

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
Д О К Л А Д Ы

LXXIII, № 2

1981

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. ֆաբրիկա), է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ա. Թ. ԲԱՐՍՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄՐԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱՔՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Օ. Մ. ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Բ. ՖԱՆԱՐԺՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), И. Г. МАГАКЬЯН, академик АН АрмССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

էջ

Հ. Ս. Ասատրյան—Երկու թեորեմ սահմանափակ թյուրինգյան բերելիության մասին .	67
Մ. Յու. Խոջայանց— e -աստիճաններ, T -աստիճաններ և արտոմատիկ տեսություններ	73
Ա. Կ. Մարևոսյան—Դրական և բացասական ($m_1, m_2, \dots, m_n$)-փաթեթների հաշվման արագ ալգորիթմներ	78
Ս. Մ. Մելիքյան—Փակդոթների դասերի որոշ հատկություններ	83
Մ. Ժ. Գրիգորյան—Ինտեգրելի ֆունկցիաների Ֆուրյեի բազմապատիկ շարքերի սֆերիկ մասնական գումարների $LP, 0 < p < 1$, մետրիկայով զուգամիտության մասին	87
Գ. Գ. Դևոբյան—Հաարի և Ուոլշի համակարգերի միակության բազմությունների մասին	91
Մ. Ա. Մնացականյան—Փոփոզ մակերևույթի տիրույթի մակերեսի մասին	97

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Բ. Խ. Գրիգորյան—Անվերջ կտոր-առ-կտոր համասեռ առաձգական ներդիրով առաձգական հարթության մի պարբերական խնդրի վերաբերյալ	103
--	-----

ԷԼԵԿՏՐԱՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ա. Ղ. Իոսիֆյան, Գ. Լ. Արեշյան—Փոփոխական հոսանքի ունակային ասինխրոն մեքենաների տեսության հիմունքները	109
---	-----

ՔԻՄԻԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱ

Հ. Կ. Դավթյան—Ներքին այրման շարժիչի (ՆԱՇ) օգտակար գործողության գործակցի (ՕԳԳ) սպեցիֆիկ առանձնահատկությունների մասին	116
---	-----

ԳԵՆԵՏԻԿԱ

Ա. Մ. Աղաջանյան— S -ալելների գործունեությունը <i>Lycopersicon hirsutum</i> -ի ներտեսակային հիբրիդների հետադարձ խաչաձևումների ժամանակ	123
--	-----

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр
МАТЕМАТИКА	
О. С. Асатрян—Две теоремы о $b \Gamma$ сводимости	67
М. Ю. Ходжаянц— e -степени, T -степени и аксиоматические теории	73
А. К. Матевосян—Быстрые алгоритмы вычисления положительно и отрицательно обернутых $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ -сверток	78
С. М. Меликян—О некоторых свойствах классов псевдочисел	83
М. Ж. Григорян—О сходимости в метрике $L_p, 0 < p < 1$, сферических частотных сумм кратных рядов Фурье суммируемых функций	87
Г. Г. Геворкян—О множествах единственности для систем Хаара и Уолша	91
М. А. Мнацаканян—О площади области на развертываемой поверхности	97
МЕХАНИКА	
Э. Х. Григорян—Об одной периодической задаче упругой плоскости с бесконечным кусочно-однородным упругим включением	103
ЭЛЕКТРОМЕХАНИКА	
А. Г. Иосифьян, Г. Л. Арешян—Основы теории асинхронных емкостных машин переменного тока	109
ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА	
О. К. Давтян—О некоторых специфических особенностях к.п.д. двигателей внутреннего сгорания (ДВС).	116
ГЕНЕТИКА	
А. М. Агаджанян—Действие S-аллелей при возвратных скрещиваниях внутривидовых гибридов <i>Lycopersicon hirsutum</i>	123

C O N T E N T S

MATHEMATICS

	P.
<i>H. S. Assatryan</i> —Two theorems on bounded-turning reducibility	67
<i>M. J. Khodjalants</i> — e -degrees, T -degrees and axiomatic theories	73
<i>A. K. Matevksyan</i> —Fast algorithm form of the calculation of positive and negative $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ —convolutions	78
<i>S. M. Melkian</i> —On some properties of classes of pseudonumbers	83
<i>M. G. Grigorian</i> —On convergence of spheric partial sums in metric L_p , $0 < p < 1$ of Fourier multiple series of integrable functions	87
<i>G. G. Gevorgian</i> —On sets of uniqueness for Haar and Walsh systems	91
<i>M. A. Mnutsakanian</i> —On the area of a region on the evolving surface	97

MECHANICS

<i>E. CH. Grigorian</i> —On some periodic problem of the elastic plane with the infinite piece-homogeneous elastic inclusion	103
--	-----

ELECTROMECHANICS

<i>A. G. Jostfian, G. L. Arechan</i> —Fundamentals of theory of the alternating current asynchronous machines	109
---	-----

CHEMICAL PHYSICS

<i>O. K. Davtjan</i> —On some specific peculiarity of the internal-combustion engines	116
---	-----

GENETICA

<i>A. M. Aghadjanian</i> — S -allele action in reciprocal crossing of intraspecific hybrids <i>Lycopersicon hirsutum</i>	123
--	-----

Техн. редактор АЗИЗБЕКЯН Л. А.

Сдано в набор 18.9.1981. Подписано к печати 23.11.1981. ВФ 11024
 Бумага № 1, 70×108¹/₁₆. Плоскопечать. Печ. лист. 4,0. Усл. печ. лист. 5,6.
 Учет.-изд. 4,15. Тираж 500. Заказ 725. Издат. 5550.
 375019, Ереван, Барекамутян, 24-г. II эт., 1 к.

УДК 51.01.518.5

МАТЕМАТИКА

О. С. Асатрян

Две теоремы о bT сводимости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 27/II 1981)

В данной статье изучается тьюринговая сводимость (T) в классе всех рекурсивно-перечислимых (р. п.) множеств. Вводятся понятия ограничено-тьюринговой (bT) сводимости и bT -креативности и доказывается, что в этом классе T - и bT -сводимости, а также T - и bT -креативности совпадают. Все хорошо известные понятия, используемые в изложении, можно найти в ⁽¹⁾.

Определение. Если α и β р. п. множества, то α bT сводится к β , если существует о. р. ф. h такая, что

$$1) \quad \forall x [x \in \bar{\alpha} \Leftrightarrow \forall y [y \in W_{h(x)} \Rightarrow Dy \cap \bar{\beta} \neq \emptyset]] \quad (1)$$

и

$$2) \quad \forall x [|W_{h(x)}| < \infty],$$

где $|\alpha|$ — мощность множества α .

Теорема 1. Если α и β р. п. множества, то $\alpha \leq_T \beta \Leftrightarrow \alpha \leq_{bT} \beta$.

Доказательство. В одну сторону очевидно. Предположим, что α, β р. п. множества $\alpha \leq'_T \beta$, и покажем, что $\alpha \leq_{bT} \beta$. Известно ⁽¹⁾, что, если $\alpha \leq'_T \beta$, то α и β находятся в соотношении (1) с функцией f вместо h .

Пусть $W_{f(x)}^n$, α^n и β^n конечные подмножества $W_{f(x)}$, α и β соответственно, перечисленные за n шагов некоторых перечислений и такие, что $W_{f(x)} = \bigcup_n W_{f(x)}^n$, $\alpha = \bigcup_n \alpha^n$ и $\beta = \bigcup_n \beta^n$. Для каждого $x \in N$ по шагам n будем строить последовательность конечных множеств $\gamma_x^0 \subseteq \gamma_x^1 \subseteq \dots \subseteq \gamma_x^n \subseteq \dots$ такую, что $\forall x \forall n [\gamma_x^n \subseteq W_{f(x)}]$ и о. р. ф. h , определенная как $W_{h(x)} = \bigcup_n \gamma_x^n$, обладает тем свойством, что $\forall x [|W_{h(x)}| < \infty]$ и $\alpha \leq_h \beta$. Это и будет означать, что $\alpha \leq_{bT} \beta$.

Шаг 0. Для всех x и $n \leq x$ положим $\gamma_x^n = \emptyset$.

Шаг $n+1$. Предположим, что γ_x^n , $W_{f(x)}^n$, α^n , β^n определены для всех x , $x \leq n+1$. Выпишем следующие условия:

- 1) $x \in \alpha^{n+1}$;
- 2) $\exists u [u \in \gamma_x^n \& D_u \cap \beta^{n+1} = \emptyset]$

и для каждого $x \leq n+1$, проверяя выполнимость условий 1.2, будем строить γ_x^{n+1} описанной ниже инструкцией.

Инструкция. Пусть x фиксированное число и $x \leq n+1$. Проверяем, выполняется ли 1) для x . Если да, то определим $\gamma_x^{n+1} = \gamma_x^n$ и переходим к шагу $n+2$, в противном случае проверяем выполнимость условия 2).

Если 2) выполняется для x , то определим $\gamma_x^{n+1} = \gamma_x^n$ и перейдем к шагу $n+2$. В противном случае пусть u_0 наименьшее число из $W_{f(x)}^{n+1} \setminus \gamma_x^n$; положим $\gamma_x^{n+1} = \gamma_x^n \cup \{u_0\}$ и перейдем к шагу $n+2$.

Описание инструкции закончено.

Определим $\gamma_x = \bigcup \gamma_x^n$. Так как в γ_x^n добавляются числа только из $W_{f(x)}^n$, то для всех $x \in N$ $\gamma_x \subseteq W_{f(x)}$. Очевидно также, что постовский номер γ_x находится некоторой о. р. ф. $h(x)$, т. е. $\forall x [W_{h(x)} = \gamma_x]$.

Покажем, что $\forall x [|W_{h(x)}| < \infty] \& \alpha \leq_h \beta$, т. е. $\alpha \leq_h \beta$.

Пусть $x \in \alpha$ и n_0 наименьший шаг такой, что $x \in \alpha^{n_0}$. Тогда в силу условия 1) инструкции $\forall n [n_0 < n \Rightarrow \gamma_x^n = \gamma_x^{n_0}]$. Поэтому $|W_{h(x)}| < \infty$. С другой стороны

$$x \in \alpha \Rightarrow \forall u [u \in W_{h(x)} \Rightarrow D_u \cap \beta \neq \emptyset].$$

Так как $W_{h(x)} \subset W_{f(x)}$, то верно и

$$x \in \alpha \Rightarrow \forall u [u \in W_{h(x)} \Rightarrow D_u \cap \beta \neq \emptyset].$$

Пусть теперь $x \in \bar{\alpha}$; тогда из того, что $\alpha \leq_h' \beta$, имеем

$$x \in \bar{\alpha} \Rightarrow \exists u [u \in W_{f(x)} \& D_u \cap \beta = \emptyset].$$

Поэтому существует единственный шаг n_0 такой, что $W_{f(x)}^{n_0} \setminus \gamma_x^{n_0-1} \neq \emptyset$ и для $u_0 = \min\{W_{f(x)}^{n_0} \setminus \gamma_x^{n_0-1}\}$ выполнены следующие два условия:

- а) $D_{u_0} \cap \beta = \emptyset$;
- б) $\forall u [u \in \gamma_x^{n_0-1} \Rightarrow D_u \cap (N \setminus \beta^{n_0-1}) \neq \emptyset]$.

В существовании такого шага легко убедиться. Тогда на конце шага n_0 $\gamma_x^{n_0} = \gamma_x^{n_0-1} \cup \{u_0\}$ и верно следующее утверждение:

$$\forall n [n_0 \leq n \Rightarrow \gamma_x^n = \gamma_x^{n_0} \& u_0 \in \gamma_x^n \& D_{u_0} \cap \beta^n = \emptyset].$$

Поэтому

$$x \in \bar{\alpha} \Rightarrow \exists u [u \in W_{h(x)} \& D_u \cap \beta = \emptyset] \& |W_{h(x)}| < \infty.$$

Теорема доказана.

Замечание. Из построения множеств γ_x^n видно, что $x \in \bar{a} \Rightarrow$ существует единственное число u_0 такое, что $u_0 \in W_{h(x)} \& D_{u_0} \cap \beta = \emptyset$.

Теорема 2. Р. п. множество β T -креативно тогда и только тогда, когда β bT -креативно.

Доказательство. В одну сторону очевидно. Покажем, что если β T -креативно, то β bT -креативно. По определению р. п. β T -креативно, если существует о. р. ф. g такая, что

$$\forall u [u \in W_{g(x)} \Rightarrow D_u \not\subset \bar{\beta}] \Leftrightarrow \exists u [u \in W_{g(x)} \& D_u \subset W_x]. \quad (3)$$

Легко убедиться, что для любого $x \in N$ верно одно и только одно из следующих двух утверждений:

$$\exists u [u \in W_{g(x)} \& D_u \subset W_x]; \quad (a)$$

$$\exists u [u \in W_{g(x)} \& D_u \cap \beta = \emptyset]. \quad (b)$$

Заметим также, что

$$\forall x [W_{g(x)} \neq \emptyset]. \quad (4)$$

так как в противном случае (3) превращается в противоречивое утверждение.

Доказательство теоремы будет проводиться по шагам. Пусть β^n , W_x^n и $W_{g(x)}^n$ конечные подмножества, перечисленные к шагу n в соответствующих множествах β , W_x и $W_{g(x)}$. На каждом шаге n для всех x , $(x \leq n)$ будут построены конечные множества γ_x^n такие, что для всех x , $n \in N$ $\gamma_x^n \subseteq \gamma_x^{n+1}$ и функция $h(x)$, определенная как $W_{h(x)} = \bigcup_n \gamma_x^n$, будет функцией bT -креативности β . А именно $h(x)$ удовлетворяет (3) вместо g и $\forall x [|W_{h(x)}| < \infty]$.

Для всех $n \in N$ обозначим следующие семейства предикатов:

$$\exists u [u \in \gamma_x^n \& D_u \subset W_x^{n+1}] \quad (a_n);$$

$$\exists u [u \in \gamma_x^n \& D_u \subset N \setminus \beta^{n+1}] \quad (b_n).$$

Шаг 0. Для всех $x \in N$ поместим в γ_x^0 первый элемент, вычисленный в $W_{g(x)}$. По замечанию (4) $\forall x [\gamma_x^0 \neq \emptyset]$.

Шаг $n+1$. Пусть γ_x^n , β^{n+1} , W_x^{n+1} и $W_{g(x)}^{n+1}$ определены к шагу $n+1$. Для каждого $x \leq n+1$ определим γ_x^{n+1} , выполняя предписания следующей инструкции.

Проверяем, истинен ли предикат (a_n) . Если да, то $\gamma_x^{n+1} = \gamma_x^n$, переходим к шагу $n+2$, в противном случае проверяем, истинен ли предикат (b_n) . Если да, то $\gamma_x^{n+1} = \gamma_x^n$, переходим к шагу $n+2$, в противном случае находим наименьшее число u_0 из $W_{g(x)}^{n+1} \setminus \gamma_x^n$, если такое существует, определяем $\gamma_x^{n+1} = \gamma_x^n \cup \{u_0\}$ (если не найдется u_0 , то $\gamma_x^{n+1} = \gamma_x^n$) и переходим к шагу $n+2$. Описание инструкции окончено.

Определим о. р. ф. $h(x)$ как

$$W_{h(x)} = \bigcup_n \gamma_x^n. \quad (5)$$

Пусть A и B обозначают левую и, соответственно, правую части эквивалентности (3). Сначала мы докажем, что $A \& B$ истинна с функцией h вместо g и $|W_{h(x)}| < \infty$ для x , удовлетворяющих (a). А затем для x , удовлетворяющих (b), покажем, что $\sim A \& \sim B$ истинна с функцией h вместо g и $|W_{h(x)}| < \infty$. Тем самым в силу замечания об (a) и (b) будет установлена эквивалентность (3) для функции h такой, что $\forall x[|W_{h(x)}| < \infty]$. Заметим, что $\forall x \forall n[\gamma_x^n \subset W_{g(x)}]$. Это очевидно.

Пусть x удовлетворяет (a). Тогда множество

$$I \Leftarrow \{u / u \in W_{g(x)} \& D_u \subset W_x\} \neq \emptyset.$$

Покажем, что хотя бы одно число $u_0 \in I$ будет помещено в γ_x^n на некотором шаге n .

Предположим противное, т. е.

$$\forall n \forall u [u \in I \Rightarrow u \notin \gamma_x^n].$$

Так как $\forall n[\gamma_x^n \neq \emptyset]$, то из того, что

$$\forall n \forall u [u \in \gamma_x^n \Rightarrow D_u \not\subset W_x],$$

следует

$$\forall n \forall u [u \in \gamma_x^n \Rightarrow D_u \not\subset W_x^{n+1}].$$

Тогда для всех n (a_n) не выполняется для x и предписания инструкции обязывать переходить к проверке условия (b_n) на каждом шаге n . Так как x удовлетворяет (a), то из (3) имеем

$$\forall u [u \in W_{g(x)} \Rightarrow D_u \cap \beta \neq \emptyset].$$

Поэтому

$$\forall n \forall u [|u \in \gamma_x^n \& D_u \subset N \setminus \beta^{n+1}| \Rightarrow \exists n' [n' > n \& D_u \not\subset N \setminus \beta^{n'+1}],$$

т. е. на бесконечном числе шагов $n' + 1$ x не удовлетворяет также условиям ($b_{n'}$). Поэтому согласно инструкции мы вынуждены добавлять новые числа u' из $W_{g(x)}^{n'+1}$ в $\gamma_x^{n'+1}$, не затрагивая чисел из I . Но этого не может быть в силу выбора чисел $u' = \min \{W_{g(x)}^{n'+1} \setminus \gamma_x^{n'}\}$. Получили противоречие. Поэтому хотя бы одно число из I будет помещено в γ_x .

Пусть $n_0 \in I$ первое число, помещенное в $\gamma_{x_0}^{n_0}$, где n_0 номер наименьшего такого шага. Очевидно из инструкции, что

$$\forall n [n_0 \leq n \Rightarrow \gamma_x^n = \gamma_{x_0}^{n_0} \& u_0 \in \gamma_x^n \& D_{u_0} \subset W_x^n].$$

Поэтому $|W_{h(x)}| < \infty \& \exists u [u \in W_{h(x)} \& D_u \subset W_x]$,

и ясно, что в $W_{h(x)}$ попадает только одно число u_0 из I .

Покажем теперь, что

$$\forall u[u \in W_{h(x)} \Rightarrow D_u \cap \beta \neq \emptyset].$$

Предположим противное, т. е. $\exists u[u \in W_{h(x)} \& D_u \cap \beta = \emptyset]$. Так как $W_{h(x)} \subset W_{g(x)}$, то $\exists u[u \in W_{g(x)} \& D_u \cap \beta = \emptyset]$, тогда из (3) имеем: $\forall u[u \in W_{g(x)} \Rightarrow D_u \not\subset W_x]$. Но это противоречит выбору x в этой части доказательства. Таким образом, нами доказано:

Если x удовлетворяет (а), то $|W_{h(x)}| < \infty$ и $A \& B$ истинна для h .

Пусть x удовлетворяет (б). Тогда для всех n условия (a_n) не выполняются, так как в противном случае x удовлетворяет (а), чего не может быть в силу замечания об (а) и (б). Поэтому на каждом шаге n мы переходим к проверке условия (b_n) .

Пусть $C = \{u/u \in W_{g(x)} \& D_u \cap \beta = \emptyset\}$. Ясно, что C непустое множество. Поэтому существует число n_0 такое, что для некоторого $u_0 \in C$ выполнены следующие условия:

$$u_0 = \min \{ W_{g(x)}^{n_0+1} \setminus \gamma_x^{n_0} \} \& \forall u[u \in \gamma_x^{n_0} \Rightarrow D_u \not\subset N \setminus \beta^{n_0+1}].$$

Тогда на шаге n_0+1 и (b_{n_0}) не выполняется. Поэтому в конце этого шага u_0 будет помещен в $\gamma_x^{n_0+1}$ и очевидно, что

$$\forall n[n_0+1 \leq n \Rightarrow \gamma_x^n = \gamma_x^{n_0+1} \& u_0 \in \gamma_x^n \& D_{u_0} \subset N \setminus \beta^{n+1}].$$

Это означает, что $|W_{h(x)}| < \infty$ и $\exists u[u \in W_{h(x)} \& D_u \subset \bar{\beta}]$. Покажем теперь, что $\forall u[u \in W_{h(x)} \Rightarrow D_u \not\subset W_x]$. Опять предположим противное, т. е. $\exists u[u \in W_{h(x)} \& D_u \subset W_x]$. Так как $W_{h(x)} \subset W_{g(x)}$, то $\exists u[u \in W_{g(x)} \& D_u \subset W_x]$. Учитывая (3), получаем $\forall u[u \in W_{g(x)} \Rightarrow D_u \not\subset \bar{\beta}]$, а это противоречит выбору числа x , удовлетворяющему (б). Наконец мы получили $|W_{h(x)}| < \infty$ и истинность $\sim A \& \sim B$ для h .

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. $h(x)$ обладает тем свойством, что для удовлетворения (а) или (б) в $W_{h(x)}$ существует единственное число u_0 .

Вычислительный центр

Академии наук Армянской ССР

2. Ս. ԱՍԱՏՐՅԱՆ

Նրկու բեռեմ սահմանափակ թյուրինգյան բերելիության մասին

Ալգորիթմիկ բերելիություններից ամենաբնականը և ամենուրեղհանուրը թյուրինգյան բերելիությունն է: Այս հոգվածում մտցվում է բնականորեն սահմանվող սահմանափակ-թյուրինգյան բերելիության գաղափարը ոեկուրսիվ թվարկելի բազմությունների դասի համար:

Առաջին թեորեմը ապացուցում է, որ նշված դասում թյուրինգյան և սահմանափակ թյուրինգյան բերելիությունները համընկնում են:

Բացի դրանից մտցված և ուսումնասիրված է նաև բազմության սահ-

մանափակ-թյուրինգյան կրեատիվության գաղափարը Երկրորդ թեորեմը ապացուցում է, որ այս գաղափարը նույնպես համընկնում է թյուրինգյան կրեատիվության գաղափարի հետ վերոհիշյալ դասում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Х. Роджерс, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. Мир, М., 1972.

УДК 51.01 : 518.5

МАТЕМАТИКА

М. Ю. Ходжаянц

e-степени, *T*-степени и аксиоматические теории

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 27/II 1981)

Настоящая работа посвящена изучению связей между *e*-степенями, степенями неразрешимости и аксиоматическими теориями. В ней приводятся краткие доказательства двух следующих теорем:

1. *Внутри каждой T-степени $\geq 0^{(2)}$ содержится некоторая e-степень.*

2. *e-степень тотальна (т. е. содержит график некоторой всюду определенной функции) тогда и только тогда, когда она содержит некоторую теорию.*

Мы будем пользоваться терминологией и понятиями, введенными в (1-3).

Пусть Φ — нумерация операторов перечисления (1). Через A^e обозначим множество $\{\langle x, n \rangle \mid x \in \Phi_n[A]\}$. Очевидно, что

$$\forall B (A^e \leq_T B \Leftrightarrow \forall n (\Phi_n[A] \leq_T B)).$$

Через Q_s обозначим множество $\{u \mid \langle k, n \rangle \in W_n\}$, где $s = \langle k, n \rangle$.

Теорема 1. $\forall C (\emptyset^{(2)} \leq_T C \supset \exists A (d_e(A) \subseteq d_T(C)))$.

Доказательство. Пусть $\emptyset^{(2)} \leq_T C$. Нам достаточно построить множество A , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $A \equiv_T C$;
- 2) $\forall n (A \leq_e \Phi_n[A] \supset A \leq_T \Phi_n[A])$;
- 3) $A^e \leq_T A$.

Построение множества A будет производиться по шагам. Параллельно мы будем строить вспомогательное множество B такое, что $B \subseteq \bar{A}$. Для любого шага s множества A_s и B_s , полученные на этом шаге, должны быть рекурсивными и удовлетворять условиям: $A_{s-1} \subseteq A_s$ и $B_{s-1} \subseteq B_s$.

Шаг 0. $A_0 = B_0 = \emptyset$. Переходим к шагу 1.

Шаг $s+1$. Пусть $s = \langle k, n \rangle$. Через $a_s^{(i)}$ обозначим i -ое по возрастанию число, не принадлежащее $A_s \cup B_s$.

Подшаг 1. Проверяем, выполняется ли условие

$$\exists m \exists l (m \in A_s \& D_l \cap B_s = \emptyset \& m \in \Phi_k \Phi_n[D_l] \& m \in D_l). \quad (1)$$

Если существуют числа, удовлетворяющие этому условию, то мы можем перечислить их каким-либо заранее фиксированным способом. Пусть $\langle m_0, l_0 \rangle$ — первая пара при этом перечислении.

Тогда, если $m_0 = a_s^{(0)}$, то $A_s^{(3)} = A_s \cup D_{l_0} \cup \{a_s^{(1)}\}$, $B_s^{(3)} = B_s \cup \{a_s^{(0)}\}$.

Если $m_0 = a_s^{(1)}$, то $A_s^{(3)} = A_s \cup D_{l_0} \cup \{a_s^{(0)}\}$, $B_s^{(3)} = B_s \cup \{a_s^{(1)}\}$.

Если $m_0 \neq a_s^{(0)}, a_s^{(1)}$, то $A_s^{(3)} = A_s \cup D_{l_0} \cup \{a_s^{(0)}, a_s^{(1)}\}$, $B_s^{(3)} = B_s \cup \{m_0\}$.

Переходим к подшагу 4.

Допустим, что чисел, удовлетворяющих условию (1), не существует, т. е.

$$\forall m \forall l (m \in A_s \& D_l \cap B_s = \emptyset \& m \in \Phi_k \Phi_n[D_l] \supset m \in D_l). \quad (2)$$

Тогда

$$A_s^{(1)} = A_s, \quad B_s^{(1)} = B_s \cup \{a_s^{(0)}, a_s^{(1)}\}.$$

Заметим, что (2) верно и для $A_s^{(1)}$ и $B_s^{(1)}$. Переходим к подшагу 2.

Под шаг 2. Проверяем, выполняется ли условие

$$\exists p \forall t (D_p \cap A_s^{(1)} = \emptyset \& (t \in A_s^{(1)} \supset \forall u (t \in \Phi_k \Phi_n[D_u] \supset D_u \cap (D_p \cup B_s^{(1)}) \neq \emptyset))). \quad (3)$$

Пусть p_0 — наименьшее число, удовлетворяющее условию (3).

Берем $A_s^{(3)} = A_s^{(1)} \cup \{a_s^{(p_0+3)}\}$, $B_s^{(3)} = B_s^{(1)} \cup D_{p_0} \cup \{a_s^{(2)}, \dots, a_s^{(p_0+2)}\}$

и переходим к подшагу 4.

Допустим, что такого числа не существует, т. е.

$$\forall p \exists t (D_p \cap A_s^{(1)} = \emptyset \supset (t \in A_s^{(1)} \& \exists u (t \in \Phi_k \Phi_n[D_u] \& D_u \cap (D_p \cup B_s^{(1)}) = \emptyset))). \quad (4)$$

В этом случае $A_s^{(2)} = A_s^{(1)} \cup \{a_s^{(2)}\}$, $B_s^{(2)} = B_s^{(1)}$. Переходим к подшагу 3.

Заметим, что (2) и (4) выполняются и для $A_s^{(2)}$ и $B_s^{(2)}$.

Под шаг 3. Некоторым фиксированным способом выбираем рекурсивную последовательность $\{\langle z_i, u_i \rangle\}$ со следующими свойствами:

- 1) $z_i \in \Phi_k \Phi_n[D_{u_i}]$;
- 2) $z_i \notin A_s^{(2)}$;
- 3) $D_{u_i} \cap B_s^{(2)} = \emptyset$;
- 4) $z_i \in D_{u_i}$;
- 5) $\max D_{u_i} < \min D_{u_{i+1}}$.

Существование такой последовательности следует из (2) и (4).

$$A_s^{(3)} = A_s^{(2)} \cup (\bigcup_i D_{u_i} - \{z_0, z_1, \dots\}).$$

$$B_s^{(3)} = N - A_s^{(2)} \cup (\bigcup_i D_{u_i}).$$

Переходим к подшагу 4.

Под шаг 4. Пусть $b_s^{(i)}$ — i -ое по возрастанию число, не принадлежащее $A_s^{(3)} \cup B_s^{(3)}$.

Рассмотрим множество Q_s . Пусть Q_s бесконечно. Начинаем перечислять числа, удовлетворяющие условию $\exists l(l \in Q_s \& D_l \cap B_s^{(3)} = \emptyset)$. Пусть l_0 — первое число в этом пересчете. Положим

$$A_s^{(4)} = A_s^{(3)} \cup D_{l_0} \cup \{b_s^{(0)}, b_s^{(1)}\}, \quad B_s^{(4)} = B_s^{(3)}.$$

Переходим к подшагу 5.

Если таких чисел не существует, то берем $A_s^{(4)} = A_s^{(3)} \cup \{b_s^{(0)}\}$, $B_s^{(4)} = B_s^{(3)} \cup \{b_s^{(1)}\}$ и переходим к подшагу 5.

Допустим, что Q_s конечно и $|Q_s| = t$. В этом случае берем

$$A_s^{(4)} = A_s^{(3)} \cup \{b_s^{(t+2)}\}, \quad B_s^{(4)} = B_s^{(3)} \cup \{b_s^{(0)}, b_s^{(1)}, \dots, b_s^{(t+1)}\}$$

и переходим к подшагу 5.

Подшаг 5. Пусть c — наименьшее число, не принадлежащее $A_s^{(4)} \cup B_s^{(4)}$.

Если $s \in C$, то $A_{s+1} = A_s^{(4)} \cup \{c\}$, $B_{s+1} = B_s^{(4)}$.

Если $s \notin C$, то $A_{s+1} = A_s^{(4)}$, $B_{s+1} = B_s^{(4)} \cup \{c\}$.

Переходим к шагу $s+2$.

Возьмем $A = \bigcup_s A_s$ и покажем, что оно удовлетворяет требуемым свойствам. Так как все условия, проверяемые при построении, имеют степень $\leq_T \emptyset^{(2)}$, а $\emptyset^{(2)} \leq_T C$, то, используя C , мы сможем породить A_s и B_s для любого s . Поскольку любое число на каком-либо шаге попадает либо в A_s , либо в B_s , то мы можем таким образом распознать, принадлежит ли это число множеству A или не принадлежит. Следовательно, $A \leq_T C$.

С другой стороны, вся информация о построении множества A закодирована в самом множестве A так, что, задав конечное число вопросов о принадлежности элементов этому множеству, мы сможем проследить это построение до любого шага s . Тем самым, во-первых, мы сможем распознать принадлежность любого числа множеству C , т. е. разрешить C относительно A , и, во-вторых, получив всю информацию об интересующем нас операторе перечисления, сможем разрешить множество A^c . Таким образом, $C \equiv_T A$ и $A^c \leq_T A$. Пункт 2 доказывается так же, как и в теореме 1 из (4). Теорема доказана.

В (4) была введена eT -сводимость и изучались некоторые свойства eT -степеней. Напомним, что

$$A \leq_{eT} B \Leftrightarrow A \leq_e B \& A \leq_T B.$$

Следствие 1. Существует несчетное множество e -степеней, состоящих из одной eT -степени.

Для доказательства следующей теоремы нам понадобятся некоторые свойства тотальных e -степеней, а именно:

(1) e -степень a является тотальной тогда и только тогда, когда существует множество $A \in a$ такое, что $\bar{A} \leq_e A$.

(2) Пусть a — тотальная e -степень и множество A обладает свойствами из пункта (1). Тогда $\forall B (B \in a \Leftrightarrow B$ рекурсивно перечислимо

относительно $A \& A \leq_e B$). В дальнейшем при рассмотрении теорий мы будем отождествлять формулы языков этих теорий с их номерами, как это делается, например, в (1). Для всякого числа x через $\neg x$ обозначим номер отрицания формулы с номером x .

Теорема 2. *e -степень a является тотальной тогда и только тогда, когда в ней содержится некоторая полная теория.*

Доказательство. **Достаточность.** Пусть $T \in a$ — полная теория. Тогда $x \in \bar{T} \Leftrightarrow \neg x \in T$, т. е. $\bar{T} \leq_e T$. Отсюда, согласно (1), a является тотальной.

Необходимость. Пусть a — тотальная e -степень, $A \in a$ и $\bar{A} \leq_e A$. Мы построим полную теорию T , рекурсивно перечислимую относительно A и такую, что $A \leq_e T$. Таким образом, T будет принадлежать a согласно (2).

Рассмотрим следующий язык L :

$0, 1, \dots, n, \dots$ — символы констант;

$x, x_1, \dots$ — предметные переменные;

P — одноместный предикатный символ;

$\neg, \&, \vee$ — логические связки;

$\forall, \exists$ — кванторы.

Определим модель $\mathfrak{M}$ языка L следующим образом.

$M = \{m_0, m_1\}$ — универсум модели.

ν — интерпретирующее отображение, ставящее в соответствие:

каждому константному символу n — $\begin{cases} m_0, & \text{если } n \in A \\ m_1, & \text{если } n \notin A \end{cases}$

предикатному символу P — отношение P' на множестве M такое, что $P' = \{m_0\}$.

Термы, формулы языка L , а также истинность формул языка L в модели $\mathfrak{M}$ определяются обычным образом.

Возьмем в качестве T множество формул языка L , истинных в модели $\mathfrak{M}$. Очевидно, что T рекурсивно перечислимо относительно A и является полной теорией. А так как $n \in A \Leftrightarrow P(n) \in T$ для всякого n , то и $A \leq_e T$.

Теорема доказана.

Вычислительный центр

Академии наук Армянской ССР

и Ереванского государственного университета

Մ. ՅԱՆ. ԽՈՋԱՅԱՆԻ

e -աստիճաններ, T -աստիճաններ և աֆսիոմատիկ տեսություններ

Հոդվածը նվիրված է թվելիությունների (e -աստիճանների), անլուծելիությունների (T -աստիճանների) և աֆսիոմատիկ տեսությունների միջև եղած հարաբերությունների հետազոտմանը:

Ստացված են հետևյալ արդյունքները.

1. $\emptyset^{(2)}$ -ից բարձր կամայական T -աստիճանը պարունակում է որևէ e -աստիճանի բոլոր բազմությունները:

Այստեղից հետևում է, որ գոյություն ունի այնպիսի e -աստիճանների անհաշվելի բազմություն, որոնք կազմված են մեկական eT -աստիճաններից (eT —հանգեցումը ներմուծված է $(^4)$ -ում):

2. Կամայական e -աստիճանը տոտալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն պարունակում է որևէ լրիվ աբսիմատիկ տեսություն:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Х. Роджерс, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., Мир, 1972. ² Е. А. Поляков, М. Г. Розинас, Теория алгоритмов, Иваново, 1976. ³ Г. Кейслер, Ч. Ч. Чэн, Теория моделей, Мир, М., 1977. ⁴ М. Ю. Ходжаянц, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 15, № 3 (1980).

УДК 519.6

МАТЕМАТИКА

А. К. Матевосян

Быстрые алгоритмы вычисления положительно и отрицательно обернутых $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ -сверток

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р.Р. Варшамовым 24/III 1981)

1. Пусть $a = [a_0, a_1, \dots, a_{N-1}]^T$ и $b = [b_0, b_1, \dots, b_{N-1}]^T$ есть два N -мерных, $N = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$, комплексных вектора, а $i \ominus_j^m$ — поразрядное вычитание по модулю чисел i и j в системе счисления с основаниями $m_1, m_2, \dots, m_n$ ⁽¹⁾.

Определение 1. Положительно обернутой $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ -сверткой векторов a и b назовем такой вектор $c = [c_0, c_1, \dots, c_{N-1}]^T$, что

$$c_l = \sum_{j=0}^l a_j \bar{b}_{l \ominus_j^m} + \sum_{j=l+1}^{N-1} a_j \bar{b}_{l \ominus_j^m}. \quad (1)$$

Замечание 1. Понятие положительно обернутой $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ -свертки совпадает:

а) при $n=1$ с циклической положительно обернутой сверткой, введенной А. Ахо, Дж. Хопкрофтом, Дж. Ульманом ⁽²⁾;

б) при $n>1$ с m -сверткой, введенной в работе ⁽¹⁾ А. М. Трахтманом и В. А. Трахтманом;

в) при $n=2$ m -свертка переходит в диадную свертку ⁽¹⁾.

Определение 2. Отрицательно обернутой $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ -сверткой векторов a и b назовем такой вектор $d = [d_0, d_1, \dots, d_{N-1}]^T$, что

$$d_l = \sum_{j=0}^l a_j \bar{b}_{l \ominus_j^m} - \sum_{j=l+1}^{N-1} a_j \bar{b}_{l \ominus_j^m}. \quad (2)$$

Замечание 2. Понятие отрицательно обернутой $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ -свертки при $n=1$ совпадает с циклической отрицательно обернутой сверткой, введенной в работе ⁽²⁾ А. Ахо, Дж. Хопкрофтом и Дж. Ульманом.

Из задач прикладного характера ^(1,3,4) возникает задача постро-

ения алгоритмов вычисления $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ -сверток, требующих выполнения существенно меньшего числа операций по сравнению с общепринятым алгоритмом умножения вектора на матрицу, требующим N^2 операций умножения и $N(N-1)$ операций сложения.

В работах ^(2,5,6), ⁽²⁾ и ⁽¹⁾ построены алгоритмы вычисления соответственно циклической, отрицательно обернутой циклической и m -сверток за число операций $\ll N^2$. Большинство указанных быстрых алгоритмов базируются на методе быстрого преобразования Фурье (БПФ) ⁽⁷⁾ и его обобщении—быстром преобразовании по системам Виленкина—Крестенсона (БПВК) ⁽¹⁾. Отметим также, что единственным оптимальным алгоритмом по числу операций умножения является алгоритм вычисления диадной свертки, основанный на быстром преобразовании Уолша (БПУ) ⁽¹⁾ и требующий N операций умножения и $3N \log_2 N$ операций сложения.

В настоящей работе доказана теорема о связи между положительно и отрицательно обернутыми $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ -свертками, из которой, в частности, вытекает теорема, доказанная А. Ахо, Дж. Хопкрофтом и Дж. Ульманом (⁽²⁾, стр. 289); предлагается единый подход к рекуррентному построению быстрых алгоритмов вычисления положительно и отрицательно обернутых $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ -сверток, превосходящих по скорости известные алгоритмы; найдено необходимое и достаточное условие существования алгоритмов вычисления $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ -сверток. Построен алгоритм вычисления циклической положительно обернутой свертки векторов длины $N=2^n$, превосходящий по скорости выполнения почти вдвое алгоритм, приведенный в работе ⁽²⁾.

Перейдем к изложению результатов настоящей работы.

2. Обозначим через V оператор, ставящий в соответствие вектору a с компонентами a_k , $k=0, 1, \dots, N-1$, $N=m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$, вектор $V[a]$ с компонентами $a_k \cdot v_j^{k_n-j}$, $k=0, 1, \dots, N-1$, если $m_1 \dots m_{j-1} \leq k \leq m_1 \dots m_j - 1$, где k_j —разрядные коэффициенты числа k в системе счисления с основаниями $m_1, m_2, \dots, m_n$, а $v_j = \exp(-i\pi/m_j)$.

Теорема 1. Пусть вектор z есть положительно (отрицательно) обернутая $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ -свертка x и y , тогда вектор $V[z]$ есть отрицательно (положительно) обернутая $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ -свертка векторов $V[x]$ и $\overline{V[y]}$.

Из теоремы 1 как частный случай, при $n=1$, вытекает теорема, 7.2 ⁽²⁾.

Следствие 1. Пусть построен алгоритм вычисления положительно (отрицательно) обернутой $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ -свертки с характеристиками D_0 (число операций умножения) и D_1 (число операций сложения), тогда можно построить алгоритм вычисления отрицательно (положительно) обернутой $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ -свертки с характеристиками $D_0+3(N-1)$ и D_1 .

Анализ всех известных быстрых алгоритмов вычисления сверток показывает, что они имеют следующую структуру:

$$\left. \begin{array}{l}
\text{этап 1—вычисление векторов:} \\
A = Z_1 \cdot a^T, \quad B = Z_2 \cdot b^T, \\
\text{этап 2—поэлементное умножение} \\
\text{векторов } A \text{ и } B: \\
C_i = A_i \cdot B_i, \\
\text{этап 3—вычисление искомого вектора } c: \\
c = Z_3 \cdot C^T.
\end{array} \right\} \quad (3)$$

Пусть $Z_i = \{z_{kj}^i\}$, $i=1, 2$, есть матрицы порядка $p \times N$, а $Z_3 = \{z_{kj}^3\}$ —порядка $N \times p$, I_N —единичная матрица порядка N , $\otimes$ —кронекерово произведение ⁽¹⁾. Возникает вопрос: каким условиям должны удовлетворять матрицы Z_i , чтобы подстановка их в (3) приводила к алгоритму вычисления $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ -свертки?

Теорема 2. Для того чтобы матрицы Z_i приводили к алгоритму вычисления положительно обернутой $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ -свертки, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^p z_{kj}^1 z_{ks}^2 z_{ik}^3 = \begin{cases} 1, & \text{если } i \ominus_j^m = s, \\ 0, & \text{если } i \ominus_j^m \neq s. \end{cases} \quad (4)$$

Пусть матрицы $Z_i(m_k)$, $i=1, 2, 3$, $k=1, 2, \dots, n$, приводят к алгоритмам вычисления циклической положительно обернутой свертки векторов длины m_k с характеристиками $D_0(m_k)$ и $D_1(m_k)$. Обозначим через Z_i , $i=1, 2, 3$, следующие матрицы:

$$\left. \begin{array}{l}
Z_1 = \left[\prod_{i=n-1}^1 I_{p_{n-i+1} \dots p_n} \otimes Z_1(m_{n-i}) \otimes I_{m_1 \dots m_{n-i-1}} \right] \cdot \left[Z_1(m_n) \otimes I_{N/m_n} \right], \\
Z_2 = \left[\prod_{i=n-1}^1 I_{p_{n-i+1} \dots p_n} \otimes Z_2(m_{n-i}) \otimes I_{m_1 \dots m_{n-i-1}} \right] \cdot \left[Z_2(m_n) \otimes I_{N/m_n} \right], \\
Z_3 = \left[Z_3(m_n) \otimes I_{N/m_n} \right] \cdot \left[\prod_{i=1}^{n-1} I_{p_{n-i+1} \dots p_n} \otimes Z_3(m_{n-i}) \otimes I_{m_1 \dots m_{n-i-1}} \right].
\end{array} \right\} \quad (5)$$

Теорема 3. Матрицы Z_i , $i=1, 2, 3$, при подстановке их в (3) приводят к алгоритму вычисления положительно обернутой $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ -свертки с характеристиками $D_0 = \prod_{k=1}^n D_0(m_k)$ и $D_1 =$

$$= \sum_{k=1}^n D_1(m_k) \cdot \left[\prod_{j>k} D_0(m_j) \right] \cdot \left[\prod_{j<k} m_1 \dots m_j \right].$$

Разложение (5) позволяет строить быстрореализуемые на ЭВМ процедуры выполнения алгоритма.

Замечание 3. Если матрицы $Z_i(m_k)$ являются матрицами Фурье порядка m , то алгоритм теоремы 3 совпадает с алгоритмом вычисления m -свертки, приведенным в работе ⁽¹⁾, а разложение (5) задает алгоритм БПВК.

Перейдем к рассмотрению циклической свертки векторов длины N . Если $N = p_1 \cdot p_2 \dots p_n$, где числа p_i попарно взаимно-просты, то алгоритм вычисления положительно обернутой циклической свертки сводится к алгоритму вычисления $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ -свертки, рассмотренному выше. Если $N = p^n$, то, как и в случае $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ -сверток, циклическую свертку векторов длины p^n можно представить в виде комбинации циклических сверток векторов длины p^{n-1} . Пусть построен алгоритм вычисления циклической свертки векторов длины p с характеристиками $D_0(p)$ и $D_1(p)$, а $A(p)$ и $B(p)$ обозначают константы

$$A(p) = D_1(p) + \frac{D_1(p) + p^2 - p}{D_0(p) + (p^2 - 3p)/2} \cdot p,$$

$$B(p) = \frac{D_1(p) + p^2 - p}{D_0(p) + (p^2 - 3p)/2}.$$

Справедлива

Теорема 4. *Существует алгоритм вычисления циклической свертки векторов длины p^n с характеристиками*

$$D_0(p^n) = D_0(p) \cdot \left(D_0(p) + \frac{p^2 - p}{2} \right)^{n-1}$$

и

$$D_1(p^n) = A(p) \cdot \left(D_0(p) + \frac{p^2 - p}{2} \right)^{n-1} - B(p) \cdot p^n.$$

Алгоритм теоремы 4 обобщает на случай произвольного p метод, приведенный в работе (6) для $p=2$. Для оценки построенного алгоритма выберем $p=3$ и воспользуемся алгоритмом С. Винограда (5) с характеристиками $D_0(3)=4$ и $D_1(3)=21$. Тогда алгоритм теоремы 4 будет иметь характеристики $D_0(3^n)=4 \cdot 7^{n-1}$ и $D_1(3^n)=42 \cdot 7^{n-1} - 7 \cdot 3^n$ и будет эффективнее алгоритма, основанного на БПФ для $N \leq 243$ и для $N \leq 2.187$, если свертываемые вектора действительны.

Перейдем к циклической свертке векторов длины $N=2^n$.

Теорема 5. *Существует алгоритм вычисления положительно обернутой циклической свертки векторов длины 2^n с характеристиками $D_0(2^n) = (3n-4) \cdot 2^{n-1} + 3$ и $D_1(2^n) = 3n2^n$.*

Доказательство теоремы 5 основано на том, что положительно обернутая циклическая свертка векторов длины 2^n сводится к одной положительно обернутой свертке векторов длины 2^{n-1} и одной отрицательно обернутой циклической свертке векторов длины 2^{n-1} .

Построенные в работах (2) и (6) алгоритмы вычисления циклической свертки векторов длины 2^n имеют характеристики $D_0(2^n) = 12 + (3n-8)2^n$, $D_1(2^n) = 3n2^n$ и $D_0 = 2 \cdot 3^{n-1}$, $D_1 = 22 \cdot 3^{n-1} - 8 \cdot 2^n$ соответственно, причем второй алгоритм эффективнее первого по числу операций умножения для $N \leq 128$, но требует выполнения несколько большего числа операций сложения. Алгоритм теоремы 5 эффективнее почти вдвое по числу операций умножения первого из вышеу-

казанных алгоритмов при одинаковом числе операций сложения и эффективнее второго алгоритма при $N \geq 64$.

Замечание 4. Все алгоритмы, построенные в настоящей работе, имеют вид (3). Отметим также, что матрицы Z_i алгоритма теоремы 5 совпадают по структуре с матрицами Уолша.

Автор выражает признательность С. С. Агаяну за постановку задачи и помощь при выполнении работы.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Ա. 4. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ

Դրական և բացասական $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ -փաթեթների թափանցանք
արագ ալգորիթմներ

Դիցուք $a = [a_0, a_1, \dots, a_{N-1}]^T$ և $b = [b_0, b_1, \dots, b_{N-1}]^T$ $N = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$, կոմպլեքս վեկտորներ են, $i \ominus_j$ — հանում ըստ կարգի: a և b վեկտորների դրական (բացասական) $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ -փաթեթ կկոչենք $c = [c_0, c_1, \dots, c_{N-1}]^T$ վեկտոր, որի կոորդինատները որոշվում են հետևյալ կերպ:

$$c_i = \sum_{j=0}^i a_j \bar{b}_{i \ominus_j} \pm \sum_{j=i+1}^{N-1} a_j \bar{b}_{i \ominus_j}$$

Աշխատանքում առաջարկվում է դրական և բացասական $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ -փաթեթների հաշվման արագ ալգորիթմների կառուցման ընդհանուր մեթոդ: Կառուցված ալգորիթմները գերազանցում են իրենց արագությամբ փաթեթների հաշվման հայտնի արագ ալգորիթմները: Մասնավորապես, $N = 2^n$ չափանի վեկտորների ցիկլիկ փաթեթի հաշվումը երկու անգամ ավելի արագ է կատարվում, քան ընդունված Ֆուրյեի արագ ձևափոխության վրա հիմնված ալգորիթմով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. М. Трахтман, В. А. Трахтман, Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах, Сов. радио, М., 1975.
- ² А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман, Построение и анализ вычислительных алгоритмов, Мир, М., 1979.
- ³ А. Розенфельд, Распознавание образов и обработка изображений, Мир, М., 1975.
- ⁴ Л. Рабинер, Б. Гоулд, Теория и применение цифровой обработки сигналов, Мир, М., 1978.
- ⁵ S. Winograd, Math. of Computation, v. 30, 141 (1978).
- ⁶ D. Pletassi, EMC—16, № 3 (1971).
- ⁷ J. Cooley, J. Tuckey, Math. Comp, v. 19 (1965).

УДК 51.01 : 517

МАТЕМАТИКА

С. М. Меликян

О некоторых свойствах классов псевдочисел

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 13/IV 1981)

Эта статья является продолжением ⁽¹⁾. Рассматриваются псевдо-числа, т. е. конструктивные псевдосходящиеся последовательности рациональных чисел; исследуются два подхода к классификации псевдочисел в соответствии со скоростью сходимости их приближений. Работа выполнена в рамках конструктивного направления в математике ^(2,3).

Мы будем использовать понятия и обозначения из ⁽³⁻⁶⁾, некоторые из них будут даны ниже в форме, удобной для дальнейшего изложения. Через φ_i , W_i и q_k будем обозначать гёделевские нумерации соответственно частично-рекурсивных функций ⁽⁶⁾, с. 40), рекурсивно-перечислимых множеств ⁽⁶⁾, с. 85) и рациональнозначных частично-рекурсивных функций ⁽⁵⁾, с. 323). Понятие предельно-рекурсивной функции определяется аналогично ⁽⁷⁾, а именно, каждая предельно-рекурсивная функция f определяется соотношением вида

$$\forall x \neg \neg \exists t \forall y [y \geq t \supset g(x, y) = f(x)], \quad (1)$$

где g есть общерекурсивная функция.

На множестве арифметических псевдофункций ^(8,9) определим отношение $\leq$ следующим образом:

$$f \leq g \Leftrightarrow \neg \neg \exists x \forall y [x \leq y \supset f(y) \leq g(y)].$$

Если A — рекурсивно-перечислимое множество, то иногда кратко будем писать A — р. п. Через N будем обозначать множество всех натуральных чисел. Конечное множество, состоящее из элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$, будем обозначать через $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. $f \in \text{ОРФ}$ означает, что f — общерекурсивная функция.

Пусть p — рациональнозначная общерекурсивная функция ⁽⁵⁾, т. е. конструктивная последовательность рациональных чисел. Будем говорить, что p есть F -число ⁽⁴⁾ (соответственно, псевдочисло), если

$$\exists f [f \in \text{ОРФ} \& \forall n \forall x \forall y [x, y \geq f(n) \supset |p(x) - p(y)| < 2^{-n}]]$$

(соответственно $\forall n \neg \neg \exists t \forall x \forall y [x, y \geq t \supset |p(x) - p(y)| < 2^{-n}]$).

Псевдочисло p называется шпекеровым (ср. (4)), если последовательность p монотонна и не является F -числом. Класс всех F -чисел (псевдочисел) обозначим через F (соответственно Π).

Пусть $p \in \Pi$ и $q \in \Pi$. Будем говорить, что p и q эквивалентны, и писать $p \sim q$, если

$$\forall n \neg \neg \exists t \forall x [x \geq t \supset |p(x) - q(x)| < 2^{-n}].$$

Пусть $A \subseteq \Pi$ и $p \in \Pi$. Будем говорить, что p эквивалентно принадлежит A , и писать $p \in A$, если

$$\neg \neg \exists q [q \in A \& q \sim p].$$

Пусть $A \subseteq \Pi$ и $B \subseteq \Pi$. Будем говорить, что A эквивалентно содержится в B , и писать $A \subseteq B$, если

$$\forall p [p \in A \supset \neg \neg \exists q [q \in B \& q \sim p]].$$

Условимся, что если какое-то отношение обозначено некоторым символом, то тот же символ, перечеркнутый вертикальной чертой, означает отрицание этого отношения.

Пусть p — конструктивная последовательность рациональных чисел, A — р. п. множество, а f — неубывающая предельно-рекурсивная функция. Будем говорить, что f есть регулятор сходимости последовательности p на множестве A (и обозначать это суждение через $\text{Reg}(f, A, p)$), если

$$\forall x [x \in A \supset \forall y \forall z [y, z \geq f(x) \supset |p(y) - p(z)| < 2^{-x}]].$$

Пусть f — неубывающая предельно-рекурсивная функция. Классы R_f и R'_f определяются следующим образом:

$$R_f = \{ p | p \in \Pi \& \exists i [|W_i| = \infty \& \text{Reg}(f, W_i, p)] \};$$

$$R'_f = \{ p | p \in \Pi \& \neg \text{Reg}(f, N, p) \}.$$

В (1) обозначение R_f имеет тот же смысл, что R'_f в этой статье. Однако легко видеть, что результаты из (1) проходят и для классов R_f , введенных здесь, причем теорема 4 из (1) проходит в более сильной форме: $S \subseteq R_f$. Указанные соотношения между обозначениями (1) и этой статьи в дальнейшем будут применяться без специальных оговорок.

Лемма 1. Если p — шпекерово число, q — псевдочисло, f — неубывающая предельно-рекурсивная функция и имеют место $p \sim q$ и $q \in R'_f$, то осуществимо шпекерово число u такое, что $u \in R'_f$ и $p \sim u$.

Лемма 2. Если p и q — эквивалентные шпекеровы числа, то осуществима общерекурсивная функция f такая, что

$$\forall m [m \leq f(m) \& q(m) \leq p(f(m))].$$

Лемма 3. Если p и q — эквивалентные шпекеровы числа, а

натуральные числа m и n таковы, что $m \leq n$ и $q(m) \leq p(n)$, то осуществимо t такое, что $t > x$ и $q(t) - q(m) \geq p(n+1) - p(n)$.

Теорема 1. Осуществимы неубывающая предельно-рекурсивная функция f и шпекерово число p такие, что $p \in R_f$ и $p \notin R'_f$.

Метод доказательства. Используя леммы 2 и 3, методом приоритета строятся f , p и M со следующими свойствами:

$$M - \text{р. п. } \& |M| = \infty \& \text{Reg}(f, M, p);$$

$$\forall i [q_i \in \Pi \& q_i \sim p \supset \neg \neg \exists x \neg \text{Reg}(f, \{x\}, q_i)].$$

На основании леммы 1 доказывается, что f и p — требуемые.

Если $A \subset N$, то через $\bar{A}$ обозначим следующее множество:

$$\bar{A} = \{q_i | i \in A\}.$$

Пусть f — неубывающая предельно-рекурсивная функция. Будем говорить, что f — медленно растущая функция, если

$$\forall m \neg \neg \exists n [n \geq m \& f(n) < n].$$

Лемма 4. Пусть A — р. п. множество и $\bar{A} \subset \Pi$, тогда осуществимы медленно растущая функция f и псевдочисло u такие, что $u \in \bar{A}$ и $u \in R_f$.

Метод доказательства. Пусть p_i есть i -ый элемент множества $\bar{A}$. Аналогично ⁽¹⁰⁾ для любых i, j строится $p_{i,j}$ со следующим свойством:

$$\neg \neg \exists t \forall x [x \geq t \supset p_{i,j}(x) = p_{i,j}(t) \& |p_i(x) - p_{i,j}(t)| < 2^{-j}].$$

Затем методом приоритета строятся медленно растущая функция f и псевдочисло u такие, что

$$\forall i [p_i \text{ не эквивалентно } u] \& u \in R_f.$$

Теорема 2. Для любой неубывающей предельно-рекурсивной функции f осуществимы медленно растущая функция g и псевдочисло u такие, что $u \in R_f$ и $u \notin R_g$.

Доказательство. Согласно теореме 3 из ⁽¹⁾ имеем, что R_f перечислимо в Π . Применяя лемму 4, получаем требуемое утверждение.

Лемма 5. Если неубывающая предельно-рекурсивная функция f мажорирует каждую общерекурсивную функцию, то невозможны бесконечное р. п. множество M и медленно растущая функция h такие, что:

$$\forall x [x \in M \supset h(x) \geq f(x)].$$

Доказательство некоторой модификации леммы 5 было сообщено автору Г. Б. Маранджяном.

Пусть p — псевдочисло. Через l_p обозначим минимальный регулятор сходимости псевдочисла p .

Теорема 3. *Осуществимо шпекерово число p такое, что для каждой медленно растущей функции f имеет место $p \notin R_f$.*

Метод доказательства. При помощи лемм 2 и 3 исходя из нумерации q_i строится некоторое шпекерово число p , после чего на основании леммы 1 устанавливается, что оно удовлетворяет следующему условию:

$$\forall i j [q_i \in \Pi \& q_i \sim p \& \varphi_j \in \text{OPF} \supset \varphi_j \leq l_{q_i}].$$

Используя лемму 5 относительно l_p , получаем требуемое утверждение.

Теорема 4 (Существование несравнимых классов псевдочисел) *Осуществимы неубывающие предельно-рекурсивные функции f и g такие, что $R_f \not\subseteq R_g$ и $R_g \not\subseteq R_f$.*

Доказательство. Согласно теореме 3 осуществимо шпекерово число u такое, что для каждой медленно растущей функции h имеем $u \notin R_h$. Пусть $f = l_u$. Согласно теореме 2 осуществимы медленно растущая функция g и псевдочисло v такие, что $v \in R_g$ и $v \notin R_f$. Но тогда $u \notin R_g$, так как g — медленно растущая функция.

Автор выражает благодарность И. Д. Заславскому за внимание к работе.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР

Ս. Մ. ՄԵԼԻԿՅԱՆ

Փսևդոթվերի դասերի որոշ հատկություններ

Այս հոդվածը հանդիսանում է ⁽¹⁾-ի շարունակությունը Դիտարկվում են փսևդոթվերի դասակարգավորման երկու մոտեցումների Ցույց է տրվում, որ այդ երկու մոտեցումները միմյանցից տարրեր են: Ուսումնասիրված է դանդաղ աճող ֆունկցիաների և շագկերյան թվերի հետ կապված որոշ հատկություններ, որոնցից էլ հետևում է փսևդոթվերի անհամեմատելի դասերի գոյությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. М. Меликян, Тезисы IV Всесоюзной конференции по математической логике, Кишинев, 1976. ² А. А. Марков, Тр. Мат. ин-та АН СССР, т. 67 (1962). ³ Н. А. Шанин, Тр. Мат. ин-та АН СССР, т. 52 (1958). ⁴ Б. А. Кушнер, Лекции по конструктивному математическому анализу, Наука, М., 1973. ⁵ А. А. Марков, Тр. Мат. ин-та АН СССР, т. 52 (1958). ⁶ Х. Роджерс, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, Мир, М., 1972. ⁷ Е. М. Gold, J. Symp. Logic, vol. 30 № 1 (1965). ⁸ М. Г. Гельфонд, Записки науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, т. 16 (1969). ⁹ И. Д. Заславский, Записки науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, т. 16 (1969). ¹⁰ Н. В. Петри, Сб. работ по теории алгоритмов и математической логике, ВЦ АН СССР, М., 1974.

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

М. Ж. Григорян

О сходимости в метрике $L^p, 0 < p < 1$, сферических частичных сумм кратных рядов Фурье суммируемых функций

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 29/IV 1981)

Пусть $x \in R^m$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, E^m — целочисленная решетка в R^m , $n \in E^m$, если $n = (n_1, \dots, n_m)$, n_j целые: положим $n \cdot x = n_1 \cdot x_1 + \dots + x_m \cdot n_m$

Пусть I — интервал в R^m

$$I = \left\{ x \in R^m, |x_j| \leq \frac{1}{2}, 1 \leq j \leq m \right\},$$

а функция $f(x)$ определена в нем и интегрируема по Лебегу.

Сферические частичные суммы ряда Фурье функции $f(x)$ имеют вид

$$S_N(x, f) = \sum_{|n| < N} a_n(f) e^{2\pi i n x}, \text{ где } a_n(f) = \int_I f(t) e^{-2\pi i n t} dt.$$

В настоящей работе рассматривается вопрос сходимости в метрике $L^p, 0 < p < 1$, сферических частичных сумм кратных рядов Фурье суммируемых функций. В этом направлении при $m=1$, (см. (1), стр. 597) одним из важных результатов является теорема о том, что ряд Фурье суммируемой функции сходится в метриках L^p для любого $p, 0 < p < 1$.

При $m \geq 2$ картина существенно иная.

Имеет место следующая

Теорема 1. Существует суммируемая на I функция $f_0(x)$ такая, что сферические частичные суммы ее ряда Фурье расходятся в метрике $L^p, 0 < p < 1$.

Используя элементы конструкции К. И. Бабенко, примененной им в работе (2), можно установить следующую теорему.

Теорема 2. Пусть даны числа p, α, x , удовлетворяющие условиям: $0 < p < 1, \alpha \geq 0, x > 0, \frac{m-1}{2} - \alpha - x > 0$.

Тогда для любого натурального N имеет место неравенство

$$\int_I \left| \sum'_{|n| \leq N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right)^{\alpha} |n|^{-\alpha} e^{2\pi i n x} \right|^p dx > \text{const} \cdot N^{p\left(\frac{m-1}{2} - \alpha - \varepsilon\right)}, \quad (*)$$

где штрих у знака суммы означает, что слагаемые, отвечающие $|n|^2 = N^2$, берутся с коэффициентом $1/2$.

Теперь докажем теорему 1, используя теорему 2.

Заметим, что при $0 < x < m$ (см. (3), стр. 286) $\sum |n|^{-\alpha} e^{2\pi i n x}$ есть ряд Фурье интегрируемой функции $f_0(x)$.

Оценим снизу сферические частичные суммы $S_N(x, f_0)$ кратного ряда Фурье функции $f_0(x)$.

При $\alpha = 0$ неравенство (*) имеет вид

$$\int_I \left| S_N(x, f_0) + \frac{1}{2} \sum_{|n|=N} |n|^{-\alpha} e^{2\pi i n x} \right|^p dx > \text{const} \cdot N^{p\left(\frac{m-1}{2} - \alpha\right)},$$

следовательно

$$\int_I |S_N(x, f_0)|^p dx > \text{const} N^{p\left(\frac{m-1}{2} - \alpha\right)} - 2^{-p} \cdot N^{-p\alpha} \int_I \left| \sum_{|n|=N} e^{2\pi i n x} \right|^p dx. \quad (1)$$

Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\int_I \left| \sum_{|n|=N} e^{2\pi i n x} \right|^p dx \leq \left(\int_I \left[\sum_{|n|^2=N^2} e^{2\pi i n x} \right]^2 dx \right)^{\frac{p}{2}} = \left[r_m(N^2) \right]^{\frac{p}{2}}, \quad (2)$$

где через $r_m(N^2)$ обозначено число целочисленных решений диафантова уравнения

$$n_1^2 + \dots + n_m^2 = N^2.$$

Для любого δ числа $r_m(N^2)$ удовлетворяют условиям (см. (2), с. 39)

$$r_m(N^2) \leq c_{m,\delta} N^{2\left(\frac{m}{2} - 1 + \delta\right)}, \quad (3)$$

Учитывая (1), (2), (3), получим

$$\begin{aligned} \int_I |S_N(x, f_0)|^p dx &> \text{const} \cdot N^{p\left(\frac{m-1}{2} - \alpha\right)} - 2^{-p} N^{-p\alpha} \cdot N^{p\left(\frac{m}{2} - 1 + \delta\right)} = \\ &= \text{const} N^{p\left(\frac{m-1}{2} - \alpha\right)} \left[1 - c_0 N^{p\left(\delta - \frac{1}{2}\right)} \right], \end{aligned}$$

Из произвольности числа δ имеем

$$\int_I |S_N(x, f_0)|^p dx > \text{const} N^{p\left(\frac{m-1}{2} - \alpha\right)}.$$

Теорема 1 доказана.

В связи с теоремой 1 возникает вопрос: существует ли измери-

мое множество $E \subset I$, $0 < |E| < 1$, такое, чтобы путем изменения значений разлагаемой функции $f(x)$ вне множества E получить новую функцию $F(x)$, сферические частичные суммы кратного ряда Фурье которой сходились в метрике L^p , $0 < p < 1$?

Отметим, что в случае прямоугольных частичных сумм этот вопрос положительно решен автором в работе (4) и использованный метод не позволяет выяснить справедливость полученного результата для сферических частичных сумм.

Применяя метод, отличный от метода, использованного в работе (4), можно доказать следующую теорему, являющуюся положительным ответом на поставленный вопрос.

Теорема 3. Пусть $Q_k \subset \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $k=1, \dots, m$, совершенные нигде не плотные множества.

Тогда для любой функции $f(x) \in L(I)$ существует функция $F(x) \in L(I)$ такая, что $F(x) = f(x)$ на $Q = \prod_{k=1}^m Q_k$ и сферические частичные суммы кратного ряда Фурье вновь полученной функции $F(x)$ сходятся к ней в метрике L^p , $0 < p < 1$, т. е.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_I \left| \sum_{|n| \leq R} a_n(F) e^{2\pi i n x} - F(x) \right|^p dx = 0.$$

Основным средством для доказательства теоремы 3 является следующая

Лемма. Пусть даны $Q_k \subset \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $k=1 \dots m$, совершенные нигде не плотные множества, функция $f(x) \in L(I)$, числа $N > 1$, $0 < p < 1$, $\varepsilon > 0$.

Тогда существуют функция $g(x) \in L(I)$ и тригонометрический полином вида

$$H(x) = \sum_{N < |n| \leq M} c_n e^{2\pi i n x},$$

которые удовлетворяют условиям:

$$1) \quad g(x) = f(x), \text{ при } x \in Q = \prod_{k=1}^m Q_k;$$

$$2) \quad \int_I |g(x)| dx < 4 \int_I |f(x)| dx;$$

$$3) \quad \int_I |g(x) - H(x)| dx < \varepsilon,$$

$$4) \quad \int_I \left| \sum_{N < |n| < R} c_n e^{2\pi i n x} \right|^p dx < \varepsilon + \int_I |g(x)|^p dx, \quad N < R \leq M.$$

Ինտեգրելի ֆունկցիաների Ֆուրյեի բազմապատիկ շարքերի սֆերիկ մասնական գումարների L^p , $0 < p < 1$, մետրիկայով զուգամիտության մասին

Ապացուցվում են հետևյալ թեորեմները.

Թեորեմ 1. Գոյություն ունի $f_0(x) \in L(I)$; $I = \{x = (x_1, \dots, x_m), |x_j| < \frac{1}{2}\}$ այնպիսին, որի Ֆուրյեի բազմապատիկ շարքի սֆերիկ մասնական գումարները L^p , $0 < p < 1$ մետրիկայով տարամիտում են:

Թեորեմ 2. Եթե $Q_k \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $k = 1, 2, \dots, m$ ամենուրեք նույն կատարյալ բազմություններ են, ուստի ցանկացած $f(x) \in L(I)$ կարելի է փոխել $Q = \prod_{k=1}^m Q_k$ -ից դուրս այնպես, որ նոր ստացված $F(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի բազմապատիկ շարքի սֆերիկ մասնական գումարները L^p , $0 < p < 1$, մետրիկայով զուգամիտեն իրեն:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, Физматгиз, М., 1961. ² К. И. Бабенко, О сходимости в среднем кратных рядов Фурье и асимптотике ядра Дирихле сферических средних, Препринт, Ин-т. прикладной математики АН СССР, М., 1971. ³ И. Стейн, Г. Вейс, Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, Мир, М., 1974 г. ⁴ М. Ж. Григорян, Изв. АН АрмССР, сер. мат., т. 15, № 1, (1980):

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

Г. Г. Геворкян

О множествах единственности для систем Хаара и Уолша

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР А. А. Талаляном 15/V 1981)

Зигмундом была доказана (см. ⁽¹⁾, стр. 550)

Теорема (Зигмунд). Пусть $\epsilon_n \downarrow 0$. Тогда для любой $\epsilon > 0$ существует множество $E \subset [-\pi, \pi]$, $\mu(E) < \epsilon$, такое, что если тригонометрический ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$ сходится к нулю всюду на E и $|a_n| \leq \epsilon_{|n|}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то $a_n = 0$ для всех n .

В дальнейшем Каханом и Кацнельсоном ⁽²⁾ эта теорема была усилена. Ими было показано, что в формулировке теоремы Зигмунда можно добиться того, чтобы соответствующее множество E имело меру, равную нулю.

В работе Шапиро ⁽³⁾ теорема Зигмунда распространена на ряды по системе Уолша, а в работе Вейда ⁽⁴⁾ доказана

Теорема (Вейд). Пусть $\epsilon_n \downarrow 0$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует множество $E \subset [0, 1]$, $\mu(E) < \epsilon$, такое, что если ряд Хаара $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ сходится к нулю всюду на E и $|a_n \sqrt{n}| < \epsilon_n$, $n=0, 1, 2, \dots$, то все a_n равны нулю.

В настоящей работе приводятся усиления вышеуказанных результатов Шапиро и Вейда о множествах единственности рядов по системам Уолша и Хаара.

В дальнейшем через $\{W_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ обозначается система Уолша, а через $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — система Хаара.

Верна следующая

Теорема 1. Пусть $\epsilon_n \downarrow 0$. Существует множество $E \subset [0, 1]$, $\mu E = 0$, такое, что если $|a_n| \leq \epsilon_n$, $n=1, 2, \dots$ и для некоторой подпоследовательности $\{n_l\}_{l=1}^{\infty}$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^{n_l}-1} a_k W_k(x) = 0, \quad x \in E,$$

то $a_k = 0$, $k=0, 1, 2, \dots$

Из теоремы 1 немедленно следует следующее усиление теоремы Вейда.

Теорема 2. Пусть $\varepsilon_n \downarrow 0$. Существует множество $E \subset [0, 1]$, $\mu E = 0$, такое, что если $|a_n \sqrt{n}| \leq \varepsilon_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ и для некоторой подпоследовательности $\{n_i\}_{i=1}^\infty$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n_i} a_k \chi_k(x) = 0, \quad x \in E,$$

то $a_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Для доказательства теоремы 1 нам нужны следующие вспомогательные утверждения.

Теорема 3. Пусть $\varepsilon_n \downarrow 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $E \subset [0, 1]$, $\mu E < \varepsilon$, такое, что если $|a_n| \leq \varepsilon_n$ и для некоторой подпоследовательности $\{n_i\}_{i=1}^\infty$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^{n_i}-1} a_k W_k(x) = 0, \quad x \in E,$$

то все a_k равны нулю.

Теорема 3 также является усилением теоремы Шапиро и Вейда. Она доказывается точно так же, как и теорема Шапиро, только там, где Шапиро использует теорему Шнейдера (см. (5)) о единственности рядов Уолша, нужно использовать теорему 4 из (6).

Теорема 4. Пусть $\varepsilon_n \downarrow 0$. Тогда существует множество $E \subset [0, 1]$, $\mu E = 0$, такое, что если $|a_n| \leq \varepsilon_n$ и для некоторой подпоследовательности $\{n_i\}$

$$\left| \sum_{k=0}^{2^{n_i}-1} a_k W_k(x) \right| < M < +\infty, \quad x \in E; \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^{n_i}-1} a_k W_k(x) = 0, \quad x \in E,$$

то все a_k равны нулю.

Основной леммой для доказательства теоремы 4 является следующая

Лемма. Пусть $\varepsilon_n \downarrow 0$ и m произвольное натуральное число. Существует монотонная сингулярная функция $f(x)$, которая удовлетворяет следующим условиям (обозначим $\hat{f}(n) = \int_0^1 W_n(x) df(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$)

$$1) \quad \hat{f}(m) = 1;$$

$$2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)| \varepsilon_n < +\infty.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать $\varepsilon_{2^k} = \varepsilon_n$, когда $2^k \leq n_1$, $n_2 < 2^{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$. Пусть $\varepsilon_n = \varepsilon_k$ при $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Обозначим

$$\varphi_0(x) = 1 + W_m(x). \quad (1)$$

Через $\{r_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ обозначим систему Радемахера (определение см., например, в (1)). Выберем n_k таким образом, чтобы $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k\delta_{n_k}} < +\infty$, $n_k > 2k$ и $n_1 > \log_2 m + 1$. Пусть

$$\varphi_j(x) = \varphi_{j-1}(x)(1 + r_{n_j}(x)), \quad j = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Легко видеть, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_0^1 W_n(x) \varphi_j(x) dx \right| \varepsilon_n = \varepsilon_0 + \varepsilon_m + \sum_{n=1}^j 2^{k\delta_{n_k}}. \quad (3)$$

Обозначим $E_j = \{x : \varphi_j(x) \neq 0\}$. Из свойств функций Радемахера и из (2) следует

$$\mu E_j = \frac{1}{2^{j+1}} \quad \text{и} \quad E_j \subset E_{j-1}. \quad (4)$$

Пусть

$$f_j(x) = \int_0^x \varphi_j(x) dx. \quad (5)$$

Интегрируя (2), легко заметить, что $f_j(x) = f_{j-1}(x)$ вне E_{j-1} , так как интеграл функции $1 + r_{n_j}(x)$ на интервалах, где $\varphi_{j-1}(x)$ принимает отличное от нуля постоянное значение, равен длине этого интервала. Легко также увидеть, что (из (2) и (5))

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f_{j+1}(x) - f_j(x)| \leq \frac{2^{j+1}}{2^{n_j}}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Поэтому последовательность $\{f_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ равномерно сходится к непрерывной сигнулярной функции $f(x)$ (см. (1), (2), (4), (5) и (6)). Из (3) и (5) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \hat{f}_j(n) \right| \varepsilon_n = \varepsilon_0 + \varepsilon_m + \sum_{k=1}^j 2^{k\delta_{n_k}}. \quad (7)$$

По теореме Хелли в (7) можно перейти к пределу (см. (8), стр. 254). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Для каждого номера m , $m = 0, 1, 2, \dots$, построим соответствующие функции $f_m(x)$, удовлетворяющие требованиям леммы. Пусть A_m носитель меры $df_m(x)$, $\mu A_m = 0$, и A счетное всюду плотное множество двоично-иррациональных чисел. Покажем, что множество

$$E = A + \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m^* \quad (8)$$

удовлетворяет требованиям теоремы 4. Легко увидеть, что $\mu E = 0$.

Пусть $\sum_{n=0}^{2^{n_i}} a_n W_n(x)$ сходится к нулю на E и $|a_n| < \varepsilon_n$. Пусть $u \in A$, $v \in$

$\in \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m$ и $x = u + v \in E$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} a_n W_n(x) = \sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} a_n W_n(u) W_n(v), \quad (9)$$

быть может, за исключением счетного множества значений v . Возьмем произвольное m и интегрируем (9) по мере $df_m(v)$ (счетное множество имеет нулевую меру по мере $df_m(v)$). Получим

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} W_n(u+v) df_m(v) = \sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} a_n \hat{f}_m(n) W_n(u). \quad (10)$$

Но левая часть (10) стремится к нулю (по теореме Лебега). Значит

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} a_n \hat{f}_m(n) W_n(u) = 0 \text{ при } u \in A \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n \hat{f}_m(n)| < +\infty. \quad (11)$$

Следовательно, все $a_n \hat{f}_m(n)$ равны нулю. Поэтому $a_m = 0$, так как $\hat{f}_m(m) \neq 0$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1. Без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon_n = \varepsilon_m$, когда $2^k \leq m$, $n < 2^{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$. Пусть E_n — открытое множество, удовлетворяющее требованиям теоремы 3, и $\mu E_n < \frac{1}{n}$, C — множество, удовлетворяющее требованиям леммы, а B — множество двоично-рациональных точек. Покажем, что множество $E = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right) \cup B \cup C$ удовлетворяет требованиям теоремы 1. Пусть

частичные суммы $S_i(x) = \sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} a_n W_n(x)$ сходятся к нулю на E и $|a_n| < \varepsilon_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Из того, что $S_i(x)$ сходится к нулю на B , следует, что множество

$$G = \{x : \limsup_{i \rightarrow \infty} |S_i(x)| \geq 1\}$$

— множество типа G_δ . Нетрудно убедиться, что если $G = \emptyset$, то $|S_i(x)| \leq 1$ для всех $x \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots$. Это следует из того, что ряд Хаара $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_n(x)$, полученный из ряда Уолша $\sum_{n=1}^{\infty} a_n W_n(x)$, удов-

* 0+ см. (5). $E = \left\{ x + y : x \in A, y \in \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m \right\}$.

летворяет условию $b_{k_l}/\chi_{k_l}(x) \rightarrow 0$ для любого x , где $\{k_l\}$ — все те номера n , для которых $\chi_n(x) \neq 0$ (см., например (*), стр. 410).

Покажем, что $G = \emptyset$. Если $G \neq \emptyset$, то из того, что G — множество типа G_b , $G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c$ и E_n^c — замкнутые множества, следует существование интервала I — типа Хаара и номера m , для которых (см. (1), стр. 548, лемма 6.17)

$$\emptyset \neq I \cap G \subset I \cap E_m^c. \quad (12)$$

Пусть J некоторый интервал типа Хаара и

$$J \subset I, \quad J \subset E_m. \quad (13)$$

Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$ — разложение по системе Уолша характеристической функции интервала I (оно представляет собой конечную сумму).

Обозначим через $\sum_{n=0}^{\infty} c_n W_n(x)$ формальное произведение ряда

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)$ на $\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$ (см. (5)). Очевидно, что для достаточно больших i имеют место

$$\sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} a_n W_n(x) = \sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} c_n W_n(x) \text{ при } x \in J \quad (14)$$

и

$$\sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} c_n W_n(x) = 0 \text{ при } x \in \bar{J}. \quad (15)$$

Легко заметить, что $|c_n| < M\epsilon_n$, $M > 0$, $n = 1, 2, \dots$. Из (14) и (15)

следует, что $\left\{ x : \limsup_{i \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} c_n W_n(x) \right| \geq 1 \right\} = \emptyset$. Поэтому частичные

суммы $\sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} c_n W_n(x)$ равномерно ограничены. Кроме того, из (14) и (15) вытекает, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} c_n W_n(x) = 0, \quad x \in C. \quad (16)$$

Из леммы следует, что $c_n = 0$ для всех n . Из этого, из (14) и из того, что J произвольный интервал типа Хаара, лежащий в $I \cap E_m$, следует

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{2^{n_i}-1} a_n W_n(x) = 0 \text{ при } x \in I \cap E_m. \quad (17)$$

Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} d_n W_n(x) = \chi_I(x)$, где $\chi_I(x)$ — характеристическая функция

интервала I . Рассмотрим формальное произведение рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)$

и $\sum_{n=0}^{\infty} d_n W_n(x)$, которое обозначим через $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n W_n(x)$. Рассуждая так же, как и выше, получим

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{2^{n_l}-1} \gamma_n W_n(x) = 0 \quad \text{при } x \in E_n \text{ и } |\gamma_n| < M\epsilon_n. \quad (18)$$

По теореме 3 из (18) следует, что $\gamma_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{2^{n_l}-1} a_n W_n(x) = 0, \quad x \in I;$$

это противоречит тому, что $G \cap I \neq \emptyset$. Итак, $G = \emptyset$ и поэтому все частичные суммы $S_i(x)$ равномерно ограничены. Согласно лемме, отсюда следует, что $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

В заключение выражаю благодарность профессору А. А. Талаляну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Ереванский государственный университет,

Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Հաաւրի և Ուոլշի համակարգերի միակության բազմությունների մասին

Աշխատանքում ապացուցված է.

Թեև որեւէ 1. Դիցուք $\epsilon_n \downarrow 0$: Այդ դեպքում գոյութիւն ունի $E \subset [0, 1]$, $\mu E = 0$, այնպիսին, որ եթե $|a_n| \leq \epsilon_n$ և ինչ-որ $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ բնական թվերի ենթահաջորդականութիւն համար

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{2^{n_l}-1} a_n W_n(x) = 0, \quad x \in E,$$

ապա $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Թեև որեւէ 1-ից հետևում է.

Թեև որեւէ 2. Դիցուք $\epsilon_n \downarrow 0$: Այդ դեպքում գոյութիւն ունի $E \subset [0, 1]$, $\mu E = 0$, այնպիսին, որ եթե $|a_n \sqrt{n}| \leq \epsilon_n$ և $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ բնական թվերի ենթահաջորդականության համար

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{n_l} a_n \chi_n(x) = 0, \quad x \in E$$

ապա $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. Зигмунд. Тригонометрические ряды. Т. 1, М., 1965. ² J. P. Kahane, Y. Kalznelsen, C. R. Acad Sci., Paris, Ser. A, vol. 277 (1973). ³ V. Shapiro, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 16 (1965). ⁴ W. R. Wade, Acta Math. 30 (3—4) (1977). ⁵ А. А. Шнейдер, Мат. сб., 1949, т. 24. ⁶ Ф. Р. Арутюнян, А. А. Талалян, Изв. АН СССР, сер. мат., т. 28 (1964). ⁷ С. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов. М., 1958. ⁸ И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, М., 1957. ⁹ Ф. А. Талалян, Изв. АН АрмССР, сер. мат. т. 5, № 5 (1970).

УДК 513

МАТЕМАТИКА

М. А. Мнацаканян

О площади области на развертывающейся поверхности

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 2/VIII 1981)

1. Семейство касательных к пространственной кривой Γ образует *развертывающуюся поверхность* (РП). Положение точки A на РП определяется расстоянием $u=AM$ по касательной к Γ и задающей точку касания M длиной v дуги (кривой) Γ . Как известно ⁽¹⁾, коэффициенты первой дифференциальной формы Гаусса для РП равны: $E=1$, $F=1$, $G=1+u^2/\rho^2$, где $1/\rho$ —кривизна Γ . Введем координаты (u, φ) , где φ —угол на РП между двумя касательными к Γ . Тогда площадь некоторой области Ω на РП, ограниченной кривыми $u(\varphi)$ и Γ -уровнем $u(\varphi)=0$, и двумя касательными к Γ , определяемыми углами φ_1 и φ_2 , дается выражением

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{EG-F^2} \, du \, dv = \iint_{\Omega} u \, du \, dv / \rho = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} u^2 dv / \rho$$

и, согласно определению кривизны $1/\rho = d\varphi = dv$, равна

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} u^2(\varphi) d\varphi. \quad (1)$$

Мы видим, что S не зависит явно от длины v дуги Γ .

Назовем *годографом* области Ω такую область на конической поверхности, которая получается параллельным переносом отрезков $u(\varphi)$ началами к одной точке M_0 —вершине годографа. Выбрав в качестве Γ точку M_0 , замечаем, что, с другой стороны, выражение (1) определяет полярную площадь на конической поверхности. Следовательно, справедлива.

Теорема. *Площадь любой области на развертывающейся поверхности равна площади годографа этой области (на конической поверхности).*

Другое, простое доказательство теоремы следует из равенства площади элементарного треугольника на РП, образованного двумя бесконечно близкими касательными к Γ и кривой $u(\varphi)$, и площади соответствующего треугольника-годографа. В справедливости теоремы можно убедиться еще проще, рассматривая Γ , согласно определению кривой линии, как предельный случай описанной около нее ломаной. Относительно же произвольной ломаной очевидно, что утверждение теоремы выполняется *точно*.

Будем говорить, что *отрезок вращается вокруг дуги Γ* , если он всегда находится на касательной к Γ . Площадь заметаемой им при этом фигуры зависит не от размеров дуги Γ , а только от закона изменения расстояний $u_1(\varphi)$ и $u_2(\varphi)$ до концов отрезка в зависимости от его направления в пространстве. Можно произвольно менять размеры дуги Γ , оставляя ее *подобной себе*,—при этом заметаемая площадь останется *неизменной*. В пределе, стянув дугу Γ в точку, придем к вращению отрезка на годографе.

Утверждение теоремы допускает наглядную кинематическую интерпретацию. При бесконечно малом вращении вокруг дуги Γ отрезок совершает два мгновенных движения—вращение вокруг точки касания, сопровождающееся растяжением $u(\varphi)$, и скольжение вдоль себя. При скольжении вдоль себя отрезок никакой площади не замечает, вся площадь же замечается при вращениях вокруг точек касания—они и соответствуют вращению на годографе. Тривиален случай вращения отрезка вокруг ломаной—заметаемые им участки площадей сосредоточены у вершин ломаной; последние очевидным образом «складываются» в годограф.

Мы проиллюстрируем теорему о годографе на ряде примеров определения площадей. Затем дадим развитие теоремы применительно к нахождению объемов тел «вращения» вокруг цилиндров и конусов, а также специальных тел вращения. Заметим, что приведенные выше два простых доказательства теоремы, а также ее наглядная кинематическая интерпретация позволяют отнести как саму теорему, так и решения рассматриваемых ниже примеров п. 2—5 (и ряд других) к разряду элементарных.

2. Рассмотрим примеры определения площадей в частном случае, когда Γ —плоская кривая. Задача будет состоять фактически в *построении годографов*. Они строятся из элементарных геометрических соображений и представляют собой простейшие фигуры. Зная их площади, мы тем самым, согласно теореме, знаем и *искомые* площади. В примерах, отмеченных звездочками, формулируются новые результаты, в остальных—известные из курсов высшей математики (см., например, (2)).

Примеры. а)* Отрезок постоянной длины a , вращаясь вокруг замкнутой кривой, замечает «овальное» кольцо. Годограф такого кольца—*круг* радиуса a , и его площадь равна πa^2 . В известном примере *кругового* кольца эта площадь вычисляется с помощью теоремы Пифагора.

б) *Трактриса*—кривая с постоянным отрезком a касательной до оси абсцисс. *Годограф* (двусторонней) *трактрисы* есть *полукруг* радиуса a , и, следовательно, площадь *трактрисы* равна $\pi a^2/2$.

Годограф симметрично *отсеченной трактрисы* образует *сегмент круга*, отсеченный на расстоянии от центра, равном ширине сечения.

в)* *Обобщенная трактриса*. Фигура, очерчиваемая следами колес велосипеда, замечается при вращении отрезка a —между осями колес, вокруг траектории заднего колеса. *Годограф* ее—*сектор круга* радиуса a . Примеры а) и б) следуют отсюда как частные случаи.

Если велосипед сворачивает с некоего направления на перпендикулярное, то искомая площадь равна $\pi a^2/4$, независимо от формы кривой поворота.

г) *Циклоида*—траектория точки катящейся по прямой окружности. В каждый момент круг совершает мгновенное вращение вокруг точки касания, так что касательная к циклоиде упирается всегда в верхнюю точку катящегося круга, служа его хордой. Вращаясь вокруг циклоиды, эта хорда замечает арку над ней—между циклоидой и описанным около нее прямоугольником. Поэтому *годограф* этой *арки*—*катящийся круг*.

Симметрично *отсеченная* часть этой *арки* имеет *годографом* *сегмент* катящегося круга с высотой, равной ширине сечения *арки*.

д)* *Линия погони*—траектория собаки, бегущей все время в направлении на удирающую лису. Если их скорости равны и лиса бежит по прямой, то в течение всей погони отрезок «собака—лиса» и его проекции на лисью дорожку в сумме сохраняют постоянную длину. Следовательно, фигура, ограниченная траекториями лисы и собаки и отрезком, соединяющим их начальные позиции, имеет *годографом* *сектор параболы* с вершиной в ее фокусе.

3. Пусть плоская кривая Γ служит направляющей цилиндра и в плоскости, касающейся этого цилиндра, расположена фигура Φ . Пусть эта плоскость *вращается вокруг цилиндра*, оставаясь все время касательной к его поверхности. Тогда фигура Φ заметет некое тело «вращения». В любом сечении рассматриваемой пространственной картины, параллельном плоскости Γ , имеет место теорема о *годографе*, в силу чего справедливо

Следствие 1. Объем тела вращения плоской фигуры вокруг цилиндра не зависит от размеров цилиндра и равен объему годографа, образуемого соответствующим вращением фигуры вокруг неподвижной оси.

Примеры. а) *Шар с цилиндрическим отверстием* получается вращением полукруга вокруг цилиндра. Поэтому объем такого кольца равен объему шара с диаметром, равным высоте отверстия. Аналогичный результат верен и для некругового цилиндра.

б) Сечение кругового конуса, параллельное его оси, образует гиперболу. При вращении вокруг оси конуса это сечение огибает некий цилиндр. При этом сегмент гиперболы замечает конус с цилиндрическим отверстием, объем которого легко найти. Вращаясь же вокруг

своей оси, этот сегмент гиперболы образует годограф—сегмент *двуполостного гиперболоида*—с тем же (искомым) объемом.

в)* *Однополостный гиперболоид* получается вращением плоского угла вокруг цилиндра. Его объем складывается из объемов вписанного в него цилиндра и годографа—*конуса*, образуемого вращением угла вокруг своей стороны.

4. По аналогии с п. 3 рассмотрим вращение плоской фигуры вокруг конической поверхности. Из подобия кривых Γ , являющихся параллельными сечениями конической поверхности, выводим

Следствие 2. *Объем тела вращения плоской фигуры вокруг конуса не зависит от сдвига фигуры вдоль образующей конуса (к вершине или от). Для кругового конуса с углом при вершине 2α этот объем равен объему годографа, умноженному на $\cos\alpha$.*

Примеры. а) *Шар с коническим отверстием* получается вращением полукруга вокруг конуса. Поэтому объем такого кольца равен объему шара с диаметром, равным стороне отверстия, умноженному на $\cos\alpha$.

б) *Эллипс*—сечение цилиндра, вращаясь вокруг оси цилиндра, огибает некий конус. При этом эллипс вращается вокруг этого конуса, замечая *цилиндр с конической воронкой* объемом в $2/3$ объема цилиндра. С другой стороны, этому объему равен объем *эллипсоида вращения*, умноженный на $\cos\alpha$. С учетом этого фактора находим, что объем эллипсоида вращения (в частности, шара) в полтора раза меньше объема описанного цилиндра.

в) *Парабола*—сечение конуса, параллельное его образующей. Вращаясь вокруг оси конуса, оно огибает перевернутый (подобный) конус. Вращаясь же вокруг своей оси, образует *параболоид*, служащий годографом исходного конуса с конической воронкой, объем которого легко определить. Учитывая фактор $\cos\alpha$, находим: параболоид вдвое меньше описанного цилиндра.

Заметим, что в случае вращения вокруг кругового цилиндра или конуса объемы можно найти элементарно и без теоремы о годографе, используя свойство кругового кольца из примера а) п. 1, т. е. теорему Пифагора (автор ⁽³⁾).

5. Центр тяжести треугольника отстоит от основания на треть высоты, поэтому при вращении вокруг основания треугольник замечает объем, вдвое меньший, чем при вращении вокруг сси, параллельной основанию и проходящей через противоположающую вершину треугольника. Отсюда вытекает

Следствие 3. *Пусть при вращении отрезка вокруг дуги Γ его конец движется по прямой X . Тогда объем тела вращения вокруг оси X фигуры Φ , ограниченной линиями Γ и X , равен половине объема тела, образованного вращением годографа этой фигуры вокруг оси H , проходящей через вершину годографа параллельно оси X .*

Примеры. а)* *Псевдосфера* образуется вращением трактрисы вокруг оси абсцисс X . Так как годограф трактрисы—полукруг радиуса a , то объем псевдосферы равен половине объема шара радиуса a .

В общем случае объем симметрично отсеченной псевдосферы равен объему полушария с цилиндрическим отверстием, высота которого равна отрезку ax подкасательной в точке отсечения, или, согласно примеру а) п. 3, половине объема шара с радиусом ax .

б)* Линия погони (пример д) п. 2), вращаясь вокруг «лисьей» прямой, ограничивает тело, объем которого равен половине объема сектора параболоида (с вершиной в фокусе параболоида).

6. Рассмотрим произвольную линию Γ , заданную натуральным уравнением. Последнее легко свести ⁽²⁾ к виду $u = u(\varphi)$ — зависимости длины дуги от угла наклона касательной или к обратному $\varphi = \varphi(u)$. Тогда в обобщенной форме теорема о годографе позволяет решить также следующие

Примеры. а)* Площадь фигуры, заключенной между произвольной кривой $u(\varphi)$ и ее эвольвентой, дается формулой (1). Заметим в частности, что для эвольвенты окружности годографом служит спираль Архимеда.

б)* Площадь одной арки, описываемой точкой окружности, катящейся по произвольной кривой $\varphi(u)$, больше площади катящегося круга в K раз:

$$K = 3 - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(u) \sin u du. \quad (2)$$

Частные случаи: $\varphi(u) = 0$ — циклоида, $\varphi(u) = \pm \frac{r}{R} u$ — эпи- или гипоциклоида, $K = 3 \pm 2 \frac{r}{R}$.

Аналогичным образом можно также определить (с помощью теоремы о годографе) площади: гиперболы, показательной линии, подэры круга (в частности, кардиоиды), подэры эвольвенты круга; объемы тел вращения: показательной линии вокруг асимптоты, фигур, ограниченных кривыми Персея (в частности, овалами Кассини, лемнискатами Бута и Бернулли), вокруг оси симметрии, циклоиды вокруг касательной в ее вершине.

Мы рассмотрели примеры только с плоскими кривыми Γ . Их аналоги, очевидно, выполняются и на развертывающихся поверхностях, поскольку из условия наложимости развертывающейся поверхности на плоскость следует эквивалентность формулировок теоремы о годографе для случаев пространственной и плоской кривых Γ .

Փոփոզման մակերևույթի տիրույթի մակերեսի մասին

Ապացուցվում է թեորեմ, որ փոփոզման մակերևույթի վրա գտնվող կամայական տիրույթի մակերեսը հավասար է կոնական մակերևույթի վրա գտնվող այդ տիրույթի հոդոգրաֆի մակերեսին:

Որպես կիրառություն որոշվում են երկրաչափական մի շարք ֆիզուրների մակերեսները և ծավալները: Թեորեմի մեկնաբանությունը և դիտարկվող օրինակների լուծումները կարելի է դասել տարրականների շարքին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. П. Фиников, Дифференциальная геометрия, ГИТТЛ, М., 1952. ² А. А. Савелов, Плоские кривые, ГИФМЛ, М., 1960. ³ М. Мамикон, Объем шара, Квант, № 5, 1977.

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Э. Х. Григорян

Об одной периодической задаче упругой плоскости с бесконечным кусочно-однородным упругим включением

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 29/х 1980)

Рассматривается периодическая задача для упругой плоскости с бесконечным упругим кусочно-однородным включением, когда плоскость деформируется периодическими силами, перпендикулярными включению. Причем включение состоит из двух материалов с модулями упругости E_1 , E_2 , периодически повторяющимися по длине включения. Задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Оказывается, что контактные тангенциальные напряжения в точках соединения этих материалов имеют логарифмическую особенность, а контактные нормальные напряжения — конечный скачок. Такие поведения контактных напряжений обусловлены неоднородностью включения.

Периодическая задача для полуплоскости с упругими накладками, имеющими одинаковые модули упругости, впервые была рассмотрена в (1).

Пусть упругая плоскость с бесконечным упругим включением малой постоянной толщины h деформируется под действием сил

$$Y(x, y) = Q[\delta(y-b) - \delta(y+b)] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-2an).$$

Здесь $\delta(x)$ — функция Дирака, Q — интенсивность сосредоточенных сил, a , b — положительные постоянные.

Модуль упругости включения имеет следующий вид:

$$E(x) = P_1(x)E_1 + P_2(x)E_2,$$

где

$$P_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\theta(x+a-4an) - \theta(x-a-4an)],$$

$$P_2(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\theta(x-a-4an) - \theta(x+a-4a(n+1))],$$

$$P_1(x) = P_1(x+4a), \quad P_2(x) = P_2(x+4a), \quad P_1(x) + P_2(x) = 1,$$

E_1, E_2 — постоянные, $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

Требуется определить законы распределения контактных напряжений вдоль линии соединения включения с плоскостью. Вследствие малости толщины включения, как в (2,3), считается, что она в процессе деформации не изменяется, а под действием только горизонтальных сил включение находится в одноосном напряженном состоянии. С учетом этого уравнения равновесия включение будет даваться в следующем виде:

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{dx^2} = -\frac{\tau_1(x)}{E_1 h} - \frac{\tau_2(x)}{E_2 h} - u'_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\delta(x+a-4an) - \delta(x-a-4an)], \quad (1)$$

где $\tau_1(x) = P_1(x)\tau(x)$, $\tau_2(x) = P_2(x)\tau(x)$, $\tau(x)$ — интенсивность тангенциальных контактных напряжений, $u^{(1)}(x)$ — горизонтальные перемещения точек включения, $u'_0 = \left. \frac{du^{(1)}}{dx} \right|_{x=a+0} - \left. \frac{du^{(1)}}{dx} \right|_{x=a-0}$.

Теперь, применяя обобщенное преобразование Фурье к (1), имеем:

$$-\sigma^2 \bar{u}^{(1)}(\sigma) = -\frac{\bar{\tau}_1(\sigma)}{E_1 h} - \frac{\bar{\tau}_2(\sigma)}{E_2 h} + 2iu'_0 \sin a\sigma \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i4an\sigma}.$$

Здесь

$$\bar{u}^{(1)}(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^{(1)}(x) e^{i\sigma x} dx, \quad \bar{\tau}_k(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_k(x) e^{i\sigma x} dx, \quad (k=1, 2).$$

Отметим, что в смысле теории обобщенных функций

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\sigma} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\sigma - 2\pi k).$$

С другой стороны, для определения перемещений упругой плоскости надо разрешить следующую систему неоднородных дифференциальных уравнений

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial x \partial y} = \tau(x) \delta(y), \quad (2)$$

$$\mu \frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x \partial y} = -Y(x, y),$$

где $(u^{(2)}(x, y), v^{(2)}(x, y))$ — вектор перемещения точек плоскости, λ, μ — упругие постоянные Ламе.

Очевидно, что под действием вышеуказанных сил контактные напряжения распределяются периодически с периодом $4a$.

Применяя обобщенное преобразование Фурье по переменной x :

к (2) и разрешая полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\bar{u}^{(2)}(\sigma, y)$, $\bar{v}^{(2)}(\sigma, y)$, где

$$\bar{u}^{(2)}(\sigma, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^{(2)}(x, y) e^{i\sigma x} dx, \quad \bar{v}^{(2)}(\sigma, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} v^{(2)}(x, y) e^{i\sigma x} dx,$$

будем иметь

$$\bar{v}^{(2)}(\sigma, 0) = 0, \quad \bar{u}^{(2)}(\sigma, 0) = -\frac{\lambda + 3\mu}{4\mu(\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{\bar{\tau}(\sigma)}{|\sigma|} - Q \frac{(\lambda + \mu)b \cdot i \operatorname{sgn} \sigma}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i2an\sigma},$$

Теперь, имея в виду условие контакта

$$u^{(1)}(x) = u^{(2)}(x, 0), \quad -\infty < x < +\infty,$$

получим

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + |\sigma|)\bar{\tau}_1(\sigma) + (\lambda_2 + |\sigma|)\bar{\tau}_2(\sigma) = & \frac{8\mu(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 3\mu} i u'_0 \sin a\sigma \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i4an\sigma} - \\ & - \frac{2Q(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu} b \cdot i\sigma|\sigma| e^{-|\sigma|b} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i2an\sigma}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\lambda_1 = \frac{4\mu(\lambda + 2\mu)}{E_1 h(\lambda + 3\mu)}, \quad \lambda_2 = \frac{4\mu(\lambda + 2\mu)}{E_2 h(\lambda + 3\mu)}.$$

Уравнение (3) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(\sigma) = (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\bar{\tau}_1(\sigma)}{\lambda_2 + |\sigma|} + \frac{8\mu(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 3\mu} \cdot \frac{i u'_0 \sin a\sigma}{\lambda_2 + |\sigma|} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i4an\sigma} - \\ - \frac{2Q(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu} \cdot \frac{b i\sigma|\sigma|}{\lambda_2 + |\sigma|} \cdot e^{-|\sigma|b} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i2an\sigma}. \end{aligned} \quad (4)$$

Применяя обратное преобразование Фурье к (4), получим

$$\begin{aligned} \tau(x) = (\lambda_2 - \lambda_1) \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-s) \tau_1(s) ds + \frac{4\mu(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 3\mu} u'_0 \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [k(x-a-4an) - k(x+a-4an)] - \frac{2Qb(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(x-2an), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\sigma x}}{\lambda_2 + |\sigma|} d\sigma, \quad r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\sigma|\sigma| e^{-|\sigma|b}}{\lambda_2 + |\sigma|} e^{-i\sigma x} d\sigma.$$

Так как $\tau_1(x+4a) = \tau_1(x)$, то из (5) получается

$$\tau(x) = (\lambda_2 - \lambda_1) \int_{-a}^{+a} K(x-s) \tau(s) ds + \frac{4\mu(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 3\mu} u'_0 [K(x-a) - \quad] \quad (6)$$

$$-K(x+a)] - \frac{2Qb(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu} R(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

где

$$K(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k(x-4an), \quad R(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(x-2an). \quad (7)$$

Отметим, что $k(x)$ можно представить в следующем виде:

$$k(x) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|\lambda_2 x|} - \frac{c}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{(\lambda_2 x)^{2n}}{\pi(2n)!} \left(\ln \frac{1}{|\lambda_2 x|} + \right. \right. \\ \left. \left. + 1 + \dots + \frac{1}{2n} - c \right) - \frac{|\lambda_2 x|^{2n-1}}{2(2n-1)!} \right], \quad (8)$$

c — постоянная Эйлера.

Имея в виду (7), (8), для $K(x)$ будем иметь

$$K(x) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\pi x}{4a} \right|} + L(x). \quad (9)$$

Здесь $L(x)$ непрерывная функция в рассматриваемом интервале $[-a, a]$.

Таким образом, для определения контактных напряжений, действующих в интервале $-a < x < +a$, получается интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\tau(x) = (\lambda_2 - \lambda_1) \int_{-a}^{+a} K(x-s) \tau(s) ds + \frac{4\mu(\lambda+2\mu)}{\lambda+3\mu} u_0' [K(x-a) - \\ -K(x+a)] - \frac{2Qb(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu} R(x), \quad -a < x < +a. \quad (10)$$

Из (9), (10) следует, что $\tau(x)$ непрерывна всюду в интервале $(-a, a)$, а в точках $x = \pm a$ имеет логарифмическую особенность, обусловленную неоднородностью включения. Следовательно, решение интегрального уравнения надо искать в классе суммируемых функций. Поскольку

$$\sup_{|x| < a} \int_{-a}^{+a} |K(x-s)| dx = M < +\infty,$$

то отсюда следует, что при $|\lambda_1 - \lambda_2| < M^{-1}$ интегральное уравнение (10) в пространстве суммируемых функций $L_1(-a, a)$ можно решать методом последовательных приближений. После определения $\tau(x)$ в интервале $(-a, a)$ значения $\tau(x)$ при $|x| > a$ будут даваться формулой (6). Причем постоянная u_0' определяется из равенства

$$\left. \frac{du^{(2)}(x, 0)}{dx} \right|_{x=a-0} = \frac{E_2}{E_1 - E_2} u'_0.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи:

а) $E_1 < +\infty$, $E_2 \rightarrow +\infty$. В этом случае задача сводится к решению интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \tau(x) + \lambda_1 \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\pi(s-x)}{4a} \right|} \tau(s) ds = u'_0 - \frac{4\mu(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 3\mu} \times \\ \times \ln \frac{\sin \frac{\pi(a-x)}{4a}}{\sin \frac{\pi(a+x)}{4a}} - \frac{2Q\pi^2(\lambda + \mu)b}{a^2(\lambda + 3\mu)} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{a} \sin \frac{\pi x}{a}}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi b}{a} - \cos \frac{\pi x}{a} \right)^2}, \quad |x| < a. \end{aligned}$$

б) $E_1 = E_2 < +\infty$. Здесь $\tau(x)$ определяется в виде

$$\tau(x) = - \frac{2Q(\lambda + \mu)b}{\lambda + 3\mu} R(x).$$

в) $E_1 \rightarrow +\infty$, $E_2 \rightarrow +\infty$. В этом случае

$$\tau(x) = - \frac{2Q\pi^2(\lambda + \mu)b}{a^2(\lambda + 3\mu)} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{a} \sin \frac{\pi x}{a}}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi b}{a} - \cos \frac{\pi x}{a} \right)^2}.$$

Для определения нормальных контактных напряжений $\sigma_y(x, 0)$ предположим, что $\tau(x)$ уже определена, и поскольку трансформанта Фурье $\bar{\sigma}_y(\sigma, 0)$ функции $\tau_y(x, 0)$ выражается через трансформанту Фурье функции $\tau(x)$ по формуле

$$\bar{\sigma}_y(\sigma, 0) = \left(1 + \frac{b|\sigma|(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \right) \cdot Qe^{-|\sigma|b} - \frac{\mu i \operatorname{sgn} \sigma}{2(\lambda + 2\mu)} \cdot \bar{\tau}(\sigma), \quad (11)$$

то, применяя обратное преобразование Фурье, имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, 0) = \frac{Q}{4a} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{a}}{\sin^2 \frac{\pi x}{2a} \operatorname{ch}^2 \frac{\pi b}{2a} + \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \operatorname{sh}^2 \frac{\pi b}{2a}} + \frac{\pi Qb(\lambda + \mu)}{8a^2(\lambda + 2\mu)} \times \\ \times \frac{1 + \operatorname{ch} \frac{\pi b}{a} \cos \frac{\pi x}{a}}{\left(\sin^2 \frac{\pi x}{2a} \operatorname{ch}^2 \frac{\pi b}{2a} + \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \operatorname{sh}^2 \frac{\pi b}{2a} \right)^2} + \frac{\mu}{8a(\lambda + 2\mu)} \cdot \int_{-a}^{+a} \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{4a} \tau(s) ds. \end{aligned}$$

Из (4), (11) нетрудно заметить, что $\sigma_y(x, 0)$ в точках $x = \pm a$ имеет конечный скачок, обусловленный неоднородностью включения.

Անվերջ կտոր-առ-կտոր համասեռ առաձգական ներդիրով առաձգական հաբություն մի պարբերական խնդրի վերաբերյալ

Դիտարկվում է պարբերական խնդիր անվերջ կտոր-առ-կտոր համասեռ ներդիրով առաձգական հաբության համար, հրբ հաբությունը դեֆորմացվում է ներդիրին ուղղահայաց պարբերական ուժերով: Ներդիրը կազմված է երկու նյութերից, որոնց առաձգականության մոդուլները պարբերաբար կրկնվում են ներդիրի երկարությամբ: Խնդիրը բերվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը: Պարզվում է, որ կոնտակտային շոշափող լարումները, այդ նյութի միացման կետերում, ունեն լոգարիթմական եզակիություն, իսկ կոնտակտային նորմալ լարումները՝ վերջավոր թրոփ: Կոնտակտային լարումների այդպիսի վարքերը պայմանավորված են ներդիրի անհամասեռությամբ:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян, ПММ, т. 33, вып. 5 (1969) ² E. Melan, Ingr-Arch., Bd 3, № 2 (1932). ³ H. Buefler, VDI-Forschungsheft 485, Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens“. Ausgabe B, Band 27, (1951).

УДК 621.313+621.319.33.01

ЭЛЕКТРОМЕХАНИКА

Академик АН Армянской ССР А. Г. Иосифьян, Г. Л. Арешян

Основы теории асинхронных емкостных машин переменного тока

(Представлено 14/VII 1981)

В (1) были даны общие уравнения емкостных машин переменного тока и рассмотрены синхронные емкостные машины. В настоящей работе приводятся дифференциальные уравнения асинхронных емкостных машин, которые вытекают из общих уравнений емкостных машин.

Рассмотрим трехфазную асинхронную машину с фазным ротором (зажимы роторных цепей через щетки и кольца выведены на корпус машины). Пусть асинхронная машина имеет трехфазные статорные (индексы a, b и c) и роторные (индексы n, m и h) электрические цепи, каждая из которых образована парой электродов (размер электрода $\pi/3$ электрического радиана; на статоре и роторе $6p$ электродов). Введем следующие углы в электрических градусах: γ —угол между осью фазы a (статор) и осью фазы n (ротор); θ —угол между осью фазы a и продольной осью d синхронно вращающихся осей d, q ; β —угол между осью d и осью фазы n (ротор).

Положительное направление отсчета углов—по направлению движения часовой стрелки. Введенные три угла полностью определяют положение ротора и синхронных осей относительно статора и связаны уравнением

$$\gamma = \beta + \theta. \quad (1)$$

Представим полную матрицу емкостей асинхронной машины в виде блочной матрицы

$$C(\gamma) = \begin{bmatrix} C_{ss} & C_{sR} \\ C_{Rs} & C_{RR} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Соответствующие матрицы для симметричных трехфазных цепей асинхронной машины равны ($p=2\pi/3$)

$$C_{ss} = \begin{bmatrix} C_s & M_s & M_s \\ M_s & C_s & M_s \\ M_s & M_s & C_s \end{bmatrix}, \quad C_{RR} = \begin{bmatrix} C_R & M_R & M_R \\ M_R & C_R & M_R \\ M_R & M_R & C_R \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$C_{sR} = -C_1 \begin{bmatrix} \cos \gamma & \cos(\gamma + \rho) & \cos(\gamma - \rho) \\ \cos(\gamma - \rho) & \cos \gamma & \cos(\gamma + \rho) \\ \cos(\gamma + \rho) & \cos(\gamma - \rho) & \cos \gamma \end{bmatrix}, \quad C_{Rs} = C_{sR}^T, \quad (4)$$

где T — знак транспонирования.

Матрицы C_{ss} и C_{RR} являются постоянными матрицами. Матрицы C_{sR} и C_{Rs} зависят от положения ротора относительно статора (угол γ).

Вводим матрицы-столбцы натуральных переменных

$$q_s = (q_a \ q_b \ q_c), \quad q_R = (q_n \ q_m \ q_h), \quad (5)$$

$$U_s = (U_a \ U_b \ U_c) \quad U_R = (U_n \ U_m \ U_h).$$

Тогда имеем $Q = (q_s \ q_R)$, $U = (U_s \ U_R)$,

$$q_s = C_{ss}U_s + C_{sR}U_R, \quad q_R = C_{Rs}U_s + C_{RR}U_R. \quad (6)$$

Матрицы проводимостей машины будут равны

$$G = \begin{bmatrix} G_s & 0 \\ 0 & G_R \end{bmatrix}, \quad G_s = g_s E, \quad G_R = g_R E, \quad (7)$$

E — единичная матрица размерностью (3×3) .

Матрицы емкостей (2) и проводимостей (7) удовлетворяют условию теоремы преобразования (см. (1)) и, следовательно, уравнения асинхронной машины с такими матрицами могут быть преобразованы в пространство Горева—Парка. В качестве матриц Ляпунова могут быть приняты нижеследующие матрицы (см. соответствующие матрицы в работе (2)):

$$L = \begin{bmatrix} L_s & 0 \\ 0 & L_R \end{bmatrix}, \quad L_s = \begin{bmatrix} 1 \cos \theta & -\sin \theta \\ 1 \cos(\theta - \rho) & -\sin(\theta - \rho) \\ 1 \cos(\theta + \rho) & -\sin(\theta + \rho) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$L_R = \begin{bmatrix} 1 \cos \beta & \sin \beta \\ 1 \cos(\beta + \rho) & \sin(\beta + \rho) \\ 1 \cos(\beta - \rho) & \sin(\beta - \rho) \end{bmatrix}.$$

Матрицы, соответствующие уравнениям (7) работы (1), для асинхронной машины будут равны

$$C_{ss*} = L_s^{-1} C_{ss} L_s, \quad C_{RR*} = L_R^{-1} C_{RR} L_R, \quad C_{sR*} = L_s^{-1} C_{sR} L_R,$$

$$C_{Rs*} = L_R^{-1} C_{Rs} L_s, \quad \Omega_s = L_s^{-1} \frac{dL_s}{d\theta}, \quad \Omega_R = L_R^{-1} \frac{dL_R}{d\beta}, \quad (9)$$

$$G_{s*0} = L_s^{-1} G_s L_s = G_s, \quad G_{R*0} = L_R^{-1} G_R L_R = G_R.$$

Последние два выражения получены с учетом, что $G_s = g_s E$, $G_R =$

$= g_R E$. Введем для асинхронной машины матрицу активных проводимостей, на которую замыкаются роторные цепи.

$G_{RH} = g_{RH} E$ и, соответственно, $G_{RH*} = \Lambda_R^{-1} G_{RH} \Lambda_R = G_{RH}$. Производя необходимые вычисления, получим:

$$C_{ss*} = \begin{Bmatrix} C_{s0} & 0 & 0 \\ 0 & C_{sc} & 0 \\ 0 & 0 & C_{sc} \end{Bmatrix}, \quad C_{RR*} = \begin{Bmatrix} C_{R0} & 0 & 0 \\ 0 & C_{Rc} & 0 \\ 0 & 0 & C_{Rc} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$C_{sR*} = C_{Rs*} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -N & 0 \\ 0 & 0 & -N \end{Bmatrix}, \quad \left. \begin{array}{l} C_{s0} = C_s + 2M_s, \quad C_{sc} = C_s - M_s \\ C_{R0} = C_R + 2M_R, \quad C_{Rc} = C_R - M_R \\ N = 3/2 C_1 \end{array} \right\}$$

$$\Omega_s = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \Omega_R = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Основные уравнения в пространстве Горева—Парка примут вид (см. уравнения (8)÷(11) в (1)):

для статора

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{dq_{s*}}{dt} = G_s U_{s*} + \Omega_s q_{s*} \frac{d\theta}{dt} + i_{rs*} \\ q_{s*} = C_{ss*} U_{s*} + C_{sR*} U_{R*} \\ i_{s*} = -\frac{dq_{s*}}{dt} - \Omega_s q_{s*} \frac{d\theta}{dt} \\ -C_{ss*} \frac{dU_{s*}}{dt} - C_{sR*} \frac{dU_{R*}}{dt} = G_s U_{s*} + \Omega_s (C_{ss*} U_{s*} + \\ + C_{sR*} U_{R*}) \frac{d\theta}{dt} + i_{rs*} \end{array} \right\} \quad (12)$$

для ротора

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{dq_{R*}}{dt} = (G_R + G_{RH}) U_{R*} + \Omega_R q_{R*} \frac{d\beta}{dt} \\ q_{R*} = C_{Rs*} U_{s*} + C_{RR*} U_{R*} \\ i_{R*} = -\frac{dq_{R*}}{dt} - \Omega_R q_{R*} \frac{d\beta}{dt} \\ -C_{Rs*} \frac{dU_{s*}}{dt} - C_{RR*} \frac{dU_{R*}}{dt} = (G_R + G_{RH}) U_{R*} + \\ + \Omega_R (C_{Rs*} U_{s*} + C_{RR*} U_{R*}) \frac{d\beta}{dt} \end{array} \right\} \quad (13)$$

Матрицы-столбцы новых переменных имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} q_{s*} &= (q_{s0} \ q_{sd} \ q_{sq}), \quad q_{R*} = (q_{R0} \ q_{Rd} \ q_{Rq}), \\ U_{s*} &= (U_{s0} \ U_{sd} \ U_{sq}), \quad U_{R*} = (U_{R0} \ U_{Rd} \ U_{Rq}) \\ i_{rs*} &= (i_{rs0} \ i_{rsd} \ i_{rsq}), \quad i_{R*} = (i_{R0} \ i_{Rd} \ i_{Rq}) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

и аналогичные обозначения для остальных токов статора и ротора (в том числе для токов вращения).

Выражение для электромагнитного момента (см. уравнение (4) в (1)) после преобразования получит вид:

$$M_{эм} = -\frac{3}{2} p N (U_{sd} U_{Rq} - U_{sq} U_{Rd}), \quad (15)$$

Системы дифференциальных и алгебраических уравнений (12) и (13) с учетом значений матриц (10) и (11) и совместно с выражением электромагнитного момента (15) позволяют исследовать стационарные и нестационарные (переходные) режимы трехфазных асинхронных машин. В случае, когда роторные цепи подключаются не на активные сопротивления, а к любой нагрузке или к сети частоты ротора (асинхронная емкостная машина двойного питания), уравнения для ротора должны быть выписаны с использованием матрицы тока i_{rk*} .

В этом случае вместо первой и последней строчки уравнения (13) будем иметь уравнения вида:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dq_{R*}}{dt} &= G_R U_{R*} + \Omega_R q_{R*} \frac{d\beta}{dt} + i_{rR*} \\ -C_{Rs*} \frac{dU_{s*}}{dt} - C_{RR*} \frac{dU_{R*}}{dt} &= G_R U_{R*} + \Omega_R (C_{Rs*} U_{s*} + \\ &+ C_{RR*} U_{R*}) \frac{d\beta}{dt} + i_{rR*} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

В выражения основных уравнений (12), (13) и (16) входят производные углов θ и β . Эти производные можно выразить через угловые скорости вращения ротора ω_R и синхронных осей $(dq) \ \omega_F$. С учетом уравнения (1) получим:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_F, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \omega_R, \quad \frac{d\beta}{dt} = \omega_R - \omega_F. \quad (17)$$

Вводя скольжение ротора $s = (\omega_F - \omega_R) \cdot \omega_F^{-1}$, окончательно получаем:

$$\frac{d\beta}{dt} = -s \omega_F. \quad (18)$$

Уравнения (12) и (13) для стационарного симметричного режима асинхронной емкостной машины примут вид (производные равны нулю, переменные нулевой последовательности отсутствуют) (выписываем вторые и последние строчки этих уравнений):

для статорных цепей

$$\left. \begin{aligned} q_{sd} &= C_{sc}U_{sd} - NU_{Rd}, & q_{sq} &= C_{sc}U_{sq} - NU_{Rq}, \\ g_s U_{sd} - \omega_F(C_{sc}U_{sq} - NU_{Rq}) + i_{rsd} &= 0, \\ g_s U_{sq} + \omega_F(C_{sc}U_{sd} - NU_{Rd}) + i_{rsq} &= 0; \end{aligned} \right\}, \quad (19)$$

для роторных цепей

$$\left. \begin{aligned} q_{Rd} &= -NU_{sd} + C_{Rc}U_{Rd}, & q_{Rq} &= -NU_{sq} + C_{Rc}U_{Rq}, \\ g_R^H U_{Rd} + s\omega_F NU_{sq} - s\omega_F C_{Rc}U_{Rq} &= 0, \\ g_R^H U_{Rq} - s\omega_F NU_{sd} + s\omega_F C_{Rc}U_{Rd} &= 0. \end{aligned} \right\}, \quad (20)$$

где обозначено $g_R^H = g_R + g_{RH}$.

Вводя вектора $\vec{q}_s = q_{sq} + jq_{sd}$, $\vec{U}_s = U_{sq} + jU_{sd}$, $\vec{q}_R = q_{Rq} + jq_{Rd}$ и т. д., получим:

$$\vec{q}_s = C_{sc}\vec{U}_s - N\vec{U}_R, \quad \vec{q}_R = -N\vec{U}_s + C_{Rc}\vec{U}_R, \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} g_s \vec{U}_s - j\omega_F C_{sc}\vec{U}_s + j\omega_F N\vec{U}_R + i_{rs} &= 0 \\ g_R^H \vec{U}_R + js\omega_F N\vec{U}_s - js\omega_F C_{Rc}\vec{U}_R &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (22)$$

При заданном векторе $\vec{U}_s$ система (22) позволяет определить вектора $\vec{U}_R$ и i_{rs} (в двигательном режиме удобнее использовать ток сети, поступающий в машину $\vec{i}_{cs} = -\vec{i}_{rs}$) и построить векторную диаграмму асинхронной емкостной машины.

В заключение преобразуем выражение (15) для стационарного режима. Вводя сопряженный комплекс $\vec{U}_R^* = U_{Rq} - jU_{Rd}$, можем записать:

$$U_{sd}U_{Rq} - U_{sq}U_{Rd} = \text{Im}\vec{U}_s\vec{U}_R^*.$$

Из второй строчки уравнения (22) имеем:

$$\vec{U}_R^* = \frac{s\omega_F N\vec{U}_s}{s\omega_F C_{Rc} - jg_R^H},$$

где $\vec{U}_s^*$ — сопряженный комплекс.

Подставляя эти выражения в (15) и производя необходимые вычисления, получаем:

$$M_{эм} = \frac{3}{2} P \frac{s\omega_F (g_R^H) N U_s^2}{(g_R^H)^2 + (s\omega_F C_{Rc})^2}. \quad (23)$$

Максимальные значения ($M_{эм}$) наступают при скольжениях

$$s_m = \pm g_R^H (\omega_F C_{Rc})^{-1} = \pm (g_R + g_{RH}) (\omega_F C_{Rc})^{-1}. \quad (24)$$

Положительные скольжения $s \geq 0$ имеют место в двигательном режи-

ме ($0 \leq s \leq 1$) и в режиме противовключения ($s > 1$). Отрицательные скольжения соответствуют генераторному режиму. Максимальное значение электромагнитного момента для положительных скольжений (по модулю совпадает с экстремальным значением в генераторном режиме) равно

$$M_{эм \max} = \frac{3}{4} p \frac{N}{C_{\kappa c}} U_s^2 \quad (25)$$

и не зависит от величины активных сопротивлений, введенных в цепь ротора. В выражении (25) используется амплитудное фазное напряжение U_s . С учетом (24) и (25) выражение (23) можно представить в виде

$$M_{эм} = M_{эм \max} \frac{2ss_m}{s^2 + s_m^2} \quad (26)$$

Выражение (26) повторяет соответствующую зависимость $M_{эм}(s)$ для асинхронных машин индуктивного типа (уравнение Клосса). Изменяя величину активных сопротивлений, вводимых в роторные цепи (при фазной конструкции ротора), можно изменять величину s_m (см. уравнение (24)) и, следовательно, величину пускового момента. При этом в отличие от асинхронных машин индуктивного типа увеличение активного сопротивления (уменьшение g_{RH}) приводит к сдвигу s_m в сторону малых скольжений.

Разработанные в работе (1) и настоящей статье основы теории емкостных машин переменного тока позволяют на базе соответствующих алгебраических и дифференциальных уравнений с единых позиций описывать обширный класс электрических машин емкостного типа, как синхронных, так и асинхронных. Доказанная авторами теорема преобразования для емкостных машин позволяет однозначно, на основе анализа матрицы емкостей и матрицы проводимостей, определять возможность перехода в пространство новых переменных, в котором дифференциальные уравнения имеют постоянные коэффициенты при постоянной скорости вращения. Для синхронных и асинхронных машин трехфазного тока определены матрицы емкостей для натуральных переменных; даны матрицы преобразования Ляпунова для перехода к новым переменным в пространстве Горева—Парка; приведены две системы основных дифференциальных уравнений в пространстве Горева—Парка соответственно для синхронных и асинхронных машин; получены выражения для электромагнитных моментов этих машин в новых переменных. Рассмотрены стационарные симметричные режимы и получены векторные уравнения для построения векторных диаграмм. Несмотря на то, что в этой работе авторы не исследовали переходные процессы и стационарные несимметричные режимы емкостных машин (анализ этих процессов и режимов должен базироваться на решении предложенных в работе дифференциальных уравнений), общая структура уравнений и анализ симметричных

стационарных режимов позволяет утверждать, что между емкостными и индуктивными машинами переменного тока несмотря на их принципиальные отличия имеется много аналогий и в целом эти типы машин являются дуальными друг относительно друга. Оба типа этих машин должны быть отнесены к электродинамике (в настоящее время по УДК емкостные машины находятся в разделе «электростатика»).

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Ա. Ղ. ԻՈՍԻՖՅԱՆ, Գ. Լ. ԱՐԵՇՅԱՆ

Փոփոխական հոսանքի ունակային ասինխրոն մեքենաների տեսության կիրառումները

Աշխատանքում դիտարկված են ունակային ասինխրոն մեքենաներ, տրված են համապատասխան հանրահաշվական և դիֆերենցիալ հավասարումները: Այդ հավասարումները թույլ են տալիս ուսումնասիրել մեքենայի ստացիոնար ռեժիմները և անցողիկ պրոցեսները: Ստացված է էլեկտրամագնիսական մոմենտի արտահայտությունը նոր փոփոխականների միջոցով: Ստացիոնար պրոցեսների դեպքում էլեկտրամագնիսական մոմենտը արտահայտված է ցանցի լարումի, ասինխրոն մեքենայի պարամետրների և սահքի միջոցով: Որոշված է մաքսիմալ մոմենտի արտահայտությունը և համապատասխան սահքը, որի դեպքում տեղի ունի մոմենտը այդ էկստրեմալ արժեքը:

Ցույց է տրված, որ մոմենտի փոփոխությունը սահքից նորից հանգեցնում է Կլոսսի հավասարմանը, որը ստացված է ինդուկտիվ ասինխրոն մեքենաների համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. Г. Иосифьян, Г. Л. Арешян, ДАН АрмССР, т. 73, № 1 (1981). ² А. Г. Иосифьян, Г. Л. Арешян, ДАН АрмССР, т. 63, № 2 (1976).

УДК 541—1

ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

О. К. Давтян

О некоторых специфических особенностях к. п. д. двигателей внутреннего сгорания (ДВС)

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Б. Налбандяном 12/XI 1980)

Как известно, процессы сгорания топлива в ДВС связаны с определенными периодами или фазами сгорания. Как для карбюраторных, так и для дизельных двигателей характерны 2 периода: 1) задержка воспламенения и 2) задержка видимого сгорания. Для дизельных двигателей второй период состоит из двух фаз: периода с быстрым повышением давления и температуры и периода сгорания, протекающего при почти постоянном давлении.

В течение периода задержки воспламенения, в частности при окислительных процессах, происходит нарастание скорости образования активных молекул, появляются и гибнут перекисные свободные радикалы. Как только скорость процесса рождения свободных радикалов становится больше скорости их гибели, начинается второй, а в дизельных двигателях и третий, период видимого сгорания—период цепных реакций окисления углеводородов.

Однако теоретические исследования показывают, что в течение периода задержки при определенных условиях могут протекать и другие не менее важные невидимые процессы, также носящие цепной характер, как процесс крекинга углеводородов. И как мы увидим, от этого процесса довольно сильно зависит к.п.д. двигателя.

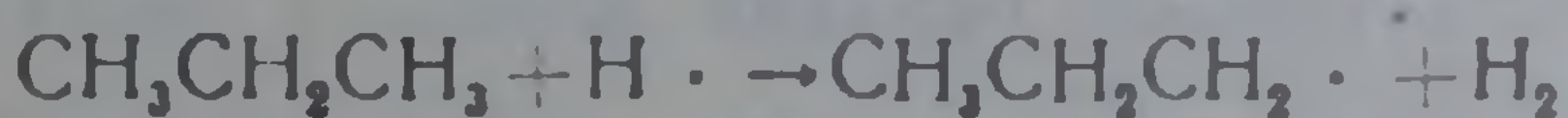
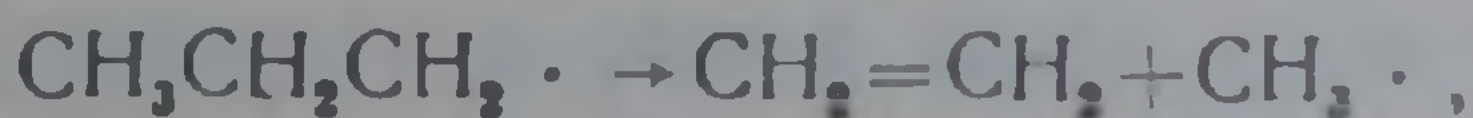
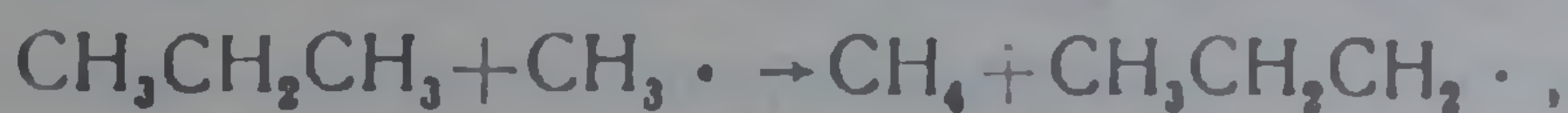
Хорошо известно, что крекинг углеводородов в парообразной фазе происходит при температуре от 400°C и выше (до 700°C). При этом при более низких температурах крекингу подвергаются алканы (углеводороды жирного ряда), а затем идут алкены, алифены и при более высоких температурах, 650°C, ароматические углеводороды. С повышением температуры и давления скорость крекинга возрастает. Все эти условия крекинга имеются в период задержки процесса сгорания. В самом деле, у дизельных двигателей температура в камере

(в объеме) при периоде задержки составляет 500—600°C, а давление—40—45 кг/см², у карбюраторных—при 360—470°C и 12—15 кг/см² соответственно. Однако температура головки выпускного клапана и ее соседних участков у карбюраторных двигателей колеблется от 500 до 700°C, а у дизельных еще больше. Поверхность этого горячего участка может служить идеальной насадкой для термической активации реагирующих молекул, а также образования свободных радикалов для крекинга и окисления. Таким образом, в течение периода задержки сгорания в ДВС возникают благоприятные температура и давление для протекания процессов крекинга углеводородов.

Обычно процесс крекинга в парообразной фазе совершается в объеме по свободнорадикальному—цепному механизму. Причем первоначальными свободными радикалами являются $\text{CH}_3 \cdot$ и $\text{H} \cdot$. В случае непредельных углеводородов, например, пропана, цепную реакцию можно представить в следующей форме:



и дальше:



.

Характерная и важная особенность цепных реакций крекинга состоит в том, что эти реакции в основном являются эндотермическими, а это значит, что образовавшиеся продукты реакции обладают большей теплотворной способностью, чем исходные.

Хотя процессы крекинга углеводородов (кроме ароматических соединений) связаны с поглощением теплоты, все же эти реакции при отмеченных температурах термодинамически дозволены благодаря отрицательному значению изменения термодинамического потенциала (свободной энергии) химической реакции

$$\Delta Z = \Delta H - \Delta ST,$$

где $\Delta H = -\bar{Q}_p$ и ΔS —изменения энтальпии и энтропии; T —абсолютная температура.

В результате многочисленных вычислений на основании известных табличных данных для углеводородов нами было выявлено следующее правило:

Теплота сгорания продуктов крекинга углеводорода (за исключением ароматических) приблизительно равна или больше теплоты сгорания исходных элементов образования данного углеводорода (CH_2).

Это правило очень важно для определения изменения теплотворной способности жидкого топлива в результате его крекинга в ДВС. Действительно, до сих пор нет данных исследований крекинга в ДВС.

Однако нам хорошо известно, что теплота сгорания бензина и солярового масла в среднем соответственно равна 10 300 и 10 000 ккал/кг. Кроме того нам также известно, что большинство бензинов и соляровых масел имеет элементарный состав: 85% *углерода* (C) и 15% *водорода* (H). И поскольку теплота сгорания водорода (H₂) и углерода (графита) при 298°K соответственно равна $28,8 \cdot 10^3$ и $7,89 \times 10^3$ ккал/кг, то теплота сгорания исходных элементов (C и H₂) бензина и солярового масла будет равна $11 \cdot 10^3$ ккал/кг. Таким образом, согласно приведенному правилу выигрыш энергии в результате крекинга составляет $\sim 7-10\%$. Температурное изменение этой величины небольшое. Например, при 1000°K оно будет равно 7,5—10,5%.

Если эта теплота отбирается у металлической насадки (головки выпускного клапана двигателя), то температура последней не будет сильно уменьшаться, так как незначительное падение температуры головки автоматически приведет к уменьшению скорости циркуляции охлаждающей жидкости двигателя благодаря наличию термостатического устройства. Таким образом, в итоге получается, что увеличение теплотворной способности топлива в результате крекинга происходит за счет той теплоты, которая обычно (без крекинга топлива) передается охлаждающей двигатель жидкости—холодильнику цикла.

В заключение этой части следует отметить, что для протекания процессов крекинга до конца в период задержки сгорания необходимо, чтобы скорость цепных реакций крекинга была по возможности большой.

Использовать теплоту, передаваемую холодному источнику (холодильнику) в двигателях, для увеличения теплотворной способности топлива (путем крекинга или пиролиза) возможно и другим путем, если условия для подобных эндотермических процессов не удовлетворительны в течение периода задержки сгорания. Во всех типах двигателей внутреннего сгорания температура выпускных газов около выпускного клапана в зависимости от нагрузки двигателя составляет 500—800°C. Это значит, что часть теплоты двигателя, отдаваемой с выпускными газами, через подходящий теплообменник можно превратить в потенциальную химическую энергию в процессе крекинга или пиролиза.

Переходя к периоду (второму и третьему периодам для дизеля) видимого сгорания (цепных реакций окисления углеводородов), следует отметить, что для увеличения экономичности двигателя топливо должно гореть по возможности с большой скоростью. Увеличение же продолжительности процесса горения ухудшает экономичность и мощность двигателя. Действительно, при затяжном процессе сгорания топлива значительно возрастает теплоотдача в охлаждающую жидкость (или воздух), так как при этом увеличивается поверхность цилиндра, омываемая горящим газом. Кроме того, вследствие повышения температуры расширяющегося газа в цилиндре возрастает теплоотдача с выхлопными газами. Вообще затяжной процесс сгорания топлива означает увеличение объема сгорания, что эквивалентно уменьшению степени эффективного сжатия. Это, согласно известным

формулам, приводит к уменьшению термического коэффициента полезного действия двигателя.

Далее, при медленном процессе сгорания топлива давление в цилиндре падает, а падение давления при температуре порядка 2000°C (и выше) создает благоприятные условия для эндотермического процесса диссоциации продуктов сгорания, образования окиси углерода и окислов азота. Диссоциированные продукты сгорания в процессе при пониженных температурах вновь окисляются, в результате повышается температура отработанных газов, следовательно, увеличивается температура выхлопных газов, что приводит к падению экономичности двигателя.

Как известно, выражения для к.п.д. идеальных круговых процессов получаются на основании первого закона термодинамики с рабочим веществом—идеальным газом. Сущность же приложения второго принципа термодинамики к этим процессам в данном случае сводится к тому, что к.п.д. цикла не зависит от рабочего вещества, т. е. вместо идеального газа в принципе можно взять любое вещество в любом количестве, удобное для проведения цикла.

Однако, как будет показано, подобная формулировка второго закона термодинамики в случае двигателей внутреннего сгорания, в которых в процессе цикла часть теплоты «отброса» используется для эндотермических процессов пиролиза или крекинга углеводородов топлива, должна быть уточнена. Она на основании факторов, которые были рассмотрены нами выше, должна быть сформулирована следующим образом. *Термический к.п.д. теоретических циклов для двигателей внутреннего сгорания не зависит от рабочего вещества в том случае, если в процессе проведения циклов не происходит превращения теплоты, отдаваемой холодильнику, в энергию химического превращения (крекинга, пиролиза) топлива.* В противном случае данный теоретический цикл фактически становится эквивалентным двух- или многоступенчатым циклом, в котором теплота холодного источника одного цикла служит источником теплоты последующего цикла.

Для иллюстрации и количественного представления приведенного утверждения рассмотрим идеальные циклы двигателей внутреннего сгорания, а именно идеальный цикл, соответствующий карбюраторным двигателям с сообщением теплоты при постоянном объеме (см. рис. 1), и идеальный цикл, соответствующий компрессорным дизельным двигателям с сообщением теплоты при постоянном давлении (см. рис. 2). Рассмотрев результаты этих циклов, не трудно перейти к смешанным циклам, относящимся к бескомпрессорным дизельным двигателям.

Термический к.п.д. любого цикла определяется как

$$\eta_t = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \quad (1)$$

где Q_1 —затраченная теплота (в данном случае она равна теплоте сгорания топлива); Q_2 —теплота, передаваемая холодильнику—холод-

ному источнику. Если же в процессе цикла совершается эндотермическое химическое превращение углеводородов с поглощением теп-

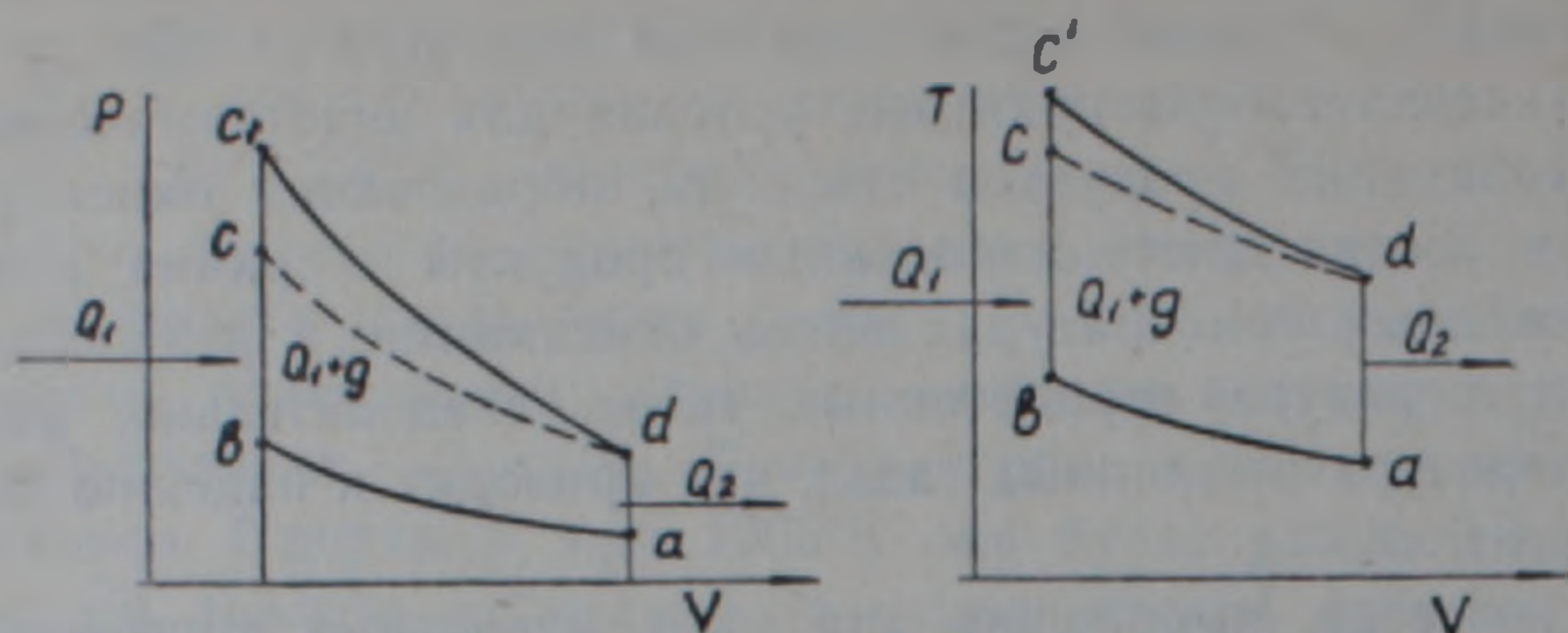


Рис. 1. Индикаторная диаграмма теоретического цикла ДВС с сообщением теплоты при постоянном объеме

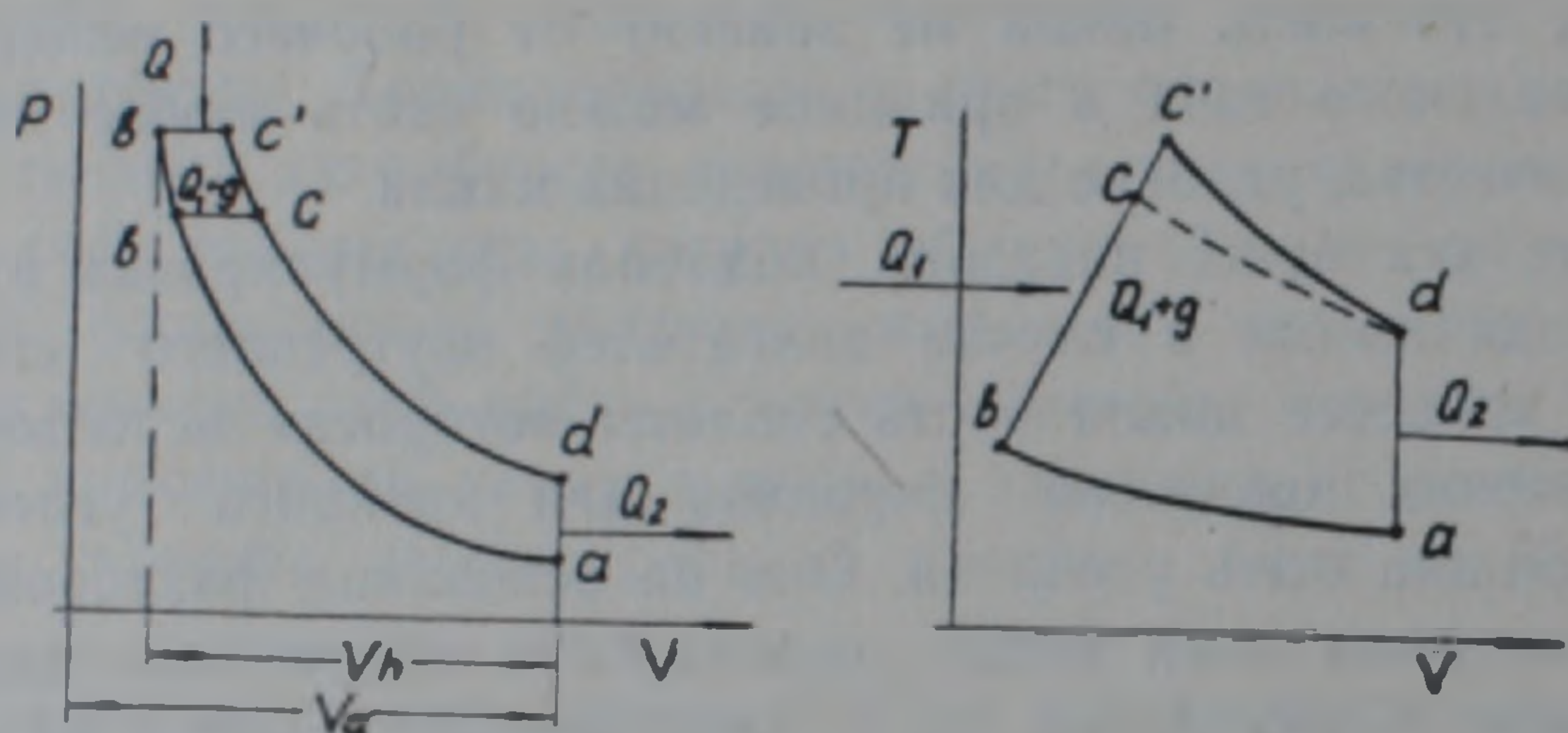


Рис. 2. Индикаторная диаграмма теоретического цикла ДВС с сообщением теплоты при постоянном давлении

лоты q за счет теплоты холодного источника Q_2 , т. е. $A.B... \rightarrow A+B+...+$, где $A.B...$ — сложные углеводороды и $A+B+...$ — углеводороды после пиролиза или крекинга, то соотношение (1) мы должны переписать в виде

$$\eta_i = \frac{Q'_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{Q_1 + q - Q_2}{Q_1}, \quad (2)$$

где $Q'_1 = Q_1 + q$ — теплота сгорания продуктов химического превращения ($A.B... \rightarrow A+B+...$) и Q_1 — теплота сгорания исходных веществ ($A.B...$). В данном случае в выражении (2) величина Q_2 остается неизменной, так как эндотермический процесс фактически можно рассмотреть как источник холода, так что в сумме $Q_2 = q + Q'_2$ теплота q передается „химическому источнику холода“, а Q'_2 — обычному холодному источнику.

Согласно второму принципу термодинамики в качестве рабочего вещества идеального цикла мы можем взять идеальный газ с присутствующими ему идеальными законами. Однако в конце сжатия (при переходе поршня в верхнюю мертвую точку) мгновенно из внешнего источника сообщается теплота Q_1 , которая внутри цикла превращается

в $Q_1' = Q_1 + q$. Этот умозрительный процесс эквивалентен теоретическому циклу, источником теплоты которого служит теплота сгорания топлива, которая предварительно в циклическом процессе эндотермически переходит из состояния А, В... в состояние А + В +

Согласно индикаторной диаграмме, представленной на рис. 1, после адиабатического сжатия по линии ab сообщается теплота при $V = \text{const}$ по линии bc' и, затем, после адиабатического расширения, при котором совершается работа, по линии $c'd$ теплота изохорически передается холодильникам (химическому и обычному). При этих изохорических процессах с идеальным рабочим газом

$$\left. \begin{aligned} Q_1' &= Q_1 + q = GC_v(T_c + \Delta t - T_b) = GC_v(T_{c'} - T_b) \\ Q_2 &= GC_v(T_d - T_a) \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

где G и C_v — масса рабочего вещества и его теплоемкость при $V = \text{const}$; Δt — изменение температуры сгорания в результате увеличения теплотворной способности топлива на величину q . $\Delta t = \frac{q}{Gc_v}$.

Согласно же (2) и (3)

$$\eta_t = \frac{Q_1 + q - Q_2}{Q_1} = \frac{(T_c + \Delta t - T_b) - (T_d - T_a)}{T_c - T_b} = \frac{(T_{c'} - T_b) - (T_d - T_a)}{T_c - T_b}. \quad (4)$$

На основании известных соотношений для адиабаты и изохоры идеальных газов

$$TV^{k-1} = \text{const} \quad \text{и} \quad T_1 p_2 = T_2 p_1 \quad (5)$$

в выражении (4)

$$\left. \begin{aligned} T_{c'} &= T_b \lambda' = T_a \epsilon^{k-1} \lambda', \quad T_c = T_b \lambda = T_a \epsilon^{k-1} \lambda \\ T_b &= T_a \epsilon^{k-1}, \quad T_d = T_c / \epsilon^{k-1} = T_a \lambda \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

где $\epsilon = V_a/V_b$, $\lambda = p_c/p_b$ и $\lambda' = p_{c'}/p_b$ соответственно представляют собой степень сжатия двигателя и степени повышения давления при $q=0$ и при $q \neq 0$.

Согласно этим данным

$$\eta_t = \frac{\lambda' - 1}{\lambda - 1} - \frac{1}{\epsilon^{k-1}}, \quad \lambda' \geq \lambda. \quad (7)$$

При $\lambda' = \lambda$ выражение (7) переходит в обычное соотношение для к. п. д. теоретического цикла с сообщением теплоты при постоянном объеме.

Для теоретического цикла с сообщением теплоты Q_1 при постоянном давлении и с отдачей теплоты Q_2 холодному источнику при постоянном объеме (см. рис. 2)

$$\left. \begin{aligned} Q_1' &= Q_1 + q = Gc_p(T_c + \Delta t - T_b) = Gc_p(T_{c'} - T_b) \\ Q_2 &= Gc_v(T_d - T_a) \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Тогда

$$\eta_t = \frac{k(T_{c'} - T_b) - (T_d - T_a)}{k(T_c - T_b)}, \quad k = c_p/c_v. \quad (9)$$

И в данном случае на основании соотношений для адиабаты, изохоры и изобары

$$\left. \begin{aligned} TV^{k-1} &= \text{const}, & pV^k &= \text{const} \\ T_1V_2 &= T_2V_1, & T_1p_2 &= T_2p_1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

мы имеем

$$\left. \begin{aligned} T_c &= T_b\rho = T_a\varepsilon^{k-1}\rho, & T_{c'} &= T_b\rho' = T_a\varepsilon^{k-1}\rho' \\ T_b &= T_a\varepsilon^{k-1}, & T_d &= T_c/\varepsilon^{k-1} = T_a\rho^k \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где $\rho' = V_{c'}/V_{b'}$ и $\rho = V_c/V_b$ степени предварительного расширения соответственно при $T_{c'} = T_c + \Delta t$ и при T_c .

Согласно этим данным к. п. д. теоретического цикла будет определяться как

$$\eta_t = \frac{\rho' - 1}{\rho - 1} - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \cdot \frac{\rho^{k-1}}{k(\rho - 1)}, \quad \rho' \geq \rho. \quad (12)$$

Как видно, при $\rho' = \rho$ уравнение (12) становится обычным уравнением для к. п. д. соответствующего теоретического цикла.

Итак, мы пришли к обобщенным соотношениям для к. п. д. теоретических циклов двигателей внутреннего сгорания, частными случаями которых (когда $\lambda' = \lambda$ и $\rho' = \rho$) являются обычные (известные) соотношения. Иначе говоря, к. п. д. теоретического цикла двигателя зависит от того, совершаются или нет эндотермические химические превращения топлива за счет энергии, передаваемой холодильнику. Следовательно в двигателях внутреннего сгорания в указанном смысле термический к. п. д. теоретического цикла зависит от рабочего вещества.

НПО «Армсельхозмеханизация»

2. 4. ԴԱՎԹՅԱՆ

Ներքին այրման շարժիչի (ՆԱՇ) օգտակար գործողության գործակցի (ՕԳԳ) սպեցիֆիկ առանձնահատկությունների մասին

Վառելանյութի այրման պրոցեսում, անտեսանելի այրման ֆազայում, որոշ պայմաններում վառելանյութի ջերմարար հատկությունը կարող է մեծանալ ածխաջրածինների կրեկինգի և պիրոլիզի էնդոտերմիկ պրոցեսների շնորհիվ, որոնք տեղի են ունենում ի հաշիվ շարժիչի աշխատանքի ընթացքում սառեցման աղբյուրին տրվող ջերմության: Այդ իսկ պատճառով ներքին այրման շարժիչի ջերմային ցիկլի ՕԳԳ կախումն ունի նրանից, թե սառեցման աղբյուրին տրվող ջերմության հաշվին արդյոք կատարվում են նշված էնդոտերմիկ պրոցեսները, թե ոչ:

УДК 631.523.575.12

ГЕНЕТИКА

А. М. Агаджанян

Действие S-аллелей при возвратных скрещиваниях внутривидовых гибридов *Lycopersicon hirsutum*

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. А. Бабаджаняном 15/XII 1980)

Внутривидовые гибриды *L. hirsutum* получены от скрещивания самофертильной формы *glabratum* с самостерильной формой *hirsutum*. В сообщении рассматриваются вопросы действия S-аллелей при возвратных скрещиваниях этих гибридов с родительскими формами.

Опыты проводили в 1974—1976 и 1978 гг. Объектами исследования в основном служили внутривидовые гибриды первого поколения *glabratum* × *hirsutum* и родительские формы. Возвратные скрещивания осуществляли во всех четырех возможных направлениях. В трех направлениях скрещивания, как правило, проводили с предварительной кастрацией материнских цветков. Цветки кастрировали за 1—2 дня до опыления. При скрещивании самонесовместимого *hirsutum* с растениями F_1 предварительную кастрацию цветков не проводили.

Определяли процент завязываемости плодов и подсчитывали число семян в них. В беккроссном потомстве *hirsutum* × F_1 (*glabratum* × *hirsutum*) растения проверяли на самосовместимость путем искусственного самоопыления.

Скрещивания материнской формы с гибридами F_1 . Как показывают данные таблицы, эти скрещивания почти не дали положительных результатов. В 1974—1976 и 1978 гг. 351 цветок двух образцов *glabratum* опылен пылью трех гибридных комбинаций *glabratum* × *hirsutum* и получено всего 2 плода, содержавших 40 семян (от опыления пылью двух гибридных комбинаций). Трудность скрещивания в этой комбинации, подобно комбинации *glabratum* × *hirsutum* (¹), очевидно, объясняется сильной осыпаемостью кастрированных цветков *glabratum*.

Скрещивания гибридов F_1 с материнской формой. Скрещивания гибридов F_1 (♀) с материнской формой *glabratum* с предварительной кастрацией цветков почти не удались (таблица). Это соответствует

Возвратные скрещивания внутривидовых гибридов *L. hirsutum*

Комбинации скрещивания	Годы	Опылено цветков	Завязалось плодов	Проанали- зировано плодов	Число семян	
					всего	на 1 плод
Glabratum вр. 7924 × F ₁ (glabratum вр. 7924 × hirsutum 2021)	1974 — 1975	238	1	1	23	23,0
Glabratum вр. 7924 × F ₁ (glabratum вр. 7924 × hirsutum вр. 7732)	1976	70	0	—	—	—
Glabratum вр. 7736 × F ₁ (glabratum вр. 7736 × hirsutum вр. 7734)	1978	43	1	1	17	17,0
F ₁ (glabratum вр. 7924 × hirsutum 2021) × glabratum вр. 7922	1974 — 1975	245	2	—	—	—
F ₁ (glabratum вр. 7924 × hirsutum вр. 7732) × glabratum вр. 7924	1976	44	0	—	—	—
F ₁ (glabratum вр. 7924 × hirsutum вр. 7732) × glabratum вр. 7924*	1976	29	8	8	Незрелые семена	
F ₁ (glabratum вр. 7736 × hirsutum вр. 7734) × glabratum вр. 7736	1978	57	0	—	—	—
F ₁ (glabratum вр. 7924 × hirsutum 2021) × hirsutum 2021	1974 — 1975	283	1	—	—	—
F ₁ (glabratum вр. 7924 × hirsutum 2021) × hirsutum вр. 7732	1975	62	1	1	50	50,0
F ₁ (glabratum вр. 7924 × hirsutum вр. 7732) × hirsutum вр. 7732	1976	50	0	—	—	—
F ₁ (glabratum вр. 7924 × hirsutum вр. 7732) × hirsutum вр. 7732*	1976	33	11	11	Незрелые семена	
F ₁ (glabratum вр. 7924 × hirsutum 2021) × hirsutum вр. 7734	1975	62	0	—	—	—
F ₁ (glabratum вр. 7736 × hirsutum вр. 7734) × hirsutum вр. 7734	1978	71	0	—	—	—
Hirsutum 2021 × F ₁ (glabratum вр. 7924 × hirsutum 2021)*	1974 — 1975	418	53	45	127**	21,2
Hirsutum 2021 × F ₁ (glabratum вр. 7924 × hirsutum вр. 7732)*	1976	54	0	—	—	—
Hirsutum вр. 7732 × F ₁ (glabratum вр. 7924 × hirsutum вр. 7732)*	1976	64	0	—	—	—
Hirsutum вр. 7734 × F ₁ (glabratum вр. 7924 × hirsutum вр. 7732)*	1976	55	0	—	—	—
Hirsutum вр. 7734 × F ₁ (glabratum вр. 7736 × hirsutum вр. 7734)*	1978	52	0	—	—	—

* Скрещивания проводились без предварительной кастрации цветков

** Приводится число семян в плодах

теоретически ожидаемому при индивидуальном действии S -аллелей. Если S_i -аллели *hirsutum* при двойной дозе отвергают S_j -пыльцу *glabratum*, то при их независимом действии гетерозиготы $S_i S_j$ (гибриды *glabratum* × *hirsutum*) также должны подавлять пыльцу S_j . Возвратные скрещивания в этом направлении не удаются у межвидовых гибридов, полученных от скрещивания типичных самосовместимых видов с самонесовместимыми (²⁻⁶). Эти скрещивания в целом не удаются также у гибридов, гетерозиготных по аллелям S_i и S_c (^{3,7}). Как было отмечено выше, при независимом действии S -аллелей аналогичные беккроссы не должны иметь место и у внутривидовых гибридов *glabratum* × *hirsutum*.

Однако получены данные, показывающие, что у внутривидовых гибридов *glabratum* × *hirsutum* имеет место изменение активности S -аллелей. В связи с этим делается предположение, что неудача возвратного скрещивания *glabratum* с гибридами F_1 связана не только или скорее не столько с действием S -аллелей, сколько с удалением мужских органов гибрида, вернее с быстрой осыпаемостью кастрированных цветков. Отметим, что при опылении без кастрации получены довольно удовлетворительные результаты. Но без кастрации следует опылять только цветки самонесовместимых гибридов, таких, например, как в комбинации *glabratum* вр. 7924 × *hirsutum* вр. 7732. При опылении 29 цветков этой комбинации пыльцой *glabratum* получено 8 плодов (таблица).

О том, что неуспехи данного возвратного скрещивания во многом связаны с предварительной кастрацией материнских цветков, свидетельствуют также данные по самоопылению двух клонов F_1 по комбинации *glabratum* вр. 7924 × *hirsutum* 2021 (клоны 4 и 21). Если при искусственном самоопылении без кастрации цветков клоны 4 и 21 дали высокое завязывание осемененных плодов (81,1 и 80,0% соответственно), то внутри- и межклоновые опыления с кастрацией цветков не дали положительных результатов. Близкие результаты получены и при скрещивании растений F_1 комбинации *glabratum* вр. 7924 × *hirsutum* вр. 7732 с растениями F_1 комбинации *glabratum* вр. 7924 × *hirsutum* 2021 с предварительной кастрацией цветков и без нее (в 1976 г. в варианте с кастрацией от 29 цветков не завязалось ни одного плода, без кастрации — от 63 цветков получено 11 плодов). Такой результат, по-видимому, объясняется тем, что кастрированные цветки плохо развиваются и опадают вскоре после опыления.

Скрещивания гибридов F_1 с отцовской формой. Эти скрещивания удалась плохо, как и исходные скрещивания между *glabratum* и *hirsutum*. Данные приведены в таблице. Как видно, кастрированные цветки гибридов *glabratum* × *hirsutum* после опыления пыльцой *hirsutum* почти не дали завязывания плодов. Причина неудачи, вероятно, также заключается в преждевременной осыпаемости кастрированных цветков гибридных растений. В пользу этого предположения говорит следующее обстоятельство. По комбинации *glabratum* вр. 7924 × *hirsu-*

tum вр. 7732, оказавшейся самонесовместимой и давшей поэтому возможность использовать для гибридизации некастрированные цветки при опылении пыльцой отцовской формы, получен довольно высокий процент завязывания плодов.

Скрещивания отцовской формы с гибридами F_1 . Эти скрещивания хотя и с трудом, но все-таки удаются. Так, по комбинации *hirsutum* 2021 ♀ × F_1 (*glabratum* вр. 7924 × *hirsutum* 2021) ♂ в 1974 г. от опыления 260 некастрированных цветков получен 41 плод. В 1975 г. для опыления в этой комбинации использовано 8 клонов гибридов F_1 . Положительные результаты получены только по двум клонам (от 51 опыленного цветка завязалось 12 плодов). От опыления 107 цветков пыльцой 6 остальных клонов плоды не были получены. Безуспешными были возвратные скрещивания в других сочетаниях *hirsutum* × F_1 (таблица).

Чем объяснить тот факт, что скрещивания в направлении *hirsutum* ♀ × F_1 (*glabratum* × *hirsutum*) ♂ оказались все же возможными? Существующие ныне гипотезы, объясняющие одностороннюю несовместимость у растений (гипотеза Льюиса и Кроу (⁸) о двойственной функции *S*-аллелей и гипотеза Абдаллы (^{9,10}) о соперничестве двух возможностей), исходят из предположения, что разные формы *S*-аллелей при гаметофитной несовместимости функционально независимы. Ранее было показано, что у межвидовых гибридов *L. esculentum* × *L. hirsutum* f. *hirsutum* ($S_i S_c$) и *L. esculentum* × *L. hirsutum* f. *glabratum* ($S_j S_c$) имеет место изменение активности *S*-аллелей в пыльце (⁶) и пестике (⁷). В частности происходит ослабление отвергающих S_i и S_j аллелей в пыльце по сравнению с S_i -аллелями *hirsutum* и S_j -аллелями *glabratum*. В результате этого скрещивание в направлении *hirsutum* ♀ × F_1 (*esculentum* × *hirsutum*) ♂ становится невозможным, несмотря на то что компоненты скрещивания не были идентичны по аллелям самонесовместимости S_i . Таким же образом ведет себя и возвратное скрещивание *glabratum* ♀ × F_1 (*esculentum* × *glabratum*) ♂.

Положительные результаты при аналогичных беккроссах гибридов *glabratum* × *hirsutum* без учета других данных могут говорить о неизменяемости активности *S*-аллелей. Вследствие этого скрещивания *hirsutum* ♀ × F_1 (*glabratum* × *hirsutum*) ♂ должны, по-видимому, удаваться во всех случаях, когда S_i -аллели пестика и пыльцы неидентичны. Оплодотворение здесь должно происходить только за счет S_i -пыльцы, однако той, S_i -аллель которой отличается от S_i -аллелей пестика. Что же касается S_j -пыльцы гибрида, то при независимом действии *S*-аллелей она должна подавляться таким же образом, как S_j -пыльца „чистого“ *glabratum*.

Между тем в BC_1 *hirsutum* × F_1 (*glabratum* × *hirsutum*) обнаружено некоторое количество самосовместимых растений. В 1976 г. из 45 растений BC_1 на самосовместимость проверено 28, из которых 4 оказались самосовместимыми (число семян в плодах при са-

моопылении колебалось от 5 до 20), а остальные — самонесовместимыми.

Растения BC_1 , которые представлены аллелями S_i , являются самонесовместимыми. Предполагается, что 4 самосовместимых растения имеют генотип S_iS_j . Следует допустить отсюда, что у гибридов $glabratum \times hirsutum$ под влиянием S_i -аллелей усиливается действие S_j -пыльцы, в результате чего в некоторых случаях она становится способной оплодотворять яйцеклетки $hirsutum$. Возможно также, что в пестиках $hirsutum$ вся пыльца гетерозиготы S_iS_j имеет единую реакцию. Очевидно, это достигается тем, что под влиянием аллеля S_i усиливается аллель S_j , а под влиянием S_j ослабляется S_i . Однако при единой реакции пыльцы гибридов в потомстве от возвратного скрещивания $hirsutum \times F_1$ мы должны были иметь равное количество самосовместимых и самонесовместимых растений. Между тем наблюдается значительный избыток класса самонесовместимых растений. По-видимому, это свидетельствует о том, что многие S_j -несущие растения, имея в своем генотипе больше генетического материала самонесовместимого $hirsutum$, проявляют реакцию самостерильности.

НИИ земледелия МСХ Армянской ССР

Ա. Մ. ԱՂՍՋԱՆՅԱՆ

S-ալելների գործունեությունը *Lycopersicon hirsutum*-ի ներտեսակային հիբրիդների հետադարձ խաչաձևումների ժամանակ

Հոդվածում քննարկվում են *L. hirsutum* f. *glabratum* $\times$ *L. hirsutum* f. *hirsutum* ներտեսակային հիբրիդների հետադարձ խաչաձևումների ուսումնասիրության արդյունքները բոլոր չորս հնարավոր ուղղություններով: Ստացված տվյալները ցույց են տալիս, որ այդ հիբրիդներում նկատվում է S-ալելների ակտիվության փոփոխություն:

Ենթադրվում է, որ *glabratum* $\times$ *hirsutum* հիբրիդներում S_i -ալելների ազդեցության տակ ուժեղանում է S_j -ժաղկափոշու գործունեությունը, որի հետևանքով այն ընդունակ է լինում որոշ դեպքերում բնականորեն *hirsutum*-ի ձվաբջիջները: Հնարավոր է, որ *hirsutum*-ի վարսանդներում S_iS_j հետերոզիգոտային ամբողջ ժախկափոշին ունի միասնական ռեակցիա: Հավանաբար դա հետևանք է այն բանի, որ S_i -ալելի ազդեցության տակ ուժեղանում է S_j -ալելը, իսկ S_j -ի ազդեցության տակ թուլանում է S_i -ն: Սակայն հիբրիդների ժաղկափոշու միասնական ռեակցիայի դեպքում *hirsutum* $\times$ F_1 հետադարձ խաչաձևումից ստացված սերնդում ինքնաֆերտիլ և ինքնաստերիլ բույսերի քանակը պետք է հավասար լինի, մինչ դեռ նկատվում է ինքնաստերիլ բույսերի զգալի ավելցուկ: Հավանաբար դա վկայում է այն մասին, որ S_j -ակիր շատ բույսեր իրենց գենոտիպում ունենալով ինքնաանհամատեղելի *hirsutum*-ի գենետիկական նյութի ավելի մեծ քանակ, ցուցաբերում են ինքնաստերիլության ռեակցիա:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. М. Агаджанян, Биол. журн. Армении, т. 33, № 7 (1980). ² D. C. McGuire, C. M. Rick, Hilgardia, vol. 23, № 4, (1954). ³ F. W. Martin, Genetics, vol. 56, № 4 (1967). ⁴ J. J. Haddon, Genetics, vol. 57, № 4 (1967). ⁵ А. М. Агаджанян, Биол. журн. Армении, т. 25, № 5 (1972). ⁶ А. М. Агаджанян, Биол. журн. Армении, т. 31, № 12 (1978). ⁷ А. М. Агаджанян, Генетика, т. 16, № 3 (1980). ⁸ D. Lewis, L. K. Crowe, Heredity, vol. 12, № 2 (1958). ⁹ M. M. F. Abdalla, Agric. Res. Rep., 748 (1970). ¹⁰ M. M. F. Abdalla, J. G. Th. Hermesen, Euphytica, vol. 21, № 1 (1972).

