мере не будет полной в метрике  $L_2(E \cap \Delta)$ .

В заключение сделаем два замечания.

**Замечание 1.** Так как построенная система содержит ограниченную подсистему сходимости  $\{r_{nk}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ , то путем преобразований матрицами, рассмотренными А. М. Олевским (см. (8), с. 97 и (9)), из нее можно получить различные не полные всюду, ограниченные О. Н. системы, которые вместе с тем не являются системами безусловной сходимости.

**Замечание 2.** Если О. Н. система  $\{\varphi_n(x)\}$  полна по рядам из  $L_2$  на некотором множестве  $E \subset [0, 1]$ ,  $\mu(E) > 0$ , то, как нетрудно убедиться, отрезок  $[0, 1]$  разбивается на два непересекающиеся множества  $A$  и  $B$  таких, что система  $\{\varphi_n(x)\}$  не полна по рядам из  $L_2$  ни на одном подмножестве множества  $B$ , а множество  $A$  представляется как объединение счетного числа попарно непересекающихся множеств  $A_k$ , на каждом из которых  $\{\varphi_n(x)\}$  полна по рядам из  $L_2$ .

При помощи теоремы 1 нетрудно доказать существование ряда  $\sum a_k \varphi_k(x)$ ,  $\sum a_k^2 < +\infty$ , который после некоторой перестановки членов расходится почти всюду на множестве  $A$ .

Ոչ պայմանական զուգամիտության համակարգեր շհանդիսացող օրթոգոնալ համակարգերի մասին

Հոդվածում հետազոտված է օրթոգոնալ սիստեմների դրական շափի բազմությունների վրա տարբեր իմաստներով լրիվության հատկությունների կապը այդ սիստեմներով վերլուծությունների ոչ պայմանական համարյա ամենուրեք զուգամիտության հետ:

Ապացուցված է ամենուրեք ոչ լրիվ այնպիսի օրթոգոնալ սիստեմների գոյությունը, որոնք չեն հանդիսանում ոչ պայմանական զուգամիտության սիստեմներ: Ապացուցված է նաև, որ որևէ դրական շափի բազմության վրա 1.2-ի շարքերով լրիվ օրթոգոնալ սիստեմը տեղափոխությունից հետո դառնում է տարամիտության համակարգ:

Ստացված արդյունքները հանդիսանում են Ժ. Պրայսի կողմից<sup>(1)</sup> ակնարկային հոդվածում գրված խնդրի լրիվ լուծումը<sup>(1)</sup>, էջ 608):

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> I. I. Price, Amer. Math. Month., vol. 82, № 6 (1975). <sup>2</sup> А. А. Талалян, Изв. АН АрмССР, сер. физ-мат. наук, т. 10, № 3 (1957). <sup>3</sup> А. А. Талалян, УМН, т. 15, вып. 5 (95), (1960). <sup>4</sup> П. Л. Ульянов, УМН, т. 16, № 3 (1961). <sup>5</sup> А. М. Олевский, ДАН СССР, т. 138 (1961). <sup>6</sup> А. А. Талалян, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 3 № 4—5 (1968). <sup>7</sup> Е. М. Никишин, П. Л. Ульянов, УМН, т. 22, № 3 (1967). <sup>8</sup> А. М. Olevskii, Fourler series with respekt to general orthogonal systems, Springer—Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1975. <sup>9</sup> А. А. Талалян, Известия АН Арм. ССР, Математика, т. 10, № 3 (1975).



УДК 539.376

МЕХАНИКА

М. А. Задоян

Некоторые задачи концентрации напряжений в угловой  
 точке контактной поверхности составного тела со  
 степенным упрочнением

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 3/VII 1981)

Вопросам концентрации напряжений в угловой точке составного  
 линейно-упругого тела посвящены работы (1-19) и др.

Фундаментальное исследование в этом направлении, сделанное  
 К. С. Чобаняном (3), привело к открытию явления малонапряженности,  
 которое имеет место в угловой точке составного нагруженного  
 упругого тела. Это открытие дает возможность найти реальные пути  
 и новые перспективы для расширения и выявления ресурсов прочно-  
 сти соединения разнородных тел.

В данном сообщении рассматриваются задачи концентрации напряжений  
 в угловой точке контактной поверхности соединяемых тел,  
 материалы которых считаются несжимаемыми и подчиняются степенно-  
 му закону упрочнения. Исследуются случаи плоской деформации,  
 плоского напряженного состояния, кручения тела вращения и осе-  
 симметричной деформации пластических тел со степенным упрочне-  
 нием.

1. *Плоская деформация.* Пусть два призматических тела, сое-  
 единенные по боковым поверхностям полным прилипанием и нагру-  
 женные по другим боковым поверхностям, находятся в состоянии  
 плоской деформации. В поперечном сечении этого тела в окрестности  
 угловой точки поверхности соединения проведем полярную систему  
 координат (рис. 1).

В каждой клиновидной области компоненты напряжений удов-  
 летворяют дифференциальным уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} = 0,$$

соотношениям между компонентами деформаций, перемещений и  
 напряжений

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2} K \sigma_0^{n-1} (\sigma_r - \sigma);$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{2} K \sigma_0^{n-1} (\sigma_{\theta} - \sigma); \quad (2)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} K \sigma_0^{n-1} \tau_{r\theta},$$

закону упрочнения

$$\sigma_0 = k \varepsilon_0^m. \quad (3)$$

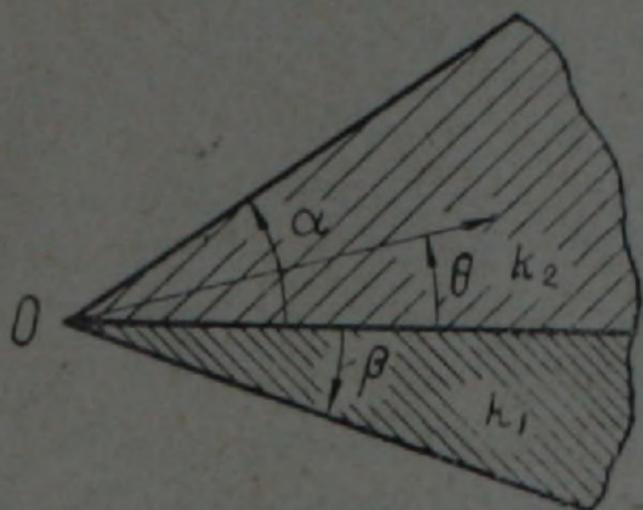


Рис. 1.

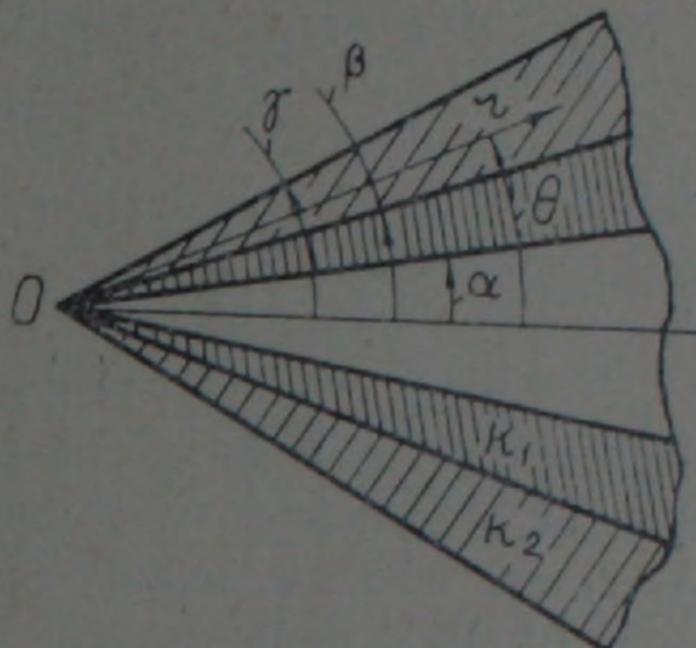


Рис. 2.

Здесь  $\sigma = 1/2(\sigma_r + \sigma_{\theta})$ ,  $m = 1/n$ ,  $k = 1/K^m$  механические параметры материалов, причем  $m$  для обоих материалов принимаем одинаковым, а  $k$  — различным,

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_{\theta})^2 + 4\tau_{r\theta}^2}, \quad \varepsilon_0 = 2 \sqrt{\varepsilon_r^2 + \gamma_{r\theta}^2}. \quad (4)$$

Введя в клиновидных областях  $-\beta \leq \theta \leq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \alpha$  соответственно функции  $f_1(\theta)$ ,  $f_2(\theta)$ , решения системы уравнений (1) — (3) в этих областях представим в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ri} &= \frac{k_i r^{-\lambda m}}{\lambda m} \left\{ \left[ \frac{f_i' + \lambda(2-\lambda)f_i}{\chi_i} \right]' + 4(1-\lambda) \frac{f_i'}{\chi_i} \right\}; \\ \sigma_{\theta i} &= \frac{k_i r^{-\lambda m}}{\lambda m} \left\{ \left[ \frac{f_i' + \lambda(2-\lambda)f_i}{\chi_i} \right]' + 4(1-\lambda)(1-\lambda m) \frac{f_i'}{\chi_i} \right\}; \\ \tau_{r\theta i} &= k_i r^{-\lambda m} \frac{f_i' + \lambda(2-\lambda)f_i}{\chi_i}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\chi_i = (\sqrt{4(1-\lambda)^2 f_i'^2 + [f_i' + \lambda(2-\lambda)f_i]^2})^{1-m};$$

$$u_i = r^{1-\lambda} f_i', \quad v_i = -(2-\lambda) r^{1-\lambda} f_i \quad (i=1, 2).$$

Здесь и в дальнейшем  $\lambda$  постоянный параметр, а  $k_1, k_2$  модули деформации соответствующих материалов. Для функции  $f_i(\theta)$  приходим к дифференциальному уравнению

$$\left[ \frac{f_i' + \lambda(2-\lambda)f_i}{\chi_i} \right]'' + \lambda m(2-\lambda m) \frac{f_i' + \lambda(2-\lambda)f_i}{\chi_i} + 4(1-\lambda)(1-\lambda m) \left( \frac{f_i'}{\chi_i} \right)' = 0. \quad (6)$$

В случае краевых условий первого рода на свободных поверхностях имеем условия

$$\left[ \frac{f_i' + \lambda(2-\lambda)f_i}{\gamma_i} \right]' + 4(1-\lambda)(1-\lambda m) \frac{f_i'}{\gamma_i} = 0; \quad (7)$$

$$f_i' + \lambda(2-\lambda)f_i = 0 \quad \text{при } \theta = -\beta, \alpha,$$

на контактной поверхности  $\theta = 0$  имеем

$$\left[ \frac{f_2' + \lambda(2-\lambda)f_2}{\gamma_2} \right]' + 4(1-\lambda)(1-\lambda m) \frac{f_2'}{\gamma_2} = \mu \left\{ \left[ \frac{f_2' + \lambda(2-\lambda)f_2}{\gamma_1} \right]' + \right. \quad (8)$$

$$\left. + 4(1-\lambda)(1-\lambda m) \frac{f_2'}{\gamma_1} \right\}, \quad \frac{f_2' + \lambda(2-\lambda)f_2}{\gamma_2} = \mu \frac{f_1' + \lambda(2-\lambda)f_1}{\gamma_1},$$

$$f_1 = f_2, \quad f_1' = f_2', \quad \mu = k_1/k_2.$$

Трехточечная краевая задача (6)–(8) на собственные значения  $\lambda$  в принципе определяет некоторое уравнение гиперповерхности  $\Phi(\lambda, m, \mu, \alpha, \beta) = 0$ . Условие положительности действительной части  $\lambda$  определяет область концентрации напряжений в зависимости от параметров  $m, \mu, \alpha, \beta$ .

В случае неоднородности материалов в зависимости (3) постоянная  $k$  заменяется функцией  $k(r, \theta)$ . Когда для различных материалов эта функция имеет вид  $k_i r^{-\nu} \omega_i(\theta)$ , где  $k_i, \nu$  — постоянные, а  $\omega_i(\theta)$  — функции, определяемые из эксперимента, будем иметь

$$\sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta} = \frac{k_i r^{-\lambda m - \nu}}{\lambda m + \nu} \left\{ \left( \frac{\omega_i [f_i' + \lambda(2-\lambda)f_i]}{\gamma_i} \right)' + 4(1-\lambda) \left( 1 - \frac{\lambda m + \nu}{2} \pm \frac{\lambda m + \nu}{2} \right) \frac{\omega_i f_i}{\gamma_i} \right\} \quad (9)$$

$$\tau_{r\theta} = k_i r^{-\lambda m - \nu} \frac{\omega_i [f_i' + \lambda(2-\lambda)f_i]}{\gamma_i}, \quad u_i = r^{-\lambda+1} f_i', \quad v_i = (\lambda-2)r^{-\lambda+1} f_i,$$

где функции  $f_i$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left( \frac{\omega_i [f_i' + \lambda(2-\lambda)f_i]}{\gamma_i} \right)'' + (\lambda m + \nu)(2 - \lambda m - \nu) \frac{\omega_i [f_i' + \lambda(2-\lambda)f_i]}{\gamma_i} + \quad (10)$$

$$+ 4(1-\lambda)(1 - \lambda m - \nu) \frac{\omega_i f_i'}{\gamma_i} = 0 \quad (i=1, 2)$$

с краевыми условиями: на контактной поверхности  $\theta = 0$

$$f_1(0) = f_2(0), \quad f_1'(0) = f_2'(0),$$

$$\left( \frac{\omega_2 [f_2' + \lambda(2-\lambda)f_2]}{\gamma_2} \right)' + 4(1-\lambda)(1 - \lambda m - \nu) \frac{\omega_2 f_2'}{\gamma_2} = \mu \left\{ \frac{\omega_1 [f_1' + \lambda(2-\lambda)f_1]}{\gamma_1} + 4(1-\lambda)(1 - \lambda m - \nu) \frac{\omega_1 f_1'}{\gamma_1} \right\} \quad (11)$$

$$\frac{f_2' + \lambda(2-\lambda)f_2}{\gamma_2} = \mu_* \frac{f_1' + \lambda(2-\lambda)f_1}{\gamma_1}, \quad \mu_* = \frac{k_1 \omega_1(0)}{k_2 \omega_2(0)};$$

на свободных поверхностях  $\theta = -\beta, \theta = \alpha$ , соответственно

$$\left( \frac{\omega_i [f_i' + \lambda(2-\lambda)f_i]}{\gamma_i} \right)'' + 4(1-\lambda)(1-\lambda m - \nu) \frac{\omega f_i}{\gamma_i} = 0 \quad (12)$$

$$f_i' + \lambda(2-\lambda)f_i = 0, \quad (i = 1, 2)$$

2. *Плоско-напряженное состояние.* В этом случае пренебрегаем утолщением составной пластинки, при этом система уравнений (1)–(3) останется без изменения, но вместо (4) будем иметь

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 + 3\tau_{r\theta}^2}; \quad \varepsilon_0 = 2 \sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_r \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2 + \gamma_{r\theta}^2}$$

и кроме того имеем  $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta)$ ;  $\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0$ .

Вводя в каждую из клиновидных областей  $-\beta \leq \theta \leq 0$  и  $0 \leq \theta \leq \alpha$  соответственно неизвестные функции  $f_1(\theta)$ ,  $\psi_1(\theta)$  и  $f_2(\theta)$ ,  $\psi_2(\theta)$ , компоненты напряжений и перемещений представим в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ri} &= 2k_i r^{-\lambda m} \frac{\psi_i' + (3-2\lambda)f_i}{\gamma_i}; & \sigma_{\theta i} &= 2k_i r^{-\lambda m} \frac{2\psi_i' + (3-\lambda)f_i}{\gamma_i}; \\ \tau_{r\theta i} &= k_i r^{-\lambda m} \frac{f_i' - \lambda\psi_i}{\gamma_i}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\gamma_i = \left( \sqrt{4(1-\lambda)^2 f_i'^2 + 4(1-\lambda)f_i(\psi_i' + f_i) + 4(\psi_i' + f_i)^2 + (f_i' - \lambda\psi_i)^2} \right)^{1-m};$$

$$u_i = r^{1-\lambda} f_i; \quad v_i = r^{1-\lambda} \psi_i,$$

где функции  $f_i(\theta)$  и  $\psi_i(\theta)$  удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left( \frac{f_i' - \lambda\psi_i}{\gamma_i} \right)' - 2 \frac{(1+\lambda m)\psi_i' + \lambda[1+m(3-2\lambda)]f_i}{\gamma_i} = 0; \quad (14)$$

$$\left[ \frac{2\psi_i' + (3-\lambda)f_i}{\gamma_i} \right]' + \left( 1 - \frac{1}{2}\lambda m \right) \frac{f_i' - \lambda\psi_i}{\gamma_i} = 0.$$

В случае однородных краевых условий на свободных поверхностях имеем

$$2\psi_i' + (3-\lambda)f_i = 0, \quad f_i' - \lambda\psi_i = 0 \quad \text{при } \theta = -\beta, \alpha, \quad (15)$$

а на контактной поверхности — условия

$$\frac{2\psi_2' + (3-\lambda)f_2}{\gamma_2} = \mu \frac{2\psi_1' + (3-\lambda)f_1}{\gamma_1}, \quad \frac{f_2' - \lambda\psi_2}{\gamma_2} = \mu \frac{f_1' - \lambda\psi_1}{\gamma_1}, \quad (16)$$

$$f_1 = f_2, \quad \psi_1 = \psi_2 \quad \text{при } \theta = 0.$$

Краевая задача (14)–(16) на собственные значения определяет некоторую гиперповерхность  $\Phi(\lambda, m, \mu, \alpha, \beta) = 0$ . Первый положительный корень этого уравнения при условии  $\text{Re } \lambda > 0$  определяет область концентрации напряжений в зависимости от параметров  $m, \mu, \alpha, \beta$ .

3. *Кручение тела вращения.* Пусть составное тело вращения, материалы которого распределены симметрично относительно оси, находится в состоянии кручения. В окрестности угловой точки пользуемся сферической координатной системой (рис. 2). Компоненты нап-

ряжений в каждой области  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ,  $\beta \leq \theta \leq \gamma$  удовлетворяют дифференциальному уравнению равновесия

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta - \frac{3}{r} \tau_{r\varphi} = 0, \quad (17)$$

соотношениям между компонентами сдвигов, перемещений и напряжений

$$2\gamma_{r\varphi} = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} = K\sigma_0^{n-1}\tau_{r\varphi}; \quad (18)$$

$$2\gamma_{\theta\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{w}{r} \operatorname{ctg} \theta = K\sigma_0^{n-1}\tau_{\theta\varphi},$$

закону упрочнения

$$\sigma_0 = k\varepsilon_0^m; \quad \sigma_0 = \sqrt{\tau_{r\varphi}^2 + \tau_{\theta\varphi}^2}; \quad \varepsilon_0 = 2\sqrt{\gamma_{r\varphi}^2 + \gamma_{\theta\varphi}^2}. \quad (19)$$

Вводя в областях  $\alpha \leq \theta \leq \beta$  и  $\beta \leq \theta \leq \gamma$  соответственно функции  $f_1(\theta)$  и  $f_2(\theta)$ , решение системы (17)–(19) представим в виде

$$\tau_{r\varphi i} = -k_i r^{-\lambda m} \frac{f_i}{\gamma_i} \sin^m \theta; \quad \tau_{\theta\varphi i} = k_i r^{-\lambda m} \frac{f_i}{\gamma_i} \sin^m \theta; \quad (20)$$

$$\gamma_i = (\sqrt{f_i'^2 + \lambda^2 f_i^2})^{1-m}; \quad \omega_i = r^{1-\lambda} f_i \sin \theta,$$

причем  $f_i$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left( \frac{f_i' \sin^{m+2\theta}}{\gamma_i} \right)' - \lambda(3-\lambda m) \frac{f_i \sin^{m+2\theta}}{\gamma_i} = 0. \quad (21)$$

В случае граничных условий первого рода имеем

$$f_i' = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \alpha, \gamma,$$

$$\frac{f_2}{\gamma_2} = \mu \frac{f_1}{\gamma_1}, \quad f_1 = f_2 \quad \text{при} \quad \theta = \beta. \quad (22)$$

Из краевой задачи (21)–(22) при условии  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  определяется область концентрации напряжений в зависимости от параметров  $m$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

При неоднородности материалов в зависимости (19) постоянная  $k$  заменяется функцией  $k(r, \theta)$ . В случае, когда для различных материалов эта функция имеет вид  $k_i r^{-\nu} \omega_i(\theta)$ , получаем

$$\tau_{r\varphi i} = -k_i r^{-\lambda m - \nu} \frac{\omega_i f_i \sin^m \theta}{\gamma_i}, \quad \tau_{\theta\varphi i} = k_i r^{-\lambda m - \nu} \frac{\omega_i f_i' \sin^m \theta}{\gamma_i}, \quad (23)$$

$$\omega_i = r^{-\lambda+1} f_i \sin \theta$$

где  $f_i$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left( \frac{\omega_i f_i' \sin^{m+2\theta}}{\gamma_i} \right)' - \lambda(3-\lambda m - \nu) \frac{\omega_i f_i \sin^{m+2\theta}}{\gamma_i} = 0 \quad (24)$$

с граничными условиями: на контактной поверхности  $\theta = \beta$

$$\frac{f_2}{\gamma_2} = \mu \frac{f_1}{\gamma_1}, \quad \mu = \frac{k_1 \omega_1(\beta)}{k_2 \omega_2(\beta)}. \quad (25)$$

и на свободных поверхностях:  $f_1(\alpha) = f_2(\gamma) = 0$ .

4. *Осесимметричная задача.* Положим, что составное тело вращения (рис. 2) теперь находится в условии осесимметричной деформации. В этом случае компоненты напряжений удовлетворяют в каждой области системы дифференциальных уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta) &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [(\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\theta}] &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

соотношениям между компонентами деформаций, перемещений и напряжений

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2} K \sigma_0^{n-1} (\sigma_r - \sigma); \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{2} K \sigma_0^{n-1} (\sigma_\theta - \sigma); \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{u}{r} + \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \theta = \frac{1}{2} K \sigma_0^{n-1} (\sigma_\varphi - \sigma); \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} K \sigma_0^{n-1} \tau_{r\theta} \end{aligned} \quad (27)$$

закону упрочнения материала

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= k \varepsilon_0^m; \\ \sigma_0 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + 6\tau_{r\theta}^2}; \\ \varepsilon_0 &= 2 \sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_r \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2 + \gamma_{r\theta}^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Введя в областях  $\alpha \leq \theta \leq \beta$  и  $\beta \leq \theta \leq \gamma$  соответственно функции  $f_1(\theta)$  и  $f_2(\theta)$ , решение системы уравнения (26)–(28) представим в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{r1} &= \sigma_{\theta 1} + 2k_1 r^{-\lambda m} \frac{(3-2\lambda)f_1' - \lambda f_1 \operatorname{ctg} \theta}{\chi_1}; \\ \sigma_{\varphi 1} &= \sigma_{\theta 1} + 2k_1 r^{-\lambda m} \frac{(3-\lambda)(f_1' - f_1 \operatorname{ctg} \theta)}{\chi_1}; \\ \sigma_{\theta 1} &= \frac{k_1 r^{-\lambda m}}{\lambda m} \left\{ \left[ \frac{f_1' + (f_1 \operatorname{ctg} \theta)' + \lambda(3-\lambda)f_1}{\chi_1} \right]' + \frac{f_1' + (f_1 \operatorname{ctg} \theta)' + \lambda(3-\lambda)f_1}{\chi_1} \operatorname{ctg} \theta + \right. \\ &\quad \left. + 6(1-\lambda) \frac{f_1' + f_1 \operatorname{ctg} \theta}{\chi_1} - 2\lambda m \frac{(3-2\lambda)f_1' - \lambda f_1 \operatorname{ctg} \theta}{\chi_1} \right\}; \\ \tau_{r\theta 1} &= k_1 r^{-\lambda m} \frac{f_1' + (f_1 \operatorname{ctg} \theta)' + \lambda(3-\lambda)f_1}{\chi_1}; \end{aligned} \quad (29)$$

$$\chi_1 = \sqrt{4(1-\lambda)^2 |f_1' + f_1 \operatorname{ctg} \theta|^2 + 4(1-\lambda)(f_1' + f_1 \operatorname{ctg} \theta) |f_1 \operatorname{ctg} \theta - (2-\lambda)f_1| +}$$

$$+4[f_i \operatorname{ctg} \theta - (2-\lambda)f_i']^2 + [f_i'' + (f_i \operatorname{ctg} \theta)' + \lambda(3-\lambda)f_i']^2)^{1-m};$$

$$u_i = r^{1-\lambda}(f_i' + f_i \operatorname{ctg} \theta); \quad v_i = -(3-\lambda)r^{1-\lambda}f_i. \quad (30)$$

Здесь функция  $f_i(\theta)$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{f_i'' + (f_i \operatorname{ctg} \theta)' + \lambda(3-\lambda)f_i'}{\gamma_i} \right\}'' + \left\{ \frac{f_i' + (f_i \operatorname{ctg} \theta)' + \lambda(3-\lambda)f_i}{\gamma_i} \operatorname{ctg} \theta \right\}' + \\ & + 6(1-\lambda) \left( \frac{f_i' + f_i \operatorname{ctg} \theta}{\gamma_i} \right)' - 2i.m \left[ \frac{(3-2\lambda)f_i' - i f_i \operatorname{ctg} \theta}{\gamma_i} \right]' + \\ & + i.m(3-\lambda.m) \frac{f_i'' + (f_i \operatorname{ctg} \theta)' + \lambda(3-\lambda)f_i'}{\gamma_i} + 2i.m(3-\lambda) \frac{f_i \operatorname{ctg} \theta - f_i'}{\gamma_i} \operatorname{ctg} \theta = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

В случае когда на свободных поверхностях отсутствуют напряжения, имеем условия: на свободных поверхностях —

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{f_i'' + (f_i \operatorname{ctg} \theta)' + \lambda(3-\lambda)f_i'}{\gamma_i} \right]' + \frac{f_i' + (f_i \operatorname{ctg} \theta)' + \lambda(3-\lambda)f_i}{\gamma_i} \operatorname{ctg} \theta + \\ & + 6(1-\lambda) \frac{f_i' + f_i \operatorname{ctg} \theta}{\gamma_i} - 2i.m \frac{(3-2\lambda)f_i' - i f_i \operatorname{ctg} \theta}{\gamma_i} = 0; \end{aligned} \quad (32)$$

$$f_i'' + (f_i \operatorname{ctg} \theta)' + \lambda(3-\lambda)f_i' = 0 \quad \text{при } \theta = \alpha, \gamma;$$

на контактной поверхности

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{f_2'' + (f_2 \operatorname{ctg} \theta)' + \lambda(3-\lambda)f_2'}{\gamma_2} \right]' + \frac{f_2' + (f_2 \operatorname{ctg} \theta)' + \lambda(3-\lambda)f_2}{\gamma_2} \operatorname{ctg} \theta + \\ & + 6(1-\lambda) \frac{f_2' + f_2 \operatorname{ctg} \theta}{\gamma_2} - 2i.m \frac{[(3-2\lambda)f_2' - i f_2 \operatorname{ctg} \theta]}{\gamma_2} = \\ & = \mu \left\{ \left[ \frac{f_1'' + (f_1 \operatorname{ctg} \theta)' + \lambda(3-\lambda)f_1'}{\gamma_1} \right]' + \frac{f_1' + (f_1 \operatorname{ctg} \theta)' + \lambda(3-\lambda)f_1}{\gamma_1} \operatorname{ctg} \theta + \right. \\ & \left. + 6(1-\lambda) \frac{f_1' + f_1 \operatorname{ctg} \theta}{\gamma_1} - 2i.m \frac{(3-2\lambda)f_1' - i f_1 \operatorname{ctg} \theta}{\gamma_1} \right\}; \end{aligned} \quad (33)$$

$$\frac{f_2'' + (f_2 \operatorname{ctg} \theta)' + \lambda(3-\lambda)f_2'}{\gamma_2} = \mu \frac{f_1'' + (f_1 \operatorname{ctg} \theta)' + \lambda(3-\lambda)f_1'}{\gamma_1}$$

$$f_1 = f_2, \quad f_1' = f_2' \quad \text{при } \theta = \beta.$$

Краевая задача (31)–(33) на собственные значения принципиально определяет уравнение некоторой гиперповерхности  $\Phi(i, m, \mu, \alpha, \beta, \gamma) = 0$ , а условие  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  разделяет область концентрации напряжений в зависимости от параметров  $m, \mu, \alpha, \beta, \gamma$ .

Рассмотренные здесь краевые задачи на собственные значения можно привести к системам нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра.

Մի քանի խնդիրներ աստիճանային օրենքով ամրապնդվող բազալիդայալ մարմնի միացման մակերևույթի անկյունային կետում լարումների կենտրոնացման վերաբերյալ

Ուսումնասիրվում է անսեղմելի և ամրապնդվող նյութերից կազմված բազալիդայալ մարմնի միացման մակերևույթի անկյունային կետում լարումների կենտրոնացման խնդիրները:

Քննարկվում են հարթ դեֆորմացիայի, հարթ լարվածային վիճակի, պտտման մարմնի ոլորման և առսինցքասիմետրիկ դեֆորմացիաների դեպքերը: Յուրաքանչյուրի դեպքում ուսումնասիրվող խնդիրները բերվում են սեփական արժեքների վերաբերյալ հռակետ եզրային խնդրի՝ ոչ-զծային սովորական դիֆերենցիալ հավասարման կամ հավասարումների համակարգի համար: Սեփական թվի իրական մասի ամենափոքր արժեքի դրական լինելու պայմանը սկզբունքորեն որոշում է լարումների կենտրոնացման տիրույթը՝ կախված խնդրի ֆրզիկական և երկրաչափական պարամետրերից:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- <sup>1</sup> M. L. Williams, Bulletin of the Seismological Society of America, vol. 49 (1959). <sup>2</sup> Зак, Виллямс, ПМ, т. 30, сер. Е, № 1 (1963). <sup>3</sup> К. С. Чобанян, Открытие № 102 (с приоритетом от 22 марта 1967 г.) «Бюлетень открытия и изобретения», № 36, 1971. Ежегодник БСЭ, 1972, стр. 505, Изд-во «Советская энциклопедия».
- <sup>4</sup> О. К. Аксентян, ПММ, т. 31, вып. 1 (1967). <sup>5</sup> С. Х. Геворкян, Изв. АН АрмССР, Механика, т. 21, № 5—6 (1968). <sup>6</sup> К. С. Чобанян, С. Х. Геворкян, Изв. АН АрмССР, Механика, т. 24, № 5, (1971). <sup>7</sup> А. А. Храпков, ПММ, т. 32, вып. 4, (1968). <sup>8</sup> Боджи, ПМ, т. 38, сер. Е, № 2 (1971). <sup>9</sup> А. К. Рао, ZAMM, Bd. 51, № 5, 1971. <sup>10</sup> А. Г. Аветисян, К. С. Чобанян, Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 6 (1972). <sup>11</sup> А. Г. Аветисян, Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 5 (1972). <sup>12</sup> Л. А. Арутюнян, К. С. Чобанян, Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 25, № 4 (1972). <sup>13</sup> В. В. Gdoutos, Theocaris P. S. J. Appl. Mech. Ser. E; vol. 42, № 3 (1975). <sup>14</sup> Л. А. Арутюнян, Изв. АН Арм ССР, Механика, т. 29, № 1 (1976). <sup>15</sup> Р. К. Алексанян, К. С. Чобанян, ПМ, № 6, 1977 (АН УкрССР). <sup>16</sup> К. О. Карамян, Р. К. Алексанян, В. А. Едоян, Труды Арм. НИИСА, вып. 26, Исследования по строительной физике, Ереван, 1976. <sup>17</sup> Р. К. Алексанян, С. А. Мелик-Саркисян, Изв. АН Арм ССР, Механика, т. 31, № 1 (1978). <sup>18</sup> В. А. Едоян, ДАН Арм.ССР, LXXI, №1, 1980. <sup>19</sup> Д. Б. Давидян, И. А. Домблева, Изв. АН Арм.ССР, сер. техн. наук., т. 24, № 2 (1981).

УДК 539.379

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. П. Журавлев, С. А. Назаров, Б. А. Шойхет

Асимптотика вблизи вершины трещины напряженно-деформированного состояния неоднородно стареющих тел

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 11/VI 1981)

1. Пусть  $\Omega$  — плоская связная область с гладкой границей, содержащая разрез  $\Gamma = \{\vec{x} | x_2 = 0, a \leq x_1 \leq b\}$ . Уравнения плоской деформации в декартовых координатах получаются из уравнений трехмерной задачи <sup>(1)</sup> подстановкой условий

$$\begin{aligned} u_i(t, x_1, x_2, x_3) &= u_i(t, x_1, x_2), \quad i = 1, 2, \quad u_3 = 0; \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}(u) \equiv (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad i, j = 1, 2; \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\sigma_{ij,j}(t, \vec{x}) + f_i(t, \vec{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{при } \vec{x} \in \Omega \setminus \Gamma; \quad (1.2)$$

$$\frac{s_{ij}(t, \vec{x})}{2G(t + x(\vec{x}), \vec{x})} = e_{ij}(t, \vec{x}) - \int_0^t R_1(t + x(\vec{x}), \tau + x(\vec{x}), \vec{x}) e_{ij}(\tau, \vec{x}) d\tau, \quad i, j = 1, 2;$$

$$\frac{\sigma(t, \vec{x})}{E_*(t + x(\vec{x}), \vec{x})} = e(t, \vec{x}) - \int_0^t R_2(t + x(\vec{x}), \tau + x(\vec{x}), \vec{x}) e(\tau, \vec{x}) d\tau; \quad (1.3)$$

$$e = (e_{11} + e_{22})/3, \quad \varepsilon_{ij} = \delta_{ij} e + e_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \delta_{ij} \sigma + s_{ij}, \quad i, j = 1, 2; \quad (1.4)$$

$$u_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{при } \vec{x} \in S_u, \quad \sigma_{ij} n_j = P_i(t, \vec{x}) \quad \text{при } \vec{x} \in S_p, \quad S_u \cup S_p = \partial\Omega; \quad (1.5)$$

$$\sigma_{12} = g_1^\pm(t, \vec{x}), \quad \sigma_{22} = g_2^\pm(t, \vec{x}) \quad \text{при } \vec{x} \in \Gamma^\pm. \quad (1.6)$$

Здесь  $u_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  — декартовы компоненты перемещений, напряжений и деформаций соответственно;  $s_{ij}, e_{ij}$  — компоненты девиаторов напряжений и деформаций;  $\sigma, e$  — их шаровые части;  $E_*(t, \vec{x}), R_2(t, \tau, \vec{x})$  — модуль объемного расширения и ядро релаксации при всестороннем растяжении (сжатии);  $G(t, \vec{x}), R_1(t, \tau, \vec{x})$  — модуль сдвига и ядро релаксации при сдвиге;  $x(\vec{x})$  — функция неоднородного старения, характеризующая закон изменения возраста материала;  $f_i, P_i, g_i^\pm$  — объемные и поверхностные нагрузки.

2. Решение будем рассматривать на произвольном отрезке времени  $[0, T]$ . Сформулируем ограничения, при которых существует решение задачи ползучести. Пусть при  $\forall t$  нагрузки  $f_i, P_i, g_i^\pm$  суммируемы с квадратом и кусочно-непрерывны\* по  $t$  как отображения от-

\* Т. е. допускается мгновенное изменение нагрузки в отдельные моменты времени.

резка  $[0, T]$  в пространстве  $L_2$ , модули  $E_*$ ,  $G$  непрерывны по  $t$ , кусочно-непрерывны по  $\vec{x}$  и удовлетворяют оценкам

$$E_1 \leq E_* \leq E_2, \quad G_1 \leq G \leq G_2, \quad E_1, E_2, G_1, G_2 = \text{const} > 0,$$

ядра релаксации  $R_i$  представимы в виде

$$R_i(t, \tau, \vec{x}) = p_i(t, \tau, \vec{x})(t - \tau)^{-\alpha} + q_i(t, \tau, \vec{x}), \quad i = 1, 2, \alpha < 1,$$

где  $p_i, q_i$  ограничены, непрерывны по  $t, \tau$ , кусочно-непрерывны по  $\vec{x}$ , функция  $\chi(\vec{x})$  ограничена и кусочно-непрерывна. Известно <sup>(2)</sup>, что при этих ограничениях существует единственное обобщенное решение задачи (1.1)–(1.6). Из хода доказательства этого утверждения в <sup>(2)</sup> и известных результатов <sup>(3)</sup> о гладкости решения эллиптических систем следует локальная гладкость решения задачи ползучести по координатам  $\vec{x}$  в подобластях регулярности правой части и реологических характеристик.

3. Для определенности решение будет изучаться в окрестности  $U$  правой вершины трещины  $\vec{x}_0$ . Предполагается, что функции  $E_*, G, p_i, q_i, f_i$  — гладкие по совокупности аргументов  $t, \tau, \vec{x}$  при  $t, \tau \in [0, T], \vec{x} \in U$ , функция  $\chi$  — гладкая при  $\vec{x} \in U$ , функции  $q_i^-$  — гладкие по  $\vec{x}$  при  $t \in [0, T], \vec{x} \in U \cap \Gamma^+$ , причем

$$g(t, \vec{x}_0) \equiv g_i^+(t, \vec{x}_0) = g_i^-(t, \vec{x}_0), \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, T].$$

Под гладкостью здесь понимается наличие достаточного числа непрерывных производных, причем предполагается, что производные функций  $f_i, g_i^\pm$  по пространственным координатам кусочно-непрерывны по  $t$  как отображения отрезка  $[0, T]$  в пространство непрерывных функций. Тогда решение — гладкое в области  $U \setminus D_d$ , где  $D_d$  — круг радиуса  $d$  с центром в  $\vec{x}_0$ ,  $d$  — произвольно. Выберем  $d$  так, чтобы  $D_{2d} \in U$ , и введем срезающую гладкую функцию  $\chi(\vec{x})$  так, чтобы  $\chi = 1$  при  $\vec{x} \in D_{d/2}$ ,  $\chi = 0$  при  $\vec{x} \in D_d$ . Пусть  $(r, \theta)$  — полярные координаты с началом в  $\vec{x}_0$  и полярной осью, направленной по отрезку  $\Gamma$  так, что на  $\Gamma^+$  имеют место равенства  $\theta = 0, \theta = 2\pi$  соответственно.

Введем обозначения для „замороженных“ в вершине  $\vec{x}_0$  трещины реологических характеристик:

$$G^0(t) \equiv G(t + \chi(\vec{x}_0), \vec{x}_0), \quad E_*^0(t) \equiv E_*(t + \chi(\vec{x}_0), \vec{x}_0);$$

$$\nu \equiv (E_* - 2G)/(2G + 2E_*), \quad k = 3 - 4\nu;$$

$$\nu^0(t) \equiv \nu(t + \chi(\vec{x}_0), \vec{x}_0), \quad k^0(t) \equiv k(t + \chi(\vec{x}_0), \vec{x}_0);$$

$$R_i^0(t, \tau) \equiv R_i(t + \chi(\vec{x}_0), \tau + \chi(\vec{x}_0), \vec{x}_0), \quad i = 1, 2.$$

Теорема 1. При сделанных предположениях справедливы асимптотические представления решения задачи ползучести:

$$\vec{u}(t, r, \theta) = \begin{bmatrix} u_2(t, r, \theta) \\ u_0(t, r, \theta) \end{bmatrix} = r^{1/2} [C_1(t) \vec{\psi}^1(t, \theta) + C_2(t) \vec{\psi}^2(t, \theta) + A_1(t) \vec{\xi}^1(\theta) + \\ + A_2(t) \vec{\xi}^2(\theta)] \chi(r, \theta) + \vec{0}(r);$$

$$\vec{\psi}^1(t, \theta) = \begin{bmatrix} \psi_2^1(t, \theta) \\ \psi_0^1(t, \theta) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} (2k^0(t) - 1) \sin \theta/2 + \sin 3\theta/2 \\ (2k^0(t) + 1) \cos \theta/2 + \cos 3\theta/2 \end{bmatrix}; \quad (3.1)$$

$$\vec{\psi}^2(t, \theta) = \begin{bmatrix} \psi_2^2(t, \theta) \\ \psi_0^2(t, \theta) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} (2k^0(t) - 1) \cos \theta/2 + 3 \cos 3\theta/2 \\ -(2k^0(t) + 1) \sin \theta/2 - 3 \sin 3\theta/2 \end{bmatrix};$$

$$\vec{\xi}^1(\theta) = \begin{bmatrix} \xi_2^1(\theta) \\ \xi_0^1(\theta) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sin \theta/2 \\ \cos \theta/2 \end{bmatrix}, \quad \vec{\xi}^2(\theta) = \begin{bmatrix} \xi_2^2(\theta) \\ \xi_0^2(\theta) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \cos \theta/2 \\ -\sin \theta/2 \end{bmatrix};$$

$$\sigma_{rr}(t, r, \theta) = 2G^0(t)r^{-1/2} \left[ B_1(t) \left( \frac{5}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \right. \\ \left. + B_2(t) \left( \frac{5}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] \chi(r, \theta) + 0(1);$$

$$\sigma_{\theta\theta}(t, r, \theta) = 2G^0(t)r^{-1/2} \left[ B_1(t) \left( \frac{3}{2} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \right. \\ \left. + B_2(t) \left( \frac{3}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] \chi(r, \theta) + 0(1); \quad (3.2)$$

$$\tau_{r\theta}(t, r, \theta) = 2G^0(t)r^{-1/2} \left[ B_1(t) \left( -\cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \right. \\ \left. + B_2(t) \left( \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] \chi(r, \theta) + 0(1).$$

В (3.1) коэффициенты  $A_i(t)$  определяются через  $C_i(t)$  из решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$A_i(t) + \frac{2(1+\nu^0(t))}{3} \int_0^t Z(t, \tau) A_i(\tau) d\tau - \int_0^t R_i^0(t, \tau) A_i(\tau) d\tau + \\ + \frac{8(1+\nu^0(t))}{3} \int_0^t Z(t, \tau) (1 - 2\nu^0(\tau)) C_i(\tau) d\tau - 8 \int_0^t R_i^0(t, \tau) (\nu^0(t) - \nu^0(\tau)) C_i(\tau) d\tau = 0, \\ i=1, 2, \quad Z(t, \tau) \equiv R_1^1(t, \tau) - R_2^0(t, \tau). \quad (3.3)$$

В (3.2) коэффициенты  $B_i(t)$  выражаются через  $C_i(t)$  формулами

$$B_i(t) = C_i(t) - \int_0^t R_i^0(t, \tau) C_i(\tau) d\tau, \quad i=1, 2.$$

Формулы (3.1) допускают почленное дифференцирование.

Замечание 1. Асимптотические представления напряжений (3.2) совпадают с соответствующими представлениями упругой задачи (4.5).

Замечание 2. Если ядра объемной и сдвиговой релаксации совпадают в вершине трещины и коэффициент Пуассона  $\nu^0 = \text{const.}$ , то из (3.3) следует

$$A_i = 0, \quad i = 1, 2,$$

и представления (3.1) совпадают с соответствующими представлениями упругой задачи. В случае однородной области этот результат прямо следует из теорем Н. Х. Арутюняна (<sup>6-8</sup>).

Замечание 3. Доказательство существенно опирается на результаты (<sup>9,10</sup>) для общих эллиптических систем в областях с коническими (угловыми) точками.

Ленинградский государственный  
университет им. А. А. Чкалова  
ВНИИТ им. Б. И. Веденеева

Վ. Պ. ԺՈՒՐԱՎԻՅՈՎ, Ս. Ա. ՆԱԶԱՐՈՎ, Բ. Ա. ՇՈՅԽԵՏ

Անհամասեռ ծեփացող մարմինների լարված-դեֆորմացված վիճակի նախ-  
գագաթի շրջակայքի ասիմպտոտիկան

Ուսումնասիրվում է ճաք ունեցող անհամասեռ ծեփացող մարմինների համար սողքի տեսության խնդրի լուծման ճաքի գագաթի շրջակայքի ասիմպտոտիկան:

Ստացվել են լարումների և տեղափոխությունների ասիմպտոտական ներկայացումները: Պարզվում է, որ լարումների համար այդ ներկայացումները ունեն նույն տեսքը, ինչպիսին ստացվում է դասական առաձգականության տեսություններում, իսկ տեղափոխությունների համար ներկայացումները տարբերվում են լրացուցիչ գումարներով:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> Н. Х. Арутюнян, ДАН СССР, т. 229, № 3 (1976). <sup>2</sup> Н. Х. Арутюнян, Б. А. Шойхет, Изв. АН СССР, МТТ, № 3 1981. <sup>3</sup> S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Comm. Pure Appl. Math, vol. 17 (1964). Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Наука, М., 1980. <sup>4</sup> M. L. Williams, J. Appl. Math., vol. 19, № 4 (1952). <sup>5</sup> Н. Х. Арутюнян, ДАН АрмССР, т. 7, № 5 (1947). <sup>6</sup> В. Д. Харлаб, Изв. ВНИИГ, т. 68, (1961). <sup>7</sup> Л. П. Трапезников, Б. А. Шойхет, Изв. ВНИИГ, т. 109 (1975). <sup>8</sup> В. А. Кондратьев, Труды Моск. мат. о-ва, т. 16 (1967). <sup>9</sup> В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, Math. Nachrichten, Bd. 76 (1977).

УДК 539.376

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

С. М. Мхитарян

К напряженному состоянию деформирующегося по степенному  
 закону бесконечного пространства с разрезом в виде  
 полосы или полуплоскости

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 9/VI 1981)

Решения многочисленных задач о напряженном состоянии тел с разрезом различных геометрических форм приведены в известных монографиях (1-6), где одновременно освещено современное состояние механики разрушения. В этом направлении укажем также на работу (7).

В настоящей статье в рамках нелинейной теории установившейся ползучести при степенной зависимости между интенсивностями напряжений и скоростями деформаций рассматриваются задачи о напряженном состоянии бесконечного пространства с разрезом в виде полосы или полуплоскости. Предварительно выводится ключевое интегральное уравнение для произвольной конфигурации плоского разреза в бесконечном пространстве. При этом существенно используются результаты работ (8-10). Задача же о разрезе в виде полуплоскости, содержащемся в линейно-упругом пространстве, была решена в (11).

1. Пусть бесконечное пространство, отнесенное к правой декартовой системе координат  $Oxyz$ , в своей плоскости  $z=0$  содержит разрез в виде произвольной области  $\omega$ . Далее, пусть к берегам этого разреза приложены только одинаковые вертикальные силы  $\sigma_z|_{z=\pm 0} = -p(x, y)$ . Для материала пространства будем считать справедливым нелинейный физический закон (8-10)  $\epsilon = A\sigma^m$ , где  $\epsilon$  — интенсивность скоростей деформаций,  $\sigma$  — интенсивность касательных напряжений,  $A$  — физическая константа, а  $m$  — показатель ползучести ( $m > 1$ ).

Выведем разрешающие уравнения задачи. С этой целью бесконечное пространство мысленно разделим на верхнее и нижнее полупространства. Тогда, придерживаясь обобщенного принципа суперпозиции, для перемещений\* точек граничной плоскости верхнего (с индексом  $+$ ) и нижнего (с индексом  $-$ ) полупространств при условии несжимаемости материала и при произвольной вертикальной нагрузке  $\sigma_0(x, y)$  будем иметь (10)

\*  $w_{\pm}(x, y)$  фактически будут скорости, а не перемещения. Однако для простоты в дальнейшем будем употреблять термин «перемещения».

$$w_{\pm}(x, y) = \pm \vartheta \left\{ \iint_{\Pi} \frac{\sigma_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1-\mu/2}} \right\}^m \quad ((x, y) \in \Pi), \quad (1.1)$$

где  $\vartheta$  — определенная комбинация физических констант,  $\mu = 1/m$ , причем  $2/3 < \mu < 1$ , а вообще  $0 < \mu < 1$ , и  $\Pi$  — вся плоскость  $z=0$ . Отметим, что при  $\mu=1$  имеем случай линейной упругости.

Далее, введем в рассмотрение скачок перемещений

$$\gamma(x, y) = w_+(x, y) - w_-(x, y) \quad ((x, y) \in \Pi) \quad (1.2)$$

и полные нормальные напряжения

$$\sigma_0(x, y) = \begin{cases} p(x, y) & ((x, y) \in \omega) \\ \sigma(x, y) & ((x, y) \in \Pi/\omega) \end{cases}, \quad (1.3)$$

где  $\sigma(x, y)$  — неизвестные нормальные напряжения вне разреза  $\omega$ . Приняв во внимание (1.1), при помощи (1.2) и (1.3) получим

$$\iint_{\Pi} \frac{\sigma_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1-\mu/2}} = \begin{cases} \frac{\varphi(x, y)}{2(\vartheta)^{\mu}} & ((x, y) \in \omega) \\ 0 & ((x, y) \in \Pi/\omega), \end{cases} \quad (1.4)$$

где  $\varphi(x, y) = \gamma^{\mu}(x, y)$  ( $(x, y) \in \omega$ ). К обеим частям (1.4) применим двумерное интегральное преобразование Фурье. Воспользовавшись известной формулой 3.773.6 ((<sup>12</sup>), 443), придем к алгебраическому соотношению

$$\Sigma_0(\lambda, s) = \frac{2^{1-\mu} \Gamma(1-\mu/2)}{2\pi(2\vartheta)^{\mu} \Gamma(\mu/2)} (\lambda^2 + s^2)^{\mu/2} \Phi(\lambda, s), \quad (1.5)$$

где

$$\Sigma_0(\lambda, s) = \iint_{\Pi} \sigma_0(x, y) e^{i(\lambda x + sy)} dx dy;$$

$$\Phi(\lambda, s) = \iint_{\Pi} \varphi(x, y) e^{i(\lambda x + sy)} dx dy,$$

а  $\Gamma(\mu)$  — гамма-функция Эйлера.

Теперь положим

$$\Sigma_0(\lambda, s) = -(\lambda + is)\Psi_0(\lambda, s); \quad \Psi_0(\lambda, s) = \iint_{\Pi} \psi_0(x, y) e^{i(\lambda x + sy)} dx dy \quad (1.6)$$

и к (1.5) применим формулу обращения Фурье. После простых операций будем иметь

$$\psi_0(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2(2\vartheta)^{\mu}} \iint_{\omega} \frac{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + i \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{\mu/2}} \quad ((x, y) \in \Pi).$$

Наконец, заметив, что согласно (1.6)

$$\sigma_0(x, y) = \frac{\partial \psi_0}{\partial y} - i \frac{\partial \psi_0}{\partial x},$$

получим ключевое уравнение задачи:

$$\sigma_0(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2(2\theta)^\mu} \left( \frac{\partial}{\partial y} - i \frac{\partial}{\partial x} \right) \iint_{\omega} \frac{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + i \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{\mu/2}} \quad ((x, y) \in \Pi). \quad (1.7)$$

Далее, сопоставление (1.3) и (1.7) для определения раскрытия разреза дает интегро-дифференциальное уравнение

$$\left( \frac{\partial}{\partial y} - i \frac{\partial}{\partial x} \right) \iint_{\omega} \frac{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + i \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{\mu/2}} = -4\pi^2(2\theta)^\mu p(x, y) \quad ((x, y) \in \omega), \quad (1.8)$$

а для разрушающих нормальных напряжений — формулу

$$\sigma(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2(2\theta)^\mu} \left( \frac{\partial}{\partial y} - i \frac{\partial}{\partial x} \right) \iint_{\omega} \frac{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + i \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{\mu/2}} \quad ((x, y) \in \Pi/\omega). \quad (1.9)$$

При этом уравнение (1.8) должно рассматриваться при условии

$$\varphi(x, y)/\Gamma_0 = 0, \quad (1.10)$$

где  $\Gamma_0$  — граничный контур области  $\omega$ . (1.10) выражает условие непрерывности вертикальных перемещений на контуре  $\Gamma_0$ .

Таким образом, (1.8) и (1.9) являются разрешающими уравнениями поставленной задачи.

В частности, пусть разрез имеет вид бесконечной полосы или полуплоскости. Тогда

$$\omega = \{-\infty < x < \infty; -a \leq y \leq a\}; \quad \omega = \{-\infty < x < \infty; 0 \leq y < \infty\}$$

соответственно. В этих случаях к уравнениям (1.8) и (1.9), а также условию (1.10) можно применить преобразование Фурье по переменной  $x$  и в результате прийти к следующим одномерным разрешающим уравнениям в образах Фурье:

$$\left( \frac{d}{dy} - \lambda \right) \int_L \frac{K_\nu(\lambda|y-\eta|)}{(y-\eta)^\nu} \left[ \frac{d\varphi_\lambda}{d\eta} + i\lambda\varphi_\lambda(\eta) \right] d\eta = -h(\lambda)p_\lambda(y) \quad (y \in L) \quad (\lambda > 0); \quad (1.11)$$

$$\sigma_\lambda(y) = -\frac{1}{h(\lambda)} \left( \frac{d}{dy} - \lambda \right) \int_L \frac{K_\nu(\lambda|y-\eta|)}{|y-\eta|^\nu} \left[ \frac{d\varphi_\lambda}{d\eta} + i\lambda\varphi_\lambda(\eta) \right] d\eta \quad (y \in L'), \quad (1.12)$$

где  $L = \{-a \leq y \leq a\}$  или  $L = \{0 \leq y < \infty\}$  соответственно случаям полосы или полуплоскости,  $L'$  — дополнительный к  $L$  интервал,  $K_\nu(y)$  — известная функция Макдональда, а

$$\nu = \frac{\mu-1}{2}; \quad h(\lambda) = 2\pi^{3/2}(2\theta)^\mu 2^\nu \Gamma(\mu/2) \lambda^{-\nu};$$

$$p_\lambda(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) e^{i\lambda x} dx; \quad \sigma_\lambda(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x, y) e^{i\lambda x} dx; \quad (1.13)$$

$$\varphi_\lambda(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) e^{i\lambda x} dx,$$

При этом условии (1.10) принимает вид

$$\varphi_\lambda(y)|_{y=\pm a} = 0; \quad \varphi_\lambda(y)|_{y=0} = 0 \quad (1.14)$$

соответственно случаям полосы и полуплоскости.

2. Решение уравнений (1.11) и (1.12), когда  $L = \{-a \leq y \leq a\}$ , можно получить при помощи нового спектрального соотношения для сфероидальных волновых функций, установленного автором. Однако построение этого решения ввиду своей масштабности составляет предмет отдельного исследования и выходит за рамки настоящей заметки. Поэтому здесь ограничимся рассмотрением указанных уравнений в случае  $L = \{0 \leq y < \infty\}$ . При этом будем пользоваться известным спектральным соотношением<sup>(13)</sup>

$$\int_0^\infty \frac{K_{\frac{\mu-1}{2}}(\lambda|y-\eta|)}{|y-\eta|^{\frac{\mu-1}{2}}} \frac{L_n^{\mu/2-1}(2\lambda\eta) d\eta}{e^{\lambda\eta} \eta^{1-\mu/2}} = \frac{\lambda_n}{\sqrt{\lambda}} e^{-\lambda y} L_n^{\mu/2-1}(2\lambda y) \quad (y > 0) \quad (2.1)$$

( $n = 0, 1, \dots; \lambda > 0$ )

а также родственным интегральным соотношением

$$\int_0^\infty \frac{K_{\frac{\mu-1}{2}}(\lambda|y-\eta|)}{|y-\eta|^{\frac{\mu-1}{2}}} \frac{L_n^{\mu/2-1}(2\lambda\eta) d\eta}{e^{\lambda\eta} \eta^{1-\mu/2}} = \frac{\mu_n}{\sqrt{\lambda}} e^{\lambda y} \Psi(n + \mu/2, \mu/2; -2\lambda y) \quad (y < 0). \quad (2.2)$$

Здесь  $L_n^\mu(y)$  — известные многочлены Чебышева — Лагерра,  $\Psi(a, c, y)$  — вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми, а

$$\lambda_n = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1 - \mu/2) \Gamma(n + \mu/2)}{\sqrt{2} n!}; \quad \mu_n = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma^2(n + \mu/2)}{\sqrt{2} n! \Gamma(\mu/2)}.$$

Оба соотношения можно получить при помощи методов теории потенциала, связанной с уравнением\*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1-\mu}{z} \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

Теперь обратим входящий в (1.11) дифференциальный оператор. В результате придем к уравнению

$$\int_0^\infty \frac{K_{\frac{\mu-1}{2}}(\lambda|y-\eta|)}{(y-\eta)^{\frac{\mu-1}{2}}} \left[ \frac{d\varphi_\lambda}{d\eta} + \lambda\varphi_\lambda(\eta) \right] d\eta = h(\lambda) q_\lambda(y) \quad (y > 0), \quad (2.3)$$

где

$$q_\lambda(y) = \int_y^\infty e^{\lambda(y-\eta)} p_\lambda(\eta) d\eta. \quad (2.4)$$

\* Эти результаты получены автором и в настоящее время находятся в печати.

Решение уравнения (2.3) представим в виде

$$\frac{d\varphi_\lambda}{dy} + \lambda\varphi_\lambda(y) = e^{-\lambda y} y^{\mu/2-1} \sum_{n=0}^{\infty} x_n L_n^{\mu/2-1}(2\lambda y) \quad (y > 0). \quad (2.5)$$

Далее, воспользовавшись (2.1) и условием ортогональности многочленов Чебышева—Лагерра, находим

$$x_n = \sqrt{\lambda} h(\lambda) \frac{a_n(\lambda)}{\lambda_n h_n} \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (2.6)$$

где

$$h_n = \frac{\Gamma(n + \mu/2)}{n!(2\lambda)^{\mu/2}}, \quad a_n(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda y} y^{\mu/2-1} q_\lambda(y) L_n^{\mu/2-1}(2\lambda y) dy.$$

Затем из (2.5) получим

$$\varphi_\lambda(y) = Ce^{-\lambda y} + \int_0^y e^{-\lambda(y-\tau)} f(\tau) d\tau,$$

где

$$f(y) = e^{-\lambda y} y^{\mu/2-1} \sum_{n=0}^{\infty} x_n L_n^{\mu/2-1}(2\lambda y).$$

Приняв во внимание известную формулу ((<sup>14</sup>), с. 191, формула (30)), после простых выкладок будем иметь

$$\varphi_\lambda(y) = Ce^{-\lambda y} + e^{-\lambda y} y^{\mu/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{n + \mu/2} L_n^{\mu/2}(2\lambda y) \quad (y \geq 0). \quad (2.7)$$

Отсюда при помощи второго условия (1.14) непосредственно вытекает, что  $C=0$ .

Теперь (2.4) подставим в выражение коэффициентов  $a_n(\lambda)$ , поменяем порядок интегрирования и опять учтем только что указанную формулу из (<sup>14</sup>). В результате

$$a_n(\lambda) = \frac{p_n(\lambda)}{n + \mu/2} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

где

$$p_n(\lambda) = \int_0^{\infty} p_\lambda(\tau) e^{-\lambda \tau} \tau^{\mu/2} L_n^{\mu/2}(2\lambda \tau) d\tau. \quad (2.8)$$

Последние формулы вместе с формулами (2.6) позволяют образ Фурье раскрытия полубесконечного разреза из (2.7) записать в следующем окончательном виде:

$$\varphi_\lambda(y) = \sqrt{\lambda} h(\lambda) e^{-\lambda y} y^{\mu/2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^\mu(\lambda) p_n(\lambda) L_n^{\mu/2}(2\lambda y) \quad (y \geq 0), \quad (2.9)$$

где

$$\alpha_n^\mu(\lambda) = \frac{\sqrt{2}(2\lambda)^{\mu/2}(n!)^2}{\sqrt{\pi} \Gamma(1-\mu/2) \Gamma^2(n+\mu/2)(n+\mu/2)^2}$$

причем для коэффициентов  $x_n$  будем иметь формулу

$$x_n = \sqrt{\lambda} h(\lambda) \alpha_n^\mu(\lambda) (n + \mu/2) p_n(\lambda) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.10)$$

Перейдем к разрушающим напряжениям. Подставляя (2.5) в (1.12) и учитывая (2.2) и (2.10), будем иметь

$$\sigma_\lambda(y) = - \frac{(2\lambda)^{\mu/2} \pi}{\sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)} \left(\frac{d}{dy} - \lambda\right) \left[ e^{\lambda y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! p_n(\lambda)}{n + \mu/2} \Psi(n + \mu/2, \mu/2; -2\lambda y) \right] \quad (y < 0). \quad (2.11)$$

Далее, приняв во внимание известное представление функции  $\Psi(a, c, x)$  ((<sup>15</sup>), с. 245, формула (7)), можем записать

$$\frac{d}{dy} \Psi(n + \mu/2, \mu/2; -2\lambda y) = (2n + \mu) \left[ \frac{\Gamma(-\mu/2)}{\Gamma(n + 1)} \Phi(n + 1 + \mu/2, 1 + \mu/2; -2\lambda y) + \frac{\Gamma(\mu/2)}{\Gamma(n + 1 + \mu/2)} (-2\lambda y)^{-\mu/2} \Phi(n + 1, 1 - \mu/2; -2\lambda y) \right],$$

где  $\Phi(a, c; x)$  — вырожденная гипергеометрическая функция. При помощи этого равенства из (2.11) определим коэффициент интенсивности напряжений. А именно,

$$K_\lambda = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\mu/2} \sigma_\lambda(y) = - \frac{2\lambda}{\Gamma(1 - \mu/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! p_n(\lambda)}{\Gamma(n + 1 + \mu/2)}. \quad (2.12)$$

Рассмотрим частный случай нагружения берегов полубесконечного разреза, когда

$$p(x, y) = \frac{P}{2} [\delta(x - x_0) + \delta(x + x_0)]^2 (y - y_0),$$

где  $\delta(x)$  — известная дельта-функция Дирака. Тогда из (1.13) и (2.8)

$$p_\lambda(y) = P \cos(\lambda x_0) \delta(y - y_0); \quad p_n(\lambda) = P \cos(\lambda x_0) e^{-\lambda y_0} y_0^{\mu/2} L_n^{\mu/2}(2\lambda y_0).$$

Подставляя это выражение  $p_n(\lambda)$  в (2.9) и (2.12), получим

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(y) &= \sqrt{\lambda} h(\lambda) P \cos(\lambda x_0) (y y_0)^{\mu/2} e^{-\lambda(y + y_0)} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^\mu(\lambda) L_n^{\mu/2}(2\lambda y_0) L_n^{\mu/2}(2\lambda y) \quad (y \geq 0); \\ K_\lambda &= - \frac{2P \lambda \cos(\lambda x_0)}{\Gamma(1 - \mu/2)} e^{-\lambda y_0} y_0^{\mu/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! L_n^{\mu/2}(2\lambda y_0)}{\Gamma(n + 1 + \mu/2)}. \end{aligned}$$

При помощи известных асимптотических представлений многочленов  $L_n^\alpha(y)$  ((<sup>14</sup>), с. 200—201) легко убедиться, что эти ряды сходятся.

После того как определены образы Фурье искомых величин, они сами могут быть найдены формулой обращения Фурье.

В заключение отметим, что на основе работ ((<sup>16,17</sup>)) полученные здесь результаты могут быть легко распространены на случай линейно-упругого пространства, модуль упругости которого по координате  $z$  изменяется по степенному закону.

Շերտի կամ կիսահարթության տեսի հաճով ըստ աստիճանային օրենսի դեֆորմացվող անվերջ տարածության լարվածային վիճակի շուրջը

Հաստատված սողքի ոչ-գծային տեսության շրջանակներում լարումների և դեֆորմացիաների արագությունների միջև աստիճանային կախվածության առկայության դեպքում դիտարկվում է խառը եզրային խնդիրը, որը վերաբերում է շերտի կամ կիսահարթության տեսի ճաք պարունակող անվերջ տարածությունը: Անվերջ տարածության մեջ հարթ ճաքի ցանկացած կոնֆիգուրացիայի դեպքում նախապես արտածվում է խնդրի որոշիչի ինտեգրալ հավասարումը: Վերջինիս կորիզը իրենից ներկայացնում է արգումենտների բացարձակ տարբերությունից կախված Մակդոնալդի ֆունկցիան:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> Г. П. Черепанов, Механика хрупкого разрушения, Наука, М., 1974. <sup>2</sup> В. З. Партон, Е. М. Морозов, Механика упруго-пластического разрушения, Наука, М., 1974. <sup>3</sup> Разрушение (ред. Г. Либовиц), т. II, Мир, М., 1975. <sup>4</sup> Прикладные вопросы вязкости разрушения, Мир, М., 1968. <sup>5</sup> В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацкишин, Распределение напряжений эколо трещин в пластинах и оболочках, Наукова думка, Киев, 1976. <sup>6</sup> Н. И. Мухелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Наука, М., 1966. <sup>7</sup> Р. В. Гольдштейн, К пространственной задаче теории упругости для тел с плоскими трещинами произвольного разрыва, Ин-т проблем механики АН СССР, Препринт № 122, М., 1979. <sup>8</sup> Н. Х. Арутюнян, ПММ, т. 23, вып. 5 (1959). <sup>9</sup> Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян, ПММ, т. 27, вып. 5 (1963). <sup>10</sup> А. И. Кузнецов, ПММ, т. 26, вып. 3 (1962). <sup>11</sup> Я. С. Уфлянд, Интегральные преобразования в задачах теории упругости, Наука, М., 1968. <sup>12</sup> И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Наука, М., 1971. <sup>13</sup> Г. Я. Попов, Журн. техн. физ., т. 35, вып. 3 (1965). <sup>14</sup> Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, СМБ, т. II, Наука, М., 1974. <sup>15</sup> Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, СМБ, т. I, Наука, 1973. <sup>16</sup> Г. Я. Попов, ПММ, т. 37, вып. 6 (1973). <sup>17</sup> Н. А. Ростовцев, ПММ, т. 28, вып. 1, (1964).

УДК 535+539.12.04

ФИЗИКА

Р. А. Багян, член-корреспондент АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаелян

Полное число фотонов переходного излучения на шероховатых поверхностях раздела

(Представлено 7/VII 1981)

Выражения для углового распределения и поляризации переходного излучения, возникающего при пересечении заряженной частицей шероховатой границы раздела двух сред с мало отличающимися диэлектрическими постоянными, получены в (1).

В данной заметке приводятся выражения для полного числа фотонов переходного излучения заданной частоты  $\omega$  на статистически шероховатых поверхностях раздела двух сред, выведенных в тех же приближениях, что и в (1). Граница раздела  $z=f(x, y)$  задается двумерным нормальным распределением высот неровностей с гауссовым коэффициентом корреляции (см., например, (2)).

Удобно рассматривать два предельных случая границ раздела: границы раздела со слабыми шероховатостями, т. е. когда среднеквадратичное отклонение высот неровностей  $f_0^2$  от плоскости  $z=0$  мало по сравнению с квадратом когерентной длины  $l_{\text{ког}}$  (см. ниже),

$$f_0^2 \ll l_{\text{ког}}^2 \quad (1)$$

и границы раздела с сильными шероховатостями, когда выполняется обратное неравенство.

Приведем результаты для полного числа фотонов переходного излучения заданной частоты. Вначале рассмотрим *нерелятивистский* предел:  $\beta\sqrt{\epsilon_0} \ll 1$ ;  $\beta$  — отношение скорости частицы, движущейся по оси  $z$ , к скорости света  $c$ ,  $\epsilon_0 = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}$  — среднее значение диэлектрической проницаемости двух сред с диэлектрическими постоянными  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ .

Эффективные поперечные размеры поля частицы  $\rho = \frac{i\beta\sqrt{\epsilon_0}}{\sqrt{1-\beta^2\epsilon_0}}$  и когерентная длина  $l_{\text{ког}} = \frac{\lambda\beta\sqrt{\epsilon_0}}{1-\beta\sqrt{\epsilon_0}\cos\theta}$  в этом случае являются величинами одного порядка  $\rho \sim l_{\text{ког}} \sim i\beta\sqrt{\epsilon_0}$ , где  $i = \lambda/2\pi$  — длина волны излученного фотона, а  $\theta$  — угол излучения, отсчитываемый от оси  $z$ . Расчет, основанный на выражениях, приведенных в (3), показывает, что полное число фотонов переходного излучения, излученных как в переднюю полусферу, так и в заднюю, одинаково.

Рассмотрим случай слабых шероховатостей, т. е. когда выполнено условие (1). При выполнении дополнительного условия

$$\frac{l^2}{4\rho^2} \ll 1, \quad (2)$$

т. е. когда поперечные размеры поля частицы велики по сравнению с радиусом корреляции  $l$ , полное число фотонов переходного излучения заданной частоты для нерелятивистских частиц равно

$$dN_\omega = dN_\omega^{\text{пл}} \left\{ 1 - \frac{f_0^2}{\lambda^2 \beta^2 \epsilon_0} + \frac{f_0^2 l^2}{4\lambda^4 \beta^4 \epsilon_0^2} \ln \left( \frac{4\lambda^2 \beta^2 \epsilon_0}{l^2} \right) \right\}, \quad (3)$$

где

$$dN_\omega^{\text{пл}} = \frac{e^2 |\epsilon_2 - \epsilon_1|^2}{3\pi c \hbar \epsilon_0^{3/2}} \beta^2 \frac{d\omega}{\omega} \quad (4)$$

полное число фотонов переходного излучения с энергией  $\hbar\omega$  в частотном интервале  $d\omega$  от плоской границы раздела в нерелятивистском пределе;  $e$  — заряд электрона.

Из выражения (3) видно, что третий член в фигурных скобках существенно меньше второго, так что добавка к  $dN_\omega^{\text{пл}}$  определяется вторым членом, который входит с отрицательным знаком. Поскольку  $\frac{f_0^2}{l_{\text{кор}}^2} \ll 1$ , то полное число фотонов переходного излучения от плоской границы раздела уменьшается незначительно.

Для сильных шероховатостей  $f_0^2 \gg l_{\text{кор}}^2$  и при выполнении неравенства

$$\frac{l^2}{4\rho^2} \ll \frac{f_0^2}{l_{\text{кор}}^2}, \quad (5)$$

которое в нерелятивистском пределе переходит в условие  $l^2 \ll 4f_0^2$ , полное число фотонов равно

$$dN_\omega = dN_\omega^{\text{пл}} \frac{l^2}{4f_0^2} \ln \left( \frac{4f_0^2}{l^2} \right). \quad (6)$$

В отличие от случая слабых шероховатостей здесь полное излучение существенно меньше по сравнению с излучением на идеально плоской границе.

Из выражений (3) и (6) следует, что при заданном значении  $\sqrt{\epsilon_0}$  отношение  $dN_\omega$  к  $dN_\omega^{\text{пл}}$  с уменьшением длины волны излучения изменяется от единицы до малых значений. Для длин волн  $\lambda^2 \gg \frac{f_0^2}{\beta^2 \epsilon_0}$ ,  $\frac{l^2}{\beta^2 \epsilon_0}$  влияние шероховатостей границы раздела несущественно, и из (3) следует, что  $dN_\omega \approx dN_\omega^{\text{пл}}$ . Когда же  $\lambda^2 \beta^2 \epsilon_0 \leq f_0^2$  и  $l^2 < 4f_0^2$ , отношение полного числа фотонов переходного излучения на шероховатой границе к плоской резко уменьшается. Это означает, что спектр переходного излучения обрезается для длин волн порядка и меньших  $\frac{f_0^2}{\beta^2 \epsilon_0}$ .

Если поперечные размеры поля частицы малы по сравнению с радиусом корреляции, т. е. выполняется условие, обратное неравенству (2)

$$\frac{l^2}{4\rho^2} \gg 1, \quad (7)$$

имеем следующее выражение для {полного числа излученных фотонов:

$$dN_\omega = dN_\omega^{na} \left\{ 1 + \frac{4f_0^2}{l^2} \right\}, \quad (8)$$

которое описывает как случай слабых шероховатостей, так и случай сильных шероховатостей; только для сильных шероховатостей условие применимости (7) заменяется на неравенство, обратное (5), т. е.

$$\frac{l^2}{4\rho^2} \gg \frac{f_0^2}{l_{\text{кор}}^2}. \quad (9)$$

Из (1), (7) и (9) следует, что второе слагаемое в фигурных скобках формулы (8)  $\frac{4f_0^2}{l^2} \ll 1$ . Поскольку добавка к  $dN_\omega^{na}$  положительна, то

в отличие от предыдущего случая (см. формулы (3) и (6)) в (8)  $dN_\omega$  увеличивается по сравнению с полным числом фотонов переходного излучения от плоской границы раздела. Отношение  $dN_\omega$  к  $dN_\omega^{na}$  определяется, как следует из (8), только среднеквадратичным отклонением и радиусом корреляции для длин волн излученных фотонов

$\frac{f_0^2}{\beta^2 \varepsilon_0} \ll \lambda^2 \ll \frac{l^2}{4\beta^2 \varepsilon_0}$  в случае слабых шероховатостей и для длин волн

$\lambda^2 \ll \frac{f_0^2}{\beta^2 \varepsilon_0}$  в случае сильных шероховатостей.

Таким образом в нерелятивистском пределе, когда поперечные размеры поля частицы велики по сравнению с радиусом корреляции (см. условие (2)), полное число фотонов для слабых шероховатостей  $dN_\omega \leq dN_\omega^{na}$ . Для сильных шероховатостей условие (2) заменяется на неравенство  $l^2 \ll 4f_0^2$ , и излучение на шероховатых поверхностях резко ослабляется по сравнению с излучением на плоской границе раздела.

Фактор ослабления  $\frac{l^2}{4f_0^2} \ll 1$  зависит только от свойств поверхности.

Когда поперечные размеры поля частицы малы по сравнению с радиусом корреляции (условие (7)), полное число фотонов для слабых и сильных шероховатостей  $dN_\omega \geq dN_\omega^{na}$ .

В релятивистском пределе ( $\beta\sqrt{\varepsilon_0} \sim 1$ ) рассмотрено излучение в заднюю полусферу ( $l_{\text{кор}} \sim \frac{\lambda}{2}$ ,  $\rho \sim \lambda\gamma$ ;  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2\varepsilon_0}}$ ).

Для слабых шероховатостей при выполнении условия (2) имеем

$$dN_\omega = dN_\omega^{na} \left\{ 1 - \frac{4f_0^2}{\lambda^2} + \frac{8}{3\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{f_0^2 l^2}{\lambda^4} \left[ \ln \left| \frac{2}{1-\beta\sqrt{\varepsilon_0}} \right| - 1 \right]^{-1} \right\}, \quad (10)$$

где

$$dN_\omega^{na} = \frac{e^2 |\varepsilon_2 - \varepsilon_1|^2}{16\pi c \hbar \varepsilon_0^{5/2}} \left[ \ln \left| \frac{2}{1-\beta\sqrt{\varepsilon_0}} \right| - 1 \right] \frac{d\omega}{\omega} \quad (11)$$

полное число фотонов, излученных назад от плоской границы раздела релятивистской частицей с энергией  $\hbar\omega$  в интервале частот  $d\omega$ .

В (10) добавки к  $dN_{\omega}^{на}$ , так же как и в (3), определяются вторым и третьим членами в фигурных скобках. Благодаря условию (1), добавка обусловлена в основном третьим членом, который пропорционален множителю  $\frac{f_0^2 l^2}{\lambda^4} = \left( \frac{f_0^2}{l_{кор}^2} \cdot \frac{l^2}{4\rho^2} \right) \gamma^2$ . При больших энергиях этот множитель может привести к значительному усилению излучения по сравнению с переходным излучением на плоской границе раздела, поскольку он пропорционален фактору  $\gamma^2$ .

Для сильных шероховатостей имеем

$$dN_{\omega} = dN_{\omega}^{на} \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \frac{l^2}{f_0^2} \left[ \ln \left| \frac{2}{1 - \beta V \epsilon_0} \right| - 1 \right]^{-1}, \quad (12)$$

однако вместо неравенства (2) выполняется условие (5). Поскольку  $\frac{l^2}{f_0^2} = \left( \frac{l^2}{\rho^2}, \frac{l_{кор}^2}{f_0^2} \right) 4\gamma^2$ , полное число фотонов от шероховатой границы раздела может значительно превышать  $dN_{\omega}^{на}$ .

Анализ выражений (10) и (12) показывает, что для больших длин волн  $\lambda^2 \gg 4f_0^2$ ,  $l^2$  полное число фотонов от шероховатых границ раздела порядка  $dN_{\omega}^{на}$ . С уменьшением длины волны  $\lambda^2 \leq 4f_0^2$  и  $l^2 \leq f_0^2 \gamma^2$  отношение  $dN_{\omega}$  к  $dN_{\omega}^{на}$  увеличивается от единицы до значений, пропорциональных  $\gamma^2$ .

При малых поперечных размерах поля частицы по сравнению с радиусом корреляции (см. условие (7)), так же как в нерелятивистском пределе, для слабых и сильных шероховатостей имеем одну формулу

$$dN_{\omega} = dN_{\omega}^{на} \left\{ 1 + 8 \frac{f_0^2}{l^2} \left[ \ln \left| \frac{2}{1 - \beta V \epsilon_0} \right| - 1 \right]^{-1} \right\}, \quad (13)$$

причем в случае сильных шероховатостей вместо (7) выполняется условие (9). Однако здесь усиление излучения незначительное по сравнению с излучением от плоской границы раздела, поскольку из неравенств (1), (7) и (9) следует, что  $\frac{f_0^2}{l^2} \ll 1$ . Отношение полного числа фотонов от шероховатой границы раздела к плоской можно определить для слабой шероховатости в области длин волн излученных фотонов  $4f_0^2 \ll \lambda^2 \ll \frac{l^2}{4} (1 - \beta^2 \epsilon_0)$ , а для сильной шероховатости — в области  $\lambda^2 \ll 4f_0^2$ .

Таким образом в релятивистском пределе в отличие от нерелятивистского существенную роль играет фактор  $\gamma$ . Полное число фотонов переходного излучения от шероховатой поверхности раздела порядка  $dN_{\omega}^{на}$  при малых поперечных размерах поля частицы по сравнению с радиусом корреляции (см. условие (7)). Для слабой шероховатости, когда поперечные размеры поля частицы велики по сравнению с радиусом корреляции (см. условие (2)), и для сильной

шероховатости, когда условие (2) заменяется на неравенство  $l^2 \ll 16f_0^2 \gamma^2$ ,  $dN_{\omega}$  пропорционально  $\gamma^2$ , так что может значительно превышать  $dN_{\omega}^{(0)}$ .

Вышеприведенные формулы можно использовать для дополнительного контроля неровностей поверхности, определяемых с помощью переходного излучения (1,4,5).

Институт физических  
исследований Академии  
наук Армянской ССР

Բ. Ա. ԲԱԳԻԱՆ, Հայկական ՍՍՀ ԳԱ րդրակից-անդամ Մ. Լ. Տեր-ՄԻԿԱԵԼԻԱՆ,

### Անցումային ճառագայթման ֆոտոնների լրիվ թիվը անհարթ սահմանի դեպքում

Աշխատանքում բերվում են տվյալ հաճախականությամբ անցումային ճառագայթման ֆոտոնների լրիվ թվի բանաձևերը  $z = f(x, y)$  վիճակագրական անհարթություններով բաժանման սահմանի դեպքում: Ընթացվում է, որ դիէլեկտրիկական հատկությունների փոփոխումը մի միջավայրից դեպի մյուսը անցնելիս փոքր է:

Ուսումնասիրված են փոքր և մեծ անհարթությունների սահմանային դեպքերը ռելյատիվիստիկ և ոչ ռելյատիվիստիկ մասնիկների համար:

Ստացված արտահայտությունները համեմատվում են հարթ սահմանի դեպքում անցումային ճառագայթման ֆոտոնների լրիվ թվի բանաձևերի հետ: Մասնավորապես գնահատված է անցումային ճառագայթման ֆոտոնների լրիվ թվի հարաբերությունը անհարթ և հարթ սահմանի դեպքում:

Հոդվածում դիտարկված արդյունքները կարևոր նշանակություն ունեն անցումային ճառագայթման միջոցով մակերևույթի անհարթությունները ուսումնասիրելու համար:

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> Բ. Ա. Багян, М. Л. Тер-Микаелян, ЖЭТФ, т. 81, вып. 10 (1981). <sup>2</sup> Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, Изд-во АН СССР, М., 1961. <sup>3</sup> М. Л. Тер-Микаелян, Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1969; M. L. Ter-Mikaelian, High-energy electromagnetic processes in condensed media, John Wiley Sons, Inc., N. Y., 1972. <sup>4</sup> Բ. Ա. Багян, Письма в ЖТФ, т. 2, вып. 22 (1976). <sup>5</sup> Բ. Ա. Багян, М. Л. Тер-Микаелян, Письма в ЖТФ, т. 5, вып. 21 (1979).

УДК 548.55

ФИЗИКА

А. С. Кузаян, К. Л. Ованесян, А. Г. Петросян, Г. О. Ширинян

Выращивание из расплава редкоземельного граната  
 $Tb_3Al_5O_{12}$  и его свойства

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 1/VII 1981)

1. Настоящая работа продолжает наши исследования (<sup>1-5</sup>) по изучению условий образования, дефектов кристаллической решетки и физических свойств расплавных редкоземельно-алюминиевых гранатов. Ранее были получены из расплава и изучены лазерные гранаты  $Lu_3Al_5O_{12}$  (<sup>2,2</sup>),  $Er_3Al_5O_{12}$  (<sup>3</sup>),  $(Lu_{1-x}Er_x)_3Al_5O_{12}$  (<sup>4</sup>),  $(Lu_{1-x}Ho_x)_3Al_5O_{12}$  (<sup>5</sup>) и ряд других простых гранатовых кристаллов, содержащих  $TR^{3+}$  ионы. Предметом изучения настоящей работы является редкоземельно-алюминиевый гранат  $Tb_3Al_5O_{12}$ , а целью исследований — определение возможности получения этого материала из расплава в виде достаточно крупных оптически совершенных монокристаллов для потенциальных лазерных и других применений.

По данным (<sup>6</sup>) в системе  $Tb_2O_3-Al_2O_3$  образуются соединения  $2Tb_2O_3 \cdot Al_2O_3$ ,  $3Tb_2O_3 \cdot 5Al_2O_3$  и  $Tb_2O_3 \cdot Al_2O_3$ . Соединение  $3Tb_2O_3 \cdot 5Al_2O_3$  относится к структурному типу граната и плавится без разложения при  $1900 \pm 30^\circ C$ . Сведения о получении граната  $Tb_3Al_5O_{12}$  из раствора в расплаве и некоторых его свойствах содержит (<sup>7</sup>). Авторы (<sup>8</sup>) сообщают о получении граната  $Tb_3Al_5O_{12}$  оптической зонной плавкой, однако в работе отсутствуют данные, подтверждающие достижение стехиометрических исходных составов.

В настоящей работе кратко изложены проблемы, возникающие при кристаллизации граната  $Tb_3Al_5O_{12}$  из расплава, а также приведены результаты ростовых исследований и данные измерений некоторых основных свойств материала.

2. В качестве исходных компонент для приготовления расплавов использовались окись тербия ( $TbO-1$ ) и кристаллический сапфир (99,999%). Выращивание проводили направленной кристаллизацией в молибденовых контейнерах в среде инертного газа при скоростях 0,3–2 мм/час. Измерение параметров элементарной ячейки и фазового состава образцов проводили традиционными методами. Температуры плавления измеряли оптическим пирометром и корректировали по температуре плавления граната  $Y_3Al_5O_{12}$  ( $1940^\circ C$ ).

3. Как показали наши исследования, наиболее важным фактором при выращивании граната  $Tb_3Al_5O_{12}$  из расплава является чистота исходного оксида тербия, который, как известно (<sup>9</sup>), может содержать в себе в значительном количестве и более высший оксид  $Tb_4O_7$ . По-

этому предварительным этапом работы было нахождение эффективного метода перевода в исходном оксиде всех ионов тербия в трехвалентное состояние и достижение точного соответствия оксидом химической формулы  $Tb_2O_3$ .

Другим фактором, затрудняющим получение граната  $Tb_3Al_5O_{12}$  из расплава, как вытекает из результатов настоящей работы, является его сравнительно низкая температура плавления. Из таблицы следует, что температуры плавления кристаллических фаз граната и перовскита в системе  $Tb_2O_3-Al_2O_3$  значительно отличаются, причем температура плавления граната существенно ниже температуры плавления перовскита. Для сравнения отметим, что в других родственных системах (см., например, систему  $Y_2O_3-Al_2O_3$  <sup>(10)</sup> и др.) температура плавления гранатовой фазы выше температуры плавления фазы перовскита. Обратное расположение температур плавления, как это имеет место в системе  $Tb_2O_3-Al_2O_3$ , создает серьезные трудности для формирования гранатовой фазы, так как расплав  $Tb_3Al_5O_{12}$  при температуре плавления оказывается значительно переохлажденным по отношению к фазе ортоалюмината  $TbAlO_3$ . Этот фактор стимулирует при затвердевании расплава граната (как и наблюдалось в экспериментах) формирование структуры перовскита.

Свойства кристалла

Характеристика	$Tb_3Al_5O_{12}$
$a_0, \text{Å}$	12.061
$V, \text{Å}^3$	1751.486
$d$ (рент), г см <sup>-3</sup>	6.084
Линейный коэффициент расширения, К <sup>-1</sup>	$8.7 \cdot 10^{-6}$
Температура плавления, °С	1860 ± 15
Молекулярный вес	803.6767
Молекулярный объем	132.096
Цвет	Слабый желтый оттенок
$TR^{3+}$ см <sup>-3</sup> $10^{22}$	1.3578
$Al^{3+}$ (16z) см <sup>-3</sup> $10^{22}$	0.9118
$Al^{3+}$ (24) см <sup>-3</sup> $10^{22}$	1.3678
$TR^{3+}-TR^{3+}, \text{Å}$	3.693

\* Температура плавления  $TbAlO_3$   $1965 \pm 15$  °С

И, наконец, следует иметь в виду, что из-за сравнительно большого ионного радиуса  $Tb^{3+}$  число возможных неэквивалентных замещений октаэдрических узлов  $Al^{3+}$  ионами  $Tb^{3+}$  значительно меньше, чем в других родственных гранатовых системах.

4. Проведенные исследования по изучению условий образования кристаллических фаз в системе  $Tb_2O_3-Al_2O_3$  позволили определить область приемлемых условий кристаллизации для получения оптически совершенных монокристаллов  $Tb_3Al_5O_{12}$  длиной около 50 мм. Особенностью кристаллизации расплава граната  $Tb_3Al_5O_{12}$  является формирование в начальной стадии роста фазы ортоалюмината, что, как отмечалось выше, связано с порядком в расположении температур плавления этих соединений. Это обстоятельство затрудняет получение монокристаллического материала по всему объему ввиду нарушения стехиометрии расплава уже в начальной стадии роста. Даль-

нейшее улучшение и обеспечение. более оптимальных условий выращивания возможно путем осуществления подпитки расплава в процессе кристаллизации либо введением примесей, существенно повышающих температуру плавления вещества.

Институт физических исследований  
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ս. ԿՈՒԶՆԱՅԱՆ, Կ. Լ. ՆՈՎԶԱՆԻՍՅԱՆ, Ա. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ, Գ. Ն. ՇԻՐԻՆՅԱՆ

### $Tb_3Al_5O_{12}$ նոնաֆառի անեցումը հալույթից և նրա հատկությունները

Աշխատանքում հակիրճ բննարկվում են այն հիմնական պրոբլեմները, որոնք առաջանում են  $Tb_3Al_5O_{12}$ -ի բյուրեղացման ժամանակ: Ֆազերներից մեկը հանդիսանում է բաղադրություն մեջ  $Tb_2O_3$  օքսիդի և  $Tb_4O_7$  բարձրագույն օքսիդի առկայությունը, մյուսը՝  $Tb_2O_3-Al_2O_3$  համակարգում պերովսկիտային ֆազայի և նոնաֆառի հալման ջերմաստիճանների նույնակարգությունը: Աշխատանքում դանված են նախնական բաղադրիչների ճիշտ ստեխիոմետրիկ կազմության ապահովման համար պայմաններ, ինչպես նաև որոշված են նյութի հիմնական հատկությունները չափելու և լազերային կիրառության համար բավարար չափերի  $Tb_3Al_5O_{12}$  օպտիկապես կատարյալ բյուրեղների բյուրեղացման մատչելի պայմանները:

Բերված են էլ. բջջի պարամետրի չափման արդյունքները, հալման ջերմաստիճանը և  $Tb_3Al_5O_{12}$  նոնաֆառի այլ հատկություններ:

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> X. C. Багдасаров, А. Г. Петросян, ДАН АрмССР, т. 58, № 3 (1974). <sup>2</sup> А. G. Petrosyan, G. O. Shirinyan, K. L. Ovanesyan a. o., J. Crystal Growth, vol. 52 (1981). <sup>3</sup> A. G. Petrosyan, G. O. Shirinyan, K. L. Ovanesyan a. o., Kristall and Technik, vol. 13, № 1 (1978). <sup>4</sup> А. А. Каминский, А. Г. Петросян, Изв. АН СССР, сер. Неорган. матер., т. 15, № 3 (1979) <sup>5</sup> А. Г. Петросян, Г. О. Ширинян, К. Л. Ованесян и др., Тезисы докладов V Всесоюзного совещания по росту кристаллов, Тбилиси, 1977, т. 2. <sup>6</sup> I. A. Bondar, Proc. Seventh Conference of Silicate Industry, Budapest, 1965. <sup>7</sup> С. В. Rubinstein, R. L. Barns, Amer Mineralogist, vol. 49 (1964). <sup>8</sup> П. А. Арсеньев, Д. Т. Свиридов, Р. К. Свиридова, Кристаллография, т. 17, вып. 2 (1972). <sup>9</sup> Н. А. Торопов, В. Р. Барзаковский, И. А. Бондарь и др., Диаграмма состояния силикатных систем, вып. 2, Наука, Л., 1970. <sup>10</sup> Н. А. Торопов, В. Р. Барзаковский, В. В. Лапин и др., Диаграммы состояния силикатных систем, вып. 1, Наука, Л., 1965.

УДК 616.379—008.64 : 616.453

МЕДИЦИНА

В. М. Арутюнян, С. Е. Торосян, Г. А. Еганян

**О влиянии гипоталамуса на функцию коры надпочечников  
 при аллоксановом диабете**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. Г. Баклаваджяном 7/IX 1981)

Взаимоотношения между эндокринными железами весьма многообразны. В одних случаях они носят непосредственный характер, в других—опосредованный через аденогипофиз, гипоталамус и высшие отделы центральной нервной системы. Для щитовидной железы, надпочечников или гонад характерна обратная связь с соответствующими тропными гормонами гипофиза, а активность островков Лангерганса зависит в первую очередь от уровня сахара в крови. Регуляция функции островкового аппарата в основном осуществляется через парагипофизарный путь посредством нервных импульсов (1). Регуляция основных процессов, протекающих в организме, реализуется не одним, а несколькими контролирующими механизмами, и, как справедливо отмечает М. Г. Дурмишьян (2), многообразие связей между регулирующими образованиями и регулируемым эффекторами следует рассматривать как проявление общего физиологического принципа множественного обеспечения функций организма.

Результаты исследований, касающихся расположения центров-регуляторов функции коры надпочечников и инсулярного аппарата поджелудочной железы в гипоталамусе, противоречивы. Так Н. Миякэ, М. Фукасэ и Е. Нисимура (3) считают, что центр управления секреции адрено-кортикотропного гормона расположен в среднем гипоталамусе. Однако по данным Гарриса (4) центр регуляции АКТГ находится в переднем гипоталамусе, а Е. Нисимура (5) утверждает, что он расположен в заднем гипоталамусе. С. Кацуки и М. Ино (6) отметили зависимость секреции кетостероидов, оксикортикостероидов от мамиллярных, супраоптических и заднегипоталамических ядер гипоталамуса.

Общепризнано, что гипергликемия вызывает глубокие изменения общего метаболизма и, следовательно, изменяет состояние вегетативной нервной системы, играющей важную роль в регуляции функций эндокринных желез. В доступной нам литературе мы не нашли сведений относительно влияния гипоталамуса на функцию коры надпочечников при диабете. В наших наблюдениях в условиях клиники и в эксперименте был выявлен факт взаимной связи между функцией коры надпочечников и инсулярным аппаратом (7). В частности, при диабете отмечалось повышение в суточной экскреции мочи содержа-

ния нейтральных 17 кетостероидов и 17 оксикортикостероидов (<sup>8</sup>). С целью выяснения роли гипоталамуса в выявленной закономерности мы провели нижеприведенные экспериментальные исследования.

Исследования проводили на 35 кроликах—самках, весом 2,8—3,5 кг. Животные по принципу аналогов были разбиты на 5 групп по 7 голов в каждой. У животных первой группы были разрушены супраоптические (SO), второй—дорсомедиальные (ДМ), а третьей—заднегипоталамические (НР) ядра. Кролики четвертой группы служили контролем на операцию (имитировали разрушение ядер гипоталамуса без их коагуляции). Животные пятой группы остались интактными.

Двустороннее разрушение ядер гипоталамуса осуществляли стереотаксическим аппаратом, пропуская постоянный электрический ток в ЗМА в течение одной минуты через биполярные электроды. После завершения опытов производили гистологический контроль величины, характера и локализации разрушения гипоталамической области серийными срезами толщиной в 20 мк, который окрашивали по Ниссля. Животные, у которых коагуляция располагалась вне изучаемых нами ядер гипоталамуса, в опыт не брались. Для определения координат пользовались стереотаксическим атласом Фифкова и Маршала (1961), отсчеты для кроликов проводили по методике Р. М. Мещерского (1961).

Через 7 дней после разрушения соответствующих ядер гипоталамуса у кроликов вызывали диабет внутривенным введением 5%-ного раствора аллоксана из расчета 150 мг на 1 кг веса. Наличие и течение диабета контролировалось определением сахара в крови кроликов. Ежедекадно (в течение месяца) определяли в суточной экскреции мочи содержание нейтральных 17-кетостероидов (Н17—КС), 17-оксикортикостероидов (17—ОКС) и электролиты натрия и калия, как в моче, так и в крови. Кетостероиды определяли по Сильберу и Портеру в модификации Н. А. Юдаева, а электролиты—пламенным фотометром. Цифровой материал был подвергнут статистической обработке.

Результаты исследований сводились к следующему. После введения аллоксана в крови кроликов прогрессивно нарастало содержание сахара. Причем гипергликемия наблюдалась независимо от коагуляции соответствующих ядер гипоталамуса. По сравнению с интактными кроликами сахар в крови опытных животных повышался на 300 мг%, что свидетельствует о наличии диабета.

По данным содержания Н17—КС в суточной моче, на 10-й день диабета у кроликов с коагулированными SO и ДМ ядрами оно достоверно повышалось на 5,4—6,9 мг (по сравнению с контролем). На 20-й день при коагуляции SO ядер содержание кетостероидов оставалось повышенным (на 6,9 мг), а при коагуляции ДМ ядер—не достоверно ( $p > 0,05$ ) пониженным (на 3,0 мг). На 30-й день после диабета в обоих случаях андрогенная функция коры надпочечников активизировалась.

Сопоставление этих данных с данными, полученными у животных, служивших контролем на операцию показывает, что SO или ДМ ядра гипоталамуса при диабете не влияют на андрогенную функцию коры

надпочечников. Ибо и при одной операции, без разрушения ядер переднего или среднего гипоталамуса, наблюдалось повышение содержания  $H_{17}-KC$  в моче. Что же касается глюкокортикоидной функции коры надпочечников при диабете на фоне разрушения  $SO$  или  $DM$  ядер, то наблюдалось статистически недостоверное изменение содержания  $17-OXC$  в суточной моче. Иная картина наблюдалась у кроликов с разрушенными заднегипоталамическими ядрами, у которых на 10-й и особенно на 20-й день диабета, по сравнению с интактными животными, содержание  $H_{17}-KC$  и  $17-OXC$  в моче достоверно снижалось: в первой декаде на 4—1,1 мг, а во второй на 4,6—2,8 мг ( $p < 0,05$ ). На 30-й день наблюдения глюкокортикоидная активность коры надпочечников оставалась пониженной. У животных, служивших контролем на операцию, содержание в суточной моче  $H_{17}-KC$  и  $17-OXC$  достоверно повышалось на протяжении опытного периода, т. е. имела место активация глюкокортикоидной функции коры надпочечников. А это свидетельствует об активности заднегипоталамических ядер в регуляции функции коры надпочечников при аллоксановом диабете.

Показатели электролитов натрия, калия в крови и моче, характеризующие минералокортикоидную активность коры надпочечников, уменьшались в крови и увеличивались в моче у кроликов, служивших контролем на операцию. Аналогичная картина отмечалась и при коагуляции  $SO$ ,  $DM$  и  $HP$  ядер гипоталамуса, с той лишь разницей, что при разрушении  $SO$  и  $DM$  ядер чаще наблюдалась недостоверность цифр. Следовательно, по данным электролитов натрия и калия в крови и в моче, изучаемые нами ядра гипоталамуса при диабете существенно не вовлекаются в минералокортикоидную активность коры надпочечников.

Таким образом, обсуждая результаты наших исследований, можно отметить, что не все изучаемые нами ядра гипоталамуса в одинаковой степени вовлекаются в патологический процесс при диабете. Если коагуляция заднегипоталамических ядер существенно влияет на андрогенную и глюкокортикоидную функцию коры надпочечников, понижая их деятельность, то разрушения  $SO$  или  $DM$  ядер такого эффекта не вызывают. Их разрушение не вызывает снижения  $H_{17}-KC$  и  $17-OXC$  в суточной моче у кроликов с аллоксановым диабетом, а наоборот, как и у животных, служивших контролем на операцию, наблюдается стимуляция продукции стероидов. По данным электролитов, организм кроликов при диабете не в состоянии удерживать нормальное количество натрия и калия в крови, вследствие чего их содержание в моче увеличивается. Причем такая картина наблюдается независимо от коагуляции  $SO$ ,  $DM$  или  $HP$  ядер. Если вовлечение последних в андрогенную и глюкокортикоидную функцию очевидно, то заднегипоталамические ядра в минералокортикоидную активность коры надпочечников не вовлекаются.

Из результатов наших исследований вытекает и новый вопрос: вовлечение заднегипоталамических ядер в функцию коры надпочечников при диабете имеет место с участием или без участия аденогипофиза. Разрешение этого вопроса является целью наших дальнейших исследований.

А пока что из полученных нами данных становится очевидным, что задние ядра гипоталамуса принимают активное участие в процессе повышения андрогенной и гликокортикоидной функций коры надпочечников при диабете.

Ереванский медицинский институт

Վ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ս. Ն. ԹՈՐՈՍՅԱՆ, Կ. Ա. ՆԿԱՆՅԱՆ

Հիպոթալամուսի ազդեցությունը մակերիկամի կեղևի ֆունկցիայի վրա շախմատի ժամանակ

Փորձարարական նյութերի (35 ճագարներ) վրա ուսումնասիրվել են հիպոթալամուսի առաջին, միջին և ետին միջուկների առանձին կոագուլյացիաների ազդեցությունը (մշտական էլեկտրական հոսանքով) մակերիկամների կեղևի վրա (17 շեզոք կետոստերոիդներ և 17 օբսիկորտիկոստերոիդներ) ալոքսանային դիաբետի ժամանակ: Ապացուցված է, որ ետին հիպոթալամիկ միջուկը ի հայտ է բերում 17—4Ս-ի և 17 ՕԿՍ-ի նվազում շաքարախտով հիվանդ կենդանու օրվա մեզում: Սակայն չի ազդում արյան և մեզի մեջ գտնվող նատրիումի և կալիումի էլեկտրոլիտների բաղադրության վրա: Հիպոթալամուսի սուպրասպտիկ և դորզոմեդիալ միջուկների կոագուլյացիան շաքարախտի ժամանակ էական փոփոխություններ չի հայտ չի բերում: Ստացված տվյալները վկայում են հիպոթալամուսի հետին միջուկի մասնակցությունը անդրոգեն և գլիկոկորտիկոիդային ֆունկցիաների բարձրացմանը շաքարախտի ժամանակ:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Б. В. Алешин, в кн.: Гистофизиология гипоталамогипофизарной системы, М., 1971. <sup>2</sup> М. Г. Дурмишьян, Стресс и нервизм, Медгиз, М., 1960. <sup>3</sup> Н. Миякэ, М. Фукасэ, Е. Нисимура, в кн.: Центральная регуляция функций эндокринных желез, Медицина, М., 1971. <sup>4</sup> G. Harriis, Brit. med. J., 2, 74 (1951). <sup>5</sup> Е. Нисимура, Найака-хакёку, 8, 164 (1961). <sup>6</sup> С. Кацуки, М. Ино, в кн.: Центральная регуляция функций эндокринных желез, Медицина, М., 1971. <sup>7</sup> В. М. Арутюнян, Щитовидная железа и сахарный диабет, Айастан, Ереван, 1979. <sup>8</sup> В. М. Арутюнян, Журн. эксп. и клин. медицины, АН АрмССР, т. 20, № 5 (1980).

