

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
Д О К Л А Д Ы

LXXIII, № 4

1981

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄՅԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. բեկնածու (պատ. ֆառտուղար), Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդրակից-անդամ, Ա. Թ. ՐԱԲԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդրակից-անդամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդրակից-անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄՐԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդրակից-անդամ, Օ. Մ. ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդրակից-անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդրակից-անդամ, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՁՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ րդրակից-անդամ:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), И. Г. МАГАКЪЯН, академик АН АрмССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒԹ Յ ՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

էշ

- Խ. Ա. Քաղիյան—Շրջման բանաձև և Ս. Ն. Բերնշտեյնի ընդհանրացված անհավասարության ճշգրտումը 195
- Խ. Ա. Ալիխանյան—Դիրիխլեի խնդիրը հանրագումարելի ֆունկցիաների դասում շորրորդ կարգի ճշգրիտ էլիպտիկ հավասարման համար 202
- Գ. Գ. Գևորգյան—Ֆուրյեի ինտեգրալների համար միակության սազմությունների մասին 211

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

- Լ. Վ. Աբրահամյան, Լ. Ա. Մովսիսյան—Ճեղք ունեցող ուղղանկյուն սալի ազատ տատանումները 219

ԱՌՈՒՋԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԻՍՈՒԹՅՈՒՆ

- Ա. Մ. Մխիթարյան—Առաձգական կիսահարթության կամ հարթության և կիսաանվերջ անհամասեռ վերդրակի միջև կոնտակտային իոնադիֆուզիայի խնդրի շուրջը 226

ՔԻՄԻԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱ

- Հ. Կ. Դավթյան—Վառելանյութերի դիսպերզացման միջոցները և նրա լորվ այրմանը նպաստող մյուս գործոնները ներքին այրման շարժիչներում (ՆԱՇ) 234

ՐԻՈՔԻՄԻԱ

- Ա. Ա. Բաջինյան—Տարբեր պրոստագլանդինների ազդեցությունը ևրկչերտ ֆոսֆոլիպիդային թաղանթների հաղորդականության վրա 241

ՄԻՋԱՏԱՔԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- Ա. Մ. Յաբլոկով-Խնձուրյան, Մ. Ա. Մարջանյան—Չրխկան բզեզների դուգավորման պրոցեսը, էդեագուսի կառուցվածքը I. Cardiophorus Eschz սեռի նոր ենթասեռի նկարագրությունը (Coleoptera, Elateridae) 244

ԱԿԱՐԱՆՈՎԻԱ

- Վ. Գ. Շեչենկո, Ա. Հ. Պողոսովա—Հայաստանում սոճիների (ընտ. Pinaceae) վրա հանդիպող քառոտ տղերի (Acariformes, Tetrabodili) ֆաունայի վերաբերյալ նոր տեսակի նկարագրությունը 250

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Стр

- Р. А. Багиян*—Формула обращения и уточнение обобщенного неравенства
С. Н. Бериштейна 195
- Р. А. Алиханян*—Задача Дирихле для эллиптических уравнений четвертого
порядка с суммируемыми граничными условиями 202
- Г. Г. Геворкян*—О множествах единственности для интеграла Фурье 211

МЕХАНИКА

- Л. В. Абрамян, Л. А. Мовсесян*—Свободные колебания прямоугольной пла-
стинки с разрезом 219

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- С. М. Мхитарян*—К задаче контактного взаимодействия между полубеско-
печным неоднородным стрингером и упругой полуплостью или плоскостью 226

ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

- О. К. Давтян*—Способы диспергирования топлива и другие факторы спо-
собствующие полному сгоранию в двигателях внутреннего сгорания (ДВС) 234

БИОФИЗИКА

- С. А. Баджиян*—Влияние различных простагландинов на проводимость би-
слойных фосфолипидных мембран 241

ЭНТОМОЛОГИЯ

- С. М. Яблоков-Хизорян, М. А. Марджанян*—О процессе совокупления и
строении эдеагуса у жуков щелкунов с описанием нового подрода в роде *Car-*
diophorus Eschz (Coleoptera, Elateridae) 244

АКАРОЛОГИЯ

- В. Г. Шевченко, А. Р. Погосова*—К фауне четырехногих клещей (Acari-
formes, Tetrapodili), встречающихся на соснах (сем. Pinaceae) в Армении, с опи-
санием нового вида 250

CONTENTS

MATHEMATICS

<i>R. A. Baghian</i> —A converse formula and precision of generalized S. N. Bernstein's inequality.	P. 195
<i>R. A. Alikhanian</i> —The Dirichlet's problem for the elliptic equation of the fourth order	202
<i>G. G. Gevorkian</i> —On sets of uniqueness for integrals of Fourier	211

MECHANICS

<i>L. V. Abrahamian, L. A. Movsisian</i> —The free vibrations of the rectangular plate with cut	219
---	-----

THEORY OF ELASTICITY

<i>S. M. Mkhitarian, S. M. Mkhitarian</i> —On the problem of the interaction between the half infinite non-homogeneous stringer and elastic half plane or plane.	225
--	-----

CHEMICAL PHYSICS

<i>O. K. Davtian</i> —Dispersing ways of fuel and other factors favoured to the full combustion of the internal-combustion engines	231
--	-----

BIOPHYSICS

<i>S. A. Badjinian</i> —Radiobiological department, Ministry of Public Health Arm. SSR	241
--	-----

ENTOMOLOGY

<i>S. M. Iablukoff-Khinzorian, M. A. Mardjanian</i> —On the process of copulation and structure of the aedeagus of the click beetles (Coleoptera, Elateridae), with the description of a new subgenus of the genus <i>Cardiophorus</i> Eschs	244
--	-----

ACAROLOGY

<i>V. G. Shevtchenko, A. R. Pogosova</i> —To the fauna of the four-legged mites (Acariformes, Tetrápodili) on pines (fam. Pinaceae) in Armenia, with the description of new species	250
---	-----

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 18.11.81. Подписано к печати 28.1.1982. ВФ 05060
 Бумага № 1, 70×108¹/₁₆. Плоскопечать. Печ. лист 4,0. Усл. печ. лист 5,6.
 Учет.-изд. 4,23. Тираж 500. Заказ 891. Издат. 5591
 Адрес ред. 375019, Ереван, Барекамутян, 24-г. II эт., I к.

Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310 г. Эчмиадзин

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Р. А. Багиян

Формула обращения и уточнение обобщенного неравенства С. Н. Бернштейна

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 1/VI 1981)

Целые функции типа Миттаг-Леффлера определяются посредством разложения

$$E_{\rho}(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)} \quad (\rho > 0, -\infty < \mu < +\infty)$$

и, как известно ⁽¹⁾, для любого значения параметра μ имеют порядок ρ и тип, равный единице.

Интегральные представления и свойства, полученные для этой функции в работе ^(2,3), позволили расширить сферу приложения как в некоторых задачах анализа ^(4,5), так и в теории целых функций конечного роста ⁽⁶⁾.

В работе ^(2,3) было получено точное неравенство для последовательных производных функций типа Миттаг-Леффлера, а именно, для значений параметров $\rho \geq 1$ и $\frac{1}{\rho} \leq \mu < +\infty$

$$|E_{\rho}^{(n)}(-z, \mu)| \leq \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(\mu + \frac{n}{\rho}\right)}, \quad \operatorname{Re} z \geq 0, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где знак равенства достигался в точке $z=0$.

В связи с этим возникает вопрос о получении такого же точного неравенства, но уже для произвольных целых функций конечного роста. Отметим, что для целых функций экспоненциального типа—это известное неравенство С. Н. Бернштейна, а для функций произвольного роста некоторая попытка в таком направлении предпринята в работе ⁽⁶⁾. Для значений параметров ρ и σ ($1 \leq \rho < 2$, $0 < \sigma < \infty$) в этой работе был введен класс $B_{\sigma}^{(\rho)}$ целых функций роста (ρ, σ) , ограничен-

ных в специальных угловых областях комплексной плоскости. При $\rho=1$ —это известный класс B , С. Н. Бернштейна целых функций экспоненциального типа, ограниченных на вещественной оси ⁽¹⁾.

При помощи функции $\Phi_{\rho,\mu}(t)$, подробно исследованной в работе ⁽²⁾, получена связь между классами $B_{\sigma}^{(\rho)}$ и B_{σ} , т. е.

если $F(z) \in B_{\sigma}^{(\rho)} (1 \leq \rho < 2, 0 < \sigma < +\infty)$, то

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(zt) \Phi_{\rho,\mu}(t) dt, \quad (2)$$

где $f(z) \in B_{\sigma^{1/\rho}}$ (см. ⁽³⁾, теоремы 1, 2).

Ссылаясь на этот результат, отметим следующее: если снова просмотреть доказательство теоремы 2 статьи ⁽⁶⁾, то можно увидеть, что в ней доказывается больше требуемого. А именно, из формул (2.16) и (2.18) на с. 203 следует, что функция $f(z)$ принадлежит не только классу $B_{\sigma^{1/\rho}}$, а в силу теоремы Винера—Пэли—и классу $W_{\sigma^{1/\rho}}^2 \subset B_{\sigma^{1/\rho}}$. Как известно ⁽¹⁾, W_{σ}^2 —это класс целых функций экспоненциального типа, суммируемых с квадратом на действительной оси. Таким образом справедлива следующая дополненная

Теорема А. Пусть $F(z) \in B_{\sigma}^{(\rho)} (1 \leq \rho < 2, 0 < \sigma < +\infty)$. Тогда имеет место на всей комплексной плоскости представление (2) с $f(z) \in W_{\sigma^{1/\rho}}^2$.

Целью данной работы является получение обращения для представления (2), с помощью которого решается вопрос уточнения обобщенного неравенства С. Н. Бернштейна. На пути решения этой задачи существенно используется аппарат теории интегральных преобразований, изложенный в монографии ⁽¹⁾.

В центре нашего внимания будет следующее интегральное представление:

$$F(x) = \begin{cases} \Gamma(\mu) \int_0^{\infty} f(xt) \Phi_{\rho,\mu}(t) dt, & \text{при } 1 < \rho < \infty, \mu \geq \frac{1}{\rho} \\ \Gamma(\mu) \int_0^{+\infty} f(xt) d\alpha_{\mu}(t), & \text{при } \rho = 1, 1 \leq \mu < +\infty, \end{cases} \quad (3)$$

где функции $\Phi_{\rho,\mu}(t)$ и $\alpha_{\mu}(t)$ определяются посредством формул

$$\Phi_{\rho,\mu}(t) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon,\beta)} e^{zt\rho - itz^{\rho}(1-\mu)} d\tau, \quad \beta \in \left[\frac{\pi}{2\rho}, \frac{\pi}{\rho} \right); \quad (4)$$

$$\alpha_{\mu}(\tau) = \begin{cases} \frac{1 - (1-\tau)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}, & 0 \leq \tau < 1 \\ \frac{1}{\Gamma(\mu)}, & 1 \leq \tau < +\infty \end{cases} \quad (5)$$

(о контуре $\gamma(\varepsilon, \beta)$ см. ⁽¹⁾, с. 126).

1. Прежде всего рассмотрим случай $\rho=1$. При определенных условиях на функцию $f(x)$, т. е. $f(x) \in L(0, l)$, $0 < l < \infty$, из (3) и (5) будем иметь

$$F(x) = \Gamma(\mu) \int_0^{+\infty} f(xt) d\alpha_\mu(t) = \int_0^1 f(xt) [(\mu-1)(1-t)^{\mu-2}] dt, \quad \mu > 1.$$

Отсюда заменой $xt = u$ получим

$$F(x)x^{\mu-1} = (\mu-1) \int_0^x f(u)(x-u)^{\mu-2} du = \Gamma(\mu) D^{-(\mu-1)} f(x), \quad (6)$$

где $D^{-\alpha}$ — дробный интеграл порядка α в смысле Римана—Лиувилля (см. (1), с. 567). Ясно, что при $\mu=1$ $F(x) \equiv f(x)$.

2. Обратимся теперь к вопросу обращения интегрального представления

$$F(x) = \Gamma(\mu) \int_0^{+\infty} f(xt) \Phi_{\rho, \mu}(t) dt \quad \left(1 < \rho < \infty, \mu \geq \frac{1}{\rho}\right), \quad (7)$$

однако полагая, что функция $f(x) \in C[0, +\infty]$ удовлетворяет также условию $f(x) \in L^2(0, \infty)$ (L^2 и C — известные классы суммируемых с квадратом и непрерывных на $[0, +\infty]$ функций).

Лемма. Пусть при $1 < \rho < \infty$ и $\frac{1}{\rho} \leq \mu < +\infty$ функция $\Phi_{\rho, \mu}(t)$ определяется посредством (4). Положим

$$\alpha_{\rho, \mu}(x) = \int_0^x \Phi_{\rho, \mu}(t) dt, \quad K_{\rho, \mu}(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma\left(\mu + \frac{s-1}{\rho}\right)}.$$

Тогда

- 1) функция $\frac{\alpha_{\rho, \mu}(x)}{x} \in L^2(0, +\infty)$ двойственна по Меллину с функцией $\frac{K_{\rho, \mu}(s)}{1-s}$.
- 2) $\sup_{\text{Res}=\frac{1}{2}} |K_{\rho, \mu}(s)| < +\infty$.

В интеграле

$$F(x) = \Gamma(\mu) \int_0^{+\infty} f(xt) \Phi_{\rho, \mu}(t) dt = \Gamma(\mu) \int_0^{+\infty} f(xt) d\alpha_{\rho, \mu}(t),$$

делая замену $xt = u$, получаем

$$xF(x) = \Gamma(\mu) \int_0^{+\infty} f(u) \Phi_{\rho, \mu} \left(\frac{u}{x} \right) du.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$g(x) = \frac{F\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \Gamma(\mu) \int_0^{+\infty} f(u) \Phi_{\rho, \mu}(ux) du,$$

заметив, что если $f(x) \in C[0, +\infty]$, то этот интеграл абсолютно сходится на полуоси $0 < x < +\infty$ в связи с быстрым убыванием функции $\Phi_{\rho, \mu}(t)$ (см. (3), с. 492).

В силу леммы $\frac{\alpha_{\rho, \mu}(x)}{x} \in L^2(0, +\infty)$, следовательно, при дополнительном предположении $f(x) \in L^2(0, +\infty)$ функцию $g(x)$ можно также представить в виде

$$g(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{\alpha_{\rho, \mu}(xu)}{u} f(u) du \right\}.$$

Теорема 1. Пусть $1 < \rho < +\infty$, $\frac{1}{\rho} \leq \mu < +\infty$ и

$$\Phi_2(s) = \frac{\Gamma\left(\mu + \frac{s-1}{\rho}\right)}{\Gamma(s)}.$$

Если $f(x) \in L^2(0, +\infty)$, то для интегрального представления

$$F(x) = \Gamma(\mu) \int_0^{+\infty} f(xt) \Phi_{\rho, \mu}(t) dt$$

почти всюду имеет место формула обращения

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \Phi_2\left(1 + x \frac{d}{dx}\right) |F(x)|, \quad (9)$$

где на полуоси $(0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \Phi_2\left(1 + x \frac{d}{dx}\right) |F(x)| &= \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} P_n\left(1 + x \frac{d}{dx}\right) |F(x)| = \\ &= \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n d_k \left(1 + x \frac{d}{dx}\right)^k |F(x)|. \end{aligned} \quad (10)$$

Доказательство. Если положить

$$\Phi_1(s) = H(s) \equiv 1, \quad K(s) \equiv K_{\rho, \mu}(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma\left(\mu + \frac{s-1}{\rho}\right)},$$

$$\Phi_2(s) = \frac{1}{K_{p,\mu}(s)},$$

то выполнены следующие условия:

$$K(s)H(1-s)\Phi_2(s)\Phi_1(1-s) \equiv 1, \operatorname{Re} s = \frac{1}{2},$$

$$\sup_{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}} \|H(s)\|, \|K(s)\Phi_2(s)\| < +\infty,$$

а

$$\frac{x_{p,\mu}(x)}{x} \in L^2(0, +\infty) \text{ и } \frac{h(x)}{x} \in L^2(0, +\infty)$$

двойственны по Меллину соответственно с функциями

$$\frac{K_{p,\mu}(s)}{1-s} \in L^2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right) \text{ и } \frac{H(s)}{1-s} = \frac{1}{1-s},$$

причем

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - i\infty}^{\frac{1}{2} + i\infty} \frac{x^{1-s}}{1-s} ds = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Итак все условия доказанной в монографии ⁽¹⁾ теоремы выполнены (см. ⁽¹⁾, с. 96). Применяя ее, получим, что если всюду на $(0, +\infty)$

$$g(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \Gamma(\mu) \int_0^{+\infty} \frac{x_{p,\mu}(ux)}{u} f(u) du \right\}, f(x) \in L^2(0, +\infty),$$

то почти всюду на $(0, +\infty)$ имеет место двойственная формула

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \left\{ \frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} \frac{h(xu)}{u} \Phi_2\left(-u \frac{d}{du}\right) g(u) du, g(x) \in L_2^{(\Phi_1)}(0, +\infty). \right.$$

Преобразуем полученную формулу, учитывая, что

$$h(xu) = \begin{cases} 0, & 0 < u < \frac{1}{x} \\ 1, & \frac{1}{x} < u < +\infty. \end{cases}$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \frac{d}{dx} \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{1}{u} \Phi_2\left(-u \frac{d}{du}\right) g(u) du = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \left[u \Phi_2\left(-u \frac{d}{du}\right) g(u) \right]_{u=\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \Phi_2 \left(1 + x \frac{d}{dx} \right) \left\{ \frac{1}{x} g \left(\frac{1}{x} \right) \right\},$$

откуда получается утверждение (9)—(10) теоремы, если учесть, что $\frac{1}{x} g \left(\frac{1}{x} \right) = F(x)$.

3. Применим теперь полученную нами формулу обращения к уточнению неравенства С. Н. Бериштейна на случай целой функции произвольного роста.

Теорема 2. Если $F(z) \in B_{\sigma}^{(\rho)}$ ($1 \leq \rho < 2$, $0 < \sigma < \infty$), то при любом вещественном α и любом вещественном $x \in (0, +\infty)$

$$a) \quad |\sin \alpha F'(x) - \sigma^{\frac{1}{\rho}} \cos \alpha F(x)| \leq \frac{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}{\Gamma(\mu)} \max_x \left| \Phi_2 \left(1 + x \frac{d}{dx} \right) F(x) \right|, \quad (11)$$

$$b) \quad \sup_x |F^{(k)}(x)| \leq \sigma^{\frac{k}{\rho}} \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)} \sup_x \left| \Phi_2 \left(1 + x \frac{d}{dx} \right) F(x) \right|, \quad (12)$$

$$\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho},$$

где оператор Φ_2 определяется посредством (8).

Доказательство. Из теоремы А следует, что $f(z)$, фигурирующая в представлении (7), принадлежит классу $W_{\sigma}^{2, 1/\rho} \subset B_{\sigma}^{1/\rho}$. Следовательно, для функции $f(x)$ справедлива также теорема 1, т. е.

$$f(x) = \Phi_2 \left(1 + x \frac{d}{dx} \right) |F(x)|, \quad x \in [0, +\infty), \quad \Phi_2(s) = \frac{\Gamma\left(\mu + \frac{s-1}{\rho}\right)}{\Gamma(s)}. \quad (13)$$

Для получения точных неравенств (11)—(13) остается сослаться на статью (6) (см. теорему 3 и формулу (2.20)), заменив там значение $m_f = \max |f(x)|$ соответствующим обращенным значением (13).

Рассмотрим частные случаи этой теоремы.

а. Пусть $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\rho = \mu = 1$. Тогда, как легко следует из (3)—(6), $F(x) \equiv f(x)$, $\Phi_2 \left(1 + x \frac{d}{dx} \right) F(x) = f(x) = F(x)$ и мы получаем классическое неравенство С. Н. Бериштейна

$$\sup_x |F'(x)| \leq \sigma \sup_x |F(x)|.$$

б. Пусть $F(x) = E_{\rho}(-x, \mu)$ — функция типа Миттаг-Леффлера.

Тогда $\Phi_2\left(1+x\frac{d}{dx}\right)E_\rho(-x, \mu) = e^{-x}$, $0 \leq x < +\infty$, $\sigma = 1$ $\sup_x |e^{-x}| = 1$

и из (12) в частности мы получаем

$$|E_\rho^{(k)}(-x, \mu)| \leq \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)}, \quad k \geq 0,$$

что совпадает с точными неравенствами (1).

В заключение выражаю глубокую благодарность М. М. Джрбашяну, как за постановку задач, так и постоянное внимание при выполнении данной работы.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Խ. Ա. ԲԱՂԻՅԱՆ

Շրջման բանաձև և Ս. Ն. Բերնշտեյնի ընդհանրացված անհավասարության
ճշգրտումը

Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների համար ստացված Մ. Մ. Ջրբաշյանի և հեղինակի կողմից ինտեգրալ ներկայացումները և հատկությունները թույլ են տվել ընդարձակել կիրառությունների ոլորտը, ինչպես անալիզի որոշակի խնդիրներում, այնպես էլ վերջավոր աճումով ամբողջ ֆունկցիաների տեսության մեջ:

Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների հաջորդական ածանցյալների համար ստացված է եղել ճշգրիտ անհավասարություն:

Ներկա աշխատանքում ընդհանրացվում է այդ արդյունքը կամայական վերջավոր աճումով ամբողջ ֆունկցիայի համար:

Նախ՝ ստացված է շրջման բանաձև մի ինտեգրալ ներկայացման համար, որը ֆունդամենտալ դեր է խաղում վերջավոր աճումով ամբողջ ֆունկցիաների տեսության մեջ:

Այդ շրջման բանաձևի օգնությամբ ճշգրտվում է Ս. Ն. Բերնշտեյնի հայտնի անհավասարությունը կամայական աճումով ամբողջ ֆունկցիայի դեպքում:

Այդ խնդիրների լուծման ժամանակ էական դեր է խաղում ինտեգրալ ձևափոխությունների ապարատը, որը զարգացված է Մ. Մ. Ջրբաշյանի մենագրության մեջ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966. ² М. М. Джрбашян, Р. А. Багиян, ДАН СССР, т. 223, № 6 (1975). ³ М. М. Джрбашян, Р. А. Багиян, Изв. АН АрмССР, сер. математика, т. 10, № 6 (1975). ⁴ Р. А. Багиян, ДАН АрмССР, т. 61, № 3 (1975). ⁵ Р. А. Багиян, ДАН АрмССР, т. 71, № 3 (1980). ⁶ Р. А. Багиян, Изв. АН АрмССР, сер. математика, т. 15, № 3 (1980). ⁷ Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, Наука, М., 1965.

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Р. А. Алиханян

Задача Дирихле для эллиптических уравнений четвертого порядка с суммируемыми граничными условиями

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 8/VI 1981)

Пусть Γ — достаточно гладкая замкнутая кривая на плоскости (x, y) , разбивающая ее на две области: D^+ (конечную, содержащую начало координат) и D^- (бесконечную).

Пусть функция $z = \alpha(t)$ взаимно-однозначно отображает кольцо $1 \leq |t| \leq 1 + \epsilon$ на некоторую замкнутую двусвязную область, принадлежащую $D^- + \Gamma$, причем окружность $|t| = 1$ отображает на Γ с сохранением ориентации и якобиан отображения отличен от нуля.

Будем говорить, что заданная в D^- функция $u(x, y)$ принимает граничное значение $v(x, y)$, ($v \in L_1(\Gamma)$) в смысле L_1 , если для любой отображающей функции $\alpha(t)$, описанной выше, имеет место равенство

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow 1 \\ \eta > 1}} \int_{|\alpha| = 1} |u(\alpha(\eta t)) - v(\alpha(t))| ds = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим правильно эллиптическое уравнение

$$\sum_{k=0}^4 a_k \frac{\partial^4 u}{\partial x^k \partial y^{4-k}} = 0, \quad (2)$$

где a_k — комплексные числа, а $u(x, y)$ — искомое комплекснозначное решение.

Для уравнения (2) рассмотрим задачу Дирихле в следующей постановке: найти регулярное в области D^- решение уравнения (2), расходящее на бесконечности не быстрее $M|z|$, ($M = \text{const} > 0$) и удовлетворяющее граничным условиям:

$$u|_{\Gamma} = v_1(z); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = v_2(z), \quad (3)$$

где n — внешняя нормаль к Γ , а $v_1(z)$ и $v_2(z)$ — заданные функции.

Граничные условия (3) можно переписать в виде

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\Gamma} = f(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\Gamma} = g(x, y), \quad (4)$$

$$u(x_0, y_0) = v_1(x_0, y_0), \quad (5)$$

причем f и g удовлетворяют условию

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0,$$

а (x_0, y_0) — фиксированная точка на Γ .

Предполагается, что f и g принадлежат L_1 и условие (4) понимается в смысле L_1 .

В конечных областях, когда функции f, g принадлежат гельдеровским классам, эта задача исследована в работах (1-3). Первая краевая задача для уравнения второго порядка в конечных областях в классе L_2 решена в (4). В том случае, когда граничные функции из C_α и C , задача Дирихле для эллиптических систем второго порядка в бесконечных областях изучена в работах (5,6).

В настоящей статье доказывается фредгольмовость поставленной задачи, а для области $|z| > 1$ доказывается однозначная разрешимость и указывается метод построения решения в явном виде.

Пусть $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ достаточно гладкие функции, $\alpha(t)$ взаимно-однозначно отображает кольцо $1 \leq |t| \leq 1 + \varepsilon$ на некоторую замкнутую окрестность Γ , лежащую в D^- , причем $|t| = 1$ отображается на Γ , и пусть $\alpha'(t) \neq 0$ при $|t| = 1$.

Введем следующие обозначения:

$$S_{1,0} = \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t) - \alpha(z)} - \frac{1}{t - z}, \quad (6)$$

$$S_{1,n} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\beta(t) - \beta(z)}{\alpha(t) - \alpha(z)} \right]^n, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (7)$$

$$S_{2,n} = \int_{|t|=1} \frac{S_{1,n}(\tau, z)}{\tau - z} d\tau, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (8)$$

где $|t| = 1$, $1 < |z| \leq 1 + \varepsilon$.

Имеет место следующая

Лемма 1. Для функций $S_{j,n}(t, z)$, ($j = 1, 2$; $n = 0, 1$) справедлива оценка

$$|S_{j,n}(t, z)| \leq C_{j,n} \left(1 + \frac{|z|^2 - 1}{|t - z|^2} \right), \quad (9)$$

где $C_{j,n}$ — положительные постоянные.

Доказательство. Для функций $S_{1,n}(t, z)$ легко убедиться в справедливости неравенства (9). Поэтому доказательство проведем

лишь для $S_{2,1}(t, z)$ (для остальных функций $S_{2,n}(t, z)$ доказательство мало отличается от приведенного).

Сделав замену $\alpha(\tau) = \zeta$, $\alpha(z) = \omega$, $\alpha(t) = t_0$, получим

$$S_{2,1}(t, z) = I(t_0, \omega) + \int_{\Gamma} \frac{K(\zeta, t_0, \omega)}{(\zeta - \omega)^2} d\zeta, \quad (10)$$

где

$$I(t_0, \omega) = \int_{\Gamma} \frac{(\zeta - \omega)\beta_1'(\zeta) - \beta_1(t_0) + \beta_1(\omega)}{\alpha_{-1}'(t_0)(\zeta - \omega)^2} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - t_0},$$

$$K(\zeta, t_0, \omega) = \frac{(\zeta - \omega)\beta_1'(\zeta) - \beta_1(t_0) + \beta_1(\omega)}{\alpha_{-1}(\zeta) - \alpha_{-1}(t_0)} - \frac{(\zeta - \omega)\beta_1'(t_0) - \beta_1(\zeta) + \beta_1(\omega)}{\alpha_{-1}'(t_0)(\zeta - t_0)},$$

$\alpha_{-1}(\zeta)$ — функция, обратная к $\alpha(\tau)$, $\beta_1(\zeta) = \beta(\alpha_{-1}(\zeta))$.

Так как $K(\zeta, t_0, \omega)$ и ее производные по ζ удовлетворяют условию Гёльдера по всем аргументам при $t_0, \zeta \in \Gamma, \omega \in D^-$, то второй интеграл в правой части равенства (10) ограничен (?). Вычисляя $I(t_0, \omega)$ с помощью вычетов и возвращаясь к переменным t, z , получаем

$$I(t_0, \omega) = -\pi i \frac{d}{dt} \left[\frac{\beta(t) - \beta(z)}{\alpha(t) - \alpha(z)} \right] = -\pi i S_{1,1}(t, z). \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует справедливость оценки (9) для функции $S_{2,1}(t, z)$.

Рассмотрим теперь семейство операторов

$$T_{j,n}(f, z) = \int_{|t|=1} S_{j,n}(t, z) f(t) dt, \quad f \in L_1(|t|=1), \quad (j=1, 2; \quad n=0, 1). \quad (12)$$

Лемма 2. Для операторов $T_{j,n}(f, z)$ имеет место следующая оценка:

$$\int_{|\tau|=1} |T_{j,n}(f, r\tau)| ds_{\tau} \leq C \int_{|\tau|=1} |f(\tau)| ds_{\tau}, \quad 1 < r \leq 1 + \varepsilon, \quad (13)$$

где $C = \text{const} > 0$ не зависит от f и r .

Доказательство леммы 2 непосредственно следует из леммы 1.

Лемма 3. Пусть $f \in C_{\alpha}(|t|=1)$ и $\alpha(t)$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм единичной окружности на Γ , $\alpha'(t) \neq 0$, $\alpha(t) \in C_{\alpha}(|t|=1)$. Справедливы следующие неравенства:

$$|I_1(f, z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{F^-(t) + f(t)}{\alpha(t) - z} d\alpha(t) \right| \leq C \int_{|t|=1} |f(t)| ds, \quad (14)$$

$$|I_2(f, z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{F^+(t) - f(t)}{\alpha(\bar{t}) - z} d\alpha(\bar{t}) \right| \leq C \int_{|t|=1} |f(t)| ds, \quad (15)$$

где $z \in D^-$, $\bar{t}$ — комплексно сопряженное число к t , C — постоянная, не зависящая от f и z , а $F^{\pm}(t)$ — предельные значения интеграла типа Коши

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{f(t)}{t-\zeta} dt.$$

Доказательство. Согласно формуле Сохоцкого—Племеля

$$F^-(t) = -\frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|t_0|=1} \frac{f(t_0) dt_0}{t_0-t}, \quad |t|=1. \quad (16)$$

Заменяя в (14) и (16) t на $x_{-1}(\tau)$ и t_0 на $x_{-1}(\tau_0)$, $\tau, \tau_0 \in \Gamma$, получим

$$I_1(f, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F^-(x_{-1}(\tau)) + f(x_{-1}(\tau))}{\tau-z} d\tau, \quad (17)$$

$$F^-(x_{-1}(\tau)) = \Phi^-(\tau) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} S_{1,0}(\tau_0, \tau) f(x_{-1}(\tau_0)) d\tau_0, \quad (18)$$

где

$$\Phi^-(\tau) = -\frac{1}{2} f(x_{-1}(\tau)) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(x_{-1}(\tau_0))}{\tau_0-\tau} d\tau_0 = \lim_{\zeta \rightarrow \tau, \zeta \in D^-} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(x_{-1}(\tau_0))}{\tau_0-\zeta} d\tau_0,$$

а $S_{1,0}(\tau_0, \tau)$ определяется формулой (6).

По формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi^-(\tau) d\tau}{\tau-z} = -\Phi(z) \equiv -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(x_{-1}(\tau_0)) d\tau_0}{\tau_0-z}, \quad z \in D^-. \quad (19)$$

Внося выражение для $F^-(x_{-1}(\tau))$ из (18) в (17) и имея в виду (19), имеем:

$$I_1(f, z) = \int_{\Gamma} S_{1,0}(\tau_0, z) f(x_{-1}(\tau_0)) d\tau_0. \quad (20)$$

Из (20) и леммы 2 следует требуемая оценка (14). Аналогично доказывается и неравенство (15).

Исследуем теперь задачу (2), (4), (5).

Вначале покажем фредгольмовость задачи Дирихле, когда $f, g \in C_a$, а $u(x, y)$ ищется в классе функций, принадлежащих в окрестности Γ (включая Γ) C_* . Затем докажем однозначную разрешимость этой задачи в области $|z| > 1$. Эти результаты будут использованы для исследования задачи Дирихле для суммируемых f и g .

Пусть характеристическое уравнение имеет простые корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, причем $\operatorname{Im} \lambda_1 > 0, \operatorname{Im} \lambda_2 > 0, \operatorname{Im} \lambda_3 < 0, \operatorname{Im} \lambda_4 < 0$. Тогда общее решение уравнения (2), растущее на бесконечности не быстрее $M|z|$, выражается формулой ⁽¹⁾

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^4 [\omega_k(x + \lambda_k y) + c_k \ln(x + \lambda_k y)] + d_0 + d_1 x + d_2 y, \quad (21)$$

где $\omega_k(x + \lambda_k y)$ — исчезающие на бесконечности произвольные аналити-

ческие функции от аргументов $x + \lambda_k y$ при $(x, y) \in D^-$, а c_k и d_k — произвольные постоянные, удовлетворяющие условию

$$c_1 + c_2 - c_3 - c_4 = 0,$$

причем в окрестности Γ $\omega_k(x + \lambda_k y)$ принадлежит тому же классу, что и решение $u(x, y)$.

Подставляя выражение для $u(x, y)$ из (21) в граничные условия (4) и (5), получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \sum_{k=1}^4 \varphi_k(x + \lambda_k y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \equiv \sum_{k=1}^4 \lambda_k \varphi_k(x + \lambda_k y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (23)$$

$$d_0 = v_1(x_0, y_0) - \sum_{k=1}^4 \omega_k(x_0 + \lambda_k y_0) + c_k \ln(x_0 + \lambda_k y_0) - d_1 x_0 - d_2 y_0, \quad (24)$$

где

$$\varphi_k(x + \lambda_k y) = \omega'_k(x + \lambda_k y) + \frac{c_k}{x + \lambda_k y} + b_k, \quad (25)$$

$$b_1 = b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{d_2 - \lambda_4 d_1}{\lambda_3 - \lambda_4}, \quad b_4 = \frac{d_2 - \lambda_3 d_1}{\lambda_4 - \lambda_3}. \quad (26)$$

Из (25) следует, что $\varphi_k(x + \lambda_k y)$ в окрестности Γ принадлежит классу S_a и является аналитической функцией от своего аргумента при $(x, y) \in D^-$, причем $\varphi_1(\infty) = \varphi_2(\infty) = 0$, а φ_3 и φ_4 в окрестности бесконечности ограничены.

Задачи вида (22), (23) исследованы в работе (8), где доказана их фредгольмовость.

Пусть теперь характеристическое уравнение имеет кратные корни. Для определенности допустим, что $\lambda_1 = \lambda_2 = i$, $\lambda_3 \neq \lambda_4$ (случай $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$ рассматривается аналогично). Общее решение уравнения (2) в этом случае имеет вид (1)

$$u(x, y) = \omega_1(z) + \bar{z} \omega_2(z) + \sum_{k=3}^4 [\omega_k(x + \lambda_k y) + c_k \ln(x + \lambda_k y)] + c_1 \ln z + d_0 + d_1 x + d_2 y, \quad (27)$$

где ω_k и d_k те же, что в (21), а c_k удовлетворяют условию

$$c_1 - c_3 - c_4 = 0.$$

Подставляя (27) в граничные условия (4), получаем:

$$\varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \sum_{k=3}^4 \varphi_k(x + \lambda_k y) = f(x, y) + I(\varphi_2), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (28)$$

$$i\varphi_1(z) - i\varphi_2(z) + \sum_{k=3}^4 \lambda_k \varphi_k(x + \lambda_k y) = g(x, y) + iI(\varphi_2), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (29)$$

где

$$\varphi_1(z) = \omega_1(z) + \frac{c_1}{z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{t} \varphi_2'(t) dt}{t-z}, \quad \varphi_2(z) = \omega_2(z).$$

$$I(\varphi_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(\bar{t}-\bar{z}) \varphi_2'(t)}{t-z} dt, \quad (30)$$

а $\varphi_k(x + \lambda_k y)$ при $k=3, 4$ определяются формулой (25), причем $\varphi_k \in C_a$, $k=\overline{1, 4}$ в окрестности Γ .

Так как интегральный оператор (30) вполне непрерывен из $C_a(\Gamma)$ в $C_a(\Gamma)$, то фредгольмовость имеет место и для системы (28), (29). Таким образом задача Дирихле для уравнения (2) является фредгольмовой при сделанных предположениях относительно граничной и искомой функции.

Пусть $\Gamma = \{z; |z|=1\}$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_3 \neq \lambda_4$. Ясно, что

$$x + \lambda_k y = \begin{cases} v_k(z + \mu_k \bar{z}), & v_k = \frac{i + \lambda_k}{2i}, \\ v_k(\bar{z} + \mu_k z), & v_k = \frac{i - \lambda_k}{2i}, \end{cases} \quad \begin{cases} \mu_k = \frac{i - \lambda_k}{i + \lambda_k}, & k=1, 2; \\ \mu_k = \frac{i + \lambda_k}{i - \lambda_k}, & k=3, 4, \end{cases}$$

причем $|\mu_k| < 1$ при $k=\overline{1, 4}$.

Введем в рассмотрение кусочно-аналитические функции с линией разрыва $|z|=1$:

$$\psi_1(z) = \begin{cases} \varphi_1\left(v_1\left(z + \frac{\mu_1}{z}\right)\right), & |z| > 1, \\ \varphi_3\left(v_3\left(\frac{1}{z} + \mu_3 z\right)\right), & |z| < 1, \end{cases} \quad \psi_2(z) = \begin{cases} \varphi_2\left(v_2\left(z + \frac{\mu_2}{z}\right)\right), & |z| > 1, \\ \varphi_4\left(v_4\left(\frac{1}{z} + \mu_4 z\right)\right), & |z| < 1. \end{cases}$$

Так как при $|z|=1$

$$\psi_k^-(z) = \varphi_k(x + \lambda_k y), \quad \psi_k^+(z) = \varphi_{k+2}(x + \lambda_{k+2} y), \quad k=1, 2, \quad (31)$$

то задача (22), (23) сводится к эквивалентной задаче сопряжения относительно вектор-функции (ψ_1, ψ_2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^- \\ \psi_2^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^+ \\ \psi_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

решение которой имеет вид:

$$\psi_1(z) = \begin{cases} (\lambda_3 - \lambda_4)^{-1} [G(z) - \lambda_4 F(z)], & |z| < 1, \\ (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} [\lambda_2 F(z) - G(z)], & |z| > 1, \end{cases} \quad (32)$$

$$\psi_2(z) = \begin{cases} (\lambda_3 - \lambda_4)^{-1} [\lambda_3 F(z) - G(z)], & |z| < 1, \\ (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} [G(z) - \lambda_1 F(z)], & |z| > 1, \end{cases}$$

где

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{f(t)dt}{t-z}, \quad G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{g(t)dt}{t-z}, \quad (33)$$

Применяя формулу Коши для функций $\varphi_k(x+\lambda_k y)$ при $k=1, 2$ и $(x+\lambda_k y)^{-1} \varphi_k(x+\lambda_k y)$ при $k=3, 4$ и учитывая соотношения (31), получаем

$$\varphi_k(x+\lambda_k y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{\psi_k^-(t) d(t+\mu_k \bar{t})}{t+\mu_k \bar{t}-z-\mu_k \bar{z}}, & k=1, 2. \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{\psi_{k-2}^+(t) d(\bar{t}+\mu_k t)}{\bar{t}+\mu_k t-\bar{z}-\mu_k z} + \psi_{k-2}(0), & k=3, 4. \end{cases} \quad (34)$$

Из формул (32)–(34), (24)–(26) однозначным образом определяются $\omega_k(x+\lambda_k y)$, c_k и d_k . Подставляя их в (21), получаем явное решение задачи (2), (4–5) в области $|z|>1$.

Аналогично можно получить решение задачи Дирихле в области $|z|>1$ в случае кратных корней характеристического уравнения.

Покажем однозначную разрешимость задачи (2), (4–5) в области $|z|>1$ при $f, g \in L_1$.

Известно, что если $f, g \in C_\alpha(\Gamma)$, ($0 \leq \alpha < 1$) и граничное условие (4) понимается в смысле L_1 , то регулярное в D^- решение $u(x, y)$ уравнения (2) принадлежит $C_\alpha(D^- + \Gamma)$. Следовательно, однородная задача в этой области имеет только нулевое решение.

Решение задачи (2), (4–5) при $f, g \in C_\alpha$ ($|t|=1$) обозначим через

$$u(z) = v(f, z) + w(g, z) + C,$$

где v и w являются линейными операторами относительно f и g , а $C = v_1(x_0, y_0)$ — постоянное. На основании соотношений (32–34) и несложных преобразований получим, что u_x и u_y являются линейными комбинациями от значений операторов вида $T_{1,0}$, $T_{1,1}$, I_1 , I_2 , $F(0)$ и $G(0)$ над f и g . Эти операторы определяются формулами (12), (14–15), (33). Используя леммы 2 и 3, получаем следующую оценку для производных искомого решения $u(z)$:

$$\int_{|z|=1} (|u_x(r\tau)| + |u_y(r\tau)|) ds_\tau \leq C \left[\int_{|z|=1} |f(\tau)| ds_\tau + \int_{|z|=1} |g(\tau)| ds_\tau \right], \quad (35)$$

$f, g \in C_\alpha$ ($|z|=1$), $1 < r \leq 1 + \epsilon$, C не зависит от f и g .

Пусть $f, g \in L_1$ ($|t|=1$). Операторы $v(f, z)$ и $w(g, z)$ имеют смысл и при $f, g \in L_1$ ($|t|=1$). Так как C_α всюду плотно в L_1 , то неравенство (35) имеет место также и для $f, g \in L_1$. Пусть последовательности функций $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ из C_α ($|t|=1$) сходятся в смысле L_1 к f и g соответственно. Поскольку $f_n, g_n \in C_\alpha$ ($|t|=1$), то для них задача (2), (4–5) в области $|z|>1$ имеет единственное решение, которое обозначим через

$$u_n(z) = v(f_n, z) + w(g_n, z) + C. \quad (36)$$

Ясно, что $u(z) - u_n(z) = v(f - f_n, z) + w(g - g_n, z)$

$$\begin{aligned} u_h(z) - f(x(\tau)) &= \frac{\partial}{\partial x} [u(z) - u_n(z)] + \frac{\partial u_n(z)}{\partial x} - f_n(x(\tau)) + \\ &+ f_n(x(\tau)) - f(x(\tau)), \quad z = x(r\tau). \end{aligned} \quad (37)$$

Из соотношений (36), (37) и неравенства (35) следует

$$\int_{|r|=1} |u_x(x(r\tau)) - f(x(\tau))| ds_\tau \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow 1, \quad r > 1.$$

Следовательно, u_x удовлетворяет граничному условию (4). Аналогично устанавливается

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_\Gamma = g(x, y), \quad u(x_0, y_0) = v_1(x_0, y_0).$$

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Задача Дирихле для уравнения (2) в области $|z| > 1$ однозначно разрешима.*

В случае произвольной области D^- с гладкой границей Γ производные u_x и u_y решения задачи Дирихле для уравнения (2) с точностью до слагаемого

$$\int_{\Gamma} K_1(t, z) f(t) dt + \int_{\Gamma} K_2(t, z) g(t) dt$$

имеют такой же вид, что и в случае области $|z| > 1$, причем функции $K_1(t, z)$ и $K_2(t, z)$ ограничены при $t \in \Gamma$, $z \in (D^- + \Gamma)$. Так как эти слагаемые не вносят изменения в доказательство фредгольмовости рассматриваемой задачи, то имеет место

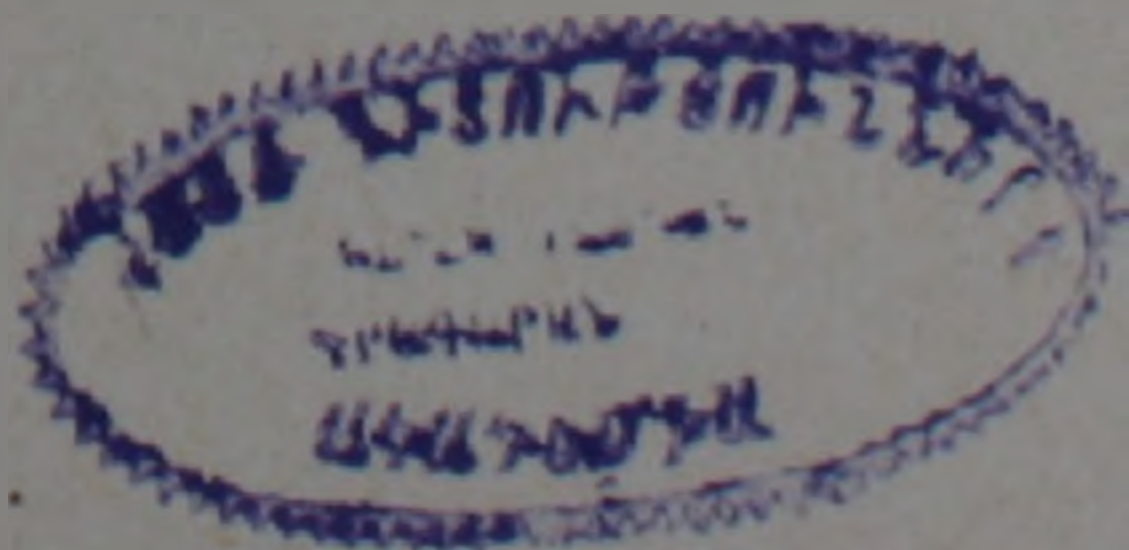
Теорема 2. *Задача (2), (4–5) является фредгольмовой.*

Если $v_1 \in C'(\Gamma)$, $v_2 \in C(\Gamma)$, то, как было сказано выше, решение задачи (2), (3) принадлежит $C'(D^- + \Gamma)$. Отсюда и из теорем 1 и 2 непосредственно следует

Теорема 3. *Если $v_1 \in C'(\Gamma)$, $v_2 \in C(\Gamma)$, то задача (2), (3) в классе $C'(D^- + \Gamma)$ фредгольмова, а в области $|z| > 1$ однозначно разрешима.*

Вышеустановленные результаты справедливы для эллиптических систем вида (2), задача Дирихле для которых удовлетворяет условию Лопатинского.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса



Դիրիիլեի խնդիրը հանրագումարելի ֆունկցիաների դասում շորրորդ կարգի ճշգրիտ էլիպտիկ հավասարման համար

Դիցուք D -ն անվերջ հեռու կետի շրջակայքը պարունակող տիրույթ է երկու չափանի տարածության մեջ, իսկ Γ -ն նրա եզրագիծն է: Աշխատանքում դիտարկվում է հետևյալ խնդիրը. գտնել շորրորդ կարգի հաստատուն կոմպլեքս գործակիցներով ճշգրիտ էլիպտիկ հավասարման

$$\sum_{k=0}^4 a_k \frac{\partial^4 u}{\partial x^k \partial y^{4-k}} = 0,$$

$u \in C^4(D)$ լուծումները, որոնք բավարարում են

$$u|_{\Gamma} = v_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = v_2$$

եզրային պայմաններին և անվերջ հեռու կետի շրջակայքում աճում են ոչ արագ, քան $M|z|$, $M = \text{const}$. Ապացուցվում է, որ դիտարկված խնդիրը ֆրեդհոլմիան է, իսկ $D = \{z : |z| > 1\}$ տիրույթում ունի միակ լուծում, որը կարելի է գրել բացահայտ տեսքով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. В. Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. Наука, М., 1966. ² А. И. Вольперт, Труды Моск. мат. о-ва вып. 10 (1961). ³ Г. В. Боярский, ДАН СССР, т. 124, № 1 (1958). ⁴ В. П. Михайлов, Дифференциальные уравнения, т. 12, № 10 (1976). ⁵ Н. Е. Товмасян, Мат. сб., т. 89 (131) (1972). ⁶ Э. П. Меликсетян, Изв. АН АрмССР, сер. матем., т. 15, № 5 (1980). ⁷ Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Наука, М., 1968. ⁸ N. E. Tovmasian, Integral representations of holomorphic functions by holomorphic densities and their applications, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1979.

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Г. Г. Геворкян

О множествах единственности для интегралов Фурье

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 25/VI 1981)

В настоящей работе для интегралов Фурье доказывается существование множеств единственности меры нуль.

Определение 1. Множество $E \subset (-\infty, +\infty)$ назовем множеством единственности для интегралов Фурье, если из условий $f(x) = 0$ при $x \in E$ и $\hat{f}(x) \in L_p(-\infty, +\infty)^*$ для некоторого $p < 2$ следует, что $f(x) = 0$ почти всюду на $(-\infty, +\infty)$.

В (1) доказана (см. (1), теорема 3)

Теорема 1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует множество единственности для интегралов Фурье, мера которого меньше ε .

В настоящей работе доказывается следующая

Теорема 2. Существует множество E , $\mu E = 0$, такое, что если для некоторой функции $f(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$

1°) $\hat{f}(x) \in L_p(-\infty, +\infty)$ для некоторого $p < 2$,

2°) $f_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{4\sin^2 \frac{N(x-t)}{2}}{(x-t)^2 N} dt$ сходится к нулю при

$N \rightarrow \infty$ для $x \in E^{**}$,

то $f(x) = 0$ почти всюду на $(-\infty, +\infty)$.

Для доказательства теоремы 2 нам нужно несколько вспомогательных лемм.

* Рассматривается преобразование Фурье в классе $L_2(-\infty, +\infty)$, т. е.

$$f(x) \in L_2(-\infty, +\infty) \text{ и } \hat{f}(x) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a f(t) e^{-itx} dt \in L_2(-\infty, +\infty).$$

** Вообще $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x) = f(x)$ п. в. на $(-\infty, +\infty)$.

Лемма 1. Пусть $f(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ и $f_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \times$
 $\times \frac{4\sin^2 \frac{\sigma(x-t)}{2}}{(x-t)^{2\sigma}} dt$, $0 < \sigma < +\infty$, суммы Фейера ее интеграла Фурье.

Если $\lambda(x)$ непрерывно дифференцируемая ограниченная функция, то

$$\frac{\lambda(x)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{4\sin^2 \frac{\sigma(x-t)}{2}}{(x-t)^{2\sigma}} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \lambda(t) \frac{4\sin^2 \frac{\sigma(x-t)}{2}}{(x-t)^{2\sigma}} dt \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 \text{ при } \sigma \rightarrow +\infty. \quad (1)$$

Доказательство. Интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)\lambda(x) - f(t)\lambda(t)] \frac{4\sin^2 \frac{\sigma(x-t)}{2}}{(x-t)^{2\sigma}} dt$$

разобьем на две части

$$\frac{1}{2\pi} \left(\int_{|x-t| \geq \sigma^{-\frac{1}{2}}} + \int_{|x-t| < \sigma^{-\frac{1}{2}}} \right) [f(t)\lambda(t) - f(t)\lambda(x)] \frac{4\sin^2 \frac{\sigma(x-t)}{2}}{(x-t)^{2\sigma}} dt = I_1 + I_2$$

$$|I_1| \leq \left\{ \int_{|x-t| \geq \sigma^{-\frac{1}{2}}} [f(t)\lambda(x) - f(t)\lambda(t)]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sigma \int_{|t| > \sigma^{\frac{1}{2}}} \frac{16\sin^4 \frac{t}{2}}{t^4} dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \quad (2)$$

$$\leq 2 \sup_x |\lambda(x)| \cdot \|f\|_2 \left\{ \sigma \int_{|t| > \sigma^{\frac{1}{2}}} \frac{16 dt}{t^4} \right\}^{\frac{1}{2}} < M^1 |\sigma \cdot \sigma^{-\frac{1}{2}}|^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$$

Из непрерывной дифференцируемости $\lambda(t)$ следует, что для любого x и для достаточно больших σ (зависящих от x)

$$|\lambda(x) - \lambda(t)| < \alpha_x |x-t|, \text{ при } |x-t| < \sigma^{-\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

где α_x некоторое число, зависящее от x .

Поэтому

$$|I_2| < \left\{ \int_{|x-t| < \sigma^{-\frac{1}{2}}} f^2(t) [\lambda(x) - \lambda(t)]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{16\sin^4 \frac{\sigma(x-t)}{2}}{(x-t)^{4\sigma^2}} dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left\{ \|f\|_2^2 \cdot \alpha_x \sigma^{-\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{16\sin^4 \frac{t}{2}}{t^4} dt \right\}^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ при } \sigma \rightarrow +\infty.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Для любых $\varepsilon > 0$, $q > 2$, $(a, b) \subset (-\infty, +\infty)$ и любого $\alpha > 0$ существует монотонная непрерывная функция $g(x)$ такая, что:

1°) $g'(x) = 0$ при $x \in \bar{E}$, где E объединение конечного числа интервалов, лежащих в (a, b) и $\mu E = \varepsilon(b-a)$,

$$2^\circ) g'(x) = \frac{\alpha}{\varepsilon} \text{ при } x \in E,$$

$$3^\circ) g(x) = 0 \text{ при } x \leq a \text{ и } g(x) = \alpha(b-a) \text{ при } x \geq b,$$

$$4^\circ) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{itx} d[g(x) - \alpha x] \right|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} < \varepsilon.$$

Фактически эта лемма доказана в (1) (см. (1), лемма 2).

Лемма 3. Для любых $\varepsilon > 0$, $q > 2$ и $(a, b) \subset (-\infty, +\infty)$ существует монотонная сингулярная функция $f(x)$ такая, что:

$$1^\circ) f(x) = 0 \text{ при } x \leq a \text{ и } f(x) = b-a \text{ при } x \geq b,$$

$$2^\circ) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{itx} d[f(x) - x] \right|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} < \varepsilon.$$

Доказательство. Возьмем $\varepsilon_l > 0$ такие, что $\sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l < \varepsilon$. Из леммы 2 следует существование такой монотонной непрерывной функции $f_1(x)$, что:

1) $f_1'(x) = 0$ при $x \in \bar{E}_1$, где E_1 объединение конечного числа интервалов, лежащих в (a, b) и $\mu E_1 = \varepsilon_1(b-a)$,

$$2) f_1'(x) = \frac{1}{\varepsilon_1} \text{ при } x \in E_1,$$

$$3) f_1(x) = 0 \text{ при } x \leq a \text{ и } f_1(x) = b-a \text{ при } x \geq b,$$

$$4) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{itx} d[f_1(x) - x] \right|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} < \varepsilon_1.$$

Пусть E_l^j , $j=1, 2, \dots, \nu_1$ составляющие интервалы E_1 , т. е. $E_1 = \bigcup_{j=1}^{\nu_1} E_l^j$ и $E_l^{j_1} \cap E_l^{j_2} = \emptyset$ при $j_1 \neq j_2$. Функция $f_1(x)$ на E_l^j равна

$\frac{1}{\varepsilon_1}$. Применяя лемму 2 для $\varepsilon = \frac{\varepsilon_2}{\nu_1}$, $\alpha = \frac{1}{\varepsilon_1}$ и интервалов $E_l^j = (a_j^1, b_j^1)$, получим монотонные непрерывные функции $f_2^j(x)$ такие, что:

5) $f_2^j(x) = 0$ при $x \in \bar{E}_2^j$, где E_2^j объединение конечного числа интервалов, лежащих в E_l^j и $\mu E_2^j = \frac{\varepsilon_2}{\nu_1} \mu E_l^j$,

$$6) f_2(x) = \frac{\nu_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \text{ при } x \in E_2^j,$$

$$7) f_2^j(x) = 0 \text{ при } x \leq a_j \text{ и } f_2^j(x) = \frac{1}{\varepsilon_1} (b_j^1 - a_j^1) \text{ при } x \geq b_j,$$

$$8) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_j}^{b_j} e^{itx} d[f_2^j(x) - f_1(x)] \right|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} < \frac{\varepsilon_2}{\nu_1}.$$

Обозначим $f_2(x) = \sum_{j=1}^{\nu_1} f_2^j(x)$ и $E_2 = \bigcup_{j=1}^{\nu_1} E_2^j$. Из 1), 5) и 4), 8) имеем

$$\mu E_2 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\nu_1} (b - a) \quad (4)$$

и

$$\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{itx} d[f_2(x) - x] \right|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} < \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (5)$$

Причем

$$f_1(x) = f_2(x) \text{ при } x \notin E_1. \quad (6)$$

Продолжая этот процесс, получим последовательности монотонных непрерывных функций $f_n(x)$ и множеств E_n , которые удовлетворяют следующим условиям:

А) E_n — объединение конечного числа интервалов, лежащих в E_{n-1} и $\mu E_n = \frac{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}{\nu_1 \dots \nu_{n-1}} (b - a)$,

В) $f_n(x) = 0$ при $x \leq a$ и $f_n(x) = b - a$ при $x \geq b$,

С) $f_n'(x) = 0$ при $x \notin \overline{E_n}$, $f_n(x) = f_{n+1}(x)$ при $x \notin E_n$,

Д) $f_n(x)$ равномерно сходится к некоторой непрерывной функции $f(x)$,

$$E) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{itx} d[f_n(x) - x] \right|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} < \sum_{l=1}^n \varepsilon_l.$$

Из А) — Д) следует, что предельная функция $f(x)$ сингулярная. Из Д) и Е) по теореме Хелли (см. (2), с. 254) следует, что

$$\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{itx} d[f(x) - x] \right|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. Существует множество E , $\mu E = 0$, такое, что если преобразование Фурье ограниченной функции $f(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ принадлежит классу $L_p(-\infty, +\infty)$ для некоторого $p < 2$ и интег-

ралы $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{4 \sin^2 \frac{N(x-t)}{2}}{(x-t)^2 N} dt$ сходятся к нулю при $N \rightarrow \infty$ для

$x \in E$, то $f(x) = 0$ п. в. на $(-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Пусть $q_m \downarrow 2$, $\varepsilon_m^n > 0$, $\sum_{m,n} \varepsilon_m^n < +\infty$ и $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность интервалов с рациональными концами. Тогда существуют сингулярные функции $f_m^n(x)$ такие, что

$$\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{I_n} e^{itx} d[f_m^n(x) - x] \right|^{q_m} dt \right\}^{\frac{1}{q_m}} < \varepsilon_m^n.$$

Обозначим через E объединение носителей мер $df_m^n(x)$. Покажем, что E — требуемое множество. Допустим, что $f(x)$ отлична от нуля. Тогда существуют интервал I_n и число $a > 0$ такие, что для достаточно больших N

$$\beta = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{I_n} dt \int_{-N}^N \left(1 - \frac{|u|}{N}\right) e^{itx} \hat{f}(u) du \right| > a^*. \quad (7)$$

Пусть $\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n} = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \beta &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N \left(1 - \frac{|u|}{N}\right) \hat{f}(u) \left\{ \int_{I_n} e^{ixu} dx \right\} du \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N \left(1 - \frac{|u|}{N}\right) \hat{f}(u) \left\{ \int_{I_n} e^{ixu} d[f_m^n(x) - x] \right\} du \right| + \\ &+ \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{I_n} df_m^n(x) \int_{-N}^N \left(1 - \frac{|u|}{N}\right) \hat{f}(u) e^{ixu} du \right| \leq \\ &\leq \|\hat{f}\|_{p_m} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{I_n} e^{ixu} d[f_m^n(x) - x] \right|^{q_m} du \right\}^{\frac{1}{q_m}} + \end{aligned}$$

* Интеграл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N \left(1 - \frac{|u|}{N}\right) e^{iux} \hat{f}(u) du$ по метрике $L_2(-\infty, +\infty)$ схо-

дится к $f(x)$ при $N \rightarrow \infty$.

$$+ \left| \frac{1}{2\pi} \int_{I_n} df_m^n(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{4 \sin^2 \frac{N(x-t)}{2}}{(x-t)^2 N} dt \right|.$$

Выбирая m достаточно большим, первое слагаемое можно сделать меньше $a/2$. После чего, так как интегралы

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{4 \sin^2 \frac{N(x-t)}{2}}{(x-t)^2 N} dt$$

ограничены и стремятся к нулю при $N \rightarrow \infty$ на носителе меры $df_m^n(x)$, можно выбрать N таким, чтобы второе слагаемое тоже было меньше $a/2$. Но это противоречит (7). Полученное противоречие доказывает лемму.

Доказательство теоремы 2. Пусть E_n , $n=1, 2, \dots$ открытые множества, удовлетворяющие требованиям теоремы 1, и $\mu E_n < \frac{1}{n}$, а E_0 множество, удовлетворяющее требованиям леммы 4, $\mu E_0 = 0$. Покажем, что множество $E = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right) \cap E_0$ удовлетворяет требованиям теоремы 2. Пусть для некоторой функции $f(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{-\sigma}^{\sigma} f(t) e^{-itx} dt \in L_p(-\infty, +\infty), \quad p < 2, \quad (8)$$

$$f_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{4 \sin^2 \frac{N(x-t)}{2}}{(x-t)^2 N} dt \rightarrow 0, \quad \text{при } N \rightarrow \infty \text{ и } x \in E. \quad (9)$$

Обозначим

$$G = \{x : \limsup_{N \rightarrow \infty} |f_N(x)| \geq 1\}. \quad (10)$$

Если $G = \emptyset$, то $f(x)$ ограничена и по лемме 4 $f(x) = 0$ п. в. на $(-\infty, +\infty)$. Допустим $G \neq \emptyset$. Тогда G — множество типа G_δ и $G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c$. Существуют интервал I и номер m такие, что (см. (3), с. 548, лемма 6.17)

$$\emptyset \neq G \cap I \subset I \cap E_m^c. \quad (11)$$

Возьмем произвольный интервал J , лежащий в I и не пересекающийся с E_m^c . Пусть $\lambda(x)$ бесконечно дифференцируемая функция с

носителем J . Легко видеть, что преобразование Фурье произведения $f(x)\lambda(x)$ принадлежит классу $L_p(-\infty, +\infty)$. Функция $f(x)\lambda(x)$ ограничена и по лемме 1

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\lambda(t) \frac{4\sin^2 \frac{N(x-t)}{2}}{(x-t)^2 N} dt \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty \text{ и } x \in E_0. \quad (12)$$

Из леммы 4 следует, что $f(x)\lambda(x)$ п. в. на $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, $f(x)$ п. в. нуль на J . Из выбора J следует, что $f(x)=0$ п. в. на $I \cap E_n$. Пусть $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируемая функция с носителем I . Легко видеть, что преобразование Фурье функции $f(x)\varphi(x)$ принадлежит классу $L_p(-\infty, +\infty)$. Но $f(x)\varphi(x)=0$ п. в. на E_n , следовательно, по теореме 1 $f(x)\varphi(x)=0$ п. в. на $(-\infty, +\infty)$. Поэтому $f(x)=0$ п. в. на I . Но это противоречит тому, что $G \cap I \neq \emptyset$ (см. (11)). Теорема доказана.

Замечание. Теорема 2 допускает формулировку в эквивалентной форме.

Теорема 3. Существует множество E , $\mu E=0$, такое, что если $f(x) \in L_2(-\infty, +\infty) \cap L_p(-\infty, +\infty)$ для некоторого $p < 2$ и

$$f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \left(1 - \frac{|u|}{\sigma}\right) f(u) e^{iux} du \rightarrow 0 \text{ при } \sigma \rightarrow \infty,$$

то $f(x)=0$ почти всюду.

Из теоремы 3 следует

Теорема 4. Существует множество E , $\mu E=0$, такое, что если для некоторой функции $\hat{f}(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$

1°) $\hat{f}(x) \in L_p(-\infty, +\infty)$ для некоторого $p < 2$,

2°) $f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \hat{f}(u) e^{iux} du \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$,

то $f(x)=0$ почти всюду на $(-\infty, +\infty)$.

Теорема 4 является аналогом теоремы Мичела и Сорди (см. (4)).

Теорема 5 (Мичел, Сорди). Существует множество E , $\mu E=0$, такое, что если $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty$ для некоторого $p < 2$ и

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{int} = 0$ для $t \in E$, то $a_n = 0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

В заключение выражаю благодарность чл.-корр. АН Арм. ССР А. А. Талаляну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Ֆուրյեի ինտեգրալների համար միակության բազմությունների մասին

Աշխատանքում ապացուցված է.

Թեորեմ 2. Գոյություն ունի E բազմություն, $\mu E = 0$, այնպիսին, որ երբ որևէ $f(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ ֆունկցիայի համար

$$1^\circ) \hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-itx} f(t) dt \in L_p(-\infty, +\infty) \quad \text{որևէ } p < 2$$

համար

$$2^\circ) f_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{4\sin^2 \frac{N(x-t)}{2}}{(x-t)^2 N} dt \rightarrow 0, \quad \text{երբ } x \in E \text{ և } N \rightarrow \infty,$$

ապա $(-\infty, +\infty)$ -ի վրա համարյա տեղում $f(x) = 0$:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Г. Г. Геворкян, ДАН АрмССР, т. 72, № 4 (1981). ² Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, Гос. изд-во техн.-теор. лит., М., 1957. ³ А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, т. I, ИЛ, М., 1965. ⁴ L. Michele, P. M. Soardi, Bollettino U. M. I (4), 11 (1975).

УДК 534.014.1

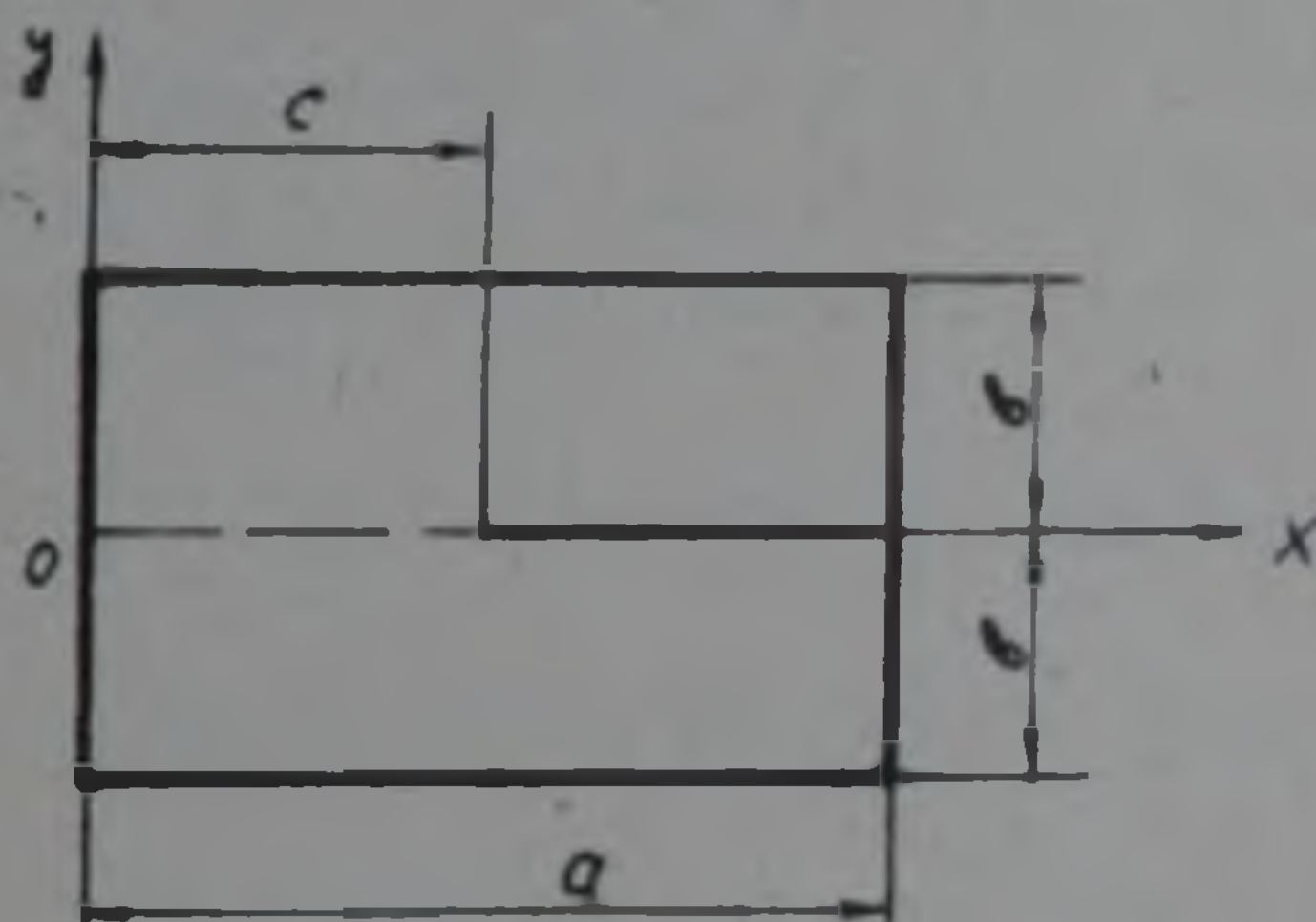
МЕХАНИКА

Л. В. Абрамян, Л. А. Мовсисян

Свободные колебания прямоугольной пластинки с разрезом

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 27/III 1981)

1. Рассматриваются свободные колебания прямоугольной изотропной пластинки, свободно опертой по всему контуру. Пластика по одной из осей симметрии имеет прямой разрез. Система координат выбрана таким образом, чтобы ось Ox проходила через разрез ($c < x \leq a$) (рисунок).



Уравнение свободных колебаний пластинки имеет вид

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

где ρ — плотность материала, h — толщина, D — цилиндрическая жесткость.

Решение (1.1) ищем в виде

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \omega t, \quad (1.2)$$

удовлетворяющем граничным условиям на краях $x=0, a$.

Подставляя (1.2) в (1.1), для f_m получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$f_m^{IV} - 2\lambda^2 f_m^{II} + \left(\lambda^4 - \frac{\rho h}{D} \omega^2 \right) f_m = 0, \quad \lambda = \frac{m\pi}{a}. \quad (1.3)$$

Общее решение (1.3) в зависимости от величины m запишется следующим образом:

а) при $m \leq m_1$

$$f_m(y) = C_m^{(1)} \operatorname{ch} k_1 y + C_m^{(2)} \operatorname{sh} k_1 y + C_m^{(3)} \cos k_2 y + C_m^{(4)} \sin k_2 y, \quad (1.4)$$

б) при $m > m_1$

$$f_m(y) = C_m^{(1)} \operatorname{ch} k_1 y + C_m^{(2)} \operatorname{sh} k_1 y + C_m^{(3)} \operatorname{ch} k_2 y + C_m^{(4)} \operatorname{sh} k_2 y, \quad (1.5)$$

где

$$k_1 = \left[\omega \sqrt{\rho \frac{h}{D}} + \lambda^2 \right]^{1/2}, \quad k_2 = \begin{cases} \left[\omega \sqrt{\rho \frac{h}{D}} - \lambda^2 \right]^{1/2} \\ \left[\lambda^2 - \omega \sqrt{\rho \frac{h}{D}} \right]^{1/2} \end{cases};$$

при фиксированной частоте колебаний значение m_1 зависит от геометрических и физических параметров пластинки.

Выражения (1.4), (1.5) содержат в себе как симметричные, так и антисимметричные относительно оси OX формы колебаний. А формулировка условий вдоль OX зависит от форм колебаний пластинки, поэтому в дальнейшем для удобства симметричные и антисимметричные формы колебаний рассматриваются в отдельности.

2. Симметричные колебания. По условию вдоль $y = b$ имеем

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (2.1)$$

а вдоль $y = 0$, учитывая симметричность форм, будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} &= 0 & 0 \leq x \leq a; \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 & 0 \leq x \leq c; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 & c < x \leq a. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.1), (2.2) для определения неизвестных коэффициентов $C_m^{(l)}$ ($l = 1, 2, 3, 4$), получаем следующие парные ряды — уравнения:

$$\sum_{m=1}^{m_1} C_m^{(3)} \frac{-k_2 \omega \sqrt{\rho \frac{h}{D}}}{k_2^2 + \nu \lambda^2} \operatorname{ctg} k_2 b \sin \lambda x + \sum_{m=m_1+1}^{\infty} C_m^{(3)} \frac{k_2 \omega \sqrt{\rho \frac{h}{D}}}{k_2^2 - \nu \lambda^2} \operatorname{cth} k_2 b \sin \lambda x = 0$$

($0 \leq x \leq c$);

$$\sum_{m=1}^{m_1} C_m^{(3)} \frac{k_2 \operatorname{ctg} k_2 b}{k_2^2 + \nu \lambda^2} \left[\frac{(k_1^2 - \nu \lambda^2)^2}{k_1} \operatorname{th} k_1 b - \frac{(k_2^2 + \nu \lambda^2)^2}{k_2} \operatorname{tg} k_2 b \right] \sin \lambda x +$$

(2.3)

$$+ \sum_{m=m_1+1}^{\infty} C_m^{(3)} \frac{k_2 \operatorname{cth} k_2 b}{k_2^2 - \nu \lambda^2} \left[\frac{(k_2^2 - \nu \lambda^2)^2}{k_2} \operatorname{th} k_2 b - \frac{(k_1^2 - \nu \lambda^2)^2}{k_1} \operatorname{tg} k_1 b \right] \sin \lambda x = 0,$$

$$(c < x \leq a),$$

а также

$$m \leq m_1$$

$$m > m_1$$

$$C_m^{(1)} = C_m^{(3)} \frac{\operatorname{th} k_1 b}{\operatorname{tg} k_2 b} \frac{k_2 (k_1^2 - \nu \lambda^2)}{k_1 (k_2^2 + \nu \lambda^2)};$$

$$C_m^{(1)} = -C_m^{(3)} \frac{\operatorname{th} k_1 b}{\operatorname{th} k_2 b} \frac{k_2 (k_1^2 - \nu \lambda^2)}{k_1 (k_2^2 - \nu \lambda^2)};$$

$$C_m^{(2)} = -C_m^{(3)} \operatorname{ctg} k_2 b \frac{k_2 (k_1^2 - \nu \lambda^2)}{k_1 (k_2^2 + \nu \lambda^2)};$$

$$C_m^{(2)} = C_m^{(3)} \operatorname{cth} k_2 b \cdot \frac{k_2 (k_1^2 - \nu \lambda^2)}{k_1 (k_2^2 - \nu \lambda^2)};$$

$$C_m^{(4)} = -C_m^{(3)} \operatorname{ctg} k_2 b;$$

$$C_m^{(4)} = -C_m^{(3)} \operatorname{cth} k_2 b.$$

Введя обозначения

$$X_m = C_m^{(3)} \frac{k_2 \operatorname{ctg} k_2 b}{k_2^2 + \nu \lambda^2} \left[\frac{(k_1^2 - \nu \lambda^2)^2}{k_1} \operatorname{th} k_1 b - \frac{(k_2^2 + \nu \lambda^2)^2}{k_2} \operatorname{tg} k_2 b \right] \frac{1}{m}; \quad m \leq m_1,$$

(2.4)

$$X_m = C_m^{(3)} \frac{k_2 \operatorname{cth} k_2 b}{k_2^2 - \nu \lambda^2} \left[\frac{(k_2^2 - \nu \lambda^2)^2}{k_2} \operatorname{th} k_2 b - \frac{(k_1^2 - \nu \lambda^2)^2}{k_1} \operatorname{th} k_1 b \right] \frac{1}{m}; \quad m > m_1,$$

$$\alpha = \frac{\pi x}{a}; \quad \beta = \frac{\pi c}{a},$$

парные ряды после несложных преобразований приведем к виду

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_m (1 - N_m) \sin m \alpha = 0 \quad (0 \leq \alpha \leq \beta);$$

(2.5)

$$\sum_{m=1}^{\infty} m X_m \sin m \alpha = 0 \quad (\beta < \alpha \leq \pi),$$

где

$$N_m = 1 - \frac{\omega \lambda \sqrt{\rho \frac{h}{D}} (\nu^2 + 2\nu - 3)}{\frac{(k_2^2 - \nu \lambda^2)^2}{k_1} \operatorname{th} k_1 b - \frac{(k_2^2 + \nu \lambda^2)^2}{k_2} \operatorname{tg} k_2 b}, \quad m \leq m_1;$$

$$N_m = 1 - \frac{\omega \lambda \sqrt{\rho \frac{h}{D}} (\nu^2 + 2\nu - 3)}{\frac{(k_2^2 - \nu \lambda^2)^2}{k_2} \operatorname{th} k_2 b - \frac{(k_1^2 - \nu \lambda^2)^2}{k_1} \operatorname{th} k_1 b}, \quad m > m_1.$$

Покажем, что N_m при $m \rightarrow \infty$ имеет экспоненциальный порядок убывания. Для этого преобразуем выражения k_1 и k_2 следующим образом:

$$k_1 = \lambda \left[1 + \frac{\omega}{\lambda^2} \sqrt{\frac{h}{\rho D}} \right]^{1/2} = \lambda(1 + \gamma);$$

$$k_2 = \lambda \left[1 - \frac{\omega}{\lambda^2} \sqrt{\frac{h}{\rho D}} \right]^{1/2} = \lambda(1 - \gamma), \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{1}{2} \frac{\omega}{\lambda^2} \sqrt{\frac{h}{\rho D}}. \quad (2)$$

Используя (2.6), а также учитывая, что при больших m $\text{th} k_2 b \rightarrow \text{th} k_1$, для N_m получаем

$$N_m = 1 - \frac{\frac{2\gamma}{\lambda} (v^2 + 2v - 3)}{\lambda^3 \text{th} k_1 b \left\{ \frac{[(1-\gamma)^2 - v]^2}{1-\gamma} - \frac{[(1+\gamma)^2 - v]^2}{1+\gamma} \right\}} = 1 - \frac{1}{\text{th} k_1 b} \approx e^{-m\delta},$$

где $\delta = 2\pi b/a$. (2.7)

Используя формулы для интегральных представлений полиномов Лежандра

$$y_m(\cos\theta) = P_{m-1}(\cos\theta) + P_m(\cos\theta),$$

$$z_m(\cos\theta) = P_{m-1}(\cos\theta) - P_m(\cos\theta),$$

парные ряды (2.5) после ряда преобразований сведем к виду

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_m (1 - N_m) y_m(\cos\theta) = 0 \quad (0 \leq \alpha \leq \beta);$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m X_m y_m(\cos\theta) = 0 \quad (\beta < \alpha \leq \pi). \quad (2.8)$$

Как известно, для определения неизвестных коэффициентов X_m получаем следующую бесконечную систему линейных однородных алгебраических уравнений:

$$X_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} N_m X_m \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (2.9)$$

где

$$a_{nm} = \frac{m}{2} \int_0^{\beta} y_m(\cos\theta) y_n(\cos\theta) \text{tg} \frac{\theta}{2} d\theta =$$

$$= \frac{m}{2} \frac{n y_m(\cos\beta) z_n(\cos\beta) - m y_n(\cos\beta) z_m(\cos\beta)}{n^2 - m^2}; \quad (2.10)$$

$$a_{nn} = \frac{n}{2} \int_0^{\beta} y_n^2(\cos\theta) \text{tg} \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{1}{4} \left\{ 2 - 2P_{n-1}(\cos\beta) P_n(\cos\beta) + \right.$$

$$\left. + P_{n-1}^2(\cos\beta) - P_n^2(\cos\beta) - 4 \sum_{k=1}^{n-1} P_k(\cos\beta) [\cos\beta P_k(\cos\beta) - P_{k+1}(\cos\beta)] \right\}.$$

Для существования нетривиальных решений коэффициентов X_n необходимо, чтобы определитель бесконечной системы (2.9) равнялся нулю. Из этого же условия определяются частоты колебаний пластинки. Можно доказать сходимость процесса итераций при определении собственных чисел. Для этого достаточно доказать сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{nm} N_n|; \quad \sum_{\substack{n,m=1 \\ n \neq m}}^{\infty} (a_{nm} N_m)^2. \quad (2.11)$$

Учитывая, что для функций $y_m(x)$ и $z_m(x)$ при больших m имеется следующая оценка:

$$\left. \begin{aligned} |y_m(x)| \\ |z_m(x)| \end{aligned} \right\} \leq \frac{2}{m^{1/2}}; \quad (m \gg 1), \quad (2.12)$$

а также (2.7), (2.10), показывается, что ряды (2.11) сходятся.

3. *Антисимметричные колебания.* И для антисимметричных форм колебаний условия вдоль $y=b$ (2.1) сохраняются, а условия вдоль $y=0$ теперь будут:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 & 0 \leq x \leq a; \\ w &= 0 & 0 \leq x \leq c; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad c < x \leq a.$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.1), (3.1), получаем следующие парные ряды:

$$\sum_{m=1}^{m_1} C_m^{(4)} \operatorname{tg} k_2 b \frac{-\omega \sqrt{\frac{h}{\rho D}}}{k_1^2 - \nu \lambda^2} \sin \lambda x + \sum_{m=m_1+1}^{\infty} C_m^{(4)} \operatorname{th} k_2 b \frac{-\omega \sqrt{\frac{h}{\rho D}}}{k_1^2 - \nu \lambda^2} \sin \lambda x = 0 \quad (0 \leq x \leq c); \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{m_1} C_m^{(4)} \frac{\operatorname{tg} k_2 b}{k_1^2 - \nu \lambda^2} [k_1(k_1^2 + \nu \lambda^2)^2 \operatorname{cth} k_1 b - k_2(k_1^2 - \nu \lambda^2)^2 \operatorname{ctg} k_2 b] \sin \lambda x + \\ & + \sum_{m=m_1+1}^{\infty} C_m^{(4)} \frac{\operatorname{th} k_2 b}{k_1^2 - \nu \lambda^2} [k_1(k_1^2 - \nu \lambda^2)^2 \operatorname{cth} k_1 b - k_2(k_1^2 - \nu \lambda^2)^2 \operatorname{cth} k_2 b] \sin \lambda x = 0 \\ & (c < x \leq a). \end{aligned}$$

Дифференцируя дважды первое из уравнений (3.2) и проводя ряд других преобразований, систему (3.2) вновь приводим к виду (2.5). В этом случае для N_m имеем

$$N_m = 1 - \frac{\frac{\pi}{a} (\nu^2 + 2\nu - 3) m^3 \omega \sqrt{\frac{h}{\rho D}}}{k_1(k_1^2 + \nu \lambda^2)^2 \operatorname{cth} k_1 b - k_2(k_1^2 - \nu \lambda^2)^2 \operatorname{ctg} k_2 b}; \quad m \leq m_1; \quad (3.3)$$

$$N_m = 1 - \frac{\frac{\pi}{a} (\nu^2 - 2\nu - 3) \cdot m^3 \omega \sqrt{\rho \frac{h}{D}}}{k_1(k_2^2 + \nu^2)^2 \operatorname{cth} k_1 b - k_2(k_1^2 - \nu^2)^2 \operatorname{ctg} k_2 b}; \quad m > m_1.$$

Пользуясь представлениями (2.6), в этом случае также можно показать, что N_m при $m \rightarrow \infty$ имеет экспоненциальный порядок убывания.

4. В заключение приведем результаты численных вычислений, которые проводились на ЭВМ „Минск—22“. Для пластинок с параметрами $\nu = 0,25$, $a/b = 0,4; 0,6; 0,8; 1; 1,5; 2; 3$ при разной длине разреза ($\beta = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$) были определены первые безразмерные основные частоты $\omega(\rho h b^4/D)^{1/2}$ колебаний симметричных и антисимметричных форм. Результаты вычислений приведены в таблице. В каждой клетке сначала помещена частота, соответствующая симметричной форме колебаний, а затем — антисимметричной.

В случае пластинок с $a/b \leq 0,8$ для получения хорошей сходимости результатов в процессе итераций достаточно было решить определители третьего и четвертого порядка, а при $a/b > 0,8$ — восьмого и десятого. Наибольшее расхождение результатов при этом не превысило 1 %.

Решения для предельных случаев ($\beta = 0, \pi$) получаются из соответствующих уравнений систем (2.3) и (3.2).

a/b	$\beta = 0$	$\beta = \frac{\pi}{4}$	$\beta = \frac{\pi}{2}$	$\beta = \frac{3\pi}{4}$	$\beta = \pi$
0,4	63,564	63,582	63,902	64,126	64,152
		63,670	68,760	71,130	71,555
0,6	29,389	29,761	29,847	29,877	29,883
		29,466	33,788	36,741	37,285
0,8	17,401	17,647	17,814	17,880	17,889
		17,717	21,311	24,684	25,291
1	11,820	11,931	12,233	12,312	12,337
		12,840	16,349	19,386	19,739
1,5	6,200	6,321	6,687	6,796	6,854
		6,867	9,531	13,618	14,256
2	4,123	4,247	4,698	4,908	4,935
		4,584	6,545	11,224	12,337
3	2,469	2,564	3,175	3,515	3,564
		2,731	3,861	8,183	10,966

Как видно из таблицы, с увеличением длины разреза (уменьшение β) частоты, соответствующие формам как симметричным, так и антисимметричным, уменьшаются. И вот что интересно. Для любого β частоты симметричной и антисимметричной форм колебаний имеют различные значения. В предельном случае ($\beta = 0$) имеется одна частота, т. е. каждая форма и соответствующая частота такой пластинки при переходе к пластинке с разрезом ($\beta \neq 0$) как бы разветвляется на симметричную и антисимметричную.

Институт механики

Академии наук Армянской ССР

Ճեղք ունեցող ուղղանկյուն սալի ազատ տատանումները

Ուսումնասիրվում է ուղղանկյուն ազատ հենված սալի ազատ տատանումները, երբ սալն ունի ճեղք սիմետրիայի առանցքներից մեկի ուղղությամբ: Ճեղքով տարված առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ և ոչ սիմետրիկ տատանումները դիտարկվում են առանձին-առանձին: Հաճախականությունների որոշումը բերվում է անվերջ մատրիցայի սեփական արժեքները գտնելուն: Ցույց է տրված դրանց գտնելու հաջորդականության պրոցեսի զուգամիտությունը: Բերված են թվային տվյալներ:

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. М. Мхитарян

К задаче контактного взаимодействия между полубесконечным неоднородным стрингером и упругой полуплоскостью или плоскостью

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 13/IV 1981)

Контактная задача о передаче нагрузки от бесконечного стрингера к упругой полуплоскости в рамках известных предположений впервые поставлена и решена в работе (1). Аналогичная задача для полубесконечного стрингера, нагруженного на своем конце горизонтальной сосредоточенной силой, рассматривалась в (2-5). В работе (3) решение разрешающего интегро-дифференциального уравнения сведено к решению разностного уравнения простой структуры, построенному в замкнутой форме. Эта же самая задача с точки зрения применения метода Винера—Хопфа обсуждалась в (6,7), причем в (7) сила приложена к стрингеру на произвольном расстоянии от его конца. Задача о контактном взаимодействии между двумя одинаковыми полуплоскостями и полубесконечным стрингером исследована в работе (8), где применялась методика Койтера (3).

Однако следует отметить, что развитые в указанных работах методы не позволяют получить решение задачи в случае полубесконечного неоднородного стрингера. Кроме того, в построенных в них решениях в явном виде не выделена присущая тангенциальным контактным напряжениям особенность на конце стрингера. В настоящей статье на основе одного интегрального соотношения Гильберта вновь рассматривается задача о контактном взаимодействии между полубесконечным стрингером и упругой полуплоскостью или плоскостью. При этом стрингер обладает достаточно общей неоднородностью. К разрешающему интегро-дифференциальному уравнению, преобразованному определенным образом, применяется принцип неподвижной точки Банаха. Предварительно его решение представляется формулой, содержащей в явном виде присущую тангенциальным контактным напряжениям на конце стрингера особенность. В одном частном случае неоднородности получено простое решение задачи.

1. Пусть упругая полуплоскость, находящаяся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, с модулем упругости E_2 и коэффициентом Пуассона ν_2 на своей границе усилена приваренным или приклеенным к ней упругим полубесконечным стрингером с модулем упругости E_s , коэффициентом Пуассона ν_1 , шириной d и площадью поперечного сечения A_s . Пусть далее стрингер загружен на своем конце сосредоточенной силой P , а на верхнем краю — тангенциальными силами произвольной интенсивности $\tau_0(x)$. В предположении, что стрингер не обладает изгибной жесткостью и его модуль упругости изменяется по длине $E_s = E_0 E_1(x)$ ($E_1(0) = 1$), требуется определить распределение тангенциальных контактных напряжений, а также их коэффициент интенсивности на конце стрингера. После перехода к безразмерным координатам и величинам, как в (3), для определения безразмерных тангенциальных контактных напряжений $\tau(\xi)$ получим следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tau(\eta) d\eta}{\eta - \xi} = -\lambda^*(\xi) \left[\int_{\xi}^{\infty} \tau(\eta) d\eta + T_0(\xi) \right] \quad (0 < \xi < \infty), \quad (1.1)$$

которое должно рассматриваться при условии

$$\int_0^{\infty} \tau(\eta) d\eta = 1 - T_0. \quad (1.2)$$

Здесь

$$T_0(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \tau_0(\eta) d\eta, \quad T_0 = T_0(0),$$

где $\tau_0(\xi)$ отличается от $\tau_0(x)$ только постоянной, а

$$\lambda^*(\xi) = 1/E_1(x); \quad (1.3)$$

$$x = E_0 A_s \xi / E_2 d. \quad (1.4)$$

Отметим, что когда $P=0$, в (1.2) нужно формально положить * $T_0=2$.

Решение уравнения (1.1) представим формулой

$$\tau(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\xi}} \int_0^{\infty} \Phi(\lambda) \cos(\lambda \sqrt{2\xi}) d\lambda \quad (0 < \xi < \infty), \quad (1.5)$$

где $\Phi(\lambda)$ — неизвестная функция. Так как коэффициент интенсивности напряжений $\tau(\xi)$ величина конечная, то $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \tau(\xi) \sqrt{2\xi} = A < \infty$, откуда вытекает сходимость интеграла от $\Phi(\lambda)$. Из последнего в свою очередь вытекает, что, по крайней мере, $\Phi(\lambda) = O(\lambda^{-1-\epsilon})$ ($\epsilon > 0$) при

* Если $E_s|_{x=0}=0$, то исходя из физических соображений следует считать $P=0$.

$\lambda \rightarrow \infty$. С другой стороны, по формуле обращения косинус-преобразования Фурье из (1.5) при помощи (1.2) обнаружим, что $\Phi(0) = \gamma = 2(1 - T_0)/\pi$. Далее, из (1.5) при помощи (1.2) получим

$$\varphi(\xi) = - \int_{\xi}^{\infty} \tau(\eta) d\eta = \int_0^{\infty} \frac{\Phi(\lambda) - \gamma}{\lambda} \sin(\lambda \sqrt{2\xi}) d\lambda \quad (0 < \xi < \infty). \quad (1.6)$$

Теперь (1.5) подставим в уравнение (1.1) поменяем порядок интегрирования* и воспользуемся следующим интегральным соотношением:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda \sqrt{2\eta}) d\eta}{(\eta - \xi) \sqrt{2\eta}} = - \frac{\sin(\lambda \sqrt{2\xi})}{\sqrt{2\xi}} \quad (0 < \xi < \infty), \quad (1.7)$$

которое непосредственно вытекает из формулы для преобразования Гильберта косинус-функции (9). Принимая во внимание (1.6), после некоторых элементарных операций для определения $\Phi(\lambda)$ получаем следующее уравнение:

$$\Phi(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K(\lambda, \mu) \frac{\gamma - \Phi(\mu)}{\mu} d\mu = f_0(\lambda) \quad (0 < \lambda < \infty), \quad (1.8)$$

где

$$K(\lambda, \mu) = \int_0^{\infty} u \lambda^* \left(\frac{u^2}{2} \right) \sin \lambda u \sin \mu u du; \quad \left(\xi = \frac{u^2}{2} \right), \quad (1.9)$$

$$f_0(\lambda) = \int_0^{\infty} u \lambda^* \left(\frac{u^2}{2} \right) T_0 \left(\frac{u^2}{2} \right) \sin \lambda u du$$

причем предполагается, что $\lambda^*(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$ с необходимой скоростью.

2. Так как потенциальная энергия деформации, накопленная в системе стрингер—основание, величина конечная, то равнодействующая тангенциальных контактных напряжений также величина конечная, что и обеспечивается условием (1.2). Поэтому будем считать, что $\tau(\xi) \in L(0, \infty)$. С другой стороны, хорошо известно (10), что если $f(\xi) \in L(-\infty, \infty)$, то ее преобразование Фурье $F(\lambda)$ на всей оси $-\infty < \lambda < \infty$ равномерно непрерывно и исчезает при $\lambda \rightarrow \pm \infty$. Последнее наводит на мысль, что принцип неподвижной точки Банаха для уравнения (1.8) естественно провести в пространстве непрерывных на сомкнутой полуоси $[0, \infty]$ функций $C[0, \infty]$, принимающих на бесконечности конечные значения и наделенных нормой

* Перемену порядка интегрирования можно обосновать так же как в (3).

$$\|\Phi\| = \max_{0 \leq \lambda < \infty} |\Phi(\lambda)|.$$

С этой целью во всем дальнейшем будем предполагать:

- 1) $u^k \lambda^* (u^2/2) \in L(0, \infty)$ ($k=1, 2$) ($\xi = u^2/2$);
- 2) функция $u^2 \lambda^* (u^2/2)$ на $(0, \infty)$ не возрастает.

Тогда из (1.9) мы вправе написать

$$K(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} [S(\lambda + \mu) - S(|\lambda - \mu|)] \quad (\lambda, \mu \geq 0),$$

где

$$S(\lambda) = \int_0^\infty (1 - \cos \lambda u) u \lambda^* \left(\frac{u^2}{2} \right) du.$$

По известным результатам М. Г. Крейна^(11,12) отсюда вытекает, что ядро $K(\lambda, \mu)$ ($0 \leq \lambda, \mu < \infty$) является положительно определенным ядром. Более того, из предположения 2) и теоремы о синус-интегралах Фурье⁽¹³⁾, с. 223) следует, что $K(\lambda, \mu) \geq 0$ при $\lambda, \mu \geq 0$.

Теперь введем в рассмотренное оператор

$$\Psi(\lambda) = K\Phi = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K(\lambda, \mu) \frac{\gamma - \Phi(\mu)}{\mu} d\mu + f_0(\lambda),$$

действующий в пространстве $C[0, \infty]$. Покажем, что оператор K пространство $C[0, \infty]$ отображает в себя. Действительно, можем записать

$$|\Psi(\lambda + \Delta\lambda) - \Psi(\lambda)| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^\infty [K(\lambda + \Delta\lambda, \mu) - K(\lambda, \mu)] \frac{\gamma - \Phi(\mu)}{\mu} d\mu \right|$$

причем согласно (1.9)

$$\begin{aligned} H(\lambda, \Delta\lambda, \mu) &= K(\lambda + \Delta\lambda, \mu) - K(\lambda, \mu) = \\ &= \int_0^\infty u \lambda^* \left(\frac{u^2}{2} \right) [\sin(\lambda + \Delta\lambda)u - \sin \lambda u] \sin \mu u du. \end{aligned}$$

Далее фиксируем λ из $(0, \infty)$ и положим

$$H(\lambda, \Delta\lambda, \mu) \cong C_1(\lambda, \Delta\lambda) \omega_1(\mu) \quad \text{при } \mu \rightarrow 0;$$

$$H(\lambda, \Delta\lambda, \mu) \cong C_2(\lambda, \Delta\lambda) \omega_2(\mu) \quad \text{при } \mu \rightarrow \infty.$$

Очевидно, что $\omega_1(\mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$ и $\omega_2(\mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$. С учетом последних формул мы вправе написать

$$\left| \int_0^\infty H(\lambda, \Delta\lambda, \mu) \frac{\gamma - \Phi(\mu)}{\mu} d\mu \right| \leq |C_1(\lambda, \Delta\lambda)| \int_0^{\varepsilon_0} \frac{|\omega_1(\mu)|}{\mu} |\gamma - \Phi(\mu)| d\mu +$$

$$+ \left| \int_{\delta_0}^A H(\lambda, \Delta\lambda, \mu) \frac{\gamma - \Phi(\mu)}{\mu} d\mu \right| + |C_2(\lambda, \Delta\lambda)| \int_A^\infty \frac{|\omega_2(\mu)|}{\mu} |\gamma - \Phi(\mu)| d\mu,$$

где δ_0 — достаточно малое положительное число, а A — достаточно большое положительное число. Эти числа выберем таким образом, чтобы было

$$|C_1(\lambda, \Delta\lambda)| \int_0^{\delta_0} \frac{|\omega_1(\mu)|}{\mu} |\gamma - \Phi(\mu)| d\mu < \frac{\varepsilon}{3};$$

$$|C_2(\lambda, \Delta\lambda)| \int_A^\infty \frac{|\omega_2(\mu)|}{\mu} |\gamma - \Phi(\mu)| d\mu < \frac{\varepsilon}{3},$$

и зафиксируем их. С другой стороны, легко видеть, что

$$|H(\lambda, \Delta\lambda, \mu)| \leq \frac{1}{2} [|h(|\lambda + \Delta\lambda - \mu|) - h(|\lambda - \mu|)| + \\ + |h(\lambda + \Delta\lambda + \mu) - h(\lambda + \mu)|],$$

где

$$h(\lambda) = \int_0^\infty u \lambda \cdot \left(\frac{u^2}{2} \right) \cos \lambda u du.$$

Теперь, воспользовавшись свойством равномерной непрерывности преобразования Фурье ⁽¹⁰⁾, можно утверждать, что

$$\left| \int_{\delta_0}^A H(\lambda, \Delta\lambda, \mu) \frac{\gamma - \Phi(\mu)}{\mu} d\mu \right| \leq \int_{\delta_0}^A |H(\lambda, \Delta\lambda, \mu)| \frac{|\gamma - \Phi(\mu)|}{\mu} d\mu < \frac{\varepsilon}{3},$$

если только $|\Delta\lambda| < \delta(\varepsilon)$. Из этих неравенств обнаружим, что $|\Psi(\lambda + \Delta\lambda) - \Psi(\lambda)| < \varepsilon$, если только $|\Delta\lambda| < \delta(\varepsilon)$. Последнее доказывает требуемое.

Приступив к выяснению условия сжатия оператора K , можем записать

$$|\Psi_1(\lambda) - \Psi_2(\lambda)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K(\lambda, \mu) \frac{|\Phi_1(\mu) - \Phi_2(\mu)|}{\mu} d\mu.$$

Отсюда

$$\|\Psi_1 - \Psi_2\| \leq \sup_{0 \leq \lambda < \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{K(\lambda, \mu)}{\mu} d\mu \|\Phi_1 - \Phi_2\|.$$

Следовательно, при условии

$$\sup_{0 \leq \lambda < \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K(\lambda, \mu)}{\mu} d\mu < 1 \quad (2.1)$$

оператор K сжимающий. Для упрощения условия (2.1) положим

$$G(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K(\lambda, \mu)}{\mu} d\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\mu}{\mu} \int_0^{\infty} u \lambda^* \left(\frac{u^2}{2} \right) \sin \lambda u \sin \mu u du.$$

Меняя порядок интегрирования, что легко обосновать, получаем

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} u \lambda^* \left(\frac{u^2}{2} \right) \sin \lambda u du \int_0^{\infty} \frac{\sin \mu u}{\mu} d\mu = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u \lambda^* \left(\frac{u^2}{2} \right) \sin \lambda u du \leq \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u \lambda^* \left(\frac{u^2}{2} \right) du, \end{aligned}$$

откуда видно, что при условии

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} u \lambda^* \left(\frac{u^2}{2} \right) du < 1 \quad (2.2)$$

оператор K сжимающий.

Таким образом, при условии (2.2) согласно принципу неподвижной точки Банаха ⁽¹⁴⁾ решение уравнения (1.8) в $C[0, \infty]$ можно построить методом последовательных приближений.

После того как найдена функция $\Phi(\lambda)$, коэффициент интенсивности тангенциальных контактных напряжений A_0 определяется следующей формулой:

$$A_0 = \lim_{\xi \rightarrow +0} \tau(\xi) \sqrt{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \Phi(\lambda) d\lambda.$$

Следует отметить, что если, в частности, положить

$$u \lambda^* (u^2/2) = e^{-\beta u} \quad (\beta > 0),$$

то в законности указанной перемены порядка интегрирования можно убедиться непосредственным вычислением, причем

$$G(\lambda) = \frac{\lambda}{2(\beta^2 + \lambda^2)}.$$

Условие же (2.2) в данном случае даст $\beta > 1/2$. С другой стороны, любую функцию $\lambda^* \left(\frac{u^2}{2} \right)$ из достаточно общего класса можно представить рядом Дирихле ^(15,16)

$$u\lambda^*(u^2/2) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n u},$$

где последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — положительная и возрастающая. Положив

$$u\lambda^*(u^2/2) \approx \sum_{n=1}^N a_n e^{-\lambda_n u},$$

можно провести метод последовательных приближений в случае такой функции неоднородности.

В заключение заметим, что если $\lambda^*(\xi) = 1/\sqrt{2\xi}$, то при помощи (1.9)

$$K(\lambda, \mu) = \int_0^{\infty} \sin \lambda u \sin \mu u du = \frac{\pi}{2} \delta(\lambda - \mu),$$

где $\delta(\lambda)$ — дельта-функция Дирака, и, следовательно, уравнение (1.8) допускает замкнутое решение в виде

$$\Phi(\lambda) = \frac{2\lambda f_0(\lambda) - \gamma}{1 + 2\lambda}.$$

Институт механики Академии наук
Армянской ССР

Ս. Մ. ՄԻՒԹԱՐՅԱՆ

Առաձգական կիսահարթության կամ հարթության և կիսաանվերջ անճամասեռ վերդրակի միջև կոնտակտային փոխազդեցության խնդրի շուրջը

Դիտարկվում է բարակ անհամասեռ կիսաանվերջ վերդրակից, որի առաձգականության մոդուլը ըստ երկարության փոփոխվում է բավականին ընդհանուր տեսքի ֆունկցիայով, առաձգական կիսահարթությանը կամ հարթությանը ուժի փոխանցման վերաբերյալ կոնտակտային խնդիրը խնդրի որոշիչ ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը ներկայացվում է Ֆուրեյի կոսինուս-ինտեգրալով, որը բացահայտորեն պարունակում է վերդրակի ծայրակետում շոշափող կոնտակտային լարումների համար բնորոշ եզակիությունը։ Ձևափոխված որոշիչ հավասարումը հետազոտվում է Բանախի անշարժ կետի սկզբունքի օգնությամբ։ Դիտարկվում է մասնավոր դեպք, երբ վերդրակի առաձգականության մոդուլը փոփոխվում է ցուցչային ֆունկցիայի օրենքով։ Մյուս մասնավոր դեպքում, երբ առաձգականության մոդուլը փոփոխվում է քառակուսի արմատի օրենքով, կառուցվում է խնդրի փակ լուծումը։

- ¹ E. Melan, Ingr. Arch., vol. 3, № 2 (1932). ² E. L. Buell, J. Math. and Phys., vol. 26 (1948).
- ³ W. T. Kotter, Quart. J. Mech. and Appl. Math., vol. 8, № 2 (1955).
- ⁴ E. H. Brown, Proc. Roy. Soc. Ser. A, vol. 239, № 1218 (1957). ⁵ A. M. Hens, Technische Hogeschool, Delft (1957).
- ⁶ А. И. Каландия, ПММ, т. 33, вып. 3 (1969).
- ⁷ В. Л. Воробьев, Г. Я. Попов, ПММ, т. 34, вып. 2 (1970).
- ⁸ Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян, в сб.: Механика деформируемых тел и конструкций, Машиностроение, М., 1975.
- ⁹ Таблицы интегральных преобразований, СМБ, т. II, Наука, М., 1970.
- ¹⁰ Н. Винер, Интеграл Фурье и некоторые его приложения, Физматгиз, М., 1963.
- ¹¹ М. Г. Крейн, ДАН СССР, т. 53 (1946). ¹² М. Г. Крейн, ДАН СССР, т. 88 (1953).
- ¹³ Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
- ¹⁴ А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, Наука, М., 1972.
- ¹⁵ Е. Титчмарш, Теория функций, Наука, М., 1980.
- ¹⁶ А. Ф. Леонтьев, Ряды экспонент, Наука, М., 1976.

УДК 541.1

ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

О. К. Давтян

Способы диспергирования топлива и другие факторы, способствующие полному сгоранию в двигателях внутреннего сгорания (ДВС)

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Б. Налбандяном 12/XI 1980)

Согласно формуле (10) из (1) скорость цепных реакций, совершающихся в ДВС, при данной температуре и данных парциальных давлениях реагирующих компонентов можно увеличить только двумя путями: увеличивая скорость рождения свободных радикалов (w_k) и уменьшая скорость их гибели. Первый путь в конечном счете приводит к факельному методу зажигания топлива посредством специальных форкамер (2), а второй путь, как видно, сводится к сильному диспергированию топлива.

Метод диспергирования топлива с первого взгляда кажется тривиальным. Ведь хорошо известно, что вопрос о необходимости диспергирования топлива в ДВС возник с момента изобретения карбюратора, и вообще по существу с момента создания ДВС. Однако цель карбюрации топлива в основном заключается в его смешении с воздухом и частичном его испарении. В связи с этим возникла новая и весьма важная информация о том, что *капельки топлива являются центрами гибели свободных радикалов* и что их способность поглощать свободные радикалы пропорциональна квадрату их радиусов и величине их концентрации. Это значит, что при концентрациях капелек выше определенных пределов не только сильно уменьшится скорость цепных процессов, но и эти процессы могут полностью прекратиться.

В результате теоретических и экспериментальных исследований мы пришли к заключению, что существует несколько радикальных методов диспергирования топлива в ДВС, наиболее подходящим из которых оказался метод смешения газов и газо-диспергированных систем с парциальным расширением их компонентов. Далее, оказалось очень полезным использование водо-топливной смеси с предварительным получением водо-воздушного тумана.

Рассмотрим эти методы в отдельности.

1. Термодинамический принцип диспергирования жидкостей, в ча-

стности жидкого топлива, в ДВС методом смешения газов. В химической термодинамике известно, что при смешении двух (или больше) газов или одного газа с коллоидной системой (диспергированной жидкостью), при котором происходит парциальное расширение каждого из газов или коллоидной системы в другом газе без изменения общего объема и общего давления (последние условия не обязательны), совершается работа и, наоборот, при отделении этих газов друг от друга затрачивается работа, в чем и заключается энергетическая сущность разделения газов и газовых изотопов.

Если общая система объемом V состоит из двух газов, каждый из которых до смешения занимал объем V_1 и V_2 , причем $V_1 + V_2 = V$, то в результате их изотермического смешения, а следовательно, парциального их расширения от объемов V_1 и V_2 до объема V , совершается работа:

$$A = A_1 + A_2 = RT \left[\frac{G_1}{M_1} \ln \frac{V}{V_1} + \frac{G_2}{M_2} \ln \frac{V}{V_2} \right], \quad (1)$$

где G_1 и G_2 — количество газа в г; M_1 и M_2 — соответственно их молекулярный вес; R — универсальная газовая постоянная; T — абсолютная температура. В том случае, когда один из компонентов массой G_2 и объемом V_2 представляет собой коллоидную систему (насыщенный пар), состоящую из смеси капелек жидкости и пара данного вещества, приведенная формула принимает такой вид:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = RT \left[\frac{G_1}{M_1} \ln \frac{V}{V_1} + L \frac{G_2}{M_2} \ln \frac{V}{V_2} + (1 - L) \frac{G_2}{M_3} \ln \frac{V}{V_2} \right]. \quad (2)$$

Здесь L — доля жидкой фазы и $1 - L$ — доля парообразной фазы. Если при таком изотермическом парциальном расширении полученная энергия не расходуется на механическую работу, то она может идти лишь на увеличение внутренней энергии системы. В частности, если в этой системе имеются коллоидные частицы, то указанная энергия может идти на увеличение поверхностной энергии системы, т. е. на увеличение степени дисперсности коллоидных частиц — капелек жидкости.

Таким образом, парциальное расширение одного газа или коллоидной системы в другом газе, например, эмульсии топлива в воздухе, при определенных условиях приводит к вторичному диспергированию, к увеличению ее дисперсности.

Именно это явление мы и использовали впервые для диспергирования топлива (и вообще жидкости) в ДВС.

Так как обычно исходный объем горючей смеси очень мал по сравнению с объемом воздуха, то в уравнении (2) первым членом можно пренебречь, и тогда

$$A = A_2 + A_3 = RT \left[L \frac{G_2}{M_2} \ln \frac{V}{V_2} + (1 - L) \frac{G_2}{M_3} \ln \frac{V}{V_2} \right]. \quad (3)$$

Здесь $M_2 \equiv \bar{M}_{\text{топ.л.}}$ — средний молекулярный вес топлива, который для бензина приблизительно равен $\bar{M}_{\text{бенз.}} = 120$ г; следовательно,

$$M_2 \equiv \bar{M}_{\text{кол.ч}} = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \delta N_A = \frac{24}{3} \pi r_0^3 \delta \cdot 10^{23}$$

есть „средний молекулярный вес“ коллоидной частицы объемом

$$V_{\text{к.ч}} = \frac{4}{3} \pi r_0^3. \text{ В последнем выражении } \delta \text{ — плотность жидкости в}$$

г · см⁻³; N_A — число Авогадро. Работа (3) с определенным коэффициентом K , обусловленным термодинамической необратимостью процесса изотермического расширения и потерей энергии, будет затрачиваться на увеличение поверхностной энергии коллоидной системы:

$$KA = 4\pi\sigma(r^2n + r_0^2n_0), \quad (4)$$

где σ — поверхностное натяжение жидкого топлива в дин · см⁻¹; r и r_0 — радиусы капелек топлива; n_0 и n — число капелек до и после вторичного диспергирования.

Далее, если $G_2 \equiv G$ — масса топлива в г (она может представлять собой цикловое наполнение или другое количество), то объем жидкой фазы будет равен $L \frac{G}{\delta}$. Это значит, что

$$LG/\delta = \frac{4}{3} \pi r^3 n \equiv \frac{4}{3} \pi r_0^3 n_0,$$

откуда

$$r_0^2 n_0 = \frac{LG}{4/3 \cdot \pi \delta r_0}.$$

И тогда согласно (4)

$$KA + \frac{3L\sigma G}{\delta r_0} = 4\pi\sigma r^2 n. \quad (6)$$

Совместное решение первого из (5) и (6) дает

$$r = \frac{3L\sigma G}{KA\delta + 3LG/r_0}. \quad (8)$$

Дальше, подставляя значение A из уравнения (3) в (7), окончательно получим

$$r = 3\sigma L \left\{ K \left[\frac{1-L}{\bar{M}_{\text{топ.л.}}} + \frac{L}{\bar{M}_{\text{кол.ч}}} \right] \delta RT \ln \frac{V}{V_2} + \frac{3L\sigma}{r_0} \right\}^{-1}. \quad (8)$$

Итак, в камере диспергирования жидкостей (в частности жидкого топлива) после первичного диспергирования жидкости в системе диффузоров дальнейшее (вторичное) диспергирование происходит в пространстве (в объеме V) камеры благодаря смешению первично диспергированной жидкости с воздухом и ее парциальному расширению (3).

Согласно приведенной формуле (8) чем больше объем камеры, тем больше степень диспергирования. Температура камеры играет двойную роль. С одной стороны, она по формуле (8) увеличивает степень диспергирования, с другой стороны, уменьшает коэффициент наполнения двигателя и, следовательно, мощность двигателя.

Согласно данным расчета по формуле (8) степень диспергирования при определенных условиях увеличивается в 100—1000 раз (первоначальное значение $r = 10^{-3}$ см).

Уравнение (8) было получено при условиях, когда в процессе диспергирования доля жидкой фазы при постоянной температуре не изменялась. Однако на самом деле после диспергирования она должна меняться. Действительно, получение тумана с большой дисперсностью, в котором содержатся капельки размером 10^{-6} см и меньше, приводит к понижению упругости паров жидкости и, следовательно, к сильному испарению этих капелек. Согласно известному термодинамическому положению давление пара (упругость паров) капелек жидкости зависит от их радиуса по следующей формуле Кальвина:

$$\ln \frac{p_k}{p} = \frac{2\bar{M}\sigma}{\delta RT} \cdot \frac{1}{r}, \quad (9)$$

где p_k и p — давление пара капелек и недиспергированной жидкости соответственно; $\bar{M}$, σ и δ — соответственно средний молекулярный вес, поверхностное натяжение и плотность жидкости; R и T — газовая постоянная и абсолютная температура. Для бензина при $T = 353$ К

$$\lg \frac{p_k}{p} = \frac{0,434 \cdot 2 \cdot 120 \cdot 30}{8,3 \cdot 10^7 \cdot 353} \cdot \frac{1}{r} = 0,9 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{r}.$$

Согласно этим соотношениям при радиусе капелек $10^{-6} - 0,3 \cdot 10^{-6}$ см давление пара жидкости должно увеличиваться в 1,2—2,0 раза, т. е. капельки размерами 10^{-6} см и меньше немедленно должны испариться при $T = 353$ К (температура внутри карбюратора).

Итак, при парциальном расширении горючей смеси в воздухе наряду с диспергированием происходит испарение мелких капелек — уменьшение их концентрации.

Согласно же полученной нами формуле скорости цепной реакции в ДВС (1) при такой степени диспергирования топлива и его испарении скорость цепной реакции крекинга и окисления должна резко увеличиваться, и следовательно, должна увеличиваться экономичность двигателя и уменьшаться токсичность выхлопных газов.

2. Роль воды в процессе сгорания топлива в двигателях внутреннего сгорания. Вопрос об использовании воды в качестве присадки в топливо в ДВС имеет долгую историю; эта проблема обсуждалась и обсуждается во многих странах мира, и в том числе в нашей стране.

Согласно нашим исследованиям при использовании водо-топливной смеси особо важное значение имеет предварительное сильное диспергирование воды. Чтобы это стало понятным, попытаемся дать не-

которое объяснение роли воды в процессе диспергирования топлива, а также в образовании свободных радикалов—зарождении цепей крекинга и окислении углеводородов, приводящих к недотанационным процессам (неразветвленным цепным реакциям).

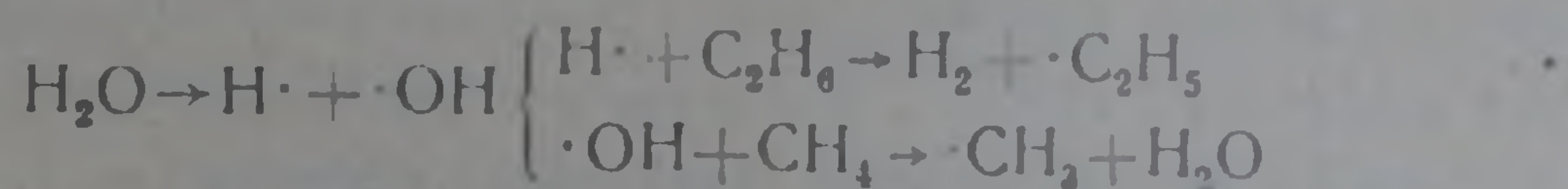
Как известно, вода и углеводороды (в том числе бензин, соляровое масло и т. д.) не смешиваются. Однако в диспергированном состоянии они взаимно адсорбируются. Это явление значительно усиливается при наличии незначительного количества *поверхностно-активных* веществ. И поскольку поверхностное натяжение воды почти в два с половиной раза больше такового для углеводородов, то взаимодействие этих не смешивающихся жидкостей в диспергированном состоянии сводится к тому, что ядра капелек двойной системы всегда образуются из воды. При наличии же достаточного количества водяных капелек топливо может равномерно тонким слоем распределяться на поверхности капелек воды. Чем сильнее предварительное диспергирование воды, а следовательно, чем больше абсолютная величина водяной поверхности, тем меньше толщина слоев углеводородов, покрывающих поверхность воды. Толщину этих слоев можно довести до нескольких молекулярных размеров. Увеличение абсолютной поверхности жидкого топлива ведет к сильному увеличению скорости его испарения, что очень важно при малом периоде времени испарения в процессе сгорания топлива в ДВС.

В водо-топливной смеси (как и во всяких плохо смешивающихся жидкостях) вблизи границ раздела фаз в какой-то степени происходит взаимное их растворение, что, как известно из теории растворов, довольно сильно снижает температуру кипения обеих фаз и, следовательно, повышает давление паров компонентов. А это вместе с фактором увеличения истинной поверхности топлива сильно увеличивает скорость испарения. Следует учесть, что в начале сгорания топлива в ДВС (в период задержки воспламенения) температура и давление в двигателях таковы, что водо-топливная смесь, и вообще топливо с высоким давлением пара, термодинамически не устойчива и должна испаряться. Единственным препятствием этому процессу является только кинетика испарения. За очень малый период времени задержки сгорания (15—30° угла поворота коленчатого вала) топливо обычно не успевает испариться полностью. Однако присадка воды в топливо в указанных условиях диспергирования способствует увеличению степени этого испарения.

Если водо-топливные капельки в период задержки воспламенения по каким-либо причинам не успевают испариться (и это, как отмечалось, вполне естественно, то они теперь уже не могут быть центрами гибели свободных радикалов. Это объясняется тем, что бомбардирующие поверхность капелек свободные радикалы при цепных реакциях не растворимы в капельках воды; при их столкновении с молекулами углеводородов, тонким слоем покрывающих поверхность водяных капелек, произойдет такая же химическая реакция, как при столкновении с молекулами топливного пара. Таким образом, водяные капельки, покрытые предельно тонким слоем углеводородов, должны быть подходя-

щими мишенями для активных бомбардировок свободными радикалами. В этом и заключается одно из преимуществ водо-топливной диспергированной системы.

Другое преимущество присадки воды в топливо состоит в том, что в период задержки сгорания топлива при появлении электрической искры или спонтанно возникающих и затухающих вспышек (для дизельных двигателей) благодаря наличию паров воды должно иметь место интенсивное образование свободных радикалов $\text{H}\cdot$ и $\cdot\text{OH}$, следовательно, зарождение цепной реакции крекинга и окисления, например:



Подобные процессы сильно эндотермичны. В результате этих реакций температура окружающей среды падает. Это способствует продолжению окислительной цепной реакции не по разветвленному механизму (с детонацией), а по неразветвленному (или по механизму вырожденных разветвленных цепей).

Благодаря указанным эндотермическим реакциям в период невидимого сгорания (в период задержки воспламенения) в какой-то степени увеличивается теплотворная способность топлива, что очевидно ведет к экономичности работы двигателя.

Существует мнение, что поскольку вода в ДВС будет занимать некоторый объем камеры сгорания, при этом будет уменьшаться количество поступающего в двигатель топлива и кроме того в процессе сгорания топлива некоторая часть теплоты пойдет на испарение этой воды. Считается также, что эти факторы будто бы могут привести к понижению мощности и экономичности двигателя. Однако необходимо учесть, что вообще диспергирование жидкости не означает увеличение ее объема. Это значит, что объем, занимаемый водой, в основном есть объем жидкой фазы воды. Для данного цикла этот объем ничтожно мал. К тому же расход топлива на испарение воды даром не теряется. В данном случае вода фактически представляет собой рабочую жидкость, как в паровой машине; при испарении она с остальным расширяющимся газом совершает работу. Что касается уменьшения поступающего в двигатель топлива за счет объема, занимаемого водой, то очевидно, что это вполне (и, по-видимому, слишком) компенсируется выигрышем энергии, полученной в результате отмеченных эффектов увеличения скорости сгорания топлива и некоторого увеличения теплотворной способности топлива. Эта точка зрения подтверждается нашими экспериментами.

Վառելանյութերի դիսպերգացման միջոցները եվ նրա լրիվ այրմանը նպաստող մյուս գործոնները ներքին այրման շարժիչներում (ՆԱՇ)

Ներքին այրման շարժիչում վառելանյութի դիսպերգացման համար մշակված է նոր մեթոդ, որի էությունը հետևյալն է. սկզբնական փոշիացած հեղուկը հատուկ կամերայում (դիսպերգացման կամերա) գազի հետ խառնվելու դեպքում կրկնակի դիսպերգացվում է (տեղի է ունենում նրա պարցիալ լայնացում)։

Յուրաքանչյուր ներքին այրման շարժիչի համար վառելանյութի դիսպերգացման ավելի ունիվերսալ մեթոդ է հանդիսանում ջրի և վառելանյութի խառնուրդի օգտագործումը դիսպերգացման կամերայի միջոցով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ О. К. Давтян, ДАН АрмССР, т. 73, № 3 (1981). ² Л. А. Гусак, Вестник АН СССР, 8, 53 (1976). ³ О. К. Давтян, Я. А. Карапетян, М. А. Давтян, Авторское свидетельство № 2802151/25—0,6 (115170), 27 июля 1979 г.

УДК 576.314

БИОФИЗИКА

С. А. Баджиян

Влияние различных простагландинов на проводимость бислойных фосфолипидных мембран

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Э. С. Габриеляном 13/V 1981)

Простагландины являются универсальными регуляторами функционального состояния клеток (¹). Несмотря на большие достижения в области изучения простагландинов данных о механизме воздействия их на клеточные мембраны очень мало. Имеется ряд работ, показывающих, что простагландины способствуют вхождению кальция внутрь клеток (^{2,3}). В работе (⁴) показано участие простагландинов в транспорте ионов через мембраны сердечных клеток и в генерации потенциала действия и их способность оказывать влияние на транспортную функцию эритроцитарных мембран. Тем не менее неизвестны механизмы взаимодействия простагландинов с мембранами, их компонентами и роль их в ионном транспорте.

В настоящем сообщении рассматривается влияние простагландинов E_1 ($ПГЕ_1$), E_2 ($ПГЕ_2$), $F_{2\alpha}$ ($ПГF_{2\alpha}$), A_1 ($ПГА_1$) и I_2 ($ПГI_2$) на проводимость модельных мембран из лецитина и кардиолипина для ионов калия, натрия, лития, цезия, кальция.

Бислойные мембраны из лецитина и кардиолипина формировали по методу Мюллера (⁵). Электрические измерения проводили при помощи высокоомного электрометра, используя пару хлорсеребряных электродов, погруженных в исследуемый солевой раствор: 0,1 М KCl, NaCl, LiCl, CsCl, $CaCl_2$ по обе стороны мембраны (⁶). Измерения проводили при температуре 22—24°С. Исследуемые модельные мембраны модифицировали введением в окружающий их раствор простагландинов, разведенных в аналогичных растворах.

Проводимость мембран исследовали при концентрациях от 10^{-4} М до 10^{-10} М включительно. Определение ионной избирательности мембран проводили по методу, впервые предложенному А. А. Львом (⁷). Липосомы готовили по методу Банхема (⁸), озвучивали ультразвуком. Липосомы готовили по методу Банхема (⁸), озвучивали ультразвуком. Со-
вым диспергатором УЗДН-1 при частоте 22 кгц в течение 15 мин. Со-
держание лецитина и кардиолипина в пробе составляло 0,3 мг/мл.
Спектры флуоресценции снимали на спектрофлуориметре МРФ-2Р. В
работе использовали лецитин и кардиолипин Харьковского завода бак-

терийных препаратов, простагландины фирмы «Upjohn Comp.» (США), линолевую кислоту отечественного производства, архидоновую кислоту фирмы «Сигма» (США).

Модельные мембраны, сформированные из лецитина и кардиолипина, имеют низкую проводимость (таблица). Проводимость рассматриваемых мембран повышается при модификации их простагландинами. Были исследованы простагландины различных серий—Е, А, F и простаглицин (ПГI₂), которые по своей химической структуре несколько отличаются друг от друга, но в общем представляют собой циклические оксигенированные жирные кислоты, содержащие цикlopентановое кольцо.

Проводимость модельных мембран увеличивается при максимальных (10^{-4} М— 10^{-5} М) и минимальных (10^{-9} М— 10^{-10} М) концентрациях. Наибольшее увеличение проводимостей наблюдается при концентрациях 10^{-7} М— 10^{-8} М. В таблице приведены экспериментальные результаты проводимостей бислойных фосфолипидных мембран под влиянием рассматриваемых простагландинов для ионов калия и кальция. Как видно из таблицы, простагландины увеличивают проводимость бислоев от 2—4 порядков. Подобная картина наблюдается и для ионов натрия, лития, цезия.

Проводимость бислойных мембран из фосфолипидов, модифицированных простагландинами концентрации 10^{-7} М

Модельные мембраны	Проводимость лецитиновых бислоев, $\text{ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$		Проводимость кардиолипидных бислоев, $\text{ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$	
	K ⁺	Ca ⁺⁺	K ⁺	Ca ⁺⁺
Без модификатора	$(5,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-8}$	$(6,5 \pm 0,2) \cdot 10^{-8}$	$(6,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-8}$	$(5,4 \pm 0,3) \cdot 10^{-8}$
ПГЕ ₁	$(3,2 \pm 0,2) \cdot 10^{-5}$	$(3,2 \pm 0,2) \cdot 10^{-6}$	$(3,2 \pm 0,3) \cdot 10^{-5}$	$(1,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-5}$
ПГЕ ₂	$(4,3 \pm 0,3) \cdot 10^{-5}$	$(6,1 \pm 0,2) \cdot 10^{-5}$	$(6,4 \pm 0,4) \cdot 10^{-6}$	$(6,1 \pm 0,3) \cdot 10^{-5}$
ПГF _{2a}	$(3,6 \pm 0,2) \cdot 10^{-5}$	$(4,3 \pm 0,3) \cdot 10^{-5}$	$(4,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-5}$	$(5,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-4}$
ПГА ₁	$(2,1 \pm 0,2) \cdot 10^{-7}$	$(1,2 \pm 0,3) \cdot 10^{-7}$	$(3,2 \pm 0,2) \cdot 10^{-7}$	$(1,2 \pm 0,2) \cdot 10^{-7}$
ПГI ₂	$(8,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-5}$	$(7,8 \pm 0,2) \cdot 10^{-5}$	$(1,2 \pm 0,3) \cdot 10^{-4}$	$(4,5 \pm 0,3) \cdot 10^{-4}$

Исследование ионофорной активности простагландинов показало, что они убывают в следующем ряду:

$$I_2 > E_2 > F_{2a} > E_1 > A_1.$$

Были также проведены эксперименты по определению влияния на проводимость рассматриваемых мембран ненасыщенных жирных кислот—архидоновой и линолевой, из которых синтезируются простагландины. Проведенные исследования показали, что указанные вещества не меняют проводимость фосфолипидных мембран. Полученные результаты дают основание предполагать, что в увеличении проницаемости бислойных мембран играет роль структура самих простагландинов, в силу чего они могут быть ионофорами или создавать каналы проводимостей для катионов.

Серией экспериментов по определению бионных потенциалов бы-

ла обнаружена специфичность рассматриваемых мембран, модифицированных простагландинами в отношении проницаемости одновалентных катионов, которые могут быть расположены в виде следующего ряда:



В немодифицированных фосфолипидных бислоях проницаемость одновалентных катионов убывает следующим образом:



Бислон из общих фосфолипидов создают аналогичный ряд (7).

Для выяснения возможного механизма влияния простагландинов на проводимость фосфолипидных мембран были проведены исследования с помощью методов флуоресцентных зондов, в частности пирена. Полученные данные показали, что простагландины повышают вязкость в глубоких слоях фосфолипидных мембран. Это дает основание предполагать, что структурные изменения, вносимые простагландинами в мембраны, лежат в основе их влияния на мембранную проницаемость.

Сектор радиобиологии

Министерства здравоохранения

Армянской ССР

Ա. Ա. ԲԱԶԻՆՅԱՆ

Տարբեր պրոստագլանդինների ազդեցությունը երկշերտ ֆոսֆոլիպիդային թաղանթների հաղորդականության վրա

Հետազոտված է միավալենտ ու երկվալենտ կատիոնների համար երկշերտ ֆոսֆոլիպիդային թաղանթների հաղորդականության մի քանի կարգով բարձրացման պրոստագլանդինների հատկությունը: Բացահայտվել է, որ ըստ իոնոֆորային ակտիվության պրոստագլանդինները նվազում են հետևյալ շարքում $I_2 > E_2 > F_{21} > E_1 > A_1$: Նկատված է, որ պրոստագլանդիններով մոդիֆիկացված մոդելային թաղանթները ունեն կատիոնային առանձնահատկություն:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ К. М. Лакин, В. А. Макаров, в сб. Простагландины, Медицина М., 1978.
² G. Fassina, A. R. Contessa, Biochem. Pharmacol., vol. 8 (1967). ³ P. W. Ramwell
J. E. Shaw, Res. PROG. Harm. Rus., vol. 26 (1970). ⁴ S. I. Kirtland, H. Baum, Nature New Biol., vol. 236 (1972). ⁵ R. Mueller, R. Rudin, G. Tien a. o., Nature vol. 3 (1963). ⁶ С. А. Баджиян, Биол. журн. Армении, т. 2, № 6 (1976). ⁷ А. А. Лев, в кн. Моделирование ионной избирательности клеточных мембран, Наука, Л., 1974.
⁸ A. D. Bangham, M. M. Standish, A. Watkin, J. Mol. Biol., vol. 13, 1965.

УДК 595.765.4

ЭНТОМОЛОГИЯ

С. М. Яблоков-Хнзорян, М. А. Марджанян

О процессе совокупления и строении эдеагуса у жуков щелкунов
с описанием нового подрода в роде *Cardiophorus* Eschz
(Coleoptera, Elateridae)

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР В. В. Фанарджяном 4/IX 1981)

Хотя у насекомых имагинальная стадия служит в основном, а иногда и исключительно, для воспроизведения, процесс совокупления у них изучен очень отрывочно и неполно. В этой статье мы приводим некоторые данные об этом процессе у жесткокрылых-щелкунов.

У всех щелкунов эдеагус очень однородного примитивного, так называемого трехлопастного строения. Он состоит из пенисной трубки, тегмена (=«базальной пластинки») и парамер. При копуляции эдеагус вводит в брюшко самки длинный трубчатый беловатый сперматофор, который почти такой же длины, как влагалище вместе с совокупительной сумкой; эта последняя имеется у всех щелкунов. У них в подавляющем большинстве случаев совокупительная сумка обладает специальным вооружением в виде игл, ребер или пластинок, которое, вцепляясь в сперматофор, препятствует его выходу из влагалища при втягивании эдеагуса по окончании спаривания (¹). У рода *Cardiophorus* Eschz и родственных это вооружение состоит из 2—3 зубчатых пластинок, обхватывающих вершину сперматофора (рис. 1, 2). Хотя сперматофор обнаружен нами лишь у нескольких видов щелкунов, следует допустить, что он образуется по крайней мере у всех видов, совокупительная сумка которых вооружена.

У жесткокрылых сперматозоиды выводятся либо как у позвоночных, плавая в выделяемом секрете, либо сцеплены в пачки, называемые у них спермиями, либо заключены в мешок—сперматофор. Различают настоящий сперматофор, образованный у самца перед копуляцией, от ложного, формирующегося во влагалище за счет выделений как самца, так и самки. У жесткокрылых исходный тип спаривания связан с образованием настоящего сперматофора. Следующие типы более эволюированные, наиболее молодым является первый из упомянутых нами выше, он описан лишь у одного рода долгоносиков, но обнаружится, по-видимому, и у многих других.

У жесткокрылых сперматозоиды выводятся обычно через пенисную трубку, через которую проходит семяизвергательный проток семенников, часто расширенный здесь во «внутренний мешок», который может быть снабжен различными образованиями. У шелкоуов внутреннего мешка нет, семяизвергательный проток простой, но двух раз-

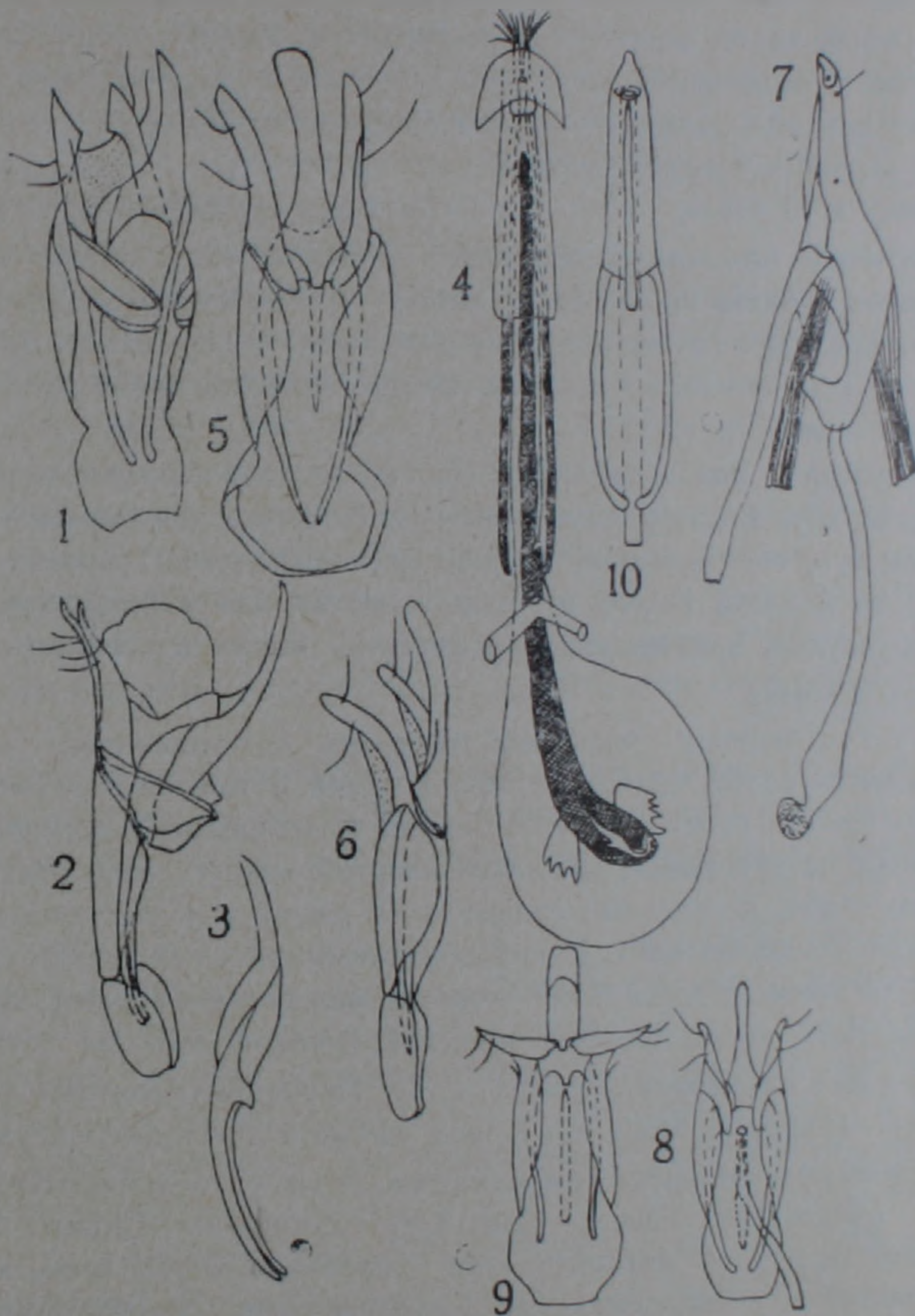


Рис 1. 1—4. *Cardiophorus nigratissimus* Buys. из Джрвежа: 1—эдеагус дорсально-латерально, в начальной стадии спаривания; 2—то же латерально в момент выхода сперматофора; 3—пенисная трубка латерально; 4—совокупительная сумка и овискапт со сперматофором; 5—6. *C. megathorax* Fald. из Мегри: 5—эдеагус дорсально в процессе спаривания; 6—то же латерально; 7—*C. atramentarius* Er. из Германии—дистальный отрезок правой парамеры с основными хрящами и пучками мускулов; 8—*Paracardiophorus permodicus* Fald. из Еревана—эдеагус дорсально; 9—*Negastris pulchellus* (L.) из Германии—эдеагус дорсально при спаривании; 10—*Melanotus rufipes* (Hrbst) из Шникерта—пенисная трубка вентрально.

1—3, 5, 6, 8, 9×50; 4×14; 5, 7×100; 10×29

личных типов, как и строение пениса. Пенисная трубка образует пластинку, края которой отогнуты внутрь, оставляя более или менее широкую вентральную щель. Основные трубки вытянуто в 2 узких и длинных боковых отростка, к ним прикрепляется мускулатура, с помощью которой трубка может поворачиваться в сагиттальной плоскости. Тегмен также образован пластинкой с отогнутыми боками изменчивой длины, часто короткий и седловидной формы. На его вершине прикреплены подвижные парамеры. У большинства шелкоунов парамеры построены однородно, имеют форму удлиненной треугольной полый трубки, вершина которой более или менее отогнута и несет несколько ресничек, часто также зубец, вентрально или латерально. Иногда они соприкасаются или слиты дорсально у основания. Семяизвергательный проток тонкий, проникает в эдеагус с дорсальной стороны выше тегмена, проходит затем между парамерами через трубку почти до самого ее конца; вдоль середины трубки имеется слабо дугообразно изогнутая игла.

У некоторых родов парамеры состоят из двух отрезков, плотно примыкающих друг к другу вдоль извилистого стыка, дистальный отрезок имеет выступ, проникающий в проксимальный, он ограничен кантом от остальной части своего отрезка, к этому канту прикреплены два пучка мускулов, примыкающих с другого конца к стенкам проксимального отрезка.

При копуляции у шелкоунов парамеры в большинстве случаев раздвигаются слабо, вращаясь, обе, в одной и той же плоскости, перпендикулярно к сагиттальной. У видов с двойными парамерами оба их отрезка раздвигаются, вращаясь каждый вокруг своей оси, проксимальные слабо, дистальные сильно и по-разному у различных видов, но всегда несколько вниз. У них семяизвергательный проток кончается над тегменом с дорсальной стороны между парамерами, сперматофор толстый, выводится под пенисной трубкой, которая отгибается вверх и над парамерами (рис. 1, 2, 6). Перепонка, вентрально соединяющая парамеры, несет иглу, над которой проходит сперматофор.

Двойные парамеры нам известны лишь у подсемейства *Negastriinae* (*Negastrius* Thoms. (рис. 1,9), *Zorochrus* Thoms., но не у *Quasimus* Gozis, у которого они дорсально обособлены, но слиты вентрально) и у подсемейства *Cardiophorinae* (*Cardiophorus* Eschz., *Neocardiophorus* Gurjeva, *Dicronychus* Brullé (= *Platynychus* Motsch.), *Paracardiophorus* Schw.) (рис. 1,8). У других семейств жесткокрылых такие парамеры неизвестны. Сходство в строении парамер у этих двух подсемейств указывает на их более близкое родство, чем это часто допускается.

Шварц (2) выделил в новое семейство *Dicronychidae* ряд родов шелкоунов из-за строения их эдеагуса, также трехлопастного типа, но

лишенного пенисной трубки, у них парамеры очень длинные, они сдвинулись, изогнулись и сомкнулись (3). Хотя это строение и своеобразно, но оно явно является лишь крайним вариантом эволюции у шелкоунов, у которого пенисная трубка атрофировалась, потеряв, как у *Cardiophorus*, свою основную функцию. Поэтому это семейство, сейчас называемое *Eudicronychidae*, правильнее считать лишь подсемейством шелкоунов, как это делает и Жирар (3).

У шелкоунов спаривание длительное, протекает двумя этапами. Сначала самец располагается на надкрыльях самки, его пенисная трубка и парамеры проникают во влагалище и расширяют его просвет, как и просвет самого эдеагуса, для прохождения сперматофора, при этом пенисная трубка приподнимается, а парамеры расходятся более или менее в сторону. У *Negastriinae* (рис. 1, 9) дистальные отрезки парамер поворачиваются в плоскости эдеагуса, перпендикулярно к его сагиттальной плоскости, у *Cardiophorinae* обнаружено два варианта: у рода *Dicronychus* и подрода *Cardiophorus* s. str. дистальные отрезки поворачиваются слабо и косо (рис. 1, 6), слегка вниз, их основание упирается при этом в основание пенисной трубки по бокам от ее срединного отростка, выдвигая ее вперед. У подрода *Zygocardiophorus* п. эти отрезки (рис. 1, 1, 2) не расходятся, но опускаются, вращаясь вокруг оси, перпендикулярной к оси трубки, при этом (рис. 1, 3) их задний край упирается в зубец этой трубки, выдвигая ее вперед. На втором этапе спаривания партнеры располагаются в одной плоскости, спиной друг к другу.

Наличие у рода *Cardiophorus* двух типов парамер побуждает нас разделить этот род на два подрода, несмотря на их полное сходство по всем прочим признакам. Эти подроды можно различать следующим образом:

- 1(2) Дистальные отрезки парамер (рис. 1, 7) обособлены, обычно у вершины с вентральным зубчиком. Пенисная трубка с коротким срединным отростком, боковые отростки без зубца. При спаривании дистальные отрезки расходятся с пенисной трубкой в сагиттальной плоскости на $10-15^\circ$ (рис. 1, 6). Сперматофор выходит с вентральной стороны эдеагуса, над вершинным краем проксимальных отрезков парамер *Cardiophorus* s. str.

Типовой вид: *C. gramineus* Scop. (Méguignon, 1930)

- 2(1) Дистальные отрезки парамер вентрально (рис. 1, 1) соединены между собой склеротизованной перепонкой, у вершины с внутренним зубцом. Пенисная трубка без срединного отростка, боковые отростки с дорсальным зубцом. При спаривании дистальные отрезки расходятся с пенисной трубкой в сагиттальной плоскости на $60-90^\circ$ (рис. 1, 1, 2). Сперматофор выходит из просвета, образовавшегося между дистальными отрезками парамер и пенисной трубкой *Zygocardiophorus* Mardjanian sbg. nov.

Типовой вид: *Cardiophorus nigratissimus* Buys.

Список известных нам видов рода *Cardiophorus* Eschz
(звездочкой* отмечены виды, изученные нами, прочие нам известны
лишь по литературным данным)

Подрод *Cardiophorus* s. str.

- | | |
|------------------------------------|---|
| 1. <i>gramineus</i> Scop.* | 29. <i>ecorculatus</i> Gur. |
| 2. <i>miniaticollis</i> Cand.* | 30. <i>badchysicus</i> Dol. |
| 3. <i>syriacus</i> L.* | 31. <i>eleonoraе</i> Gène |
| 4. <i>somcheticus</i> Schw.* | 32. <i>nigricollis</i> Er. |
| 5. <i>sacratus</i> Er.* | 33. <i>mutabilis</i> Gur. |
| 6. <i>discicollis</i> Hrbst.* | 34. <i>asper</i> Gur. |
| 7. <i>kindermanni</i> Cand.* | 35. <i>medvedevi</i> Gur. |
| 8. <i>persicus</i> Schw.* | 36. <i>varipennis</i> Schw. |
| 9. <i>latescapulatus</i> Buyss.* | 37. <i>scheuerni</i> Chass. |
| 10. <i>araxicola</i> Khnz.* | 38. <i>aeneoniger</i> Gur.* |
| 11. <i>nigropunctatus</i> Motsch.* | 39. <i>aeneomicans</i> Gur. |
| 12. <i>quadrinaevus</i> Rtt.* | 40. <i>glasunovi</i> Gur.* |
| 13. <i>rufipes</i> Goeze* | 41. <i>nanus</i> Gur. |
| 14. <i>atripes</i> Buyss.* | 42. <i>rorulentus</i> Gur. |
| 15. <i>vestigialis</i> Er.* | 43. <i>kinzelbachi</i> Chass. |
| 16. <i>tenellus</i> Rche* | 44. <i>jermolenkoi</i> Dol. |
| 17. <i>ruficruris</i> Brullé* | 45. <i>asellus</i> Er. |
| 18. <i>ebeninus</i> Germ.* | 46. <i>maritimus</i> Dol. |
| 19. <i>turgidus</i> Er.* | 47. <i>tenelloides</i> Dol. |
| 20. <i>atramentarius</i> Er.* | 48. <i>hlemalis</i> Dol. |
| 21. <i>nigerrimus</i> Er.* | 49. <i>tokgaejevi</i> Dol. |
| 22. <i>dolini</i> sp. nov.* | 50. <i>arnoldii</i> Dol. |
| 23. <i>hiekei</i> sp. nov.* | 51. <i>kryzhanovskyi</i> Dol. et Tschtl.* |
| 24. <i>tadzhikistanicus</i> Gur. | |
| 25. <i>olgae</i> Sols. | |
| 26. <i>chivensis</i> Step. | |
| 27. <i>pellitoides</i> Gur. | |
| 28. <i>opacus</i> Gur. | |

Подрод *Zygocardiophorus* Mard.
sbg. n.

1. *nigratissimus* Buyss.*
2. *allenus* Dol.*

Институт зоологии

Академии наук Армянской ССР

Ս. Մ. ՅԱՐԼՈՎԻԿ-ԽԵՉՈՐՅԱՆ, Մ. Ա. ՄԱՐԶԱՆՅԱՆ

Զրիական բզեզների զուգավորման պրոցեսը, էդեագուսի կառուցվածքը և
Cardiophorus Eschz սեռի նոր ենթասեռի նկարագրությունը
(Coleoptera, Elateridae)

Հոդվածում առաջին անգամ տրվում է չրիական բզեզների սպերմատոֆորի
և զուգավորման նկարագրությունը: Պարամերների կառուցվածքի հիման վրա՝
ամբողջական և կրկնակի, բացահայտված է էդեագուսի երկու տիպերը *Elateri-*
dae ընտանիքի տեսակների մեծամասնության մոտ էդեագուսը ամբողջական
248

պարամերներով է, կրկնակի պարամերները հայտնի են հետևյալ ենթաընտանիքների տեսակների մոտ՝ Negastriinae (Negastrius Thoms., Zorochrus Thoms., իսկ Quasimus Gozis սևոի մոտ պարամերները դորսալ կողմից մեկուսացված են) և Cardiophorinae (Cardiophorus Eschz, Dicronychus Brulle, Paracardiophorus Schw.): Պարամերների կառուցվածքի նմանությունը այդ ենթաընտանիքների մոտ ցույց է տալիս նրանց ազգակցական մոտիկությունը:

Cardiophorus սևուռ մասի պարամերների կառուցվածքի, նրանց դորսոկոնտինյուալ կողմից զուգավորման ժամանակ և սպերմատոֆորի դուրս գալու տեղի հիման վրա առանձնացված է նոր ենթասեռ Zygocardiophorus Mard. n.

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Е. Л. Гурьева, Фауна СССР. Жесткокрылые XII. Подсемейство Elaterinae, Наука, Л., 1979. ² O. Schwarz, Wytzman's Genera Insectorum, 51. Coleoptera, fam. Dicronychidae: 1—5 (1907). ³ C. Girard, Bull. d. l'I. F. A. N; t. 33, ser. A, 3: 549—650 (1971).

УДК 595.429.2

АКАРОЛОГИЯ

В. Г. Шевченко, А. Р. Погосова

К фауне четырехногих клещей (Acariformes, Tetrapodili),
встречающихся на соснах (сем. Pinaceae) в Армении,
с описанием нового вида

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР В. В. Фанарджяном 4/IX 1981)

К настоящему времени в Армении на соснах обыкновенной, Сосновского и крымской (*Pinus silvestris* L., *P. sosnowskyi* Nakai, *P. pallasiana* Lamb.) зарегистрировано 4 вида Tetrapodili, из которых 1 новый для науки, а 3 впервые отмечаются для фауны СССР. Ниже приводятся: описание нового вида, сведения о распространении и кормовых растениях всех видов, а также их рисунки. В работе приведена определительная таблица четырехногих клещей, обнаруженных на соснах в Армении. Размеры приведены в микрометрах.

Setoptus Kelfer, 1944

Setoptus pini Boczek, 1964 (рис. 1)

Boczek, 1964: 221

Обитает на поверхности игл *Pinus silvestris* L.

Материал собран в окрестности с. Карцахпюр Варденисского района (Севанский бассейн) 23/VI 1979. Сб. А. Р. Погосова.

Известен в Польше (1).

Platyphytoptus Kelfer, 1939

Platyphytoptus sevani Shevtchenko et Pogosova sp. n. (рис. 2)

Близок к *Platyphytoptus multisternatus* K., 1939, описанному Кифером с *Pinus ponderosa* Pougls., *P. tuberculata* Gord. Отличается от него отсутствием ребрышек и наличием тонкой неясной исчерченности на эпигинии, а также меньшими размерами эпигиния, дорсальной щетинки и более длинной генитальной щетинкой.

Самка. Длина тела 170—200, ширина 80—82. Тело беловатое, дорсо-вентрально-уплощенное. Длина роstrума 36—37. Длина щитка 41—44, рисунок щитка из не ясно выраженных линий, достигающих до переднего края щитка. Расстояние между бугорками s. d. 17—18, длина s. d.

3,5—4,5, они расположены перед задним краем щитка и направлены вовнутрь. Передние конечности 37—38, голень 8,5—9,5, лапка 7—8, коготок 5—6, перышко 4-лучевое. Задние конечности 33—34, голень 6,5—7,5, лапка 7, коготок 6, перышко 4-лучевое. Брюшко с сублагеральными желобками по обеим сторонам тела. Спинные и брюшные полукольца покрыты удлиненно-округлыми микробугорками, которые на спинной стороне не всегда четко видны. Спинных полуколец 56—57, брюшных 79—85, s. l. на 66—71 полукольце, длиной 26—30, s. v. 1 на 52—54 полукольце, длиной 27—28, s. v. 2 на 30—33 полукольце, длиной 24—25, s. v. 3 на 6 полукольце от заднего конца тела, длиной 17—19, s. асс. 3—4,5, s. caud. 62—65. Ширина крышечки генитального отверстия 26—27, длина 18—21. Крышечка генитального отверстия без ребрышек, с тонкой неясной исчерченностью. Длина генитальных щетинок 16—17, расстояние между ними 14—15.

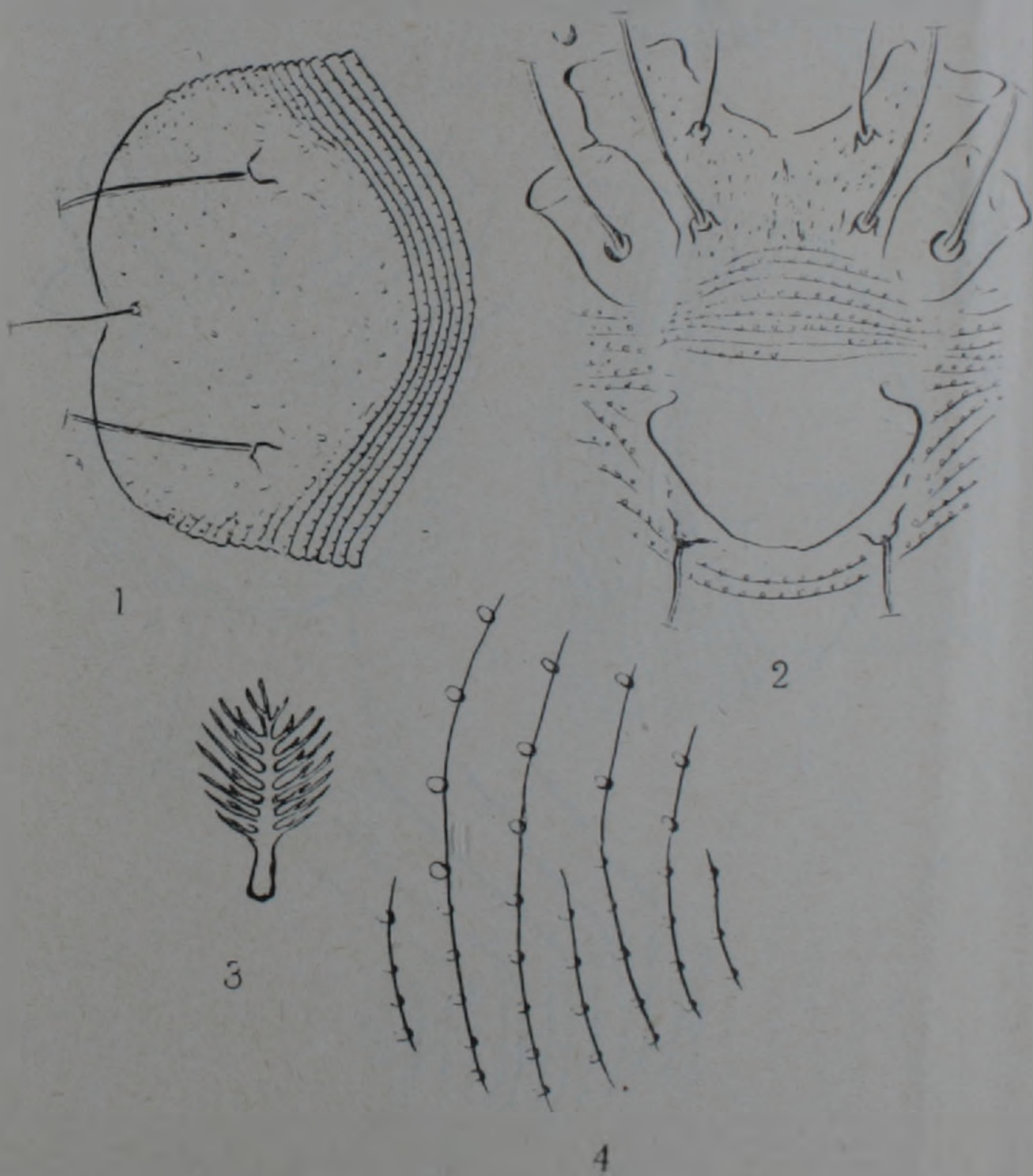


Рис. 1. *Setoptus plni* Boczek: 1—проподосомальный щиток; 2—эпигиний; 3—перистый эмподий; 4—участок покровов опистосомы

Растение-хозяин: *Pinus pallasiana* Lamb., *P. sosnowskyi* Nakai.

Отношение к хозяину: клещи обнаружены на шишках и у основания хвой.

Голотип ♀: в препарате № 645 (1). Армянская ССР, окрестность г. Еревана, 15/IX 1965. Материал собран А. Т. Багдасаряном. Парати-

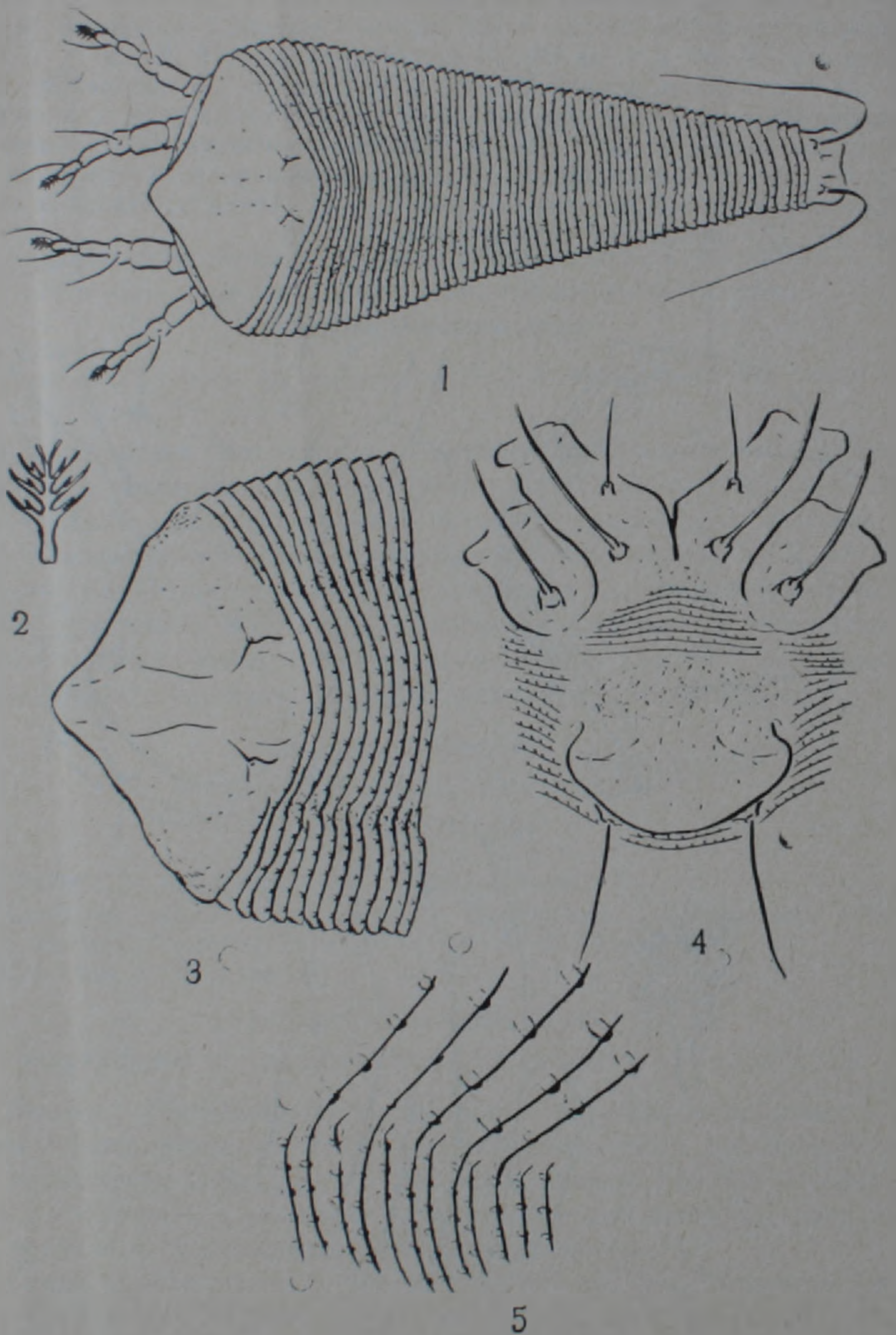


Рис. 2. *Platyphytoptus sevani* Shevichenko et Pogosova sp. n.: 1—самка со спинной стороны; 2—эмподий; 3—пропodosомальный щиток; 4—эпигиний; 5—участок покровов опистосомы

пы: препарат № 21. Варденисский район, с. Карчахпюр, 23/VI 1979. Сб. А. Р. Погосова. Оба препарата в коллекции лаборатории акарологии Института зоологии АН Армянской ССР.

Platyphytoptus pinae Castagnoli (рис. 3)
Castagnoli, 1973:3

Клещи обнаружены у основания игл *Pinus pallasiana* Lamb.

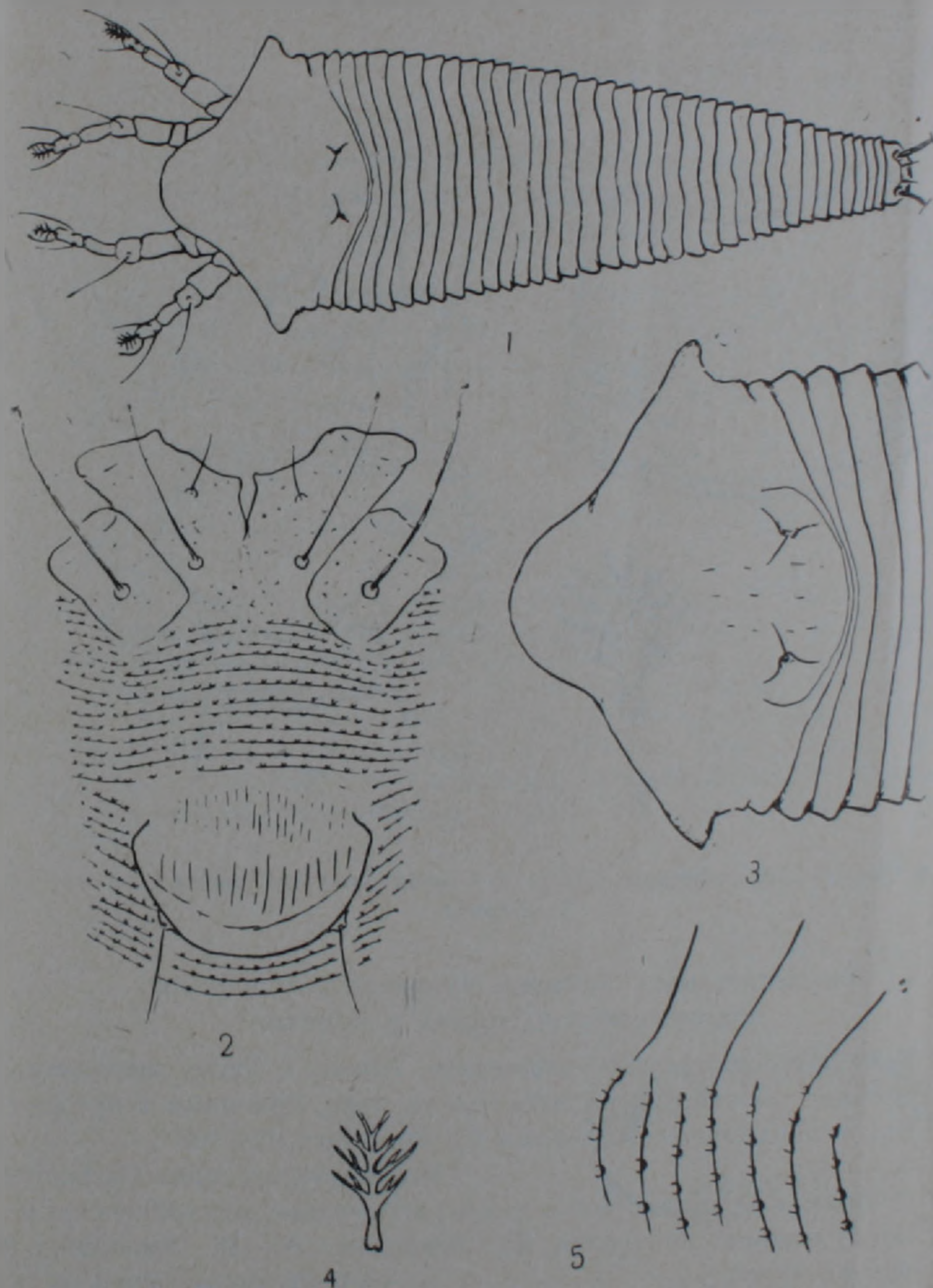


Рис. 3. *Platyphytoptus pinae* Castagnoli. 1—самка со спинной стороны; 2—эпигиний; 3—проподосомальный щиток; 4—эмподий; 5—участок покровов опистосомы

Материал собран в окрестности г. Еревана 23/VI 1979, 10/XI 1980.
Сб. А. Р. Погосова.

Найден в Италии (2).

Platyphytoptus sabinianae Keifer (рис. 4)

Keifer, 1938: 188—189

Обитают на иглах *Pinus pallasiana* Lamb., *P. silvestris* L.

Материал собран в окрестности г. Еревана 10/IX 1980, 3/III 1981.
Сб. А. Р. Погосова.

Известен в США (3,6), Италии (2).

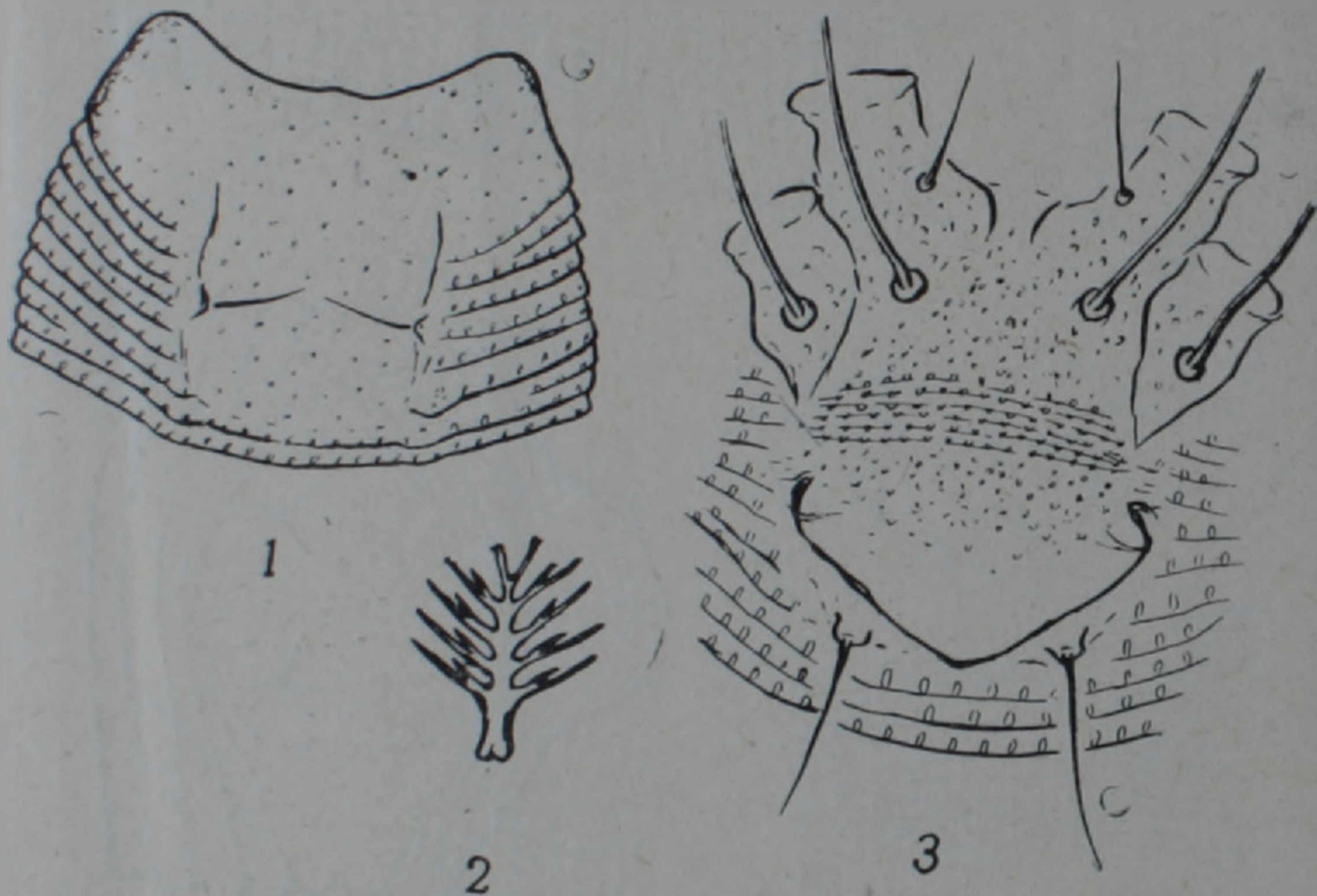


Рис. 4. *Platyphytoptus sabinianae* Keifer: 1—проподосомальный щиток; 2—эмподий; 3—эпигиний

Определительная таблица четырехногих клещей,
обнаруженных на соснах в Армении

- 1(6) Тело дорсо-вентрально-уплощенное. Щиток с двумя щетинками.
2(3) Спинные полукольца гистеросомы гладкие, брюшные с бугорками; число спинных полуколец 33, брюшных 92—100 *Platyphytoptus pinae* Castagnoli
3(2) Спинные и брюшные полукольца гистеросомы мелкобугорчатые.
4(5) Число спинных полуколец 56, брюшных 80—85. Эмподий с 4 парами лучей *Platyphytoptus sevani* sp. n.
5(4) Число спинных полуколец 65, брюшных 79. Эмподий с 5 парами лучей *Platyphytoptus sabinianae* Keifer

6(1) Тело удлинено-червеобразное. На щитке 3 щетинки.
Число спинных полуколец 63, брюшных 82. Перышко с 8—9
парами лучей *Setoptus pinl* Boczek

Биологический институт
Ленинградского государственного университета
Институт зоологии
Академии наук Армянской ССР

Վ. Գ. ՇԵՎԵՆԿՈՎ, Ա. Հ. ՊՈՂՈՍՈՎԱ

Հայաստանում սոճիների (ընտ. Pinaceae) վրա հանդիպող քառոտ
տզերի (Acariformes, Tetrápodili) ֆաունայի վերաբերյալ
նոր տեսակի նկարագրությամբ

Հայաստանում երեք տեսակի սոճիների վրա նշված են 4 տեսակի Tetra-
podili, որոնք պատկանում են 2 սեռերի, այդ թվում մեկը նոր է գիտության
համար: Բերված է նոր տեսակի նկարագրությունը: Տրվում է հայտնաբերված
ձևերի որոշման աղյուսակ:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ J. Boczek, Studies on Eriophyid Mites of Poland. III. Annales Zoologici, 22, 11. Warszawa, 221—222 (1964). ² M. Castagnoli, Contributo alla conoscenza degli Acari Eriofidi viventi sul gen. Pinus in Italia.—Redia, Firenze, vol. LIY, 1—6 (1973). ³ H. H. Keifer, Eriophyid studies.—Bull. Depart. Agric. California, 17, 2, 188—189 (1938). ⁴ H. H. Keifer, Eriophyid studies III. Bull. Depart. Agric. California, 18, 2, 146—147 (1939). ⁵ H. H. Keifer, Eriophyid studies XIV. Bull. Depart. Agric. California, 33, 1 (1944.) ⁶ H. H. Keifer, The Eriophyid Mites of California (Acarina, Eriophyidae). Bull. of the California Insect Survey, 2, 1 (1952).

